超弦理論の非摂動的性質と次元をめぐる近年の展開

橋本 幸士
Koji HASHIMOTO[1]

September, 1996

[1] e-mail address : hasshan@gauge.scphys.kyoto-u.ac.jp

Abstract

過去一年間において超弦理論の非摂動的性質は飛躍的に理解が進んだ。ここでは D-brane、特に type II 超弦理論の強結合と 11 次元（M-theory）、12 次元（F-theory）の関係について review を行なう。

目 次

Chapter 1

Introduction

この世界は４次元ミンコフスキー空間 M_4 と内部空間でなっていることは誰もが認める事実であるが、それが何故であるかを説明した物理学者は未だかつていない。（哲学者は別である。）次元の概念の解明は物理学、特に素粒子物理学の究極の目的の一つとも言える。そこへ至るステップは現在の物理学の進む大きな流れであるが、今盛んに研究されている大統一理論そして重力をも統一するとして期待される理論の候補として超弦理論がある。

超弦理論はその弦の張る世界面 (world sheet) における一般座標変換の anomaly-freeness を要請するため target space の次元は 10 であるという性格を持つ。これをして物理学者たちは compact 化という概念を Kaluza-Klein(KK)[1]の時代から復活させるが、摂動論的にしか定義されていない超弦理論は次元 10 で安定であり、compact 化の機構は解明されていない。この問題は超弦理論の非摂動的定式化によって明らかにされると考えられている。

一昨年（1994 年）後半あたりから、量子場の理論における非摂動的性質が明らかにされてきた。Seiberg と Witten は [1] $\mathcal{N}=2$ SUSY QCD の非摂動的性質を duality を用いて厳密に解き、$\mathcal{N}=1$ SUSY QCD (Seiberg ら [2]) や $\mathcal{N}=4$ への理解もこれと結び付きながら現在まで発展が続いている。その発展の元になったのは言うまでもなく $\mathcal{N}=4$ Montonen-Olive[3] に始まる duality conjecture である。これは証明されてはいない事柄ではあるが、この conjecture に基づく理論の解明は SUSY algebra という武器を用いて consistent に展開されている。

超弦理論とこれらの４次元超対称場の理論との間にはつながりがあり、また超弦理論における duality 構造も 1994 年の Hull and Townsend の論文 [22] にまとめられているように conjecture も含めて解明整理されつつあって、その後 Witten らの仕事 [6] により相互にからみつつ発展することになった。

Strong-weak (coupling) duality の性格は主に、強結合で基本的であると思われる状態が弱結合では古典解 (soliton) として現れ、それと基本粒子を入れ替える対称性として知られている。超弦理論の場合は soliton はその低エネルギー有効作用である SUGRA の soliton 解 [7] つまり一般には metric が発散する点を持つ black hole として記述される。この black hole を量子論的に記述する可能性として D-brane [8] が提案された。この理解によりこの 1

[1]Einstein もこの考えを絶賛したらしい。

年間、D-brane として現れる強結合で基本的な state の理解が進んだ。詳細は section 2 に review する。

D-brane は extended object であるが、それを fundamental として量子論が構成できたとすると、その canonical dimension は 10 であるとは限らないであろう。実際 supermembrane は 11 次元で formulate されると考えられている。超弦理論に duality 構造があり、それは D-brane の様な extended object を基本的に扱うものだとすると、必然的に 10 次元以外の次元との関わりが重要になってくる。

昨年三月、SUGRA の対称性と SUSY algebra の性質を使うことで、超弦理論の強結合極限における massless 粒子が 11 次元からの KK mode として記述される可能性が指摘された [5] 。11 次元 SUGRA の存在は古くから知られており、その研究ともあいまって (supermembrane)、超弦理論の大本となる理論（M-theory [9] ）の存在の可能性が探求されている。

更に 11 次元より上の次元の可能性も探られており、特に type IIB 超弦理論の $SL(2,\mathbb{Z})$ S-duality の幾何学的理解として生まれたのが 12 次元の F-theory [10] である。これらについては section 3 で取り扱う。

このような発展を通じて、M-theory, F-theory という見地から見直すことによって超弦理論の duality 構造は透徹的に調べられたわけだが、さて D-brane とこれら M-theory, F-theory（もしくは 11,12 次元）の間にはどのような関係があるのだろうか。その解明の一端として、D-brane を effective に記述する D-brane action と、Nambu-Goto 型 action の、dual としての関係の研究が進んでいる。ここでは超弦理論の非摂動的性質を担う D-brane とそれに characteristic な次元が明かにされ、次元という問題に光明が与えられている。これを section 4 で詳述する。

これらの理解は劇的に進展しているが、これからの問題もまだたくさん残っている。これらについての discussion を section 5 で行なう。

Chapter 2

D-brane

D-brane は、Dirichlet boundary condition を持つ open string の端点の集合として定義される hyperplane である。つまり、world sheet の σ と τ を入れ替えてみると、D-brane は string を emit する、つまり string の source と見なされるものである。ここでは何故 D-brane が注目されるか、また D-brane の登場によっていかに string duality が consistent に展開されたかを見る。

2.1 R-R charge の問題

超弦理論における問題の一つに、string spectrum の中には Ramond-Rmamond (R-R) gauge field に対応する charge を持つ状態がないという事がある。これは後で述べるように、type IIB の string theory が持つ S-duality conjecture と相容れない様に見え、string duality の理解の困難と考えられてきた。

まず、問題を説明しよう。Type II string theory (closed super string) の massless states は、$SO(1,9) \supset SO(8)$ の light-cone gauge で

$$
\begin{array}{ll}
 & \quad\ \ \text{NS} \quad\ \ \text{R} \qquad\ \ \text{NS} \quad\ \ \text{R} \\
\text{Type IIA} & (\mathbf{8_v} \oplus \mathbf{8_s}) \otimes (\mathbf{8_v} \oplus \mathbf{8_c}) \\
\text{Type IIB} & (\mathbf{8_v} \oplus \mathbf{8_s}) \otimes (\mathbf{8_v} \oplus \mathbf{8_s})
\end{array}
\tag{2.1}
$$

となっている。これから作られる boson は NS-NS sector と R-R sector にあり、その内容はまず NS-NS sector は

$$
\text{IIA,IIB} \quad (\mathbf{8_v} \otimes \mathbf{8_v}) \;=\; \phi \oplus B^{(1)}_{\mu\nu} \oplus G_{\mu\nu} \;=\; \mathbf{1} \oplus \mathbf{28} \oplus \mathbf{35} \tag{2.2}
$$

であり、また R-R sector は

$$
\begin{array}{lllll}
\text{IIA} & (\mathbf{8_s} \otimes \mathbf{8_c}) & = & A_\mu \oplus A_{\mu\nu\rho} & = \ \ \underset{[1]}{\mathbf{8_v}} \oplus \underset{[3]}{\mathbf{56_v}} \\
\text{IIB} & (\mathbf{8_s} \otimes \mathbf{8_s}) & = & \chi \oplus B^{(2)}_{\mu\nu} \oplus A^{(+)}_{\mu\nu\rho\sigma} & = \ \ \underset{[0]}{\mathbf{1}} \oplus \underset{[2]}{\mathbf{28}} \oplus \underset{[4]}{\mathbf{35}^{(+)}}
\end{array}
\tag{2.3}
$$

となる。$[i]$ は i 階反対称 tensor 表現を表す。gauge 場は、NS-NS sector の anti-symmetric $B_{\mu\nu}$ に加えて、IIA では $A_\mu, A_{\mu\nu\rho}$(odd forms)、IIB では $B^{(2)}_{\mu\nu}, A^{(+)}_{\mu\nu\rho\sigma}$(even forms) の二つがある。

このR-R sector の gauge boson との相互作用を与える string の vertex operator を考えよう。Ramond sector は一般に space-time fermion に対応しており、その vertex operator は

$$V_{fermion} = \Sigma_{\frac{1}{2}} \bar{u}^\alpha \Theta_\alpha e^{ikx} \tag{2.4}$$

の形をしている。ここで

$$\begin{cases} \Theta_\alpha & : \ \mathrm{SO(1,9)}\ 16\ \text{次元 spinor} \\ \Sigma_{\frac{1}{2}} & : \ \text{ghost} \\ u^\alpha & : \ \text{波動関数} \end{cases} \tag{2.5}$$

であり、これにより R-R gauge field は

$$V_{RR} \sim \Theta_\alpha \tilde{\Theta}_\beta \tag{2.6}$$

つまりこれに couple する background field を用いて vertex operator は

$$\Theta_\alpha \tilde{\Theta}_\beta F^{\alpha\beta}(X) \tag{2.7}$$

と作られる。この $F^{\alpha\beta}(X)$ は spinor の足を二つ持っているので、vector の足に書き換えることが出来る。つまりこの vertex operator は bosonic field を表している。Clifford 代数の基底

$$\gamma^{[\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n]} \tag{2.8}$$

が完全系を張っている事から、これで $\alpha\beta$ の足を展開すると

$$F^{\alpha\beta}(X) = \sum_n (\gamma^{[\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n]})^\alpha_{\ \gamma} C^{\gamma\beta} F_{[\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n]} \tag{2.9}$$

（ここで C は charge conjugation。Θ_α と $\tilde{\Theta}_\beta$ は同じ足を持っているので一方を複素共役にしなければばならない）となる。いま covariant に考えているので、physical condition

$$F_0 \cdot V_{RR} = 0 \tag{2.10}$$

$$\tilde{F}_0 \cdot V_{RR} = 0 \tag{2.11}$$

を課さなくてはいけない。F_0 の zero mode は

$$F_0 = \sum_n \alpha_{-n} \cdot d_n \quad \sim p^\mu d_{0\mu} \tag{2.12}$$

の形であり、$\{d_{0\mu}, d_{0\nu}\} = \eta_{\mu\nu}$ より $d_{0\mu} \sim \gamma_\mu$ と考えると

$$\begin{aligned} F_0 \cdot V_{RR} = 0 \ &\Rightarrow \ \gamma^\nu \gamma^{[\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n]} \partial_\nu F_{[\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n]} = 0 \\ &\Rightarrow \ \gamma^{[\nu,\mu_1,\cdots,\mu_n]} + \textstyle\sum_{i=1}^n \eta^{\nu\mu_i} \gamma^{[\mu_1,\cdots,\hat{\mu}_i,\cdots,\mu_n]} (-1)^{i-1} \partial_\nu F = 0 \end{aligned} \tag{2.13}$$

(2.11) も同様にし、(2.10) と (2.11) をまとめて整理すると

$$\begin{cases} \gamma^{[\nu,\mu_1,\cdots,\mu_n]} p_\nu F_{[\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n]} = 0 \\ \sum_{i=1}^n (-1)^i \gamma^{[\mu_1,\cdots,\hat{\mu_i},\cdots,\mu_n]} p^{\mu_i} F_{[\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n]} = 0 \end{cases} \tag{2.14}$$

つまり、

$$\begin{cases} dF = 0 & \text{(Bianchi identity)} \\ d * F = 0 & \text{(equation of motion)} \end{cases} \tag{2.15}$$

これらより、F は field strength である。これは実際 vector の足の数とも一致している：$\Theta\tilde{\Theta}$ は

$$\begin{cases} \text{IIA (opposite handedness)} & \rightarrow \mathbf{16} \times \bar{\mathbf{16}} = & \underset{[0]}{\mathbf{1}} + \underset{[2]}{\mathbf{45}} + \underset{[4]}{\mathbf{210}} \\ \text{IIB (same handedness)} & \rightarrow \mathbf{16} \times \mathbf{16} = & \underset{[1]}{\mathbf{10}_s} + \underset{[3]}{\mathbf{120}_a} + \underset{[5]}{\mathbf{126}_s} \end{cases} \tag{2.16}$$

であり、F を field strength と見ると上の (2.2),(2.3) と IIA、IIB それぞれの場合足の数が合っている。

これから分かることは、R-R gauge bosons は、field strength の形で vertex operator に入っているので、charged states を表現することが出来ないということである。つまり background fields の Low Energy Effective Action (LEEA) を string からいくら書いても、charged states を表す field を入れることが出来ない。fundamental string には RR charged states は入りようがないのである。

さてこのことは、type IIB string の場合 S-duality conjecture と相容れないことを示そう。IIB の LEEA は、$F_{\mu\nu\rho\sigma} = 0$ と置くと

$$S = \int d^{10}x \sqrt{-G} (R(G) + \frac{1}{4} \mathrm{tr}(\partial M \partial M^{-1}) - \frac{1}{12} H^T M H \tag{2.17}$$

$$\begin{cases} M = e^\phi \begin{pmatrix} |\tau|^2 & \chi \\ \chi & 1 \end{pmatrix}, \quad H = dB = d \begin{pmatrix} B^{(1)} \\ B^{(2)} \end{pmatrix} \\ \tau := \chi + i e^{-\phi} \end{cases} \tag{2.18}$$

である [11]。この action は、

$$\tau \mapsto \frac{a\tau + b}{c\tau + d}\ , B^{(1)} \mapsto dB^{(1)} - cB^{(2)}, B^{(2)} \mapsto aB^{(2)} - bB^{(1)} \tag{2.19}$$

$$\left(M \mapsto \Lambda M \Lambda^T, \quad B \mapsto (\Lambda^T)^{-1} B, \ \Lambda = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \right) \tag{2.20}$$

で不変である。（Λ が $SL(2,\mathbb{R})$ に入っているときのみ変換が components ϕ, χ で書き下せる。）

これによれば、例えば $a = d = 0, b = -c = 1$ とすると $\chi = 0$ では

$$e^{-\phi} \mapsto e^{\phi} \tag{2.21}$$

となり strong-weak coupling duality となっている。このとき

$$B^{(1)} \mapsto B^{(2)}, \qquad B^{(2)} \mapsto -B^{(1)} \tag{2.22}$$

であって、$B^{(1)}$ と $B^{(2)}$、 つまり 2-form gauge field については NS-NS と R-R、を入れ替える対称性になっている。

さて $B^{(1)}$ の方は、string σ-model の coupling （もしくは vertex operator）

$$B^{(1)}_{\mu\nu}\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \epsilon^{\alpha\beta} \tag{2.23}$$

でも分かるように charged states が存在する。これは例えば X^9 を compact 化すると $B^{(1)}_{\mu 9}$ は winding number ω に couple する gauge field になっている事からよく見える：

$$\begin{aligned} \text{interaction term} \ &\sim \oint B^{(1)}_{\mu 9}\omega \partial X^\mu \\ &= \omega \oint B^{(1)}_{\mu 9}\partial X^\mu \end{aligned} \tag{2.24}$$

