高次元時空の ワープト コンパクト化と その物理

東京大学大学院理学系研究科物理学専攻

96103

早川 祥子

目 次

第 1 章　導入 **4**
1.1　高次元場の理論を考える動機 4
1.2　重力の取り扱い方 5
1.3　高次元場の四次元への reduction 8
1.4　高次元がなぜ観測されないか 9

第 2 章　bulk 中の brane **13**
2.1　junction condition 13
2.2　AdS_5 空間中に 3-brane が一つある解 15
2.2.1　background 15
2.2.2　摂動：RS ゲージ 17
2.2.3　摂動：brane による境界条件 21

第 3 章　hierarchy 問題 **25**
3.1　高次元の中の brane 描像 25
3.2　Randall-Sundrum 1 モデル 27
3.2.1　set up 27
3.2.2　hierarchy 問題のための解釈 29
3.3　Randall-Sundrum 1 モデルの安定化 31
3.3.1　bulk 中の場で radion を安定化させるモデル 32
3.3.2　五次元 graviton のゼロモードとしての radion 35
3.3.3　安定化と四次元重力 40

第 4 章　宇宙項問題 **48**
4.1　高次元の warped コンパクト化 49
4.2　Rubakov-Shaposhnikov モデルの解析 54
4.3　background ゲージ場の導入 56
4.4　3-brane の導入 59

第 5 章　まとめ **64**

付 録 A notation **66**

付 録 B ベッセル関数 **67**

付 録 C Randall-Sundrum 2 brane モデルにおける bulk 中の場 **68**

第1章　導入

1.1　高次元場の理論を考える動機

現在、観測されている時空は四次元 Minkowski 空間である。五次元以上の時空があることを示唆するいかなる物理現象もいまのところ発見されていない。それにもかかわらず、高次元時空を考える試みは古くからやられてきた。この背景にあるものはなにか。つまるところ、すべての試みは我々が重力というもの、さらには時空というものに対する理解を完全にはしていないため、少しでもその理解を深めようとする努力ではないか。

場の理論の立場からみれば、余次元を導入することは、四次元上の場に連続的な自由度を持たせることに相当する。従って、純粋に形式的に余次元を新しい自由度として捉えることは、Standard Model を超える物理を考える一つの systematic な方法となりうる。

歴史的に興味深い最初の試みは Kaluza,Klein による、時空を五次元に拡張することで四次元重力と電磁場を統一しようとするものであった [1]。これは余次元方向の一般座標変換である local symmetry を電磁場の $U(1)$ gauge symmetry と解釈しようというのである。このことを作用形式で表すと基本的には次のようになる。

$$S = \int d^4x dy \sqrt{-g_5} R_5 = \int d^4x \sqrt{-g_4} \left(R_4 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) \tag{1.1.1}$$

ここで g_5,R_5 はそれぞれ五次元の metric G_{MN} からつくられる determinant と Ricci scalar であり、g_4,R_4 は四次元の metric での determinant,Ricci scalar である。$F_{\mu\nu}$ は四次元の足を持つ gauge 場の field strength を表す。この時四次元 metric $g_{\mu\nu}$ と gauge 場 A_μ は五次元 metric のなかに以下のように入っている。

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - \left(dy^2 + A_\mu dx^\mu \right)^2 \tag{1.1.2}$$

簡単のため今 $g_{\mu\nu}$ と A_μ に余次元方向 y の依存性は入っていないとする。また $G_{yy} = -1$ においた。余次元を space like にとるのは四次元理論としてみたとき gauge 場の運動項が well defined になるため必要なことである。さてこのようにおいたとき、五次元での一般座標変換は四次元でどうみえるだろうか。

$$y' = y + \lambda(x^\mu), \tag{1.1.3}$$

$$A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \lambda \tag{1.1.4}$$

これはまさに四次元での gauge 変換である。このようにして Kaluza や Klein らは四次元でみえる $U(1)$ gauge 理論と重力が五次元の重力理論において統一されているのではないかと考えた。Kaluza-Klein 理論は non abelian gauge 理論にも拡張できる [1]。この理論は現実の問題を解決するような必然的なものではないが、重力の本質を探ろうという立場からも非常に魅力的なアイディアである。

一方、弦理論からすれば、高次元時空というものはもはや必然である [2]。弦理論において時空とは弦がつくる world sheet が埋め込まれる多様体であって、物理は world sheet 上の Lagrangian で決定される。時空は world sheet 上の場であり、第一量子化をしたときに anomaly が出ないという条件から時空の次元が定まる。だが有効理論で四次元に落としてくる dynamics という、高次元理論を考える際の本質的な問題についてはまだよく判っていない。この問題は弦理論からのアプローチでも場の理論からのアプローチでも困難となっている。

場の理論の諸問題を、高次元を考えることで解決しようという試みも多くやられている。もし非常に基礎的な問題が高次元を考えることで完全に解決されるのであれば、それは高次元の存在を間接的に示唆しているともいえるし、あるいはまた余次元を内部自由度として解釈し直すことで完全に四次元の理論として焼き直せるかもしれない。この論文では特に宇宙項問題と hierarchy 問題へのアイディアを取り上げる。これらのアイディアはどうしてもモデルに対する依存性が高くなってしまうが、各々のモデルの中に非常に豊富な内容が含まれていて、興味深い。

宇宙項問題と hierarchy 問題のどちらも場の量子論と重力とを考え併せたときに出てくるものである。これらに対する完全な解決策が得られていないことは、我々の重力への理解が不充分であるが故と強く感じさせる。

1.2 重力の取り扱い方

この節では高次元時空に限らず、一般に場の理論で重力を扱う場合にスタンダードにとられている方法について簡単に説明しておく。

Einstein 方程式は最小作用の原理から導きだすことができるが、重力場の理論は普通の場の量子論のように量子化することが非常に困難なため、現在のところ、古典論の範囲内でしか重力を考えることができない。つまり、経路積分形式では時空の metric は常に Einstein 方程式の解として与えられ tree level の議論しかできない。まず background となる metric を Einstein 方程式の解から決定する。これは重力場の真空期待値と解釈される。四次元 Minkowski metric は、四次元で宇宙項がゼロのときの最も対称性の高い background といえる。このようにして metric の background が決まって初めて物質場の経路積分が定義できる。これは経路積分の測度の定義に時空の距離という概念が入っているためである。

観測されている重力はこの background からの摂動で与えられる。この摂動解もあくまで Einstein

方程式の解であることに注意したい。現在観測されている重力は非常に弱いので、それらは線形の摂動をみれば十分といえる。この摂動は重力波として時空を伝わる。この重力波の自由度は gauge 固定をすると 2 ヶでありちょうど massless graviton の自由度と一致している。Minkowski 空間での重力波の記述には、例えば transverse traceless gauge（以下、TT gauge と略記）に固定することが多い。これは metric $g_{\mu\nu}$ を Minkowski metric $\eta_{\mu\nu}$ と線形の摂動部 $h_{\mu\nu}$ とに分けた時、($g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$)

$$\partial^\nu h_{\mu\nu} = 0, \quad h^\mu_\mu = 0, \tag{1.2.5}$$

を満たすような gauge である。

ここで少し本論とずれて、Minkowski 空間上の摂動を TT gauge に固定する方法を実際にやっておこう [3]。というのは、次章以降で四次元の massless graviton が実際にあるか調べるのに TT gauge に固定するような状況が多く出てくるからである。まず $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ のように Minkowski background と摂動部に分ける。ここで

$$\hat{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h, \quad h = h^\mu_\mu, \tag{1.2.6}$$

を新たに定義する。これは後で置くゲージ固定の条件を見易くするためである。この二つは以下の関係にある。

$$h_{\mu\nu} = \hat{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\hat{h}, \quad \hat{h} = -h. \tag{1.2.7}$$

微少な座標変換 $x^{\mu\prime} = x^\mu + \epsilon^\mu$ において

$$\hat{h}'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \partial_\mu\epsilon_\nu - \partial_\nu\epsilon_\mu + \eta_{\mu\nu}\partial_\rho\epsilon^\rho \tag{1.2.8}$$

という変換をする。さて

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\Box h_{\mu\nu} + \partial_\mu\partial_\nu h - \partial_\nu\partial_\alpha h^\alpha_\mu - \partial_\mu\partial_\alpha h^\alpha_\nu) \tag{1.2.9}$$

であるから真空での Einstein 方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned} &\partial_\nu\partial_\alpha h^\alpha_\mu + \partial_\mu\partial_\alpha h^\alpha_\nu - \Box h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\left(\partial^\alpha\partial^\beta h_{\alpha\beta} - \Box h\right) \\ &= -\Box\hat{h}_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\partial^{\alpha\beta}\hat{h}_{\alpha\beta} + \partial_\nu\partial_\alpha\hat{h}^\alpha_\mu + \partial_\mu\partial_\alpha\hat{h}^\alpha_\nu = 0 \end{aligned} \tag{1.2.10}$$

ここでゲージ固定を

$$\partial^\nu\hat{h}_{\mu\nu} = 0 \tag{1.2.11}$$

と取ると、真空での Einstein 方程式は

$$\Box\hat{h}_{\mu\nu} = 0 \tag{1.2.12}$$

になる。ゲージ条件は線形であるから

$$\hat{h}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha} \tag{1.2.13}$$

と平面波の形に解を取っても一般性を失わない。よって

$$k^2 = 0, \quad k^\nu A_{\mu\nu} = 0 \tag{1.2.14}$$

式 (1.2.11) のゲージ固定は

$$\partial^\nu \hat{h}_{\mu\nu} - \Box \epsilon_\mu = 0 \tag{1.2.15}$$

となる ϵ_μ を取ってくればよい。ところが実は residual gauge パラメータとして $\xi^\mu,\ s.t.\ \Box\xi^\mu = 0$ が存在する。この ξ^μ を固定すれば完全にゲージ固定をしたことになる。

$$\xi^\mu = C^\mu e^{ik_\alpha x^\alpha}, \quad C^\mu = constant\, vector \tag{1.2.16}$$

とおくことができるから、残ったゲージ固定の条件として、ある $u^\mu (\equiv constant\, vector)$ について、

$$u^\nu \hat{h}_{\mu\nu} = 0 \tag{1.2.17}$$

を課す。しかしこの条件は $k^\mu u^\nu \hat{h}_{\mu\nu} = 0$ が既に満たされているため三つ分の自由度しか持たない。従ってもう一つ、

$$\hat{h}^\mu_\mu = 0 \tag{1.2.18}$$

という条件を置く。例えば具体的に

$$k^\mu = (1,1,0,0), \quad u^\mu = (1,0,0,0)$$

とすると

$$\begin{cases} A_{0\mu} = A_{1\mu}, \\ A_{0\,0} - C_0 - C_1 = A_{1\,0} - C_0 - C_1 = 0, \\ A_{2\,0} - C_2 = A_{3\,0} - C_3 = 0, \\ -A_{0\,0} + A_{1\,1} + A_{2\,2} + A_{3\,3} - 2C_0 + 2C_1 = 0, \end{cases}$$

より C^μ が決定され、$A_{2\,2}$、$A_{2\,3}$ の二つのみ独立であることが明らかになる。また条件 (1.2.11)(1.2.17) というゲージでは $h_{\mu\nu} = \hat{h}_{\mu\nu}$。従って $h_{\mu\nu}$ は TT gauge に固定されたことになる。

また background として選んだ真空の安定性をみるのにもこの摂動を調べる必要がある。摂動部である二階の対称テンソルが gauge を固定したあと tachyonic であったら、background の空間が不安定と判明する。

上に述べた取り扱いでは、真空というものを手で与える必要があった。tachyonic mode があるかどうか調べ不安定解を排除することはできても、作用を与えた段階でなんらかの解が真空として一意に定義できるのか、あるいはまた複数の安定解があったときに力学的にそれらの間に関係がつくのか、この取り扱いからは何もいえない。しかしまたこれ以上の取り扱いは場の理論の立場からは現在のところできていないのである。

1.3 高次元場の四次元への reduction

高次元で定義された場は四次元の有効理論においてどうみえるのだろうか。場は余次元座標に依存しているだけでなく、ベクトル場やテンソル場は余次元方向の足を持っている。何らかの方法で（これについては次節で述べる）余次元方向がみえなくなって四次元の理論に落ちたとき、もとにあった物理的な自由度はどうなるか。簡単のため五次元 Minkowski 空間が四次元 Minkowski 空間に落ちる時について説明する。

スカラー場 $\phi(x^\mu, y)$ の場合は単純である。余次元方向 y が半径 r にコンパクト化されているとき Fourier 展開して、

$$\phi(x^\mu, y) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{in\frac{y}{r}} \hat{\phi}_n(x^\mu) \tag{1.3.19}$$

となる。五次元 Minkowski 空間上での質量が m で与えられる自由粒子の field equation から

$$\begin{aligned} &\partial^M \partial_M \phi(x^\mu, y) - m^2 \phi(x^\mu, y) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{in\frac{y}{r}} \partial^\mu \partial_\mu \hat{\phi}_n(x^\mu) - \sum_{n=0}^{\infty} e^{in\frac{y}{r}} (m^2 + {m_n}^2) \hat{\phi}_n(x^\mu) = 0, \end{aligned} \tag{1.3.20}$$

$$m_n = \frac{n}{r}, \tag{1.3.21}$$

がいえる。以後 $M, N, ...$ は高次元時空の足を、$\mu, \nu, ...$ は四次元時空の足を、それぞれ記述することにする。上の式から四次元でみた時質量 $\sqrt{m^2 + {m_n}^2}$ をもったスカラー場 $\hat{\phi}_n(x^\mu)$ が無限個存在することがわかる。これらの mode を Kaluza-Klein mode と呼ぶ。y 方向がコンパクト化されていないときは四次元の有効質量は連続的なスペクトラムとなる。四次元 Minkowski が一般の時空に埋め込まれている場合でも同様のことが成り立つ。つまり高次元での field equation が $(\partial^\mu \partial_\mu + \hat{L})\phi = 0$ の形になっていれば、余次元座標に対する微分演算子 $\hat{L}$ の固有値が四次元での質量の二乗となる。

ベクトル場やテンソル場、スピノル場でも、余次元座標依存性については上と同様に Kaluza-Klein mode が現れる。ただ、今度は場自体が、等価原理によって保証される $SO(d-1,1)$ 群の表現の足を持つ。d 次元が四次元に落ちるとはこの $SO(d-1,1)$ の部分群である $SO(3,1)$ の表現として場を解釈するということだから、$\alpha, \beta, ...$ で余次元座標の足を表すことにすると、

$$A_M \to A_\mu(vector), A_\alpha(scalar), \tag{1.3.22}$$

$$h_{MN} \to h_{\mu\nu}(tensor), h_{\mu\alpha}(vector), h_{\alpha\beta}(scalar), \tag{1.3.23}$$

のようになる。Kaluza-Klein の original な仕事はこのテンソル場のうちのゼロモード (四次元でみて massless) のみに着目したものであった。フェルミオン場では $SO(d-1,1)$ のスピノル表現をつくる必要がある。例えば五次元では Clifford 代数として、四次元の $\{\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3\}$ のほかに $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ をとってくればよい。従って五次元の一般の空間での field equation が spin

connection を用いて表された時、それは四次元での右巻きフェルミオンと左巻きフェルミオンとの、一階の連立微分方程式となる。

gauge 対称性がある時には自由度の勘定は少し非自明である。再び五次元 Minkowski の場合を例にとろう。今 $U(1)$gauge 場 A_M があるとする。これは gauge 変換で $A_M \to A_M + \partial_M \lambda(x^\mu, y)$ とうつる。これにより例えば、massive モードについては $A_y = 0$ という gauge に移ることができる。しかしこれだけではまだ完全に gauge 自由度を除去しきれていない。まだ $\xi(x^\mu)$ という gauge パラメータが残っている。Minkowski 空間においてゼロモードとは場に y 依存性がないことであるから、この residual gauge 対称性はゼロモード $A_\mu(x^\mu)$ の四次元での gauge 対称性に対応する。よって gauge 場 A_M の四次元でみたときの自由度は、massless ベクトルから二つ、massless スカラー場から一つ、massive ベクトル場が Kaluza-Klein モードごとに三つずつという勘定になる。

graviton の自由度勘定は次のようになる。五次元 Minkowski からの摂動 h_{MN} を考えると、これは微分同相により

$$h_{MN} \to h_{MN} - \partial_M \epsilon_N(x^\mu, y) - \partial_N \epsilon_M(x^\mu, y) \tag{1.3.24}$$

と変換する。$U(1)$gauge 場の時と同様に、massive モードについては上の変換で $h_{yy} = 0, h_{\mu y} = 0$ と gauge 固定することができる。しかしゼロモードについては $\xi_\mu(x^\mu), \xi_y(x^\mu)$ という gauge パラメータが残っている。前者は四次元での graviton の微分同相変換、後者は massless ベクトル場 $h_{\mu y}$ の gauge 変換パラメータに相当する。よって四次元でみたときの自由度は graviton $h_{\mu\nu}(x^\mu)$ から二つ、gauge 場 $h_{\mu y}(x^\mu)$ から二つ、massless スカラー場 h_{yy} から一つ、massive テンソル場が Kaluza-Klein モードごとに五つずつ、ということになる。これらの gauge 対称性を持った場の自由度は background の空間の違いによって異なる可能性があるので注意を要する。後に AdS_5 の空間で具体的にこのことを考えたい。

1.4 高次元がなぜ観測されないか

高次元モデルが仮に現実的なものなのだとしたら、なぜ現在、余次元が観測されていないのだろうか。等方的な d 次元 Minkowski 空間があったら、重力や Standard Model gauge のポテンシャルは $r^{-(d-3)}$ の形になってしまう。一方現在の観測では Newton ポテンシャルは 1cm の精度で確かめられている。さらに SM の長距離力については weak スケールまでの精度で $1/r$ のポテンシャルが観測されている。

この疑問に対する標準的な答えは、余次元が非常に小さくコンパクト化されているというものである。半径が r_c でコンパクト化されていれば物質の Kaluza-Klein モードは $1/r_c$ のオーダーの質量を持つから、現在のエネルギー領域では観測できない、と思えばよい。また重力のポテンシャルについては四次元の graviton が通常の Newton ポテンシャルを再現し、その Kaluza-Klein モードはそれぞれ湯川ポテンシャルの寄与をする。最も軽いモードでさえ e^{-r/r_c} という supression

factor を持っているので、Newton law に対する補正は小さくなる。

また、近年になって、我々が住んでいる四次元は高次元空間内にある $3+1$ 次元の面である、というアイディアが生まれてきた [4]、[5]、[6]、[7]、[8]。このとき高次元全時空を bulk と呼び、$3+1$ 次元面を 3-brane と呼ぶ。この brane の起源は弦理論における D-brane であるかもしれないし、Domain wall のような soliton 解であるかもしれない。background として 3-brane を扱う時にはその起源は問わず、手で Einstein-Hilbert 作用の中に適当な tension を持たせて入れる、ということをする。この brane 描像では SM 粒子はなんらかの理由で brane 上に束縛されていることが前提であるから、SM 粒子は直接余次元を感知しない。それに対し高次元の graviton は bulk 中を飛ぶことができる。Arkani-Hamed etc. の Hierarchy 問題へのアプローチ [8] では、Newton ポテンシャルを再現するためにやはりコンパクトな余次元を仮定しているが、この場合、コンパクト化のサイズに対する制限が観測されている Newton law からしかこないので、ある程度大きな余次元が実現できる。brane 描像で、また別の興味深いモデルを軽く取り上げよう。これは Randall と Sundrum が、後に述べる hierarchy 問題の set up で発見したものであって、この論文では便宜的に Randall-Sundrum 2 モデルと呼ぶことにする [9]。この Randall-Sundrum 2 モデルについては次章でもっと詳細に触れる。このモデルでは AdS_5 空間中に positive tension を持った 3brane が一枚あり、かつ、brane が Z_2 パリティの固定点となる background をとる。高次元の graviton の波動関数を求めるとポテンシャルは、ちょうど brane の tension のせいで固定点で $-\infty$ のデルタ関数型の落ち込みがありそのすぐ外側は AdS のせいで volcano 型の、頂上から再びなだらかに下っていく形をしている。したがって、graviton のゼロモードのみ brane に局在することができる。

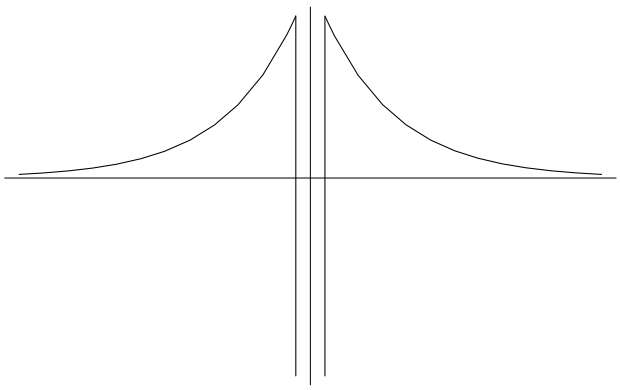

図 1.1: volcano 型のポテンシャル

その他の Kaluza-Klein モードは brane 上では有効質量 m の小さいところで $\sqrt{m}$ に比例した値を持つ。ここで、4 次元重力として観測されるのは brane 上の induced metric であることに注意しよう。すると、brane 上に局在したゼロモードが Newton law を再現し、Kaluza-Klein モードはその補正を与える。これは m の小さいところでは各モードごとに $m \times e^{-mr}/r$ であるから、余次元がコンパクトでなくて、m が連続スペクトラムだったとしても全部で $\int_0^\infty dm\ m \times e^{-mr}/r \propto 1/r^3$

分の補正しか与えない。これにより大きな余次元というものが許容されることになる。

また心配なのは一般には余分なスカラーのゼロモードがあるためにBrans-Dicke タイプの重力になりはしないか、ということだ。Brans-Dicke 理論とは長距離力を担う場として graviton の他にスカラー場 ϕ を重力理論の中にとりいれたものである [10]、[11]。一般座標変換に対して共変な、最も単純な場の方程式は次で与えられる。

$$\Box\phi = \frac{8\pi}{3+2\omega_{BD}}T \tag{1.4.25}$$

ただしここで T は重力場とスカラー場 ϕ を除くすべての物質場のエネルギー運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ のトレースであり、また定数 ω_{BD} は次元を持たないパラメータで、Dicke coupling constant(Brans-Dicke パラメータ) と呼ばれる。この理論においては ϕ の期待値 $\langle\phi\rangle$ が通常の重力定数 G の逆数を与える。つまり

$$\langle\phi\rangle \sim \frac{1}{G} = 1.35\times 10^{28} g\, cm^{-1}. \tag{1.4.26}$$

従って重力場の方程式は、通常の Einstein 方程式の G について上式から誘発される置き換え $G \to 1/\phi$ を行うことで得られる。

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi}{\phi}\left[T_{\mu\nu} + T^{\phi}_{\mu\nu}\right]. \tag{1.4.27}$$

$T^{\phi}_{\mu\nu}$ はスカラー場 ϕ のエネルギー運動量テンソルである。等価原理が成り立つとすると普通の物質場の運動方程式には重力場のみが相互作用していなければならない。これは次式が成立することを意味する。

$$\nabla_\mu T^\mu_\nu = \partial_\mu T^\mu_\nu + \Gamma^\mu_{\mu\lambda}T^\lambda_\nu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu}T^\mu_\lambda = 0. \tag{1.4.28}$$

このことから結局 $T^{\phi}_{\mu\nu}$ の形が決定される。

$$T^{\phi}_{\mu\nu} = \frac{\omega_{BD}}{8\pi\phi}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - \frac{\omega_{BD}}{16\pi\phi}g_{\mu\nu}\nabla_\lambda\phi\nabla^\lambda\phi + \frac{1}{8\pi}\nabla_\mu\nabla_\nu\phi - \frac{1}{8\pi}g_{\mu\nu}\Box\phi. \tag{1.4.29}$$

これを式 (1.4.27) に代入し、

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi}{\phi}T_{\mu\nu} + \frac{\omega_{BD}}{\phi^2}\Big(\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\nabla_\lambda\phi\nabla^\lambda\phi\Big) + \frac{1}{\phi}\Big(\nabla_\mu\nabla_\nu\phi - g_{\mu\nu}\Box\phi\Big) \tag{1.4.30}$$

を得る。これが最小作用の法則から出てくるとすると作用は次のように書ける。

$$S = \frac{1}{16\pi}\int d^dx\sqrt{-g}\left[\phi R - \frac{\omega_{BD}}{\phi}\nabla_\mu\phi\nabla^\mu\phi + L\right]. \tag{1.4.31}$$

L は物質場のラグランジアンを指す。このような Brans-Dicke 理論は観測から強く制限されている。$\omega_{BD}\to\infty$ において理論は通常の Einsein 重力と massless スカラー場に帰着することを注意しておく。

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi}{\langle\phi\rangle}T_{\mu\nu} + O(\frac{1}{\omega_{BD}}), \tag{1.4.32}$$

$$\Box\phi = O(\frac{1}{\omega_{BD}}). \tag{1.4.33}$$

現在の観測では $\omega_{BD} > 3000$ という制限が得られている [12]。以上から、高次元理論から四次元有効理論を導き出す際に、作用が (1.4.31) の形になっているかどうか、つまりスカラーの自由度を持ち重力を伝えるものがあるかどうか、気をつける必要があるわけである。

また、brane 描像では SM 粒子が brane 上に拘束されるべし、という条件を前提としている。この、brane 上に粒子を束縛させる方法についてはいくつかのアイディアがある。これについては Appendix で、特に Randall-Sundrum の提唱した set up において軽く触れることにする。

1.1 節でも述べたが、上に述べたような高次元理論を四次元の有効理論に落としてくる方法はすべて結果論であって、いわば手で時空の background をおいたものである。この background を dynamical に選ぶようなメカニズムは、metric の真空期待値と解釈される background に対する理解が深まらない限り、作り出せないかもしれない。

第2章　bulk中のbrane

前章で述べたように、braneを考えることは高次元理論の可能性の幅を大きく広げる。のみならず、braneそのもののdynamicsが非常に内容が豊かでおもしろい。この論文で触れる宇宙項問題とhierarchy問題へのアプローチにおいてもbraneは重要な役割を果たす。そのためこの章でbraneについての基本的な取り扱いをまとめることにする。一般論の後に、braneのゆらぎを考える例として、特にRandall-Sundrum 2モデルのset upを取り上げる。

2.1　junction condition

時空にbraneのような面構造をもったエネルギーの局在化が起こった時、一般相対論ではどのように扱えばよいのだろうか。co-dimensionが1の時にはIsraelのjunction conditionと呼ばれる条件[13]が一般に成り立つ。

まず、bulkである時空V中にtimelikeな方向を含む超曲面Σがco-dimension 1で存在していたとする。前章と同様にbulkの座標の足は$\{M,N,...\}$で与え、Σ上の座標であるintrinsic coordinateの足については$\{\mu,\nu,...\}$で与える。が、Σは一般には平坦なMinkowskiではないことに留意する。またbulkのmetricは$\hat{g}_{MN}$で表す。さてΣはintrinsic coordinate ξ^μを持っている。またΣに垂直な単位ベクトルとしてn_M, $i.e.\ n_M n_N \hat{g}^{MN} = -1$がとれる。$\Sigma$の接ベクトル$e^M_{(\mu)}$は$\xi^\mu$が与えられれば定まる。この時$\Sigma$上の接ベクトル関数$A^\mu$に対し以下の式で新たなベクトルを定める。

$$A^M = A^\mu e^M_{(\mu)}, \quad A_\mu = A^M e^N_{(\mu)}\,\hat{g}_{MN} \equiv \vec{A}\cdot\vec{e}_{(\mu)} \tag{2.1.1}$$

