修士論文

弦理論の非可換幾何学的側面

市川　憲人[1] (学籍番号 96036)

東京大学理学系研究科素粒子理論研究室

東京都文京区本郷 7-3-1

[1]kent@hep-th.phys.s.u-tokyo.ac.jp

目 次

第 1 章 Introduction **7**
1.1 序 7
1.2 非可換幾何と弦理論 8
1.3 内容概説 9
1.4 コンベンション 10

第 2 章 非可換幾何の数学的構成 **13**
2.1 非可換幾何の定義 13
2.2 変形量子化 14
2.2.1 変形量子化の定義 14
2.2.2 Kontsevich の変形量子化 17
2.2.3 Moyal 積 19
2.3 非可換的微分幾何 19
2.3.1 射影加群 19
2.3.2 非可換微分形式 (universal differential form) 21
2.3.3 接続 (universal connection) 24

第 3 章 非可換幾何の物理への応用 **27**
3.1 非可換性導入の動機 27
3.1.1 可換時空上での量子重力理論の障害 27
3.1.2 非可換化による量子重力理論の障害の解消 28
3.2 非可換場の理論の構成 28
3.2.1 非可換場の理論 28
3.2.2 θ が一定値の場合 29
3.2.3 θ が一定値ではない場合 29
3.3 非可換場の理論の摂動論 29
3.3.1 プラナーダイアグラム 30
3.3.2 ノンプラナーダイアグラム 31
3.3.3 4 次元 ϕ^4 理論の 1-ループ計算 32
3.3.4 6 次元 ϕ^3 模型の 1-loop 計算 35
3.4 非可換場の理論の諸性質 35

3.4.1 基本的な事実 . . . 35
3.4.2 UV/IR 混合 . . . 36
3.4.3 弦理論とのアナロジー . . . 38
3.4.4 Seiberg-Witten 写像 . . . 38

第 4 章 弦理論に現れる非可換幾何学 41
4.1 Space-Time Uncertainty . . . 41
4.1.1 直感的な導出 . . . 41
4.1.2 共形対称性と Space-Time Uncertainty . . . 42
4.2 String Field Theory の非可換幾何学的側面 . . . 44
4.2.1 Open String Field Theory のラグランジアン . . . 44
4.2.2 String field の associativity . . . 46
4.2.3 open string の相互作用の修正 . . . 47
4.2.4 Witten の Open String Field Theory の非可換性 . . . 48
4.3 弦理論の低エネルギー有効理論と Seiberg-Witten 写像 . . . 48
4.3.1 B 場の存在下での open-string の理論 . . . 48
4.3.2 低エネルギー有効理論への B 場の影響 . . . 50
4.3.3 Seiberg-Witten 極限 . . . 50
4.3.4 ゲージ理論 . . . 51
4.4 非可換ソリトンと D-brane . . . 53
4.4.1 GMS ソリトン . . . 53
4.4.2 D-brane と GMS ソリトン . . . 66
4.4.3 D-brane チャージと K-theory . . . 70
4.4.4 TypeIIB 理論での Toeplitz 代数と指数定理 . . . 72
4.4.5 Type IIA の D-brane と BDF 構成法 . . . 77
4.4.6 非自明な dB がある時の D-brane のチャージ . . . 80
4.4.7 Bott 周期性の非可換ソリトンによる説明 . . . 82

第 5 章 結論 85

付 録 A 圏 87
A.1 圏の定義 . . . 87
A.2 関手 . . . 88
A.3 圏同値 . . . 88

付 録 B K-theory 89
B.1 トポロジカル K-theory . . . 89
B.1.1 トポロジカル K-theory の実際的な定義 . . . 89
B.1.2 K 群の抽象的な定義 . . . 90
B.1.3 相対 K 群 (relative K-group) と $\tilde{K}$ 群 (reduced K-group) . . . 91

B.1.4 K^{-n} 群 93
B.1.5 K-theory の基本的な性質 93
B.1.6 Bott 周期性定理 98
B.2 C* 環の K-theory 99
B.2.1 C* 環 99
B.2.2 C* 環の乗法単位元 100
B.2.3 C* 環の Hilbert 空間上の表現 102
B.2.4 C* 環の K_0 群の定義 103
B.2.5 K_0 群の性質 106
B.2.6 $K_n(\mathcal{A})$ 群 108
B.2.7 Bott 周期性と長完全系列 109

第1章　Introduction

1.1　序

物理学とは、我々の経験の中から定量的な部分を抽出して、その一見不規則な経験の羅列の中から数学の言葉で規則性を見い出そうという試みである。この試みが大いに成功し、我々が経験する現象の全ての基礎に物理学があると信じられるようにまでなった事は、大きな驚きである。更に、我々が普段触れているスケールとは異なるスケールに於いては、量子論や相対論のように我々の直観と異なる、数学的な描像がより本質的であることが分かることがしばしばあった。こうした経験的事実は、我々が経験する事物の本質が数学的なものであることを予感させるものである。

物理学の大きな目標の一つは、統一理論即ち、様々なスケールで我々の経験し得る全ての事を、少なくとも原理的には説明することのできる体系を築き上げることである。その作業が、我々が経験によって得た直感的な描像に数学の言葉を当てはめることで成し遂げることができれば、それに越したことはない。しかし、物理学の目指す体系は、我々が経験によって得た世界の描像とは異なる世界の描像を必要とするものであるかも知れない。そのような事が物理においては過去に何度かあった。もし我々の直観的な世界の描像が正確なものではなかったり本質的でなかったりしたとすれば、正しい描像を記述することのできる別の言語が必要である。そのような言語は、憶らく純粋に数学の言語であると考えられてきた言語である。

近年よく言われることだが、現在の物理学の状況は量子力学の誕生直前の状況とよく似ていると思われる。量子力学に於ける量子化とは即ち「代数の言葉に直して一寸、ずらして考えてみる」ということである。この論文で説明する非可換幾何学の実現方法のひとつである変形量子化とは、まさにその「一寸、ずらす」という意味での量子化である。ここに類似性を見出すことができる。無論これは正確な議論ではない。しかしひとつの考え方として、次のようなことを考えることができる。我々が経験している事象の、空間や物質といった伝統的な「科学的実在」による記述の仕方は我々のスケールで起きている事象を記述するのに便利であるから、我々が経験的に獲得した記述法である。しかし、我々のスケールから離れたスケールの事象を記述しようとすれば、その記述の仕方を「ずらす」必要がある。場の量子論の枠を超えて Planck スケールの事象まで記述する体系を得ようとした時には、量子化によって「ずらした」世界の描像をさらに「ずらす」必要があるかも知れない。その「ずらし」方は変形量子化の枠組の中に収まるとは限らないが、非可換幾何学は可換な空間の変形量子化を超えた対象を扱い得る体系であり、必要とされる「ずらし」方は非可換幾何学の枠組に入っていることが期待できる。

ここまでの議論は、非可換幾何学を研究することが本当に必要なのかという問いに対する答えにはなっていない。空間の変形量子化やその他の「ずらし」方で空間の描像をずらすことが必要であるかどうかもまた分からない。ただ、統一理論を完成するの非可換幾何学の言葉が必要であるかも知れないということを言っているに過ぎない。我々の物理を記述する方法が非可換幾何学を含まねばならないという理由は、特には知られていない。しかし、それを示唆するような傍証はいくつが存在する。この論文ではそうした傍証をいくつか紹介していきたい。

最後に、以上は個人的に考えた全く偏見に満ちた物の見方であり、あくまでも一学生の考えたひとつの物の見方に過ぎないことを重ねて強調しておく。

1.2 非可換幾何と弦理論

弦理論は、重力を含む統一理論として最も有力な候補である。少なくとも、適当な真空を手で選べば、とりあえずは重力と標準模型の統一理論を作ることができる。しかし、その非摂動論的な定式化は未だ完成されていない。従って、どのような真空が選ばれるのかというメカニズムは分かっていない。現状では、弦理論の非摂動論的な定式化を目指して、双対性などの手法を用いて非摂動論的な定式化に向けた盛んな研究がなされている。

一方、非可換幾何学は、主に数学者の Connes らによって研究の進められている幾何学[1]で、主に物理とは異なるモチベーションで研究されてきた。非可換幾何学は一般に言われるところの可換な幾何学を含むより大きな抽象的な幾何学の枠組である。非可換幾何学の考え方の重要な点は、多様体そのものよりもその上の関数の成す環をより本質的なものと見なす点にある。そこでは、一般には座標や点の概念も自明なものではなく、我々の幾何に対する直観からかなり離れた対象をも扱い得る体系である。

非可換幾何学の以上のような性質を勘案すると、非可換幾何学は現実的な対象を扱う物理とは一見何の関係も無いように思えるが、非可換幾何の基本的な考え方である多様体の上の関数の成す環を本質と考える事自体は、素粒子物理学との親和性が高い。何故なら、我々が住んでいる時空の幾何学を知ろうと思った時、我々はその上にある場即ち多様体の上の関数によってしか時空についての情報を得ることができないからである。その意味で、物理学の本質を考える上で、時空の幾何学を記述するやり方の選択肢のひとつとして非可換幾何学を考えるのは自然な考えであるといえる。

更に、実際的な非可換幾何学の構成法であると思われる変形量子化の方法は理論に或る最小のスケールを与えるという点で、物理学の大目標のひとつである量子重力理論の構成に決定的な解決策を与えるという期待を持たせる。弦理論が量子重力理論として上手くいっている理由もまた、弦理論が非可換幾何学的な側面を持っているからであると考えることができる。

実際、弦理論に於いては

- 弦理論には 時空の不確定性があること [Yon2]、

[1]非可換幾何学の元のアイディアは von Neumann までさかのぼる。

- 時空 の座標を非可換な行列と捉える行列模型が弦理論の非摂動論的な定式化になっているらしいこと [IKKT][BFSS]
- String Field Theory との関係があること [Wit2]、
- 特定の極限のもとで弦理論から時空の非可換性が自然に現われること [Rie]、

などの事実が、80 年代半ばから指摘されていた。

最近になって、トーラス上の行列模型が非可換トーラスを自然に含むことや、Seiberg-Witten 写像や GMS ソリトンの発見や非可換モノポールについての研究の進展で、非可換幾何と弦理論の結び付きはより強固なものとなり、盛んに研究されるようになった。非可換幾何学は、弦理論を統一理論として有力な理論たらしめる要件であると考えられるという意味で、弦理論の非摂動論的な定式化を得る為の重要な道具であり得る。

弦理論は理論のパラメータを α' ひとつしか持たず、実に様々な理論が弦理論のある真空の選び方によって実現できるという意味で、非常に強力な普遍性を持っている。もし弦理論の非摂動論的な定式化を完成することができ、かつ、世界の非可換幾何学的な描像が統一理論を記述するのに必要であるとするならば、弦理論の非摂動論的な定式化は非可換幾何学を必ず含んでいる筈である。また、弦理論の非摂動論的な定式化を探る上で非可換幾何学は大きなヒントを与えてくれると期待できる。

1.3 内容概説

この論文では、まず第 2 章で非可換幾何学の数学的構成について述べる。ここでは、Connes 流の抽象的な非可換幾何の定義と、変形量子化によるより現実的な非可換幾何の構成法について述べる。更に、非可換幾何における微分幾何の定義とそれによる接続の概念を紹介する。

第 3 章ではまず、通常の場の理論に非可換性を導入する動機について説明する。ここでは、低エネルギー有効理論として標準模型を含むような理論の中では、非可換幾何的な性質を持った理論が重力と標準模型の統一理論として有力であることが示唆される。次に、非可換幾何を場の理論に応用する方法と、最も簡単に非可換性を導入した場の理論の摂動論及びその繰り込みについて説明する。最後に非可換場の理論について知られている、非可換性に由来する非可換場の理論に独特な諸性質をいくつか紹介する。

第 4 章では弦理論が本質的に非可換幾何である証拠となっていると思われる時空の不確定性について説明する。次に、非摂動論的な定式化であると考えられている String Field Theory の作用に現われる $*$ 積について説明し、その非可換幾何学との関係について議論する。更に、弦理論の特定の設定の下では低エネルギー有効理論が第 3 章で紹介した非可換ゲージ場理論であることを説明し、Seiberg-Witten 写像が弦理論でのレギュラリゼーションの違いとして自然に解釈することができることを説明する。また、最近重要な研究対象になっている GMS ソリトンについて説明しその D-brane との関係を K-theory の言葉を用いて説明する。最後に、D-brane と K-theory の関係を幾つかの方法を用いて述べる。

第 5 章では以上の章で説明した事の簡単なまとめと今後の弦理論の非可換幾何学的側面についての研究の展望を述べる。

また、Appendix では圏の概念と幾何的な K-thoery と C^* 環の K-theory の簡単な紹介をする。

1.4　コンベンション

- 弦理論の $B_{\mu\nu}$ 場は $g_{\mu\nu}$ と同じ次元を持った定義と、電磁場 $F_{\mu\nu}$ と同じ次元を持っている定義の 2 通りがあるが、ここでは後者の方の定義を採用する。即ちそのバーテックスオペレータは $\frac{1}{2\pi\alpha'}B_{\mu\nu}\partial X^\mu \partial Y^\nu$ である。

- 定数

  Planck 定数·光速　$\hbar = c = 1$

  弦のテンション　α'

  弦のスケール　$\ell_{\mathrm{s}} = \sqrt{\alpha'}$

- 記号 (*がついているものは下で定義する。)

Worldsheet の座標 (空間方向、時間方向)	$\sigma = \sigma_1, \tau = \sigma_2$
時間を含む座標の添字	$\mu, \nu, \ldots$
時間を含まない座標の添字	$i, j, \ldots$
圏	$\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}, \ldots$
代数、半群	$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \ldots$
$\mathcal{A}$ 加群 (module) ただし、$\mathcal{A}$ は代数*	$\mathcal{E}, \mathcal{M}, \mathcal{N}, \ldots$
空間	$X, Y, \ldots$
自然数, 整数, 実数, 正数, 複素数	$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{R}^+, \mathbb{C}$
$\mathcal{A}$ 係数の形式的冪級数環	$\mathcal{A}[[x]]$
$\mathcal{A}$ 係数の $n \times n$ 行列環	$\mathbb{M}_n(\mathcal{A})$
$\mathbb{M}_n$ の帰納的極限*	$\mathbb{M}_\infty$
$\mathbb{M}_\infty$ の中のコンパクトな元の集合	$\mathbb{K}$
乗法単位元を持つ $\mathcal{A}$ 係数の可逆な $n \times n$ 行列	$\mathrm{GL}_n(\mathcal{A})$
乗法単位元を持つ $\mathcal{A}$ 係数の $n \times n$ ユニタリ行列	$U_n(\mathcal{A})$
空集合	ϕ
定義	$A \equiv B$
同型	$\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$
位相同相	$X \approx Y$
写像 f の X への制限	$f \mid X$
合成写像	$f \circ g$
商群 (普通の割り算を含む)	M / N
1 点コンパクト化*	X^∞
等化空間	X/Y
Moyal 積	$\phi \star \psi(x) \equiv \mathrm{e}^{\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\partial_\mu^y \partial_\nu^z} f(y) f(z)\Big\|_{x=y=z}$
Moyal 積による交換子	$[A, B]_\star \equiv A \star B - B \star A$

定義 1.4.1 (左 $\mathcal{A}$ 加群 (module))
代数 $\mathcal{A}$ の作用のある群 $\mathcal{M}$ とは、$a, b \in \mathcal{A}, \beta, \alpha \in \mathcal{M}$ で、次の性質を満たすものをいう。

M1 $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$

M2 $(\alpha\beta)a = \alpha(\beta a)$

M3 $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$

定義 1.4.2 (1 点コンパクト化)
位相空間 X の 1 点コンパクト化とは、X の外部の点 $\{\infty\}$ を X に加えたものである。即ち $X \cup \{\infty\}$。更に、X のもともとの開集合族に開集合として Y を任意の X の部分コンパクト空間として、$\{(X - Y) \cup \{\infty\}\}$ を加えたものである。
直感的にはコンパクトでない集合の端を 1 点に集めてそこに 1 点を加えたものである。

定義 1.4.3 ($n \times n$ 行列環の $n \to \infty$ 帰納的極限 $\mathbb{M}_\infty$)
$\mathbb{M}_n$ の帰納的極限 $\mathbb{M}_\infty$ は $n \times n$ 行列環 $\mathbb{M}_n$ の列の極限で。包含写像として $\Phi_{mn} : \mathbb{M}_m \to \mathbb{M}_n\,(m < n)$ は $n \times n$ 行列の左上に $m \times m$ 行列を埋め込むような写像について唯一つ定義できるようなものである。直感的には、$\infty \times \infty$ 行列で各 $n \times n$ 行列の環が左上に埋め込まれているような環である。詳細は、[WO, AppendixL] を参照。

定義 1.4.4 (コンパクト作用素のなす環 $\mathbb{K}$)
定義 B.2.19 を参照。

- Fourier 変換

$$\tilde{f}(k) \equiv \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int d^d x\, f(x) \mathrm{e}^{ik\cdot x} \tag{1.1}$$

- 逆 Fourier 変換

$$f(x) \equiv \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int d^d k\, \tilde{f}(x) \mathrm{e}^{-ik\cdot x} \tag{1.2}$$

第2章　非可換幾何の数学的構成

2.1　非可換幾何の定義

非可換幾何は元々数学の文脈の中で生まれて来た概念である。そこでまず初めに数学的に非可換幾何を定義することから始めようと思う。非可換幾何は未だに良く分からない部分の多い数学の分野であり、最終的な形の定義があるわけではない。ここでは Connes[Con] 流の非可換幾何学に従った定義[1]を紹介する。

非可換幾何で扱う対象は、(数学における) 普通の意味での位相空間を拡張した対象である。この拡張は、多様体の上の関数の成す環 $\mathrm{C}^\infty(X)$ を用いて行なわれ nn る。

その拡張の方法を説明するためには、普通の意味での位相空間 M について知られている以下の事実を説明しなくてはならない。

定理 2.1.1 (Gel'fand)
対象をコンパクト空間、射を連続写像とする圏は対象を可換 C* 環 (定義は B.2.1 を参照)、射を*-写像とする圏と圏同値であり、コンパクト空間 X と可換 C* 環 R の関係

$$R = \mathrm{C}^\infty(\mathrm{X}) \tag{2.1}$$

はこの圏同値を与える。

この論文では、この定理についての説明は直観的なものに留める。

圏とは、大まかに言えば「数学で扱う対象」という意味である。よって定理 2.1.1 は、位相空間の位相的な情報は過不足なくその空間の上の連続関数の環の中に織り込まれている。標語的に言えば、位相空間を調べることとその上の連続関数を調べることは等価である。位相空間の上の関数環は勿論可換であるがこれを抽象的に非可換にした際に、可換な場合の位相空間の幾何学に対応するものが非可換幾何学である。数学的な圏の定義及び圏の基礎的な性質は付録 A で与える。

それ以外の非可換幾何の言葉即ち、多様体上の連続関数の成す環 (C* 環) の言葉とトポロジーの言葉の関係の辞書は以下のようになる (この論文で定義されていない言葉については [WO] を参照。また、この表はの元になる表は [WO, p24] にある。)。

[1] ここで紹介する非可換幾何学の定義は von Neumann にまでさかのぼる。

トポロジー	$\leftrightarrow$	代数
$\mathrm{C}^\infty(X)$	$\leftrightarrow$	C^* 環
距離	$\leftrightarrow$	正値汎関数
コンパクト	$\leftrightarrow$	単元を持つ (unital)
σ-コンパクト	$\leftrightarrow$	σ-utital
微分同相	$\leftrightarrow$	自己同型
開部分群	$\leftrightarrow$	イデアル
閉部分群	$\leftrightarrow$	イデアルによる商
稠密な開部分群	$\leftrightarrow$	essential ideal
コンパクト化	$\leftrightarrow$	unitalization
連続	$\leftrightarrow$	projectionless

2.2　変形量子化

物理学の文脈で実際に非可換幾何を構成する方法として、物理では多くの場合一般の幾何を変形量子化するという手法がとられる。それは、我々が観測している時空は可換であるからである。即ち、変形量子化とは簡単に言ってしまうと知られている代数をある微小なパラメータを使って少しずらすということであり、我々の時空が非可換幾何によって記述されるものであったとすると、それは可換な幾何学から少しずれた非可換幾何学によって記述されるかもしれないからである。

本節では、可換な代数の変形量子化にまつわる数学を説明する。

2.2.1　変形量子化の定義

変形量子化ではまず、可換な空間の上の連続関数の成す環 $\mathcal{A} \equiv \mathrm{C}^\infty(X)$ を考える。$\mathcal{A}_\hbar$ を $\mathcal{A}$ の Gerstenhaber の意味での変形量子化であるとする。即ち、$\mathcal{A}$ と $\mathcal{A}_\hbar$ はベクトル空間としては同型であるが積だけが変形されているものと考える。

変形量子化を定義する前に、まず Poisson 代数を定義する。

定義 2.2.1 (Poisson 代数)
$\mathcal{A}$が Poisson 代数であるとは、$f, g, h \in \mathcal{A}$として次のような性質を満たす積 $\{\cdot,\cdot\} : \mathcal{A}\times\mathcal{A} \to \mathcal{A}$ が存在することをいう。

P1 $\{\cdot,\cdot\}$ は $\mathbb{C}$ 双線型であり、

$$\{f, g\} = -\{g, f\} \tag{2.2}$$

を満たす。

P2 $\{\cdot,\cdot\}$ は Jacobi 恒等式を満たす。

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0 \tag{2.3}$$

P3 $\{,\cdot\}$ は derivation である。

$$\{f,gh\} = \{f,g\}h + g\{f,h\} \tag{2.4}$$

また、Poisson 代数の概念を用いて Poisson 多様体の概念を定義できる。

定義 2.2.2 (Poisson 多様体)
空間 X の上の関数環 $\mathrm{C}^\infty(X)$ が Poisson 代数であるとき X を Poisson 多様体という。

変形量子化は、この Poisson 代数に対して定義することができる。

定義 2.2.3 (Poisson 代数の変形量子化)
Poisson 代数 $\mathcal{A}$ の変形量子化 $\mathcal{A}_\hbar$ は次のように定義される。

D1 $\mathcal{A}$ と $\mathcal{A}_\hbar$ は $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間としては一致している。