一方 $B^{(2)}$ の方は上で見たように fieldstrength $F_{\mu\nu}$ で couple するため charged states がない。この不釣り合いは S-duality conjicture と相容れないのではないだろうか？

この解決策として D-brane が登場するのだが、それは section 2-3 で見ることにして、次ではまず D-brane の基礎をまとめる。

2.2 D-brane の導入

open bosonic string の境界条件を考えてみよう。action は closed string と同じで、（string theory の詳しい話は [12] を参照のこと）

$$S = -\frac{T}{2}\int d^2\sigma \eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu \tag{2.25}$$

（worldsheet metric は gauge 固定した。）この variation $X^\mu \to X^\mu + \delta X^\mu$により、

$$\delta S = T\int d^2\sigma \eta^{\alpha\beta}\delta X^\mu(\partial_\alpha\partial_\beta X_\mu) - T\int d\tau \Big[X'_\mu \delta X^\mu|_{\sigma=\pi} - X'_\mu \delta X^\mu|_{\sigma=0}\Big]. \tag{2.26}$$

第一項は通常の equation of motion $\Box X_\mu = 0$ を与えるが、第二項は boundary condition を与える term である。open string だと通常、$\sigma = 0$ と$\sigma = \pi$のδX_μは独立の variation と考えて

$$X'_\mu = 0 \qquad \text{for} \quad \sigma = 0 \ \text{ and } \ \pi \qquad \text{(Neumann type, 略して N)} \tag{2.27}$$

と置くのだが、ここで

$$\delta X_\mu = 0 \qquad \text{for} \quad \sigma = 0 \quad \text{and} \quad \pi \qquad (\text{Dirichlet type, 略して D}) \tag{2.28}$$

という variation でも boundary term を消すことが出来ることに注目しよう。これは open string の端点が $X_\mu = C_\mu$という hypersurface 上に乗っていることを表している。通常の Neumann type が自由端であるのに対し Dirichlet type は固定端となっている。

これらの境界条件は open string に T-duality 変換を行なうと互いに移り変われるものになっている。closed string における T-duality 対称性は、X^{25} が torus に compact 化された closed bosonic string mass spectrum における

$$m^2 = \frac{1}{\alpha'}((\alpha_0^{25})^2 + (\tilde{\alpha}_0^{25})^2 + N + \tilde{N} - 2) \tag{2.29}$$

$$\begin{cases} \alpha_0^{25} = (\frac{n}{R} + \frac{mR}{\alpha'})\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \\ \tilde{\alpha}_0^{25} = (\frac{n}{R} - \frac{mR}{\alpha'})\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \end{cases} \tag{2.30}$$

で

$$R \longrightarrow \frac{\alpha'}{R} \qquad n \longleftrightarrow m \tag{2.31}$$

とできる対称性であるが、この変換により

$$\alpha_0^{25} \longrightarrow \alpha_0^{25}, \qquad \tilde{\alpha}_0^{25} \longrightarrow -\tilde{\alpha}_0^{25} \tag{2.32}$$

となることから、これは自明に拡張すれば

$$X^{25} \longrightarrow X^{25}, \qquad \tilde{X}^{25} \longrightarrow -\tilde{X}^{25} \tag{2.33}$$

となっている。さて、open string を形式的に left mover と right mover に分け、left mover に対してのみ負号を与えるという T-duality 変換を行なうと、（ゼロモード部分を注意してみよう）

$$\begin{aligned} X^{25}(z,\bar{z}) \longrightarrow \quad Q^{25}(z,\bar{z}) &:= X^{25}(z) - X^{25}(\bar{z}) \\ &= 2C - i\alpha' p^{25}\log(z/\bar{z}) + (\text{oscillators}) \\ &= 2C + 2\alpha' p^{25}\sigma + (\text{oscillators}) \end{aligned} \tag{2.34}$$

となる。（ここで、$z := e^{\tau + i\sigma}$ であり world sheet time は Euclidian にしている。）これは、oscillators 部分は $\sigma = 0, \pi$ で消えることから

$$\begin{cases} \sigma = 0 \text{ では} \quad Q = 2C \\ \sigma = \pi \text{では} \quad Q = 2C + 2\alpha' p^{25}\pi \\ \qquad\qquad\qquad = 2C + 2\pi\alpha'\frac{n}{R} \\ \qquad\qquad\qquad = 2C + 2\pi R' n \qquad (R' := \frac{\alpha'}{R} \quad : \text{dual radius}) \end{cases} \tag{2.35}$$

となっていて、時間によらず、まさに Dirichlet boundary condition である。今の compact 化している場合は丁度 dual な半径の分だけ離れた hyperspace 上、つまり一周したものを同一視すれば同じ hyperspace 上に端点が乗っていることになる。

D or N はμ によって選ぶことが出来ると考えられるから[1] μ の $0 \sim D-1$ のうち (D-p-1) 個が D-type、残りの (p+1) 個が N-type であるとする。+1 の部分は time component である。この様な hyperspace を D(irichlet)-p-brane とよぶ。p-brane の worldvolume は p+1 次元になっている。特に $p=1$ のものを D-string、 $p=0$ のものを D-particle、$p=-1$ のものを D-instanton とよぶ。

この導入の仕方から分かるように、本来 D-brane は動かない boundary の様なものであるが、D-brane 上には open string がくっついており、この open string の excitation によって D-brane が動くという風に考えられる。これは次のように見ることが出来る：

open string の vertex operator は Q で書き換えれば

$$\begin{cases} V_A = A_\mu(X)\partial_\tau X^\mu \\ V_\phi = \Phi_{25}(X)\partial_\sigma Q^{25} \quad (\partial_\sigma Q^{25} = \partial_\tau X^{25}) \end{cases} \tag{2.36}$$

で与えられる。この Φ gauge field の couple は通常通り open string の端点にσ-model-like に couple するので、

$$S_{\text{int}} \sim \int_{\partial M} d\tau \Phi_{25}\partial_\sigma Q^{25} \qquad \text{for} \quad \Phi_{25}(X) = \Phi_{25} \quad (\text{const.}) \tag{2.37}$$

一方 Dirichlet boundary condition を与える自由度が丁度 Q で書き換えた action を用いて

$$\delta_D S \sim \int d\tau \delta Q_{25}\partial_\sigma Q^{25} \tag{2.38}$$

でまったく同一の形をしている。これは$\delta Q_{25} \sim \Phi_{25}$となっている、つまり open string の excitation が D-brane（Dirichlet boundary condition）を動かす方向に働いているということを示している。つまり D-brane は open string の振動により動き、open string の長さ$\sqrt{\alpha'}$程度の厚さを持っているということになる。ここで重要なのは

$$\begin{array}{c} \text{vertex operator を insert する（式 (2.36)）} \\ || \\ (\ \sigma\text{-model}\ ) \\ || \\ \text{boundary の fluctuation を量子化する（式 (2.38)）} \end{array} \tag{2.39}$$

という対応である。この手法により、通常σ-model から$\beta = 0$ を要請して低エネルギー SUGRA を得るのと同じ手続きで D-brane の effective action を導出することが出来る [31]（$\longrightarrow$ 4 章参照）。

上で Φ_{25} が D-24-brane の collective cordinate となっていることを見た。次の section で、type II には D-branes + open strings が含まれるらしいという証拠を挙げるが、そう考えると、D-brane は open string つまり type II の半分の SUSY の自由度のみをもって振動しているということになる。つまり D-brane はこの意味で BPS saturated state とよばれるのである。

[1] より正確には target space の base の取り方の自由度もある

2.3 R-R charged state としての D-brane

Polchinski は、以下に述べる計算を元に、次の conjecture を与えた [8]：「type II string theory の Hilbert space には open strings $\oplus$ D-branes という sector があり、この D-brane が R-R charge をもつ。」

これを見るために、

(1) D-brane が R-R charge を持つ。

(2) それが Dirac quantization の単位 charge に丁度なっている。

ということを示そう。

2.3.1 D-brane が R-R charge を持つこと

２つの平行な、次元 p を持つ同じ D-p-brane があるとき、その間において R-R gauge boson exchange が起こっている系の全体のエネルギーを計算してみよう。

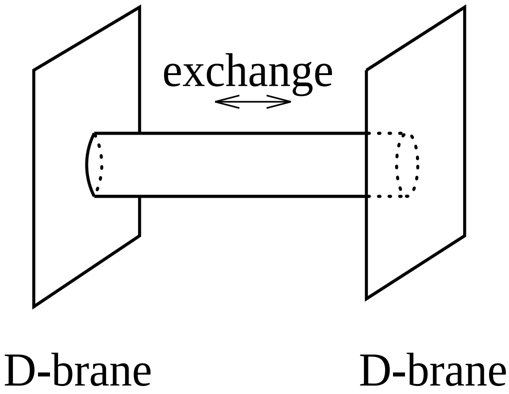


Figure 2.1: ２枚の D-brane の間を R-R gauge boson が exchange されている。

Closed string の伝播ではなく open string の one-loop と見ると、effective potential は

$$
\begin{aligned}
V_{\text{1-loop}} &= -\frac{1}{2}\log \mathrm{Det}((\text{propagator})^{-1}) &(2.40)\\
&= -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\log L_0 &(2.41)\\
&= -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\int_1^{L_0} du \;\; \frac{1}{u} &(2.42)\\
&= -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\int_1^{L_0} du \int_0^{\infty} dt \;\; e^{-tu} &(2.43)\\
&= -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\int_0^{\infty} dt \int_1^{L_0} du \;\; e^{-tu} &(2.44)
\end{aligned}
$$

$$= \quad -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\int_0^\infty dt\Big[\frac{1}{-t}e^{-tu}\Big]_1^{L_0} \tag{2.45}$$
$$= \quad -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\int_0^\infty dt\Big[\frac{1}{-t}e^{-tL_0} - \frac{1}{-t}e^{-t}\Big] \tag{2.46}$$
$$= \quad \mathrm{Tr}\int_0^\infty \frac{dt}{2t}e^{-tL_0} - \mathrm{Tr}\frac{1}{2}\Gamma(0) \tag{2.47}$$

この第二項は D-brane 間の距離 $\mathbf{r}$ に依存せず基底エネルギーをずらすだけなので今は無視する。

$t \to 2\pi t$ と積分変数（これは loop の円周を表している）を置きなおして、

$$L_0 = \alpha' \mathbf{k}^2 + \frac{|\mathbf{r}|^2}{4\pi^2\alpha'} + N \tag{2.48}$$

を用いる。ここで

$$N := \sum_{n=1}^\infty \alpha_{-n}^\mu \alpha_{n\mu} + \sum_{r=\frac{1}{2}}^\infty r b_{-r} b_r + \sum_{n=1}^\infty n d_{-n} d_n \tag{2.49}$$

であり、また

- open string は p-brane に端点を固定されているので、$\mathbf{k}$ は積分（ $\sum_{\mathrm{states}}$ ）では

$$\int \frac{d\mathbf{k}^{p+1}}{(2\pi)^{p+1}} \tag{2.50}$$

  とされるものである。

- L_0 中の $\mathbf{r}$ 依存性を示す

$$\frac{|\mathbf{r}|^2}{4\pi^2\alpha'} \tag{2.51}$$

  の factor は、D-brane 間の距離 $\mathbf{r}$ を interpolate する open string の mass に相当するもので、これは open string の Chan-Paton factor を考慮すると出てくる。詳しくは [13] を参照。

などから、

$$V \quad = \quad \int_0^\infty \frac{dt}{t}\sum_{\mathrm{states}} \exp\Big(-2\pi t(\alpha'\mathbf{k}^2 + \frac{|\mathbf{r}|^2}{2\pi} + N)\Big) \tag{2.52}$$
$$= \quad 2\int_0^\infty \frac{dt}{2\pi}V_{p+1}\frac{(\sqrt{\pi})^{p+1}}{(2\pi)^{p+1}}\Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi t\alpha'}}\Big)^{p+1}\sum_{\mathrm{states}} e^{-2\pi t N}\exp[-2\pi t(\frac{|\mathbf{r}|^2}{4\pi^2\alpha'})] \tag{2.53}$$

ここで、V_{p+1} は D-p-brane の world volume の体積（つまり open string の重心部分の積分）であり、また factor 2 は open string の左右の入れ替えである。$q := e^{-\pi t}$ とおき、$\sum_{\mathrm{states}}$

を実行すると([12])

$$\begin{aligned}\sum_{\text{states(NS)}} q^{2N} &= \left[\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})^{-8}\right] \\ &\quad \times\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{q}\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1})^{8}-\frac{1}{q}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1})^{8}\right\} \end{aligned} \tag{2.54}$$

$$\sum_{\text{states(R)}} q^{2N} = \left[\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})^{-8}\right]\times\left[\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})^{8}\times 8\right] \tag{2.55}$$

R-sector は fermion 1-loop なので -1 がかかり、

$$\sum_{\text{states}} q^{2N} = \sum_{\text{states(NS)}} q^{2N} - \sum_{\text{states(NR)}} q^{2N} \tag{2.56}$$

このうち closed string で見て R-R sector 部分の寄与は、GSO で $(-1)^F$ の部分、つまり $\sum_{\text{states(NS)}}$ の第二項のみであるので(GSO と R-R sector の関係は [14] 等に詳しい)

$$V_{R-R} = \int_0^{\infty}\frac{dt}{t}V_{p+1}(8\pi^2\alpha' t)^{-\frac{p+1}{2}}\left(\exp[\frac{-|\mathbf{r}|^2 t}{2\pi\alpha'}]\right)\left(-\frac{1}{2q}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left((1-q^{2n})^{-8}(1-q^{2n-1})^{8}\right) \tag{2.57}$$

いま open string 1-loop の形で積分が書かれているので、これを closed string で見るために modular 変換を行なう。

$$q' := e^{-\pi/t}, \qquad q := e^{-\pi t} \tag{2.58}$$

として

$$\begin{cases} f_1(q) := q^{1/12}\prod(1-q^{2n}) \\ f_4(q) := q^{-1/24}\prod(1-q^{2n-1}) \\ f_2(q) := \sqrt{2}q^{1/12}\prod(1+q^{2n}) \end{cases} \tag{2.59}$$