このような定義をすればΣ上の一般相対論が記述できる。Σのmetricはinduced metricと呼ばれ、$g_{\mu\nu} \equiv \vec{e}_{(\mu)}\cdot\vec{e}_{(\nu)}$で与えられる。また$A_\mu$を、bulkのgeometryでもって、$\xi^\mu$の方向に"共変微分"すると

$$\hat{\nabla}_{\xi^\mu} A^M = \hat{\nabla}_{\xi^\mu}(A^\nu e^M_{(\nu)}) = \frac{\partial A^M}{\partial \xi^\mu} + A^N \hat{\Gamma}^M_{NL}\frac{dx^L}{d\xi^\mu} \tag{2.1.2}$$

ここで$\hat{\nabla}$はbulkのmetricで定義された共変微分を示し、$\hat{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}$はやはりbulkのmetricで定義されたクリストッフェル記号である。ところがこうして出てきたものはΣから飛び出てしまう成分

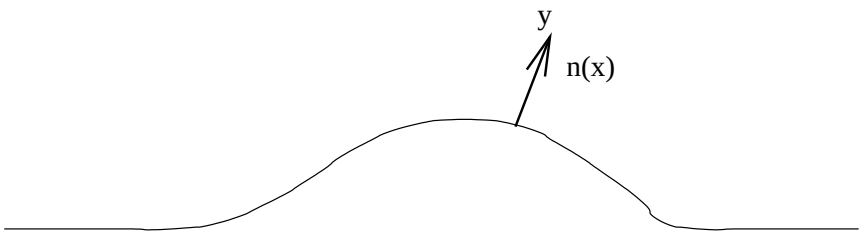

図 2.1: GN ゲージ

を持つ。きちんと Σ 上で定義された共変微分を作るにはこれを Σ に射影しなければいけない。こうして、Σ 上の共変微分が出来た。特にこの共変微分は反変ベクトル A_μ を用いて表すと

$$A_{\mu;\nu} \equiv \vec{e}_{(\mu)} \cdot \hat{\nabla}_{\xi^\nu} \vec{A} = \frac{\partial A_\mu}{\partial \xi^\nu} - A^\lambda \Gamma_{\lambda,\mu\nu}, \tag{2.1.3}$$

$$\Gamma_{\lambda,\mu\nu} \equiv \vec{e}_{(\lambda)} \cdot \hat{\nabla}_{\xi^\nu} \vec{e}_{(\mu)}, \tag{2.1.4}$$

となる。bulk$V$ の座標 x^M, 及び Σ の intrinsic coordinateξ^μ の形は具体的には

$$x^M = f^M(\xi^\mu), \quad e^M_{(\mu)} = \frac{\partial x^M}{\partial \xi^\mu} \tag{2.1.5}$$

となる。

さらに、brane の曲がり具合いの指標である extrinsic curvature $K_{\mu\nu}$ を定義しよう。

$$K_{\mu\nu} \equiv \vec{e}_{(\nu)} \cdot \hat{\nabla}_{\xi^\mu} \vec{n} \ = -\vec{n} \cdot \hat{\nabla}_{\xi^\mu} \vec{e}_{(\nu)} = -\vec{n} \cdot \hat{\nabla}_{\xi^\nu} \vec{e}_{(\mu)} = K_{\nu\mu}, \tag{2.1.6}$$

$$\hat{\nabla}_{\xi^\mu} \vec{n} = K^\nu_\mu \, \vec{e}_{(\nu)}, \tag{2.1.7}$$

さて brane 近傍では必ず Gaussian Normal(GN) ゲージが取れることが知られている。この Gaussian-normal ゲージとは Σ の intrinsic coordinate ξ^μ とそれに直交する方向 $(\vec{n})$ に y という座標軸を取って、ξ^μ, y で bulk の座標を張るものである (図 (2.1) 参照)。このとき Σ 近傍で bulk の metric は次のようになる。

$$ds^2 = g_{\mu\nu} d\xi^\mu d\xi^\nu - dy^2 \tag{2.1.8}$$

この $g_{\mu\nu}$ は前出の induced metric を指す。$g_{\mu y} = 0,\ g_{yy} = -1$ であることに注意する。Gaussian-normal ゲージでは brane は $y = constant$ に位置する。

かくして準備が整ったので、実際に V 中の Σ についてどのような条件が成立しなければいけないかを Gaussian-Normal ゲージで導き出そう。今、Σ によって分断される V を $V_\pm$ と表し、Gaussian-Normal ゲージを各々の $V_\pm$ に作る。つまり

$$x^\mu = \xi^\mu, \quad y = \pm(geodesic\ distance\ normal\ to\ \Sigma),$$

$$n_M = \delta^y_M, \quad e^M_{(\mu)} = \delta^M_\mu,$$
$$K^\pm_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial y} \quad . \tag{2.1.9}$$

V^+ と V^- で y の向きづけが反対になっていることに注意したい。また bulk、および induced metric から作られる brane の Ricci tensor をそれぞれ $\hat{R}_{MN}$, $R^\Sigma_{\mu\nu}$ で表すと、

$$\hat{R}_{\mu\nu} = -\frac{\partial K_{\mu\nu}}{\partial y} + R^\Sigma_{\mu\nu} + KK_{\mu\nu} - 2K^\lambda_\mu K_{\lambda\nu} \tag{2.1.10}$$

となることが分かる。一方、V が五次元の時、bulk の Einstein 方程式

$$\hat{R}_{MN} - \frac{1}{2}\hat{g}_{MN}\hat{R} = \frac{1}{4M^3}T_{\mu\nu} - \Lambda\hat{g}_{\mu\nu} \tag{2.1.11}$$

から

$$\hat{R}_{MN} = +\frac{1}{4M^3}(T_{MN} - \frac{1}{3}\hat{g}_{MN}\hat{T}) + \frac{2\Lambda}{3}\hat{g}_{MN} \tag{2.1.12}$$

ここで Λ は bulk の宇宙項、T_{MN} はエネルギー運動量テンソル、M は bulk の Planck 定数を表す。$\hat{T}$ は $\hat{g}^{MN}$ で縮約を取ることを意味する。この式の $\mu\nu$ 成分を Σ の近くのみで積分すると、式 (2.1.12) から宇宙項は落ちて、

$$[K_{\mu\nu}]^+_- = \frac{1}{4M^3}\int_{-\epsilon}^{+\epsilon} dy(T_{\mu\nu} - \frac{1}{3}\hat{g}_{\mu\nu}T) \tag{2.1.13}$$

という条件が結果的に出てくる。これを Israel の junction condition と呼ぶ。ϵ は微小な正数である。右辺のエネルギー運動量テンソルは無限小領域の積分だから、brane 上に局在したエネルギーや運動量のみ拾う。従って bulk の metric から見れば、brane があるところで、余次元軸に沿った傾きがとぶことになる。この条件式は今後非常に有用であることがすぐに分かるだろう。back ground 解を求めるだけであれば、brane 上のエネルギーと運動量の寄与を Einstein 方程式に δ 関数的に付け加えるだけでよい。上でやったように brane の近傍で Einstein 方程式を積分することで、bulk の metric の振る舞いが求まる。Israel junction condition がもっと有用なのは brane の揺らぎを含めた metric の摂動を考える場合である。このことについては次節で扱う。

2.2 AdS_5 空間中に 3-brane が一つある解

この節では第一章で軽く触れた Randall-Sundrum 2 モデルについて解析する。前述したようにこのモデルの特徴は余次元のコンパクト化をしなくても四次元重力理論が再現できる点にある。

2.2.1 background

まず set up であるが、もともとこのモデルは hierarchy 問題についてのモデル [14] から派生したものであるため、ここでは ad hoc に与えてしまう。bulk は五次元の AdS で background の

metric は次の形をしていると仮定する。

$$ds^2 = \hat{g}_{MN} dx^M dx^N = \sigma(y) g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu - dy^2 \tag{2.2.14}$$

この形の metric を warped metric と呼び、$\sigma(y)$ を warped factor と呼ぶことにする。bulk 中には負の宇宙項があるだけで、物質場は存在しない、としたとき Einstein 方程式

$$\hat{R}_{MN} - \frac{1}{2}\hat{g}_{MN}\hat{R} = -\Lambda \hat{g}_{MN} \tag{2.2.15}$$

の解として

$$\sigma(y) = e^{-2ky}, \quad k = \sqrt{\frac{-\Lambda}{6}}, \tag{2.2.16}$$

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu}, \tag{2.2.17}$$

があることが容易に分かる。ここに positive tension V_{brane} を持つ 3-brane を入れることを考えよう。3-brane は $y = 0$ に位置し、その induced metric は $\sigma(0) g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu}$ である。bulk と brane の作用を書くと次のようになる。

$$\begin{aligned} &S = S_{bulk} + S_{brane}, \\ &S_{bulk} = 4M^3 \int d^4x \int dy \sqrt{\hat{g}} \{ \frac{1}{2} \hat{R} - \Lambda \}, \\ &S_{brane} = \int d^4x \int dy \sqrt{\hat{g}} \{ L_{brane} - V_{brane} \} \delta(y = 0), \end{aligned} \tag{2.2.18}$$

L_{brane} は brane 上にある場のラグランジアンを指す。ただし background を求める時は brane の tension だけを考える。M は前節と同じで bulk の Plank スケールである。また $\hat{g} = \det \hat{g}_{MN}$ と表記した。さらに brane を固定点として両側で Z_2 対称性が成り立っているとする。すると Israel の junction condition 式 (2.1.13) からただちに $y = 0$ において

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \hat{g}_{\mu\nu}}{\partial y}\right]_-^+ = \frac{\partial \hat{g}_{\mu\nu}}{\partial y} &= \frac{1}{4M^3}(\hat{g}_{\mu\nu} V_{brane} - \frac{4}{3}\hat{g}_{\mu\nu} V_{brane}) \\ &= -\frac{1}{12M^3}\hat{g}_{\mu\nu} V_{brane} \end{aligned} \tag{2.2.19}$$

が導かれる。式 (2.2.16) より

$$V_{brane} = 24M^3 k. \tag{2.2.20}$$

これで brane が positive tension を持っていなければならないことが分かる。bulk は無限に広がっているが warped factor e^{-2ky} のおかげで四次元でみた有効体積要素は有限になる。つまり

$$d^4x \times \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\hat{g}}\, dy < \infty. \tag{2.2.21}$$

今 brane 上に我々は住んでいると思っているので、観測される metric は induced metric $g_{\mu\nu}$ であり、四次元の有効作用は y 方向に五次元作用を積分して得られる。(本来ならば場をすべて Kaluza-Klein モードに展開した後に y 積分をしなければならないが、この時点では background およびそのゼロモードの摂動である graviton のみ考えたいので単なる積分をして差し支えない。)

$$S_{eff} \supset \int d^4x \int_{-\infty}^{\infty} dy 2M^3 e^{-2ky} \sqrt{-g} R \tag{2.2.22}$$

ここで $g = \det g_{\mu\nu}$、また R は induced metric $g_{\mu\nu}$ から作られる Ricci スカラーを指す。よって四次元で観測される Planck スケールは

$$M_{Pl}^2 = 2M^3 \int_0^{\infty} dy e^{-2ky} = \frac{M^3}{k} \tag{2.2.23}$$

となる。つまりこのモデルでは、五次元の Planck スケールと四次元の Planck スケールはほぼ同じオーダーであることが分かる。

2.2.2 摂動 : RS ゲージ

次にこのような無限に大きい余次元の存在にもかかわらず、第一章で触れたように本当に四次元重力が観測されている範囲で実現されているのか調べてみよう。四次元重力は、前に述べたように、metric の background からの摂動として同定される graviton によって伝わる。従って今の場合求めたいのは brane に小さなエネルギー運動量テンソルを加えたとき、四次元 metric が Minkowski からどれだけずれるか、である。このために、brane 上のエネルギー運動量テンソルと metric の摂動をどちらも線形で扱って Einstein 方程式を考える [9]、[15]。

まず bulk 中での graviton を考える。ここで式 (2.2.16)、(2.2.17) で与えられた background 解はもとの通り $\hat{g}_{MN}$、$g_{\mu\nu}$ などと表し、摂動を含めた metric を つきの $\tilde{g}_{MN}$、摂動部を h_{MN} で表す。つまり

$$\tilde{g}_{MN} = \hat{g}_{MN} + h_{MN} \tag{2.2.24}$$

すると一般に次の Randall-Sundrum(RS) ゲージと呼ばれるゲージに固定できることが分かる。

$$h_{yy} = h_{\mu y} = 0, \quad \partial_\nu h^\nu_\mu = 0, \quad h^\mu_\mu = 0, \tag{2.2.25}$$

ただし μ, ν の足の上げ下げは $\eta_{\mu\nu}$ を使って行う。この形をみると四次元の graviton は TTgauge に固定されていることが分かる。

RS ゲージは以下のようにして選ぶ。始めに

$$h'_{yy}(x,y) = h_{yy}(x,y) + 2\partial_y \epsilon^y(x,y), \quad y' = y + \epsilon^y(x,y) \tag{2.2.26}$$

という変換で $h_{yy}=0$ にもっていく。この時 residual gauge パラメータ $\xi^y(x^\mu)$ が存在している。次に

$$h'_{\mu y}(x,y)=h_{\mu y}(x,y)+\partial_\mu\epsilon^y(x,y)-e^{-2ky}\partial_y\epsilon_\mu(x,y),\quad x^{\mu\prime}=x^\mu+\epsilon^\mu(s,y) \tag{2.2.27}$$

でもって $h_{\mu y}=0$ にする。今度は residual gauge パラメータ $\xi^\mu(x^\mu)$ のほかに $\xi^y(x^\mu)$ からの寄与による $\epsilon_\mu(x,y)$ の不定性もある。つまり

$$\epsilon_\mu(x,y)\sim\epsilon_\mu(x,y)+\xi_\mu(x^\mu)+\frac{1}{2k}e^{2ky}\partial_\mu\xi^y(x^\mu) \tag{2.2.28}$$

このような residual gauge パラメータによる $h_{\mu\nu}$ の変換性は以下の通り。

$$h'_{\mu\nu}(x,y)=h_{\mu\nu}(x,y)+2ke^{-2ky}\xi^y(x)\eta_{\mu\nu}-e^{-2ky}\{\partial_\mu\xi_\nu(x)+\partial_\nu\xi_\mu(x)\}-\frac{1}{k}\partial_\mu\partial_\nu\xi^y(x) \tag{2.2.29}$$

真空の bulk での Einstein 方程式を線形の摂動について書くと $y\geq 0$ では次のようになる。

$$\delta R_{yy}=\frac{1}{2}\left(e^{2ky}h'\right)'=0, \tag{2.2.30}$$

$$\delta R_{y\mu}=-\frac{1}{2}\left(e^{2ky}(\partial^\nu h_{\mu\nu}-\partial_\mu h)\right)'=0, \tag{2.2.31}$$

$$\begin{aligned}\delta R_{\mu\nu}-4k^2h_{\mu\nu}=&-\frac{1}{2}h''_{\mu\nu}-2k^2h_{\mu\nu}+\left(k^2h+\frac{k}{2}h'\right)\eta_{\mu\nu}\\ &+\quad\frac{1}{2}e^{2ky}(\Box h_{\mu\nu}+\partial_\mu\partial_\nu h-\partial^\lambda_\mu h_{\nu\lambda}-\partial^\lambda_\nu h_{\mu\lambda})-4k^2h_{\mu\nu}=0\end{aligned} \tag{2.2.32}$$

ここで $h=h^\mu_\mu$ と記した。$'$ は y についての微分を表す。$\Box$ は $\eta_{\mu\nu}$ で考えた四次元でのダランベルシアンを意味する。もし RS ゲージがとれるのであれば上式から bulk 中での運動方程式が次の式で表されることは明らかである。

$$\left[e^{2ky}\Box-\partial_y^2+4k^2\right]h_{\mu\nu}=0. \tag{2.2.33}$$

この運動方程式が $\mu\nu$ の成分によらないことが RS ゲージの利点なのである。式 (2.2.30)、(2.2.31) よりただちに、h や $\partial^\nu h_{\mu\nu}$ の y 依存性がないとき、あるいは e^{-2ky} に比例しているときを除いて $h=0,\ \partial^\nu h_{\mu\nu}=0$ でなければならないことが分かる。そこで y 依存性がない h や $\partial^\nu h_{\mu\nu}$ をそれぞれ $h^{(0)}$、$\partial^\nu h^{(0)}_{\mu\nu}$ と表し、e^{-2ky} に比例しているものの係数を $h^{(1)}$、$\partial^\nu h^{(1)}_{\mu\nu}$ と表すことにする。添字が (0) のものには式 (2.2.29) 中の gauge 変換 $-\frac{1}{k}\partial_\mu\partial_\nu\xi_y(x)$ が作用する。式 (2.2.31) を考えあわせると、

$$h^{(0)}(x)+\Box\xi^y(x)=0, \tag{2.2.34}$$

$$\partial^\nu h^{(0)}_{\mu\nu}(x)+\Box\partial_\mu\xi^y(x)=0, \tag{2.2.35}$$

$$\partial^\nu h^{(0)}_{\mu\nu}(x)=\partial_\mu h^{(0)}(x), \tag{2.2.36}$$

となり上 2 式の両立が、最後の、式 (2.2.31) から導かれる条件によって保証される。式 (2.2.34) にはまだ residual gauge パラメータ $\zeta^y(x), s.t.\Box\zeta^y(x)=0$、が決定されずに残っている。これでひとまず

$$h^{(0)}(x)=0,\quad \partial^\nu h^{(0)}_{\mu\nu}(x)=0, \tag{2.2.37}$$

が得られた。次に $h^{(1)}_{\mu\nu}$ を考える。この residual gauge による変換性は式 (2.2.29) から

$$h^{(1)\prime}_{\mu\nu}(x) = h^{(1)}_{\mu\nu}(x) + 2k\zeta^y(x)\eta_{\mu\nu} - \partial_\mu\xi_\nu(x) - \partial_\nu\xi_\mu(x) \tag{2.2.38}$$

となる。ただし $\Box\zeta^y(x) = 0$。この gauge パラメータをどのように固定すれば望んでいる TT gauge がとれるのだろうか。式 (2.2.38) のゲージ変換性は実際のところ、Minkowski からの摂動部の変換性とよく似ている。(第一章参照。) 従ってこの $h^{(1)}_{\mu\nu}(x)$ が四次元有効理論における graviton に対応するのではないかという予想がたつ。この予想が正しいことをこれから明らかにする。式 (2.2.32) の左辺の、y 依存性がない項に着目しよう。

$$-2k^2h^{(0)}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\partial_\mu\partial^\lambda h^{(1)}_{\nu\lambda} + \partial_\nu\partial^\lambda h^{(1)}_{\mu\lambda} - \Box h^{(1)}_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial_\nu h^{(1)}) = 0. \tag{2.2.39}$$

$h^{(1)}_{\mu\nu}(x)$ の運動方程式はこれのみであって、ほかには出てこない。例えば式 (2.2.32) の左辺のうち、今度は y 依存性が e^{2ky} である項を考えると (以降、$h_{\mu\nu}(x)$ を e^{-2nky}(n は整数) で展開したときの e^{-2nky} の係数を $h^{(n)}_{\mu\nu}(x)$ と表すことにする、) これは

$$\partial_\mu\partial^\lambda h^{(2)}_{\nu\lambda} + \partial_\nu\partial^\lambda h^{(2)}_{\mu\lambda} - \Box h^{(2)}_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial_\nu h^{(2)} = 0 \tag{2.2.40}$$

となり、$h^{(1)}_{\mu\nu}(x)$ の寄与を拾うはずの式 (2.2.32) の最初の三項はキャンセルしてしまう。$h^{(0)}_{\mu\nu}(x)$ の方の運動方程式はどうだろうか。式 (2.2.30) と (2.2.31) からでて来たのは拘束条件であり、今はすでにゲージを固定することで自然にこの拘束条件は満たしてしまった。そこで式 (2.2.32) の e^{2ky} の項を考えてみる。するとこれは $h^{(-1)}_{\mu\nu}(x)$ と $h^{(0)}_{\mu\nu}(x)$ についての方程式となる。

$$-2k^2h^{(-1)}\eta_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\Box h^{(0)}_{\mu\nu} = 0. \tag{2.2.41}$$

$h^{(-1)}_{\mu\nu}(x)$ は TT condition を満たしているから、もし $h^{(-1)}_{\mu\nu}(x)$ が物理的な場として許されるのならば式 (2.2.41) もまた運動方程式であり、

$$\Box h^{(0)}_{\mu\nu}(x) = 0 \tag{2.2.42}$$

がいえる。これは residual gauge パラメータ $\zeta^y(x)$ に完全に吸収されてしまう。従ってこのとき $h^{(0)}_{\mu\nu}(x)$ は物理的な自由度をもっておらず、また $h^{(1)}_{\mu\nu}(x)$ のゲージ変換は式 (2.2.38) から $\zeta^y(x)$ を除いたものになる。さて、はたして $h^{(-1)}_{\mu\nu}(x)$ は物理的な場として本当に許されるだろうか。$e^{2ky}h^{(-1)}_{\mu\nu}(x)$ は $y \to \infty$ で発散してしまう。勿論、場 $\pi(y)$ が遠方で発散することは必ずしもこの場が非物理的であることを意味しない。一般に固有値問題 $\hat{L}h = \alpha\sigma(y)h$ ($\hat{L}$ は二次の微分演算子、α は固有値、h は固有関数とおいた)、における規格化の際重み関数として $\sigma(y)$ が必要となるからである。(2.2.33) の解を規格化するためには e^{2ky} を重み関数としてもって来る。従って場の規格化を決める積分

$$\int dy e^{2ky}\pi(y)\pi(y)^\dagger \tag{2.2.43}$$

における測度が e^{2ky} を持つことになる。解 $e^{2ky}h^{(-1)}_{\mu\nu}(x)$ の場合、余次元が $y=\infty$ まで広がっていると規格化ができない。$e^{2ky}h^{(-1)}_{\mu\nu}(x)$ の解釈に困ってしまう。Randall-Sundrum 2 モデルはもともと、前にも述べたように hierarchy 問題のためのモデルから派生したものであった。このもとのモデル (Randall-Sundrum 1 モデルと呼ぶことにする) では brane を二枚用意して、余次元をコンパクト化していた。Randall-Sundrum 2 モデルはそのコンパクト化の半径を無限に持っていった極限でも四次元の Newton law が成り立つ、ということを主張しているのである。余次元のサイズを有限にしておいてそこで $e^{2ky}h^{(-1)}_{\mu\nu}(x)$ を定義することはできる。この時は $h^{(0)}_{\mu\nu}(x)$ は物理的な自由度を持っていない。このことはコンパクト化の半径を無限に持っていった極限でもあてはまっていると解釈しよう。($e^{2ky}h^{(-1)}_{\mu\nu}(x)$ はこの極限でもはや存在しないと考えられるが。)
以上の正当化に基づいて、$h^{(1)}_{\mu\nu}(x)$ の運動方程式 (2.2.39) を、$h^{(0)}_{\mu\nu}(x)$ を除いて再び眺める。

$$\partial^{\lambda}_{\mu}h^{(1)}_{\nu\lambda}+\partial^{\lambda}_{\nu}h^{(1)}_{\mu\lambda}-\Box h^{(1)}_{\mu\nu}-\partial_{\mu}\partial_{\nu}h^{(1)}=0. \tag{2.2.44}$$

この式のなかに、条件

$$\partial^{\mu}\partial^{\nu}h^{(1)}_{\mu\nu}-\Box h^{(1)}=0 \tag{2.2.45}$$

が含まれていることに注意しよう。上式と式 (2.2.44) を連立させて、

$$\begin{cases}\partial^{\lambda}_{\mu}h^{(1)}_{\nu\lambda}+\partial^{\lambda}_{\nu}h^{(1)}_{\mu\lambda}-\Box h^{(1)}_{\mu\nu}-\partial_{\mu}\partial_{\nu}h^{(1)}\eta_{\mu\nu}(\partial^{\alpha}\partial^{\beta}h^{(1)}_{\alpha\beta}-\Box h^{(1)})=0\\ \partial^{\mu}\partial^{\nu}h^{(1)}_{\mu\nu}-\Box h^{(1)}=0\end{cases} \tag{2.2.46}$$

式 (2.2.46) を、1.2 節で求めた Minkowski からの摂動部分の Einstein 方程式 (1.2.10) と比較してみる。すると上の $h^{(1)}_{\mu\nu}$ が (1.2.10) における四次元の普通の graviton に相当していることがわかる。ゲージ変換性も全く同じである。従ってちょうど 1.2 節でやったように $h^{(1)}_{\mu\nu}(x)$ をゲージ変換で TT gauge に固定できる。式 (2.2.46) は TT gauge に固定すれば自然に満たされているので式 (2.2.46)、(2.2.46) の解は TT gauge であることが分かる。以上から任意の y 依存の $h_{\mu\nu}$ について TT gauge が成り立つことが分かった。つまり bulk で RS ゲージをとれることが実際示された。

さて、$e^{-2ky}h^{(1)}_{\mu\nu}(x)$ は四次元 graviton と同じ二つの自由度を持っている。運動方程式 (2.2.33) に代入すると graviton であるはずの $h^{(1)}_{\mu\nu}(x)$ は当然四次元の有効質量ゼロを持っている。(i.e.$\Box h^{(1)}_{\mu\nu}=0$.) それに対し、式 (2.2.40) からは $\Box h^{(2)}_{\mu\nu}=0$ が導かれるがこの $h^{(2)}_{\mu\nu}=0$ は四次元で質量ゼロの粒子と解釈しない。それは $h^{(2)}_{\mu\nu}=0$ が運動方程式 (2.2.33) の固有関数でないからである。固有関数でみて初めて四次元の質量が見えるのであって、たとえ $\Box\phi(x)=0$ であっても固有関数でなければこれは単なる場の線形の重ね合わせでこういう方程式を出せたにすぎない。今 Randall-Sundrum 2 モデルで $y\to\infty$ までの領域を考えているから、$e^{2ky}h^{(-1)}_{\mu\nu}$ は規格化が可能な場ではない。よって $h^{(-1)}_{\mu\nu}$ は物理的な場ではなく、スペクトラムから落ちてしまう。半径有限のコンパクト化では $h^{(-1)}_{\mu\nu}$ は四次元で質量ゼロの粒子としてみえる。これは $e^{2ky}h^{(-1)}_{\mu\nu}$ が方程式 (2.2.33) の、$\Box$ の固有値ゼロを返す固有関数であることから明らかである。もともと方程式 (2.2.33) 自体は $y\leftrightarrow -y$ の parity 変換に対し不変であった。一方 parity で $h^{(1)}_{\mu\nu}\leftrightarrow h^{(-1)}_{\mu\nu}$ と移り変わるから $h^{(-1)}_{\mu\nu}$ が四次元で質量ゼロの粒子に見えるのは自明である。このモードについては後に hierarchy 問題で二枚の brane のモデルを考える時に再び触れる。

2.2.3 摂動 : brane による境界条件

ところがこのように bulk で RS ゲージをとってしまうと、今度は brane を入れたときに一般的にはその位置が $y = constant$ にならない。一方 bulk に対して任意の位置に brane があったときにその brane の位置を $y = constant$ にするようなゲージが少なくとも局所的に存在したことを前節で述べた。これが Gaussian-normal ゲージである。(式 (2.1.8) 参照。)GN ゲージでは Israel の junction condition が非常に見易い形で表されていた。brane をいれたとき metric の摂動部が満たさなければいけない条件を出すため、いったん GN ゲージに移ろう。GN ゲージでみた摂動部を $\bar{h}_{\mu\nu}$ で記す。GN ゲージも RS ゲージもともに $h_{yy} = h_{\mu y} = 0$ であるからこの二つのゲージを移り変わるには式 (2.2.29) の変換が使われるはずである。

さてこのようにして GN ゲージに移ったとしよう。この時 $\bar{y} = 0$ に brane は存在する。また Z_2 対称性があるから Israel の junction condition は式 (2.1.13) より $\bar{y} = 0$ において

$$(\partial_{\bar{y}} + 2k)\bar{h}_{\mu\nu}(\bar{x}, \bar{y}) = -\frac{1}{4M^3}\left(T_{\mu\nu}(\bar{x}) - \frac{1}{3}\eta_{\mu\nu}T(\bar{x})\right) \tag{2.2.47}$$