D2 $\mathcal{A}_\hbar$ の積 $\star$ は次のように定義される。$f,g,g \in \mathcal{A}$ として

$$f \star g = fg + \sum_{n=1}^{\infty} B_n(f,g)\hbar^n \tag{2.5}$$

D3 $B_1(f,g)$ は Poisson 括弧に一致する。

$$B_1(f,g) = \{f,g\} \tag{2.6}$$

D4 $\mathcal{A}_\hbar$ の積 $*$ は、結合律

$$(f \star g) \star h = f \star (g \star h) \tag{2.7}$$

を満たす。

このようにして定義した変形量子化を $(\mathcal{A},\star)$ と表記する。

注意しなくてはならないのは、このように定義された変形量子化が存在するかどうかは自明ではないということである。

この変形量子化にはゲージ変換による同値関係を考えることができる。

定義 2.2.4 (変形量子化のゲージ変換)
変形量子化 $(\mathcal{A},\star_1)$ と $(\mathcal{A},\star_1)$ が同値であるとは、$\hbar$-線型写像 $T : \mathcal{A}[[\hbar]] \to \mathcal{A}[[\hbar]]$ で次の性質を満すものが存在することを言う。

Deq1 T には逆像 T^{-1} が存在して、

$$T = \mathrm{id}_{\mathcal{A}} + \sum_{n=1}^{\infty} T_n \hbar^n \tag{2.8}$$

と書くことができる。

Deq2 T は $(\mathcal{A}, \star_1)$ と $(\mathcal{A}, \star_2)$ を intertwine する。

$$T(f \star_1 g) = T(f) \star_2 T(g) \tag{2.9}$$

物理的な文脈では $\mathcal{A}$ は空間の上の場の成す環だったから、このゲージ変換は場の再定義と捉えることができる。

今迄は代数 $\mathcal{A}$ が Poisson 構造を持つことを仮定して議論を進めてきていたが、このゲージ変換は一般の代数で定義 2.2.3 から条件 D3 を除いて定義した一般の代数の変形量子化に対しても定義することができる。

この時、次のことが分かる [梶浦, p78∼p79]。

定理 2.2.5
一般の可換な代数の変形量子化が存在した時それは Poisson 代数の変形量子化と上で定義したゲージ変換 (物理の文脈では場の再定義) で結ばれている。

その定理を証明するためには、Hochshild コホモロジーの概念を定義しなくてはならない。

定義 2.2.6 (Hochshild 複体)
$\mathcal{A}$ を可換な代数として Hochshild 複体は Hochshild p-複体は $C_p : \overbrace{\mathcal{A} \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}}^{\text{p 個}} \to \mathcal{A}$ の直和であり、$c_p \in C_p, f_i \in \mathcal{A}$ として次で定義されるような coboundary 作用素 $d : C_p \to C_{p+1}$ を持つものである。

$$\begin{aligned}(dc_p)(f_0, f_1, \ldots, f_p) =& f_0 C(f_1, \ldots, f_p) \\ &- \sum_{q=0}^{p-1} (-1)^q c_p(f_0, \ldots, f_q f_{q+1}, \ldots, f_p) \\ &+ (-1)^{p+1} c(f_0, \ldots, f_{p-1}) f_p\end{aligned} \tag{2.10}$$

定義 2.2.7 (Hochshild コホモロジー)
Hochshild コホモロジーは Hochshild 複体から、Ker$d$／Imd で定義される。

そこで、前述の定理 2.2.5 の証明をする。一般の代数の変形量子化の定義 (2.2.3) の結合則 (D4) の $\hbar^1$ の部分を考えると、

$$fB_1(g,h) + B_1(f,gh) = B_1(f,g)h + B_1(fg,h) \tag{2.11}$$

いま、B_1 を対象な部分 B_1^+ と反対称な部分 B_1^- に分けて、更に上式での f と h の交換について対象な部分と反対称な部分に分ける。

$$\begin{aligned}A(f,g,h) \equiv& fB_1^-(g,h) - B_1^-(fg,h) + B_1^-(f,gh) - B_1^-(f,g)h = 0 \\ & fB_1^+(g,h) - B_1^+(fg,h) + B_1^+(f,gh) - B_1^+(f,g)h = 0\end{aligned} \tag{2.12}$$

であるから、B_1^+, B_1^- は Hochshild 2-cocycle になっている。ここで、$A(f,g,h) + A(g,h,f) - A(h,f,g) = 0$ より、

$$B_1^-(f,gh) = gB_1^-(f,h) + B_1^- = 0 \tag{2.13}$$

すなわち、Poisson 構造 (定義 2.2.1) の P3 が導かれた。

また、代数のゲージ変換 $(\mathcal{A}, \star) \to (\mathcal{A}, \star')$ を考えた時、$\hbar$ の 1 次の項から

$$B_1'(f,g) - B_1(f,g) = -fT_1(g) + T_1(fg) - T_1(f)g \tag{2.14}$$

となっていて、Hochshild 2-coboundary になっている。ここで、対称な Hochshild 2-cocycle は Hochshild 2-coboundary に一致しているという事実を使うと、ゲージ変換によって、B_1^+ を消すことができる。よって、B_1 は反対称である。よって Poisson 構造の条件 P1 を満たす。

さらに、(2.2.3) の結合則の $\hbar^2$ の係数の部分を見ると、

$$fB_2(g,h) + B_2(f,gh) + B_1^-(f, B_1^-(g,h)) = B_2(f,g)h + B_2(fg,h) + B_1^-(B_1^-(f,g),h) \tag{2.15}$$

であるが、また f, g について対称な部分と反対称な部分に分けると、

$$fB_2^-(g,h) - B_2^-(fg,h) + B_2^-(f,gh) - B_2^-(f,g)h = 0 \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned} fB_2^+(g,h) - B_2^+(fg,h) + B_2^+(f,gh) - B_2^+(f,g)h & \\ = B_1^-(B_1^-(f,g),h) + B_1^-(B_1^-(g,h),f) & \end{aligned} \tag{2.17}$$

で (2.17) を更に f, g, h についてサイクリックに足し合わせると、Poisson 構造の残った条件 P2

$$B_1^-(B_1^-(f,g),h) + B_1^-(B_1^-(h,f),g) + B_1^-(B_1^-(g,h),f) = 0 \tag{2.18}$$

を得る。

以上で、$B_1(f,g)$ が Poisson 構造を定義することが分かり、定理 2.2.5 を示すことができた。

2.2.2 Kontsevich の変形量子化

Kontsevich は任意の Poisson 多様体上の関数環について、変形量子化が存在することを変形量子化の具体形を求めることで証明した。

その形を説明なしに与えてしまうと、以下のような形をしている。

$$(f \star g) = fg + \sum_{n=1} \left(\sum_{\Gamma \in G_n} \omega_\Gamma B_\Gamma(f,g) \right) \hbar^n \tag{2.19}$$

$B_\Gamma(f,g), w_\Gamma$ をこれから定義する。

まず、$\{1, 2, \ldots, n, L, R\}$ という $n+2$ 個の頂点 (vertices) を持ったグラフを考える。これは以下のような性質をもったグラフである。

- 頂点 $i \in \{1, \ldots, n\}$ からはそれぞれ 2 本の矢印 (oriented edge)e_i^1, e_i^2 が出ていて、$\{1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n, L, R\}$ に向かっている。この 2 本の矢印の向かう先をそれぞれ $v^1(i), v^2(i)$ とする。

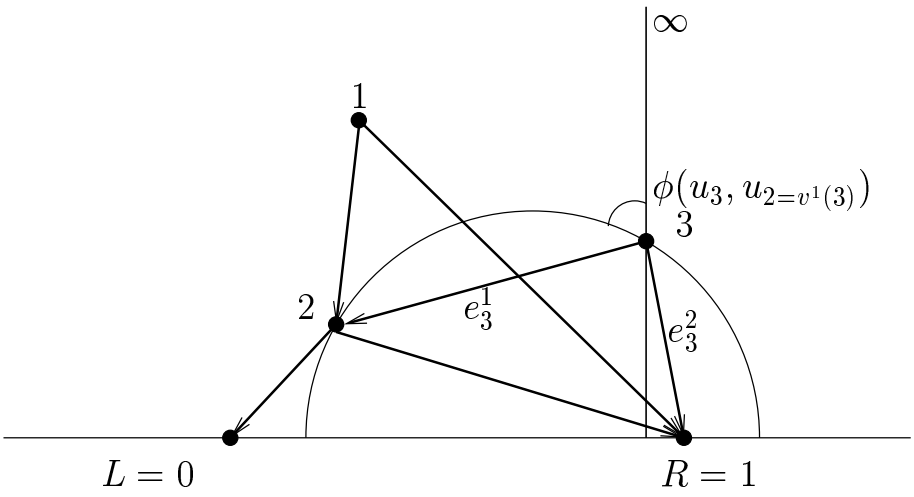


図 2.1: $n = 3$ の場合のグラフの例

- このグラフでは 2 本の矢印が一致することはない。

このようなグラフの全体が G_n である。

このとき $\frac{i}{2}\theta_{\mu\nu}$ を Poisson 括弧を定義するような反対称行列とする。($\mu\nu$ は局所座標の足) この時 $B_\Gamma(f,g)$ は次のように定義される。

$$B_\Gamma(f,g)(x) = \prod_{i=1}^{n} \partial_{\mu_i}^{x_{v^1(i)}} \partial_{\nu_i}^{x_{v^2(i)}} \prod_{i=1}^{n} \frac{i}{2}\theta(x_i)^{\mu_i\nu_i} f(x_L)g(x_R)\Big|_{x_1=\cdots=x_n=x_L=x_R=x} \tag{2.20}$$

つぎに、ω_Γ は次のようにして定義される。

今、グラフの各頂点を上半平面に配置する。この時、頂点 i の複素座標を z_i とし、頂点 L の複素座標を 0 頂点 R の複素座標を 1 とする。

上半平面の 2 点を結ぶ測地線は実軸 $\Im(z) = 0$ と垂直に交わる円弧であったことを思い出して、2 点 w, z と無限円点 ∞ の間の成す角度を $\phi(w,z)$ とすれば、

$$\phi(w,z) = \mathrm{Arg}\left(\frac{z-w}{z-\bar{w}}\right) = \frac{1}{2i}\ln\left(\frac{(z-w)(\bar{z}-w)}{(\bar{z}-\bar{w})(z-\bar{w})}\right) \tag{2.21}$$

この ϕ を用いて ω_Γ を定義する。$C_n(H) \equiv \{u \in H^n, u_i \neq u_j\}$ として、

$$\omega_\Gamma = \frac{1}{(2\pi)^{2n} n!} \int_{C_n(H)} \bigwedge_{i=1}^{n} d\phi(u_i, u_{v^1(i)}) \wedge d\phi(u_i, u_{v^2(i)}) \tag{2.22}$$

で定義される。

2.2.3 Moyal 積

Moyal 積は変形量子化の 1 つの例になっている。具体的には、θ が空間のあらゆる点で一定あるときに対応している。このとき B_Γ は全ての矢印のペアが L,R か R,L に行くものだけが残る。ω_Γ は結局角度の積分に帰着する。角度 $\phi(u,0),\phi(u,1)$ の値域は $[0,\pi]$ であり、$z=x+iy$ として $dzd\bar{z}=2dxdy$ であるから、

$$\sum_{\Gamma\in G_n} B_\Gamma(f,g) = 2^n(\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\partial^y_\mu\partial^z_\nu)^n f(y)f(z)\Big|_{y=z=x} \tag{2.23}$$

$$\omega_\Gamma = \frac{1}{(2\pi)^{2n}n!}\left(2\pi^2\right)^n = \frac{1}{2^n n!} \tag{2.24}$$

となる。結局、変形量子化した積 $f\star g$ は、Moyal 積

$$f\star g = fg + \sum_n^\infty \frac{1}{n!}(\frac{i}{2}\hbar\theta^{\mu\nu}\partial^y_\mu\partial^z_\nu)^n f(y)f(z)\Big|_{y=z=x} \tag{2.25}$$

$$= \mathrm{e}^{\frac{i}{2}\hbar\theta^{\mu\nu}\partial^y_\mu\partial^z_\nu} f(y)f(z)\Big|_{y=z=x} \tag{2.26}$$

になる。

2.3 非可換的微分幾何

素粒子物理学では微分幾何学が大きな役割を果たしている。従って、微分幾何学の非可換版を考えることは、非可換幾何を物理学に応用する上で非常に重要である。この節では、抽象的に定義された即ち、一般の C* 代数 $\mathcal{A}$ しか与えられていない時に、如何にして微分幾何学に対応するような非可換微分幾何学を定義するかを説明する。

尚、この章では C* 環にまつわる概念を多用するが、それらの概念の詳細については付録の B.2.1 小節を参照。

2.3.1 射影加群

一般の幾何学でのベクトル束に対応するものとして、非可換幾何学には射影加群という概念がある。ベクトル束に $C^\infty(X)$(X:ベースの空間) をかける、即ち各点 x のファイバーであるベクトル空間を $f(x)(f\in C^\infty(X))$ 倍するという操作ができるように、射影加群も左-$\mathcal{A}$ の作用を持っている。

定義 2.3.1 (射影 $\mathcal{A}$ 加群)
有限生成左 $\mathcal{A}$ 加群 $\mathcal{E}$ が次の等価な 3 つの性質を持つとき $\mathcal{E}$ を射影 (左)$\mathcal{A}$ 加群という。

PM1 左 $\mathcal{A}$ 加群の全射 $\mathcal{A}$ 準同形 $\alpha:\mathcal{M}\to\mathcal{N}$ が与えられた時、任意の $\mathcal{A}$ 準同形 $\rho:\mathcal{E}\to\mathcal{N}$ に対して、$\mathcal{A}$ 準同形 $\lambda:\mathcal{E}\to\mathcal{M}$ という写像が存在して $\alpha\circ\lambda=\rho$、即ち次の図式を可

換にする。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \xrightarrow{\rho} & \mathcal{N} \\ & \searrow^{\lambda} & \uparrow{\scriptstyle \alpha} \\ & & \mathcal{M} \end{array} \tag{2.27}$$

PM2 任意の全射 $\mathcal{A}$ 準同形 $\rho : \mathcal{M} \to \mathcal{E}$ に対して、$\mathcal{A}$ 準同形 $\lambda : \mathcal{E} \to \mathcal{M}$ で

$$\rho \circ \lambda = \mathrm{id}_{\mathcal{E}} \tag{2.28}$$

を満たすものが存在する。

PM3 $\mathcal{E}$ は $\mathcal{A}$ 上のある自由加群の直和因子である。即ち、或る自由 $\mathcal{A}$ 加群 $\mathcal{F}$ と $\mathcal{A}$ 加群 $\mathcal{E}'$ があって、

$$\mathcal{F} = \mathcal{E} \oplus \mathcal{E}' \tag{2.29}$$

等価性の証明.

PM1→PM2: PM1 で $\mathcal{N} = \mathcal{E}, \rho = \mathrm{id}_{\mathcal{E}}$ とすれば λ は 2.28 の性質を満たす。

PM2→PM3: 今、$\mathcal{E}$ は有限生成であるから、必ず全射 $\mathcal{A}$ 準同形 $\rho : \mathcal{A}^N \to \mathcal{E}$ が存在する。ここで PM2 を適用すると $\lambda :\to \mathcal{A}^N$ が存在するが、$\mathcal{E}$ は λ によって、自由 $\mathcal{A}$ 加群 $\mathcal{A}^N$ の直和因子になっている。

PM3→PM1: 自由 $\mathcal{A}$ 加群に対しては PM1 が成立する。即ち、$(0, \dots, a_i, \dots) \mapsto n_i (\in \mathcal{N})$, $m_i (\in \mathcal{M}) \mapsto n_i (\in \mathcal{N})$ とした時に、$\lambda : (0, \dots, a_i, \dots) \mapsto m_i$ と λ を定義すれば良い。自由加群が PM1 を満たす為にはその全ての直和因子について PM1 が成立しなくてはならない。

□

注目すべきは、最後の定義である。これは、トポロジーでベクトル束について良く知られている定理 (定理 B.1.2) の非可換幾何学版になっている。即ち、可換な空間 X 上の自明なベクトル束は $\mathrm{C}^\infty(X)$ の直積 (即ち自由加群) になっている。その自由加群の直和因子になっているというのは、定理 B.1.2 を考えれば、まさにベクトル束に期待される性質である。

今、定義 2.3.1 の PM1 で全射 $\mathcal{A}$ 準同形 $\alpha : \mathcal{A}^N \to \mathcal{E}$ を考えると、

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \xrightarrow{\mathrm{id}_{\mathcal{E}}} & \mathcal{E} \\ & \searrow^{\lambda} & \uparrow{\scriptstyle \alpha} \\ & & \mathcal{A}^N \end{array} \tag{2.30}$$

を可換にするような λ が存在する。このとき、$\mathcal{A}^N$ の自己準同形

$$p \equiv \lambda \circ \alpha \in \mathrm{End}_{\mathcal{A}} A^N \tag{2.31}$$

を考えることができる。この p は冪等即ち $p^2 = p$ である。この p は $\mathcal{A}^N$ を分解させる。

$$\mathcal{A}^N = p\mathcal{A}^N + (\mathrm{id}_{\mathcal{A}^N} - p)\mathcal{A}^N \tag{2.32}$$

また、

$$p\mathcal{A}^N \cong \mathcal{E} \tag{2.33}$$

なので冪等な射影演算子 p で射影左 $\mathcal{A}$ 加群を特徴付けることができる。即ち、ベクトル束の非可換版は $\mathcal{A}^N$ に作用する射影演算子であるということを言うことができる。

2.3.2 非可換微分形式 (universal differential form)

可換な空間の上の微分形式と同じようにして、乗法単位元を持つ C* 環 $\mathcal{A}$ に対する微分形式 $\Omega\mathcal{A}$ を定義する事ができる。$\Omega\mathcal{A}$ は graded な代数、即ち p-形式の直和

$$\Omega\mathcal{A} = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \Omega^p\mathcal{A} \tag{2.34}$$

であり、$\Omega^0\mathcal{A} = \mathcal{A}$ である。次に、$\Omega^1\mathcal{A}$ を定義したいのだが、その前に外微分の一般化 δ を導入しなくてはならない。δ は外微分の一般化なので以下のような性質を持つもの (derivation) として定義される。

$$\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b) \qquad (a, b \in \mathcal{A}) \tag{2.35}$$

$$\delta(\alpha a + \beta b) = \alpha\delta(a) + \beta\delta(b) \qquad (a, b \in \mathcal{A} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}) \tag{2.36}$$

このような δ を定義すると、1 階微分形式 $\omega \in \Omega^1\mathcal{A}$ を次のように定義することができる。

$$\omega = \sum_i a_i \delta(b_i) \qquad (a_i, b_i \in \mathcal{A}) \tag{2.37}$$

ここで $\Omega^1\mathcal{A}$ は普遍的に定義されていることが言える。

定理 2.3.2
($\Omega^1\mathcal{A}$ の普遍性) $\mathcal{M}$ を両側 $\mathcal{A}$ 加群として、$\Delta : \mathcal{A} \to \mathcal{M}$ が式 (2.35),(2.36) を満たすような写像 (derivation) とする。
このとき以下の図式を可換にするような $\rho_\Delta : \Omega^1\mathcal{A} \to \mathcal{M}$ が唯一つ存在する

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{\delta} & \Omega^1\mathcal{A} \\ & \searrow^{\Delta} & \downarrow{\scriptstyle \rho_\Delta} \\ & & \mathcal{M} \end{array} \tag{2.38}$$

証明. まず、$\rho : \mathcal{A} \to \mathcal{M}$ が存在するとき、$\rho \circ \delta$ は $\mathcal{M}$ に値を取る derivation になっている。逆に $\Delta : \mathcal{A} \to \mathcal{M}$ が derivation であるとすると、

$$\rho_\Delta(\delta(a)) = \Delta(a) \tag{2.39}$$

によって左 $\mathcal{A}$ 準同形写像 ρ_Δ を定義することができる。この定義は、明らかに唯一つのものである。
あとは、ρ_Δ が右準同形写像であることを言えばよい。$g \in \mathcal{A}$ として

$$\begin{aligned}\rho_\Delta((\sum_i a_i\delta(b_i))g) &= \rho_\Delta(\sum_i a_i\delta(b_ig)) - \rho_\Delta(\sum_i a_ib_i\delta(g)) \\ &= \sum_i a_i(\Delta(b_ig) - b_i\Delta(g)) \\ &= \sum_i a_i\Delta(b_i)g \end{aligned} \tag{2.40}$$

であるから右準同形である。 □

次に、高次の $\Omega^p\mathcal{A}$ を定義する。

$$\Omega^p\mathcal{A} \equiv \Omega^1\overbrace{\mathcal{A}\cdots\Omega^1\mathcal{A}}^{p\text{ 個}} \tag{2.41}$$

ここで、式 (2.35) より

$$(a_0\delta b_0)(a_1\delta b_1) = a_0\delta(b_0a_1)\delta(b_1) \tag{2.42}$$

であることを考慮すると、$\Omega^p\mathcal{A}$ の元 ω は以下のように書ける。

$$\omega = a_0\delta a_1\delta a_2\cdots\delta a_p \tag{2.43}$$

定義から $\Omega\mathcal{A}$ は両側 $\mathcal{A}$ 加群である。

定義 2.3.3 ($\mathcal{A}$ の微分形式)
$\mathcal{A}$ 上の微分形式 $\Omega\mathcal{A}$ は式 (2.37) と式 (2.41) によって定義される p 形式の直和であり、$(\Omega\mathcal{A}, \delta)$ と表記する。

p-形式と q-形式の積は、$(p+q)$-形式になる。つまり、また式 (2.35) を繰り返し使うことによって、

$$\begin{aligned}(a_0\delta a_1\cdots\delta a_p)(a_{p+1}\delta a_{p+2}\cdots\delta_{p+q+1}) =& (-1)^p a_0a_1\delta a_2\cdots\delta a_{p+q+1} \\ &+ \sum_{i=1}^{p}(-1)^{p-i}a_0\delta a_1\cdots\delta(a_ia_{i+1})\cdots\delta a_{p+q+1}\end{aligned} \tag{2.44}$$

となる。また、明らかに $\Omega\mathcal{A}$ の元は両側 $\mathcal{A}$ 加群である。更に、δ は Ω^p から Ω^{p+1} への写像を定義する。

$$\delta(a_0\delta a_1\cdots\delta a_p)=\delta a_0\delta a_1\cdots\delta a_p \tag{2.45}$$