とすれば

$$f_1(q') = \sqrt{t}f_1(q) \tag{2.60}$$

$$f_4(q) = f_2(q') \tag{2.61}$$

が成立することから、これらを用いて

$$\begin{aligned} &\frac{1}{q}\prod(1-q^{2n})^{-8}(1-q^{2n-1})^{8} \\ &= f_1(q)^{-8}f_4(q)^{8} \\ &= t^4 f_1(q')-8f_2(q')^{8} \\ &= (2t)^4(1+16e^{-\pi/t}+\cdots) \end{aligned}$$

$t \to 0$ つまり long $|\mathbf{r}|$ limit での massless R-R gauge boson の寄与はこの括弧内の第一項だから、

$$\begin{aligned} \underset{\text{massless}}{V_{R-R}} &= \int_0^\infty \frac{dt}{t} V_{p+1} (8\pi^2\alpha' t)^{-\frac{p+1}{2}} \Big(\exp[\frac{-|\mathbf{r}|^2 t}{2\pi\alpha'}] \Big) \Big(-\frac{1}{2} \Big) (2t)^4 && (2.62) \\ &= \cdots \\ &= V_{p+1} 2\pi (4\pi^2\alpha')^{3-p} G_{9-p}(\mathbf{r}) && (2.63) \end{aligned}$$

ここで $G_{9-p}(\mathbf{r})$ は 9-p dimensional massless Green function で、

$$G_{9-p}(\mathbf{r}) := -\frac{1}{4}\pi^{\frac{p-9}{2}} \Gamma\Big(\frac{9-p}{2} - 1\Big) |\mathbf{r}|^{1-\frac{9-p}{2}} \tag{2.64}$$

である。これと、2 枚の D-brane（おのおの μ_p の charge をもつ）の間に働く potential

$$V_{p+1} \mu_p^2 G_{9-p}(\mathbf{r}) \tag{2.65}$$

を比べると

$$\mu_p = \sqrt{2\pi} (4\pi^2\alpha')^{\frac{3-p}{2}} \tag{2.66}$$

を得る。

2.3.2 Dirac quantization condition for extended objects

p-brane とその dual である 6-p-brane が同時に存在するためには、Dirac の条件を満足しなければならない。これを説明しよう [15]。

まず、p-brane 解に couple する（p-brane を source とする） p+1-form gauge 場 A_{p+1} に対して、gauge field strength

$$H_{p+2} := dA_{p+1} \tag{2.67}$$

は p-brane を source とする eqation of motion

$$*d * H_{p+2} = j_{p+1} \qquad (\leftrightarrow \quad \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu F_{\nu\rho} = j^\sigma) \tag{2.68}$$

を満たす。(( ) 内は空間が四次元で、$p = 0$ の時の対応。) これから、p-brane の全 charge μ_p は

$$\begin{aligned} \mu_p &= \int_{M^{9-p}} j_{p+1} d\omega_{9-p} && (2.69) \\ &= \int_{M^{9-p}} d * H_{p+2} && (2.70) \\ &= \int_{S^{8-p}} *H_{p+2} \quad (\leftrightarrow \quad Q = \int j^0 d^3x = \int_{S^2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}) && (2.71) \end{aligned}$$

ここで最後の等式では Stokes の定理を用いた（$\partial M^{9-p}=S^{8-p}$）。

さて dual の 6-p-brane を p-brane のまわりに S^{7-p} に沿って一周させる。すると 6-p-brane の波動関数は位相をかせぎ、それは

$$\exp\left(i\mu_{6-p}\oint_{S^{7-p}}A_{7-p}\right) = \exp\left(i\mu_{6-p}\oint_{B^{(1)\mathrm{or}(2)}_{8-p}}H_{8-p}\right) \tag{2.72}$$

$$= \exp\left(i\mu_{6-p}\oint_{B^{(1)\mathrm{or}(2)}_{8-p}}*H_{p+2}\right) \tag{2.73}$$

ここで path と $B^{(1)}_{8-p},B^{(2)}_{8-p}$ は下の図の通りである。

$B^{(1)}_{8-p}$ も $B^{(2)}_{8-p}$ もかせぐ位相は同じのはずなので、

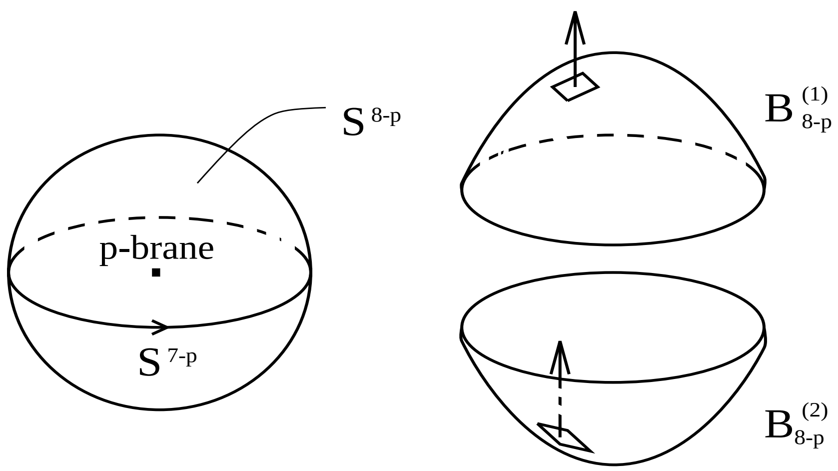
$$\mu_{6-p}\oint_{B^{(1)}_{8-p}}*H_{p+2}=\mu_{6-p}\oint_{B^{(2)}_{8-p}}*H_{p+2}+2\pi n \qquad (n\in\mathbb{Z}) \tag{2.74}$$

でなくてはならない。$B^{(1)}-B^{(2)}=S^{8-p}$ に注意して、(2.71) を用いればこれから

$$\mu_p\mu_{6-p}=2\pi n \tag{2.75}$$

を得る。これが quantization condition である。

さて D-p-brane charge (2.66) は実際この式の $n=1$ の場合を満足しており、この完全な合致から、D-brane が R-R charge を持っていると結論できる。



2.4 まとめ

S-duality を持つ type IIB 理論において、NS-NS charge を持つ string に S-dual なのは、この議論から R-R charge を持つ D-string なのではないかと期待できるが、すると type IIB 理論には Dirichlet boundary condition を持つ open string の sector があるということになる。これから、Polchinski の conjecture が出てくるのである。

S-duality 自体は strong $\leftrightarrow$ weak duality であるので、示されたわけではないが、Polchinski はこの計算から、R-R charged states は strong coupling で fundamental になる D-brane であるということで問題に解決の方向を与えたのである。

この様に D-brane は duality を見るうえで重要な基本要素であり、超弦理論の非摂動的、つまり強結合領域を量子論的に記述する可能性がこの D-brane によって明らかになってきたわけだが、次の第 3 章では、超弦理論の low energy SUGRA の観点から、その強結合領域は 10 次元でない次元を示唆している事を見る。また第 4 章で、この 10 次元でない理論と D-brane との関係を調べていくことにする。

Chapter 3

11 次元、12 次元

この章では、10 次元が臨界次元だと言われている超弦理論から、どのようにして 11 次元、12 次元という考え方が出てくるかを見てみよう。これらの考察は主に string の LEEA である 10 次元 SUGRA から来ているのであるが（実際 conjecture としての type IIB string の $SL(2,\mathbb{Z})$ S-duality は IIB SUGRA の対称性 $SL(2,\mathbb{R})$ から生まれている）、SUGRA の範疇を超えて 11 次元、12 次元を与える microscopic な quantum theory （M-theory[1]、F-theory[2]）を探求する段階まで現在発展している。

以下で見るように、未だ SUGRA からの示唆以外の証拠は少なく、これら M,F の理論を只の架空の存在とし、SUGRA の真空を知るもしくは duality を明解に見る道具だてとしか見ない研究者もいる。しかし第 4 章で D-brane と M、F-theory とのつながりを見るように、全く microscopic theory が無いとは未だ一概には言えないのである。

3-1 では M-theory（11 次元）、3-2 では F-theory（12 次元）をおもに SUGRA の観点から見ていくことにしよう。

3.1 M-theory

この節では、色々な string 理論（特に Type IIA theory や heterotic $E_8 \times E_8$ theory）とその間の duality を包括する可能性を持つ 11 次元 'M-theory' について述べる。

[1]余談であるが、M という名を与えたのは Witten である（paper では Schwarz のもので初出。）。これは membrane の M であろうが、後日 Witten の出した paper にはこの M は各自お好みで解釈して良い、とある。例えば Miraculous 等であろうか。

[2]一方 F は Vafa が与えたが、これは M を Mother とすれば Father があっても良いという判断であったらしい。

3.1.1 Why 11 dimension?

M-theory とは、11 次元 SUGRA を低エネルギーで与えるような quantum theory である（と世の中では定義されているようである）。しかし何故このような考え方が現れてくるか、更に、string theory の枠組みの中でどの様に 11 次元が現れてくるのであろうか。

11 次元 SUGRA 自体は、1978 年に Nahm が予言し [16] Cremmer, Julia and Scherk が実際に構成した [17]。ここで Nahm が議論している、11 次元が maximal であるという話は、d 次元の理論を 4 次元に compact 化して落としたときに最も多く SUSY を残す compact 空間の形（具体的には Tori などの flat compact space）で SUSY が $\mathcal{N}=8$ を越えてはならないという要請から来る。$\mathcal{N}=8$ を越えると 1 つの supermultiplet の中に spin$\frac{5}{2}$ 以上の粒子が含まれてしまいこの場合 consistent な理論が出来ないのである。[3]

4 次元の Supercharge Q は、表現次元 4(real) であるから、$\mathcal{N}=8$ を最大とすると $4\times 8=32$ 次元 spinpr 表現が最大となる。つまり、ある次元 d の $\mathcal{N}=1$ SUGRA を考えた際その Lorenz spinor の次元が（Majorana や Weyl 等を課した後の既約表現として）32 を越えると、$d=4$ に落とした際 $\mathcal{N}=8$ を越えてしまう。

この議論から考えると、$d=11$（ Lorenz 群は $SO(1,10)$ ）での Majorana spinor （ real 32 次元）表現が最大となる。$d=12$（ $SO(1,11)$ ）になると Majorana （もしくは Chiral ）spinor が 64 次元となりこの要請を越えてしまう。[4]

さて、この 11 次元 SUGRA を 10 次元に S^1 で dimensional reduction すると type IIA の SUGRA が得られることが知られている[5]。type IIA は non-chiral であり、違う表現に入る spinor supercharge をもっているが、これは

$$\mathbf{32}=\mathbf{16}+\tilde{\mathbf{16}} \qquad \text{under} \quad SO(1,10)\supset SO(1,9) \tag{3.1}$$

と分解されることからも分かる。この dimensional reduction で、元々11 次元にあった SUSY 代数

$$\{Q,Q\}\sim P_M \tag{3.2}$$

は次の形に分解される：

$$\{Q,Q\}\sim\{Q',Q'\}\sim P_m \tag{3.3}$$

$$\{Q,Q'\}\sim W \tag{3.4}$$

ここで W は $\mathcal{N}=2$ SUSY の central charge であるが、これは元々 P_M の compact 化された成分 P_{10} （11 次元目）である。この central charge W を与える gauge 場は、この

[3] flat でない空間で compact 化すると一般に covariantly constant な spinor が定義できず SUSY は減る。このように考えると、この $d\le 11$ という要請は強いものではないと考えることも出来る。実際、10 次元で string theory を構成してそこから現象論的に認められる 4 次元の effective GUT を考えるときは、SUSY を $\mathcal{N}=1$ にするために $SU(3)$ ホロノミーを持つ多様体で compact 化する [18]。第一 Chern 類が 0 である多様体は一般に $SU(N)$ ホロノミーを持つ事が証明されており (Calabi-Yau)、この多様体を Calabi-Yau 多様体という。

[4] 12 次元であっても negative signature が 2、つまり Lorenz 群が $SO(2,10)$ の場合は Majorana-Weyl condition を置くことが出来るので、real 32 次元を実現することが出来る。詳しくは [19] の Appendix を見るとよい。

[5] 以下この節の議論は [5] のものである。

ことから分かるように 11 次元の metric tensor G_{MN} （ coupled to the charge P_M ）を dimmensional reduction した $G_{m10} =: A_m$ の charge である。一方 11 次元 SUGRA action を 10 次元に dimmensional reduction し、それを type IIA の 低エネルギー SUGRA と比較すると、この A_m は丁度 R-R sector の 1-form gauge field に対応していることが分かる（後述)。つまり central charge は section 2 で説明した R-R charge であるので、elementary string spectrum に出てこない charge になっているのである。

central charge を持つ状態については Bogomol'nyi bound と呼ばれる inequality

$$M \geq c_0|W| \tag{3.5}$$

が代数的に導かれる。この不等号のうち等号が成立する（つまり saturate する）状態を BPS saturated states と呼び、これは代数の議論から massless states と同じ short SUSY multiplets に入ることが分かる。また、この等式は代数関係式であるから、等号は量子補整を受けない。つまり等号は strong coupling でも成立すると期待される。

$W = p_{11}$は Kaluza-Klein(KK) と考えれば discretize され、charge を mass と読み変えるために上式 (3.5) で BPS saturated と仮定すれば

$$m = c_0 \times \text{integer} \tag{3.6}$$

となる。ここで c_0 は理論から決まる定数であるが、以下の計算から具体的に

$$c_0 \sim \frac{1}{\lambda} \qquad \lambda : \text{string coupling} \tag{3.7}$$

と与えられる。[6] これは$\lambda \to 0$ の weak limit で、$m \to \infty$ となり、subsection 2-1 で elementary string states に R-R charged states が存在しないという事実と consistent である。つまり、R-R chargd states が見えない理由は、それが KK として 11 次元から降ってくる state であり、 BPS bound が weak string coupling で発散してしまうということなのである。

以上の議論で仮定したのは式 (3.7) であるが、それを見るために実際に SUGRA を compact 化してみよう。 11 次元 SUGRA の bosonic part は

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2\kappa^2}eR(G^{(11)}) - \frac{1}{48}eF^2_{MNPQ} - \frac{\sqrt{2}\kappa}{3456}\epsilon^{M_1\ldots M_{11}}F_{M_1\ldots M_4}F_{M_5\ldots M_8}A^{(3)}_{M_9M_{10}M_{11}} \tag{3.8}$$

ここで

$$F := dA^{(3)} \tag{3.9}$$

である。これを次のように compact 化する:

$$ds^2 = G^{(10)}_{mn}dx^m dx^n + e^{2\gamma}(dx^{10} - A_m dx^m)^2 \tag{3.10}$$

[6] $\frac{1}{\lambda} \sim m$ は section 4-2 での D-brane action から分かるように D-brane に characteristic な mass（tension）を持つ状態 (R-R charged states として）と認識される。