ここで $T_{\mu\nu}$ は、零次では Einstein 方程式に含まれなかった brane 上の場によるエネルギー運動量テンソルを指す。T は $\eta_{\mu\nu}$ で縮約したものである。こうして条件が求まったのでもう一度 RS ゲージに戻ってみよう。まず $\bar{y} = y + \xi^y(x)$(y は RS ゲージでの座標) であったから $\hat{y}$ から y に直す。$\xi^y(x)$、$h_{\mu\nu}$ に対して一次の項までとってくればよいから、$y = 0$ において

$$(\partial_y + 2k)\bar{h}_{\mu\nu}(x, y) = -\frac{1}{4M^3}\left(T_{\mu\nu}(x) - \frac{1}{3}\eta_{\mu\nu}T(x)\right) \tag{2.2.48}$$

これをさらに $h_{\mu\nu}$ に直せば $h_{\mu\nu}$ についての $y = 0$ での “境界” 条件が求まる。つまり

$$(\partial_y + 2k)h_{\mu\nu}(x, y) = \frac{1}{4M^3}\Sigma_{\mu\nu}, \quad at\ y = 0, \tag{2.2.49}$$

$$\Sigma_{\mu\nu} \equiv -\left(T_{\mu\nu}(x) - \frac{1}{3}\eta_{\mu\nu}T(x)\right) + 8M^3\partial_\mu\partial_\nu\xi^y, \tag{2.2.50}$$

$\xi^\mu(x)$ はこの式には現れないので、境界条件からは $\xi^\mu(x)$ に対して何もいえない。$h_{\mu\nu}$ は TTgauge でなければならないから

$$\Box\xi^y = -\frac{1}{24M^3}T^\mu_\mu \tag{2.2.51}$$

であるはずである。境界条件の式 (2.2.49) と式 (2.2.33) を一つにまとめると次の式になる。

$$\left[e^{2ky}\Box - \partial_y^2 + 4k^2 - 4k\delta(y)\right]h_{\mu\nu} = -\frac{1}{2M^3}\Sigma_{\mu\nu}\delta(y) \tag{2.2.52}$$

source がないときの graviton の関数形を知りたいだけならば上式の右辺をゼロにした次の方程式の解を考えればよい。$\Box$ の固有値を m^2 で与えて、

$$\left[-m^2e^{2ky} - \partial_y^2 + 4k^2 - 4k\delta(y)\right]f_m(y) = 0. \tag{2.2.53}$$

$z \equiv sgn(y)(e^{k|y|}-1)/k$、$\hat{f}_m(x) \equiv f_m(y)e^{k|y|/2}$ で式 (2.2.53) を書き直すと

$$\left[-\frac{1}{2}\partial_z^2 + V(z)\right]\hat{f}_m(z) = m^2\hat{f}_m, \tag{2.2.54}$$

$$V(z) = \frac{15k^2}{8(k|z|+1)^2} - \frac{3k}{2}\delta(z) \tag{2.2.55}$$

これはまさに第一章で述べた volcano 型ポテンシャル中の波動関数を求める方程式になっているのである (図 (1.1) 参照)。 brane が positive tension であるためにポテンシャル $V(z)$ の中に $-\delta(z)$ の井戸が出来た。このため、方程式 (2.2.53) の解のうちゼロモード $m=0$ のみが brane に局在することになるのである。解 f_m の具体的な関数形はベッセル関数で与えられる。(Appendix 参照のこと。)

source を考える必要は、これらの graviton が四次元の Einstein 重力を再現しているか調べる際に現れる。この時、式 (2.2.52) を解くためにグリーン関数 $G_R(x^\mu, y; x^{\mu\prime}, y')$ を導入する。

$$\left[e^{2ky}\Box - \partial_y^2 + 4k^2 + 4k\delta(y)\right]G_R(x^\mu, y; x^{\mu\prime}, y') = \delta^{(4)}(x^\mu - x^{\mu\prime})\delta(y-y'). \tag{2.2.56}$$

グリーン関数が求まれば (2.2.52) の解は

$$h_{\mu\nu}(x,y) = -\frac{1}{2M^3}\int d^4x G_R(x^\mu, y; x^{\mu\prime}, 0)\Sigma_{\mu\nu}(x^{\mu\prime}) \tag{2.2.57}$$

で与えられる。一般にグリーン関数は式 (2.2.53) の固有関数の集合 f_m によって

$$G_R(x^\mu, y; x^{\mu\prime}, y') = \sum_m f_m(x^\mu, y) f_m(x^{\mu\prime}, y') \tag{2.2.58}$$

と表される。式 (2.2.33) の解はゼロモードが前に述べた $e^{-2ky}h^{(1)}(x)$ であって、四次元の有効質量 m を与える massive mode の y 依存性は $J_2(\frac{m}{k}e^{ky})$ と $Y_2(\frac{m}{k}e^{ky})$ との線形結合で表される。$J_n(x)$、$Y_n(x)$ はそれぞれ n 次のベッセル関数、ノイマン関数を示す。このうち境界条件 (2.2.49) で右辺をゼロとおいたものを満たすのは規格化も考えると

$$u_m(y) = \sqrt{\frac{m}{2k}}\frac{J_1(\frac{m}{k})Y_2(\frac{m}{k}e^{ky}) - Y_1(\frac{m}{k})J_2(\frac{m}{k}e^{ky})}{\sqrt{J_1^2(\frac{m}{k}) + Y_1^2(\frac{m}{k})}} \tag{2.2.59}$$

という線形結合である。ゼロモードのほうは $\sqrt{k}e^{-2ky}$ となる。このようにしてグリーン関数が求まった。

$$G_R(x^\mu, y; x^{\mu\prime}, y') = \int\frac{d^4p}{(2\pi)4}e^{ik_\alpha(x^\alpha - x^{\alpha\prime})}\left[\frac{ke^{-2ky}e^{-2ky'}}{\vec{p}^2 - (\omega+i\epsilon)^2} + \int_0^\infty dm\frac{u_m(y)u_m(y')}{m^2+\vec{p}^2-(\omega+i\epsilon)^2}\right] \tag{2.2.60}$$

このグリーン関数はもちろん場 $h_{\mu\nu}$ の tree level での二点関数のことである。従って $h_{\mu\nu}$ が source の間を飛ぶことによって生じるポテンシャルは Born 近似により上のグリーン関数で表される。式 (2.2.60) の右辺第一項はゼロモードの graviton の交換によるもので、第二項は Kaluza-Klein

モードの交換によるものである。ここでこのグリーン関数が Newton ポテンシャルを補正項を除いて再現していることをみよう。今 source が静止している状況を考える。すると時間方向に積分したグリーン関数を使うことが出来る。

$$G(\vec{x},y;\vec{x}',y')=\int_{-\infty}^{\infty}dtG_R(x^\mu,y;x^{\mu\prime},y'). \tag{2.2.61}$$

知りたいのは brane 上にある source がどのようなポテンシャルを brane の上で作るか、であるから brane 上で $|\vec{x}-\vec{x'}|=r$ の距離だけ離れている二つの source のあいだのポテンシャルは

$$G(\vec{x},0;\vec{x}',0)\approx\frac{-k}{4\pi r}\left[1+\frac{1}{2k^2r^2}+...\right] \tag{2.2.62}$$

ここでは RS ゲージで見ていることに注意しよう。厳密には brane 上の重力を見るには GN ゲージの induced metric を使わなくてはいけない。これはすぐ後でもう少し詳しく述べるが、今の Newton ポテンシャルを見る時は $\bar{y}-y=O(h)$ なので、式 (2.2.47) から式 (2.2.48) に移った時と同様に h の一次のオーダーをみている分には影響がない。従って式 (2.2.62) が brane 上での Newton ポテンシャルとその補正を摂動の一次の範囲で与えている。式 (2.2.60) と見比べると式 (2.2.62) の第一項は四次元の graviton と同定したゼロモードから出てきていて、第二項以降は Kaluza-Klein モードから来ている。連続スペクトラムを持つ Kaluza-Klein モードを足しあげた時に五次元時空が見えて来ないのは、第一章でも簡単に述べたが、式 (2.2.62) 第二項の m の積分に factor m が含まれているからである。この factor は $h_{\mu\nu}$ の brane 上の値 $u_m(0)=\sqrt{m}$ から来ている。Randall-Sundrum 2 モデルの場合、$h_{\mu\nu}$ のゼロモードだけが分離していて、brane に局在していた。このためゼロモードが Newton ポテンシャルを再現できたのである。

さて、上述のように、我々が観測する重力は $e^{-2ky}\bar{h}_{\mu\nu}|_{y=0}$ であるから、brane 上のエネルギー運動量テンソルに対する $\bar{h}_{\mu\nu}$ の運動方程式の解が、通常の四次元の解と比較してどう見えるか調べなければならない。RS ゲージの bulk 中に brane がある、というとき brane は $y=\phi(x)$ という位置にいると表せる。この配置の仕方は局所的には最も一般的な形といえる。Randall-Sundrum 2 モデルの set up は $y=0$ に brane があるという配置をとっているわけである。RS ゲージから GN ゲージに移る変換は $\bar{y}=y-\phi(x)$ で記述される。つまり上述した $\xi^y(x)$ は RS ゲージにおける brane の位置 $\phi(x)$ のことだったわけだ。ただ、式 (2.2.51) から、$\Box\phi(x)=-\frac{1}{2M^3}T^\mu_\mu$ を満たすような位置にしか brane は置くことが出来ない。一方 RS ゲージから GN ゲージに移るときに $\xi^\mu(x)$ は任意に選ぶことが出来る。まず、$\bar{y}=y-\phi(x)$、$\bar{x}=x-\xi^\mu(x)$ の変換により $\bar{h}_{\mu\nu}$ が作られる。式 (2.2.29) 及び式 (2.2.57) より

$$\begin{aligned}\bar{h}_{\mu\nu}(x,y)=\frac{1}{2M^3}&\int d^4xG_R(x^\mu,y;x^{\mu\prime},0)(T_{\mu\nu}-\frac{1}{3}\eta_{\mu\nu}T)(x^{\mu\prime})\\&-4\int d^4x'G_R(x^\mu,y;x^{\mu\prime},0)\partial_{\mu'}\partial_{\nu'}\phi(x')\\&+\frac{1}{k}\partial_\mu\partial_\nu\phi-2k\eta_{\mu\nu}\phi+\partial_\mu\xi_\nu+\partial_\nu\xi_\mu.\end{aligned} \tag{2.2.63}$$

ここで

$$\xi_\mu(x) = \partial_\mu \left[2 \int d^4x' G_R(x^\mu, 0; x^{\mu\prime}, 0)\phi(x') + \frac{1}{2k}\phi(x) \right] \tag{2.2.64}$$

と選べば、結局

$$\bar{h}_{\mu\nu}(x,0) = \frac{1}{2M^3} \int d^4x G_R(x^\mu, 0; x^{\mu\prime}, 0)(T_{\mu\nu} - \frac{1}{3}\eta_{\mu\nu}T)(x^{\mu\prime}) - 2k\eta_{\mu\nu}\phi(x) \tag{2.2.65}$$

と表される。式 (2.2.51)(この場合 $\xi^y = -\phi$) を ϕ について解いて、初めて上式の解が得られることに注意する。そこで式 (2.2.60) の右辺第一項に着目する。この項は四次元の graviton を記述しているはずで、第二項以降の補正は第一項に比べ小さい。そのため、式 (2.2.65) 中の G_R を式 (2.2.60) の第一項で近似する。つまり

$$G_R(x^\mu, y; x^{\mu\prime}, y') \approx k\delta^{(4)}(x - x')\Box^{-1}. \tag{2.2.66}$$

すると

$$\bar{h}_{\mu\nu}(x,0) = \frac{k}{2M^3}\Box^{-1}(T_{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}T(x)). \tag{2.2.67}$$

この式は四次元の、harmonic coordinate system (i.e. $\partial_\nu h^\nu_\mu = \frac{1}{2}\partial_\mu h$) での Einstein 方程式と完全に一致している。従って、ようやく $\bar{h}_{\mu\nu}$ が brane 上において、四次元 Minkowski からの一次の摂動を再現していることが分かった。

第3章　hierarchy問題

この章から、実際の物理的な問題へのアプローチとしての高次元理論モデルを取り扱う。始めに取り上げるのは hierarcy 問題である。

我々は Standard Model の基本スケールとして electroweak スケール m_{EW} があることを知っている。また一方で重力のスケールとして Planck スケール M_{Pl} がある。standard model では M_{Pl} も基本スケールとしてとらえている。ところで $m_{EW} \sim 10^3$Gev であるのに対し、$M_{Pl} \sim 10^{18}$Gev という、二つの基本スケールの間には膨大な開きがある。現在、Standard Model は低エネルギーでの有効理論であり、もっと高エネルギーに行けば重力と強い相互作用、及び電弱相互作用を統一するようなさらに基本的な理論がある、と考えられている。この立場に立った時、統一されるべき二つのエネルギースケールの間に $\frac{M_{Pl}}{m_{EM}} \sim 10^{15}$ という非常に大きな比が出てきてしまうのは不自然である。これが hierarchy 問題である。

hierarchy 問題への一つの大きな試みは超対称性を理論に課すことで為された。また別の試みとしては例えば technicolor がある。ここではこのどちらも必要としない、高次元を使った試み、特に Rrandall と Sundrum の提唱した 2 brane モデル [14](以後 Randall-Sundrum 1 モデルと呼ぶことにする、) を紹介する。

3.1　高次元の中の brane 描像

Arkani-hamed らが指摘したように [8]、electroweak スケールと Planck スケールの間には重大な違いがある。電弱相互作用については electroweak length m_{EW}^{-1} の距離程度まで実験が為されているのにたいし、重力については Planck length $M_{Pl}^{-1} \sim 10^{-33}cm$ にはほど遠い、$\sim 1cm$ 程度の実験しか為されていないのである。このことを考えると、M_{Pl} を基本スケールと思っているのは $\sim 1cm$ から $\sim 10^{-33}cm$ まで重力の法則を外挿していることなのである。そこで Arkani-Hamed らは二つの基本スケールを仮定することをやめて、electroweak スケールをすべての物理の基本スケールと考えることを提唱した [8]。つまり、重力の基本スケール M も electroweak スケール程度である、とした。このときどのように我々のよく知っている 4 次元の Planck スケールが実現されるのか。

まず、$d = 4 + n$ 次元の Minkowski 空間を考える。このうち次元 n の余次元空間は半径 r_c で例

えばトーラスにコンパクト化されているとする。すると d 次元の Einstein action は $\sim {r_c}^{-1}$ より低いエネルギースケールでは 4 次元の有効理論に見える。

$$M^{2+n}\int d^{4+n}x\hat{R} = M_{Pl}^2\int d^4xR \tag{3.1.1}$$

ここで $\hat{R}$ は以前のように d 次元空間の Ricci スカラーを指し、R は四次元の Ricci スカラーを指す。上式から

$${r_c}^n M^{2+n} = M_{Pl}^2 \tag{3.1.2}$$

の関係にあることが分かる。よって $M \sim m_{EW}$ であるためには r_c が充分大きくなればよい。つまり

$$r_c \sim \left(\frac{10^{36}Gev}{m_{EW}^{2+n}}\right)^{\frac{1}{n}} \sim 10^{(\frac{30}{n}-18)}cm \tag{3.1.3}$$

ところが余次元が観測されていないことからコンパクト化の半径には制限がついている。つまり hierarchy 問題のためには、r_c の大きさの兼ね合いが必要となる。一般に d 次元空間中で、massless の粒子が力を伝えるとそのポテンシャルは Gauss の法則から $r^{-(d-3)}$ の形になる。従って、余次元があるとしても、電弱相互作用はエネルギースケール m_{EW} 付近までは余次元を感知してはいけない。一方で、重力の観測からは $1cm$ よりも十分短いスケールでコンパクト化されている限りは余次元は可能である。そこである程度大きい余次元を実現するためには SM 粒子が余次元を感知しないようにすればよい。つまり通常の SM 粒子は 3+1 次元上に束縛されていればよい。このようにして、3-brane を高次元時空中に導入する。さて一方重力の方はエネルギースケール $r^{-1} \gg {r_c}^{-1}$ のとき高次元中を飛び回るから距離 r だけ離れた質量 m_1、m_2 のポテンシャルは

$$V(r) \sim \frac{m_1m_2}{M^{2+n}}\frac{1}{r^{1+n}}, \quad r \ll r_c \tag{3.1.4}$$

の形をしている。このことはまた、Kaluza-Klein モードの質量の差 $\sim 1/r_c$ が非常に小さく見え、スペクトラムが連続的に見える極限では Kaluza-Klein モードからの寄与を離散的な和ではなく積分する必要があり、結局、

$$\begin{aligned} V(r) &\propto \int_0^\infty d^n l\,\frac{e^{-mr}}{r} \propto \int_0^\infty dm\int d\Omega^{n-1}\,m^{n-1}\,\frac{e^{-mr}}{r} \\ &\propto \frac{1}{r^{n-1}}, \end{aligned} \tag{3.1.5}$$

$$m^2 = l_1^2 + l_2^2 + ... + l_n^2, \tag{3.1.6}$$

のような r 依存性を持つ、という理解もできる。ところがエネルギースケール $r^{-1} \ll {r_c}^{-1}$ の時は graviton の Kaluza-Klein モードは重くて積分されてしまって見えないからゼロモードのみ残って、

$$V(r) \sim \frac{m_1m_2}{M^{2+n}{r_c}^n}\frac{1}{r}, \quad r \gg r_c \tag{3.1.7}$$

の形のポテンシャルを与える。式 (3.1.3) で $n = 1$ とすると $R \sim 10^{13} cm$ となってしまって、これは明らかに観測と矛盾する。$n = 2$ では $R < 1mm$ となり、実験の制限にかからない。よって、このモデルでは余次元の次元は 2 以上となる。

しかし以上の話は electroweak スケールと Planck スケールの hierarchy を余次元のサイズの問題に移し変えたにすぎない。なぜ基本スケールである m_{EW}^{-1} に比べそのように大きな余次元が存在するのか、という問いが生まれる。さらに、これは m_{EW} を基本スケールと考えるどのモデルにも共通して言えることだが、Standard Model においては $1/M_{Pl}$ で押さえられていた higher dimensional operator が今度は $1/m_{EW}$ 程度でしか押さえられなくなってしまう。したがって例えば proton が崩壊するのを押さえるためには別のメカニズムが必要とされる。

3.2 Randall-Sundrum 1 モデル

上述の Arkani-Hamed らのモデルでは m_{EW}^{-1} に比べて非常に大きい余次元を考える必要があった。それに対し、この節で述べる Randall と Sundrum の提唱したモデル [14] は余次元の半径はもっと自然な値を取ることができる。

3.2.1 set up

このモデルでは bulk は五次元とする。back ground metric として

$$ds^2 = \sigma(y)\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - dy^2 \tag{3.2.8}$$

を仮定する。この back ground は四次元の Minkowski 空間が五次元内にきちんと埋め込まれている形になっている。Arkani-Hamed らのモデルとの違いはこの back ground metric にある。このような形の back ground を選んで良いのかという疑問には 1.2 節で述べた通りである。これから五次元の Einstein 方程式を解いて warped facter $\sigma(y)$ の関数形を決定する。bulk 中には宇宙項 Λ が存在するが、すぐに $\Lambda < 0$ でなければいけないことが分かる。したがって bulk は AdS_5 である。余次元のコンパクト化は (AdS の場合はそのままでは空間方向に閉じてないから当然手で条件を与えなければならないが、)S_1/Z_2 で実現されている (図 (3.1) 参照のこと)。bulk に宇宙項のみ存在して物質場はいないと仮定すると五次元の Einstein 方程式

$$\hat{R}_{MN} = -\frac{2}{3}\Lambda \hat{g}_{MN} \tag{3.2.9}$$

より

$$\begin{cases} \hat{R}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\sigma''\eta_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\frac{(\sigma')^2}{\sigma}\eta_{\mu\nu} = -\frac{2}{3}\Lambda\sigma\eta_{\mu\nu}, \\ \hat{R}_{yy} = -2\frac{\sigma''}{\sigma} + \frac{(\sigma')^2}{\sigma^2} = +\frac{2}{3}\Lambda, \end{cases}$$

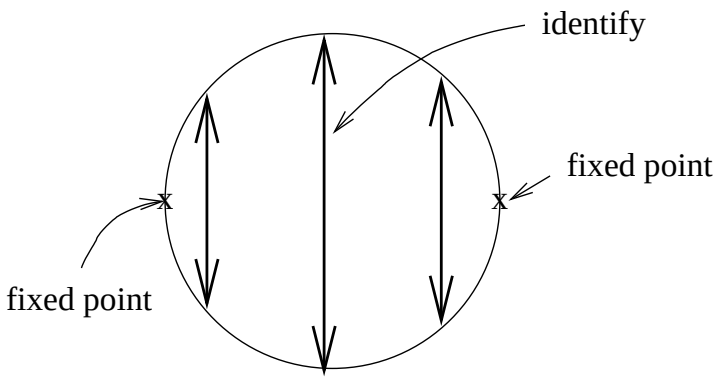

図 3.1: S_1/Z_2 の摸式図

が得られる。(M は五次元の Planck スケール。) 上式の解は

$$\sigma' = \pm\sqrt{\frac{-2\Lambda}{3}}\sigma \tag{3.2.10}$$

で与えられる。よって $y \geq 0$ のとき

$$\Lambda < 0, \tag{3.2.11}$$

$$\sigma \propto e^{-2ky}, \quad k = \sqrt{\frac{-\Lambda}{6}}. \tag{3.2.12}$$

以上より bulk が AdS_5 でなければいけないことが分かった。

さて、コンパクト化を実現する S_1/Z_2 という条件は唐突に出現した、という印象を与えかねないが、この back ground はもともと弦理論の M-theory から動機づけられたものである [16]、[17]、[18]。これは S_1 上の一点を固定点に選んで、固定点の両側を同一視するものである。必然的に S_1 上で固定点とちょうど反対側にある点もまた固定点となる。今のモデルで $y = 0$ の点と $y = r_c\pi$ の点が固定点になったとしよう。すると warped factor σ は式 (3.2.12) から分かるように、y について単調減少であったから、$y = 0$ と $y = r_c\pi$ で傾きの飛びを要請しなくてはいけない。ここで Israel の junction condition を思い出すと、これはまさに brane をいれることで metric の余次元座標に対する傾きの飛びを実現していた。従って、$y = 0$ と $y = r_c\pi$ にそれぞれ tension が V_{hid}、V_{vis} の 3-brane を置く。V の添字は、このあと hierarchy 問題を考える時に我々は $y = r_c\pi$ の brane 上に住んでいる、という仮定を置くからである。式 (2.1.13) より直ちに

$$V_{hid} = -V_{vis} = 24M^3k \tag{3.2.13}$$

が得られる。$y = r_c\pi$ にある brane が negative tension を持っていることに注意してもらいたい。通常 negative tension brane は縮まった方がエネルギー的に安定であって、そのままでは不安定

であると予想される。この場合、brane が固定点であるため対称性から安定性を保証する。また negative tension brane を力学的に作り出すことは困難であるが、ここでは既にどのようなメカニズムで作られたかは問わず、単に Einstein 方程式の解として与えられているという立場をとる。以上のことを作用で表してみると、

$$
\begin{aligned}
&S = S_{bulk} + S_{hid} + S_{vis}, \\
&S_{bulk} = 4M^3 \int d^4x \int_{-r_c\pi}^{r_c\pi} dy \sqrt{\hat{g}} \{ \frac{1}{2}\hat{R} - \Lambda \}, \\
&S_{hid} = \int d^4x \int dy \sqrt{\hat{g}} \{ L_{hid} - V_{hid} \} \delta(y), \\
&S_{vis} = \int d^4x \int dy \sqrt{\hat{g}} \{ L_{vis} - V_{vis} \} \delta(y - r_c),
\end{aligned}
\tag{3.2.14}
$$

となる。これらの作用から直接 Einstein 方程式と境界条件を出すこともちろんできる。ここで r_c の値を任意にとれたことに注意する。つまり r_c は Einstein 方程式の中には出てこない積分定数なのである。この modulus が存在することは後に安定化を考える時に再び取り上げる。

3.2.2 hierarchy 問題のための解釈

back ground からの摂動の解釈は第二章でやったこととほとんど同じである。四次元有効理論での back ground metric $\eta_{\mu\nu}$、及びそこからの摂動 $h_{\mu\nu}$ は bulk 中で RS ゲージを取ったとき、おおざっぱには五次元 metric の中に次のように埋め込まれている。(式 (2.2.14)、(2.2.24) 参照。)

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= e^{-2kr_c|\phi|} g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu - r_c^2 d\phi^2 &(3.2.15)\\
&= e^{-2kr_c|\phi|} [\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x)] dx^\mu dx^\nu - r_c^2 d\phi^2 &(3.2.16)
\end{aligned}
$$

ここで便宜的に $\pi y = r_c\phi$ と置くことで半径 r_c をあらわに書いた。$-\pi \leq \phi \leq \pi$ である。2.2 節の Radall-Sundrum 2 モデルとの違いは、今度は余次元がコンパクト化されているということである。massive Kaluza-Klein モードは重いので今は見えないとすると摂動はゼロモードだけ考えればよい。上式 (3.2.16) に出てくる $h_{\mu\nu}$ はまさにゼロモードであって、2.2 節における $h^{(1)}_{\mu\nu}(x)$ のことである。先に述べたように本来 r_c は modulus であって、単純に考えると r_c を modulus 場 $T(x)$ に置き換える必要があると思われる [14]。この modulus 場は 2.2 節で出てきた $h^{(-1)}_{\mu\nu}(x)$ という自由度と関係があることを後で示す。しばらくは modulus 場はなんらかの方法で真空期待値 r_c を既にとっていると考えて話を進める。式 (3.2.16) は bulk 中での摂動場を表していて、一般に brane を入れると Israel の junction condition により、さらに制限が生まれる。またこれも 2.2 節で見たように、bulk で RS ゲージをとると許される brane の配置はなにも $y = constant$ とは決っていなかった。しかし実は modulus 場が定数の真空期待値をとる、といった時点で、もはや式 (3.2.16) の metric を持つ bulk 中 $y = constant$ に brane がある、ということも宣言しているのである。従って、当分は $y = constant$ に brane があり、摂動のゼロモードとしては式 (3.2.16) に現れる graviton、$h_{\mu\nu}$ しか考えないとしよう。

さて $\phi = \phi_0$ にいる brane 上の induced metric は

$$g_{\mu\nu}^{\{\phi_0\}} \equiv e^{-2kr_c\phi_0} g_{\mu\nu}. \tag{3.2.17}$$

よって $\phi = 0$ と $\phi = \pi$ のいる brane の induced metric は

$$g_{\mu\nu}^{hid} = g_{\mu\nu}, \quad g_{\mu\nu}^{vis} = e^{-2kr_c\pi} g_{\mu\nu}, \tag{3.2.18}$$

となる。四次元有効理論で見たとき、式 (3.2.14) は四次元の Einstein action になる。

$$S_{eff} \supset \int d^4x \int_{-\pi}^{\pi} d\phi 2M^3 r_c e^{-2kr_c|\phi|} \sqrt{g} R \tag{3.2.19}$$

R は $g_{\mu\nu}$ から作られる Ricci スカラーである。また上式から四次元の Planck スケール M_{Pl} が

$$M_{Pl}^2 = M^3 r_c \int_{-\pi}^{\pi} d\phi e^{-2kr_c|\phi|} = \frac{M^3}{k} \left[1 - e^{-2kr_c\pi}\right] \tag{3.2.20}$$

となることが見てとれる。これは $r_c \to \infty$ の極限で式 (2.2.23) と一致している。次に brane 上に束縛された粒子がある時の brane 上での作用を考える。例えばスカラー粒子 $H(x)$ が $\phi = \pi$ にある brane 上に局在していたとしよう。すると、

$$S_{vis} \supset \int d^4x \sqrt{-g_{vis}} \left[g_{vis}^{\mu\nu} D_\mu H^\dagger D_\nu H - \lambda(|H|^2 - v_0^2)^2 \right]. \tag{3.2.21}$$