$\Omega^1\mathcal{A}$ の時と同じように微分形式 $\Omega\mathcal{A}$ は普遍性を持っている。すなわち、

定理 2.3.4 ($\Omega\mathcal{A}$ の普遍性)
(Γ,Δ) を graded な微分形式 $\Gamma=\bigoplus_n\Gamma^n$ として、$\rho:\mathcal{A}\to\Gamma^0$ を乗法単位元を持つ代数の環準同形写像とする。この時 ρ の拡張 $\tilde{\rho}:\Omega\mathcal{A}\to\Gamma$ で次の図式を可換にするものが存在する。

$$\begin{array}{ccc}\Omega^p\mathcal{A} & \xrightarrow{\tilde{\rho}} & \Gamma^p \\ {\scriptstyle\delta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\Delta} \\ \Omega^{p+1}\mathcal{A} & \xrightarrow{\tilde{\rho}} & \Gamma^{p+1}\end{array} \tag{2.46}$$

証明. $\tilde{\rho}$ を次のようにして定義する。

$$\tilde{\rho}(a_0\delta a_1\delta a_2\cdots\delta a_p)\equiv\rho(a_0)\Delta(\rho(a_1))\cdots\Delta(\rho(a_p)) \tag{2.47}$$

すると、この写像は左 $\mathcal{A}$ 準同形写像であるから唯一の写像である。さらに、

$$\begin{aligned}(\tilde{\rho}\circ\delta)(a_0\delta a_1\delta a_2\cdots\delta a_p)&=\tilde{\rho}(\delta a_0\delta a_1\cdots\delta a_p)\\&=\Delta(\rho(a_0))\Delta(\rho(a_1))\cdots\Delta(\rho(a_p))\\&=\Delta(\rho(a_0)\Delta(\rho(a_1))\cdots\Delta(\rho(a_p)))\\&=(\Delta\circ\rho)(a_0\delta a_1\cdots\delta a_p)\end{aligned} \tag{2.48}$$

より、この $\tilde{\rho}$ で図式 (2.46) は可換になる。 □

つまり、$\mathcal{A}$ から定義されるどのような微分形式を調べたい時でも $\Omega\mathcal{A}$ を調べればそこからその微分形式の性質を調べることができる。

しかし、その一方で、$\Omega\mathcal{A}$ 自体は、自明なコホモロジーを持っていて研究の対称として面白くない。

定理 2.3.5
非可換微分形式の δ に関するコホモロジー、即ち

$$H_p\equiv\mathrm{Ker}(\delta:\Omega^p\mathcal{A}\to\Omega^{p+1}\mathcal{A})/\mathrm{Im}(\delta:\Omega^{p-1}\mathcal{A}\to\Omega^p\mathcal{A}) \tag{2.49}$$

は、

$$H_p=\begin{cases}0 & \text{for } n\geq 1\\ \mathbb{C} & \text{for } p=0\end{cases} \tag{2.50}$$

である。

2.3.3　接続 (universal connection)

微分形式が定義できたところで、接続 (universal connection) を定義する。

定義 2.3.6 ($\mathcal{A}$ の接続 (universal connection))
右 $\mathcal{A}$ 加群 $\mathcal{E}$ に対する接続は、次のように定義される $\mathbb{C}$ 線型写像

$$\nabla : \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^p \mathcal{A} \to \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^{p+1} \mathcal{A} \tag{2.51}$$

で、以下のような Leibniz 則を満すものである。

$$\nabla(\omega\rho) = (\nabla\omega)\rho + (-1)^p \omega\delta\rho \qquad (\forall \omega \in \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^p \mathcal{A},\ \rho \in \Omega\mathcal{A}) \tag{2.52}$$

この定義は、微分形式 $\Omega\mathcal{A}$ 代わりに普通の微分形式、右 $\mathcal{A}$ 加群 $\mathcal{E}$ の代わりにベクトル束、テンソル積の $\otimes_{\mathcal{A}}$ の代わりに $\otimes_{\mathbb{C}}$ を持って来れば普通の可換な空間の上での接続の定義と同じである。

接続を定義したところで、曲率に相当するものを定義する。

定理 2.3.7
$\nabla^2 = \nabla \circ \nabla : \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^p \mathcal{A} \to \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^{p+2} \mathcal{A}$ は右 $\omega\mathcal{A}$ 線型写像である。

証明.

$$\begin{aligned} \nabla^2(\omega\rho) &= \nabla((\nabla\omega)\rho + (-1)^p \delta\rho) \\ &= (\nabla^2\omega)\rho + (-1)^{p+1}(\nabla\omega)\delta\rho + (-1)^p(\nabla\omega)\delta\rho + \omega\delta^2\rho \\ &= (\nabla^2)\rho \end{aligned} \tag{2.53}$$

□

曲率はこの ∇^2 の $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^0 \mathcal{A} = \mathcal{E}$ への制限である。即ち、

定義 2.3.8 (曲率)

$$\theta = \nabla^2 \Big|_{\mathcal{E}} : \mathcal{E} \to \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^2 \mathcal{A} \tag{2.54}$$

これも、接続の定義の後に説明したような置き換えによって普通の可換な空間の上の曲率の定義と一致している。この曲率は右 $\mathcal{A}$ 線型である。

今迄は右 $\mathcal{A}$ 加群 $\mathcal{E}$ が射影 $\mathcal{A}$ 加群であることを使わないできたが、ここで $\mathcal{E}$ が射影加群であったことを使うと、$\mathcal{E}$ は自由 $\mathcal{A}$ 加群の直和因子だったので、$\mathcal{E} \to \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega\mathcal{A}$ は $\Omega\mathcal{A}$ に値を取る行列即ち、$\mathrm{End}_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega\mathcal{A}$ と思うことができる。特に曲率 θ は $\mathrm{End}_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^2\mathcal{A}$ と見ることができる。更に、接続 ∇ の $\mathcal{E}$ への制限は $\mathrm{End}_{\mathcal{A}}\mathcal{E}$ の接続を定義する。

定義 2.3.9 ($\mathrm{End}_{\mathcal{A}}\mathcal{E}$ の接続)
$\mathrm{End}_{\mathcal{A}}\mathcal{E}$ の接続 $[\nabla, \cdot] : \mathrm{End}_{\mathcal{A}}\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^p\mathcal{A} \to \mathrm{End}_{\mathcal{A}}\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^{p+1}\mathcal{A}$ は ∇ を用いて以下のように定義される。

$$[\nabla, \alpha] \equiv \nabla \circ \alpha - \alpha \circ \nabla \qquad (\alpha \in \mathrm{End}_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^p\mathcal{A}) \tag{2.55}$$

この接続の定義もまた、可換な空間の上の行列束の接続の定義そのものである。この定義の下で、接続 θ は Bianchi 恒等式を満たす。

定理 2.3.10 (Bianchi 恒等式)

$$[\nabla, \theta] = 0 \tag{2.56}$$

証明. θ は ∇^2 の $\mathcal{E}$ への制限だったから、$[\nabla, \cdot]$ の定義 (2.55) より、

$$\nabla^3 - \nabla^3 = 0 \tag{2.57}$$

□

最後に、接続の存在について議論する。射影加群は常に接続を持っている。特に $\mathcal{E}$ が自由 $\mathcal{A}$ 加群である時は、$\mathcal{E} \cong \mathcal{A}^N$ なので

$$\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega \cong (\Omega\mathcal{A})^N \tag{2.58}$$

すると、接続 ∇_0 を

$$\nabla_0 \equiv (\delta, \delta, \dots, \delta) \tag{2.59}$$

と定義すると式 (2.52) を満たし接続になっている。

$\mathcal{E}$ が一般の射影加群である時には、$p : \mathcal{A}^N \to \mathcal{E}$ を射影加群を特徴付ける射影演算子 (2.31) として $\lambda : \mathcal{E} \to \mathcal{A}$ を包含写像とすると、合成写像

$$\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^p\mathcal{A} \xrightarrow{\lambda} (\Omega^p\mathcal{A})^N \xrightarrow{\nabla_0} (\Omega^{p+1}\mathcal{A})^N \xrightarrow{p} \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^{p+1}\mathcal{A} \tag{2.60}$$

によって、$\mathcal{E}$ に関する接続 ∇_0 を定義できる。実は、接続が存在するのは右加群 $\mathcal{E}$ が射影加群である時だけであることが言える。

定理 2.3.11
右加群 $\mathcal{E}$ が射影加群である時、またその時に限って接続が存在する。

証明.

$$j : \eta\delta a (\in \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^1\mathcal{A}) \mapsto \eta \otimes a - \eta a \otimes 1 (\in \mathcal{E} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{A}) \tag{2.61}$$

$$m : \eta \otimes a (\in \mathcal{E} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{A}) \mapsto \eta a (\in \mathcal{E}) \tag{2.62}$$

なる写像から、次のような完全系列を作る。

$$0 \longrightarrow \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^1\mathcal{A} \xrightarrow{j} \mathcal{E} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{A} \xrightarrow{m} \mathcal{E} \longrightarrow 0 \tag{2.63}$$

すると、$s_0 : \eta \in \mathcal{E} \mapsto \eta \otimes 1_{\mathcal{A}} \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{A}$ を考えると、$m \circ s_0 = \mathrm{id}_{\mathcal{E}}$ なので、この完全系列は分解する。このような完全系列の分解の全体を考えるとそれは、$\mathcal{E}$ から $\mathcal{E} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{A}$ の部分空間

$j(\mathcal{E}\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{A})$ への $\mathcal{A}$ 線型写像の空間となる。つまり、任意の $s:\mathcal{E}\to\mathcal{E}\otimes\mathcal{A}\,(m\circ s=id_{\mathcal{E}})$ に対して、線型写像 $\nabla:\mathcal{E}\to\mathcal{E}\otimes_{\mathcal{A}}\Omega^1\mathcal{A}$ が次のようにして定まる。

$$s=s_0+j\circ\nabla \tag{2.64}$$

すると、

$$s(\eta a)-s(\eta)a=\eta a\otimes 1-\eta\otimes a+j(\nabla(\eta a))-j(\nabla(\eta))a=j(\nabla(\eta a)-\nabla(\eta)a-\eta\delta a) \tag{2.65}$$

であり、j は単写であるから、s が右 $\mathcal{A}$ 写像である時に限って ∇ は接続となる。しかし、$\mathcal{E}\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{A}$ は自由 $\mathcal{A}$ 加群であるから、$\mathcal{E}$ は射影演算子 $p=s\circ m$ によって定義される射影加群になっている。 □

第3章　非可換幾何の物理への応用

この章では、非可換幾何を場の理論に適用した例を紹介していく。場の理論は、弦理論の低エネルギー有効理論として現われるが、後に述べるように、場の理論を非可換化した非可換場の理論も弦理論の別の真空を選んだ時の低エネルギー有効理論として自然に現われる。

また、歴史的には場の理論は弦理論が登場するはるか前から存在している。場の理論は現在の加速器が達成できるエネルギースケールの物理を非常に良い精度で記述しており、全く抽象的に構成されている弦理論が物理として認知されているのも、その低エネルギー有効理論が場の理論であること依るところが大きい。実際、超弦理論の真空をうまく選ぶことで標準模型を出すことができる。[CHSW] [Wit3][AIQU]。

しかし、場の理論と重力を統一しようとすると、決定的な困難として重力の作用が繰り込み不可能であるという事実が伸し掛かってくる。3.1 節で説明するように、非可換幾何はその困難を克服する為の有力な道具であると考えることができる。弦理論が重力を含みながら標準模型を低エネルギー有効理論として持ち得たのは、第 4 章の 4.1 節に紹介される Space-Time Uncertainty や行列模型などによって示唆されるように本質的に非可換幾何的な性質を持っているためだと考えられる。

そうした意味で、非可換空間上の場の理論を考えることは、場の理論に重力を含むように拡張する為に簡単な非可換幾何的性質を加えることを考るという意味で、弦理論を考えるのと同じように重要であると考えられる。

3.1　非可換性導入の動機

一般の幾何を変形して得られた非可換幾何に於いては、点がぼやけるという解釈ができることが知られている。これは、非可換空間上の場の理論では自然に紫外のカットオフが入るということを示唆している。このことは、重力を含めた物理の統一的な描像を得るの為の重要なヒントを与え得るということを示している。

3.1.1　可換時空上での量子重力理論の障害

重力を含む理論ではラグランジアンのなかに必然的に irrelevant な項が入って繰り込み不可能になる。即ち Einstein-Hilbert 作用は、

$$S_{\mathrm{E-H}} = \frac{1}{8\pi G}\int d^4x\,\sqrt{\det g}R \tag{3.1}$$

であり、Newton の重力定数 G は $[\mathrm{mass}]^{-2}$ の次元を持っている。この作用を用いて場の量子論をやることができれば、物理の統一的な描像を得ることが出来る筈である。しかし、この理論を摂動論で考えるとして、高次の複雑なダイアグラムを考えようとすると、そのループの発散をキャンセルする為に無限個のカウンタータームを入れなくてはいけないという困難が発生する。

3.1.2　非可換化による量子重力理論の障害の解消

この節の始めに述べた通り、時空を変形量子化によって非可換化するということは点をぼやけさせるという解釈ができる。正確には変形量子化によって時空は、最小の面積を持つ。これはまさに、古典力学と量子力学の対応そのままである。事実、量子力学でいう量子化とは相空間の Poisson 構造を Planck 定数を量子化のパラメータとして変形するということであり、時空の変形量子化も時空に Poisson 構造を入れて量子化をするということである。両者は、数学としては全く同一のことをしている。

重要なのは、時空が最小のスケールを持っていてそれ以上小さなスケールに対して自然なカットオフが入ることが期待されることである。これはあくまでも期待である。実際には、最も単純なやり方で非可換性を入れてもダイアグラムの発散は起きてしまう。これは以降の 3.3 節で見ていく。

3.2　非可換場の理論の構成

先にも述べた通り物理では変形量子化によって、時空の非可換性を導入することが多い。(勿論、例外もある。) これは、少くとも我々のエネルギースケールでは時空は可換であり、非可換幾何が現実の物理を記述していたとしても、それは高いエネルギースケールで少し非可換性が現われるのだと考えられるからである。

3.2.1　非可換場の理論

非可換幾何の物理での実現は主に変形量子化の方法を使ったものであるがこれには主に 2 通りの方法がある。一方の方法は場の理論を変形量子化するものであり、もう一方は弦理論に B 場のバックグラウンドを入れることにより非可換幾何を実現するものである。前者の方法を、「非可換場の理論」と呼ぶ事にする。現在のところ、非可換場の理論での時空の変形量子化の手続きは、主に時空の座標の演算子のなす代数を変形量子化することでなされている。変形量子化を定める Poisson 構造が全空間で一定であるときは以下のような形をしている。

$$[x^\mu, x^\nu] = i\hbar\theta^{\mu\nu} \tag{3.2}$$

これを非可換場の理論の文脈では、$\hbar$ を省いて、

$$[x^\mu, x^\nu] = i\theta^{\mu\nu} \tag{3.3}$$

と書くことが多いので以下この章ではこの記法を用いることにする。

3.2.2 θ が一定値の場合

非可換性が時空の各点で一定の場合は、2.2.3 小節で説明したように場の理論の変形量子化の手続きそのものは、ラグランジアンに現れる関数の積を Moyal 積に置き換えるという単純なものである。

$$f(x)g(x) \to f \star g(x) \tag{3.4}$$

しかし、この理論の摂動計算 [RS][MRS] や繰り込み可能性については自明ではない。ϕ^4 理論については 2-loop までのオーダーで繰り込みが可能であることが確かめられている [ABK]。

ここで留意すべきは、非可換空間上のゲージ理論[1] を構成する際には、ゲージ変換も Moyal 積で書く必要があるという点である。すなわち、

$$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \lambda + i[A, \lambda]_\star \tag{3.5}$$

と書かなければならない。興味深いことに、非可換ゲージ理論は場の再定義で可換ゲージ理論即ち、可換な空間の上のゲージ理論と等価であることが分かっている。この点については 3.4.4 小節で説明する。

3.2.3 θ が一定値ではない場合

θ が一定値でない場合は難しいのであまり研究されていない。しかし抽象的には、位置に依存する一般の θ について、即ち一般の Poisson 多様体について Kontsevich の変形量子化公式 (2.19) [Kon] を用いて場の理論を構成することができる。

さらに、θ が一定値ではない時にゲージ理論を構成する場合は、ゲージ変換を上手く定義できるかが自明ではないので更に難しいが、一定ではない θ に対応するゲージ理論を構成する試みがなされている [AK2] 。

3.3 非可換場の理論の摂動論

非可換場の理論での摂動論は主に θ が一定の場合のみが研究されているので Seiberg らの仕事 [MRS][RS] に従って θ が一定の場合のみを考える事にする。

[1] この論文では以降非可換ゲージ理論という言葉を用いるが、勿論ゲージ群が非可換であるという意味ではない。

先ずは、d 次元のスカラー場の理論で考えることにする。さらに一定な非可換性

$$[x^\mu, x^\nu] = i\theta^{\mu\nu} \tag{3.6}$$

を導入する。但しこの非可換性は、空間的方向同士に限るとする。すなわち

$$\theta^{0\mu} = 0 \tag{3.7}$$

この空間の非可換性を導入することは空間上の場の成す環を変形することと同じである。この変形によって場の積が普通の積から Moyal 積になる。

$$(\phi_1 \star \phi_2)(x) = \mathrm{e}^{\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\partial^y_\mu \partial^z_\nu} \phi_1(y)\phi_2(z)\Big|_{y=z=x} \tag{3.8}$$

ラグランジアンの中の相互作用項を可換時空の上での相互作用項と比較すると、

$$\int d^d\phi^n \to \int d^d \overbrace{\phi \star \cdots \star \phi}^{\text{n 個}} \tag{3.9}$$

のようになる。すると、非可換時空の場の理論でのファインマンダイアグラムを計算を可換時空でのファインマンダイアグラムの計算と比較すると、非可換時空では (3.9) の相互作用項に対応するバーテックスの関係を求めると、位相の寄与が加わることが分かる。$k \times l$ を

$$k \times l \equiv k_\mu \theta^{\mu\nu} l_\nu \tag{3.10}$$

の略記とすれば、Moyal 積の結合性を用いて、

$$\begin{aligned} V_{\text{非可換}}(k_1, \ldots, k_n) &= \phi_1(k_1) \star (\phi_2(k_2) \star (\phi_3(k_3) \cdots \star (\phi_n(k_n)) \cdots)) \\ &= \phi_1(k_1)(\phi_2(k_2) \star (\phi_3(k_3) \star (\phi_4(k_4) \cdots \star (\phi_n(k_n)) \cdots)))\mathrm{e}^{-\frac{i}{2}\sum_{i\geq 2} k_1 \times k_i} \\ &= \cdots\cdots \\ &= V_{\text{可換}}(k_1, \ldots, k_n) \times \mathrm{e}^{-\frac{i}{2}\sum_{i<j} k_i \times k_j} \end{aligned} \tag{3.11}$$

この性質を用いて非可換場の理論の計算を行なうと、非可換場の理論の摂動計算に現れるファインマンダイアグラムはプラナーダイアグラムとノンプラナーダイアグラムの 2 種類に分類することができることが知られている。まずそれぞれの性質について見る。

3.3.1　プラナーダイアグラム

プラナーなダイアグラムとは、2 次元の平面に投影した際に交叉するリンクを持たないダイアグラムのことである。このようなダイアグラムのバーテックスへの非可換性から来る位相の寄与を計算する為に次のようなテクニックを用いる。ダイアグラムがこのような性質をもつ時、ダイアグラムを 2 重線のダイアグラムでかつループが交わらないように書く事ができる (図 3.2)。この 2 重線の線の 1 本 1 本に運動量を割り振って、2 重線の 2 本の線の運動

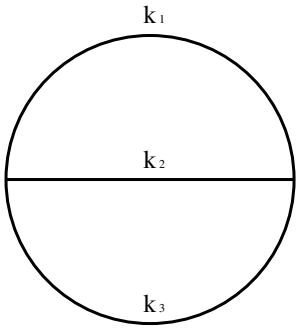


図 3.1: もとのダイアグラム

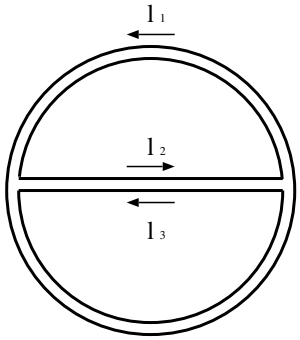


図 3.2: 2 重線化したダイアグラム

量の合計がリンクを 2 重にする前の運動量になるようにする。すなわち、上の図 3.1 の例に於いては

$$\begin{cases} \vec{k}_1 = \vec{l}_1 - \vec{l}_2 \\ \vec{k}_2 = \vec{l}_2 - \vec{l}_3 \\ \vec{k}_3 = \vec{l}_3 - \vec{l}_1 \end{cases} \tag{3.12}$$

のようにして図3.2 を書くことができる。すると、各バーテックスの位相の寄与は $\vec{k}_i$ をバーテックスに入って来るリンクの運動量とすると (添字は半時計回りにふる)、

$$\begin{aligned} -\frac{i}{2}\sum_{i<j}\vec{k}_i \times \vec{k}_j &= -\frac{i}{2}\sum_{i<j}(\vec{l}_{i+1} - \vec{l}_i) \times (\vec{l}_{j+1} - \vec{l}_j) \\ &= -\frac{i}{2}\sum_{i}(\vec{l}_{i+1} - \vec{l}_i) \times (\vec{l}_n - \vec{l}_{i+1}) \\ &= -\frac{i}{2}\left(\vec{l}_1 \times \vec{l}_2 + \cdots + \vec{l}_{n-1} \times \vec{l}_n + \vec{l}_n \times \vec{l}_1\right) \end{aligned} \tag{3.13}$$

のように書くことができる。$(\vec{l}_{i+1} - \vec{l}_i)$ は各バーテックスのリンクの運動量に相当する。この寄与が各バーテックスについて存在することを考えると、各リンクの両端のバーテックスで位相の寄与が相殺し合うので結局プラナーなダイアグラムに対しては時空の非可換化による位相の寄与は無いと結論付けられる。

3.3.2 ノンプラナーダイアグラム

ノンプラナーなダイアグラムの場合バーテックスではない交叉するリンクが存在する。ノンプラナーなダイアグラムへの、非可換性による位相の寄与を計算する場合はテクニックとして、交叉している所をバーテックスと見做してプラナーなダイアグラムに置き換える。この時、新たに加わったバーテックスからの寄与は、$\mathrm{e}^{-i\vec{k}_1\times\vec{k}_2}$ である。プラナーなダイアグラム全体の位相の寄与は 0 だったので、ノンプラナーなダイアグラムへの位相の寄与は各々の