これは fiervein

$$e^r_M = \begin{pmatrix} e^r_m & -e^\gamma A_m \\ 0 & e^\gamma \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

と置くことに対応している。つまり S^1の半径 r は

$$2\pi r \sim e^\gamma \tag{3.12}$$

となっている。この metric を代入し、

$$B_{mn} := A^{(3)}_{mn10} \tag{3.13}$$

と置き、更に $D=10$ での Weyl rescaling

$$G^{(10)}_{mn} = e^{-\gamma} g_{mn} \tag{3.14}$$

を施すと、次の公式を使って

$$\begin{cases} R(G^{(10)}) = e^\gamma[R(g) - \frac{1}{2}(D-1)\nabla^2\gamma - (D-1)(D-2)(\nabla\gamma)^2] \\ \sqrt{\det(G^{(10)}_{mn})} = e^{-5\gamma}\sqrt{\det(g_{mn})} \end{cases} \tag{3.15}$$

以下の Lagrangian を得る（数係数は重要でないので略す）:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}[\sqrt{g}\{e^{-3\gamma}(R(g) + (H_{mnp})^2 + (\nabla\gamma)^2)\} - F^2_{mn} + F^2_{mnpq}] \tag{3.16}$$

ここで type IIA の低エネルギー SUGRA と比較すると、次の置き換え

$$\phi := \frac{3}{2}\gamma \tag{3.17}$$

をすることで通常のものと一致することが分かる。結局、11 次元 SUGRA を

$$ds^2 = e^{-\frac{2}{3}\phi} g_{mn} dx^m dx^n + e^{\frac{4}{3}\phi}(dx^{10} - A_m dx^m)^2 \tag{3.18}$$

と compact 化すれば type IIA SUGRA を再現することになる。

この compact 化で得られる関係式 (3.17) を用いて、KK mass を考えてみよう。

$$\text{mass} \quad M \sim \frac{1}{r} \sim \frac{1}{e^\gamma} \tag{3.19}$$

これは Einstein metric なので、10 次元 string metric で見直すと、(3.14) を用いて

$$M = \sqrt{G^{mn}p_m p_n} = \sqrt{e^\gamma g^{mn} p_m p_n} = e^{\frac{\gamma}{2}} m \tag{3.20}$$

ここで m は string metric で見た mass である。よって (3.17) を使えば

$$m \sim e^{-\frac{\gamma}{2}} M = e^{-\frac{3\gamma}{2}} = e^{-\phi} = \frac{1}{\lambda} \tag{3.21}$$

となり、上で述べた事実（式 (3.7)）を与えることになった。

ところで、このことはblack hole (soliton) 解 [7] とも consistent になっていることを見てみよう。Charged black hole soliton は Reissner-Nordström black hole と呼ばれるが、解の consistency から bound

$$GM^2 \geq \text{const.}W^2 \tag{3.22}$$

が導かれる。ここで G は gravitational (Newton) coupling であり、string との対応から

$$G = \lambda^2 \tag{3.23}$$

であるからこれを代入すると

$$M \geq \frac{c}{\lambda}|W| \tag{3.24}$$

となり $\frac{1}{\lambda}$ のスケールを出す。この式を saturate するときにその black hole は soliton として理論の丁度半分の SUSY を破っている事を示すことが出来る（詳しくは [20]）。この意味で上の bound の式は BPS bound であると認識できる。つまり、R-R charge をもつ soliton 解も、BPS bound と同じ意味の mass bound を持っており、以上の KK の議論は soliton 解の観点からも正当化されている。

これらの計算から分かるのは、

$$\text{strongly coupled type IIA SUGRA} = \text{ 11 dim. SUGRA} \tag{3.25}$$

という図式である。これから、type IIA string の strong coupling では 11 次元 M-theory というものが存在し対応しているという考えが出てくるわけである。$\lambda \to \infty$ で massless になる、BPS saturated massless states は、実際 (3.6) で見ると integer の分で無限個ある。この、strong coupling で無限個出てくる massless 粒子は何を表しているのだろうか？これは次のように考えると理解できる —「strong coupling では無限個の local 対称性 が復活する—つまり reparametrization invariance が生成される[7] 、すなわち string が membrane になる。」

この membrane の話は 3-1-4 で見ることにして、まず先に、この 11 次元 SUGRA limit がもっと下に compact 化した 9 次元以下の SUGRA の Moduli space のある limit としてもきちんと登場することを次に紹介する。

3.1.2 Witten による SUGRA 真空の考察

Witten は上の議論を経て、type II を更に compact 化した $d \leq 9$ における Moduli space の構造を考察した [5]。

type II string の Moduli space とは、compact 化する部分の空間の構造とそれに加えて string coupling、これらの値の空間である。compact 化された部分の空間の Moduli parameters G_{ij}, B_{ij} には自然に T-duality group T が作用する。これに coupling を動かす S-duality

[7] 3D diffeomorphism = $\infty \times$ 2D diffeomorphism

(type IIB に 10 次元であったもの) の generator も加えると、T と S 全体で U-duality group $U(\mathbb{Z})$ をなすことになる。一般に type II string の Moduli space は

$$U(\mathbb{Z})\backslash U/K \tag{3.26}$$

(ここで K は U の maximal compact subgroup) で与えられることが分かっている。つまり、U/K 上の座標として$< G_{ij} >, < B_{ij} >, < \phi >$ 等が与えられる、というわけである。U は non-compact group で、その rank は

$$\mathrm{rank}(U) = 11 - d \quad (= (10-d)+1) \tag{3.27}$$

つまり、丁度 dim. of compactified space + direction of changing coupling constant の数に一致している。Moduli space が $U(\mathbb{Z})$ で割ってあるのは、U のうち quantized charge lattice に act できる部分群 $U(\mathbb{Z})$ は全体の charge lattice を不変にするという意味で string 理論の (SUGRA の、では無く) 不変性になっていると思われるからである。

ここで各次元の U、K は Hull and Townsend [21] にまとめられている[8]:

d	SUGRA Duality Group U	String T-duality	Conjectured Full String Duality $U(\mathbb{Z})$
$10A$	$SO(1,1)/\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{1}$	$\mathbb{1}$
$10B$	$SL(2,\mathbb{R})$	$\mathbb{1}$	$SL(2,\mathbb{Z})$
9	$SL(2,\mathbb{R}) \times O(1,1)$	$\mathbb{Z}_2$	$SL(2,\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}_2$
8	$SL(3,\mathbb{R}) \times SL(2,\mathbb{R})$	$O(2,2;\mathbb{Z})$	$SL(3,\mathbb{Z}) \times SL(2,\mathbb{Z})$
7	$SL(5,\mathbb{R})$	$O(3,3;\mathbb{Z})$	$SL(5,\mathbb{Z})$
6	$O(5,5)$	$O(4,4;\mathbb{Z})$	$O(5,5;\mathbb{Z})$
5	$E_{6(6)}$	$O(5,5;\mathbb{Z})$	$E_{6(6)}(\mathbb{Z})$
4	$E_{7(7)}$	$O(6,6;\mathbb{Z})$	$E_{7(7)}(\mathbb{Z})$
3	$E_{8(8)}$	$O(7,7;\mathbb{Z})$	$E_{8(8)}(\mathbb{Z})$
2	$E_{9(9)}$	$O(8,8;\mathbb{Z})$	$E_{9(9)}(\mathbb{Z})$
1	$E_{10(10)}$	$O(9,9;\mathbb{Z})$	$E_{10(10)}(\mathbb{Z})$

Table type II の d 次元における duality group

Witten はこの classical Moduli space の無限遠の性質を調べ、本質的に次の 2 方向の limit しかない事を示した:

$$\begin{cases} \text{type II string の d-dimension への reduction の} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{weakly coupled SUGRA} \\ \text{11 次元 SUGRA の d-dimension への reduction} \end{cases} \tag{3.28}$$

この分類法は U 又は K の群論的構造と SUSY の central charge の構成法を使って作られたもので、ここに詳細は述べないが、手続きは以下の通りである。

[8] hep preprint の原表は誤りがあるので注意しよう

procedure 1: BPS states について、central charge（これはその次元の 1-form gauge fields の charge と 1 to 1 の対応がつく [23]）から mass への map を Moduli に依存する形で決定する：

$$m = Z(\psi) = g^{-1}\psi \tag{3.29}$$

ここで、

$$\begin{aligned} &m : \text{mass} \\ &\psi : \text{chage of 1-form gauge fields} \\ &Z : \text{central charge} \\ &g : \text{Moduli space の元} \ \in U/K \end{aligned} \tag{3.30}$$

procedure 2: g として、U の non-compact 1-parameter subgroup $\mathbb{R}^+$（parametrized by t）の元をとり、$t \to \infty$ で最も massless が多くなるような $\mathbb{R}^+$ の方向を決める。

procedure 3: この $\mathbb{R}^+$ の方向は本質的に上に述べた 2 種類になる。

procedure 4: 更に一般化すると、$\mathbb{R}^+$ の limitting process は d 次元の U group の Dynkin dyagram の一つの丸を消すことに対応しており、その操作の結果残る dyagram の group が、limitting で残る対称性であることが分かる。この group を他次元の U group と比較することにより、この limitting がどの様な方向であるかを決定できる。

分類結果については、$d = 4$ については Witten の原論文 [5]、また $d = 5 \sim 7$ については Hull の review[22] に掲載されている。[9]

3.1.3 Bars の nonperturbative base

さて、この Witten の分類を受けて、Bars[23] は 11 次元を念頭に置いた、U-duality multiplet を与える string の non-perturbative base を考察した[10]。

d 次元に compact 化した type II string の charged states は、よく知られているように T-duality multiplet [24, 25] をなす。この multiplet は torus 上では mass が縮退しているが、一般の compact 空間を持ってくると mass は縮退しない。この一般の場合にも Moduli parameter を変換する T 変換を与えることが出来る。これらの states は

$$\text{T-duality multiplets : (oscillators)}^{(l)}|p^\mu, \vec{m}, \vec{n} > \tag{3.31}$$

と与えることが出来る。ここで

$$\begin{cases} l : \ \text{oscillator level} \\ \vec{m} : \text{discrete KK momentum} \\ \vec{n} : \text{winding number} \end{cases} \tag{3.32}$$

[9] procedure の遂行は難しくないので、興味ある読者は原論文を見ながら計算してみるとよい。

[10] 彼は 12 次元からの考察も行なっている。

であり、

$$(\vec{m},\vec{n}) \in \Gamma^{10-d,10-d} \quad \text{(Lorentzian lattice)} \tag{3.33}$$

である。これを U-duality multiplets に拡張する。$l=0$ については、$d=10$ つまり compact 化していない場合に Witten の考察から分かるように、non-prturbative additional characters として central charge （つまり 1-form gauge field の charge） Z^I を導入すればよい：

$$\text{U-duality multiplets for } l=0 : |p^\mu,\vec{m},\vec{n},z^I> \tag{3.34}$$

この様に T-base を U 回転することで一般の U-base を群論的に得ることが出来る。この multiplets の形は上の形を見ると 11 次元の構造を持っているように見える。（つまり、よく知られているように type IIA では massless states なら light cone $SO(9)$、 massive states なら $SO(10)$ の表現に入る。）

一般の level l についての考察の詳述は略すが、ここに Bars の結論をあげると、$d=10,9,8,6$ の場合は 11 次元構造を持つように自然に拡張できる一方で、$d=7,5,3$ の場合は 11 次元構造を実現するためには大きな purely nonperturbative base 表現を新たに持ってこないとうまく拡張できない。

この不都合は higher levels (より重い states）に対して頻繁におこり、U-duality と 11 次元構造を両立させる additional representation を発見することは困難となっている。

この様な発見法の困難は M-theory が 11 次元で formulate された時自然と解決されるであろう。

3.1.4 Supermembrane theory

IIA 超弦理論の LEEA SUGRA の strong coupling として現れる 11 次元への色々な示唆を見てきたが、さてはたして low energy で（つまり massless 粒子として）11 次元 SUGRA を与えるような quantum theory は何であろうか。その候補、もしくはそれを発見する手立てとなるであろうと考えられているのは、supermambrane theory である。

この理論の入門的解説は [27] に詳しいので、ここでは次章で必要になる程度のみの話にとどめておくことにする。

supermembrane action は次式で与えられる：

$$\begin{aligned} S = -\int d^3\sigma \Big[& \sqrt{-\det g_{\alpha\beta}} \\ & + \tfrac{i}{2}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\bar{\psi}\Gamma_{\mu\nu}\partial_\alpha\psi\{\Pi^\mu_\beta\Pi^\nu_\gamma + i\Pi^\mu_\beta\bar{\psi}\Gamma^\nu\partial_\gamma\psi - \tfrac{1}{3}(\bar{\psi}\Gamma^\mu\partial_\beta\psi)(\bar{\psi}\Gamma^\nu\partial_\gamma\psi)\}\Big] \end{aligned} \tag{3.35}$$

ここで

$$g_{\alpha\beta} := \Pi^\mu_\alpha\Pi^\nu_\beta\eta_{\mu\nu} \tag{3.36}$$

$$\Pi^\mu_\alpha := \partial_\alpha X^\mu - i\bar{psi}\Gamma^\mu\partial_\alpha\psi \tag{3.37}$$

である。この構成法は superstring の Green-Schwarz formalism と同じであり、特に第二項は（Wess-Zumino（WZ）term と呼ばれる）、local fermionic symmetry （κ-symmetry とも呼ばれる）を理論に要請するために必要になる。（要請しないと、bosonic freedom と fermionic freedom の数が一致しない。）この第二項が存在する target space dimension は superstring の時と同様限られていて、

$$d = 4, 5, 7, 11 \tag{3.38}$$

であることが分かっている。

superstring の場合は

$$d = 3, 4, 6, 10 \tag{3.39}$$

であって、これはきちんと量子化して臨界次元を決めると $d = 10$ のみが残るのだが、supermembrane は未だ量子化されておらず[11]、string の様に臨界次元を決めるわけにはいかない。しかし、$d = 4, 5, 7$ ではこの action を effective action として与えるような soliton の存在が確認されており、その意味で、$d = 11$ が「基本的な」supermembrane を与える次元であるという可能性がある。

実際、supermembrane の σ-model として action の第一項、第二項にそれぞれ background field $G_{\mu\nu}$、$A^{(3)}_{\mu\nu\rho}$ を couple させると、action の変分$= 0$ は丁度 11 次元 SUGRA action (3.8) からでる equation of motion になっているのである。