$g_{vis}^{\mu\nu} = e^{2kr_c\pi} g^{\mu\nu}$ であったから、上式の運動項を正準規格化した形にするには metric を $g_{\mu\nu}$で表し、スカラー場のほうを再定義し直す必要がある。つまり、

$$H \to e^{kr_c\pi} H \tag{3.2.22}$$

規格化された場で書き直した作用は

$$S_{vis} \supset \int d^4x \sqrt{-g} \left[g^{\mu\nu} D_\mu H^\dagger D_\nu H - \lambda(|H|^2 - e^{-2kr_c\pi} v_0^2)^2 \right]. \tag{3.2.23}$$

ここで次元を持ったパラメータ v_0 が $e^{-kr_c\pi}$ 倍されていることに着目する。スカラー場の場合に限らず、$\phi = \pi$ にある brane 上で定義されたすべてのパラメータは、質量で測った次元 a を持つとき $e^{-kr_c\pi a}$ 倍される。例えばフェルミオン場 $\psi(x)$ について見てみよう。作用を vielbein e_μ^α ($\alpha, \beta..$ は local inertial frame である Lorenz 群の足) で表すと [19]、

$$\int d^4x \sqrt{g_{vis}} \left(\frac{i}{2} \left[\bar{\psi}\gamma^\alpha (e_\alpha^\mu)_{vis} D_\mu \psi - (e_\alpha^\mu)_{vis} (D_\mu \bar{\psi}) \gamma^\alpha \psi \right] - m\bar{\psi}\psi \right). \tag{3.2.24}$$

ここで

$$(e_\mu^\alpha)_{vis} = e_\mu^\alpha e^{-kr_c\pi} \tag{3.2.25}$$

であるから、正準規格化された作用は

$$\int d^4x\sqrt{g}\,(\,\frac{i}{2}\,[\bar{\psi}\gamma^\alpha e^\mu_\alpha D_\mu\psi - e^\mu_\alpha(D_\mu\bar{\psi})\gamma^\alpha\psi] - e^{-kr_c\pi}m\bar{\psi}\psi). \tag{3.2.26}$$

となって、やはり m が $e^{-kr_c\pi}$ 倍されている。

以上のことをまとめると、$\phi=\pi$ にある 3-brane 上では Planck スケールは五次元の bulk の Planck スケールとほぼ同じオーダーである。一方、brane 上に局在した粒子については、たとえ元の作用ですべてのスケールが Planck スケール程度で書かれていたとしても、brane の上で見える物理的なスケールはすべて $e^{-kr_c\pi}$ だけ抑制されるのである。ここで仮に、理論の基本スケールは五次元の Planck スケール M だけだったとする。すると $\phi=\pi$ にある 3-brane 上のパラメータも M で書ける。ところが brane に住んでいる人から見れば、四次元の Planck スケールを除くすべてのスケールは $e^{-kr_c\pi}M$ で書かれているように見える。従って、もし $e^{kr_c\pi}\sim 10^{15}$ であったとすると brane 上の物理は重力以外 electroweak スケールで記述されていることになる! Arkani-Hamed らのモデルと違い、$e^{kr_c\pi}\sim 10^{15}$ を出すには $kr_c\sim 50$ 程度の大きさの余次元を要求すればよい。基本スケール $M\sim k$ に対して $\frac{1}{r_c}$ として新たな hierarchy を作り出す心配はないわけである。一方で $\phi=0$ にある brane 上の物理はすべて、Planck スケールで表されている。Planck スケールを抑制する余分な factor が掛らないからである。そのため、$\phi=\pi$ にある brane を SM 粒子のいる方と解釈したのである。Higgs 粒子 $H(x)$ が作用 (3.2.23) の最小値を取るとき、$|H|=e^{-kr_c\pi}v_0$ の真空期待値を持つ。これが electroweak スケールであるから、四次元の Standard Model が再現される。

hierarchy 問題を解決するように半径 r_c を選んだ時、graviton の Kaluza-Klein モードは electroweak スケール程度で量子化される。これは Arkani-Hamed らの場合と同様であり、SM 粒子が brane 上にいる限り、実験からは制限されていない。brane 上では electroweak スケールが基本スケールに見えるのだから、Randall- Sundrum 1 モデルでもやはり higher dimensional operator は weak スケールでしか押さえられない。

もちろんすべての議論を、Planck スケールを基本スケールと思うかわりに、electroweak スケールが基本スケールだ、と思ってもよい。この場合、Planck スケールは SM 粒子のいる negative tension brane から r_c だけ離れた所に positive tension brane を置くことで実現できる。

3.3 Randall-Sundrum 1 モデルの安定化

ここでは特に先ほど触れた modulus 場について考える。この modulus 場は余次元の半径を決定するものであるので、ここでは radion と呼ぶことにする。radion は当然五次元 graviton のゼロモードである、という予想がつく。なぜなら、式 (3.2.16) を見れば分かるように、r_c は metric に現れるもので、bulk の back ground geometry を決定するものであり、なおかつ、運動方程式 (Einstein 方程式) 中では積分定数でしかないため、場として解釈し直したとき、ポテンシャルを

持てないからである。しかし、radion をきちんと identify するには第二章で行ったような、自由度の勘定をする必要がある。しかしそれはかなり複雑であるので、とりあえずは naive に、積分定数 r_c を場 $T(x)$ に置き換えたときに、この真空期待値がどのようにすれば r_c に落ち着くことが出来るか、Goldberger と Wise の議論 [20]、[21] に沿って考えてみる。そのあとで、もう一度、radion とは何であるか考慮しなおす。

3.3.1 bulk 中の場で radion を安定化させるモデル

Goldberger と Wise の提唱したモデルの基本的なアイディアはこの radion になんらかのポテンシャルを持たせよう、というものである。ただし手で勝手にポテンシャルを入れたのでは、最初から四次元のコンパクト化の半径を決めてをいたのとなんら変りはない。そこで一つの試みとして、bulk 中に場、特にスカラー場を入れてみる。ここで挙げるモデルの結論を先にいってしまうと、このスカラー場がある配位 (当然 r_c 依存性を含んでいると考えられる、) を bulk で取ったとき、四次元の有効理論に落とせば有効ポテンシャルとして r_c の関数が得られる。これが欲しかった radion のポテンシャルなのである。五次元 graviton のゼロモードとして作用の中での形が決ってしまっている radion に比べ、新たに入れたスカラー場のポテンシャルを操作することは制限されていない。また二枚の brane 間の物理的な距離を感知するものは何か bulk 中を飛んでいるものに違いない。このようなわけで bulk のスカラー場を考えることはとても自然なことといえる。

まず、準備として一般に bulk で定義されたスカラー場 Φ の配位を考える [22]。これは第一章で述べた、場の Kaluza-Klein 分解の簡単な例となっている。作用として

$$S = \frac{1}{2}\int d^4x \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \sqrt{\hat{g}}[\hat{g}^{MN}\partial_M\Phi\partial_N\Phi - m^2\Phi^2] \tag{3.3.27}$$

が与えられた時、back ground metric (3.2.8) を代入し部分積分すると

$$S = \frac{1}{2}\int d^4x \int_{-\pi}^{\pi} r_c d\phi \left[\sigma\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi + \frac{1}{r_c^2}\Phi\partial_\phi\{\sigma^2\partial_\phi\Phi\} - m^2\sigma^2\Phi^2\right]. \tag{3.3.28}$$

これから求まるスカラー場の方程式は

$$\sigma\Box\Phi(x,\phi) + \frac{1}{r_c^2}\left(\sigma^2\Phi(x,\phi)'\right)' - m^2\sigma^2\Phi(x,\phi) = 0, \tag{3.3.29}$$

となるが (ここで $'$ は ϕ 微分を指す)、これを変数分離するために Φ を次のように展開する。

$$\Phi(x,\phi) = \sum_n \psi_n(x)\frac{y_n(\phi)}{\sqrt{r_c}}. \tag{3.3.30}$$

$y_n(\phi)$ は下の微分方程式の解で完全系を張る。

$$-\frac{1}{r_c^2}(\sigma^2 y_n')' + m^2\sigma^2 y_n = m_n^2\sigma y_n, \tag{3.3.31}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\phi\sigma(\phi)y_n(\phi)y_m(\phi) = \delta_{mn}. \tag{3.3.32}$$

m_n が四次元の質量である。つまり解 y_n が求まれば四次元有効作用は

$$S_{eff} = \frac{1}{2}\sum_n \int d^4x\{\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\psi_n\partial_\nu\psi_n - m_n^2\psi_n^2\} \tag{3.3.33}$$

と、Kaluza-Klein モードの和で表される。さて、微分方程式 (3.3.31) の解は ν 次のベッセル関数 J_ν と、ノイマン関数 Y_ν の線形結合となる。

$$y_n(\phi) \propto e^{2kr_c\phi}\left[J_\nu(\frac{m_n}{k}e^{kr_c\phi}) + b_{n\nu}Y_\nu(\frac{m_n}{k}e^{kr_c\phi})\right]. \tag{3.3.34}$$

ただし

$$\nu = \sqrt{4 + \frac{m^2}{k^2}}. \tag{3.3.35}$$

$b_{n\nu}$ は境界条件から決まる定数である。この境界条件は微分方程式 (3.3.31) が自己共役であること、いいかえれば作用を変分するときに境界 (brane が存在する) での表面積分がゼロになると要求することからでてくる。このため $y_n(\phi)$ の微分は brane の在るところで連続でなければならない。brane は Z_2 対称性の固定点だったから結局 $y_n'|_{\phi=0} = y_n'|_{\phi=r_c} = 0$ が出てくる。

さて、準備を終え、本題に入る。始めに radion を naive に先に定義した $T(x)$ と同定しよう。すなわち

$$ds^2 = e^{-2k\phi T(x)}g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - T^2(x)d\phi^2. \tag{3.3.36}$$

さらに $\varphi = fe^{-k\pi T(x)}$、$f = \sqrt{\frac{24M^3}{k}}$ を定義し、Einstein-Hilbert 作用を書くと、

$$S = \frac{2M^3}{k}\int d^4x\sqrt{-g}\left[1 - \left(\frac{\varphi}{f}\right)^2 R\right] + \frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi, \tag{3.3.37}$$

の形になる。これを見ればすぐ分かるように、φ は massless のスカラー場であり、Einstein-Hilbert 作用からは φ が真空期待値を持つようなポテンシャルは生まれない。従って、先ほど述べた考察からスカラー場の導入が必要とされる。式 (3.3.27) でもってスカラー場の作用を考える。ただし今度は境界条件として $y_n'|_{boundary} = 0$ を置くかわりに、bulk のポテンシャルとは別に brane 上にポテンシャル

$$V_{hid} = \int d^4x\sqrt{-g_{hid}}\lambda_{hid}(\Phi^2 - v_{hid}^2)^2, \tag{3.3.38}$$

$$V_{vis} = \int d^4x\sqrt{-g_{vis}}\lambda_{vis}(\Phi^2 - v_{vis}^2)^2, \tag{3.3.39}$$

を付け加える。これが source となって境界条件は変ってくる。今考えたいのは bulk で真空期待値を持つような Φ の back ground であるからスカラー場の一般解 (3.3.34) のうちゼロモードで ϕ 依存性のみを持つものを探す。これは $A_\pm$ を定数とすると

$$\Phi(\phi) = e^{2kr_c|\phi|}\left[A_+e^{\nu kr_c|\phi|} + A_-e^{-\nu kr_c|\phi|}\right]. \tag{3.3.40}$$

解 (3.3.40) は余次元の半径を r_c に固定した geometry でのものであることに注意する。本当ならば Φ の形は back ground の geometry を求める際には任意であった φ に依るはずである。そこで解 (3.3.40) における r_c をそのまま $T(x) = -\frac{1}{k\pi}\log(\frac{\varphi}{f})$ に置き換えたものがスカラー場の方程式 (3.3.29) の解になっていることを期待する。

$$\Box\Phi = \sum_{i=\pm} A_i \left[-\frac{(2+i\nu)\phi}{f\pi}\Big(\frac{\varphi}{f}\Big)^{-(3+i\nu)\frac{\phi}{\pi}} + \frac{2(2+i\nu)(3+i\nu)\phi^2}{f^2\pi^2}\Big(\frac{\varphi}{f}\Big)^{-(4+i\nu)\frac{\phi}{\pi}}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi \right] \tag{3.3.41}$$

であるから φ の作用 (3.3.37) から導き出される background の φ の解のうち平面波であるものについては $\Box\Phi = 0$ を満たす。よって実際平面波である $\varphi(x)$ は場の方程式 (3.3.29) の解となる。そこで今 r_c と記している個所はすべて、後で平面波の $\varphi(x)$ に置き換えることが出来る。(手続き中に x の微分を作用することがない限り。)r_c だと思っていたものは実は background metric を求めた際には決定しきれなかった場 $\varphi(x)$ であった、と後で解釈できるのである。さて、解 (3.3.40) にはまだ境界条件を課していなかった。繰り返しになるが、今の場合境界条件は brane にある source の影響を受ける。ここで仮に source(3.3.38)、(3.3.39) 中の λ_{hid}、λ_{vis} が非常に大きいとする。するとこの極限で $\Phi(\phi)$ は brane 上で v_{hid}、v_{vis} の値をとると思われる。つまり境界条件は

$$\Phi(0) = v_{hid}, \quad \Phi(\pi) = v_{vis}. \tag{3.3.42}$$

よって $kr_c \gg 1$ のとき

$$A_+ = v_{vis}e^{-(2+\nu)kr_c\pi} - v_{hid}e^{-2\nu kr_c\pi}, \tag{3.3.43}$$

$$A_- = v_{hid}(1 + e^{-2\nu kr_c\pi}) - v_{vis}e^{-(2+\nu)kr_c\pi}. \tag{3.3.44}$$

次にこのようにして求まったスカラー場を余次元方向に積分してしまえば四次元の有効ポテンシャル $V(r_c)$ がでてくる。特に $m \ll k$ のとき、つまり $\nu = 1+\epsilon, \quad \epsilon \ll 1$ のときを考えると、

$$V(r_c) = 4ke^{-4kr_c\pi}(v_{vis} - v_{hid}e^{-\epsilon kr_c\pi})^2 \tag{3.3.45}$$

となる。上の議論より r_c をそっくり $-\frac{1}{k\pi}\log(\frac{\varphi}{f})$ に置き換えればいいから

$$V[\varphi] = \frac{k^3}{144M^6}\varphi^4\left[v_{vis} - v_{hid}\Big(\frac{\varphi}{f}\Big)^\epsilon\right]^2. \tag{3.3.46}$$

以上で φ のポテンシャルが求まったから φ が真空期待値が決定される。

$$\frac{\langle\varphi\rangle}{f} = \Big(\frac{v_{vis}}{v_{hid}}\Big)^{1/\epsilon}, \tag{3.3.47}$$

あるいは

$$kr_c = k\langle\varphi\rangle = \frac{1}{\pi\epsilon}\log\Big(\frac{v_{hid}}{v_{vis}}\Big). \tag{3.3.48}$$

hierarchy 問題を解決するような r_c を出すには例えば $v_{hid}/v_{vis} = 1.5$、$m/k = 0.2$ 程度をとればいい。

このモデルではスカラー場 $\Phi(\phi)$ が brane 上で異なる期待値を取って固定されることが本質であった。その条件の元ではスカラー場の作用 (3.3.27) の運動項は余次元方向への傾きが大きいとエネルギー的に損をするように働き、一方質量項は余次元のサイズが大きいほどエネルギー的に損をするように働く。両端で Φ は違う値に固定されているから r_c が大きいほうが運動項では良いが、質量項で損をする。従って、r_c はある値で落ち着かざるを得ないのである。

Goldberger と Wise の方法ではスカラー場の back reaction を無視した。つまり正確には始めからスカラー場のエネルギー運動量テンソルを含めた Einstein 方程式と、スカラー場の未だ解けていない metric のもとでの運動方程式を連立させて解かなくてはいけなかったわけだが [23]、スカラー場が radion 以外に与える影響は小さいとして無視したわけである。そのおかげで background metric が $T(x)$ の大きさを除いては Φ に関係なく決まった。この時点ではまだ $T(x)$ は任意であった。次に Φ の background の配位が決まった。以上の background から有効四次元理論を作ったとき、初めて $T(x)$ の値が決まる。これは安定化のメカニズムが働かないとき $T(x)$ が四次元で見える自由度である、という事実から当然である。

この節の始めで述べたように上のモデルでの radion の取り扱いは厳密には正しくない。そのことは例えば式 (3.3.40) 中の r_c を $\varphi(x)$ で書き直したとき、φ として二つの平面波の重ね合わせをもってきたとたんスカラー場の方程式 (3.3.29) を満たさなくなってしまう、という事情からも伺える。そこで次にもう一度 radion を定義し直すことをやってみる。

3.3.2 五次元 graviton のゼロモードとしての radion

ここで取り扱うことは 2.2 節でやったことに準じている [24]。まず background metric からの摂動 (2.2.24) を考えたとき真空の bulk 中で RS ゲージが取れたことを思い出そう。 bulk に brane を入れるとき RS ゲージでは、最も一般的な配置として $y = -\xi(x^\mu)$ と記述できることは既に示した。Randall-Sundrum 1 モデルでは二枚 brane を必要とするので、RS ゲージで固定した bulk において positive tension brane、negative tension brane の置く位置をそれぞれ

$$y_+ = -\xi^y_+(x^\mu), \quad y_- = -\xi^y_-(x^\mu) + r_c\pi, \tag{3.3.49}$$

と表せる。この状況はもっとも一般的であって、いかなる場合でもこの記述に持っていけることを強調しておく。さて次に brane 近傍での境界条件を求めるために GN ゲージに持っていかなくてはならない。ところが一般に、GN ゲージは brane 近傍でしかうまく定義されていない。特に二枚の brane が任意の配置にあったとき、一方の brane に対して、brane に垂直な方向を座標軸にとる、という手続きはもう一方での brane での手続きと必ずしも両立しない。よって y_+ 近傍と y_- 近傍で、別々の GN ゲージを取る必要がある。つまり y_+ 近傍での GN ゲージは

$$\begin{cases} \bar{y}_+ = y + \xi^y_+ \\ \bar{x}^\mu_+ = x^\mu + \frac{1}{2k} e^{2ky} \partial^\mu \xi^y_+ \end{cases} \tag{3.3.50}$$

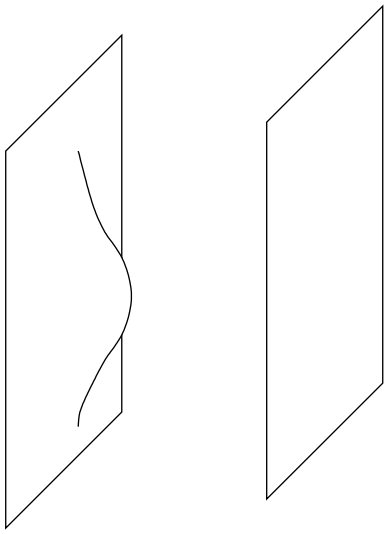

図 3.2: 一つの GN 座標では記述出来ない 2 brane 系

これで $\bar{y}_+ = 0$ に brane があると言える。y_- についても同様にして

$$\begin{cases} \bar{y}_- = y + \xi^y_- \\ \bar{x}^\mu_- = x^\mu + \frac{1}{2k} e^{2ky} \partial^\mu \xi^y_- \end{cases} \tag{3.3.51}$$

GN ゲージでの metric の摂動は式 (2.2.29) から

$$\bar{h}_{(\pm)\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{k}\partial_\mu\partial_\nu \xi^y_{(\pm)} + 2ke^{-2ky}\eta_{\mu\nu}\xi^y_{(\pm)} \tag{3.3.52}$$

で与えられる。junction conditon は (±)brane にエネルギー運動量テンソル $T_{(\pm)\mu\nu}$ を入れて考えれば、式 (2.2.47) と全く同じになって

$$(\partial_{\bar{y}} + 2k)\bar{h}_{(\pm)\mu\nu}(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{4M^3}\left(T_{(\pm)\mu\nu}(\bar{x}) - \frac{1}{3}e^{-2k\bar{y}}\eta_{\mu\nu}T_{(\pm)}(\bar{x})\right), \quad at \begin{cases} \bar{y}_+ = 0 \\ \bar{y}_- = r_c\pi \end{cases} \tag{3.3.53}$$

第二章の議論と全く同じようにして、もう一度 RS ゲージに戻して上の条件を評価すると

$$(\partial_y + 2k)h_{(\pm)\mu\nu}(x, y) = \frac{1}{4M^3}\Sigma_{(\pm)\mu\nu}, \quad at \;\; y = 0, r_c\pi \tag{3.3.54}$$

$$\Sigma_{(\pm)\mu\nu} \equiv \left(T_{(\pm)\mu\nu}(x) - \frac{1}{3}e^{-2ky}\eta_{\mu\nu}T_{(\pm)}(x)\right) + 8M^3\partial_\mu\partial_\nu\xi^y_{(\pm)}. \tag{3.3.55}$$

また式 (2.2.51) と同様に

$$\Box\xi^y_{(\pm)}(x) = \frac{1}{24M^3}T_{(\pm)}{}^\mu{}_\mu(x) \tag{3.3.56}$$

ここでの目的はきちんとゼロモードの自由度を identify することであるので、とりあえず、bulk にも brane にも source となるエネルギー運動量テンソルがないとして考える。従って

$$\Box \xi^y_{(\pm)}(x) = 0. \tag{3.3.57}$$

だが式 (3.3.57) が成り立っていても一般には $\xi^y_+ \neq \xi^y_-$ である。よって $y = 0$ と $y = r_c$ での境界条件が異なる。さて一方で bulk での運動方程式は、RS ゲージでは成分に依らず

$$\left[e^{2ky}\Box - \partial_y^2 + 4k^2\right] h_{\mu\nu} = 0 \tag{3.3.58}$$

であったから境界条件を考え合わせた解は

$$h_{\mu\nu} = \frac{1}{2k} e^{2ky} \partial_\mu \partial_\nu \xi^y_+ = \frac{1}{2k} e^{2k(y - r_c\pi)} \partial_\mu \partial_\nu \xi^y_-. \tag{3.3.59}$$

最後の等号は、既に始めに bulk 中に brane を入れた時点で、RS ゲージでは全空間が一つの patch で張れることを保証していたため、解 $h_{\mu\nu}$ が一意でなければならないからである。式 (3.3.59) から

$$\xi^y_+(x) = e^{-2kr_c\pi} \xi^y_- \equiv f(x) \tag{3.3.60}$$

が成立する。また brane 間の物理的な距離 ds は RS ゲージで見ることができて、

$$ds = -\xi^y_- + r_c\pi + \xi^y_+ = -(e^{2kr_c\pi} - 1) f(x) + r_c\pi \tag{3.3.61}$$

となる。naive な予想 (3.3.36) との違いをみるために別のゲージに移ってみよう。

$$y' = y + e^{-2ky} f(x) \tag{3.3.62}$$

の変換をすれば、二枚の brane が一つの patch 内で、しかも $y' = 0$ と $y' = r_c\pi$ に存在する記述ができる。ただしこのゲージではもはや $g_{yy} \neq -1$ となる。

$$ds^2 = \exp\left[-2k\left(y' + f(x')e^{2ky'}\right)\right] g_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu - \left(1 + 2kf(x)e^{2ky'}\right)^2 dy'^2 \tag{3.3.63}$$

従ってこの metric において $f(x)$ を radion と同定するのが最も妥当であろう。この radion は RS ゲージで見ると明らかに brane のゆらぎの自由度を表していることが分かる。また式 (3.3.57) は radion の運動方程式と解釈できるから radion は四次元でみて massless の場である。式 (3.3.59) から、radion というのが結局五次元の graviton のゼロモードのうちの一つであることも明白である。ここで再び 2.2 節を思い出そう。RS ゲージの bulk を考えるかぎり、運動方程式 (2.2.33) を満たすゼロモードは二つあった。$h^{(1)}_{\mu\nu}$ と $h^{(-1)}_{\mu\nu}$ である。これらは TT condition を満たすことは分かっているがそのなかにいくつ自由度がふくまれているのかについてはさらに調べてみないと分からなかった。たとえ TT condition を満たしていても、その中には自由度 2 のテンソル成分の他、$\partial_\mu A^\mu = 0, \quad \Box A^\mu = 0$ を満たすベクトル場 (つまり Lorenz ゲージに固定されたゲージ場) や、あるいは massless スカラー場 $\Box\phi(x) = 0$ が含まれている可能性があるからである。$h^{(1)}_{\mu\nu}$ については運動方程式から四次元の graviton と同定できた。一方 $h^{(-1)}_{\mu\nu}$ については、第二章では無

限に広がっている余次元を考えたので規格化が出来なくて、物理的自由度とは捉えなかった。しかし二枚 brane がある Randall-Sundrum 1 モデルでは余次元はコンパクトなので $h_{\mu\nu}^{(-1)}$ が物理的な自由度として観測できる。この $h_{\mu\nu}^{(-1)}$ の自由度はいくつあるのだろうか。式 (2.2.49) にいまや物理的であることが分かった $h_{\mu\nu}^{(-1)}(x)$ を入れてみる。brane 上にエネルギー運動量テンソルがない時の条件はまさに式 (3.3.59) である。この境界条件から、$h_{\mu\nu}^{(-1)}$ はスカラー場としての自由度しか持ち得ない。radion は二枚の brane 間の相対運動を記述する場である。従って brane が一枚の Randall-Sundrum 2 モデルではスペクトラムに入っていなかったのである。

radion があるとき四次元の重力はどのような形になっているのだろうか。Randall-Sundrum 2 モデルではゼロモードのみの近似で Einsein 重力が再現されていた。今の場合重力を担う粒子として余分に massless スカラー場が含まれているので、当然予測されるように四次元重力は Brans-Dicke タイプとなる。このことを見るのに、まず、brane が二枚ある場合ではゼロモードの規格化が brane 一枚の場合と異なることに注意する。式 (2.2.43) から、ゼロモード $h_{\mu\nu}^{(1)}$ の規格化された正しい係数 $N^{(1)}$ は

$$(N^{(1)})^2 2\int_0^{r_c\pi} dy e^{2ky}\sigma^2(y) = 1 \tag{3.3.64}$$

で与えられる。つまり

$$\begin{aligned}\Box\,[h_{\mu\nu}^{(1)}]^{(\pm)} &= \sum_{s=\pm}\frac{e^{(1+s)kr_c\pi}}{2M^3}N^{(1)}\left[T_{\mu\nu}^{(s)} - \frac{1}{3}\eta_{\mu\nu}T^{(s)}\right] \\ &= \sum_{s=\pm}16\pi G^{(s)}\left[T_{\mu\nu}^{(s)} - \frac{1}{3}\eta_{\mu\nu}T^{(s)}\right], \qquad (3.3.65)\\ G^{(\pm)} &= \frac{G_5 k e^{\pm kr_c\pi}}{2\sinh(kr_c\pi)}. \qquad (3.3.66)\end{aligned}$$

ここで G_5 は五次元の重力定数、$G^{(\pm)}$ は Brans-Dicke 理論の重力定数を表す。brane 上の induced metric 自体はゼロモードのみを考えた近似で式 (2.2.65) のように与えられるから結局

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sigma^{(\pm)}}\Box\bar{h}_{\mu\nu}^{(\pm)} &= \sum_{s=\pm}16\pi G^{(s)}\left[T_{\mu\nu}^{(s)} - \frac{1}{3}\eta_{\mu\nu}T^{(s)}\right] \mp \frac{16\pi G^{(\pm)}}{3}\frac{\sinh(kr_c\pi)}{e^{\pm kr_c\pi}}\eta_{\mu\nu}T^{(\pm)} \\ &\sum_{s=\pm}16\pi G^{(s)}\left[T_{\mu\nu}^{(s)} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}T^{(s)}\right] \pm \frac{8\pi G^{(\pm)}}{3}e^{-2kr_c\pi}\eta_{\mu\nu}T^{(\pm)} \qquad (3.3.67)\end{aligned}$$