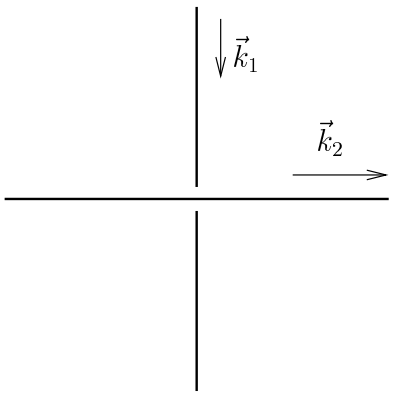


図 3.3: 交叉したダイアグラム

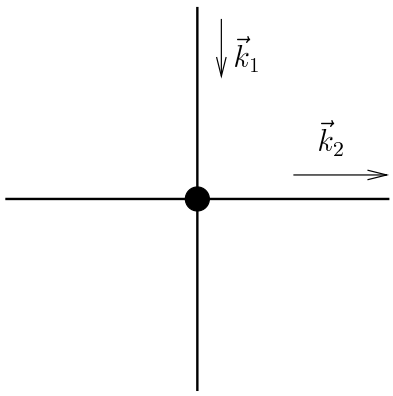


図 3.4: 交叉をバーテックスとする。

交叉当り

$$\mathrm{e}^{i\vec{k}_1\times\vec{k}_2} \tag{3.14}$$

となる。

さらに、ノンプラナーなダイアグラムの場合リンクを交叉させる方法をどうするかにダイアグラムが依存しないことをチェックしておく必要がある。このことは簡単に確かめることができる。即ち、リンクを交叉させる位置を変化させても各バーテックスで運動量は保存しているのでダイアグラムの位相はリンクの交叉のさせ方に依らない。このことは、Felder らの変形量子化の方法 [CF] で経路積分から非可換場の理論がうまく定義できているという事実からも予想できることである。

3.3.3　4 次元 ϕ^4 理論の 1-ループ計算

以上の事実を用いて、4 次元 ϕ^4 理論の 2 点関数を 1-ループのオーダーで計算する。考える理論のラグランジアンは次で与えられる。

$$\mathrm{S} = \int d^4x \left(\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{1}{4!}g^2 \phi\star\phi\star\phi\star\phi \right) \tag{3.15}$$

運動項と質量項の積が Moyal 積になっていないのは Moyal 積による運動項と質量項への補正が全微分になるからである。この事実の証明は 3.4 節で与える。

この理論の 2 点関数への 1-ループオーダーでの補正は、プラナーなダイアグラムとノンプラナーなダイアグラムがそれぞれ 1 つづつある。それぞれのダイアグラムの計算を Schwinger

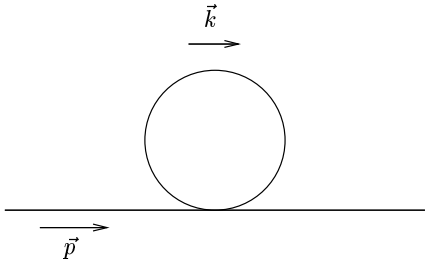


図 3.5: プラナーなダイアグラム

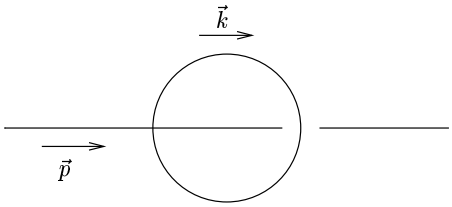


図 3.6: ノンプラナーなダイアグラム

パラメータの方法で計算すると、

$$\begin{aligned}\Gamma^{(2)}_{1-\mathrm{loop,planar}} &= \frac{g^2}{3(2\pi)^4}\int\frac{d^4k}{k^2+m^2} \\ &= \frac{g^2}{48\pi^2}\int_0^\infty\frac{d\alpha}{\alpha^2}\,\mathrm{e}^{-\alpha m^2} \qquad (3.16)\\ \Gamma^{(2)}_{1-\mathrm{loop,non-planar}} &= \frac{g^2}{3(2\pi)^4}\int\frac{d^4k}{k^2+m^2}\mathrm{e}^{\vec{p}\times\vec{k}} \\ &= \frac{g^2}{96\pi^2}\int_0^\infty\frac{d\alpha}{\alpha^2}\,\mathrm{e}^{-\alpha m^2-\frac{p\circ p}{4\alpha}} \qquad (3.17)\end{aligned}$$

この計算では、Schwingerパラメータによる計算に基本的な式

$$\frac{1}{k^2+m^2}=\int_0^\infty d\alpha\,\mathrm{e}^{-\alpha(k^2+m^2)} \qquad (3.18)$$

及び、これも良く知られた基本的な式

$$\int d^d\vec{k}\,\mathrm{e}^{A\vec{k}\cdot\vec{k}+\vec{B}\cdot\vec{k}+C}=\left(\frac{\pi}{A}\right)^{\frac{d}{2}}\mathrm{e}^{\frac{\vec{B}\cdot\vec{B}}{4A}+C} \qquad (3.19)$$

を用いた。

ここで積分を収束させる為に各ダイアグラムに $\exp\left(\frac{-1}{\Lambda^2\alpha}\right)$ を掛ける。すると各ダイアグラムの発散の部分を計算すると、

$$\begin{aligned}\Gamma^{(2)}_{1-\mathrm{loop,planar}} &= \frac{g^2}{48\pi^2}\int_0^\infty\frac{d\alpha}{\alpha^2}\mathrm{e}^{-\alpha m^2-\frac{1}{\Lambda^2\alpha}} \\ &= \frac{g^2}{48\pi^2}\left(\Lambda^2-m^2\ln(\frac{\Lambda^2}{m^2})\right) \qquad (3.20)\\ \Gamma^{(2)}_{1-\mathrm{loop,nonplanar}} &= \frac{g^2}{96\pi^2}\int_0^\infty\frac{d\alpha}{\alpha^2}\mathrm{e}^{-\alpha m^2-\frac{1}{(p\circ p/4+\Lambda^2)\alpha}} \\ &= \frac{g^2}{48\pi^2}\left(\Lambda^2_{\mathrm{eff}}-m^2\ln(\frac{\Lambda^2_{\mathrm{eff}}}{m^2})\right) \qquad (3.21)\end{aligned}$$

となる。ここで、

$$p \circ q = |p_\mu \theta^{\mu\rho} \delta_{\rho\sigma} \theta^{\sigma\nu} q_\nu| \tag{3.22}$$

$$\Lambda_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{\frac{1}{\Lambda^2} + p \circ p} \tag{3.23}$$

である。以上の計算の結果、有効作用は次のようになる。

$$S_{1\text{PI}}^{(2)} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4p \, \frac{1}{2} \Bigg(p^2 + M^2 + \frac{g^2}{96\pi^2 (p \circ p/4 + \frac{1}{\Lambda^2})} - \frac{g^2 M^2}{96\pi^2} \ln \left(\frac{1}{M^2 \left(p \circ p/4 + \frac{1}{\Lambda^2} \right)} \right) + \cdots + \mathcal{O}(g^4) \Bigg) \phi(p) \phi(-p) \tag{3.24}$$

但し M は planar なダイアグラムで繰り込まれた質量、

$$M^2 = m^2 + \frac{g^2 \Lambda^2}{48\pi^2} - \frac{g^2 m^2}{48\pi^2} \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2} \right) \tag{3.25}$$

である。

この時、$\Lambda \to \infty$ なる極限操作と $p \to 0$ という極限操作が交換しないことが分かる。即ち、$\frac{1}{\Lambda^2}$ と $p \circ p$ の大小で場合分けをして、それぞれの場合で $\Lambda \to \infty$ 極限をとると、振舞いが異なる。具体的には、

a) $p \circ p \ll \frac{1}{\Lambda^2}$ の時

有効作用は、非可換ではない場の理論と同じものになる。すなわち

$$S_{\text{PI}}^{(2)} \simeq \int d^4p \, \frac{1}{2} (p^2 + M'^2) \phi(p) \phi(-p) \tag{3.26}$$

となる。但し M' は非可換 ϕ^4 理論での繰り込まれた質量である。

$$M'^2 = M^2 + \frac{3g^2 \Lambda^2}{96\pi^2} - \frac{3g^2 m^2}{96\pi^2} \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2} \right) + \cdots \tag{3.27}$$

これは M と発散部分の係数を異にするので、M に対して入れたカウンタータームは M' の発散を吸収できない。

b) $p \circ p \gg \frac{1}{\Lambda^2}$ の時

有効作用は、

$$S_{1\text{PI}}^{(2)} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4p \, \frac{1}{2} \left(p^2 + M^2 + \frac{g^2}{24\pi^2 p \circ p} - \frac{g^2 M^2}{24\pi^2} \ln \left(\frac{1}{m^2 p \circ p} \right) + \cdots + \mathcal{O}(g^4) \right) \phi(p) \phi(-p) \tag{3.28}$$

となる。これは、a) の場合と $\Lambda \to \infty$ での発散の振舞いを異にしている。

今、見たように、紫外極限 $\Lambda \to \infty$ と赤外極限 $p \to 0$ が互いに交換しないということは、赤外発散と紫外発散が混合しているということであり、UV/IR mixing と呼ばれている。

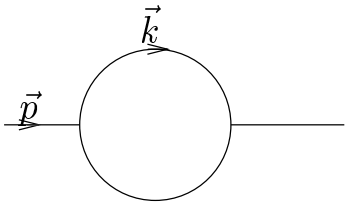


図 3.7: planar なダイアグラム

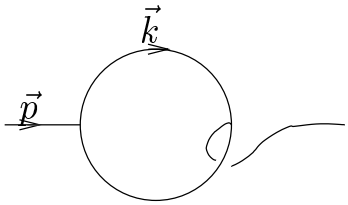


図 3.8: non-planar なダイアグラム

3.3.4 6 次元 ϕ^3 模型の 1-loop 計算

同様の計算を ϕ^3 模型で繰り返す。ϕ^3 模型の 2 点関数では 1-loop のオーダーで図 3.7·図 3.8 のふたつのダイアグラムが効いてくる。

考える作用は

$$S = \int d^6x \left(\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2}m^2 + \frac{g}{3!}\phi \star \phi \star \phi \right) \tag{3.29}$$

である。これをまた前小節と同じ計算を繰り返すと、

$$\Gamma^{(2)}_{1-\text{loop,nonplanar}} = \frac{g^2}{2^8\pi^6} \int_0^\infty \frac{d\alpha_1 d\alpha_2}{(\alpha_1+\alpha_2)^3} \mathrm{e}^{-(\alpha_1+\alpha_2)m^2 - \frac{\alpha_2^2 p^2 - p\circ p/4 + 1/\Lambda^2}{\alpha_1+\alpha_2}} \tag{3.30}$$

$$\Gamma^{(2)}_{1-\text{loop,planar}} = \Gamma^{(2)}_{1-\text{loop,nonplanar}}\Big|_{\theta=0} \tag{3.31}$$

となる。

よって有効作用は、

$$S^{(2)}_{1\text{PI}} = \int d^6p \frac{1}{2}\Big(p^2 + M^2 + \frac{g^2}{2^8\pi^2 p\circ p} + \frac{g^2}{2^9 3\pi^3}\left(6M^2 - \frac{p^2}{4}\right)\ln\left(\frac{1}{M^2 p\circ p}\right)\Big)\phi_R(p)\phi_R(-p) \tag{3.32}$$

となる。ここで M, ϕ_R は planar なダイアグラムで繰り込まれた質量と ϕ である。

3.4 非可換場の理論の諸性質

非可換場の理論では特有の性質がいくつか知られている。ここではそうした性質を述べる。

3.4.1 基本的な事実

まずは、非可換場の理論で知られている基本的な事実を羅列する。

定理 3.4.1

非可換性が一定の場合はラグランジアンの 2 次の項は Moyal 積を普通の積に置き換えても、その差は全微分である。

証明.

$$\int d^d x\, \phi_1 * \phi_2 = \int d^d x\, \phi_1 \times \phi_2 + \int d^d x\, \theta^{\mu\nu}\partial_\mu(\exp -1)(\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\partial_\mu^y\partial_\nu^z)\phi(y)\partial_\nu^{-1}\phi_2(z)\Big|_{y=z=x} \tag{3.33}$$

但し、∂_ν^{-1} は微分演算子をひとつ取り除くことを表わす。(微分演算子がひとつ以上かかっていることは、保証されている。) □

定理 3.4.2
2 個以上の場の Moyal 積をサイクリックに入れ替えても、その差は全微分である。

証明. 定理 3.4.1 と Moyal 積の結合性より直ちに従う。即ち、

$$\begin{aligned}\int d^d x\, \phi_1 \star \phi_2 \cdots \phi_n &= \int d^d x\, \phi_1 \star (\phi_2 \cdots \phi_n) \\ &= \int d^d x\, (\phi_2 \cdots \phi_n \star \phi_1)\end{aligned} \tag{3.34}$$

□

3.4.2　UV/IR 混合

Moyal 積の積分型

3.3.3 小節でも述べたが非可換場の理論には UV/IR-mixing という現象が起きる。ここではその現象の物理的起源を述べる。

$\phi_1 \star \phi_2$ という 2 つの場の Moyal 積の形を変形して次のような表式を得る。

$$(\phi_1 \star \phi_2)(x) = \int d^d x_1 d^d x_2\, \phi_1(x_1)\phi_2(x_2)K(x_1, x_2, x) \tag{3.35}$$

ここで積分核 $K(x_1, x_2, x)$ は次で定義される。

$$K(x_1, x_2, x) = \frac{1}{\det(\theta)}\mathrm{e}^{2i(x-x_1)^i\theta_{ij}^{-1}(x-x_2)^j} \tag{3.36}$$

この形は、Moyal 積の式 (3.8) の ϕ_1, ϕ_2 を Fourier→ 逆 Fourier 変換の形に書き直すことで容易に得られる。

$\phi_1 \star \phi_2$ が含む情報

以下の説明の為には、2 次元を考えれば十分であるので、2 次元の場合 $(x_1^i \to (x_1, y_1), x_2^i \to (x_1, y_2)$ とする。) を考える。

今、2 つのパケット ϕ_1, ϕ_2 が 2 点の相互作用をする場合を考える。2 つのパケットの幅を $(\Delta_{x_1}, \Delta_{y_1})$ と $(\Delta_{x_1}, \Delta_{y_1})$ する。式 (3.35) の x_1 依存部分を抜き出すと、

$$\int dx_1\, \phi_1(x_1, y_1) \mathrm{e}^{i\theta^{-1} x_1 (y_2 - y)} \tag{3.37}$$

となり、パケット ϕ_1 の x 方向の幅が

$$\theta^{-1} \Delta_{1x} |y_2 - y| \gg 1 \tag{3.38}$$

の時はこの相互作用は抑制される。よって、この相互作用によってパケット ϕ_1 はパケット ϕ_2 の $\delta y_2 \approx \frac{\theta}{\Delta_{1x}}$ の範囲にある情報を測ることがわかる。同様にして、

$$\delta y_2 \Delta_{1x} \sim \theta, \quad \delta y_1 \Delta_{2x} \sim \theta, \quad \delta x_2 \Delta_{1y} \sim \theta, \quad \delta y_1 \Delta_{2y} \sim \theta \tag{3.39}$$

が言える。よって、2 つのパケットの中心の位置が一致している時、$(\phi_1 \star \phi_2)(x)$ の幅 Δ_x, Δ_y は以下のようになる。

$$\Delta_x \sim \max(\Delta_{1x}, \Delta_{2x}, \frac{\theta}{\Delta_{1y}}, \frac{\theta}{\Delta_{2y}}), \quad \Delta_x \sim \max(\Delta_{1y}, \Delta_{2y}, \frac{\theta}{\Delta_{1x}}, \frac{\theta}{\Delta_{2x}}) \tag{3.40}$$

ϕ^3 模型の UV/IR 混合

ϕ^3 模型の古典的運動方程式は、

$$(\partial^2 - m^2)\phi = \frac{g}{2}(\phi \star \phi)(x) \tag{3.41}$$

であるから、この古典運動方程式の解のひとつを ϕ_0 とすると、それに対応する量子論的な解は、$G(x, y)$ をこの理論の (2 点) グリーン関数とすると、

$$\phi(x) = \phi_0(x) - \frac{g}{2} \int d^d x\, G(x - y)(\phi_0 \star \phi_0) + \cdots \tag{3.42}$$

と摂動論的に書くことができる。最低次のオーダーでは量子効果のソースは、$-\frac{g}{2}(\phi_0 \star \phi_0)$ である。ここで先程の結果を考えると、$(\phi_0 \star \phi_0)$ の広がり方は $\max(\Delta, \frac{\theta}{\Delta})$ であるから非常に小さなパケットであってもその相互作用の及ぼす範囲は非常に大きなものとなる。つまり、非常にエネルギーの低い現象がエネルギーの高い現象による影響を受けてしまう。よって、non-plannar なダイアグラムに於いては高エネルギーの仮想粒子に紫外カットオフ Λ を導入すると、赤外カットオフ $\frac{\theta}{\Lambda}$ を導入してしまったことにもなってしまう。これが UV/IR 混合と言われる所以である。

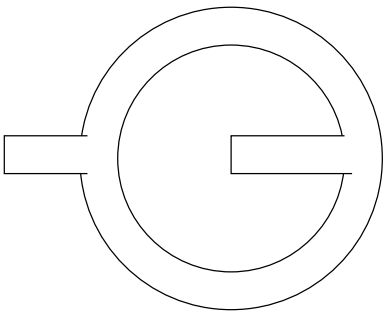


図 3.9: open string のループ

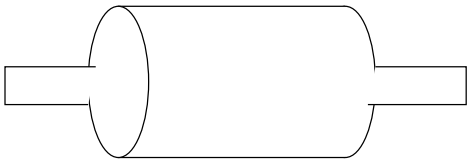


図 3.10: closed string の伝播

3.4.3　弦理論とのアナロジー

3.3 節で見たように、非可換場の理論の計算ではダイアグラムを 2 重線にするという手続きを取る。これは、open string とのアナロジーを予感させるものである。

弦理論での open string の 1-loop(図 3.9) のダイアグラムの UV 領域は、モジュラー変換によって closed string の伝播 (図 3.10) と結びついているが、$g^{\mu\nu}$ を closed string のメトリックとして closed string の伝播は、

$$\frac{1}{p_\mu g^{\mu\nu} p_\nu} \tag{3.43}$$

という特異性を持っている。

非可換空間の上の場を open string と思った時に、図 3.9 のような open string の 1-loop に対応する計算は非可換 ϕ^3 理論の 1-loop の nonplanar な 2 点関数に対応する。この open string の 1-loop に対応する losedstring の伝播の特異性は

$$g_{\mu\nu} \sim -(\theta^2)_{\mu\nu} \tag{3.44}$$

とした時に、式 (3.32) の有効作用にある特異性と一致している。この関係は、後に 4.3 節で求める Seiberg Witten 極限 (4.45) での open string のメトリックと closed string のメトリックの関係式 (4.46) を求めるが、そこで open string のメトリックを δ^{ij} とした時の closed string のメトリックに一致する。

3.4.4　Seiberg-Witten 写像

θ が一定な非可換 $U(N)$ ゲージ理論は実は、場の再定義で可換な空間の上の $U(N)$ ゲージ理論になることが知られている [SW][AK1]。その理由の説明は、弦理論の枠組の中で説明されるがここではそのような場の再定義が存在するとして、場の再定義を求めてみる。

もし、非可換ゲージ理論と可換ゲージ理論の間に場の再定義で結ばれた関係があったとす

れば、その場の再定義は以下のような図式を可換にしなくてはならない。

$$\begin{array}{ccc} \hat{A}(A) & \xrightarrow{\hat{\delta}_{\hat{\lambda}}} & \hat{A}(A+\delta_\lambda A) \\ \uparrow & & \uparrow \\ A & \xrightarrow{\delta_\lambda} & A+\delta_\lambda A \end{array} \tag{3.45}$$

ただし、$\hat{A}, \hat{\delta}, \hat{\lambda}$ はそれぞれ、非可換性 $\hat{\theta}$ を入れた非可換ゲージ理論のゲージ場, ゲージ変換, ゲージ変換のパラメータである。すなわち、場の再定義とゲージ変換 (式 (3.5)) は可換でなくてはならない。さらにこの関係は一般に異なる θ の非可換ゲージ理論がお互いに場の再定義で結びついていることをしめしている。このとき、図式 (3.45) に対応するものを式で書き現わすと次のようになる。

$$\hat{A}(\tilde{A}) + \hat{\delta}_{\hat{\lambda}}\hat{A}(\tilde{A}) = \hat{A}(\tilde{A} + \tilde{\delta}_{\tilde{\lambda}}) \tag{3.46}$$

特に、

$$\tilde{\theta} = \hat{\theta} + \delta\theta \Longrightarrow \begin{cases} \hat{A} = \tilde{A} + \delta\tilde{A}(\tilde{A}) + \mathcal{O}(\delta\theta^2) \\ \hat{\lambda} = \tilde{\lambda} + \delta\tilde{\lambda}(\tilde{\lambda}) + \mathcal{O}(\delta\theta^2) \end{cases} \tag{3.47}$$

とすると上式は、次のようになる。

$$\hat{\delta}_{\hat{\lambda}}\delta\tilde{A}_i - \tilde{D}_i\delta\tilde{\lambda} + i[\delta\hat{A}_i,] = -\frac{1}{2}\delta\theta^{kl}\{\partial_k\tilde{A}_i, \partial_l\tilde{\lambda}\} \tag{3.48}$$

この式は

$$\begin{aligned} \delta\hat{A}_i &= -\frac{1}{4}\delta\theta^{kl}\{\tilde{A}_k, \partial_l\tilde{A}_i + \tilde{F}\} + \alpha\delta\theta^{kl}\tilde{D}_i\tilde{F}_{kl} + \beta\delta\theta^{kl}\tilde{D}_i[\tilde{A}_k, \tilde{A}_l] && \text{(3.49a)} \\ \delta\tilde{\lambda} &= \frac{1}{4}\delta\theta^{kl}\{\partial_k\tilde{\lambda}, \tilde{A}_l\} + 2\beta\delta\theta^{kl}[\partial_k\tilde{\lambda}, \tilde{A}_l] && \text{(3.49b)} \\ \delta\tilde{F} &= \frac{1}{4}\delta\theta^{kl}\left(2\{\tilde{F}_{ik}, \tilde{F}_{jl}\} - \{\tilde{A}_k, \tilde{D}_l\tilde{F}_{ij} + \partial_l\tilde{F}_{ij}\}\right) \\ &\quad -i\alpha\delta^{kl}[\tilde{F}_{ij}, \tilde{F}_{kl}] - i\beta\delta\theta^{kl}[\tilde{F}_i j, [\tilde{A}_k, \tilde{A}_l]] && \text{(3.49c)} \end{aligned}$$