このように 11 次元 SUGRA を与える量子論は supermembrane であると考えられるが、この理論には先程あげたように問題がいくつかある。これらの問題は特に次章 4-4 で見る D-2-brane との対応を詳しく見ることによって解明が進むと期待される。

3.2 F-theory

type IIA string theory の strong coupling を記述する理論としての M-theory ·11 次元を section 3-1 では扱ったが、type IIB ではどうだろうか。IIB 理論には $SL(2,\mathbb{Z})$ duality symmetry があると考えられており、strong coupling はこの変換で weak coupling に焼き直される。この $SL(2,\mathbb{Z})$ の起源を与えるのが F-theory である。

type IIB の NS-NS scalar ϕ と R-R scalar χ を

$$\tau := \chi + ie^{-\phi} \tag{3.40}$$

の形にくっつけると、このτ は $SL(2,\mathbb{Z})$ 変換でまさに torus の Moduli の様に変換する (2.20)。Vafa は、type IIB SUGRA を 8 次元に compact 化し、10 $\rightarrow$ 8 の 2 次元分の coordinate z（複素数）に依存する$\tau(z)$ を用いて、8 次元の上に K3 多様体（S^2 （z で

[11] spectrum が連続になってしまうという主張がある。

parametrize される）上の T^2 （Moduli が $\tau(z)$）fibration ）を乗せると丁度それが IIB SUGRA の（cosmic string）soliton 解になっていることを示した [10]。つまり、SUGRA のある解（「真空」）ではτが実際 K3 中の fiber の Moduli という幾何学的意味を与えられて、12 次元空間を形作るのである。

この構成や、ここからの heterotic $\leftrightarrow$ type II duality conjecture などは [28] に詳しいのでここでは省略する。

F-theory はこの 12 次元理論（torus で compact 化すると特殊な type IIB SUGRA になる）を与える quantum theory として定義されるが、この候補としてあげられているものには hetero (2,1) string theory[29, 30] などがある。

Chapter 4

D-brane action

chapter 2 ではR-R charged states がopen string の boundary の集合としての D-brane として認識され、また chapter 3 で見たように duality conjecture から、少なくとも SUGRA という LEEA の観点では R-R charged states つまり D-brane が strong cupling で fundamental になっていることがわかった。それでは果たして、この D-brane という microscopic な extended object は M、F-theory に対してどのような情報を与えてくれるだろうか。また、D-brane は、11 次元、12 次元とどのように consistent に結び付いているのだろうか。

このことを見るために重要な概念として D-brane の effective な振る舞いを記述する D-brane action や、それと membrane 等との関係の議論がある。これを以下で追うことにしよう。

4.1 D-brane の effective action

通常の string の場合に、その excitation で与えられる種々の粒子（fields）が満たす運動方程式（つまり LEEA Sugra）を得る方法は、一般に二つある：

(1) string の action で、background として field を導入し（σ-model）、string theory の特徴である conformal invariance を課すと、β 関数が消えるという条件が background field で書ける。これを background fields の運動方程式とみなし、それを与える action を書く。

(2) string の vertex operators を用いて、各 field 間の頂点関数を具体的にそれぞれ計算し、それらを相互作用とみなして action を書く。

この２通りの手法で得られた action は一致することが知られている。このことは自明ではないが、一致することは consistent であると言える。

さて、section 2-2 で見たように、D-brane はそれにくっつく open string の excitation によって dynamical object となるが、D-brane 上には、$g_{\mu\nu}$ から induce された D-brane 上の

metric g_{ij} や、また open string の端の Chan-Paton factor として入ってくる D-brane 上の gauge 場 A_μ 等が乗っている。そこで string と同じようにこれらの effective massless field の間の equation of motion を与える D-brane effective action を考えることが出来る。

D-brane は open string で記述されるので、D-brane action は Dirichlet boundary condition を持つ open string の σ-model における β 関数=0 の式を equation of motion として与える action 、である。（これは上で言えば（１）に相当している。）この σ-model の loop 計算によるものは文献 [31, 32] を参照してもらうことにして、ここではより簡便な boundary state による D-brane action の導出 [33, 34, 35] を行なおう。

closed string の effective SUGRA は、 σ-model の action

$$S = \int_\Sigma g_{\mu\nu}(X)\partial^a X^\mu \partial_a X^\nu d^2\sigma \tag{4.1}$$

から、2 次元場の理論の $g_{\mu\nu}(X)$ の繰り込みを行なって、conformal invariance すなわち β function

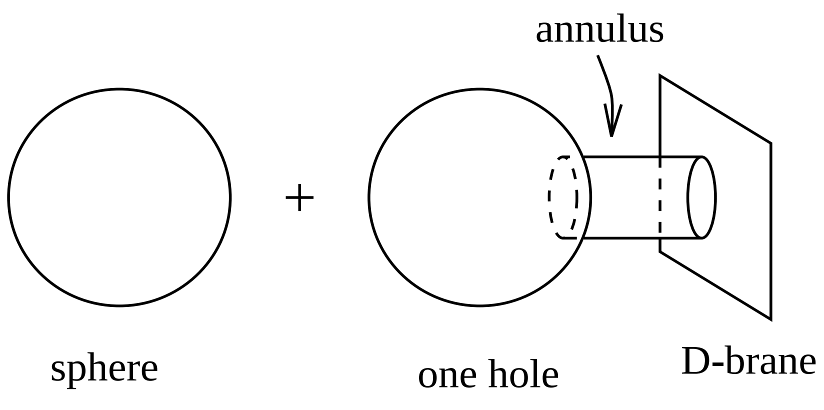
$$\beta_{\text{closed}}[g(X)] = 0 \tag{4.2}$$

を要請し、これを運動方程式として与えるような action として導かれる。

D-brane、つまり string の source があるときは、open string with Dirichlet boundary conditon の sector があり、それに couple する gauge 場と共に

$$S = \int_\Sigma g_{\mu\nu}(X)\partial^a X^\mu \partial_a X^\nu d^2\sigma + \oint_{\partial\Sigma} A_\mu dX^\mu \tag{4.3}$$

と書かれる。これは図示すれば次の図の様な one-hole sector の存在を意味している。



β function は図の第二項からの発散をも線形に含むから、

$$\beta_{\text{closed}} + \beta_{\text{hole}} = 0 \tag{4.4}$$

が conformal invariance の条件となる。これを与える action は上の SUGRA action に D-brane action S_Dが加わる。

$\beta_{\rm hole}$ はどのような発散なのだろうか。図によると発散は、D-brane から emit される closed string の state （boundary state）を $|B>$ として、string amplitude

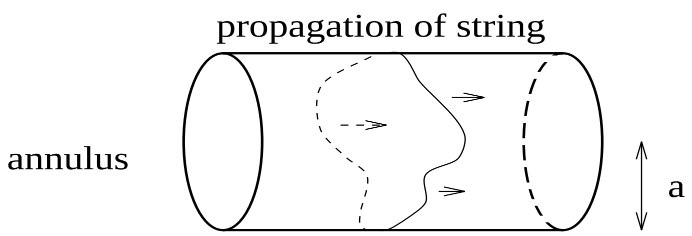
$$< {\rm hole}|e^{-L_0 l}|B> \tag{4.5}$$

の発散と考えられる。ここで l は annulus の長さであり、closed string の伝播の長さを表している。

annulus の amplitude は $l \to \infty$ に際して massless bosons の propagation による発散があり、これは詳しく書けば、annulus の半径を $a(\sim \frac{1}{l})$ として

$$\text{annulus amplitude} \sim \int_0^\infty \frac{da}{a}(\frac{1}{a^2} + 1 + o(a^2)) \tag{4.6}$$

となっていて、この括弧内第一項 tachyon の寄与 $\frac{1}{a^2}$ を unphysical として除くと第二項 massless mode に infrared divergence がある ことが分かる。これが $\beta_{\rm hole}$ を与えるのであ



るから、つまり問題は boundary state の massless 部分をきちんと normalization まで求めるということになるのである。

4.2 Boundary state からの D-brane action の導出

Dirichlet p-brane を boundary として持つ open string の boundary condition を、world sheet の σ と τ を入れ替えて closed string としてみれば

$$\begin{cases} X^{0\sim p} & : \ \text{free (Neumann)} \ : \ \partial_\tau X^\mu = 0 \\ X^{p+1\sim 25} & : \ \text{fixed (Dirichlet)} \ : \ \partial_\sigma X^j = 0 \end{cases} \tag{4.7}$$

となっているのでこれを満たすように boundary state $|B>$ を作る：

$$\partial_\tau X^\mu|B>= 0, \qquad \partial_\sigma X^j|B>= 0 \tag{4.8}$$

具体的に mode 展開して構成しよう。

$$X^M(\sigma,\tau) = (\text{zero mode}) + \sum_m \frac{1}{\sqrt{|m|}}\Big(a_m^M e^{-m(\tau-i\sigma)} + a_{-m}^M e^{m(\tau+i\sigma)}\Big) \tag{4.9}$$

$$[a_m^M, a_n^N] = [\tilde{a}_m^M, \tilde{a}_n^N] = g^{MN}\delta_{m+n} \tag{4.10}$$

（通常のものと少し異なったものを採用している。）ここで g^{MN} は簡単のため constant としておく。先の boundary conditon を mode で書くと

$$\begin{cases} \text{Neumann} & : & -a_m^\mu + \tilde{a}_{-m}^\mu & = & 0 \\ \text{Dirichlet} & : & a_m^j + \tilde{a}_{-m}^j & = & 0 \end{cases} \tag{4.11}$$

となり、この固有状態としての boundary state は coherent state として簡単に解が与えられる：

$$\begin{cases} \text{Neumann} & : & e^{a^\dagger \tilde{a}^\dagger}|0> & =: |N> \\ \text{Dirichlet} & : & e^{-a^\dagger \tilde{a}^\dagger}|0> & =: |D> \end{cases} \tag{4.12}$$

つまり全部の mode を合わせて、boundary state は

$$|B> \quad \propto \quad \exp\Big[\sum_{m>0}(a_{-m}^\mu g_{\mu\nu}\tilde{a}_{-m}^\nu - a_{-m}^j g_{jk}\tilde{a}_{-m}^k)\Big]\ |0> \tag{4.13}$$

と normalization を除いて決まる。

さて、その normalization を決めよう。まず particle の場合を見てみると分かりやすい。particle field は一つの調和振動子と見なせるので

$$x = a + a^\dagger \tag{4.14}$$

として、normalized eigen state of x を求めると、

$$|x >= (2\pi)^{-\frac{1}{4}}\exp\Big(-\frac{1}{2}(a^\dagger)^2 + xa^\dagger - \frac{1}{4}x^2\Big)\ |0> \tag{4.15}$$

となる。これを用いて、free boundary condition は波動関数

$$\psi(x) = 1 \quad (x \text{ に依らない}) \tag{4.16}$$

であるから

$$|\psi >= \int dx|x>\psi(x) = (8\pi)^{\frac{1}{4}}e^{\frac{1}{2}(a^\dagger)^2}|0> \tag{4.17}$$

となり、また fixed boundary condition では波動関数が

$$\psi(x) = \delta(x) \tag{4.18}$$

であるので

$$|\psi >= \int dx|x>\psi(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{4}}e^{-\frac{1}{2}(a^\dagger)^2}|0> \tag{4.19}$$

を得る。

これを string で行なうには、振動子が無限個の系になるだけで本質的には同じことをすれば良い。まず

$$x_m := a_m + \tilde{a}_{-m}, \quad \bar{x}_m := a_{-m} + \tilde{a}_m (= x_m^\dagger) \tag{4.20}$$

と一般化して、normalized eigen state of x_m、$\bar{x}_m$を求めると

$$|x, \bar{x} >= \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\det g}} \exp\left(-\frac{1}{2}\bar{x}\cdot x + a^\dagger \cdot x + \bar{x}\cdot \tilde{a}^\dagger - a^\dagger \cdot \tilde{a}^\dagger\right) |0> \tag{4.21}$$

ここで

$$\bar{x}\cdot x := \sum_{m=1}^{\infty} \bar{x}_m^\mu x_m^\nu g_{\mu\nu} \tag{4.22}$$

である。これより boundary state は

$$|\psi >= \int \prod_{m>0} dx_m d\bar{x}_m \sqrt{\det g} |x, \bar{x} >< x, \bar{x}|\psi > \tag{4.23}$$

にそれぞれを代入したものとして求まる。

$$\begin{aligned} \text{Neumann} : \psi(x,\bar{x}) = 1 \quad \Rightarrow |N > \quad &= \int dx d\bar{x} \ \exp\left(-\frac{1}{2}\bar{x} g x + \cdots\right) \\ &= (\det g)^{-1} e^{a^\dagger g \tilde{a}^\dagger} |0> \end{aligned} \tag{4.24}$$

$$\text{Dirichlet} : \psi(x,\bar{x}) = \delta(x)\delta(\bar{x}) \quad \Rightarrow \quad |D > \ = \exp(-a^\dagger g \tilde{a}^\dagger)|0> \tag{4.25}$$

すべての $m > 1$ を合わせると、normalization factor は

$$\begin{aligned} \textstyle\prod_{m>0} (\det g)^{-1} \quad &= (\det g)^{-\sum_{m>0} 1} = (\det g)^{-\lim_{s\to 0} \sum_{m>0} m^{-s}} \\ &= (\det g)^{-\lim_{s\to 0} \zeta(s)} = (\det g)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

これから、normalized boundary state は、

$$|B >= (\det g_{\mu\nu})^{\frac{1}{2}} \exp(\sum_{m>0} a_{-m}^\mu g_{\mu\nu} \tilde{a}_{-m}^\nu + \cdots)|0> \tag{4.26}$$

massless 部分を取り出すと、D-brane 内に誘起された metric $G_{\mu\nu}$を含む

$$|B >_{\text{massless}} = \sqrt{\det g_{\mu\nu}} \ a_{-1}^\mu g_{\mu\nu} \tilde{a}_{-1}^\nu |0> \tag{4.27}$$

となる。

この massless state（から導かれる発散）を消す background field の運動方程式は

$$\sqrt{\det g_{\mu\nu}} \ g_{\mu\nu} = 0 \tag{4.28}$$

であるから、これを equation of motion として出す effective action は

$$S=\int d^{p+1}x \;\; e^{-\phi}\sqrt{\det g_{\mu\nu}} \tag{4.29}$$

で与えられる（$e^{-\phi}$ の factor は、今 open string の disk （つまり one hole）amplitude を考えていることから $\frac{1}{\lambda}=e^{-\phi}$ より付け加えた。[1]）。これが D-brane action である。