が得られる。この最後の項が四次元 Einstein 重力からのずれを示している。このずれから Brans-Dicke パラメータ ω_{BD} を読み取ろう。ω_{BD} の定義は式 (1.4.25) から得ることが出来る [25]。BD 理論の Einstein 重力からのずれは式 (1.4.27) の右辺第 2、3 項で与えられる。式 (1.4.27) を書き直すと

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi}{\phi}\left[T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right] + \frac{\omega_{BD}}{\phi}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi + \frac{1}{\phi}(\nabla_\mu\nabla_\nu\phi + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\Box\phi) \tag{3.3.68}$$

となる。右辺の最後の項のうち、$\Box\phi$ は式 (1.4.25) を使って置き換えられる。また右辺の ω_{BD} を係数に持つ項は場 ϕ のつくるエネルギー運動量テンソルで、これらの寄与は ϕ の二次であるので、小さいと仮定する。式 (3.3.68) を式 (3.3.67) と比較するためにはこの Brans-Dicke 重力理論について四次元 metric の Minkowski からの摂動を考え、ゲージを固定する必要がある。式 (3.3.68) のうちの Einstein 重力を再現している部分が、通常の四次元重力の harmonic coordinate system における摂動の方程式 (式 (2.2.67) 参照) に一致していることに着目しよう。もう一度、式 (3.3.68) のうち ω_{BD} を係数とする項を落としたものについて書き下すと式 (1.2.9) を用いて

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}(\partial_\nu\partial_\alpha h^\alpha_\mu+\partial_\mu\partial_\alpha h^\alpha_\nu-\Box h_{\mu\nu}-\partial_\mu\partial_\nu h)\\&=\frac{8\pi}{\langle\phi\rangle}\left[T_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right]++\frac{1}{\langle\phi\rangle}(\nabla_\mu\nabla_\nu\phi+\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\Box\phi)\end{aligned}\tag{3.3.69}$$

となる。ここで harmonic coordinate system のゲージ固定 ($\partial_\nu h^\nu_\mu=\frac{1}{2}\partial_\mu h$) との類推をする。ゲージ固定条件として

$$\partial_\mu\Big(\frac{1}{2}h-\frac{1}{\langle\phi\rangle}\phi\Big)=\partial_\nu h^\nu_\mu\tag{3.3.70}$$

を取れば、式 (3.3.69) 及び (1.4.25) から次式が得られる。

$$\Box h_{\mu\nu}=\frac{16\pi}{\langle\phi\rangle}\left[T_{\mu\nu}\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}T\right]+\frac{8\pi}{\langle\phi\rangle}\eta_{\mu\nu}\frac{1}{3+2\omega_{BD}}T.\tag{3.3.71}$$

これを式 (3.3.67) と比較すれば Randall-Sundrum 1 モデルで、安定化をしないときの brane 上の重力理論での ω_{BD} が求まることになる。ただしこの時見ている bane でないほうの brane 上には source となる場がないものとする。つまり $T^{(other\ brane)}_{\mu\nu}=0$ とおく。

$$\omega^{(\pm)}_{BD}=\frac{3}{2}(e^{\pm 2kr_c\pi}-1).\tag{3.3.72}$$

positive tension brane で観測される BD パラメータは $kr_c\pi>4$ であれば現在の制限 $\omega_{BD}>3000$ を満たしている。一方 negative tension brane の BD パラメータは $-\frac{3}{2}<\omega^{(-)}_{BD}<0$ の値をとる。従って negative tension brane に我々が住んでいるという描像にたつとこのような massless スカラー場を排除する必要がある。安定化を含めた brane 上の重力理論についての詳細はこの次の小節で考えることにする。ω_{BD} の求め方として、作用を実際に書き下してその形を BD 理論の作用 (1.4.31) と比較してもよい。この場合作用は metric として (3.3.63) から作られる Ricci スカラーを持ってくればよい [25]。この作用の中で、場の二次までとってきたものが線形の摂動についての運動方程式を与える作用となる。

対比のため、第一章の冒頭で述べた Kaluza-Klein 理論を思い出してみよう。そこでは五次元の graviton のゼロモードの自由度はテンソルから二つ、ベクトル場から二つ、スカラー場から一つの計五つであった。他方、Randall-Sundrum 2 モデルでは四次元 graviton の自由度二つしかなかった。ここでやった Randall-Sundrum 1 モデルでは radion をいれて三つの自由度がある。もとの Kaluza-Klein 理論でのベクトル場の自由度はこの後の二つのモデルでは Z_2 対称性で落としてしまっていると考えられる。

3.3.3 安定化と四次元重力

このように、五次元 graviton の自由度に四次元でみた massless スカラー場があった時、brane 上の重力理論は Brans-Dicke タイプになってしまう。一方、Goldberger-Wise の安定化のメカニズムは、radion の定義こそ正確さを欠いたが、同じ論理を正確に identify された radion について用いれば結果として全く同様な安定化が起こる。そして、一旦安定化が起こってしまえばもはや radion は massive になってしまう。このことから、安定化が行われれば四次元重力理論は BD タイプではなく通常の Einstein 重力になるのではないか、と期待される。このことを実際に確かめよう。Goldberger と Wise のメカニズムを再び使い、ただし今度は bulk 中のスカラー場 Φ の back reaction をきちんと評価した安定化を行う [26]。

まず background metric の形は

$$ds^2 = \hat{g}_{MN}dx^M dx^N = \sigma(y)\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - dy^2 \tag{3.3.73}$$

のみ仮定する。これと bulk 中で定義されたスカラー場 Φ について連立させて background 解を求める。この Φ は式 (3.3.27)、(3.3.38)、(3.3.39) と同じラグランジアンとする。この状況での Einstein 方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned}\hat{R}_{MN} = &\frac{2}{3}\Lambda\hat{g}_{MN} - \frac{1}{12M^3}\hat{g}_{MN}\left[\frac{3}{2}\nabla_L\Phi\nabla^L\Phi - 5m^2\Phi^2\right] \\ &+ \frac{1}{4M^3}\left[-\nabla_M\Phi\nabla_N\Phi + \frac{1}{2}\hat{g}_{MN}\nabla_L\Phi\nabla^L\Phi - \hat{g}_{MN}m^2\Phi^2\right].\end{aligned} \tag{3.3.74}$$

これから、background 解 $\sigma(y)$, $\Phi_0(y)$ は $H(y) \equiv \frac{1}{2}\frac{\dot{\sigma}}{\sigma}$ を用いて

$$\begin{cases} \dot{H} = -\frac{1}{12M^3}\dot{\Phi}_0^2, \\ H^2 = \frac{1}{24M^3}\left[\frac{1}{2}\dot{\Phi}_0^2 - m^2\Phi_0^2 - 4M^3\Lambda\right], \\ \ddot{\Phi}_0 + 4H\dot{\Phi}_0 - 2m^2\Phi_0 = 0, \end{cases} \tag{3.3.75}$$

という連立方程式を解くことで得られる。この background からの摂動を h_{MN}, $\delta\Phi$ で表すと bulk のゲージ固定条件として

$$\begin{cases} h_{yy} = 2\omega, \quad h_{\mu y} = 0, \\ h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}^{(TT)} + \omega\sigma\eta_{\mu\nu}, \\ \delta\Phi = -\frac{6M^3}{\dot{\Phi}_0}[\dot{\omega} + 2H\omega], \end{cases} \tag{3.3.76}$$

という Newton ゲージが持ってこれる。スカラー場がないときこの Newton ゲージは RS ゲージ (2.2.25) と一致している。$h_{\mu\nu}^{TT}$ は RS ゲージと同じ transverse-traceless 条件を満たし、ω は五次元の Newton ポテンシャルである。Newton ゲージでの Christoffel 記号の摂動部分は以下で表される。

$$\begin{cases} \delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2\sigma}\Big(\partial_\mu h^\lambda_\nu + \partial_\nu h^\lambda_\mu - \partial^\lambda h_{\mu\nu}\Big), \\ \delta\Gamma^y_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\Big(\partial_y h_{\mu\nu} + \sigma'\eta_{\mu\nu}h_{yy}\Big), \quad \delta\Gamma^\nu_{\mu y} = \frac{1}{2\sigma}\Big(\partial_y h^\nu_\mu - \frac{\sigma'}{\sigma}h^\nu_\mu\Big), \\ \delta\Gamma^y_{\mu y} = -\frac{1}{2}\partial_\mu h_{yy}, \quad \delta\Gamma^\mu_{yy} = -\frac{1}{2\sigma}\partial^\mu h_{yy}, \quad \delta\Gamma^y_{yy} = -\frac{1}{2}\partial_y h_{yy}, \end{cases} \tag{3.3.77}$$

以上から、bulk での運動方程式は $h_{\mu\nu}$、ω、それぞれ

$$\left[\sigma^{-1}\Box - \partial_y^2 + \frac{\ddot{\sigma}}{\sigma}\right] h_{\mu\nu}^{TT} = 0, \tag{3.3.78}$$

$$\left[\Box - \sigma\dot{\Phi}_0^2\,\partial_y \frac{1}{\sigma\dot{\Phi}_0^2}\partial_y\,\sigma + \frac{1}{6M^3}\sigma\dot{\Phi}_0^2\right]\omega = 0, \tag{3.3.79}$$

となる。当然ながら、スカラー場 Φ がなければ $\sigma = e^{-2ky}$ が back ground の解となり、式 (3.3.78) は RS ゲージの運動方程式 (2.2.33) に一致する。

ここで本論から少しはずれて、どのようにして Newton ゲージがとれて、運動方程式が導き出されるのかを、RS ゲージの時との類似性を強調しながら示すことにする。まず、RS ゲージのときと同様に $h_{\mu y} = 0$ が常に成立するようにゲージを固定することが出来る。まだ h_{yy} を残したまま Einstien 方程式とスカラー場の方程式の摂動部分を書き下すと次のようになる。

$$\begin{aligned}
\delta R_{yy} &= \frac{1}{2\sigma}\ddot{h} - \frac{\ddot{\sigma}}{2\sigma^2}h + \frac{1}{2\sigma}\Box h_{yy} + \frac{\dot{\sigma}}{\sigma}\dot{h}_{yy} - \frac{\dot{\sigma}}{2\sigma^2}\dot{h} + \frac{\dot{\sigma}^2}{2\sigma^3}h \\
&= \frac{2}{3}\Lambda h_{yy} - \frac{1}{2M^3}\dot{\Phi}_0\delta\dot{\Phi} + \frac{1}{6M^3}h_{yy}V[\phi_0] - \frac{1}{6M^3}V'[\Phi_0]\delta\Phi,
\end{aligned} \tag{3.3.80}$$

$$\delta R_{\mu y} = \{\frac{1}{2\sigma}(\partial_\mu h - \partial^\lambda h_{\mu\lambda})\}' + \frac{3\dot{\sigma}}{4\sigma}\partial_\mu h_{yy} = -\frac{1}{4M^3}\dot{\Phi}_0\partial_\mu\delta\Phi, \tag{3.3.81}$$

$$\begin{aligned}
\delta R_{\mu\nu} &= -\frac{1}{2}\ddot{h}_{\mu\nu} - \frac{\dot{\sigma}^2}{2\sigma^2}h_{\mu\nu} - \frac{\dot{\sigma}}{4\sigma}\Big(-\frac{\dot{\sigma}}{\sigma}h + \dot{h}\Big)\eta_{\mu\nu} + \frac{1}{2\sigma}\Big(h_{\mu\nu} - \partial_\nu\partial_\lambda h_\mu^\lambda - \partial_\mu\partial_\lambda h_\nu^\lambda + \Box h_{\mu\nu}\Big) \\
&\quad - \frac{1}{2}\partial_\mu\partial_\nu h_{yy} - \frac{\ddot{\sigma}}{2}\eta_{\mu\nu}h_{yy} - \frac{\dot{\sigma}^2}{2\sigma}\eta_{\mu\nu}h_{yy} - \frac{\dot{\sigma}}{4}\eta_{\mu\nu}\dot{h}_{yy} \\
&= \frac{2}{3}\Lambda h_{\mu\nu} + \frac{1}{6M^3}h_{\mu\nu}V[\Phi_0] + \frac{1}{6M^3}\sigma\eta_{\mu\nu}V'[\Phi_0]\delta\Phi,
\end{aligned} \tag{3.3.82}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sigma}\Box\delta\Phi - \delta\ddot{\Phi} - \dot{h}_{yy}\dot{\Phi}_0 - h_{yy}\ddot{\Phi}_0 - \{-\frac{1}{2}\dot{h}_{yy} + \frac{1}{2\sigma}\dot{h} - \frac{\dot{\sigma}}{2\sigma^2}h\}\dot{\Phi}_0 \\
- \frac{2\dot{\sigma}}{\sigma}\delta\dot{\Phi} - \frac{2}{\sigma}\dot{\sigma}\dot{\Phi}_0 h_{yy} + V''[\Phi_0]\delta\Phi = 0.
\end{aligned} \tag{3.3.83}$$

さて、$h_{\mu\nu}$ の中にはテンソル成分だけでなく、ベクトル成分やスカラー成分も入っている。それらを区別して書き下すと次のようになる。

$$h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}^{TT} + (\partial_\mu f_\nu + \partial_\nu f_\mu) + \phi\eta_{\mu\nu} + \partial_\mu\partial_\nu\psi, \quad s.t.\,\partial^\lambda f_\lambda = 0. \tag{3.3.84}$$

これを Newton ゲージの形 (3.3.76) と見比べると、Newton ゲージに固定するためには $h_{\mu\nu}$ の中のテンソル部分 $h_{\mu\nu}^{TT}$ とスカラー部分 ϕ のみが物理的な自由度として残るようにしなければならないことが分かる。ゲージ固定をして

$$h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}^{TT} + \sigma\omega\eta_{\mu\nu}, \tag{3.3.85}$$

$$h_{yy} = 2\omega, \tag{3.3.86}$$

の形にできることが分かれば、式 (3.3.81) から

$$\delta\Phi = -\frac{6M^3}{\dot{\Phi}_0}[\dot{\omega} + 2H\omega] \tag{3.3.87}$$

になることがすぐ導きだせる。それでは物理的自由度ではないはずの ψ や f_μ は実際にゲージ変換で落とせるのだろうか。このことを見るために式 (3.3.80)、(3.3.82)、(3.3.83) に注目する。特に今スカラー場の自由度をみるとする。すると ψ があったとしても実は (3.3.87) が成立することが分かるので式 (3.3.80)、(3.3.83) は ω と ψ の方程式を与える。$\psi = \sigma\hat{\psi}$ として ψ の σ 依存性を抜き出したうえで、具体的に表すと

$$\frac{1}{\sigma}\Box\omega - \ddot{\omega} - \frac{\dot{\sigma}}{\sigma}\dot{\omega} + \frac{2\ddot{\Phi}_0}{\dot{\Phi}_0}\dot{\omega} + \frac{2\ddot{\Phi}_0}{\dot{\Phi}_0}\frac{\dot{\sigma}}{\sigma}\omega + \frac{\dot{\Phi}_0^2}{3M^3}\omega + \frac{\dot{\sigma}}{2\sigma}\Box\dot{\hat{\psi}} + \frac{1}{2}\Box\ddot{\hat{\psi}} = 0, \tag{3.3.88}$$

$$\begin{aligned}
&-\frac{6M^3}{\sigma\dot{\Phi}_0}\Box\Big(\dot{\omega} + \frac{\dot{\sigma}}{\sigma}\omega\Big) - 2\ddot{\Phi}_0\omega - 5\dot{\Phi}_0\dot{\omega} - \frac{2\dot{\sigma}}{\sigma}\dot{\Phi}_0\omega - 12M^3\frac{\dot{\sigma}}{\sigma}\frac{\ddot{\Phi}_0}{\dot{\Phi}_0^2}\Big(\dot{\omega} + \frac{\dot{\sigma}}{\sigma}\omega\Big) \\
&\quad + 12M^3\frac{\dot{\sigma}}{\sigma\dot{\Phi}_0}\Big(\ddot{\omega} + \frac{\dot{\sigma}}{\sigma}\dot{\omega}\Big) - 6M^3\frac{1}{\dot{\Phi}_0}V''[\Phi_0]\Big(\dot{\omega} + \frac{\dot{\sigma}}{\sigma}\omega\Big) - 12M^3\frac{\ddot{\Phi}_0}{\dot{\Phi}_0^2}\Big(\ddot{\omega} + \frac{\dot{\sigma}}{\sigma}\dot{\omega}\Big) \\
&\quad - 6M^3\Big(\frac{\dddot{\Phi}_0}{\dot{\Phi}_0^2} - \frac{2\ddot{\Phi}_0}{\dot{\Phi}_0^3}\Big)\Big(\dot{\omega} + \frac{\dot{\sigma}}{\sigma}\omega\Big) + 6M^3\frac{1}{\dot{\Phi}_0}\Big(\dddot{\omega} + \frac{\dot{\sigma}}{\sigma}\ddot{\omega}\Big) \\
&\qquad\qquad - \frac{\dot{\Phi}_0}{2\sigma}\Box\dot{\psi} + \frac{\dot{\sigma}}{2\sigma^2}\dot{\Phi}_0\Box\psi = 0.
\end{aligned} \tag{3.3.89}$$

これから ψ についての式を求めると

$$\dot{\hat{\psi}}(x^\mu, y) = \frac{1}{\sigma^2}q(x^\mu). \tag{3.3.90}$$

ここで $q(x^\mu)$ は x^μ 依存性のみ持つ任意関数である。このようにして ψ の関数形に拘束がついた。この ψ がゲージ変換で消去できるかみてみよう。式 (3.3.84) の分解に対して $\phi = \sigma\omega = h_{yy}/2$、$h_{\mu y} = 0$ というゲージ固定条件を置くということはゲージ変換パラメータが次の条件を満たしているということと等価である。

$$\begin{cases}
\partial_\mu\epsilon^y = \sigma\dot{\epsilon}_\mu + given\ function, \\
\sigma\dot{\epsilon}^y\eta_{\mu\nu} = -\dot{\sigma}\epsilon^y\eta_{\mu\nu} - \sigma(\partial_\mu\epsilon_\nu + \partial_\nu\epsilon_\mu) + \partial_\mu\partial_\nu q\,\sigma\int\frac{dy}{\sigma^2} + given\ function.
\end{cases} \tag{3.3.91}$$

これをみれば明らかなように、ψ の寄与は $\epsilon_\mu \supset \partial_\mu q\,\sigma\int(2\sigma^2)^{-1}dy$、$\epsilon^y \supset q/\sigma$ に吸収することが出来る。同様のことがベクトル成分である f^μ についても言えるので、結局ゲージをうまく取って Newton ゲージ (3.3.76) にすることが可能なのである。ゲージ変換パラメータのうち $\epsilon_\mu = \zeta_\mu(x)$ は四次元でみた graviton のゲージ自由度に対応すると予想され、実際、上のゲージパラメータの条件からは固定されてないことに注意する。以上のようにして ω についての方程式 (3.3.79) が導出された。$h^{TT}_{\mu\nu}$ の方程式 (3.3.78) の方は式 (3.3.82) 及び (3.3.79) から容易に求められる。$h^{TT}_{\mu\nu}$ のうち四次元でみて massive なものはもともと自由度が五個だから、すべての成分が物理的といえる。ところが第二章でも見たように、$\Box h_{\mu\nu} = 0$ のものは、テンソル成分としては 2 つしか自由度を持てない。この余分な 3 つの自由度は実際 $\epsilon_\mu = \zeta_\mu(x)$ を変換パラメータとするゲージ変換で落とせる。というのは第二章と同じ notation を用いると、$h^{(-1)}_{\mu\nu} \propto \sigma$ は massless モードであり、$\epsilon_\mu = \zeta_\mu(x)$ というゲージパラメータで変換されるからである。

さて、本論に戻る。2.2 節の手続きに従って、次に brane での境界条件を求める。今回も brane 近傍で GN ゲージに移ると junction condition は見易くなる。

$$\partial_y \hat{\bar{g}}_{\mu\nu} = -\frac{1}{4M^3}(T_{\mu\nu} - \frac{1}{3}\eta_{\mu\nu}T) + \frac{1}{12M^3}V_{brane}\hat{\bar{g}}_{\mu\nu} + \frac{1}{12M^3}m^2\Phi^2\hat{\bar{g}}_{\mu\nu}, \tag{3.3.92}$$

$$\pm\dot{\bar{\Phi}} = 2\lambda^{(\pm)}(\bar{\Phi}^2 - v^{(\pm)2})\bar{\Phi}, \tag{3.3.93}$$

であるから、スカラー場、metric の摂動部分に対する junction condition はそれぞれ以下のようになる。

$$\pm\delta\dot{\bar{\Phi}} = 4\lambda^{(\pm)}(3\Phi_0^2 - v^{(\pm)\,2})\delta\bar{\Phi}, \quad at\ \bar{y} = \bar{y}_{\pm}^{(\pm)} \tag{3.3.94}$$

$$\pm(\partial_{\bar{y}} - 2H)\bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{1}{4M^3}[T_{\mu\nu} - \frac{1}{3}\eta_{\mu\nu}T]^{(\pm)} \mp \frac{1}{6M^3}\sigma\eta_{\mu\nu}\dot{\Phi}_0\delta\bar{\Phi}, \quad at\ \bar{y} = \bar{y}_{\pm}^{(\pm)} \tag{3.3.95}$$

ただしここで、positive tension brane、 negative tension brane の位置は Newton ゲージではそれぞれ $y^{(\pm)}$ にあるものとし、式 (3.3.50)、(3.3.51) のように各々の brane 近傍の GN ゲージで見たときは $\bar{y}_{+}^{(+)}$ には positive tension brane が、 $\bar{y}_{-}^{(-)}$ には negative tension brane がある、と記す。また 3.3.1 節の式 (3.3.38)、(3.3.39) における添字 hid, vis は簡単に上つきの $(+)$, $(-)$ で表した。$T = \eta^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$ である。第二章、及び 3.3.2 節でやったように、このようにして GN ゲージで境界条件を求めたら、再び場の方程式が見易いゲージに変換して考えるとよい。この場合は Newton ゲージに戻す。このための変換パラメータは次で表せる。

$$\epsilon^{y(\pm)} = \int_{y^{(\pm)}}^{y}\omega(y')dy' + \xi^{y\,(\pm)}, \tag{3.3.96}$$

$$\epsilon^{\mu(\pm)} = \eta^{\mu\nu}\int_{y^{(\pm)}}^{y}\frac{dy'}{\sigma(y')}\left[\int_{y^{(\pm)}}^{y'}\partial_\nu\omega(y'')dy'' + \partial_\nu\xi^{y\,(\pm)}\right] + \xi^\mu \tag{3.3.97}$$

ここで $\xi^{y\,(\pm)}$、ξ^μ は x^μ のみに依存するパラメータである。よって、

$$\delta\bar{\Phi}(y) = \delta\bar{\Phi}(y) + \dot{\Phi}_0(y)\left[\int_{y^{(\pm)}}^{y}\omega(y')dy' + \xi^{y\,(\pm)}\right], \tag{3.3.98}$$

$$\begin{aligned}\bar{h}_{\mu\nu}^{(\pm)}(y) = h_{\mu\nu}(y) &+ 2\sigma(y)\int_{y^{(\pm)}}^{y}\frac{dy'}{\sigma(y')}\left[\int_{y^{(\pm)}}^{y'}\partial_\mu\partial_\nu\omega(y'')dy'' + \partial_\mu\partial_\nu\xi^{y\,(\pm)}\right] \\ &+ \sigma(y)[\partial_\mu\xi_\nu + \partial_\nu\xi_\mu] + 2H\sigma(y)\eta_{\mu\nu}\left[\int_{y^{(\pm)}}^{y}\omega(y')dy' + \xi^{y\,(\pm)}\right].\end{aligned} \tag{3.3.99}$$

$h_{\mu\nu}^{TT}$ についての junction condition は

$$(\partial_y - 2H)h_{\mu\nu}^{TT} = -2\partial_\mu\partial_\nu\xi^{y(\pm)} \mp \frac{1}{4M^3}[T_{\mu\nu} - \frac{1}{3}\eta_{\mu\nu}T] + 2H\sigma\eta_{\mu\nu}\omega, \quad at\ y = y_{\pm}^{(\pm)} \tag{3.3.100}$$

となる。$h_{\mu\nu}$ は traceless でなければならないから上式より

$$2H\sigma\omega = \frac{1}{2}\Box\xi^y \mp \frac{1}{48M^3}T \tag{3.3.101}$$

これを式 (3.3.100) に代入して

$$\pm(\partial_y - 2H)h^{TT}_{\mu\nu} = -\frac{1}{4M^3}\Sigma^{(\pm)}_{\mu\nu}, \quad at\ y = y^{(\pm)}_{\pm}, \tag{3.3.102}$$

$$\Sigma^{(\pm)}_{\mu\nu} = [T_{\mu\nu} - \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}T]^{(\pm)} \pm 8M^3[\partial_\mu\partial_\nu\xi^{y(\pm)} - \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}\Box\xi^{y(\pm)}], \tag{3.3.103}$$

が得られる。さらに $h_{\mu\nu}$ が transverse であるために満たさなければいけない条件は

$$\Box\xi^{y\,(\pm)} = \pm\frac{1}{24M^3}T^{(\pm)}. \tag{3.3.104}$$

同様にして、$\delta\Phi$ の Newton ゲージでの境界条件は式 (3.3.94)、(3.3.98)、(3.3.79) から

$$\mp\left[4\lambda^{(\pm)}(3\Phi_0^2 - v^{(\pm)2}) - 2\frac{\ddot{\Phi}_0}{\dot{\Phi}_0}\right](\delta\Phi - \dot{\Phi}\xi^{y(\pm)}) = \frac{12M^3}{\sigma\dot{\Phi}_0}\Box\omega, \quad at\ y = y^{(\pm)}_{\pm}, \tag{3.3.105}$$

と表せる。

このようにして運動方程式と境界条件が求まったので次にこれらを満たす解を探そう。一般解は第二章でやったように、source $T_{\mu\nu}$ をゼロにしたときの解を求めてそれでグリーン関数を作れば得ることができる。$T_{\mu\nu} = 0$ の時の解にはゼロモードとその Kaluza-Klein モードが存在するがここではゼロモードのみを考える。というのはこの小節で行いたいことが第二章に準じて、ゼロモードの自由度の勘定と、brane 上で Einstein 重力が再現されるかをゼロモード truncation でみることだからである。その上で結果が安定化をしなかった場合とどう変るか、あるいは brane が一枚である Randall-Sundrum 2 モデルのときと比較してどうか、を考える。

まず $h^{TT}_{\mu\nu}$ のゼロモードを方程式 (3.3.78) から求める。

$$h^{TT}_{\mu\nu} = h^{(1)}_{\mu\nu}(x)\sigma + h^{(-1)}_{\mu\nu}(x)\sigma\int\frac{dy}{\sigma^2}. \tag{3.3.106}$$

$h^{(\pm1)}_{\mu\nu}$ の記法は第二章に準ずる。$h^{(\pm1)}_{\mu\nu}$ はおのおの TT 条件を満たし、$\Box h^{(\pm1)}_{\mu\nu} = 0$。$h^{(1)}_{\mu\nu}$ は $\epsilon_\mu = \zeta_\mu(x)$ という residual なゲージパラメータで変換される。従ってこのモードは四次元 graviton である。$h^{(-1)}_{\mu\nu}$ のほうは境界条件 (3.3.102) からさらに制限がついて

$$h^{(-1)}_{\mu\nu} = -2\sigma^{(\pm)}\partial_\mu\partial_\nu\xi^{y(\pm)} \tag{3.3.107}$$