によって解くことができる。ここで面白いのは、α, β というパラメータの存在である。このパラメータの存在自体は実は不思議ではない。何故なら、ひとつの微分方程式を解く為に 3 つの関数を使っているからである。α, β に比例する項はゲージ変換の形をしている。したがって、この α, β による不定性はゲージ変換で吸収することができ、物理的には意味のないものである。

これで微小量の θ の変化については解が求まったが、この解が有限の θ の変化についてうまく定義できているか、即ち可積分であるかどうかは自明ではない。計算をすると実は、可積分ではないことが分かる。そのことを確かめる為には二つの θ の微小変化 $\delta\theta_1, \delta\theta_2$ の交換

子 $[\delta_1]$ が消えることを言わなくてはならない。この交換子の表式は非常に長いので具体的な形は書かないが (具体的な形は [AK1, 式 (7)] を参照。)、大体次のような形をしている。

$$[\delta_1, \delta_2]\tilde{A}_i = \delta\theta_1\delta\theta_2(\cdots) + \tilde{D}_i(\delta\theta_1\delta\theta_2\cdots) + \alpha, \beta \text{ 依存項} \tag{3.50}$$

α, β 依存項はまたゲージ変換の形をしているので物理的ではないが、それ以外はゲージ変換で消えない。これは θ の空間の中の閉回路を回って戻ってくるともとのゲージ軌道と異なる軌道に行ってしまうことを示している。

第4章　弦理論に現れる非可換幾何学

1章の紹介でも述べた通り、弦理論では様々な側面に非可換幾何的な性質が現われる。しかし、元々弦理論は可換な時空の上で定義されておりその非可換性は隠されている。弦理論に非可換性を導入する最も簡単な方法は、$B_{\mu\nu} \neq 0$ の背景場を入れた開弦の理論を考えることであるが、これはただ単に磁場を入れた中での物理を考えるようなものであり、ただのケーススタディでしかない可能性が高い (無論、弦理論は非摂動論的には $B_{\mu\nu}$ がある真空 (背景場) を選択するという可能性もある。)。しかし、弦理論によって定義される重力理論を String Geometry と呼ぶことにすれば、String Geometry は真空 (背景場) の選択の仕方に依らずに本質的に非可換幾何である傍証がいくつかある。この章ではそのような証拠になると思われるような事実をいくつか列挙する (4.1 節·4.4.3·4.2 節 $\cdots$)。

また、意図的に真空を選んだ結果として得られる弦理論の物理にも面白い点がいくつかあるので、それも紹介する。(4.4 節·4.3 節)。

4.1　Space-Time Uncertainty

弦理論に時間と空間の不確定性関係があること [Yon2] は、弦理論の本質に非可換幾何学が関わっていることの強力な傍証である。即ち、この節の式弦理論に現れる不確定性の式 4.2 は可換な時空の上では起き得ないことである。弦理論の非可換幾何学的な側面の最初の例としてこの Space-Time Uncertainty を説明する。

4.1.1　直感的な導出

弦理論には時間と空間の不確定性関係があることが知られている。最初に、おおざっぱにそれを説明する。この不確定性関係は直観的には、良く知られているエネルギーと時間の不確定性から説明することができる。

$$\Delta E \Delta T \gtrsim 1 \tag{4.1}$$

弦理論では、高いエネルギーを持った弦は高い励起モードを弦が持つことで実現できる。高い励起モードを持った弦は弦と直交する方向により広く空間に広がっている。ゆえに大雑把に言って、

$$\Delta X \Delta T \gtrsim {\ell_{\rm s}}^2 \tag{4.2}$$

ということが言える。これが時間と空間の不確定性関係である。注意すべきは、この関係は、量子論の不確定性関係を弦理論の言葉を使って解釈し直したものであるということである。

高い励起モードが空間方向により広く広がっていることをもう少し精密に見てみる。今、殆ど $SL(2,\mathbb{C})$ 真空にあるような弦 1 の端 ($\sigma = 0$) に運動量 p を持った弦 2 がくっつく過程を考える。弦 1 に挿入される演算子は、$\exp(ip_\mu X^\mu(0,\tau))$ の形をしている。よって、X のモード展開

$$X^\mu = x^\mu - i\frac{2{\ell_{\rm s}}^2 p^\mu}{2} + i\left(\frac{\alpha'}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_n \left(\frac{\alpha_n^\mu}{n z^n}\right) \tag{4.3}$$

を考えると、この弦 2 がくっつくことによって弦 1 の状態は、

$$|\Psi\rangle \equiv {\rm e}^{\sum_n p\alpha_{-n}\ell_{\rm s}/n}|0\rangle \tag{4.4}$$

へと変化する。ゆえに弦 2 がくっつくことによって、弦 1 の空間方向の拡がりは以下のようになる。

$$\begin{aligned}
\Delta X &\sim \sqrt{\int d\sigma \langle\Psi|X(\sigma)^2|\Sigma\rangle} \\
&\sim \sqrt{\int d\sigma \langle 0|\sum_n (p^2{\ell_{\rm s}}^2\frac{1}{n})^2 {\rm e}^{\frac{p^2\ell_{\rm s}{}^2}{2n}}|0\rangle} \\
&\sim \sqrt{p^2{\ell_{\rm s}}^4 \sum_n (\frac{1}{n^2})} \\
&\sim E{\ell_{\rm s}}^2
\end{aligned} \tag{4.5}$$

気を付けねばならぬのは、この式は空間方向のみならず時間方向にも拡がりがあることを示しているように見えることである。これは、冒頭に出て来た ΔT との混同を引き起こしかねない。しかし、先に述べた ΔT は、相互作用が起きる時間であり、弦の重心の時間で定義されていることに注意すれば、式 (4.5) での時間方向の拡がりと、ΔT は同じものではないことが分かる。

4.1.2　共形対称性と Space-Time Uncertainty

実は、Space-Time Uncertainty の起源は world sheet の共形不変性にある。[Yon1] そのことを見る為にはまず、共形不変な距離の測り方を定義しなくてはならない。$ds = \rho(z,\bar{z})$ としてある有限な領域 Ω とその領域の中の始点と終点を同じくするような経路の集合 Γ について共形不変な距離 (extremal length) は以下のように定義される。

$$\lambda_\Omega(\Gamma) = \sup_\rho \frac{\left(\inf_{\gamma\in\Gamma}\int_\gamma \rho|dz|\right)}{\int_\Omega \rho^2|dz|^2} \tag{4.6}$$

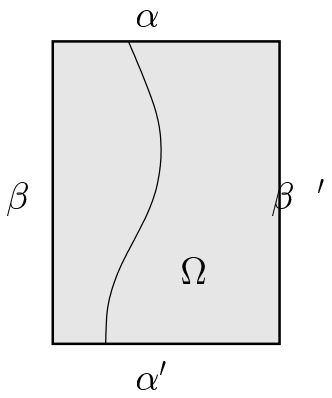


図 4.1: 共形不変な距離

いま、world sheet 上の領域 Ω として $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ で囲まれる長方形の領域を考える。すると、α と α' の間の経路の集合 Γ と β と β' の間の経路の集合 Γ^* が存在して、更に、α, α' の間の Euclid 距離を a、β, β' の間の Euclid 距離を b とすれば、

$$\lambda_\Omega(\Gamma) = \frac{b}{a}, \quad \lambda_\Omega(\Gamma^*) = \frac{a}{b} \tag{4.7}$$

でとなる。更に、

$$\lambda_\Omega(\Gamma)\lambda_\Omega(\Gamma^*) = 1 \tag{4.8}$$

が言える。これは、

$$\lambda_\Omega(\Gamma) \leq 1 \quad \text{or} \quad \lambda_\Omega(\Gamma^*) \leq 1 \tag{4.9}$$

であることを示していて、これが Space-Time uncertainty の起源になっている。そのことを見るには、領域 Ω に Dirichlet 境界条件、

$$X^\mu(0,\tau) \quad = X^\mu(a,\tau) \quad = \delta^{\mu 2}\frac{B\tau}{2} \tag{4.10}$$

$$X^\mu(\sigma,0) \quad = X^\mu(\sigma,b) \quad = \delta^{\mu 1}\frac{A\sigma}{2} \tag{4.11}$$

を課すと、弦理論の経路積分

$$\int [dx^\mu] \exp\left(-\frac{1}{4\pi {\ell_{\rm s}}^2}\int d\sigma d\tau (-\gamma)^{1/2}\gamma^{ab}\partial_a X^\mu \partial_b X_\mu\right) \tag{4.12}$$

から、A, B 依存性として、次のような項が出て来る。

$$\mathrm{e}^{-\frac{1}{4\pi {\ell_{\rm s}}^2}(A^2\lambda_\Omega(\Gamma)+B^2\lambda_\Omega(\Gamma^*))} \tag{4.13}$$

今、A と B を変化させることを考える。$\Delta A, \Delta B$ を経路積分に影響を与えてしまわないような A, B の変化の幅と定義すると、式 (4.8) より、

$$\Delta A \Delta B \sim {\ell_{\rm s}}^2 \tag{4.14}$$

が導かれる。すなわち、ある 2 次元的な時空上の広がりに弦を固定することを考えた時に、その固定する領域の幅が式 (4.14) を満たす時に初めて物理に影響を及ぼすということが分かる。

4.2　String Field Theory の非可換幾何学的側面

String Field Theory と非可換幾何学との関係は早くから指摘されてきた [Wit2]。この節では String Field Theory の計算方法の詳細には触れずにその非可換幾何学的な側面だけに絞って説明する。String Field Theory の計算方法の詳細については、大森の修士論文 [大森] を参照。

4.2.1　Open String Field Theory のラグランジアン

String Field Theory を考えるに当って、必要なものを考えると String Field の成す代数、弦同士の相互作用、BRST 変換 (BRST 形式で考えなければならない理由は後に説明する。)、空間上の積分などが考え付く。そこで、まず抽象的に $\mathbb{Z}_2$graded で一般には非可換な代数 $\mathcal{B}$ とその上の積 $*$ そして、その上の odd な微分 Q と積分 $\int$ を考える。$A, B \in \mathcal{B}$ としてそれらの grade を $a, b \in \{0, 1\}$ と書くことにする。この時、この代数は、以下のような関係式を満たしていると仮定する。

$$\mathrm{grade}(A * B) \equiv a + b \quad (\mathrm{mod} 2) \tag{4.15}$$

$$\mathrm{grade}(Q(A)) \equiv a + 1 \quad (\mathrm{mod} 2) \tag{4.16}$$

$$Q(Q(A)) = 0 \tag{4.17}$$

$$Q(A * B) = Q(A) * B + (-1)^a Q(B) \tag{4.18}$$

$$\int A * B = (-1)^{ab} \int B * A \tag{4.19}$$

$$\int Q(A) = 0 \tag{4.20}$$

例えば $\mathcal{B}$ を微分形式 $Q, *, \int$ をそれぞれ外微分·wedge 積·積分とすれば上の性質を満たす。ここで、積 $*$ は wedge 積 $\wedge$ の一般化で wedge 積と行列の積の組み合せになっているかもしれないということに言及しておく。

更に、$\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}$ という $*$ 積によって閉じた部分代数があるとする。これは、0-形式の一般

化である。$A_i, B_j, C_k \in \mathcal{B}_0$ について n-形式を

$$\sum_{i,j,k} A_i * Q(B_j) * \cdots * Q(C_j) \tag{4.21}$$

によって定義する。

これらの定義によってゲージ理論の一般化を定義することができる。すなわち、1-形式 A の $\epsilon \in \mathcal{B}_0$ をパラメータとしてゲージ変換を

$$\delta_\epsilon A \equiv Q(\epsilon) + A * \epsilon - \epsilon * A \tag{4.22}$$

と定義し、field strength を

$$F \equiv Q(A) + A * A \tag{4.23}$$

$$\delta_\epsilon F = F * \epsilon - \epsilon * F \tag{4.24}$$

と定義する。ここで、field strength$F$ は Bianchi 等式

$$Q(F) + A * F - F * A = 0 \tag{4.25}$$

を満たす。このゲージ理論のラグランジアンとして適当なラグランジアンは、現在手元にある積が wedge 積に対応するものしかないので、Chern-Simons 型が適当である。即ち、

$$I = \int (A * Q(A) + \frac{2}{3} A * A * A) \tag{4.26}$$

このラグランジアンから求まる運動方程式は、

$$F = 0 \tag{4.27}$$

となる。もし、A をただのゲージ場として見た場合この式は非常に自明すぎて理論としての面白みの欠けるものとなる。しかし、A を $a \xrightarrow{A} A * a$ なる演算子だと思うことにすれば、(4.27) は a への作用を考えれば、

$$\begin{aligned}(Q(A) + A * A)a &= Q(Q(a)) + Q(A * a) + A * Q(a) + A * A * a \\ &= (Q + A)^2 a = 0\end{aligned} \tag{4.28}$$

となる。

抽象的な代数の定義をする前に述べたように、弦理論の文脈では Q は BRST 変換として解釈され、また定義のような性質を満たす Q の候補は BRST 変換しかないので、$(Q + A)$ は新たな (1+1) 次元の理論の冪零な BRST 演算子と解釈される。

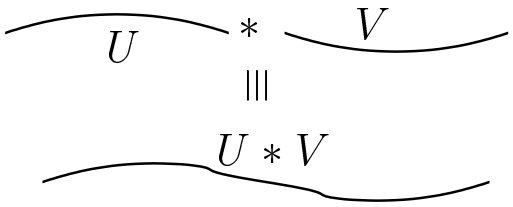


図 4.2: 単純な open string の相互作用

図 4.3: 単純な open string の相互作用の結合性

4.2.2　String field の associativity

String Field Theory を構成する際に String Field の代数が結合律を満たすかどうか、即ち

$$U * (V * W) = (U * V) * W \tag{4.29}$$

が成立するかどうかは、微妙な問題である。実際、open string の成す代数は結合律を満たすが、closed string の成す代数が結合律を満たさない。まずはそのことを説明していく。

open string の場の相互作用としてもっとも単純なのは、一方の弦の左端ともう一方の弦の右端をくっつける、図 4.2 のような相互作用を考えることである。この相互作用で定義される積は明らかに非可換であるが、結合律は満たしている。

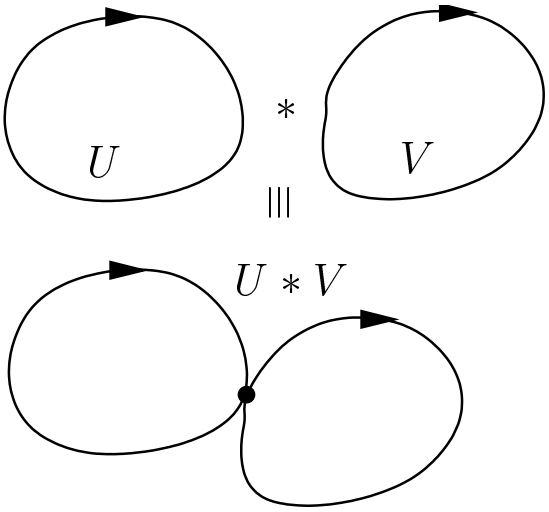


図 4.4: closed string の相互作用

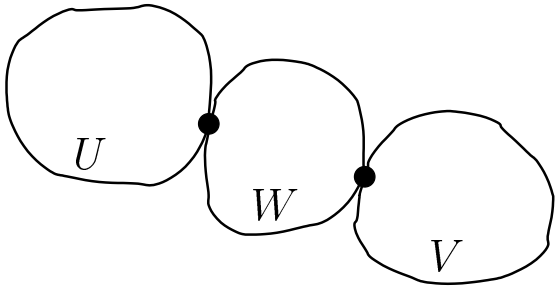


図 4.5: closed string の相互作用の結合性

一方、closed string の場合は、相互作用としては、弦の 1 点をくっつけるような図 4.4 のような相互作用を考えるのが自然である。この相互作用による積は open string の時のように左右の区別が無いので可換な積になっている。しかし、図 4.5 のような 3 つの open string の相互作用を考えると、$U*V$ はお互いに交わっていないので 0 になるから、$0 = (U*V)*W \neq U*(V*W)$ であり、積の結合律が壊れてしまっている。

4.2.3 open string の相互作用の修正

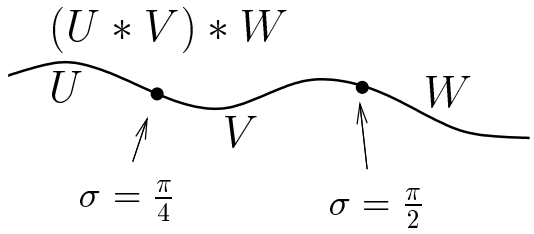


図 4.6: (U*V) を先にやった場合

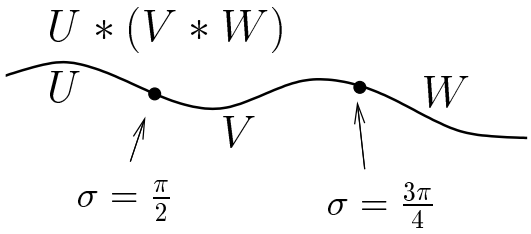


図 4.7: (V*W) を先にやった場合

前の小節で、closed string の図 4.2 のような相互作用は結合律を満たすといったが、実は微妙な点がある。それは、この結合性が world sheet の座標の再定義に依っているという点である。つまり、図 4.6 と図 4.7 で示されているように、積を行なう順序に依って、弦の中の座標が異なっているという点である。

しかし、弦の座標の再定義の自由度を残したまま string field theory を構成することは非常に難しいことが知られている。座標の再定義の自由度を残す代わりに BRST 形式にのっとって BRST チャージの保存を課したほうが楽である。さらに、別の問題として、図 4.2 のような相互作用を考えた時にうまく積分を定義できない (無理矢理左端と右端をくっつけて積分するとそれは closed string に値を取ってしまう。) という問題がある。

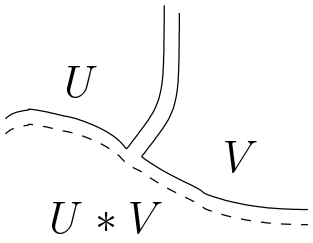


図 4.8: 修正した open string の相互作用

この二つの問題を解決するために open string の相互作用の仕方に変更を加える。その為に、まず、open string S を半分 ($\sigma = \frac{\pi}{2}$) から左と右 (U_L, V_R) に分ける。修正された open string の相互作用は

$$(U_L, U_R) * (V_L, V_R) \equiv (U_L, V_R)\delta(U_R - V_L) \tag{4.30}$$

という形 (図 4.8) をしている。これは、弦の座標の再定義を必要としない為に BRST 形式でゲージ固定をしたまま相互作用を計算できるので非常に好都合である。また、積分は

$$\int U * V = \delta(U_R - V_L)\delta(U_L - V_R) \tag{4.31}$$

と定義することができる。このような、open string の相互作用で定義された積をこの節の初めに抽象的に定義した $*$ と新たに定義して、(4.26) の作用の下に構成された理論が Witten 型の Open String Field Theory である。

4.2.4　Witten の Open String Field Theory の非可換性

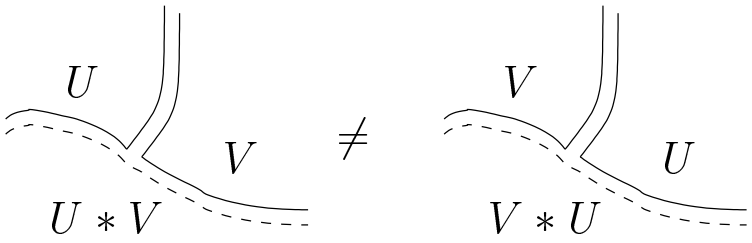


図 4.9: Witten の Open String Field Theory の非可換性

最後に、Witten の Open String Field Theory が持つ非可換性について説明する。この節の最初の抽象的な構成から、string field の成す代数は一般に非可換なものであったが、実際図 4.9 から直感的に分かるように Witten の Open String Field Theory で string field の成す代数は非可換になっている。即ち、

$$(U_L, V_R)\delta(U_R - V_L) \neq (V_L, U_R)\delta(V_R - U_L) \tag{4.32}$$

となっている。

4.3　弦理論の低エネルギー有効理論と Seiberg-Witten 写像

D-brane の低エネルギー有効理論は Dirac-Born-Infeld 作用であることがほぼ確実視されている。この節では、先に述べた Seiberg-Witten 写像が弦理論の低エネルギー有効理論として、開弦の理論の regularization の違いとして説明できることを述べる。

4.3.1　B 場の存在下での open-string の理論

今 B 場が $i = 1, \ldots, r$ 方向にのみ存在する状況を考える。存在する時の Euclid 化した world sheetΣ 上の作用は、

$$\begin{aligned} S &= \tfrac{1}{4\pi\alpha'}\textstyle\int_\Sigma (g_{ij})\partial_a X^i \partial^a X^j - 2\pi i\alpha' B_{\mu\nu}\epsilon^{ab}\partial_a X^i \partial_a X^j \\ &= \tfrac{1}{4\pi\alpha'}\textstyle\int_\sigma (g_{ij})\partial_a X^i \partial^a X^j - \tfrac{i}{2}\int_{\partial\Sigma} B_{ij} X^i \partial_t X^j \end{aligned} \tag{4.33}$$

である。今 world sheet が上半平面にあるとして、D-brane に沿った方向の X^μ が満たす境界条件は運動方程式より、

$$g_{ij}(\partial - \bar{\partial} + 2\pi\alpha' B_{ij}(\partial + \bar{\partial})X^j)\Big|_{z=\bar{z}} = 0 \tag{4.34}$$

である。この境界条件は、$B = 0$ の時に Neumann 境界条件となり、$B = \infty$ の時に Dirichlet 境界条件となる。この境界条件の下での propagator を計算する。今、propagator を求めるに当り、鏡像法を使うことを考えると、境界条件が Dirichret 境界条件と Neumann 境界条件の混合になっていることから、propagator は、

$$\langle X^i(z)X^j(z')\rangle = -\alpha'(g^{ij}\ln|z-z'| + C^{ij}\ln(z-\bar{z}') + D^{ij}\ln(\bar{z}-z') + \text{const}) \tag{4.35}$$

の形になっているはずである。ここで、$\langle X^i(z)X^j(z')\rangle$ の $X^i(z)$ について、式 (4.34) を適用すると、

$$\begin{aligned} &-(g_{ij}+2\pi\alpha' B_{ij})g^{jk}\frac{1}{z-z'} - (g_{ij}+2\pi\alpha' B_{ij})C^{jk}\frac{1}{z-\bar{z}'} \\ &\qquad + (g_{ij}-2\pi\alpha' B_{ij})g^{jk}\frac{1}{\bar{z}-\bar{z}'} - (g_{ij}-2\pi\alpha' B_{ij})D^{jk}\frac{1}{z-z'} = 0 \end{aligned} \tag{4.36}$$