実際は D-brane 上の gauge 場もあり、これも constant field strength の時のみ厳密に解ける。それはσ-model からわかる。boundary に douple する gauge 場の field strength が constant の場合、

$$A_\mu \sim F_{\mu\nu}(X^\nu - x^\nu) \tag{4.30}$$

の様になるので、(x^ν は zero mode （重心））

$$S_{\text{int}}=\oint A_\mu dX^\mu=\oint F_{\mu\nu}(X^\mu - x^\mu)\partial_\tau X^\nu d\sigma \tag{4.31}$$

となり、action が bilinear だから先程とまったく同じ状況になる。

詳しい導出は略し、結果のみをあげておく：

$$S=\int d^{p+1}x \;\; e^{-\phi}\sqrt{\det(g_{\mu\nu}+F_{\mu\nu})} \tag{4.32}$$

実は話はまだ終わっていない。この field strength $F_{\mu\nu}$ は $B^{(1)}_{\mu\nu}$ の gauge 変換に対して不変でないのである。

$$B^{(1)} \longrightarrow B^{(1)}+d\Lambda \tag{4.33}$$

この変換で open string action は

$$\int_\Sigma B^{(1)} \longrightarrow \int_\Sigma B^{(1)}+d\Lambda=\int_\Sigma B^{(1)}+\int_{\partial\Sigma}\Lambda \tag{4.34}$$

となる。ゆえに、string action の不変性を要求すると boundary term が

$$\int_{\partial\Sigma} A \longrightarrow \int_{\partial\Sigma} A-\int_{\partial\Sigma}\Lambda \tag{4.35}$$

つまり

$$A \longrightarrow A-\Lambda \tag{4.36}$$

とと変換しなければならない。この変換に対して D-brane action も不変であるべきであるから、D-brane action への $B^{(1)}_{\mu\nu}$ の入ってくる形は $F_{\mu\nu}$ から決まってしまう。つまり、gauge 不変な形

$$\mathcal{F}:=F+B^{(1)} \tag{4.37}$$

[1] sphere なら $e^{-2\phi}$である。これは例えば IIB SUGRA action の NS-NS sector、例えば (2.17) 式に見ることが出来る。

で入ってこなければならないのである。このことから、D-brane action は

$$S = \int d^{p+1} x e^{-\phi} \sqrt{\det(g_{\mu\nu} + \mathcal{F}_{\mu\nu})} \tag{4.38}$$

となる。

更に R-R sector の back ground fields の D-brane action も同じようにして求めることが出来るが、それは略して、結果だけ述べておこう。[2]

$$S = \int d^{p+1} x \Big[e^{-\phi} \sqrt{\det(g_{\mu\nu} + \mathcal{F}_{\mu\nu})} + e^{\frac{1}{2}\mathcal{F}} \wedge \mathcal{C} \Big] \tag{4.39}$$

$$\text{where} \quad \mathcal{C} := c^{(\text{p+1})} + c^{(\text{p-1})} + c^{(\text{p-3})} + \cdots \tag{4.40}$$

$$c^{(i)} : \text{i-form R-R gauge field} \tag{4.41}$$

第二項は、$e^{\frac{1}{2}\mathcal{F}} \wedge \mathcal{C}$ のうち $p+1$ form のみ取り出す、つまり

$$c^{(\text{p+1})} + \frac{1}{2}\mathcal{F} \wedge c^{(\text{p-1})} + \frac{1}{8}\mathcal{F} \wedge \mathcal{F} \wedge c^{(\text{p-3})} + \cdots \tag{4.42}$$

である。この式 (4.39) を D-brane action と呼び、これは D-brane 上に effective に induce された fields の従う equation of motion を与える action である。

この D-brane action は今まで見てきた D-brane の非摂動的性質や duality の予言とどのように関わっているのであろうか。以下の節ではこの点を中心に詳しく性質を調べてみよう。

4.3 D-1-brane action の dual と $SL(2,\mathbb{Z})$ soliton

type IIB action には、section2-1 でみたように $SL(2,\mathbb{Z})$ 対称性がある。これを反映した soliton の性質と、その性質を D-brane action の dual から与えた consistency check[35] を紹介しよう。

まず、SUGRA action の soliton 解であるが [36]、1-brane 解（string-like soliton）として $B_{01}^{(1)}$ charge 1 を持つ解が見つかっていた。Schwarz は $SL(2,\mathbb{Z})$ 対称性を使ってこの解を $SL(2,\mathbb{Z})$ 回転し、

$$(B_{01}^{(1)}, B_{01}^{(2)})\text{charge} = (q_1, q_2) \tag{4.43}$$

を持つ解を構成した。その解は

$$T_q = \Delta_q^{\frac{1}{2}} T \tag{4.44}$$

$$\text{where} \begin{cases} T : \text{回転前の tension} \\ \Delta_q := e^{\phi_0}(q_2\chi_0 - q_1)^2 + e^{-\phi_0} {q_2}^2 \end{cases} \tag{4.45}$$

[2] これも fermion の mode 展開で同様にできる。詳しくは、[33, 34] を参照。

の tension を持つ（q_1、 q_2 は整数、 $\phi_0\chi_0$ は ϕ、χ の asymptotic value)。
さて、D-1-brane (D-string) action

$$S_D = \int d^2\sigma \Big\{ e^{-\phi}\sqrt{-\det(g+\mathcal{F})} + \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta}B^{(2)}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\chi\epsilon^{\alpha\beta}\mathcal{F}_{\alpha\beta} \Big\} \tag{4.46}$$

を[3]、通常 4 次元で

$$F_{\mu\nu} \longrightarrow \tilde{F}_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma} \tag{4.47}$$

とするように dual 変換してみよう。(world volume は 2 次元なので F の dual は scalar となる。)
まず auxiliary field を用いて、nS_D の[4]NS-NS 部分の partition function を

$$\begin{aligned} &\exp\Big\{ -\int d^2\sigma \;\; ne^{-\phi}\sqrt{-\det(g+\mathcal{F})} \Big\} \\ &\quad = \int \mathcal{D}t\exp\Big\{ -\int d^2\sigma \Big[e^{-\phi}\sqrt{(-\det g)(n^2+t^2e^{2\phi})} + \frac{1}{2}t\epsilon^{\alpha\beta}\mathcal{F}_{\alpha\beta} \Big] \Big\} \end{aligned} \tag{4.48}$$

と変形する。この形から、 nS_D は

$$\begin{aligned} -\int d^2\sigma \Big[& e^{-\phi}\sqrt{(-\det g)(n^2+t^2e^{2\phi})} \\ & + \tfrac{n}{2}\epsilon^{\alpha\beta}B^{(2)}_{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2}(n\chi - t)\epsilon^{\alpha\beta}(F_{\alpha\beta} + B^{(1)}_{\alpha\beta}) \Big] \end{aligned} \tag{4.49}$$

と書き直せる。world volume 上の gauge 場 A_μ を integrate out する（つまり dual をとる）とその equation of motion から constraint

$$n\chi - t = \text{constant} =: m \tag{4.50}$$

が導かれる。これを代入すると、action は

$$\int d^2\sigma \Big\{ \sqrt{n^2e^{-2\phi} + (m-n\chi)^2}\sqrt{-\det g} + \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta}(nB^{(2)}_{\alpha\beta} - mB^{(1)}_{\alpha\beta}) \Big\} \tag{4.51}$$

となる。これより読み取れるのは、D-brane action は dual をとると Nambu-Goto type であり、その string のもつ tension は、$SL(2,\mathbb{Z})$ invariant な Einstein metric

$$G_{\mu\nu} := e^{-\phi/2}g_{\mu\nu} \tag{4.52}$$

でみると先の (4.44) の

$$\tilde{T} = T_q \tag{4.53}$$

[3]ここで χ や $B^{(2)}$ は先程の $c^{(0)}$、$c^{(2)}$ に相当する。
[4]n は自然数。ここで nS_D とするのは、D-string が n 本重なっているとき、D-string action は SUGRA action の source と思えばその source term は nS_D となっているからである。

を導出しているということである。

このことは果たして何を意味しているのだろうか。ひとつには、

D-string action （の dual）= fundamental string の $SL(2,\mathbb{Z})$ transformed action

の成立から、結局 D-string という open string の boundary としての集合が、IIB string theory の $SL(2,\mathbb{Z})$ 対称性という観点から見れば fundamental string と同じレベルの存在になることが確かめられた、と言える。

また D-brane action がこの様に $SL(2,\mathbb{Z})$ series の soliton の tension を具現していることから、

$$\text{IIB SUGRA action} + \text{D-string action} \tag{4.54}$$

は、Schwarz の soliton 解を source に持つ action とみなせる。つまり D-string action は IIB SUGRA の source term になっているのである。open string の boundary としての D-string、つまり closed string を emit する source としての D-string、という microscopic な描像と、SUGRA という macroscopic な action での source という描像が、完全に consistent に現れている。

この様な対応、つまり micro $\leftrightarrow$ macro の対応は他の D-p-brane action では見られるであろうか。次節では D-2-brane を調べる。

4.4 D-2-brane と membrane

さて、今度は D-2-brane に対して dual の操作を行なってみよう。これは実際、11 次元の membrane action を与えるのである。

まず、D-2-brane action は、

$$S = \int d^3\sigma \Big\{ e^{-\phi}\sqrt{-\det(g+\mathcal{F})} + \frac{1}{6}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}A^{(3)}_{\alpha\beta\gamma} - \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}C_\alpha \mathcal{F}_{\beta\gamma}\Big\} \tag{4.55}$$

となっている。ここで以前と同じように field strength $\mathcal{F}$ を integrate out したいので、この root から外に出すために、auxiliary vector field t_α を使う。

$$\begin{aligned}&\exp\Big\{-\int d^3\sigma \;\, e^{-\phi}\sqrt{-\det(g+\mathcal{F})}\Big\}\\ &\quad = \int \mathcal{D}t_\alpha \;\exp\Big\{-\int d^3\sigma\Big[e^{-\phi}\sqrt{-\det(g_{\alpha\beta}+t_\alpha t_\beta e^{2\phi})} + \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}t_\alpha \mathcal{F}_{\beta\gamma}\Big]\Big\}\end{aligned} \tag{4.56}$$

これから、D-2-brane action は次のように書き換えられる：

$$\begin{aligned}S = \int d^3\sigma \Big\{ & e^{-\phi}\sqrt{-\det(g_{\alpha\beta}+t_\alpha t_\beta e^{2\phi})}\\ & +\tfrac{1}{6}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}A^{(3)}_{\alpha\beta\gamma} - \tfrac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}(C_\alpha - t_\alpha)(F_{\beta\gamma}+B^{(1)}_{\beta\gamma})\Big\}\end{aligned} \tag{4.57}$$

さていつもの dual 変換を行なおう。まず gauge 場 A_μ の運動方程式から、

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\partial_\beta(C_\gamma - t_\gamma) = 0 \tag{4.58}$$

となる。Poincare の補題から、

$$C_\alpha - t_\alpha =: \partial_\alpha y \tag{4.59}$$

なる scalar field y がある。これから

$$t_\alpha = C_\alpha - \partial_\alpha y \tag{4.60}$$

となるのでこれを代入し、F を消すと

$$S = \int d^3\sigma \Big\{ \sqrt{-\det \hat{g}} + \frac{1}{6}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\hat{A}^{(3)}_{\alpha\beta\gamma} \Big\} \tag{4.61}$$

ここで

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{g}_{\alpha\beta} := g_{\alpha\beta}e^{-\frac{2}{3}\phi} + e^{\frac{4}{3}\phi}(\partial_\alpha y - C_\alpha)(\partial_\beta y - C_\beta) \\ \hat{A}^{(3)}_{\alpha\beta\gamma} := A^{(3)}_{\alpha\beta\gamma} - 3\partial_\alpha y B^{(1)}_{\beta\gamma} \end{array} \right. \tag{4.62}$$

とおいた。これはまさに membrane action である。丁度 R-R gauge field coupling であったところが Wess Zumino term を再現している。具体的にはきちんと fermion までやらないとこれが super membrane action になっているかどうかは分からないが、それは文献を見てもらうことにして [26]、ここではこれが 11 次元目に相当していることを見よう。induced metric などは

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} &= \partial_\alpha x^m \partial_\beta x^n g_{mn} && (4.63) \\ B^{(1)}_{\alpha\beta} &= \partial_\alpha x^m \partial_\beta x^n B^{(1)}_{mn} && (4.64) \\ A^{(3)}_{\alpha\beta\gamma} &= \partial_\alpha x^l \partial_\beta x^m \partial_\gamma x^n A^{(3)}_{lmn} && (4.65) \\ C_\alpha &= \partial_\alpha x^m C_m && (4.66) \end{aligned}$$

として通常の metric 等と関係しているが、これらと (4.62) の第一式を比べてみると、A_α の dual field である scalar y が丁度新たな target space coordinate として登場しており、つまり

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{g}_{MN}dx^M dx^N = e^{-\frac{2}{3}\phi}g_{mn}dx^m dx^n + e^{\frac{4}{3}\phi}(dy - C_m dx^m)^2 \\ \hat{A}^{(3)}_{lmn} = A^{(3)}_{lmn}, \qquad \hat{A}^{(3)}_{ymn} = \hat{A}^{(3)}_{nym} = \hat{A}^{(3)}_{mny} = -B_{mn} \end{array} \right. \tag{4.67}$$

となっていて、式 (3.18) とまったく一致していることが分かる。つまり D-brane 上の gauge 場の自由度は丁度一つ次元を増やす方向の自由度と解釈できるのだ。この意味で、D-2-brane は 11 次元 membrane と dual になっているのである。

この考えを進めていくと、次はもちろん D-3-brane の dual を試してみたくなるわけだが、それが案の定 12 次元（F theory?）を意味するかどうかには問題がある。D-3-brane は 10 次元で self-dual object であるからだ。これらの話題については、次で述べることにしよう。