と表されスカラー成分のみ許される。これは前小節でやった radion に対応している。また

$$\sigma^{(+)}\xi^{y(+)} = \sigma^{(-)}\xi^{y(-)} \tag{3.3.108}$$

が成立する。この条件は radion が物理的な場である限り満たされなければいけないものである。(式 (3.3.59) 参照のこと。) しかし安定化を考えた今の場合では、すぐ見るようにスカラー場 $\delta\Phi$ の境界条件のほうにも $\xi^{y(\pm)}$ が現れるため一つの独立な物理的自由度としては解釈できない。

一方スカラー場の摂動のゼロモードは ω の運動方程式 (3.3.79) を解くことで得られる。$\Box\omega = 0$ を満たす解は y 依存性として二種類存在する。

$$\begin{cases} \omega = \frac{\dot{\sigma}}{\sigma^2} f^{(1)}(x), \\ \delta\Phi = -\frac{\Phi_0}{2\sigma} f^{(1)}(x). \end{cases} \tag{3.3.109}$$

の形の解に境界条件 (3.3.105) 及びスカラー場 $h_{\mu\nu}^{(-1)}$ が物理的であるための条件 (3.3.108) を課すと $\Box f^{(1)}(x) = 0$ である $f^{(1)}$ が次の形でなければいけないことが分かる。

$$f^{(1)} = -\sigma^{(\pm)}\xi^{y(\pm)}. \tag{3.3.110}$$

ところが式 (3.3.109) の形の $h_y y$ と式 (3.3.107) の形の $h_{\mu\nu}$ とは、前述した $h_{\mu\nu}$ のなかのスカラー成分 $\partial_\mu\partial_\nu\psi$(3.3.90) と全く同じ y 依存性を持ち、従って以前の議論と全く同様にして Newton ゲージを保ったままゲージ変換

$$\epsilon^y = \frac{f^{(1)}}{\sigma}, \quad \epsilon^\mu = -2\partial^\mu f^{(1)} \int^y \frac{dy}{\sigma^2}, \tag{3.3.111}$$

でもって完全に消去できる。よって、式 (3.3.109) 及び (3.3.107) は物理的なスカラー場を持つことが出来ない。もう一種類の ω のゼロモードの形は

$$\begin{cases} \omega = \left[1 - \frac{\dot{\sigma}}{\sigma^2}\int^y \sigma dy\right] f^{(2)}(x), \\ \delta\Phi = -f^{(2)}(x)\frac{\dot{\Phi}_0}{\sigma}\int^y \sigma dy. \end{cases} \tag{3.3.112}$$

で与えられる。これを境界条件 (3.3.105) に代入すると

$$f^{(2)}\frac{\dot{\Phi}_0}{\sigma}\int^y \sigma dy + \dot{\Phi}_0\xi^{y(\pm)} = 0, \quad at\ y = y^{(\pm)}. \tag{3.3.113}$$

ところがこれは式 (3.3.108) と矛盾する。従って (3.3.112) の形にもスカラーの物理的な自由度は含まれていないことが分かった。結局前小節で述べた Rubakov らの場合と違い bulk にスカラー場を導入して background を安定化したあとでは massless スカラー場の自由度はなくなることがここで示されたわけである。

次に brane 上四次元 Einstein gravity が再現するかどうかを調べよう。第二章でやった 1 brane モデル (Randall-Sundrum 2 モデル) では第ゼロ近似でそれが再現されていた。一方 2 brane モデル (Randall-Sundrum 1 モデル) では massless スカラー場である radion が存在し、brane 上の重力は Brans-Dicke タイプとなった。安定化を考えた場合、massless スカラー場は存在しないから、brane 上の重力は四次元の Einstein gravity になるのではないかという予想がたつ。以下、それが実際になりたつことを示す。まず、$y = y^{(\pm)}$(RS ゲージ) にある brane 上の metric は GN ゲージで表されるから式 (3.3.99) の変換を再び用いて

$$\begin{aligned} \bar{h}_{\mu\nu}^{(\pm)} &= \sigma(\bar{y}^{(\pm)})h_{\mu\nu}^{(1)} + h_{\mu\nu}^{KK}(\bar{y}^{(\pm)}) \\ &\quad + \sigma^{(\pm)}\eta_{\mu\nu}\left[\omega(\bar{y}^{(\pm)}) - \frac{\dot{\sigma}^{(\pm)}}{\sigma^{(\pm)}}\xi^{y(\pm)}\right] - \left(\partial_\mu\xi_\nu^{(\pm)} + \partial_\nu\xi_\mu^{(\pm)}\right). \end{aligned} \tag{3.3.114}$$

前述のように $h^{(1)}_{\mu\nu}$ は四次元の graviton に対応し、ξ_μ はそのゲージパラメータとなる。ここで、第二章で brane 上の重力を求めるとき、source があるときの metric の解を得るグリーン関数としてゼロモードの部分のみを取ってくる、という近似をしたことを思い出して欲しい。この近似のもとで四次元 Einstein 重力が再現された。グリーン関数の Kaluza-Klein モードからの寄与は補正項となっていた。今度の場合も式 (3.3.114) の $h^{(KK)}_{\mu\nu}$ は第ゼロ近似では無視する。$h^{(1)}_{\mu\nu}$ のほうの形は既に第二章で与えられている。つまり

$$\sigma(y^{(\pm)})h^{(1)}_{\mu\nu} = \Big(\frac{\Box}{\sigma^{(\pm)}}\Big)^{-1} \sum_{s=\pm} \frac{N\sigma^{(s)}}{2M^3}\left[T^{(s)}_{\mu\nu} - \frac{1}{3}\eta_{\mu\nu}T^{(s)}\right], \tag{3.3.115}$$

$$N \equiv \left[2\int_{y^{(+)}}^{y^{(-)}} \sigma dy\right]^{-1}. \tag{3.3.116}$$

第二章ではこのゼロモードからの寄与のほかに ξ^y からの寄与も第ゼロ近似で取り入れた。今度の場合も式 (3.3.114) の右辺第三項からの寄与を考える必要がある。そこで再び ω を評価する必要がある。先に source がないところでスカラー場の自由度を調べたときには物理的なゼロモードの自由度は存在しなかった。これは $h^{(-1)}_{\mu\nu}$ のなかのスカラー成分が存在すべし、という条件 (radion が物理的な場である条件)(3.3.108) を満たすような解がなかったためである。しかし、今求めたいのは物理的な自由度ではなくて、source があるときの単なる解 ω である。従って条件 (3.3.108) を課す必要はない。このことに注意してもう一度解 ω を求めてみる。ゼロモード (3.3.112) から以下の形の解を予測する。

$$\omega = \sum_{s=\pm} u_s f^{(s)}(x), \tag{3.3.117}$$

$$u_{(\pm)} \equiv 1 - \frac{\dot\sigma}{\sigma^2}\int_{y^{(\pm)}}^{y} \sigma(y')dy'. \tag{3.3.118}$$

このとき

$$\delta\Phi = -\frac{\Phi_0}{\sigma}\sum_{s=\pm} f^{(-s)}\int_{y^{(s)}}^{y}\sigma dy \tag{3.3.119}$$

であるから境界条件 (3.3.105) より

$$f^{(\pm)} = \mp 2N\sigma^{(\pm)}\xi^{y(\pm)} \tag{3.3.120}$$

が導かれる。よって

$$\omega(y^{(\pm)}) = -2\frac{\dot\sigma}{\sigma}\xi^{y(\pm)} - 2N\sum_{s=\pm}[s\sigma^{(s)}\xi^{y(s)}]. \tag{3.3.121}$$

仮に条件 (3.3.108) を課すとするとこの ω は物理的自由度ではないゼロモード解 (3.3.109) に一致していることに留意しよう。式 (3.3.121) と式 (3.3.104) とを式 (3.3.114) に代入すると結局

$$\frac{\Box}{\sigma^{(\pm)}}\bar h^{(\pm)}_{\mu\nu} = \sum_{s=\pm}\frac{N\sigma^{(s)}}{2M^3}\left[T^{(s)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}T^{(s)}\right] \tag{3.3.122}$$

が得られる。これはまさに Einstein 重力の形をしている。hierarchy 問題の set up で、我々が $y = y^{(-)}$ の negative tension brane に住んでいる時を考えよう。特に $y = y^{(+)}$ の positive tension brane には余分な粒子がのっていなくて、からっぽである場合 ($T^{(+)}_{\mu\nu} = 0$)、negative tension brane 上の重力は

$$\frac{\Box}{\sigma^{(-)}}\bar{h}^{(-)}_{\mu\nu} = \frac{N\sigma^{(-)}}{2M^3}\left[T^{(-)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}T^{(-)}\right]. \tag{3.3.123}$$

negative tension brane にいる人が観測する metric は $\bar{h}^{(-)}_{\mu\nu}/\sigma^{(-)}$ であり、正準規格化された場から作られるエネルギー運動量テンソルは $\sigma^{(-)}T^{(-)}_{\mu\nu}$ で表されるから結局四次元の有効理論における Planck スケール M_{Pl} は次式で与えられる。

$$\frac{1}{2M^2_{Pl}} = \frac{N\sigma^{(-)}}{2M^3}. \tag{3.3.124}$$

仮に bulk 中のスカラー場の、background への back reaction が小さいとした場合、つまり

$$\frac{|\dot{H}|}{H^2} \ll 1 \tag{3.3.125}$$

の場合、background metric の解は Randall-Sundrum 1 モデルの始めの set up と同じで $\sigma = e^{-2ky}$ で近似できる。この時四次元の Planck スケールと五次元の Planck スケールとの関係は式 (3.2.20) で与えられるものに一致する。

第4章　宇宙項問題

宇宙項問題は現在までにその解決に向けて様々なアプローチが為されている [27]。この章ではそのうちの一つ、高次元理論を使った試みを取り上げる。ここでの set up は前章と似ているところもあるが、前章で扱った hierarchy 問題とは全く違う動機から高次元を考えていることを断っておく。

現在の観測によれば我々の四次元宇宙はほぼ宇宙項がゼロであることが知られている。(最近の観測ではほんの少しだけ正の値を持つ、という結果が得られている。) 有効理論という立場に立った時、このことは非常に問題となる。宇宙項とは最小作用の原理から見れば真空のエネルギー密度と解釈できる。ところで、場の量子論を考えるとき、場を量子化する際に零点振動のエネルギーが出てきた。理論の cut off スケールを仮に Λ_{QCD} に取ったとすれば質量 m を持つボゾン場一つにたいして期待される真空のエネルギー密度は、$\Lambda_{QCD} \gg m$ であるから

$$\int_0^{\Lambda_{QCD}} \frac{4\pi k^2 dk}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{k^2+m^2}}{2} \sim \frac{\Lambda_{QCD}^4}{16\pi^2} \tag{4.0.1}$$

程度となり明らかに観測と矛盾する。このような場の零点振動のエネルギーの寄与は、理論に超対称性を課せばボゾンとフェルミオンとでエネルギーがキャンセルしあって、宇宙項に効かなくなる。しかし超対称性は現在のエネルギースケールでは破れており、特に QCD の相転移を考える際そこで決まる真空のエネルギー密度は、既に超対称性の破れている低エネルギーの物理によって決まる、と考えるのが自然である。確かにラグランジアンに手で零点エネルギー (4.0.1) をキャンセルするような定数項を加えることは可能である。しかしこれはラグランジアンパラメータの fine tuning であって、非常に不自然な仮定である。ここで一つのアイディアが生まれる。つまり、観測される宇宙項はラグランジアンのなかにじかに入ってくるパラメータではなく、運動方程式の積分定数となってしまえば、もはやラグランジアンの fine tuning をする必要はなく、単なる初期値の tuning へと問題が移行するのである。宇宙項問題に対する様々な試みのうち、多くが問題をこのレベルまで下げることには成功している。(例えば changing gravity、3-form field の導入など。) この章で挙げる高次元理論からのアプローチも、四次元宇宙項を積分定数として解釈できる、という意味で宇宙項問題に対して積極的な寄与をしている。しかし、ほかの多くの試みと同様に、積分定数としてなぜほとんどゼロの値を四次元宇宙項が選んだか、という問題には、この章で述べるモデルも解決を与えてはくれない。これは今後の大きな課題である。

4.1 高次元の warped コンパクト化

上に述べたようにここで述べるのは四次元の宇宙項を積分定数として与える理論である。そもそも四次元の宇宙項 λ_4 を積分定数として与える、ということは、Einstion 方程式

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\lambda_4 g_{\mu\nu} + \frac{1}{4M^3}T_{\mu\nu} \tag{4.1.2}$$

において宇宙項を含む trace 部分の式

$$-R = -4\lambda_4 + \frac{1}{4M^3}T \tag{4.1.3}$$

が理論の運動方程式として与えられるのでなく、ほかのなんらかの運動方程式を解いたとき初めて式 (4.1.3) が導きだされる、ということを意味している。つまり基本となる運動方程式の中に、ある領域で任意の値をとることが出来るパラメータ Λ_4 を持った式 (4.1.3) が潜在的に含まれているのである。従って宇宙項問題への高次元からのアプローチはこう言い換えられる。ある宇宙項 Λ を持った高次元空間があったとする。この宇宙項は高次元理論においてラグランジアンパラメータであり、基本量である。重力のみの理論の場合、高次元での Einstein 方程式は以下で表される。

$$\hat{R}_{MN} - \frac{1}{2}\hat{g}_{MN}\hat{R} = -\Lambda\hat{g}_{MN} \tag{4.1.4}$$

この高次元理論を四次元に落としたとき、四次元の有効理論の Einstein 方程式

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\Lambda_4 g_{\mu\nu} \tag{4.1.5}$$

は式 (4.1.4) に含まれている。この Λ_4 が Λ に依らず任意に選ぶことが出来れば、これは宇宙項問題のうち、ラグランジアンパラメータの fine tuning という障害を解決したと言える。

Rubalkov と Shaposhnikov は $d+N$ 次元の高次元時空に d 次元の我々の観測する時空が埋め込まれている場合について次のような back ground metric を仮定した [28]。

$$ds^2 = \hat{g}_{MN}dx^M dx^N = \sigma(y^a)g_{\mu\nu}(x^\mu)dx^\mu dx^\nu + \tilde{g}_{ab}dy^a dy^b \tag{4.1.6}$$

ここで x^M は $d+N$ 次元の座標を表し、その metric は $\hat{g}_{MN}$ で与えられる。また観測される d 次元時空の座標は x^μ であり、この時空は metric $g_{\mu\nu}$ によって張られていることとする。余次元座標は x^a、$(a = d, d+1, ..., N-1)$ で記述され、空間方向に延びているものとする。このような warped metric の形は Randall-Sundrum での set up と同様である。ただしこの章で扱う Rubakov-Shaposhnikov のモデルのほうが時代的には古く、なお、後で分かるように Rubakov-Shaposhnikov モデルでは $\Lambda > 0$ の de Sitter 空間が高次元として必要になる。また余次元の次元は二次元以上 $(N \geq 2)$ であることが要求される。これは第三章でやったように式 (4.1.6) の形の back ground を仮定すると $N = 1$ では $\lambda < 0$ の Anti de Sitter しか式 (4.1.4) の解とならない、という事実による。AdS 空間では brane をいれない限り余次元をコンパクト化することは

出来ないことは既に述べた。従って Rubakov-Shaposhnikov のここでのモデルのように brane を考えない状況では $N \geq 2$ が必要となるわけである。たとえ $N = 1$ で brane をいれてコンパクト化を行った場合でも (hierarchy 問題での set up で既に見たように)、四次元として宇宙項ゼロの Minkowski 空間を AdS_5 に埋め込もうとしたとき、どうしても brane の tension というラグランジアンパラメータを fine tune する必要があったことを思い出して欲しい。結局、warped metric を仮定したとしても、$N = 1$ の純粋な重力理論だけでは宇宙項問題は解けていないのである。

さて、式 (4.1.6) の back ground を仮定したとき本当に高次元 Einstein 方程式 (4.1.4) の中に四次元有効理論の Einstein 方程式 (4.1.5) は含まれているのだろうか。このことを見るためにまず、高次元 metric から作られる Einstein 方程式が四次元 metric の言葉でどうみえるか調べる必要がある。

$$\begin{cases} \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = usual\ Christoffel\ symbol\ constructed\ from\ g_{\mu\nu}, \\ \Gamma^{a}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \tilde{g}^{ab} \partial_b \sigma, \quad \Gamma^{\mu}_{a\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} \frac{1}{2\sigma} \partial_a \sigma, \\ \Gamma^{\mu}_{ab} = 0, \quad \Gamma^{b}_{a\mu} = 0, \\ \Gamma^{c}_{ab} = usual\ Christoffel\ symbol\ constructed\ from\ \tilde{g}_{ab}, \end{cases} \tag{4.1.7}$$

を用いると

$$\hat{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \tilde{g}^{ab} \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b \sigma + \frac{d-2}{4\sigma} g_{\mu\nu} \tilde{g}^{ab} \tilde{\nabla}_a \sigma \tilde{\nabla}_b \sigma, \tag{4.1.8}$$

$$\hat{R}_{\mu a} = \frac{1}{2\sigma} \partial_a \sigma g^{\kappa\lambda} (\nabla_\mu g_{\kappa\lambda} - \nabla_\kappa g_{\mu\lambda}) = 0, \tag{4.1.9}$$

$$\hat{R}_{ab} = \frac{d}{2\sigma} \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b \sigma - \frac{d}{4\sigma^2} \tilde{\nabla}_a \sigma \tilde{\nabla}_b \sigma + \tilde{R}_{ab}, \tag{4.1.10}$$

$$\hat{R} = \frac{1}{\sigma} R + \frac{d}{\sigma} \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}^a \sigma + \frac{d(d-3)}{4\sigma^2} \tilde{\nabla}_a \sigma \tilde{\nabla}^a \sigma + \tilde{R}, \tag{4.1.11}$$

のようになる。ここで $\hat{R}$ 等は $\hat{g}_{MN}$ から作られたもの、R 等は $g_{\mu\nu}$ から作られたもの、$\tilde{R}$ 等は $\tilde{g}_{ab}$ から作られたものを表す。∇_μ、$\tilde{\nabla}_a$ はそれぞれ $g_{\mu\nu}$、$\tilde{g}_{ab}$ から定義される共変微分を示す。上の式を式 (4.1.4) に代入することで式 (4.1.5) を得るには以下の条件を満たす必要があることが分かる。

$$\tilde{R}_{ab} = -\frac{d}{2\sigma} \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b \sigma + \frac{d}{4\sigma^2} \tilde{\nabla}_a \sigma \tilde{\nabla}_b \sigma - \frac{2}{d+N-2} \Lambda \tilde{g}_{ab}, \tag{4.1.12}$$

$$\frac{2}{d-2} \Lambda_4 = \frac{2\Lambda}{d+N-2} \sigma - \frac{1}{2} \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}^a \sigma - \frac{d-2}{4\sigma} \tilde{\nabla}_a \sigma \tilde{\nabla}^a \sigma. \tag{4.1.13}$$

まとめると次のようになる。まず、任意の定数 Λ_4 について、上式を満たす σ、$\tilde{g}_{ab}$ の解があったとする。するとその解を background metric とした高次元時空は、逆に σ、$\tilde{g}_{ab}$ によって決定される Λ_4 を四次元の宇宙項とするような有効理論を含んでいる。この Λ_4 はラグランジアンパラメータには依存しない。つまり、高次元の Einstein-Hilbert 作用から導かれる方程式は式 (4.1.4) で尽きているのであって、その方程式の解として様々な σ、$\tilde{g}_{ab}$ (従って様々な値を持つ Λ_4) が許されるのである。このように Einstein 方程式が広い解空間を持っていて、異なった解同士の物理的な関係などについては現在のところうまく取り扱えないということは第一章で既に述べた通りである。上記の意味で Λ_4 は Einstein 方程式の積分定数なのである。

実際に $N=2$、$d=4$ の場合に解 σ、$\tilde{g}_{ab}$ を求めてみよう。簡単のため余次元である二次元空間は S_1 対称性があるとする。つまりこの空間を動径方向 r と角度方向 θ で表した時、

$$y^4 = r \quad (r \geq 0), \quad y^5 = \theta \quad (0 \leq \theta < 2\pi), \tag{4.1.14}$$

metric $\tilde{g}_{ab}$ は次のように与えられると仮定する。

$$\tilde{g}_{rr} = -1, \quad \tilde{g}_{\theta\theta} = -\rho(r), \quad \hat{g}_{r\theta} = 0, \quad \sigma = \sigma(r). \tag{4.1.15}$$

この仮定の元に式 (4.1.12)(4.1.13) の解を見つけよう。このためにもう一度満たすべき式を書いておく。

$$\hat{R}_{rr} = -\hat{g}_{rr}\left[2\frac{\sigma''}{\sigma} - \frac{(\sigma')^2}{\sigma^2} + \frac{1}{2}\frac{\rho''}{\rho} - \frac{1}{4}\frac{(\rho')^2}{\rho^2}\right] = \frac{\Lambda}{2}\hat{g}_{rr}, \tag{4.1.16}$$

$$\hat{R}_{\theta\theta} = -\hat{g}_{\theta\theta}\left[\frac{\sigma'}{\sigma}\frac{\rho'}{\rho} + \frac{1}{2}\frac{\rho''}{\rho} - \frac{1}{4}\frac{(\rho')^2}{\rho^2}\right] = \frac{\Lambda}{2}\hat{g}_{\theta\theta}, \tag{4.1.17}$$

$$\Lambda_4 = \frac{1}{2}\Lambda\sigma + \frac{1}{4}\frac{(\sigma')^2}{\sigma} + \sigma''. \tag{4.1.18}$$

' は r での微分を表す。式 (4.1.16)、(4.1.17) はともに両辺が $\hat{g}_{aa}$ に比例しているからこの二式が解をもつためには

$$\frac{\sigma'}{\sigma}\frac{\rho'}{\rho} + \frac{(\sigma')^2}{\sigma^2} - 2\frac{\sigma''}{\sigma} = 0 \tag{4.1.19}$$

という拘束条件を満たさなければならない。この条件は $\sigma' = 0$ であれば自明である。しかしこのとき background の時空は四次元と余次元空間との単なる直積構造である。これは式 (4.1.18) をみれば明らかなように、宇宙項問題の解決にはなっていない。よって、今の場合 $\sigma' \neq 0$ である解に着目する。解かねばならない残る式として例えば式 (4.1.17) と (4.1.18) を持ってくることが出来る。二つの未知関数 σ、ρ に対して満たさなければいけない方程式が 3 つあるわけだが、実はこれら三式は独立ではなく、Bianchi 恒等式によってつながっていることが分かる。具体的には式 (4.1.17), (4.1.18) を式 (4.1.19) を使って書き直したとき、式 (4.1.18) を r で微分することで式 (4.1.17) が出てくる。従って Λ_4 は実際に運動方程式の積分定数だったわけである。

さて条件 (4.1.19) は

$$\sigma = z^{4/5}, \quad \rho = C^{-2}z'^2 z^{-6/5}, \tag{4.1.20}$$

と置くことで満たすことが出来る。C は積分定数である。この時、式 (4.1.18) は

$$z'' = -\frac{\partial V}{\partial z}, \tag{4.1.21}$$

$$V(z) = \frac{5}{16}\Lambda z^2 - \frac{25}{24}\Lambda_4 z^{\frac{6}{5}}, \tag{4.1.22}$$

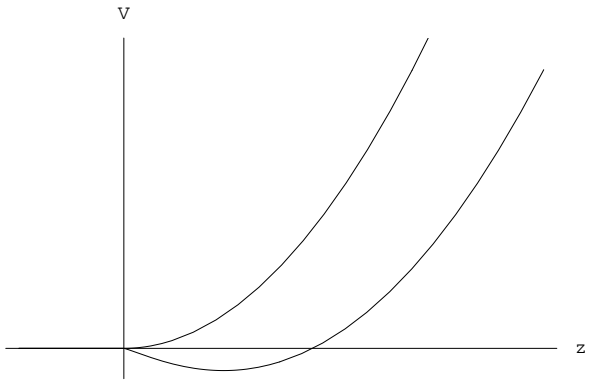

図 4.1: 上のグラフは $\Lambda_4 \leq 0$、下は $\Lambda_4 > 0$ に対応している

という一粒子がポテイシャル V 中を動くときの運動方程式の形に帰着する。このポテンシャルの形は $\Lambda_4 \leq 0$ のときには‘原点’$z = o$ で $V(0) = 0$ から単調増加となり、$\Lambda_4 > 0$ の時には $V(0) = 0$ から一旦減少し $z = \bar{z}$ で極小値をとってから増加する関数となる。$r = 0$ で $z = z_0$ という位置にいる粒子が初速度ゼロ $(z'(0) = 0)$ でポテンシャル中を転がっていく運動を考える。もともと $z \geq 0$ で定義されていたから、‘粒子’ の運動はこの範囲でしか考えられない。特に四次元宇宙項 $\Lambda_4 = 0$ の場合のポテンシャルに注目すると、z は r の増加とともに必ず $z = 0$ に $z' \neq 0$ で到着する。$z'(0) = 0$ というのは余次元である二次元面の言葉でいうと極座標表示が成り立つための条件であった。(半径 $r = o$ の点では角度は意味を持たない。i.e. $\rho(0) = 0$。)$Z(r_{max}) = 0$ というのはこの有限の半径 r_{max} のところで四次元方向の metric $\sigma g_{\mu\nu}$ がつぶれている、ということを意味している。つまり degenerate meric になっている。従って、六次元で見たとき時空には singularity が存在していることになる。この singularity については後でまた議論することにする。

とにかく、$0 \leq r \leq r_{max}$ でしか定義されないのであるから余次元空間はコンパクト化が実現された。これは非常に興味深いことである。通常のコンパクト化の際には S^1 へのコンパクト化のように、intrinsic curvature がゼロである空間に対して適当な同一視をすることで手でコンパクト化を行うことが多かった。hierarchy 問題の所で行われたコンパクト化もこの一種である。もしくは単なる直積構造としてもとからコンパクトな余次元空間を用意するのが常であった。それに対しここでは warped metric の形を始めに仮定したことでコンパクトな余次元のみが解として現れる。これはもちろん高次元の宇宙項 Λ を正に置いていたからである。de Sitter な空間というのが空間方向にコンパクトであることを利用し、warped factor σ を導入することでこのコンパクト性を余次元に押し付けることが可能になったわけだ。そもそもの始めに $\Lambda < 0$ を仮定すれば‘ポテンシャル’$V(z)$ は下に有界ではなくなり、z は r とともに無限に増大してしまう。余次元空間の体積も当然 Λ で支配されていることが予想される。実際

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{r_{max}} dr \sqrt{\tilde{g}} \quad = \quad \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{r_{max}} \frac{|z'| z^{-3/5}}{C} dr$$

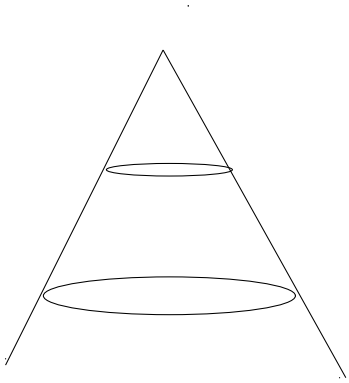

図 4.2: conical singularity

$$= \quad 2\pi \int_0^{z_0} \frac{z^{-3/5}}{C} = \frac{5\pi}{C} z_0^{2/5} = \frac{8\pi}{\Lambda} \tag{4.1.23}$$

最後の等式は次の事実から来る。すなわち、二次元面が滑らかに定義されているためには、極座標表示したときの原点 $r = 0$ において conical singurarity がないようにしなければいけない。このためには $r \to 0$ の時、$\rho \to -r^2$ であることが要求される。原点付近で ρ が $-r^2$ の振る舞いをして初めて、原点の近傍が平面近似できるのである。仮に $\rho \to -(1-\alpha)r^2$ であったとすると原点のまわりを一週する円の円周は $2\pi\sqrt{1-\alpha}$ となり角度欠損が起こってしまう。これが conical singurarity である。従って原点で特異点がないための条件は

$$(\sqrt{-\rho})'|_{r=0} = -\frac{1}{C} z'' z^{-3/5}|_{r=0} = \frac{5\Lambda}{8C} z_0^{2/5} = 1 \tag{4.1.24}$$