となり、これが全ての z' について成立することを利用すると、C^{ij}, D^{ij} を求めることができる。

$$C^{ij} = \left(\frac{1}{g+2\pi\alpha' B}\right)^{ij} - \frac{1}{2}g^{ij} \tag{4.37}$$

$$D^{ij} = \left(\frac{1}{g-2\pi\alpha' B}\right)^{ij} - \frac{1}{2}g^{ij} \tag{4.38}$$

これをまとめると、propagator の最終的な形は以下のようになる。

$$\begin{aligned} \langle X^i(z)X^j(z')\rangle = &-\alpha'\Big(g^{ij}\log|z-z'| - g^{ij}log|z-\bar{z}' \\ &+ G^{ij}\log|z-\bar{z}'|^2 + \frac{1}{2\pi\alpha'}\theta^{ij}log\frac{z-\bar{z}'}{\bar{z}-z'} + \text{const}\Big) \end{aligned} \tag{4.39}$$

ここで、G^{ij}, θ^{ij} は以下のように定義されている。便利の為に open string のカップリングと closed string のカップリングの関係を付け加えておいた。

$$\begin{cases} G^{ij} = \left(\frac{1}{g+2\pi\alpha' B}\right)^{ij}_{\text{対称}} = \left(\frac{1}{g+2\pi\alpha' B}g\frac{1}{g-2\pi\alpha' B}\right)^{ij} \\ G_{ij} = g_{ij} - (2\pi\alpha')^2(Bg^{-1}B)_{ij} \\ \theta^{ij} = 2\pi\alpha'\left(\frac{1}{g+2\pi\alpha' B}\right)^{ij}_{\text{反対称}} = -(2\pi\alpha')^2\left(\frac{1}{g+2\pi\alpha' B}B\frac{1}{g-2\pi\alpha' B}\right)^{ij} \\ G_s = g_s\left(\frac{\det G}{\det(g+2\pi\alpha' B)}\right)^{\frac{1}{2}} = g_s\left(\frac{\det G}{\det g}\right)^{\frac{1}{4}} = g_s\left(\frac{\det(g+2\pi\alpha' B)}{\det g}\right)^{\frac{1}{2}} \end{cases} \tag{4.40}$$

今、興味を持っているのは open string の相互作用なので、$X^i(z)$ は境界の上にいると考える。すると、$z = \tau \in \mathbb{R}$ と表記することができるので、propagator の式は

$$\langle {}^i x^i(\tau) x^j(\tau') \rangle = -\alpha' G^{ij} \log(\tau - \tau')^2 + \frac{i}{2}\theta^{ij}\epsilon(\tau - \tau') \tag{4.41}$$

となる。したがって、G^{ij} は open string が感じるメトリックということになる。一方 θ^{ij} は演算子 X^i の交換子が time ordering の入れ替えになっていることを考えると、

$$[X^i, X^j] = T(X^i(\tau)X^j(\tau^-) - X^i(\tau)X^j(\tau^+)) = i\theta^{ij} \tag{4.42}$$

であるから、θ^{ij} は座標の非可換性と見ることができる。

4.3.2　低エネルギー有効理論への B 場の影響

弦理論の振幅の計算をする為には、ある運動量を持った world sheet 上の演算子 $V(X)\mathrm{e}^{ip\cdot X}$ を挿入した、振幅を計算しなくてはならない。ここで $V(X)$ は $\partial X^i, \partial^2 X^i, \ldots$ からなる多項式である。

$$\left\langle \prod_{i=1}^{n} V_i(X(\tau_i))\mathrm{e}^{ip_i\cdot X(\tau_i)} \right\rangle_{G,\theta} \tag{4.43}$$

しかし、この振幅は G を変化させずに、θ だけを手で 0 にした振幅と以下のような関係をもっている。

$$\left\langle \prod_{i=1}^{n} V_i(X(\tau_i))\mathrm{e}^{ip_i\cdot X(\tau_i)} \right\rangle_{G,\theta} = \mathrm{e}^{-\frac{i}{2}\sum_{n>m} p_i\theta^{ij}p_j\epsilon(\tau_n-\tau_m)} \left\langle \prod_{i=1}^{n} V_i(X(\tau_i))\mathrm{e}^{ip_i\cdot X(\tau_i)} \right\rangle_{G,\theta=0} \tag{4.44}$$

これは、演算子を τ_n の大小の順に並べた時に $\theta = 0$ の理論と θ が有限の理論が、運動量依存部分 $(\mathrm{e}^{ip\cdot X})$ だけは、積を普通の積から Moyal 積に直すことによって得ることができるということを示している。$\mathrm{e}^{ip\cdot X}$ の部分に限定すれば、まさに θ 一定の場合の変形量子化による非可換場の理論の構成法と同じものである。

4.3.3　Seiberg-Witten 極限

$\alpha' \to 0$ での低エネルギー有効理論を考えたいのだが、open string が感じるメトリックや非可換性は有限に保ちたい。そこで、open string のパラメータ (4.40) を有限に保つ以下のよなう極限を考える。

$$\begin{aligned} &\alpha' \sim \epsilon^{\frac{1}{2}} \to 0 \\ &g_{ij} \sim \epsilon \to 0 \quad \text{for} i, j = 1, \ldots, r \end{aligned} \tag{4.45}$$

この極限を Seiberg-Witten limit という。すると、open string のパラメータ (4.40) は次のようになる。

$$\begin{cases} G^{ij} = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi\alpha'}^2 (B^{-1}gB^{-1}) & \text{for} i,j = 1,\dots,r \\ g^{ij} \quad \text{for otherwise} \end{cases} \\ G_{ij} = \begin{cases} -(2\pi\alpha')^2 (Bg^{-1}B) & \text{for} i,j = 1,\dots,r \\ g_{ij} \quad \text{for otherwise} \end{cases} \\ \theta^{ij} = \begin{cases} (B^{-1})^{ij} & \text{for} i,j = 1,\dots,r \\ 0 \quad \text{for otherwise} \end{cases} \end{cases} \tag{4.46}$$

この極限では、境界上にある作用素 X のプロパゲーターは次のようになる。

$$\langle X^i(\tau) X^j(\tau') \rangle = \frac{i}{2}\theta^{ij}\epsilon(\tau - \tau') \tag{4.47}$$

$\alpha' \to 0$ の極限では、もはや world sheet 上の X^i の微分から成る多項式にかかる微分は無視することができるので、演算子同士の積は完全に Moyal 積となる。

4.3.4 ゲージ理論

背景にゲージ場がある時の world sheet の作用は、

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_\sigma (g_{\mu\nu}) \partial_a X^i \partial^a X^j - \frac{i}{2} \int_{\partial\Sigma} (B_{ij} X^i - 2A_j) \partial_t X^j \tag{4.48}$$

であり、この作用は可換ゲージ理論のゲージ変換

$$A_i \to A_i + \delta A_i \equiv \partial_i \lambda \tag{4.49}$$

で不変であるように見える。実際このゲージ変換による作用の変化は、

$$\delta S = \int d\tau \partial_\tau \lambda = 0 \tag{4.50}$$

となり全微分になるので、消えるかに見える。

しかし、world sheet 上での量子論では場が同じ位置に来た時に発散が起きるのでその発散の処理をしなくてはならない。その処理の仕方によって、ゲージ変換が異なるものとなる。問題となるような発散は、world sheet の経路積分

$$\int [dX] \mathrm{e}^{-S+\delta S} \tag{4.51}$$

の中から出てくる。一例を挙げれば、

$$-\int d\tau A_i(x) \partial_\tau X^i \int d\tau' \partial_{\tau'} \lambda \tag{4.52}$$

という項である。この項の τ と τ' が一致する所で発散が起きる。以降、具体的な regularization について議論する。

Point-Splitting regularization

まず、Point-Splitting regularization を考えてみる。Point-Spritting regularization とは、場の座標の差が $|\tau - \tau'| < \delta$ となる領域を取り除いてしまうような regularization である。すると、例えば (4.52) は次のような形になる。

$$-\int d\tau \ : A_i(X(\tau))\partial_\tau X^i(\tau) : : \lambda(X(\tau^-) - \lambda(X(\tau^+))) \\ = -\int d\tau \ : (A_i(X) \star \lambda - \lambda \star A_i(X))\partial_\tau X^i : \quad (4.53)$$

この項はゲージ変換式 (4.49) で出て来てしまった余りの項である。したがって、この項を消す為にゲージ変換を変更しなくてはならない。即ち、

$$\hat{\delta} A_i = \partial_i \lambda + i\lambda \star A_i - i A_i \star \lambda \quad (4.54)$$

これは非可換空間上のゲージ理論のゲージ変換である。

今は例として、経路積分の最も A_i の次数の低いところで上手くゲージ不変性を保つようなゲージ変換を考えたが、この変換がより次数の高いところでもゲージ不変性を保つということを確かめなくてはならない。非可換ゲージ変換 (4.54) での A_i の高次の項のゲージ変換性は、

$$\frac{i^{n+1}}{n!} \int A(X(\tau_1)) \cdots A(X(\tau_n))\partial_\tau \lambda(X(\tau)) \\ + \frac{i^{n+1}}{(n-1)!} \int A(X(\tau_1)) \cdots A(X(\tau_{n-1})) \left(\lambda \star A(X(\tau_n)) - A \star (X(\tau_n)) \star \lambda\right) \quad (4.55)$$

だが、ここで Point-splitting regularization をすると、上の式の第 1 項は次のようになる。

$$\frac{i^{n+1}}{n!} \sum_{j=1}^{n} \int A(X(\tau_1)) \cdots A(X(\tau_{j-1}))A(X(\tau_{j+1})) \cdots A(X(\tau_n)) \\ \times \left(A \star (X(\tau_j)) \star \lambda - \lambda \star A(X(\tau_j))\right) \\ = \frac{i^{n+1}}{(n-1)!} \int A(X(\tau_1)) \cdots A(X(\tau_{n-1})) \left(A \star (X(\tau_n)) \star \lambda - \lambda \star A(X(\tau_n))\right) \quad (4.56)$$

となり、式 (4.55) の第 2 項とキャンセルする。すなわち、経路積分のゲージ場の次数がより高い部分に於いても式 (4.54) のゲージ変換が経路積分を不変にするということが分かった。

Pauli-Villers Regularization

Point-Splitting regularization はゲージ変換性を壊してしまう regularization であったが、ゲージ変換性を壊さないような regularization も存在する。その時には普通のゲージ変換

(4.49) がそのまま使えるようなゲージ変換になっている。このような regularization を Pauli-Villers Regularization という。

以上のことをまとめると、弦理論の regularization の仕方として Point-Splitting regularization を選ぶと非可換ゲージ理論が出て来て、Pauli-Villers regularization を選ぶと可換なゲージ理論が出て来ることになることが見えた。regularization の違いは低エネルギー有効理論では場の再定義による違いとして見えてくる。これが 3.4.4 小節で紹介した Seiberg-Witten 写像の弦理論による説明である。

4.4 非可換ソリトンと D-brane

非可換な時空に於ける場の理論には、トポロジカルでないソリトン解が存在する [GMS][DMR]。このトポロジカルでないソリトン解は、弦理論の弦や D-brane などと関係しており非常に興味深い対象である。

4.4.1 GMS ソリトン

設定とその運動方程式

簡単の為に Euclidian の 2 次元のスカラー場の理論を考える。高次元への拡張は容易であるが、その方法は後回しにする。また後に、$\theta \to \infty$ の極限を取ることを予告しておく。この $\theta \to \infty$ の極限は非可換ソリトンの存在自体には本質的では無く、実際に有限の θ での計算がなされている [Zho][HKL]。

最も簡単な例として非可換 2 次元スカラー場の理論を考える。この理論のハミルトニアンは

$$\mathrm{H} = \frac{1}{g^2}\int dx\, dy\, \left(\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + V(\phi)\right) \tag{4.57}$$

と書くことができる。但し、$V(\phi)$ の中の積は Moyal 積になっている。即ち

$$f \star g(x,y) = \mathrm{e}^{\frac{i}{2}\theta(\partial_{x_1}\partial_{y_2} - \partial_{x_2}\partial_{y_2})} f(x_1,y_1)g(x_2,y_2)\Big|_{x_1=x_2=x, y_1=y_2=y} \tag{4.58}$$

である。また、$V(\phi)$ は ϕ の多項式、

$$V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \sum_{j=3}^{r}\frac{b_j}{j}\phi^j \tag{4.59}$$

となっているとする。

ここで、$\theta \to \infty$ なる極限を考える。すると、運動項が無視できるようになるがそれを見る為に、時空の座標をリスケールして、非可換性が現れる大きさが ~ 1 になるようにする。

即ち

$$\begin{cases} x \to \sqrt{\theta}x \\ y \to \sqrt{\theta}y \end{cases} \tag{4.60}$$

とする。このリスケールによって、(4.58) のハミルトニアンは次のように書きかわる。

$$\mathrm{H} = \frac{1}{g^2}\int dx\, dy\, \left(\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + \theta V(\phi)\right) \tag{4.61}$$

すると、$\theta \to \infty$ の極限では運動項が落ちて、ポテンシャルの項のみが残る。この時、運動方程式は

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \tag{4.62}$$

具体的には、ポテンシャルの形 (4.59) に応じて

$$m^2\phi + b_3\phi\star\phi \qquad \text{for cubic}(r=3) \tag{4.63}$$

$$m^2\phi + b_3\phi\star\phi + b_4\phi\star\phi\star\phi = 0 \quad \text{for quartic}(r=4) \tag{4.64}$$

となる。ただし $b_2 = m^2$ と表記した。

非自明な解の例

この方程式には、可換場の理論の解である $\phi(x,y) = \lambda_i$ (λ_i は運動方程式 (4.63) を可換な多項式と見たときの根) 以外に非可換場の理論特有の解がある。

それは、

$$(\phi_0\star\phi_0)(x) = \phi_0(x) \tag{4.65}$$

を満たすような関数の存在を仮定することで得られる。このような関数が存在するとすれば $\phi_0^n = \phi_0$ なので、

$$\phi = \lambda_i\phi_0 \tag{4.66}$$

は (4.63) の方程式を満たす非自明な解である。

実際に、このような ϕ_0 は存在する。その 1 つは以下のようにして求める。まず、次のようなパケットを考える。

$$\psi_\Delta(r) = \frac{1}{\pi\Delta^2}\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{\Delta^2}} \qquad (r^2 \equiv x^2+y^2) \tag{4.67}$$

次に、運動量空間に移行する。

$$\tilde{\psi}_\Delta(k) = \int \mathrm{e}^{ik\cdot x}\psi_\Delta(x)d^2x = \mathrm{e}^{-\frac{k^2\Delta}{4}} \tag{4.68}$$

運動量空間では、Moyal 積は次のように表わされる、

$$\left(\tilde{f}\star\tilde{g}\right)(p) = \int d^dx\tilde{f}(k)\tilde{g}(p-k)\mathrm{e}^{\frac{i}{2}k_\mu\theta^{\mu\nu}(k-p)_\nu} \tag{4.69}$$

この式を用いて $\tilde{\psi}_\Delta(k)$ 同士の Moyal 積を計算すると、

$$\begin{aligned}\left(\tilde{\psi}_\Delta(r)\star\tilde{\psi}_\Delta(r)\right)(p) &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int d^k\tilde{\psi(k)}\tilde{\psi(p-k)}\mathrm{e}^{\frac{i}{2}\theta\epsilon^{\mu\nu}k_\mu(p-k)_\nu} \\ &= \frac{1}{2\pi\Delta^2}\mathrm{e}^{-\frac{p^2}{8}(\Delta^2+\frac{1}{\Delta^2})}\end{aligned} \tag{4.70}$$

となるから、$\Delta^2 = 1$ の時、$2\pi\tilde{\psi}_1$ は式 (4.65) を満たす。これをもとの座標空間に戻すと、

$$\phi_0(x,y) = 2\mathrm{e}^{-r^2} \tag{4.71}$$

となり、この関数は式 (4.65) を Fourier 変換した物の解になっている。結局最終的な運動方程式 (4.63) の解は次のようになる。

$$\phi = 2\lambda_i\mathrm{e}^{-r^2} \tag{4.72}$$

このような解が存在するのは、非可換空間上の理論で積が Moyal 積になっているおかげである。

Weyl 射影

リスケール後の座標の交換関係は、

$$[\hat{x},\hat{y}] = i \tag{4.73}$$

となる。これは 1 個の生成消滅演算子の成す代数と見ることができる。よって、この 2 次元空間の上の関数の成す環は、1 個の調和振動子から成る Fock 空間に作用するオペレータの成す C* 環と解釈することができる。但し、積を Moyal 積にする為には、オペレータの中の生成消滅演算子のオーダリングを Moyal 積と矛盾しないように上手く取る必要がある。このように、空間を非可換化して関数の成す環から、あるオーダリングを取ったオペレータの成す環に射影することを Weyl 射影という。Weyl 射影は次のようにして定義されている。

$$\hat{O}_f(\hat{x},\hat{y}) = \frac{1}{(2\pi)}\int d^2k\tilde{f}(k)\mathrm{e}^{-i(k_x\hat{x}+k_y\hat{x})} \tag{4.74}$$

この定義はシンメトリックなオーダリングによる定義になっており、Moyal 積とこのオペレータの積は矛盾しない。また、Weyl 射影によって座標空間または運動量空間にわたる積分は、

$$\int d^d x \to (2\pi)^{d/2} \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}, \int d^d k \to \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}} \tag{4.75}$$

ここで与えた Weyl 射影は以外にも、より一般的な Weyl 射影を定義をすることが可能である。即ち、生成消滅演算子を別のオーダリングにしても良い。しかしその時には、もはや積は Moyal 積ではない別の積である。異なるオーダリングをとる操作は 2.2 節で説明した変形量子化のゲージ変換に相当している。

より一般的な非自明解

式 (4.65) を満たすようなより一般の解を求める。便宜の為に、新たに $a^\dagger$ と a という演算子を次のように定義する。

$$\begin{cases} a^\dagger = \frac{\hat{x} - i\hat{y}}{\sqrt{2}} \\ a = \frac{\hat{x} + i\hat{y}}{\sqrt{2}} \end{cases} \tag{4.76}$$

これらの演算子の交換関係は

$$[a, a^\dagger] = 1 \tag{4.77}$$

となる。こうした時の Weyl オーダリングによる Weyl 射影は、

$$\hat{O}_f(\hat{x}, \hat{y}) = \frac{1}{(2\pi)} \int d^2 k \tilde{f}(k) \mathrm{e}^{-i(k_z a^\dagger + k_{\bar{z}} a)} \tag{4.78}$$

但し、$k_z, K_{\bar{z}}$ は

$$\begin{cases} k_z = \frac{k_x + i k_y}{\sqrt{2}} \\ k_{\bar{z}} = \frac{k_x - i k_y}{\sqrt{2}} \end{cases} , k_x x + k_y y = k_{\bar{z}} a + k_z a^\dagger \tag{4.79}$$

のように定義されている。

この、生成消滅演算子によって作られる Fock 空間の基底を、習慣に従って $|n\rangle$ その双対基底を $\langle n|$ と書く。

ところで、Fock 空間上のオペレータ $|m\rangle\langle n|$ は生成消滅演算子の言葉を使って、次のように表わすことができる。

$$|m\rangle\langle n| =: \frac{a^{\dagger m}}{\sqrt{m!}} \mathrm{e}^{-i a^\dagger a} \frac{a^n}{\sqrt{n!}} : \tag{4.80}$$

このとき、$a^\dagger$ を先頭に持って行き a を末尾に持って行くオーダリング (ノーマルオーダリング) を $: \cdots :$ と表記した。ノーマルオーダリングは Moyal 積と両立しない事を注意すべきである。

ここで、式 (4.65) はオペレータの成す環の冪等な射影演算子を表わしていると解釈できる。

$|n\rangle\langle n|$ の (係数 1 の) 和は式 (4.65) を満たすような射影演算子である。これを Moyal 積と矛盾しないようなオーダリングに直し、それを元の関数に対応させるという操作をすることで、関数の

ここで、Campbell-Baker-Housdorff 公式を用いると、

$$\mathrm{e}^{-i(k_x\hat{x}+k_y\hat{y})} = \mathrm{e}^{-i(k_{\bar{z}}a+k_z a^\dagger)} = \mathrm{e}^{\frac{k_z k_{\bar{z}}}{2}} : \mathrm{e}^{-i(k_{\bar{z}}a+k_z a^\dagger)} := \mathrm{e}^{\frac{k^2}{4}} : \mathrm{e}^{-i(k_x\hat{x}+k_y\hat{y})} : \tag{4.81}$$

であるから、運動量基底では同じ関数をノーマルオーダリングによる Weyl 射影で映した演算子 $\mathcal{O}_N$ と Weyl オーダリングの演算子による Weyl 射影で定義した演算子 $\mathcal{O}$ との間の関係を運動量基底で表わすと次のようになる。

$$\mathcal{O}_N(k) = \mathrm{e}^{\frac{k^2}{4}}\mathcal{O}(k) \tag{4.82}$$

何故なら、

$$\begin{aligned} : \tilde{f}(a^\dagger, a) : &= \frac{1}{(2\pi)}\int dk\, \tilde{f}(k) : \mathrm{e}^{k_x\hat{x}+k_y\hat{y}} : \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int dk\, \tilde{f}(k)\, \mathrm{e}^{\frac{-k^2}{4}}\mathrm{e}^{k_x\hat{x}+k_y\hat{y}} \end{aligned} \tag{4.83}$$

であるからである。この式を用いて、$|n\rangle$ の空間のノーマルオーダリングで定義した演算子から Weyl オーダリングの演算子に対応した関数を求めることができる。即ち、ノーマルオーダリングの演算子の中にある $\hat{x}, \hat{y}$ をノーマルオーダリングのまま x, y に直した関数を f_N と書く。これは、ノーマルオーダリングによる逆 Weyl 射影である。更に、f_N を Fourier 変換したものを $\tilde{f}_N$ と書けば、

$$\tilde{f}(k) = \mathrm{e}^{\frac{k^2}{4}}\tilde{f}_N(k) \tag{4.84}$$

であり、こうして求まった $\tilde{f}(k)$ を逆 Fourier 変換すれば良い。

今 $|0\rangle\langle 0|$ に Weyl 写像で対応する関数を求める。ノーマルオーダリングでの $\mathrm{e}^{-a^\dagger a}$ に対応する関数を $\tilde{f_N}(k)$ とすれば、

$$\mathrm{e}^{-a^\dagger a} = \left[\mathrm{e}^{-(\hat{x}^2+\hat{y}^2)/2}\right] \tag{4.85}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int d^2k\, \tilde{f}(k)\mathrm{e}^{-i(k_x\hat{x}+k_y\hat{y})} \tag{4.86}$$