4.5 D-3-brane action と self-duality

さて、D-3-brane action にも同様の操作をしてみるとどうなるだろうか。Tseytlin は、D-3-brane action がこの dual 操作で、self-dual、つまりもとの形に戻ることを示した [38]。この dual 変換は丁度 $SL(2.\mathbb{Z})$ の元

$$\tau \to -\frac{1}{\tau} \tag{4.68}$$

に対応しており、従って D-3-brane action は $SL(2.\mathbb{Z})$ self-dual であることを以下で見ていこう。

D-3-brane action は（簡単のため Euclidian とすると）

$$S = \int d^4\sigma \Big[e^{-\phi}\sqrt{gP} + Q \Big] \tag{4.69}$$

ここで

$$\begin{cases} g := \det g_{\alpha\beta}, \quad \{\alpha,\beta\} \in \{0\cdots 3\} \\ P := \ \det(1+\mathcal{F}_{\alpha}^{\beta}) \ = \ 1 + \frac{1}{2}\mathcal{F}_{\alpha\beta}\mathcal{F}^{\alpha\beta} - \frac{1}{64}(\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\mathcal{F}^{\alpha\beta}\mathcal{F}^{\gamma\delta})^2 \\ Q := \frac{1}{24}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}A^{(+)}_{\alpha\beta\gamma\delta} + \frac{1}{4}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}B^{(2)}_{\alpha\beta}\mathcal{F}_{\gamma\delta} + \frac{1}{6}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\chi\mathcal{F}_{\alpha\beta}\mathcal{F}_{\gamma\delta} \end{cases} \tag{4.70}$$

となっている。world volume 上の Lorentz 対称性 $O(4)$ を用いて、反対称 $\mathcal{F}$ を

$$\mathcal{F}_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & f_1 & 0 & 0 \\ -f_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f_2 \\ 0 & 0 & -f_2 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.71}$$

とする[5]。この dual となるはずの Lagrange multiplier 2-form field $\Lambda + B^{(2)}$ も、これと結合する分だけ値を持つため、成分を同様な形で λ_1、λ_2 と置くと、action は、

$$g_{\alpha\beta}e^{-\phi/2} = \mathbb{1}_{\alpha\beta} \tag{4.72}$$

と world volume reparametrization で gauge 固定した後で[6]

$$\begin{aligned} S = \int d^4\sigma \Big[& \sqrt{(1+e^{-\phi}(f_1)^2)(1+e^{-\phi}(f_2)^2)} + i\lambda_1 f_1 + i\lambda_2 f_2 + i\chi f_1 f_2 \\ & + (\tfrac{1}{24}i\epsilon A^{(+)} + \tfrac{1}{4}i\epsilon\Lambda B^{(1)}) \Big] \end{aligned} \tag{4.73}$$

[5] $\mathcal{F}$ を real と考えている。そうでないと $\mathcal{L}$ が Hermitian でなくなる。

[6] この左辺は Einstein metric、つまり $SL(2.\mathbb{Z})$ invariant metric にあたる。

f_1、f_2について変分し、解くと[7]

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{e^{-\phi}+e^{\phi}\chi^2}\Big(-e^{\phi}\chi\lambda_2 - i\lambda_1\sqrt{\frac{e^{-\phi}+e^{\phi}\chi^2+(\lambda_2)^2}{e^{-\phi}+e^{\phi}\chi^2+(\lambda_1)^2}}\Big) && (4.74) \\ f_2 &= f_1\text{で}\lambda_1 \leftrightarrow \lambda_2\text{としたもの} && (4.75) \end{aligned}$$

これを action に代入すると

$$S = \int d^4\sigma\Big[\sqrt{\Big(1+\frac{1}{e^{-\phi}+e^{\phi}\chi^2}(\lambda_1)^2\Big)\Big(1+\frac{1}{e^{-\phi}+e^{\phi}\chi^2}(\lambda_2)^2\Big)} - \frac{ie^{\phi}}{e^{-\phi}+e^{\phi}\chi^2}\chi\lambda_1\lambda_2 + (\frac{1}{24}i\epsilon A^{(+)} + \frac{1}{4}i\epsilon\Lambda B^{(1)})\Big] \quad (4.76)$$

となり非常に始めの形に近い形をしている[8]。この形で前の物と違っていたところは、

$$\tau := \chi + ie^{-\phi} \quad (4.77)$$

としておくと

$$\tilde{\tau} := -\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\chi+ie^{-\phi}}(=: \tilde{\chi} + ie^{-\tilde{\phi}}) \quad (4.78)$$

より

$$\left\{\begin{aligned} \tilde{\chi} &= \frac{-\chi e^{\phi}}{e^{-\phi}+e^{\phi}\chi^2} \\ e^{-\tilde{\phi}} &= \frac{1}{e^{-\phi}+e^{\phi}\chi^2} \end{aligned}\right. \quad (4.79)$$

を用いて書き直せ、

$$S = \int d^4\sigma\Big[\sqrt{\Big(1+e^{-\tilde{\phi}}(\lambda_1)^2\Big)\Big(1+e^{-\tilde{\phi}}(\lambda_2)^2\Big)} - i\tilde{\chi}\lambda_1\lambda_2 + (\frac{1}{24}i\epsilon A^{(+)} + \frac{1}{4}i\epsilon\Lambda B^{(1)})\Big] \quad (4.80)$$

これを $O(4)$ invariant な形に直せば

$$S = \int\Big[\sqrt{\det(\delta_{\alpha\beta} + e^{-\frac{1}{2}\tilde{\phi}}(\lambda_1)^2\tilde{\mathcal{F}}_{\alpha\beta})} + \tfrac{i}{4}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\tilde{\mathcal{F}}_{\alpha\beta}B^{(1)}_{\gamma\delta} - \tfrac{i}{8}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\tilde{\mathcal{F}}_{\alpha\beta}\tilde{\mathcal{F}}_{\gamma\delta} + (\tfrac{1}{24}i\epsilon A^{(+)} + \tfrac{1}{4}i\epsilon B^{(1)}B^{(2)})\Big] \quad (4.81)$$

を得る。これは以前の action で

$$\left.\begin{array}{lcl} F & \to & \Lambda \\ B^{(1)} & \to & -B^{(2)} \end{array}\right\} \quad \mathcal{F} \to \tilde{\mathcal{F}} := \Lambda + B^{(2)} \quad (4.82)$$

[7]繁雑な計算。i の前の符号に任意性があり、又更に非常に汚い解もある。
[8]ここでも実は root の前に不定な符号がある。適当に都合の良い方を取っている。

$$B^{(2)} \to B^{(1)}, \quad \phi \to \tilde{\phi}, \quad \chi \to \tilde{\chi} \tag{4.83}$$

としたものに一致している[9]。故に、action は $SL(2,\mathbb{Z})$ の元（変換）

$$\tau \to -\frac{1}{\tau} \tag{4.84}$$

つまり

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z}) \tag{4.85}$$

で不変になっている。

加えて、action は

$$\tau \to \tau + 1 \qquad (\chi \to \chi + 1) \tag{4.86}$$

で全微分のみの変化なので結局この二つの変換で generate される群 $SL(2,\mathbb{Z})$ で action は不変となる。

このことは何を意味するのだろうか。一つには、単に $A^{(+)}$ が $SL(2,\mathbb{Z})$ invariant な IIB SUGRA field であったからその source としての D-3-brane も $SL(2,\mathbb{Z})$ invariant であるという見方が出来る。しかしそれ以上の示唆を与えることが出来る。

string 理論の T-duality を考えてみよう。compact 化された SUGRA には T-duality invariance があるが、これは σ-model の観点からすると、元々は world sheet の $X \leftrightarrow Q$ の scalar $\leftrightarrow$ scalar duality に起因している。つまり 2 次元特有の selfduality が、SUGRA action の T-duality invariance を導いているのである。この analogy を考えよう。いま、IIB SUGRA action には、source としての D-3-brane action も含めて $SL(2,\mathbb{Z})$ vector $\leftrightarrow$ vector duality がある。これは、4 次元 worldvolume を持つ $SL(2,\mathbb{Z})$ 不変な理論の存在を意味していないだろうか？[10]

そう考えたときに、D-2-brane action の時は dual を取ると実際 11 次元目の coordicate scalar が見えた一方で今回は何故 12 次元目まで持つ Nambu-Goto action が出ないのであろうかという疑問が湧く。その答は、Tseytlin の言うように、12 次元まで出す field の数が足りないせいなのである。

D-2-brane では

$$F_{\alpha\beta} \to F_{12}, F_{23}, F_{31} \quad : \quad \frac{3\cdot 2}{2} = 3\,\text{つ} \tag{4.87}$$

と、

$$\partial_\alpha X^{10} \to \partial_0 X^{10}, \partial_1 X^{10}, \partial_2 X^{10} \quad : \quad 3\,\text{つ} \tag{4.88}$$

[9] action の最終項のみ対応していない。これは higher term として考えるべきであろうか。

[10] この implication は、hetero(2,1) string などの (2,2) signature をもつ world volume の理論への方向と一致している。

が対応していた。しかし今の D-3-brane の場合

$$F_{\alpha\beta} \quad : \quad \frac{4\cdot 3}{2} = 6\text{つ} \tag{4.89}$$

に対して

$$\partial_\alpha X^{10}, \partial_\alpha X^{11} \rightarrow \ \ \partial_{0\sim 3} X^{10,11} \quad : \quad 8\text{つ} \tag{4.90}$$

であって、不足しているのだ。つまり、D-3-brane action から Nambu-Goto 型 action を出すには、dual に対応するものが、D-3-brane 上の gauge 場の数では足りないのである。

つまり実際には、D-3-brane action から Nambu-Goto 型 action が出せたとするとその形は何らかの gauge 固定もしくは dimensional reduction をした形になっているはずである[11]。

Jatkar らは以上の考察を経て、double dimensional reduction した D-3-brane action から出発して二つの coordinate scalar を得ることに成功した [39]。それを次節で見てみよう。

4.6 D-3-brane action の dual と F-theory

前節の D-3-brane action (4.69)(4.70) において、まず ϕ dependence がうるさいので Einstein metric に rescale しておく：

$$g_{\alpha\beta}e^{-\frac{1}{2}\phi} \ := \ g'_{\alpha\beta} \tag{4.91}$$

$$\mathcal{F}_{\alpha\beta}e^{-\frac{1}{2}\phi} \ := \ \mathcal{F}'_{\alpha\beta} \tag{4.92}$$

$$B^{(2)}_{\alpha\beta}e^{\frac{1}{2}\phi} \ := \ B'^{(2)}_{\alpha\beta} \tag{4.93}$$

$$\chi e^{\phi} \ := \ \chi' \tag{4.94}$$

以降、プライム無しでもプライムはあるものと考える。先の考察から、この action を 9 次元（world volume 3 次元）に double dimensional reduction[12] してみる [39]。

$$\sigma^3 = X^9 \tag{4.95}$$

とみなし、

$$U := A_3, \quad A_{lmn} := A^{(+)}_{lmn3}, \tag{4.96}$$

$$B^{(i)}_m := B^{(i)}_{m3}, \quad b_m := \partial_m U + B^{(1)}_m \tag{4.97}$$

（ここで $l,m,n \in \{0,1,2\}, i \in \{1,2\}$ である。）また $\partial_3 = 0$ から

$$\mathcal{F}_{\alpha\beta}\mathcal{F}^{\alpha\beta} = \mathcal{F}_{mn}\mathcal{F}^{mn} + 2b_m b^m \tag{4.98}$$

[11] Nahm の言ったように 12 次元以上では SUSY は manifest に出るとは考えにくく、何らかの dimensional reduction された形で出てくるほうが望ましい。

[12] world volume と target space を同時に dimensional reduction すること。

等とすると

$$P = 1 + b_m b^m + \frac{1}{2}\mathcal{F}_{mn}\mathcal{F}^{mn} - \frac{1}{4}(\epsilon^{lmn} b_l \mathcal{F}_{mn})^2 \tag{4.99}$$

$$Q = \frac{1}{6}\epsilon^{lmn}(A_{lmn} + 3(B_l^{(2)} + \chi b_l)\mathcal{F}_{mn} + 3b_l B_{mn}^{(2)}) \tag{4.100}$$

となる。この action に対して Lagrange multiplier を導入し $g = 1$ と gauge 固定すると

$$S = \int d^3\sigma \Big[\sqrt{gP} + Q - \frac{1}{2}\Lambda^{mn}(\mathcal{F}_{mn} - \partial_m A_n + \partial_n A_m + \frac{1}{2}(B_{mn} - B_{nm}))\Big] \tag{4.101}$$

A を integrate out すれば

$$\Lambda^{mn} = \epsilon^{lmn}\partial_l V \tag{4.102}$$

と書かれ、整理すると

$$S = \int d^3\sigma (\sqrt{-gP} - \frac{1}{2}\epsilon^{lmn}\lambda_l \mathcal{F}_{mn} + \frac{1}{6}\epsilon^{lmn}\hat{A}_{lmn}) \tag{4.103}$$

ここで

$$\begin{cases} \lambda_m := \partial_m V - B_m^{(2)} - \chi b_m \\ \hat{A}_{lmn} := A_{lmn} + 3b_{[l}B_{mn]}^{(2)} - 6\partial_{[l}V B_{mn]}^{(1)} \end{cases} \tag{4.104}$$

この action から $\mathcal{F}$ を integrate out する。 $\mathcal{F}$ に対する equation of motion を更に action に代入して、 $\mathcal{F}$ を消去すると、少々繁雑な計算の後

$$S = \int d^3\sigma (\sqrt{-g\tilde{P}} + \frac{1}{6}\epsilon_{lmn}\hat{A}_{lmn}) \tag{4.105}$$

$$\text{where} \quad \tilde{P} := \det(\mathbb{1} + b_m b^n + \lambda_m \lambda^n) \tag{4.106}$$

になるのである！これは、dimensional reducton したことを考えると

$$S = \int d^4\sigma (\sqrt{-\det(g_{\alpha\beta} + b_\alpha b_\beta + \lambda_\alpha \lambda_\beta)} + \frac{1}{6}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\hat{A}_{\alpha\beta\gamma\delta} \tag{4.107}$$

において

$$\hat{A}_{\alpha\beta\gamma 3} := \hat{A}_{\alpha\beta\gamma} \tag{4.108}$$

$$b_3 = \lambda_3 = 0 \tag{4.109}$$

としたことを意味すると考えられる。ここで、

$$b_\alpha = \partial_\alpha U + B_\alpha^{(1)} \tag{4.110}$$

$$\lambda_\alpha = \partial_\alpha - B_\alpha^{(2)} - \chi b_\alpha \tag{4.111}$$

であったから、U と V は新たな（compact 化されて見えなくなっていた）座標と見ることが出来る。$B^{(i)}_\alpha$、χb_α はその compact 化の際の他座標との混合具合を表すgauge 場（D-2-brane の時は A_μ であった。）に対応する。