これを使って式 (4.1.23) の最後の等式が導かれる。もう一つの、ここでの warped コンパクト化が普通の直積構造のコンパクト化と異なる特徴は高次元での基本スケールである六次元 Planck スケール M と四次元での Planck スケール M_{Pl} との関係にある。時空が四次元 Minkowski 空間と二次元である余次元空間との単なる直積で表されるとき余次元の体積を V_e で表すと 3.1 節で触れたように

$$V_e M^4 = M_{Pl}^2 \tag{4.1.25}$$

の関係になる。一方 Rubakov-Shaposhnikov のここでのモデルでは

$$M^4 \int d^6x \sqrt{-\hat{g}}(\hat{R} + \Lambda) = M_{Pl}^2 \int d^4x \sqrt{-g}(R + \Lambda_4) \tag{4.1.26}$$

であるから式 (4.1.11) を用いて

$$M_{Pl}^2 = M^4 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{r_{max}} \frac{z'z}{C\sigma} dr = \frac{5\pi M^4}{3C} z_0^{6/5} = \frac{8\pi M^4}{5\Lambda} z_0^{4/5} \tag{4.1.27}$$

最後の等式で再び式 (4.1.24) を使った。従って今の場合余次元のサイズは Λ から完全に決まっても四次元の Planck スケールには初期値 z_0 をどう選ぶかで不定性があることが分かる。この不定性は四次元座標のスケール変換

$$\begin{cases} x^\mu \to b^{-1}x^\mu, \\ \sigma \to b^2\sigma, \qquad (b = constant), \end{cases} \tag{4.1.28}$$

の対称性から来ている。そのため、我々が今基本スケール M に比べどのスケールの x^μ を見ているのかによって、四次元有効理論での次元を持った量が変ってくるのである。Randall-Sundrum の hierarchy 問題はまさにこの特徴を生かしたものであった。そこでは brane を置く位置を決定することで四次元のスケールを固定したのである。

以上のようにして高次元理論のラグランジアンパラメータである宇宙項の値に関係なく、$\Lambda_4 = 0$ を四次元の宇宙項とするような四次元有効理論の Einstein 方程式が得られることが分かった。さらに都合のよいことに、この余次元は自然にコンパクト化されている。エネルギー密度の変化は高次元の宇宙項 Λ の値を effective に変えることに相当し、これはただ余次元空間のサイズを変化させるだけで、四次元の宇宙項には影響しない。これで宇宙項問題の最初の第一段階は解決したことになる。残るはどのような理由で、積分定数 Λ_4 としてゼロを選ぶか、という問題である。これについては先にも述べたように、未だに解決がなされていない。

付け加えておくと、$\Lambda_4 > 0$ の場合には z_0 の取り方によっては $z = 0$ の点を通らない解が存在する。このとき余次元空間のトポロジーは S^2 になることが期待される。またこのとき degenerate metric が存在しないため、より well defined な高次元時空が実現すると思われる。

4.2 Rubakov-Shaposhnikov モデルの解析

前節で見た Rubakov-Shaposhnikov のモデルでは必然的に degenerate metric が現れた。このように geodesically incomplete である高次元空間はどのように解釈すればよいのであろうか。このような高次元中の場はどのように振る舞うのか調べるために Rubakov-Shaposhnikov モデルの background metric のもとで test particle であるスカラー場の方程式を考えてみる。このときこのスカラー場の back reaction は考えない。質量 m_0 を持つスカラー場 Φ の方程式は

$$\sqrt{-\hat{g}}(\nabla_M \nabla^M \Phi + m_0^2 \Phi) = 0 \tag{4.2.29}$$

で表される。Φ を変数分離して

$$\Phi = \varphi(x^\mu) f(y^a) \tag{4.2.30}$$

とすると場の方程式は次のように分解する。

$$\nabla_\mu \nabla^\mu \varphi = -m^2 \varphi, \tag{4.2.31}$$

$$\sigma \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}^a f + 2\tilde{\nabla}_a \sigma \tilde{\nabla}^a f = (m^2 + m_0^2) f, \tag{4.2.32}$$

$$f(y^a) = \hat{f}(r)e^{in\theta}, \quad n = integer, \tag{4.2.33}$$

とさらに変数分離して式 (4.2.32) を z で書き直すと

$$-z^{4/5}\hat{f}'' - (z'z^{-1/5} + \frac{z''z^{4/5}}{z'})\hat{f}' - C^2n^2\frac{z^2}{(z')^2}\hat{f} = (m^2 + m_0^2)\hat{f} \tag{4.2.34}$$

さらに $\hat{f} = \frac{1}{\sqrt{z'z}}\psi$ と新たな関数に置き換えて

$$z^{4/5}\psi'' + \frac{z^{4/5}}{4}\left[\frac{75}{64}\Lambda^2\frac{z^2}{(z')^2} + 3\frac{(z')^2}{z^2} + \frac{5}{4}\Lambda\right]\psi + C^2n^2\frac{z^2}{(z')^2}\psi = (m^2 + m_0^2)\psi \tag{4.2.35}$$

singurarity 近傍 ($z \sim 0$) での $\psi(r)$ の振る舞いを調べよう。上式で ψ に掛っている関数のうち $z \to 0$ でもっとも支配的な項のみ残すと $z \sim -v(r - r_{max})$ と近似すれば

$$\psi'' + \frac{3}{4}\frac{1}{(r - r_{max})^2}\psi = 0. \tag{4.2.36}$$

従って $r \sim r_{max}$ での ψ の関数形はおよそ

$$\psi \propto (r_{max} - r)^\alpha, \quad \alpha = \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \tag{4.2.37}$$

と見当がつく。

さて一方、時空が geodesically incomplete なときでもその境界から保存量が流れ出なければそのような background の時空上の運動を考えるのになんら問題はない [29]。ここでその境界条件を求めてみる。まず、時空に対称性があるときには保存量が定義される。ある対称性 (a と記す) から作られる Killing ベクトル $\xi_\nu^{(a)}$ とエネルギー運動量テンソル $T^{\mu\nu}$ とでもって、その対称性から生じる保存カレント J^μ が表せる。

$$J^{\mu(a)} = T^{\mu\nu}\xi_\nu^{(a)} \tag{4.2.38}$$

singurarity のある境界 $r = r_{max}$ でこのカレントが流れ出さない、という条件は

$$\lim_{r \to r_{max}} \sqrt{-\hat{g}}\, J^{r(a)} = 0. \tag{4.2.39}$$

Rubakov-Shaposhnikov のモデルの background で特に観測される四次元時空が Minkowski の場合六次元時空の対称性は四次元の並進と回転、及び余次元空間の角度方向の並進である。それぞれに対応する Killing ベクトルは

$$\xi_M^{(\mu)} = \sigma\, \delta_M^\mu, \tag{4.2.40}$$

$$\xi_M^{([\mu,\nu])} = \sigma(\delta_\lambda^\mu\delta_M^\nu - \delta_\lambda^\nu\delta_M^\mu)x^\lambda, \tag{4.2.41}$$

$$\xi_M^\theta = -\rho\,\delta_M^\theta \tag{4.2.42}$$

となる。また質量 m_0 をもつスカラー場 Φ のエネルギー運動量テンソルは

$$T^{MN} = -\nabla^M \Phi \nabla^N \Phi + \frac{1}{2}\hat{g}^{MN}\nabla^L \Phi \nabla_L \Phi - \hat{g}^{MN} m_0^2 \Phi \tag{4.2.43}$$

であったから、四次元方向への並進対称性から生じる保存カレントの境界条件は次のようになる。

$$\lim_{r\to r_{max}} \sqrt{-\hat{g}}\,\sigma\, T^{r\mu} = -\lim_{z\to 0} \sigma^2 \rho^{1/2}\, \partial_\mu \Phi \partial_r \Phi = z' z \partial_\mu \Phi \partial_r \Phi = 0 \tag{4.2.44}$$

この条件と Φ の $r \to r_{max}$ での漸近形 (4.2.37) とを比較すると漸近形 (4.2.37) のうちの $\alpha = -\frac{1}{2}$ のほうは境界条件を満たしていないことが分かる。従って Φ の r_{max} 近傍の振る舞いは $\Phi \sim (r_{max} - r)^{3/2}$ のみに制限される。この形を見ると、高次元の background geometry として singularity のあるものを選んだとしてもその上にのっている場の configuration は普通に境界で regular な振る舞いをするものを選んだことと同じになったことが分かる。ここで四次元並進対称性を考えた際、境界条件に必ず Φ の x^μ 微分が factor にかかっていたことに注意する。つまりこの境界条件は x^μ 微分がゼロであるようなゼロモードについては何の制限も生まない。もちろん θ 方向の並進対称性を考えることで Φ の θ 依存性のあるものについてはやはり同じような制限が出てくる。結局、上のように課した境界条件は物理的に観測される場 (四次元運動量 $p^\mu \neq 0$) については制限を生むが、特に θ 依存性のない back ground については作用しないのである。

以上のようにして、たとえ時空が完備でなくても background として考えること自体には問題がないことが分かった。ところが Rubakov-Shaposinikov のモデルで metric の摂動を考えると tachyonic モードが出る、ということが報告されている [30]。詳しい説明はここでは避けるが、Rubakov-Shaposhnikov モデルの摂動の物理的な自由度には、当然期待されるように四次元の graviton が含まれている。またその Kaluza-Klein tower も存在する。ベクトル場については、massless の自由度はなく massive なベクトル場がやはり Kaluza-Klein tower をなしている。問題はスカラー場である。まず、θ 依存性のないモードについては質量の二乗はゼロ以上であることが示されている。ところが θ 依存性のあるモードを考えたときこれらの質量の二乗に負の値の上限がついて評価される。具体的には $e^{in\theta}$ の θ 依存を持つモードについて $m = 2, 3, 4, 5$ については少なくとも tachyonic であることが報告されている。この tachyonic モードが時空の非完備性によるものなのかどうか現在のところ判明していないが、次節以降の時空の singularity を除去する試みが同時にこれらの tachyonic モードをも除去してくれているのではないかと期待している。

4.3 background ゲージ場の導入

上記の Rubakov-Shaposhnikov のモデルで出てくる degenerate metric を取り除こうというのが、この節で述べる Wetterich の行った改良である [31]。そもそも pure gravity の場合 'ポテンシャル' $V(z)$ が '原点' $z = 0$ を通ってしまうため degenerate metric が Einstein 方程式の解になってしまったのであるから、ポテンシャルの形を変えて原点を通らなくすることが出来れば解が

singular ではなくなる可能性がある。この予想のもとに多少天下りだが、高次元時空中に $U(1)$ ゲージ場 A_M を background として導入してみる。この場合の Einstein 方程式、およびゲージ場の方程式は次のようになる。簡単のため高次元の基本スケールである Planck スケールは 1 とおく。

$$\hat{R}_{MN} - \frac{1}{2}\hat{g}_{MN}\hat{R} = F_{ML}F_N^L - \frac{1}{4}F_{KL}F^{KL}\hat{g}_{MN} - \Lambda\hat{g}_{MN}, \tag{4.3.45}$$

$$\partial_M(\sqrt{-\hat{g}}F^{MN}) = 0. \tag{4.3.46}$$

求めるべきは、4.1 節と同じように、上の高次元 Einstein 方程式の中に埋め込まれている四次元の Einstein 方程式 (4.1.5) である。background metric の形は Rubakov-Shaposhnikov と同じ式 (4.1.6)、(4.1.15) を仮定する。上式はあくまで background 解を求めるためのものなので A_M に x^μ 依存性はないものとし、$A_\mu = 0$ とおく。また前節と同様に background には θ 依存性がないような S^1 対称であるものを特に考える。まず Einstein 方程式の $(\mu\, a)$ 成分から、

$$F_{\mu M}F_a^M = \frac{1}{\sigma}g^{\nu\lambda}F_{\mu\nu}F_{a\lambda} - F_{\mu r}F_{ar} - \frac{1}{\rho}F_{\mu\theta}F_{a\theta} = 0. \tag{4.3.47}$$

これより $F_{a\mu} = 0$ が出てくる。よって結局 background として許されるのは

$$\begin{cases} A_\theta = a(r), \\ A_r = A_\mu = 0, \end{cases} \tag{4.3.48}$$

ここで $a(r)$ は r の未だ任意の関数である。さらにゲージ場の方程式を考慮すると

$$\partial_r(\sigma^2\rho^{-1/2}a') = 0 \tag{4.3.49}$$

であることから

$$F_{r\theta} = a' = B\,\sigma^{-2}\rho^{1/2} \tag{4.3.50}$$

が導かれる。B は積分定数である。このゲージ場の background を導入したおかげで前節の Einstein 方程式 (4.1.16)(4.1.17) 及び条件 (4.1.18) の右辺が変更を受ける。

$$T_{MN} = F_{ML}F_N^L - \frac{1}{4}F_{KL}F^{KL}\hat{g}_{MN} = \begin{cases} -\frac{1}{2}B^2\sigma^{-4}\hat{g}_{\mu\nu} & (M,N) = (\mu,\nu) \\ 0 & (M,N) = (\mu,a) \\ \frac{1}{2}B^2\sigma^{-4}\hat{g}_{ab} & (M,N) = (a,b) \end{cases} \tag{4.3.51}$$

であるから、$\hat{R}_{MN} = \frac{1}{2}\Lambda\hat{g}_{MN} + T_{MN} - \frac{1}{4}T\hat{g}_{MN}$ を用いて結局

$$\hat{R}_{rr} = -\hat{g}_{rr}\left[2\frac{\sigma''}{\sigma} - \frac{(\sigma')^2}{\sigma^2} + \frac{1}{2}\frac{\rho''}{\rho} - \frac{1}{4}\frac{(\rho')^2}{\rho^2}\right] = \left[\frac{\Lambda}{2} + \frac{3}{4}B^2\sigma^{-4}\right]\hat{g}_{rr}, \tag{4.3.52}$$

$$\hat{R}_{\theta\theta} = -\hat{g}_{\theta\theta}\left[\frac{\sigma'}{\sigma}\frac{\rho'}{\rho} + \frac{1}{2}\frac{\rho''}{\rho} - \frac{1}{4}\frac{(\rho')^2}{\rho^2}\right] = \left[\frac{\Lambda}{2} + \frac{3}{4}B^2\sigma^{-4}\right]\hat{g}_{\theta\theta}, \tag{4.3.53}$$

$$\Lambda_4 = \frac{1}{2}\Lambda\sigma - \frac{1}{4}B^2\sigma^{-3} + \frac{1}{4}\frac{(\sigma')^2}{\sigma} + \sigma'' \tag{4.3.54}$$

が解くべき式となる。前節と同様に拘束条件 (4.1.19) が満たされなければならない。この条件が満たされて、かつ、$\sigma' \neq 0$ のとき σ、ρ は再び z を用いて式 (4.1.20) で表される。ただしこの' 一粒子の運動方程式のポテンシャルはゲージ場の導入で変更されて

$$\begin{aligned} z'' &= -\frac{\partial V}{\partial z}, \\ V(z) &= \frac{25}{96}B^2 z^{-\frac{6}{5}} + \frac{5}{16}\Lambda z^2 - \frac{25}{24}\Lambda_4 z^{\frac{6}{5}}, \end{aligned} \tag{4.3.55}$$

のようになる。このポテンシャル $V(z)$ の第一項が Rubakov-Shaposhnikov のときとは異なり $z \to 0$ で発散しているため、σ が有限の距離 r_{max} でゼロになってしまうことが避けられる。今度も $\Lambda_4 = 0$ の場合を特に考えてみよう。ポテンシャル $V(z)$ は $z_c = (\frac{B^2}{2\Lambda})^{5/16}$ で最小値をとる。'粒子' はこの最小値を中心とした振動をする。z_c の両側で $z' = 0$ となる r が存在するわけだから余次元空間は $r = 0$ で一点から始まって再びある $r = \bar{r}$ で二次元面が一点に縮まるはずである。よって四次元空間のトポロジーは S^2 であると見当がつく。ところが至るところ regular な空間であるためにはさらに条件が必要であることを既に 4.1 節で述べた。つまり、$r = 0$ と $r = \bar{r}$ で conical singularity がないような条件をおかなくてはならない。

$$(\sqrt{\rho})'|_{r=0} = -(\sqrt{\rho})'|_{r=\bar{r}} = 1. \tag{4.3.56}$$

$z(o) = z_0$、$z(\bar{r}) = \bar{z}$ とおくとこの条件は次のようになる。

$$z''(0) = C z_0^{\frac{3}{5}}, \quad z''(\bar{r}) = -C\bar{z}^{\frac{3}{5}}. \tag{4.3.57}$$

さてここで z の運動方程式に初期値の取り方の不定性があったことを思い出そう。これは高次元理論において次のスケール変換に対応していた。

$$\begin{cases} x^\mu \to b^{-1}x^\mu \\ \sigma \to b^2\sigma \\ B \to b^4 B \end{cases} \tag{4.3.58}$$

この自由度を使って積分定数のうちの一つを固定することができる。今の場合 $z_0 = 1$ と固定しよう。こうして余次元が regular である条件は以下で表されることになる。

$$C = z''(0) = \frac{5}{16}B^2 - \frac{5}{8}\Lambda, \tag{4.3.59}$$

$$-C\bar{z}^{\frac{3}{5}} = z''(\bar{r}) = \frac{5}{16}B^2\bar{z}^{-\frac{11}{5}} - \frac{5}{8}\Lambda\bar{z}, \tag{4.3.60}$$

$$\frac{25}{96}B^2 + \frac{5}{16}\Lambda = V(1) = V(\bar{z}) = \frac{25}{96}B^2\bar{z}^{-\frac{6}{5}} + \frac{5}{16}\Lambda\bar{z}^2, \tag{4.3.61}$$

この連立方程式の解は存在するだろうか。ただしここで $U(1)$ ゲージは noncompact であるとする。compact $U(1)$ であったら、field strength は量子化されていて、適当な値を選ぶことができない。コンパクトな空間上でのゲージ場の configuration はモノポール数を持っているためである。ゲージが noncompact であるためにはこのコンパクトな余次元中でゲージ場と couple する

ような物質が存在しない、とすればよい。さて、$\bar{z} \neq 1$ のとき上の三式 (4.3.59)(4.3.60)(4.3.61) をまとめて $\bar{z}$ のみについての方程式にすると

$$-\frac{3}{5}\frac{1-\bar{z}^2}{1-\bar{z}^{-6/5}} = \frac{1+\bar{z}^{2/5}}{1+\bar{z}^{-14/5}}. \tag{4.3.62}$$

ところが $\bar{z}-1=\epsilon$ として式 (4.3.62) を解こうとすると (4.3.62) には解がないことが分かる。つまり $\bar{z}=1$ が余次元に conical singularity を持たない唯一の解なのである。$\bar{z}=1$ は $z'=0$、つまり '粒子' が静止している状況であり、これは warped factor のない background に相当する。この時拘束条件 (4.1.19) は満たされているから解くべき式は ($\sigma=1$ とおいて)

$$\frac{\rho''}{\rho} - \frac{1}{2}\frac{(\rho')^2}{\rho^2} = -\Lambda - \frac{3}{2}B^2, \tag{4.3.63}$$

$$0 = \Lambda_4 = \frac{1}{2}\Lambda - \frac{1}{4}B^2, \tag{4.3.64}$$

であり、この解は

$$\rho = \frac{1}{2\Lambda}\sin^2(\sqrt{2\Lambda}r) \tag{4.3.65}$$

となる。これは半径 $1/\sqrt{2\Lambda}$ の球面を記述する metric である。従って warped factor がないとき、宇宙項 $\lambda > 0$ を持った regular な六次元時空中に四次元 Minkowski 空間は、$R^4 \times S^2$ という直積で入ってくる。

warped factor があるとき ($\sigma' \neq 0$)、必ず余次元空間の一点に conical singurarity が現れてしまう。このときはこの一点を除いた空間でもって余次元を定義しなければならない。そこでこの余次元はトポロジー的には noncompact な空間となる。

4.4 3-brane の導入

前節では、ゲージ場を background にいれてその field strength を tune することで Rubakov-Shaposhnikov モデルの degenerate metric を取り除くことには成功したが、直積構造となる場合を除いて conical singularity が現れるのは避けられ得なかった。この節ではさらにこの conical singularity を除去して、完全に regular な六次元空間が warped factor があっても実現できることを示す [32]。

前節での Wetterich の set up に加え、更に六次元中に 3-brane を導入する。同様のことを五次元の場合にやってみても宇宙項問題の解決にはならなかったことは第三章の Randall-Sundrum モデルに後続する様々な論文で明らかとなっている。今やりたいのは background を求めることである。そのようなときは brane の取り扱いとして δ 関数的に局在しているエネルギーを高次元で定義された作用に付け加えればよい。もちろん 3-brane を六次元中にある 4-brane の半径ゼロ

の極限として定義することもでき、その場合には Israel の junction condition から境界条件が導き出される [33]。

さて、$r=0$ に brane を入れたとき、作用は以下のように表される。

$$S=\int d^6x\sqrt{-\hat{g}}\Big(\frac{1}{2}\hat{R}-\frac{1}{4}F_{MN}F^{MN}-\Lambda\Big)-\int d^4x\sigma^2(r=0)\sqrt{-g}\lambda \tag{4.4.66}$$

ここで $\lambda>0$ は 3-brane の tension である。同じことをラグランジアンで書くと次のようになる。

$$L=\sqrt{-\hat{g}}\Big(\frac{1}{2}\hat{R}-\frac{1}{4}F_{MN}F^{MN}-\Lambda\Big)-\sigma^2\sqrt{-g}\frac{\lambda}{2\pi\epsilon}\Theta(\epsilon-r). \tag{4.4.67}$$

この Θ は階段関数である。式 (4.4.67) での ϵ は $+0$ の正則化であって後にゼロリミットをとる。このラグランジアンから出てくる運動方程式は

$$\begin{aligned}&\hat{R}_{MN}-\frac{1}{2}\hat{g}_{MN}\hat{R}\\&\qquad=F_{ML}F^L_N-\frac{1}{4}F_{KL}F^{KL}\hat{g}_{MN}-\Lambda\hat{g}_{MN}-\sqrt{\frac{\sigma^4 g}{\hat{g}}}\delta^\mu_M\delta^\nu_N g_{\mu\nu}\frac{\lambda}{2\pi\epsilon}\Theta(\epsilon-r),\end{aligned} \tag{4.4.68}$$

$$\partial_M(\sqrt{-\hat{g}}F^{MN})=0, \tag{4.4.69}$$

となる。background としてのゲージ場の解は前節と全く同じ (4.3.50) で与えられる。従って解くべき連立方程式は式 (4.3.52)、(4.3.53)、(4.3.54) を導いたのと同様のやり方で得られる。

$$\begin{aligned}\hat{R}_{rr}&=-\hat{g}_{rr}\left[2\frac{\sigma''}{\sigma}-\frac{(\sigma')^2}{\sigma^2}+\frac{1}{2}\frac{\rho''}{\rho}-\frac{1}{4}\frac{(\rho')^2}{\rho^2}\right]\\&=\left[\frac{\Lambda}{2}+\frac{3}{4}B^2\sigma^{-4}+\rho^{-\frac{1}{2}}\frac{\lambda}{2\pi\epsilon}\Theta(\epsilon-r)\right]\hat{g}_{rr},\end{aligned} \tag{4.4.70}$$

$$\begin{aligned}\hat{R}_{\theta\theta}&=-\hat{g}_{\theta\theta}\left[\frac{\sigma'}{\sigma}\frac{\rho'}{\rho}+\frac{1}{2}\frac{\rho''}{\rho}-\frac{1}{4}\frac{(\rho')^2}{\rho^2}\right]\\&=\left[\frac{\Lambda}{2}+\frac{3}{4}B^2\sigma^{-4}+\rho^{-\frac{1}{2}}\frac{\lambda}{2\pi\epsilon}\Theta(\epsilon-r)\right]\hat{g}_{\theta\theta},\end{aligned} \tag{4.4.71}$$

$$\Lambda_4=\frac{1}{2}\Lambda\sigma-\frac{1}{4}B^2\sigma^{-3}+\frac{1}{4}\frac{(\sigma')^2}{\sigma}+\sigma'' \tag{4.4.72}$$

上の二式 (4.4.70)(4.4.71) からやはり拘束条件 (4.1.19) が満たされる必要がある。よって $\sigma'\neq0$ のとき σ と ρ は再度 (4.1.20) の関係にあることが分かる。このようにして (4.4.70)、(4.4.71) 及び (4.4.72) は z の二階微分方程式でまとめられる。この方程式は (4.3.55) と全く同じである。なぜなら 3-brane を bulk 中に入れる、という操作はつまり bulk 中の運動方程式にある境界条件を課して波動関数の射影を行っていることに対応しているからである。

運動方程式 (4.3.55) から得られる '1 粒子' の運動は前節と同じ最小値の周りでの振動であることは分かった。それでは brane があるときの境界条件はどうであろうか。式 (4.4.70) から得られる

$$2\frac{\sigma''}{\sigma}-\frac{(\sigma')^2}{\sigma^2}+\frac{1}{2}\frac{\rho''}{\rho}-\frac{1}{4}\frac{(\rho')^2}{\rho^2}=-\left[\frac{\Lambda}{2}+\frac{3}{4}B^2\sigma^{-4}+\rho^{-\frac{1}{2}}\frac{\lambda}{2\pi\epsilon}\Theta(\epsilon-r)\right] \tag{4.4.73}$$

の両辺に $\rho^{\frac{1}{2}}$ を掛けてから $r \in [0, \epsilon]$ の領域で両辺を積分してみる。すると ρ、σ 自体は連続関数であるから、$\epsilon \to +0$ を考えると

$$(4\sqrt{\sigma} + \sqrt{\rho})'|_0^{\epsilon} = -\frac{\lambda}{2\pi} \tag{4.4.74}$$

という条件が得られる。ところが $(\sqrt{\sigma})'$ が不連続であると式 (4.4.72) に矛盾するから結局

$$(\sqrt{\rho})'|_0^{\epsilon} = -\frac{\lambda}{2\pi}\,. \tag{4.4.75}$$

及び正則化のためにさらに境界上で次式が成り立つ。

$$(\sqrt{\rho})'(0) = 1, \quad \rho(\epsilon) = 0\,. \tag{4.4.76}$$

これらの境界条件を z で表すと

$$z'(\epsilon) = 0, \quad z''(\epsilon) = C\Big(1 - \frac{\lambda}{2\pi}\Big) \tag{4.4.77}$$

のようになる。つまり brane を入れるという操作自体が、brane を取り囲む bulk だけをみたとき conical singurarity を生じさせているように振る舞うのである。実際には brane を含めた全時空が regular になっている。このことから、Wetterich のモデルで現れた conical singularity の起源を、実は brane が存在していたため、というように解釈できるのではないか、と予想される。それを明らかにするには、上の境界条件を置いたとき六次元時空の至るところ正則な解があるかを調べればよい。以前と同様にここでは特に $\Lambda_4 = 0$ の場合の解を求めることにする。

さてスケール変換対称性 (4.3.58) により $z(\epsilon) = 1$ と選んでも一般性を失わない。'粒子' は $r = 0$ で $z = 1$ から出発して $r = \bar{r}$ で $z = \bar{z}$ に到着しまた引き返すという振動を行う。$r = \bar{r}$ での正則条件は前節と同じだから満たさなければいけない条件は式 (4.3.60)、(4.3.61)、及び次式である。

$$C\Big(1 - \frac{\lambda}{2\pi}\Big) = z''(\epsilon) = \frac{5}{16}B^2 - \frac{5}{8}\Lambda\,. \tag{4.4.78}$$

(4.3.60)、(4.3.61)、(4.4.78) の三式について積分定数 B、C、$\bar{z}$ の三つがあるから、$\Lambda > 0$、$\lambda < 2\pi$ であればこれらの定数は決定される。実際 $\bar{z} \neq 1$ の場合には、$\bar{z}$ についての式のみに書き直したとき

$$-\frac{3}{5}\frac{1 - \bar{z}^2}{1 - \bar{z}^{-6/5}} = \frac{1 + \bar{z}^{2/5}}{(1 - \lambda/2\pi) + \bar{z}^{-14/5}} \tag{4.4.79}$$