より、$\tilde{f_N} = \mathrm{e}^{\frac{-k^2}{2}}$ だから、$\mathrm{e}^{-a^\dagger a}$ を Weyl オーダリングに直したものに対応する関数を $\tilde{f}$ とすれば、$\tilde{f} = \mathrm{e}^{\frac{-k^2}{4}}$ となる。更に逆フーリエ変換をして

$$\tilde{f}(x, y) = 2\mathrm{e}^{-r^2} \tag{4.87}$$

となるが、これはまさに先程求めた解になっている。

$|n\rangle\langle n|$ に対応した解は次のように与えられる。

$$|n\rangle\langle n| \to 2(-1)^n \mathrm{e}^{-r^2} L_n(2r^2) \equiv \phi_n \tag{4.88}$$

また射影演算子には対応しないが、$|m\rangle\langle n|$ を逆 Weyl 変換して得られた関数を ϕ_{mn} と書くことにする。当然 $\phi_n = \phi_{nn}$ である。

$$|m\rangle\langle n| \to \phi_{mn} \tag{4.89}$$

但し L_n は n 次の Laguerre 多項式である。この解は、次のようにして求められる。今、$|n\rangle\langle n|$ からオーダリングを変更せずに関数に直した関数を $f_N^n(x) \equiv \frac{\frac{r^2}{2}\mathrm{e}^{r^2/2}}{n!}$ とすると

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}(-t)^n f_N^n(x) &= \mathrm{e}^{-\frac{(1+t)r^2}{2}} \\
\frac{1}{2\pi}\int d^2x\, \mathrm{e}^{-\frac{(1+t)r^2}{2}} \mathrm{e}^{i(k_x x + K_y y)} &= \frac{1}{1+t}\mathrm{e}^{-\frac{k^2}{2(1+t)}} \\
\frac{1}{1+t}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2(1+t)}}\mathrm{e}^{k^2/4} &= \frac{1}{1+t}\mathrm{e}^{-\frac{1-t}{4(1+t)}k^2} \\
\frac{1}{2\pi}\int d^2k\, \frac{1}{1+t}\mathrm{e}^{-\frac{1-t}{4(1+t)}} &= 2\frac{\mathrm{e}^{-2r^2\frac{s}{1-t}}}{1-t}\mathrm{e}^{-r^2} \\
&= 2\sum_{n=0}^{\infty} t^n L_n \mathrm{e}^{-r^2} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-t)^n \phi_n
\end{aligned} \tag{4.90}$$

但し、Laguerre 多項式の母関数

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n L_n = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{xt}{1-t}}}{1-t} \tag{4.91}$$

を用いた。t^n の係数を較べると式 4.88 を得る。

これらの解のそれぞれに λ_i をかけて足し合わせたもの解になっている。

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_n \phi_n \qquad (a_n \in \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}) \tag{4.92}$$

更に、これらの解を $|n\rangle$ の足に関して $U(\infty)$ で回転してもまた異なる解を作ることができる。この $U(\infty)$ の対称性とは即ち、

$$\begin{cases} \phi \to U\phi U^\dagger \\ a^\dagger \to U a^\dagger U^\dagger \\ a \to U a U^\dagger \end{cases} \Rightarrow \frac{2\pi\theta}{g^2}\mathrm{Tr}V(\phi) \tag{4.93}$$

というもので、オペレータの言葉で書かれた $\theta \to \infty$ 極限でのハミルトニアンを不変にしている。ここで $Ua^\dagger U^\dagger, UaU^\dagger$ は $\hat{x}, \hat{y}$ との直接の関係が無いことに留意すべきである。その結果、運動項は $U(\infty)$ の対称性を壊してしまうので、この $U(\infty)$ の対称性は $\theta \to \infty$ の極限でのみ存在する対称性である。

結局こうして作られた解をオペレーターの言葉でみると

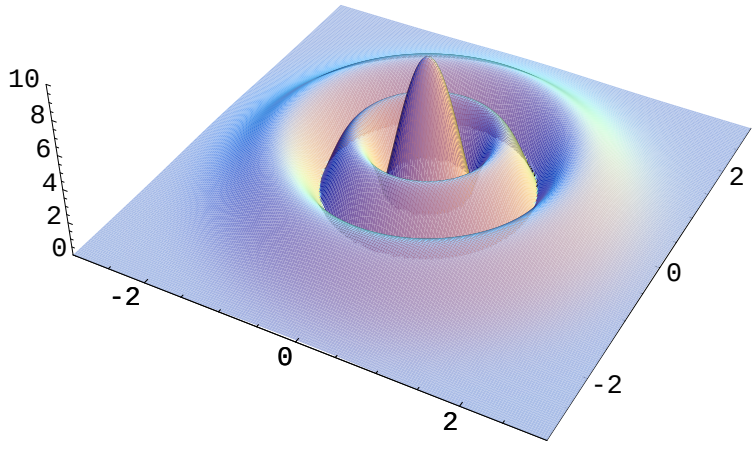
$$U\left(\sum_n a_n |n\rangle\langle n|\right)U^\dagger \qquad (a_n = \lambda_1, \lambda_2, \dots) \tag{4.94}$$

となり、これは一般にはエルミート演算子である。エルミート演算子は一般に非対角成分を持つので、(4.92) のように回転対称性を持つとは限らない。即ち、(4.80) を思いだすと、$a^\dagger$ と a の数が一致しないので、オーダリングを変えたところで $a^\dagger$ と a の数の差は変らず、$r^2 \sim a^\dagger a$ のみの関数にはなり得ない。

最後に、このようにして得られたソリトン解をいくつか図示してみる。

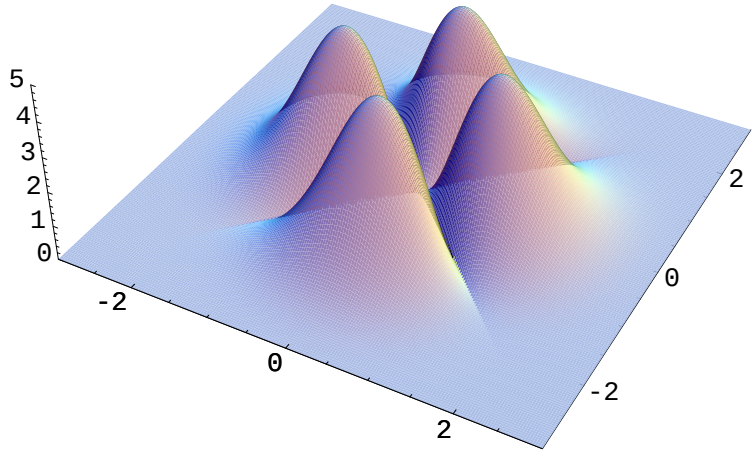
1. 回転対称なソリトン解 ϕ_3

$$\phi_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \ddots \end{pmatrix} =$$



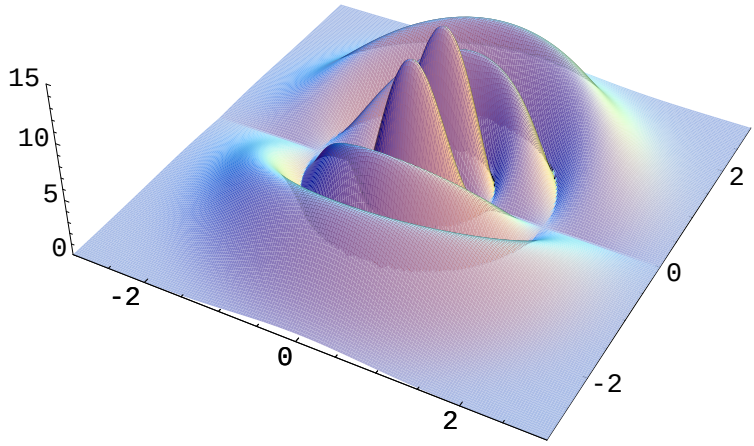
2. 回転対称でないソリトン解 I

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} =$$



3. 回転対称でないソリトン解 II

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & i & \cdots \\ 0 & 0 & -i & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} =$$



高次元への拡張

これまでは 2 次元ユークリッド空間の場合を考えてきたが、それを $d+1$ 次元 ($+1$ は時間) の場合に拡張する。ただし時間方向は非可換性に含まれないとする。場の理論で時間方向に非可換性を入れた場合、その拡張は簡単である。

まず、$\theta^{\mu\nu}$ は反対称行列であるが、適当な座標の直交変換によって

$$\theta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & \theta_1 \\ -\theta_1 & 0 \end{matrix} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \begin{matrix} 0 & \theta_2 \\ -\theta_2 & 0 \end{matrix} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \begin{matrix} 0 & \theta_{[d/2]} \\ -\theta_{[d/2]} & 0 \end{matrix} \end{pmatrix} \tag{4.95}$$

となるようにすることができる。すると 2 次元の場合に帰着させることができる。こうして

得られたソリトン解は、ただのソリトン解か自明な解 $(\phi(x) = \lambda_i)$ の積になっている。

解の安定性

ソリトン解を得ることはできたが、これらのソリトンが安定なものとして存在しているかどうかは自明ではない。それを確認する。

今考えている理論は、(4.93) で示したような $U(\infty)$ の対称性をもっているのでそれを用いて、ソリトン解をオペレータの言葉で $|n\rangle$ の基底について対角に持っていくことができる。そのときの解は、

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_n & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \tag{4.96}$$

のような形になっている。但し、a_n は先に述べたように、ポテンシャル V の停留点 λ_i に値をとる。この解のエネルギーは

$$\begin{aligned} E &= \frac{2\pi\theta}{g^2}\mathrm{Tr}V(\phi) \\ &= \frac{2\pi\theta}{g^2}\sum_{n=0}^{\infty} V(a_n) \end{aligned} \tag{4.97}$$

となる。したがって、a_n がポテンシャル V の極小値であれば、摂動論的には安定であることが分かる。

更に、$\theta \to \infty$ の極限では、場のエネルギーが θ に比例しているので、ポテンシャルの他の極小値や負の無限大へのトンネルは抑制されるので非摂動論的にも安定である。

θ が有限の時の GMS ソリトン

GMS ソリトンは非可換場の理論特有の対象である。したがって、θ を有限にしてその絶対値を 0 にすると GMS ソリトンは無くなってしまうことが予想される。それは事実であり、実際には θ の減少に伴なって GMS ソリトン解が無くなってしまうことが分かる。[Zho]

θ が有限の時は、運動項を考えなくてはならない。まず、微分は座標のリスケールの後、

$$\begin{cases} \partial_x \to i[\hat{y}, \cdot] = \frac{1}{\sqrt{2}}[a - a^\dagger, \cdot] \\ \partial_y \to -i[\hat{x}, \cdot] = -i\frac{1}{\sqrt{2}}[a + a^\dagger, \cdot] \end{cases} \tag{4.98}$$

と書くことができる。すると、

$$\int dxdy\,\frac{1}{2}\left(\partial_x\phi^2+\partial_y\phi^2\right)=\pi\mathrm{Tr}([a^\dagger,\hat{\phi}][a,\hat{\phi}]) \tag{4.99}$$

ところで、この運動項は $a^\dagger$ や a を含んでいるので、先に述べた $U(\infty)$ の対称性を壊してしまう。よって、回転対称な解に常に持っていけるとは限らないが、ここでは回転対称な 4.92 のような解のみを考える。すると、オペレータの言葉で書かれたハミルトニアンは、

$$\mathrm{H}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4}[(2n+1)a_n^2-2(n+1)a_na_{n+1}]+\theta V(a_n) \tag{4.100}$$

となる。古典的な解は

$$\frac{\partial\mathrm{H}}{\partial a_n}=0 \tag{4.101}$$

によって得ることができる。これは、

$$\begin{cases}(n+1)a_n-(2n+1)+na_{n-1}=2\theta V'(a_n) & (n\geq 1)\\ a_1-a_0=2\theta V'(a_0) & (n=0\text{に対応})\end{cases} \tag{4.102}$$

という無限個の差分方程式になる。各式を N まで足し合わせると、θ 有限の時の回転対称なソリトン解のオペレーターによる表現の対角成分 a_n の満たすべき式の最終形は、

$$a_{N+1}-a_N=\frac{2\theta}{N+1}\sum_{n=0}^{N}V'(a_n) \tag{4.103}$$

という式になる。更に、エネルギーが有限であることを要求すると、

$$\begin{cases}a_n\to 0 \quad (n\to\infty)\\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}V'(a_n)<\infty\end{cases} \tag{4.104}$$

という必要条件がでる。

ここで、θ を 0 に近づけることを考えてみる。GMS ソリトンは時空の非可換性があって始めて存在するものであることから、$\theta\to 0$ で GMS ソリトンは消えてしまうはずである。設定として、$T=0$ を真の真空にとって考える。(4.103) を見ると、θ は a_n が動く幅を規定していることが分かる。θ が十分小さい時は、a_n の変化が非常に小さいので式 (4.103) の右辺は積分として良い近似になる。即ち、

$$\begin{aligned}a_{n+1}-a_n\simeq 2\theta\int_{a_0}^{a_n}da\,V'(x)&=2\theta(V(a_n)-V(a_0))\\ &\xrightarrow{n\to\infty}-2\theta V(a_0)\end{aligned} \tag{4.105}$$

となる。よって、(4.104) を満たす為には、$V(a_0)=0$ 即ち $a_0=0$ でなくてはならない。しかし、この初期条件で差分方程式 (4.103) を解くと、自明な解しか与えない。よって、θ が

十分小さくて、差分方程式 (4.103) の右辺の和を積分として見ることができるときは、自明な解しか無いことが分かった。

これ以上の議論を進めるためには具体的にポテンシャルの形を与えて数値的な計算を行なわなくてなならない。ポテンシャルの形を与えて数値的に解析した議論は [Zho] でなされている。

θ が有限でゲージ場がある時

上で見たように、スカラー場だけの時には θ 有限で非自明な解を構成しようとしても結局差分方程式に帰着するのみだが、ゲージ場が存在する時には運動項が入っていても $U(\infty)$ の対称性が回復する[1]ので、解析的な厳密解を構成することができる。

まず、具体的な解を求める前にオペレーター形式で $U(\infty)$ 対称性が存在する時にソリトン解を構成する一般的な方法 [HKL] について説明する。

今、Hilbert 空間に作用する演算子 U を考えると、U の作用は

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &\to U|\psi\rangle \\ \langle\psi| &\to \langle\psi|U^\dagger \\ \mathcal{O} &\to U\mathcal{O}U^\dagger \end{aligned} \tag{4.106}$$

となる。もし U が isometry である即ち

$$UU^\dagger = 1 \tag{4.107}$$

を満たし、しかしながらユニタリではならば、変換 U によって運動方程式の解は別の解へと変換される。(U がユニタリならば本質的に同じ解へと変換される。) 何故ならば、物理的自由度を表わす演算子等を含む一般の演算子に対して

$$\frac{\delta S}{\delta \mathcal{O}} \to U\frac{\delta S}{\delta \mathcal{O}}U^\dagger \tag{4.108}$$

となるから、経路積分の極値を与えるような配位を別の経路積分の極値を与えるような配位に変換するからである。このような変換 U を solution generating transformation という。

ここで、Hilbert 空間として 1 個の調和振動子が成す Fock 空間を考える。shift operator$S$、

$$S \equiv \sum_{k=o}^{\infty} |k+1\rangle\langle k| \tag{4.109}$$

は、

$$S^{*n}S^n = 1, \quad S^nS^{*n} = 1 - P_n \tag{4.110}$$

[1] $U(\infty)$ の無限小変換 $1+\lambda(\lambda$:Hermite) に対して $A_\mu \to A + \partial_\mu\lambda$ とすればよい。

という関係を満たす。但し、

$$P_n = \sum_{k=0}^{n-1} |k\rangle\langle k| \tag{4.111}$$

である。S^n は式 (4.107) を満たすので solution generation transformation である。今 $S^n S^{*n}$ は Hilbert 空間の $|0\rangle \sim |n-1\rangle$ に於いてのみユニタリ変換でない。$|n\rangle$ は半径 $\sqrt{n\theta}$ の領域に対応していたから、解生成変換 S^n によって、半径 $\sqrt{n\theta}$ の非可換ソリトンを作ることができると考えることができる。

具体的な計算に移ると、今考える作用は

$$\int dxdy \left(\frac{1}{2}(F_{xy})^2 + \frac{1}{2}D^\mu\phi D_\mu\phi - V(\phi)\right) \tag{4.112}$$

である。これを座標のリスケールの後に、オペレーターの言葉に書き直す。便宜の為、ゲージ場は次のように表記することにする。

$$A \equiv A_z = -\frac{i}{\sqrt{2}}(A_x - iA_y), \quad \bar{A} \equiv A_{\bar{z}} = -\frac{i}{\sqrt{2}}(A_x + iA_y) \tag{4.113}$$

次に共変微分をオペレーターの言葉で書くことを考える

$$C^* \equiv a + i\theta^{\frac{1}{2}}A, \quad C \equiv a^\dagger - i\theta^{\frac{1}{2}}\bar{A} \tag{4.114}$$

とすると、

$$\frac{1}{\sqrt{2}}[D_x - iD_y, \phi] = -[C, \phi]\frac{1}{\sqrt{2}}[D_x + iD_y, \phi] = [C^*, \phi] \tag{4.115}$$

この共変微分を使って field strength はオペレーターの言葉で次のように書ける。

$$F \equiv -F_{xy} = -i[a^\dagger, \bar{A}] - i[a, A] + \theta^{\frac{1}{2}}[A, \bar{A}] = \theta^{-\frac{1}{2}}([C, C^*] + 1) \tag{4.116}$$

結局、オペレーター形式で書かれたハミルトニアンは

$$\mathrm{H} = 2\pi\mathrm{Tr}\left(\frac{1}{2}([C, C^*] + 1)^2 + [C, \phi][C^*, \phi] + \theta V(\phi)\right) \tag{4.117}$$

となる。この系の自明な解は ϕ_* を $V(\phi)$ の極小値を与える ϕ の値とし、更に $V(\phi_*) = 0$ すれば、

$$\begin{aligned} &\phi = \phi_* \\ &A = 0 \Rightarrow C^* = a,\ C = a^\dagger \end{aligned} \tag{4.118}$$

である。これを先の solution generating transformation によって別の解に写すと、

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_*(1 - P_n) \\ C^* &= S^n a S^{*n},\ C = S^n a^\dagger S^{*n} \end{aligned} \tag{4.119}$$

となる。これは非自明な解である。この時 field strength は、

$$F = \theta^{-\frac{1}{2}}([C^*, C] - 1) = \theta^{-\frac{1}{2}}(S^n S^{*n} - 1) = \theta^{-\frac{1}{2}} P_n \tag{4.120}$$

であり、$[C^*, S^n S^{*n}] = 0$ となるから、この解の持つエネルギーは

$$E = 2\pi n \left(\frac{1}{2\theta} + \theta V(0) \right) \tag{4.121}$$

となる。

4.4.2　D-brane と GMS ソリトン

D-brane や F-string は最大限に非可換性を入れた極限即ち、$B \to \infty$ の極限で GMS ソリトンに関係している[2]らしい証拠がいくつかある [HKLM]。ここではその証拠をいくつか示す。

D-brane のテンション

まず、Dp-brane のテンション T_p と D(p-1)-brane のテンションの関係を求める。まず、半径 $R_1, \ldots, R_p$ の p-トーラスに巻きついた D-brane を考える。すると、その質量は

$$T_p \mathrm{e}^{-\Phi} \prod_{i=0}^{p} 2\pi R_i \tag{4.122}$$

ただし、Φ はディラトン場である。p-方向の T-dual を取ると、質量は変化しないがディラトン場が非自明な変換

$$\mathrm{e}^{\Phi'} = \frac{{\alpha'}^{1/2}}{R} \mathrm{e}^{\Phi} \tag{4.123}$$

で結ばれていて、また p-方向の体積積分が減るので、

$$2\pi {\alpha'}^{1/2} T_p \mathrm{e}^{-\Phi'} \prod_{i=1}^{p-1} 2\pi R_i \tag{4.124}$$

と書ける。よって

$$T_{p-1} = 2\pi {\alpha'}^{1/2} T_p \tag{4.125}$$

である。よって、Dp-brane のテンションは

$$T_p = (2\pi\alpha')^{\frac{25-p}{2}} T_{25} \tag{4.126}$$

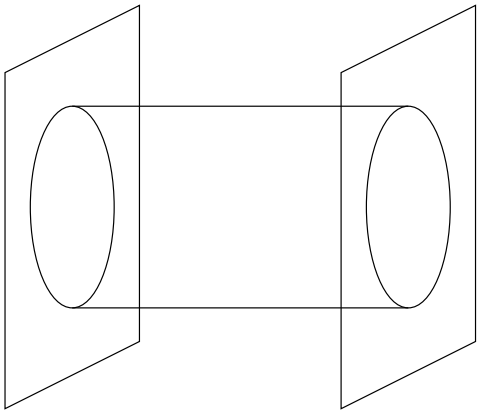


図 4.10: 開弦の生成消滅

次に、テンションの具体的な値を計算する。この計算は、図 4.10 弦理論による tree-level での計算でのグラビトンの交換の振幅と、弦理論の低エネルギー有効理論である重力場の理論と Dirac-Born-Inferd(テンションをパラメータとして含む) を組み合わせた場の理論 4.10 に対応するようなグラビトンの交換の振幅を現わすプロパゲーターを比較することでなされる。計算の詳細を述べると長くなるので、詳細は Polchinski の教科書 [Pol, p273∼p277] に任せる。

この計算により得られた解は、

$$T_p \mathrm{e}^{-\Phi} = \frac{\sqrt{\pi}}{8\kappa}(4\pi\alpha')^{\frac{11-p}{2}} \qquad \left(\kappa = 2\pi \mathrm{e}^{\Phi}\right) \tag{4.127}$$