この様に、dual を取るとあたかも 12 次元を示すような新たな coordinate U、V が出てき[13]、その上を動く world volume 4 次元の extended object に対応する Nambu-Goto action が現れる。これは F-theory の microscopic な記述に対応しているのではないだろうか？

F-theory との対応を見るために、この出現した coordinates U、V の空間が丁度 IIB scalar τ を Moduli として持つ torus となっていることを見よう。まず ϕ dependence を回復すると、Nambu-Goto action の中の metric 部分は

$$\hat{g}_{\alpha\beta} := e^{-\frac{1}{2}\phi} g_{\alpha\beta} + e^{-\phi} b_\alpha b_\beta + e^{\phi}\lambda_\alpha\lambda_\beta \tag{4.112}$$

となっていて、これは

$$Z_\alpha = \begin{pmatrix} \partial_\alpha V - B^{(2)}_\alpha \\ \partial_\alpha U + B^{(1)}_\alpha \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{M} = \frac{1}{\mathrm{Im}\tau}\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{Re}\tau \\ \mathrm{Re}\tau & |\tau|^2 \end{pmatrix} \tag{4.113}$$

と置くと

$$\hat{g}_{\alpha\beta} = e^{-\frac{1}{2}\phi} g_{\alpha\beta} + Z^T_\alpha \mathcal{M} Z_\beta \tag{4.114}$$

と書ける。

$$\left\{ \begin{array}{lcl} g_{\alpha\beta} & = & g_{\mu\nu}\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \\ B^{(i)}_\alpha & = & \partial_\alpha X^\mu B^{(i)}_\mu = \partial_\alpha X^\mu B^{(i)}_{\mu 9} \end{array} \right. \tag{4.115}$$

等の対応から

$$ds^2 = e^{-\frac{1}{2}\phi} g_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu + \begin{pmatrix} dV - dX^\mu B^{(2)}_{\mu 9} \\ dU + dX^\mu B^{(1)}_{\mu 9} \end{pmatrix}^T \mathcal{M} \begin{pmatrix} dV - dX^\mu B^{(2)}_{\mu 9} \\ dU + dX^\mu B^{(1)}_{\mu 9} \end{pmatrix} \tag{4.116}$$

となることより、この compact 化された空間は、Moduli $\mathcal{M}$ で、 Z の combination で折り込まれていることが分かる。τ がこの compact 空間の Moduli なのである。

さてこの対応から、まさに F-theory と呼ばれているものと対応がつきそうだが、ここで得られた U、V という 11、12 次元目の部分の metric は (4.107) を見ても分かるように signature が共に space-like である。従ってこの全 signature は (1,11) となり、hetero (2,1) string 等で言うところの (2,10) とは異なる。このことは D-3-brane の world volume signature が (2,2) でなく (1,3) であることに関係があるだろうが、これらの signature の違いの間の論理的つながりは未だ見つかってない。

[13]以前の数勘定とも (4.109) の condition で丁度対応が付いている。

4.7 まとめ

以上、この章では D-brane action の dual と microscopic theory of extended object (Nambu-Goto action) の関係を、string theory の strong coupling の振る舞い、S-duality、M、 F-theory とからめて見てきた。

まとめると、

$$
\begin{array}{ccc}
\text{D-1-brane action} & -\text{dual} \rightarrow & SL(2,\mathbb{Z})\ \text{solitonic tension} \\
 & & \text{を持つ NG string action} \\
\text{D-2-brane action} & -\text{dual} \rightarrow & \text{11 次元 membrane action} \\
\text{D-3-brane action} & -\text{dual} \rightarrow & \text{D-3-brane action (self dual)} \\
\text{double-dimensional reduced} & & \text{double-dimensional reduced} \\
\text{D-3-brane action} & -\text{dual} \rightarrow & \text{12 次元 3-brane action}
\end{array}
\tag{4.117}
$$

更にこの操作は続けられそうだが、これより大きい D-p-brane action では $\mathcal{F}$ の equation of motion が非常に非線形になり解きにくい。しかし問題としては魅力があり、これが高い p ではどう magnetic dual が見えるのかとか、また D-5-brane action が 14 次元で self-dual であることを考えるとこれらと NG action との間の関係はどうなっているのかなど、dual がうまくできれば新たな dynamics についての情報を提供するかも知れない。

Chapter 5

これからの展望と問題

以上、本 review では D-brane の導入と、M、F-theory としての 11、12 次元と超弦理論の強結合との関係、そしてその中での D-brane の重要性を見てきた。その中には色々な idea やたくさんの consistency があるが、それらには未だうまく解決（説明）されていない事柄を仮定している上で成立している事柄もある。D-brane、M-theory、 F-theory について順に問題点をあげておこう。[1]

D-brane

一つには、4-2 節で見たように D-brane action が $F=\mathrm{constant}$ としてしか導かれていないということである。F が X に依存する場合、重心 (zero mode) まわりで展開して、∂F などの term が存在する。[2]これらをも考慮すると、section 2-4-1 での boundary state の construction がたちまち難しくなる。（つまり無限個の non-harmonic oscillators の coherent state の問題に帰着されるのだが、もちろん厳密には解けず、perturbative にも、無限個の方程式があるので困難がある。）σ-model としてのアプローチも、Dirichletboundary condition に対してはこの correction は計算されていない。[3]

この correction （α' correction になっている）が重要なのは、本来この term があるはずなのに無いとして D-brane action の dual 等を考えて consistent になってしまっているということである。恐らく D-brane action の correction term は dual を取ると例えば membrane action の correction terem としての Ricci scalar term of world volume metric になっているであろう。[4]しかし propagate する場を integrate out すること（dual）にどのくらい意味があるか、また実際実際その dual の計算は non-linear で非常に複雑になるので、その計算方法の確立などが、現在の string theory の duality を確かめるうえで大きく関わってくることと思われる。

[1]以下の文章は僕の関心のあることで、他にも重大な問題があるに違いない。疑問をお持ちの方はぜひ議論させていただきたい。

[2]Personal communication with M.Okashi.

[3]All Neumann boundary condition については Tseytlin の計算がある。[37]

[4]これはまったくの僕の独断である。conjecture というと格好が良い。

また Witten は、Supersymmetric Field Theory の non-perturbative method で得られた vacuum configuration を用いて、D-brane の bound state を解析した [6]。この中で重要なのは D-brane の位置を表す座標 Q が gauge 場の V.E.V.（Wilson line）で与えられているということで、これはすなわち D-brane（座標）を第一量子化することが、string のある field（gauge 場 A_μ ）を第二量子化することに対応するということを意味する。[5] String Field Theory の枠組みでの gauge 場の理解と、D-brane の量子化の理解が、例えば D-brane action と String field Theory の action との関係に現れないだろうか？ 未だ Strinmg Field Theory における D-brane の存在と可能性は議論が少なく、今後の発展が期待できる。

そのほかにも色々な可能性がある。（例えば non-BPS soliton の D-brane 記述はどうなっているだろうか、等。[6]）これらの問題は、この後述べる M-theory （11 次元）、F-theory（12 次元）にも密接に関係し、次元の枠を超えた話題を与えてくれるのである。

M-theory

まず M-theory を与えるであろうと思われる supermembrane theory には、量子化などの色々な問題がある。これを解決することが重要であるが、そのためには section 4-4 で見た、D-2-brane action との対応が hint になるであろう。つまり、D-2-brane は（string の意味で）既に量子化されているからである。D-2-brane の振動は open string の excitation で表されることから、fundamental membrane の振動もこの様に膜に付着する紐の描像で考えられるかも知れない。

また、膜が巻き付いたり compact 化を受けたり更に tension が無限大になったりするとそれは string になると考えられるが、この対応が（例えばある膜は string 極限のまわりで展開することが出来るかも知れないなど）compact 化の機構を考えるうえでも重要であろう。その意味で、string $\rightarrow$ particle の対応とも絡めて[7] 調べるべきであろう。

F-theory

F-theory を語るうえで重要なのは negative signature の数である。D-3-brane と (2,2) signature はどのように関係するのであろうか。

(2,2) signature を与える理論として $\mathcal{N}=2$ string （または hetero (2,1) string）が提唱されているが、ここで面白いのは $\mathcal{N}=1$ string theory の unification として $\mathcal{N}=2$ string が出てきているという点である。これは universal string の概念に沿っている。universal string の話は純代数的であり、その真空の構造についてこの $\mathcal{N}=2$ string における $\mathcal{N}=1$ の記述が hint を与えるかも知れない。

[5] Personal communication with A.Tokura.

[6] これは、上で挙げた ∂F のある D-brane action と関係するであろう。D-1-brane action の dual が exact であるためには ∂F term は存在して欲しくない。実際 Schmidhuber はそう conjecture しているが、これは、∂F term = non-BPS soliton と考えればこれが BPS soliton に decay するときに closed string を emit して F = constant におちつく、という描像を描くことが出来る。

[7] Personal communicaton with S.Heusler.

以上、色々な問題点を挙げてきたが、これらは現在の発展の大きな阻害としてではなくむしろ、大きな発展の途上においての試金石と言うべきものであろう。Introduction で述べたように、String theory での目標は、非摂動的理解から真空の構造すなわち compact 化の機構を理解し決定する事であるが、そのためには M-theory、 F-theory では恐らく決定的ではない。しかし、D-brane の登場からの string duality の理解は、この方向への重要な一歩なのである。

Acknowledgement

色々と議論に応じてくださった研究室の皆さん、東大の明石君、ありがとうございました。

Bibliography

[1] N.Seiberg and E.Witten, 'Electric - Magnetic Duality, Monopole Condensation, and Comfinement in $\mathcal{N} = 2$ Supersymmetric Yang-Mills Theory', hep-th/9407087
N.Seiberg and E.Witten, 'Monopoles, Duality and Chiral Symmetry Breaking in $\mathcal{N} = 2$ Supersymmetric QCD', hep-th/9408099

[2] N.Seiberg, 'Electric-Magnetic Duality in Supersymmetric Nonabelian Gauge Theories', hep-th/9411149

[3] David I.Olive, 'Exact Electromagnetic Duality', hep-th/9508089

[4] C.M.Hull and P.K.Townsend, 'Unity of Superstring Dualities', hep-th/9410167

[5] E.Witten, 'String Theory Dynamics in Various Dimensions', hep-th/9503124

[6] E.Witten, 'Bound States of Strings and p-Branes', hep-th/9510135

[7] M.J.duff, R.R.Khuri and J.X.Lu, 'String Solitons', hep-th/9412184

[8] J.Polchinski, 'Dirichlet Branes and Ramond-Ramond Charges', hep-th/9510017

[9] J.H.Schwartz, 'The power of M Theory', hep-th/9510086

[10] C.Vafa, 'Evidence for F Theory', hep-th/9602022

[11] C.Hull, 'String-String Duality in Ten Dimensions', hep-th/9506194

[12] M.B.Green, J.H.Schwarz and E.Witten, 'Superstring Theory', vol.1 and 2, Cambridge, 1987

[13] J.Polchinski, S.Chaudhuri and C.V.Johnson, 'Notes on D-branes', hep-th/9602052

[14] J.Polchinski and Y.Cai, 'Consistency of Open String Theories', Nucl.Phys.**B296**(1988) 91

[15] R.I.Nepomechie, 'Magnetic Monopoles from Antisymmetric Tensor Gauge Fields', Phys.Rev.**D**,Vol.31, No.8(1985), 1921

[16] W.Nahm, 'Supersymmetries and Their Representations', Nucl. Phys. **B135**(1978) 149

[17] E.Cremmer, B.Julia and J.Scherk, 'Supergravity Theory in 11 Dimensions', Phys. Lett. **76B**(1978) 409

[18] P.Candelas, G.Horowitz, A.Strominger and E.Witten, 'Vacuum Configurations for Superstrings', Nucl.Phys. **B258**(1985) 46

[19] M.F.Sohnius, 'Introducing Supersymmetry', Phys. Rep. 128(1985), 39

[20] C.G.Callan and J.M.Maldacena, 'D-brane Approach to Black Hole Quantum Mechanics', hep-th/9602043

[21] C.M.Hull and P.K.Towasend, 'Unity of Sperstring Dualities', Nucl. Phys. **B438**(1995) 109-137, hep-th/9410167

[22] C.M.Hull, 'String Dynamics at Strong Coupling', hep-th/9512181

[23] I.Bars and S.Yankielowicz, 'U-duality multiplets and Nonperturbative Superstring States', hep-th/9511098

[24] K.Kikkawa and M.Ymasaki, Phys.Lett.**B149**(1984)357

[25] A.Giveon, M.Porrati and E.Rabinovici, 'Target Space Duality in String Theory', Phys.Rep.**244**(1994)77-202

[26] P.K.Townsend, 'D-branes from M-branes', hep-th/9512062, Phys. Lett.**B373**(1996),68

[27] P.K.Tawnsend, three lectures about mambranes, 'superstrings '88', 1988

[28] H.Kunitomo, talk at Kashikojima, 1996

[29] D.Kutasov and E.Martinec, 'New Principles for String/Membrane Unification', hep-th/9602049

[30] D.Kutasov, E.Martinec and M.O'Loughlin, 'Vacua of M-theory and N=2 strings', hep-th/9603116

[31] R.G.Leigh, 'Dirac-Born-Infeld Action from Dirichlet σ-model', Mod.Phys.Lett. **A** Vol.4 No.28 (1989) 2767

[32] C.G.Callan, C.Lovelace, C.R.Nappi and S.A.Yost, 'String loop Corrections to Beta Functions', Nucl.Phys.**B288**(1987)525-550

[33] C.G.Callan, C.Lovelace, C.R.Nappi and S.A.Yost, 'Loop Corrections to String Equations of Motion', Nucl.Phys.**B308**(1988)221

[34] H.Ishikawa, Talk at YITP and Kashikojima, 1996 (unpublished)

[35] C.Schmidhuber, 'D-brane Actions', hep-th/9601003

[36] J.H.Schwarz, 'An $SL(2,\mathbb{Z})$ Multiplet of Type IIB Superstrings', hep-th/9508143

[37] A.A.Tseytlin, 'Partition-function Representation for open Superstring Effective Action', Nucl.Phy6s.**B331**(1988/89)205-252

[38] A.A.tseytlin, 'Self-Duality of Born-infeld Action and Dirichlet 3-Brane of Type IIB Superstring theory', hep-th/9602064

[39] D.P.Jatkar and R.S.kalyana, 'F-theory from Dirichlet Three-branes', hep-th/9606009