となり、これは $\bar{z} = 1 + \delta, \quad |\delta| \ll 1$ とおけば δ について解けることが確かめられる。$\lambda = 0$ の時にはこの解が存在しないことは既に前節でみた通りである。さて、これらの定数 B、C、$\bar{z}$ が (与えられたラグランジアンパラメータごとに) 定まるということは、つまり積分定数である B、C、$\bar{z}$ を今述べた値に tune することで四次元有効理論の宇宙項がゼロになるような解がラグランジアンパラメータ (特に Λ、λ) に依らずいつでも取ってこれることを意味している。得られた解は余次元のトポロジーが S^2 で、北極に 3-brane が存在している格好になる。

それでは $\bar{z}=1$ の時はどうなるだろうか。これは Wetterich のモデルのところでみたように、六次元時空が四次元時空と余次元空間との直積になる場合である。このとき brane を入れずとも時空はすべて regular であった。はたして brane をいれた時に解が存在するか見てみよう。まず $\sigma'=0$ であるからスケール変換の自由度を使って $\sigma=1$ とおくことが出来て、式 (4.4.70) より bulk 中では

$$(\sqrt{\rho})''=-\Big(\frac{\Lambda}{2}+\frac{3}{4}B^2\Big)\sqrt{\rho} \tag{4.4.80}$$

が成立する。この解は前節で求めたものと同じである。

$$\rho\propto\sin^2\omega(r+r_0),\quad r_0=constant, \tag{4.4.81}$$

$$\omega=\sqrt{\frac{\Lambda}{2}+\frac{3}{4}B^2}, \tag{4.4.82}$$

一方境界条件は (4.4.75) で与えられる。ところがこの二式を満足する連続関数は存在しない。これは既に regular な余次元空間に tension $\lambda\neq0$ を持つ brane が入れられないことを意味している。

さて、今まで $\Lambda_4=0$ の時の解に着目してきたが、当然 $\Lambda_4\neq0$ のときの解というのも存在する。Λ_4 を積分定数として条件式 (4.3.60)、(4.3.61)、(4.4.78) にあらわにいれると、結局三つの式に対して四つの未知数がある。そこでそのうちのひとつは条件から決定されないで自由に指定することができるわけである。

このようにして bulk 中にゲージ場と 3-brane を導入することで時空の至るところ正則な background が得られた。もともとの Rubakov-Shaposhnikov モデルのときは四次元有効理論で観測される場は余次元方向についてのゼロモードであった。そこで QCD の相転移等の影響は直接 Λ に響いて、仮に四次元の宇宙項をゼロに保つメカニズムがあるとすれば、余次元のコンパクト化のサイズの変化として現れる。もちろんこの章でやったことは、あるラグランジアンパラメータごとに連続的な積分定数で parametrize される解の集合を求めることが出来ただけで、力学的にどの解を選ぶか、という議論は出来なかった。これは第一章で述べた通りである。従って Rubakov-Shaposhnikov のモデルにおいても、力学的に Λ が変化したときに一体, 積分定数 Λ_4 を保つように余次元の geometry が選ばれるのか、あるいは余次元の geometry の変化をなくすように Λ_4 が再び選ばれるのか、なんのメカニズムも見つかっていない現在のところでは判断できない。

一方で、時空をすべて正則にすることが出来た最終的なモデルでは、二つのラグランジアンパラメータが与えられた時に $\Lambda_4=0$ である解を得るには bulk 中のゲージ場をある値に tune しなければならなかった。Standard Model 粒子はすべて 3-brane 上に束縛されているとしたとき、四次元での相転移は λ の値を変化させることに対応する。このようにしてラグランジアンパラメータが effective に変化したとする。しかし brane 上の物理が bulk のゲージ場の field strength をも変化させる、ということは考えにくい。そこでゲージ場の値は固定されているとすると、もはや λ が変化したとき Λ_4 が変化しないでいられるような解は存在しない。従ってこの場合、宇宙項問

題は初期値問題となる。つまり brane 上での相転移が起こる前の積分定数 B、Λ_4、C、$\bar{z}$ を tune しておくことで相転移の終わった現在我々が四次元の宇宙項として $\Lambda_4 = 0$ を観測している、と結論づけなければいけないのである。

第5章　まとめ

本論文で扱った warped metric は観測されている四次元時空の、高次元時空への埋め込みの一例である。第一章で述べたように、一般的に background metric として取りうるものには空間対称な Minkowski metric のほかに空間的に非対称なものも含まれている。これらの background についてはその安定性を議論する必要があることについても第一章で既の触れた。その具体例としては第四章の Rubakov-Shaposhnikov のモデルが metric の一次の摂動について不安定であること [30] が挙げられる。この安定性についての議論を別にすると、warped metric は inflation 中の metric における時間方向を空間方向に置き換えた形をしている。したがってこの形は background の仮定としても受け入れやすい。inflation では de Sitter の時に warped factor が指数関数的に増大したのに対応して、高次元時空の空間の一方向に依存した warped factor は Anti de Sitter のときその空間方向に指数関数的に増大しているわけである。第三章と第四章で見たように、warped factor は高次元空間の宇宙項からくるゆがみを吸収して四次元 Minkowski 空間を埋め込める、という効用を持っていた。ただし四次元の部分空間として Minkowski 空間以外のものも埋め込めることが出来るため、ある与えられた宇宙項について四次元 Minkowski 空間を埋め込んだとしても、宇宙項などのパラメータが力学的に変化したとき四次元が Minkowski に留まっているという保証はないわけである。むしろ、宇宙項などのパラメータの “初期値” が与えられたとき、同時に四次元の宇宙項も選ぶことが出来、その後パラメータが変化するに従って四次元宇宙項も変化を受ける、といえる。このため、第二、三章で扱った Randall-Sundrum のモデルや第四章での宇宙項問題のためのモデルでも inflation が起こりうるのである。

第四章の Rubakov-Shaposhnikov のモデルで見たように、四次元有効理論を導き出すような高次元理論には、様々な種類の singularity が現れる可能性がある。六次元 warped compact 化のときだけでなく、スカラー場を五次元の bulk 中に加えた理論でもまた別の singularity が現れる [39]。前者は warped factor と余次元の角度方向の metric という二つのスカラー場を四次元重力理論のほかに余分に持つのに対し、後者は warped factor と bulk 中のスカラー場という二つの自由度を余分に持っている。しかしこれらの理論から出てくる singularity は別種のものである。(前者は degenerate metric であって、bulk の Ricci スカラーは発散しないのに対し、後者は bulk の Ricci スカラーが発散してしまう。) 第四章の Wetterich のモデルで現れる conical singularity も Ricci スカラーの発散はないが角度欠損を引き起こすような singularity である。どんな高次元理論に singularity がどのように現れるのか、についての一般的考察をすることは難しい。また、それらの singularity が、もともと高次元を考える動機であった四次元理論における本質的

問題の解決を妨げるように機能しているのか、その関係についても明示することは困難である。singularity が、[30] で指摘されたような background の不安定性を生み出している可能性もある。ただ、第四章で示したように、なんらかの場の自由度を bulk 中に入れたり、bulk よりも次元の低いエネルギー運動量の局在を考えることで singularity を解消できる場合も存在して、非常に興味深い。

謝辞

この論文を書くにあたって、その思想的な基盤の多くは井沢さんとの議論を通して得られたものです。未熟な質問に丁寧に答えて頂き、適切な助言も与えて下さった井沢さんに感謝します。また、注意深い指導をして頂いた柳田先生、相対論的側面から多くの有益な助言を下さった白水さん、たくさんの議論に付き合ったり、技術的に補助して下さった研究室の方々に、深く感謝します。

付 録A　notation

この論文を通して inertial frame での metric は

$$\eta_{\mu\nu} = (+1, -1, -1, ...) \tag{A.0.1}$$

という符合に統一した。

また Christoffel 記号、Ricci テンソルの定義はそれぞれ

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\kappa} \Big(\partial_\mu g_{\kappa\nu} + \partial_\nu g_{\kappa\mu} - \partial_\kappa g_{\mu\nu} \Big), \tag{A.0.2}$$

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} = & \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} \Big(\partial_\mu \partial_\nu g_{\rho\sigma} - \partial_\mu \partial_\sigma g_{\rho\nu} - \partial_\nu \partial_\rho g_{\mu\sigma} + \partial_\rho \partial_\sigma g_{\mu\nu} \Big) \\ & + g^{\rho\sigma} g_{\lambda\kappa} \Big(\Gamma^{\lambda}_{\rho\sigma} \Gamma^{\kappa}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\rho\nu} \Gamma^{\kappa}_{\mu\sigma} \Big), \end{aligned} \tag{A.0.3}$$

で与えられる。

エネルギー運動量テンソル $T^{\mu\nu}$ は、metric の変分 $\delta g_{\mu\nu}$ を用いて物質場の作用から導き出される。

$$\delta S_M = \frac{1}{2} \int d^d x \sqrt{g(x)} T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \tag{A.0.4}$$

付 録B　ベッセル関数

ベッセル関数はベッセル微分方程式

$$\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\Big(z\frac{du}{dz}\Big)+\Big(1-\frac{\nu^2}{z^2}u\Big)=\frac{d^2u}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{du}{dz}+\Big(1-\frac{\nu^2}{z^2}\Big)u=0 \tag{B.0.1}$$

の解である。この基本系は $\{J_\nu, Y_\nu\}$ で張ることが出来る。通常 J_ν を ν 次の狭義ベッセル関数、Y_ν を ν 次のノイマン関数と呼ぶ。これらは以下のような $z(\geq 0)$, ν 依存性を持つ。

$$J_\nu(z)=\Big(\frac{z}{2}\Big)^\nu\sum_{n=o}^{\infty}\frac{(-1)^n(z/2)^{2n}}{n!\Gamma(\nu+n+1)}, \tag{B.0.2}$$

$$Y_\nu(z)=\frac{1}{\sin\nu\pi}[\cos(\nu\pi)J_\nu(z)-J_{-\nu}(z)],\quad \nu\neq integer, \tag{B.0.3}$$

$$Y_n(z)=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial J_\nu(z)}{\partial\nu}-(-1)^n\frac{\partial J_{-\nu}(z)}{\partial\nu}\right]_{\nu=n},\quad n=0,1,2,.. \tag{B.0.4}$$

特にその漸近的な振る舞いは、$z\ll 1$ のとき

$$J_n(z)\sim\frac{1}{n!}\Big(\frac{z}{2}\Big)^n, \tag{B.0.5}$$

$$Y_n(z)\sim-\frac{1}{\pi}(n-1)!\Big(\frac{z}{2}\Big)^{-n} \tag{B.0.6}$$

また $z\gg 1$ のとき

$$J_\nu(z)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}), \tag{B.0.7}$$

$$Y_\nu(z)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}) \tag{B.0.8}$$

で表せる。

付 録C　Randall-Sundrum 2 brane モデルにおけるbulk中の場

本文中ではほとんど触れることが出来なかったが、hierarchy 問題を解決するために提唱された Randall-Sundrum 2 brane モデル (RS 1 モデル) の background において bulk 中に存在する物質場がどのような配位をとるか、については多く調べられている [22]、[34]、[35]、[36] [37]、[38]。その動機は bulk 中の場のゼロモードを brane 上に局在した SM 粒子と解釈できないだろうか、という期待であったり、SM 粒子の質量の hierarchy もまた余次元を考えることで説明できないか、というものであったりする。ここでは単に bulk 中の場の関数形を導き出すだけにして、その様々な利用法については割愛することにする。これらの場の余次元での振る舞いは本文の 1.3 節で述べた一般論の良い具体例でもある。

まずスカラー場であるがこれは本文の第三章で既に述べた。つまり式 (3.3.34) にノイマン型の境界条件を課したものが解となる。結果的にゼロモードについてはスカラー場は graviton のゼロモードと同様に positive tension brane に局在していることが分かった。

bulk のフェルミオンについてはどうであろうか。この場合曲がった空間上の接続を考える必要がある [19]。具体的に warped factor $e^{-2a}(\ a = k|y|)$ の掛った background での spin connection を求めて見よう。metric $\hat{g}_{MN}$、vielbein e^M_α は

$$\hat{g}_{MN} = diag(e^{-2a}, -e^{-2a}, -e^{-2a}, -e^{-2a}, r_c^2), \tag{C.0.1}$$

$$e^M_\alpha = diag(e^a, e^a, e^a, e^a, \frac{1}{r_c}), \tag{C.0.2}$$

$$e_{\alpha M} = diag(e^a, -e^a, -e^a, -e^a, r_c) \tag{C.0.3}$$

spin connection $\omega_{\alpha\beta M}$ の定義は

$$\omega_{\alpha\beta M} \equiv e^N_\alpha \nabla_M e_{\beta N} \tag{C.0.4}$$

で与えられる。今の場合ゼロとならない spin connection は

$$\omega_{\alpha\beta\mu} = -\frac{1}{r_c}\delta^y_\beta \dot{a} e_{\alpha\mu} + \frac{1}{r_c}\delta^y_\alpha \dot{a} e_{\beta\mu} \tag{C.0.5}$$

のみである。一般に曲がった空間上の massless フェルミオン Ψ のラグランジアンは次のように表せる。

$$L = \sqrt{\hat{g}}\frac{i}{2}\left[\bar{\Psi}\gamma^\alpha e^M_\alpha \nabla_M \Psi - e^M_\alpha (\nabla_M \bar{\psi})\gamma^\alpha \Psi\right]$$

$$= e\,\frac{i}{2}\left[\bar{\Psi}\gamma^{\alpha}e_{\alpha}^{M}\left(\partial_M\Psi+\frac{1}{2}\Sigma^{\alpha\beta}\omega_{\alpha\beta M}\,\Psi\right)-e_{\alpha}^{M}\left(\partial_M\Psi^{\dagger}+\frac{1}{2}(\Sigma^{\alpha\beta}\omega_{\alpha\beta M}\,\Psi)^{\dagger}\right)\gamma^0\gamma^{\alpha}\Psi\right]$$
$$= e\,\bar{\Psi}i\gamma^{\alpha}e_{\alpha}^{M}\left(\partial_M+\frac{1}{2}\omega_{\beta\delta M}\,\Sigma^{\beta\delta}\right)\Psi \tag{C.0.6}$$

ここで $e\equiv\det e_{\alpha}^{M}$、$\Sigma^{\alpha\beta}\equiv 1/4[\gamma^{\alpha},\gamma^{\beta}]$ と定義した。また $\gamma^{\alpha}=\{\gamma^{\mu},i\gamma^5\}$ と表す。この時 $\gamma^{\alpha},\gamma^{\beta}=2\eta^{\alpha\beta}$ が成立する。spin connection が式 (C.0.5) で与えられた場合、五次元で質量 m を持つフェルミオンのラグランジアンは

$$L=e^{-3a}\bar{\Psi}\left[i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-\gamma^5e^{-a}(\partial_y-2\dot{a})\right]\Psi-m\,\mathrm{sgn}(y)\,\bar{\Psi}\,\Psi \tag{C.0.7}$$

となる。四次元の有効質量にあたる $\gamma^5e^{-a}(\partial_y-2\dot{a})+m\,\mathrm{sgn}(y)$ は brane の両側で kink として振る舞うことに注意する。この符号の反転は理論の y パリティから要請される。さて、四次元で見たときのカイラリティを $\bar{\Psi}_{L,R}\equiv 1/2(1\mp\gamma^5)\Psi$ で定める。すると作用は

$$S=\int d^4x\int dy\Big(e^{-3a}(\bar{\Psi}_L i\partial\!\!\!/\Psi_L+\bar{\Psi}_R i\partial\!\!\!/\Psi_R)-e^{-4a}m\,\mathrm{sgn}(y)(\bar{\Psi}_L\Psi_R+\bar{\Psi}_R\Psi_L)$$
$$-\frac{1}{2}\{\bar{\Psi}_L(e^{-4a}\partial_y+\partial_y e^{-4a})\Psi_R-\bar{\Psi}_R(e^{-4a}\partial_y+\partial_y e^{-4a})\Psi_L\}\Big) \tag{C.0.8}$$

のように表せる。$\Psi_{L,R}$ には y の周期境界条件を課した。$\Psi_{L,R}$ のうちのどちらかが y のパリティ (Z_2 対称性) で奇、もう一方が偶のときに上の作用はパリティが偶となり得る。場の方程式を求め Kaluza-Klein モード展開を行うと

$$\Psi_{L,R}(x,y)=\sum_n\psi_n^{L,R}(x)\frac{e^{2a}}{\sqrt{r_c}}\hat{f}_n^{L,R}(y), \tag{C.0.9}$$
$$\int_0^{\pi}dye^a\hat{f}_m^{L*}\hat{f}_n^{L}=\int_0^{\pi}dye^a\hat{f}_m^{R*}\hat{f}_n^{R}=\delta_{mn}, \tag{C.0.10}$$
$$\left(\pm\frac{1}{r_c}\partial_y-m\right)\hat{f}_n^{L,R}=-m_ne^a\hat{f}_n^{R,L} \tag{C.0.11}$$

この第三式 (C.0.11) が 1.3 節で述べた右巻きフェルミオンと左巻きフェルミオンとの一階の連立方程式に対応している。この式 (C.0.11) の演算子がエルミートでしたがって m_n が実であることは Z_2 対称性からくる境界条件 $\hat{f}_m^{L*}(0)\hat{f}_n^{R}(0)=\hat{f}_m^{L*}(\pi)\hat{f}_n^{R}(0\pi)=0$ から保証される。このモード展開のもとで、作用は

$$S=\sum_n\int d^4x\,[\bar{\psi}_n(x)i\partial\!\!\!/\psi_n-m_n\bar{\psi}_n(x)\psi_n(x)] \tag{C.0.12}$$

で表される。

$$\begin{cases} t=\epsilon e^{ky},\ \epsilon=e^{-kr_c\pi} \\ \hat{f}_n^{L,R}(y)=\sqrt{kr_c\epsilon}f_n^{L,R}(t), \\ \nu=\frac{m}{k},\ x_n=\frac{m_n}{\epsilon k} \end{cases} \tag{C.0.13}$$

と新たな変数や関数、定数を定義すると $f_n^{L,R}$ は次の二階の微分方程式を満たさなければいけない。

$$[t^2\partial_t^2 + x_n^2 t^2 - \nu(\nu \mp 1)]f_n^{L,R}(t) = 0 \tag{C.0.14}$$

ゼロモード $(x_n = 0)$ は

$$f_0^{L,R}(t) = f_0^{L,R}(1)t^{\pm\nu} \propto e^{\pm m|y|}, \quad |f_0^{L,R}(1)|^2 = \frac{1 \pm 2\nu}{1 - \epsilon^{1\pm 2\nu}} \tag{C.0.15}$$

で与えられる。orbifold 対称性よりこのうちどちらか一つのみが許される。$x_n > 0$ のモードは $\nu \neq 1/2 + N$ (N は整数) のとき次式のようになる。

$$f_n^{L,R}(t) = \sqrt{t}\left[a_n^{L,R} J_{\frac{1}{2}\mp\nu}(x_n t) + b_n^{L,R} J_{-\frac{1}{2}\pm\mu}(x_n t)\right] \tag{C.0.16}$$

$\nu = 1/2 + N$ の場合には f_n^L と f_n^R とは独立ではない。

$$f_n^L(t) = \sqrt{t}\left[a_n^L J_{\frac{1}{2}-\nu}(x_n t) + a_n^R J_{-\frac{1}{2}+\nu}(x_n t)\right], \tag{C.0.17}$$

$$f_n^R(t) = \sqrt{t}\left[a_n^R J_{\frac{1}{2}+\nu}(x_n t) - a_n^L J_{-\frac{1}{2}-\nu}(x_n t)\right]. \tag{C.0.18}$$

以上のような微分方程式の解に orbifold 対称性からくる境界条件を課す必要がある。この境界条件には二つの選択肢がある。つまり左巻きのモードの方を y パリティ奇、右巻きをパリティ偶に取る方法 (L 法) と右巻きを奇、左巻きを偶に取る方法 (R 法) である。L 法の場合の境界条件は $f_n^L(\epsilon) = f_n^L(1) = 0$、R 法の境界条件は $f_n^R(\epsilon) = f_n^R(1) = 0$ となる。ここで特に L 法を取ったときの $\nu = 0$ の場合の関数形を与えておこう。

$$f_0^R(t) = \frac{1}{\sqrt{1-\epsilon}}, \quad f_n^R(t) = -\sqrt{\frac{2}{1-\epsilon}} cos[x_n(t-\epsilon)] \tag{C.0.19}$$

最後に bulk 中にゲージ場があるときを考える。ゲージ場のラグランジアンは

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + e^{-2a}\left[\frac{1}{2}(\partial_y A_\mu)^2 - \partial_y A_\mu \partial^\mu A_y + \frac{1}{2}(\partial_\mu A_y)^2\right] \tag{C.0.20}$$

変分原理からゲージ不変な量について境界での条件が課せられる。

$$F_{y\mu} = 0, \quad at\ y = 0,\ r_c\pi. \tag{C.0.21}$$

さらに Z_2 対称性から条件がついて

$$\partial_y A_\mu = A_y = 0, \quad at\ y = 0,\ r_c\pi. \tag{C.0.22}$$

これらの条件を満たす場の関数形をゲージ共変な形で求めても良いが、ここでは本文で graviton についてやったのと同様にゲージ固定をして考える。$A_y = 0$、$\partial^\mu A_\mu = 0$ というゲージ固定をするとラグランジアンは

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{2}A^\mu \partial_y(e^{-2a}\partial_y A_\mu) \tag{C.0.23}$$

と表される。A_μ を Kaluza-Klein モード展開して

$$A_\mu(x,y) = \sum_n A_\mu^{(n)}(x)\hat{\chi}_n(y). \tag{C.0.24}$$

$\hat{\chi}_n(y)$ はノイマン型境界条件を brane 上で満たす、次式で定義された関数である。

$$-\partial_y(e^{-2a}\partial_y\hat{\chi}_n(y)) = M_n^2\hat{\chi}_n(y), \tag{C.0.25}$$

$$\int_0^{r_c\pi} dy\hat{\chi}_n(y)\hat{\chi}_m(y) = \delta_{mn} \tag{C.0.26}$$

この解は

$$\hat{\chi}_n(y) = \frac{\sqrt{2k}e^a}{N_n}\left[J_1(\lambda_n e^a) + c_n Y_1(\lambda_n e^a)\right], \quad for\ \lambda_n \neq 0 \tag{C.0.27}$$

$$\lambda_n = \frac{M_n}{k}, \quad c_n = -\frac{J_0(\lambda_n)}{Y_0(\lambda_n)} \tag{C.0.28}$$

$$N_n^2 = e^a\left[J_1(\Lambda_n e^a) + c_n Y_1(\lambda_n e^a)\right]|_{y=0}^{y=r_c\pi} \tag{C.0.29}$$

で与えられる。ゲージ場のゼロモードについては

$$\hat{\chi}_0(y) = \frac{1}{\sqrt{r_c\pi}} \tag{C.0.30}$$

が得られ、余次元方向について flat であることが分かる。

参考文献

[1] T. Appelquist, A. Chodos and P. G. Freund, "Modern Kaluza-Klein Theories," *READING, USA: ADDISON-WESLEY (1987) 619 P. (FRONTIERS IN PHYSICS, 65).*

[2] J. Polchinski, "String Theory" *READING, UK: Cambridge University Press (1998).*

[3] C. W. Misner, K. S. Thorne and J. A. Wheeler, "Gravitation" *READING, USA: W.H.Freedman and Company (1973).*

[4] V. A. Rubakov and M. E. Shaposhnikov, Phys. Lett. **B125**, 136 (1983).

[5] R. Sundrum, Phys. Rev. **D59**, 085009 (1999) [hep-ph/9805471].

[6] Z. Kakushadze and S. H. Tye, Nucl. Phys. **B548**, 180 (1999) [hep-th/9809147].

[7] I. Antoniadis, N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. Dvali, Phys. Lett. **B436**, 257 (1998) [hep-ph/9804398].

[8] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. Dvali, Phys. Lett. **B429**, 263 (1998) [hep-ph/9803315].

[9] L. Randall and R. Sundrum, Phys. Rev. Lett. **83**, 4690 (1999) [hep-th/9906064].

[10] S. Weinberg, "Gravitation and Cosmology" *READING, USA: Jhon Wiley & Sons (1972).*

[11] C. M. Will, "Theory and experiment in gravitational physics" *READING, USA: Cambridge University Press (1981)*

[12] C. M. Will, in *NONE* gr-qc/9811036.

[13] W. Israel, Nuovo Cim. **B44S10**, 1 (1966).

[14] L. Randall and R. Sundrum, Phys. Rev. Lett. **83**, 3370 (1999) [hep-ph/9905221].

[15] J. Garriga and T. Tanaka, Phys. Rev. Lett. **84**, 2778 (2000) [hep-th/9911055].

[16] P. Horava and E. Witten, Nucl. Phys. **B460**, 506 (1996) [hep-th/9510209].

[17] E. Witten, Nucl. Phys. **B471**, 135 (1996) [hep-th/9602070].

[18] P. Horava and E. Witten, Nucl. Phys. **B475**, 94 (1996) [hep-th/9603142].

[19] N. D. Birrell and P. C. W. Davies, "Quantum Fields in Curved Space" *READING, USA: Cambridge University Press (1982)*

[20] W. D. Goldberger and M. B. Wise, Phys. Rev. Lett. **83**, 4922 (1999) [hep-ph/9907447].

[21] W. D. Goldberger and M. B. Wise, Phys. Lett. **B475**, 275 (2000) [hep-ph/9911457].

[22] W. D. Goldberger and M. B. Wise, Phys. Rev. **D60**, 107505 (1999) [hep-ph/9907218].

[23] O. DeWolfe, D. Z. Freedman, S. S. Gubser and A. Karch, Phys. Rev. **D62**, 046008 (2000) [hep-th/9909134].

[24] C. Charmousis, R. Gregory and V. A. Rubakov, Phys. Rev. **D62**, 067505 (2000) [hep-th/9912160].

[25] T. Chiba, Phys. Rev. **D62**, 021502 (2000) [gr-qc/0001029].

[26] T. Tanaka and X. Montes, Nucl. Phys. **B582**, 259 (2000) [hep-th/0001092].

[27] S. Weinberg, Rev. Mod. Phys. **61**, 1 (1989).

[28] V. A. Rubakov and M. E. Shaposhnikov, Phys. Lett. **B125**, 139 (1983).

[29] A. G. Cohen and D. B. Kaplan, Phys. Lett. **B470**, 52 (1999) [hep-th/9910132].

[30] G. V. Lavrelashvili and P. G. Tinyakov, Sov. J. Nucl. Phys. **41**, 172 (1985).

[31] C. Wetterich, Nucl. Phys. **B255**, 480 (1985).

[32] S. Hayakawa and K. I. Izawa, Phys. Lett. **B493**, 380 (2000) [hep-th/0008111].

[33] K. Nakamura, A. Ishibashi and H. Ishihara, Phys. Rev. **D62**, 101502 (2000) [gr-qc/0001015].

[34] Y. Grossman and M. Neubert, Phys. Lett. **B474**, 361 (2000) [hep-ph/9912408].

[35] H. Davoudiasl, J. L. Hewett and T. G. Rizzo, Phys. Lett. **B473**, 43 (2000) [hep-ph/9911262].

[36] A. Pomarol, Phys. Lett. **B486**, 153 (2000) [hep-ph/9911294].

[37] S. Chang, J. Hisano, H. Nakano, N. Okada and M. Yamaguchi, Phys. Rev. **D62**, 084025 (2000) [hep-ph/9912498].

[38] T. Gherghetta and A. Pomarol, Nucl. Phys. **B586**, 141 (2000) [hep-ph/0003129].

[39] S. Kachru, M. Schulz and E. Silverstein, Phys. Rev. **D62**, 045021 (2000) [hep-th/0001206].