となる。

タキオン場のソリトンの質量

次にタキオン場のソリトンの質量を求める。タキオン場の作用を求めるに当たり、String Field Theory から予想されている仮説 (詳細は [Sen][HK][BSZ]) についての説明をしなくてはならない。bosonic な弦理論での D25-brane はタキオン場を持っているが、そのポテンシャルは図 4.11 のような形をしており (但し、ここでポテンシャルは $T = T_*$ の時 $V(T_*) = 1$ になるように正規化してある。)、D25-brane がある真空は、図 4.11 の $T = T_*$ の点に対応している。タキオンが凝縮することによって、$T = 0$ の D25-brane の無い open string vacuum に行くと信じられている。

B 場が入れ、重い場を積分して、得られるタキオン場の有効作用は

$$S = -\frac{T_{25} g_s}{G_s} \int d^{26} \sqrt{G} \left(\frac{1}{2} f(T) G^{\mu\nu} \partial_\mu T \partial_\nu T + \cdots - V(T) \right) \tag{4.128}$$

[2]非可換性を入れなくてもタキオン場のソリトン解が Dp-brane と関係しているらしい証拠もいくつかある [HK][dMKJMT]。

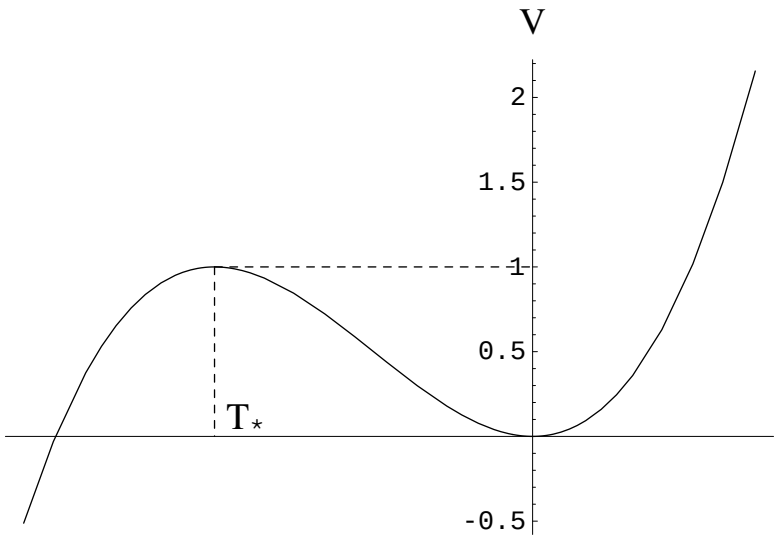


図 4.11: タキオン場のポテンシャル

但し $G_s, G^{\mu\nu}$ は (4.40) で定義した open string のメトリックとカップリングである。更に、GMS ソリトン解を導出する際に行なったように $B \to \infty$ の極限を取り、$x_{24} \to \sqrt{\theta} x_{24}, x_{25} \to \sqrt{\theta} x_{25}$ と積分変数のリスケールを行い x_{24}, x_{25} 積分をオペレータ形式のトレースに書き換えて、ハミルトニアンを得ると、

$$\mathrm{H} = \frac{2\pi T_{25} g_s \theta}{G_s} \int d^{24}x \sqrt{G} \sum_{n=0}^{\infty} V(a_n) \qquad (a_n \in \{0, T_*\}) \tag{4.129}$$

となる。

ここで式 (4.92) の $a_0 = T_*, a_n = 0 (n \geq 1)$ なる解を考えると、

$$\mathrm{H} = (2\pi)^2 \alpha' T_{25} \int d^{24}x \sqrt{g} = T_{23} \int d^{24}x \sqrt{g} \tag{4.130}$$

となり、テンションは D23-brane のそれと一致する。さらに、式 (4.92) で $a_0, a_1, \ldots, a_k = T_*, \quad a_{k+1}, \ldots = 0$ なる解を考えると、そのテンションは k 枚の D23-brane のテンションに一致する

この計算は任意の偶数次元の D-brane のテンションに拡張できることも自明である。

以上の事実から、不安定な D-brane の上のタキオン場が GMS ソリトンとしての配位を持つときには、D25-brane が closed string vacuum に行くと同時に D$(25-2n)$-brane が残るということが推測される。

ゲージ場へのカップリング

GMS ソリトンを D-brane と同定する為には、ゲージ場へのカップリングが D-brane と同じであることを示さなくてはならない。

まずは、D-brane 上のゲージ場とタキオン場を含む作用を書き下さなくてはならないが、今考えている理論は非可換空間上での理論であるから、ゲージ理論の部分は非可換ゲージ理論になっている。すなわちゲージ変換は、

$$\delta_\lambda A_\mu = \partial_\mu \lambda - i[A_\mu, \lambda]_\star \tag{4.131}$$

となっていて。Field Strength は

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i[A_\mu, A_\nu]_\star \tag{4.132}$$

と書かれる。ここで、タキオン場は非可換ゲージ変換によって adjoint に変換する。即ち、

$$\delta_\lambda T = -i[t, \lambda]_\star \tag{4.133}$$

となる。

ゲージ場とタキオン場の作用は次のような形をしている。

$$S = \frac{g_s T_{25}}{G_s} \int d^{26}\sqrt{G} \left(\frac{1}{2} f(T) D^\mu T D_\mu T - V(T) - \frac{1}{4} h(T) F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right) \tag{4.134}$$

これを非可換な 2 次元の方向と可換な 24 次元の方向に分解する。ここで、GMS ソリトンの導出の時と同じセットアップを考えるので、非可換方向の微分は無視してよい。非可換方向の座標を i, j それ以外の座標を $a, b, \ldots$ すると、

$$S = \frac{g_s T_{25}}{G_s} \int d^{26}\sqrt{G} (\frac{1}{2} f(T) D^a T D_a T - \frac{1}{2} h(T) D^a A_i D_a A^i - V(T) - \frac{1}{2} f(T) [A_i, T]_\star [A^i, T]_\star + \frac{1}{4} h(T) [A_i, A_j]_\star [A^i, A^j]_\star - \frac{1}{4} h(T) F^{ab} F_{ab}) \tag{4.135}$$

となる。もはや、A_i はスカラー粒子であり、adjoint のゲージ変換性を持っている。

今、非可換方向に GMS ソリトン解 $T = T_* \phi_0$ からのフラクチュエーションを考え、非可換方向の理論をオペレーター形式に書き直す。即ち、

$$T = T_* \phi_{00} + \sum_{m,n=0}^{\infty} T^{mn} \phi_{mn} \tag{4.136}$$

$$A_a(x^\mu) = \sum_{m,n=0}^{\infty} A_a^{mn}(x^b) \phi_{mn} \tag{4.137}$$

$$A_i(x^\mu) = \sum_{m,n=0}^{\infty} A_i^{mn}(x^b) \phi_{mn} \tag{4.138}$$

ここで、ϕ_{mn} はすると、ϕ_{00} にかかる部分すなわち D7-brane に関わる部分だけを抜き出すと (00 の足は便宜の為に省略する。)、

$$S = T_2 3 \int d^{24}x\sqrt{g}\left(\frac{1}{2}f(T_*)\partial^a\delta T\partial_a\delta T - V(T_*+\delta T) + \frac{1}{2}h(T_*)\partial^a A_i\partial^a A^i - \frac{1}{4}h(T_*)F^{ab}F_{ab}\right) \tag{4.139}$$

これは正に D23-brane のタキオンと brane に垂直方向の座標の力学を記述する作用になっている。

4.4.3　D-brane チャージと K-theory

2.3 節で見たように、K-theory は非可換幾何学において一般の幾何学のコホモロジーの役割を果たしている。D-brane チャージと K-theory の関係は、弦理論の本質が非可換幾何学であることの状況証拠と見ることができる。ここでは、D-brane チャージと K-theory の関係について説明する。

分類空間と非可換ソリトン

今、Dp-brane が多様体 $X\times\mathbb{R}^{2n}$ に巻きついていると考える。前の肢節で $\mathbb{R}^{2n}$ 方向へのタキオンの GMS ソリトン解が D$(p-2n)$-brane に対応していることを説明した。今、非可換空間上の関数のなす C* 環は n 個の調和振動子の成す Fock 空間に作用する作用素の成す環 $\mathcal{B}$ と見做すことができた。すると、この Dp-brane の上の関数の成す環 $C_0(X\times\mathbb{R}^{2n})$ の元であるタキオン場は、$C_0(X\times\mathbb{R}^{2n}) = C^\infty(X)\otimes\mathcal{B}$ であるから、この Dp-brane 上の関数 T は

$$T : X \to \mathcal{B} \tag{4.140}$$

という多様体 X から $\mathcal{B}$ への写像の成す連続写像であると見ることができる。但し連続とは、$\mathcal{B}$ の norm トポロジーによって定義されている。4.4.2 節で説明したように、GMS ソリトンは射影演算子と見ることができる。今、タキオン場 T のポテンシャルが図 4.11 の形をしていることを仮定すると、停留点は $T = T_*, 0$ の 2 つであるから、GMS ソリトン解はそのランクによって特徴づけることができる。Rank(n) の射影演算子のなす空間は Grassmann 多様体 $G(n)$ として知られている。したがって、タキオン場が Rank(n) の GMS ソリトンを形成しているとき、

$$T : X \to G(n) \tag{4.141}$$

と書くことができる。

今興味を持っている Hilbert 空間は無限次元であるが、仮に有限次元の Hilbert 空間 $\mathbb{C}^k$ の中の射影演算子の空間を考えるとそれは、$G_k(n) = U(k)/(U(k)\times U(k-n))$ である。無限次元の Hilbert 空間の Rank(n) の射影演算子の成す空間 $G(n)$ はこの帰納的極限 $\lim_{k\to\infty} G_k(n)$ として定義されている。

実は、Grassmann 多様体 $G(n)$ は複素ベクトル束の分類空間であることが知られている。分類空間とは以下のような性質を満すものとして定義されている。

定義 4.4.1 (分類空間)
以下の性質を満たす空間を分類空間 $BU(n)$ という

B1 任意の多様体 M 上の Rank $= n$ 複素ベクトル束のホモトピー同値類が M から $BU(n)$ への連続写像のホモトピー同値類に集合として等しい。

さらに、この Grassmann 多様体は $G(n)$ は、$U(n)$ ゲージ束の分類空間でもある。以上の事を考え併わせると、$X \times \mathbb{R}^{2n}$ の上の GMS ソリトン解の分類が X 上のベクトル束のトポロジカルな性質と対応していることになる。

コホモロジーから K-theory へ

String field theory から予想される D-brane と antiD-brane の対消滅は D-brane をチャージの分類をコホモロジーによってではなく K-theory で行なわなくてはならないことを示唆している。

D-brane が持つチャージは、D-brane の上にあるゲージ場の chern 類によって計算される。今、ある多様体 X に巻きついた D-brane と anti D-brane を考える。D-brane のもつ D-brane チャージは D-brane 上のゲージ束 E の chern 類により計算することができ、一方 antiD-brane のチャージもやはり antiD-brane 上のゲージ束 F の chern 類によって計算できる。よって、D-brane antiD-brane 系のチャージは (E, F) というペア[3]によって表記されることが分かる。

しかし、D-brane antiD-brane の対生成を考えると、この (E, F) という表記の仕方は冗長[4]であることが分かる。何故ならば、同じゲージ束 G を持った D-brane と antiD-brane が対生成しても、チャージは保存しなくてはならないので以下のような同値関係がある筈であるからである。

$$(E, F) \sim (E \oplus G, F \oplus G) \tag{4.142}$$

この同値関係によるゲージ束のペアの同値類はまさに付録の B.1 節で定義する幾何学的 K 群に他ならない。よって、D-brane antiD-brane 系のチャージは K 群を用いて計算されるべきである。

Dp-brane の D$(p-2)$-brane チャージ

いま、Dp-brane が多様体 $X \times \mathbb{R}^2 (\dim X = p-1)$ に広がっているとする。但し $\mathbb{R}^2$ は空間的な方向であるとする。この Dp-brane が $\mathbb{R}^2$ の方向に非可換性を持つとき、4.4.2 節で議論したように、それを $\mathbb{R}^2$ 方向の GMS ソリトンと解釈することができた。今、次の事実を思い出してみる。

[3]正確には、そのホモトピー同値類
[4]前述のホモトピー同値類による冗長性ではない。

- X 上のベクトル束のホモトピー同値類と $\mathbb{R}^2$ 方向に GMS ソリトンを成すようなタキオン場のホモトピー同値類は集合として一致していた。
- GMS ソリトンは非可換 $\mathbb{R}^2$ の上の関数の C* 環の射影演算子で記述することができた。
- C* 環の K-theory は C* 環の射影演算子の同値類により定義されていた。

すると、非可換方向の C* 環の K-theory で、Dp-brane の $U(n)$ ゲージ束として実現されている D$(p-2)$-brane のチャージの分類を、GMS ソリトン場の成す C* 環の K-theory で分類できないかということに思い至る。

実際に非可換 $\mathbb{R}^2$ の上のコンパクトな関数環は $\mathbb{K}$ である。この C* 環の K-theory を考えると、

$$K(\mathbb{K}) = \mathbb{Z} \tag{4.143}$$

である。これは、我々が知っている Dp-brane が持ち得る D$(p-2)$-brane のチャージと一致している。すなわち、Dp-brane に n 枚の D$(p-2)$-brane とと m 枚の antiD$(p-2)$-brane が重なっているときの D$(p-2)$-brane チャージは $m-n$ であり、チャージ全体の集合は $\mathbb{Z}$ である。

4.4.4　TypeIIB 理論での Toeplitz 代数と指数定理

$B \to \infty$ 極限での代数の分解

弦理論に表われる OPE 代数はいくつかの部分代数を持っている。その中でも、$\mathcal{A}_0$ を可換な方向の弦の重心座標に依らない部分代数すなわち、$b, c, \partial X, \partial^2 X, \ldots$ とその積からなる代数とする。この代数 $\mathcal{A}_0$ が代数として閉じているとは運動量の保存から直感的に理解できる。[5]また、$\mathcal{A}_1$ を p 非可換方向の運動量として、$\mathrm{e}^{iX\cdot p}$ の形の元からなる集合とする。この集合は普通は OPE 代数として閉じないが $B \to \infty$ の極限をとることでこの集合を OPE 代数として閉じさせることができる。更には、OPE の代数全体 $\mathcal{A}$ は $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \otimes \mathcal{A}_1$ と分解する。

まず最初にこの分解を確かめる。B 場の存在する時の world sheet の境界上のバーテックス演算子 X^i の OPE 即ち、propagator は式 (4.41) で既に求めたように、

$$X^i(\tau)X^j(\tau') \sim -\alpha' \left(\frac{1}{g+2\pi\alpha' B}\right)_{\text{対称}} \ln(\tau-\tau')^2 - i\pi\alpha' \left(\frac{1}{g+2\pi\alpha' B}\right)_{\text{反対称}} \epsilon(\tau-\tau') \tag{4.144}$$

のような形になる。ここで、$B \to \infty$ の極限を取り更に X のリスケールを行なう。$B \to tB$ と置き換えて、$X^i \to X^i/\sqrt{t}$ と置き換えて、$t \to \infty$ の極限を取ると、先に求めた propagator は

$$X^i(\tau)X^j(\tau') \sim \begin{cases} \frac{i}{2}\theta^{ij}\epsilon(\tau-\tau') & (i,j \text{ 非可換方向}) \\ \frac{1}{t}g^{ij} & (i,j \text{ 可換方向}) \\ \frac{(\theta^2)^{ij}}{t(2\pi)^2\alpha'} & (\text{それ以外}) \end{cases} \tag{4.145}$$

[5]ここでは g_{ij} が対角形であることを仮定している。

となる。さらにこの極限での重心座標を含まない代数 $\mathcal{A}_0$ を考えると、この代数の元のうち、非可換方向の X^i を含む元は、リスケールの影響を受けて、各 $\partial^n X^i$ について $\sqrt{t}$ 倍される。

まずこの極限で、$\mathcal{A}_0$ と $\mathcal{A}_1$ が交換することを確かめる。$\mathcal{A}_0$ の元と $\mathcal{A}_1$ の元の OPE で交換するかどうか怪しいのは、以下の OPE である。

$$\sqrt{t}\partial^n X^i(\tau)\mathrm{e}^{iq\cdot X} \sim \frac{1}{\sqrt{t}}(\tau-\tau')^{-n}\mathrm{e}^{iqX} \tag{4.146}$$

右辺を見ると、$t\to\infty$ の極限でこの OPE は消えてしまう。

次に $\mathcal{A}_1$ が代数として閉じていることを確かめる。

$$\mathrm{e}^{ipX}(\tau)\mathrm{e}^{iq\cdot X}(\tau') \sim \mathrm{e}^{-\frac{i}{2}p^i\theta_{ij}q^j}\mathrm{e}^{(p+q)\cdot X}(\tau')(1+i(\tau-\tau')p\cdot X) \tag{4.147}$$

であるが、右辺の $p\cdot X$ の項は X^i が非可換方向であるにも拘らず $\sqrt{t}$ の factor がかかっていないので無視することができる。

以上で、$B\to\infty$ の極限で $\mathcal{A}$ が $\mathcal{A}_0\otimes\mathcal{A}_1$ に分解することが言えた。$\mathcal{A}_1$ は非可換な方向の運動量の Fourier 成分のみから構成されているので、非可換方向の関数環であると解釈することができる。

Toeplitz 作用素と指数定理

いま、D9-D$\bar{9}$ 系を考える。この時 string field は 2×2 の Chan-Paton 行列で記述されるが、9-$\bar{9}$string は逆向きの GSO projection がかかるので、string field は次のような形をしている。

$$A=\begin{pmatrix} B & C \\ C^* & B' \end{pmatrix} \tag{4.148}$$

ここで

D9-D$\bar{9}$ 系から、closed string vacuum への遷移を記述するような String field theory の運動方程式

$$Q(A)+A*A=0 \tag{4.149}$$

の古典解が存在するという事が、String field theory で信じられている。このような解を

$$A_0=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta^* & \gamma \end{pmatrix} \tag{4.150}$$

と書くすることにする。

$B\to\infty$ の極限では先程述べたように、バーテックスの代数 $\mathcal{A}$ が $\mathcal{A}_0\otimes\mathcal{A}_1$ と分解するから、T^* を $\mathcal{A}_0$ の元として新たな解を次のようにしてつくることができる。

$$\begin{pmatrix} \alpha\otimes T^*T & \beta\otimes T^* \\ \beta^\dagger\otimes T & \gamma\otimes TT^* \end{pmatrix} \tag{4.151}$$

とすれば、この解が運動方程式 (4.149) を満たす為には T が

$$TT^*T = T, \quad T^*TT^* = T^* \tag{4.152}$$

を満たさなければならない。この自明な解として T がユニタリであるときには T の固有値を $\mathrm{e}^{i\varphi}$ とすれば

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \mathrm{e}^{i\varphi} \\ \beta^\dagger \mathrm{e}^{-i\varphi} & \gamma \end{pmatrix} \tag{4.153}$$

なる解を得るが、これは String field theory のタキオン凝縮の系で元からある対称性 $C \to \mathrm{e}^{i\varphi}$ で解 A_0 と元から結ばれている解である。

非自明なのは、T がユニタリではないが式 (4.152) を満たす時である。その簡単な例として非可換方向が 2 次元である場合を考える。すなわち、

$$[x, y] = -i\theta \quad (\theta > 0) \tag{4.154}$$

この時、以前と同じ手続きで生成·消滅演算子を作ることができる。即ち、

$$a = \frac{x - iy}{\sqrt{2\theta}}, \quad a^\dagger = \frac{x + iy}{2\theta}, \quad [a, a^\dagger] = 1 \tag{4.155}$$

すると、以下のように定義した T は式 (4.152) を満たす。

$$T = \frac{1}{\sqrt{a^\dagger a + 1}} a \tag{4.156}$$

$$T^* = a^\dagger \frac{1}{\sqrt{a^\dagger a + 1}} \tag{4.157}$$

ここで、Hilbert 空間 $\mathscr{H}$ の上の演算子には Fredholm 演算子という概念があり、Fredholm 演算子には指数が定義されている。

定義 4.4.2 (Fredholm 演算子)
Hilbert 空間の上の有界な演算子 $T \in \mathcal{B}(\mathscr{H})$ が Fredholm 演算子であるとは、ImT が閉集合になっていて Ker$T$, KerT^* が共に有限次元であることをいう。

この時 T について、指数は

$$\mathrm{Index}(T) = \dim(\mathrm{Ker}T) - \dim(\mathrm{Ker}T^*) \tag{4.158}$$

によって定義されている。

今 T は Toeplitz 演算子になっている。ここで Toeplitz 演算子とは以下で定義されるような代数の元である。

定義 4.4.3 (Toeplitz 代数)
乗法単位元をもつ C* 環の部分環で $SS^* = 1, S^*S \neq 1$ を満たす S から生成される C* 部分環を Toeplitz 代数という。

この例としては、GMS ソリトン (4.4.1 小節) の最後の方で定義した shift operator S (4.109) で生成される C* 環がある。これは、Hilbert 空間上の有界作用素の成す C* 環の Toeplitz 代数になっている。今の例で

今、求めた T について指数を計算すると

$$\mathrm{Index}(T) = 1 \tag{4.159}$$

である。その一方で非可換空間上の関数 T を x, y で表わす、即ち逆 Weyl 写像をすると、

$$f(r)(x - iy) \tag{4.160}$$

の形になっている。これは、原点近傍で $U(1)$ について巻き付き数 -1 の配位になっている。よって、一般にタキオン場の巻き付き数は $-\mathrm{Index}(T)$ で与えられる。これは、Atiyah-Singer の指数定理の一例になっている。

余次元が $2n$ の時の指数定理

今、空間 X の余次元 $2n$ の部分空間 Y を考える。今度は、10 次元の時空に 2^p 枚の D9-brane と D$\bar{9}$-brane の対があることを考える、この系が持ち得る D-brane チャージを考える。この時その余次元が非可換 $\mathbb{R}^{2n}$ になっているとする。その非可換性は一般に

$$[x^{2i-1}, x^{2i}] = -i\theta_i \quad (\theta_i > 0) \tag{4.161}$$

と書くことができる。

更に、Clifford 代数の 2^n 次元の表現 γ_i、

$$\gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \Gamma_i \\ \bar{\Gamma}_i & 0 \end{pmatrix} \tag{4.162}$$

によって非可換空間上のタキオン場、

$$T \equiv f(r)\Gamma_i x^i : \mathscr{H} \otimes \mathcal{S}^- \to \mathscr{H} \otimes \mathcal{S}^+ \tag{4.163}$$

を考える。ここで、$\mathscr{H}$ は p 個の調和振動子の成す Fock 空間である。ここで、N_i を i 番目の調和振動子の number operator として、

$$\begin{aligned} \Gamma_i x^i \bar{\Gamma}_j x^j &= \frac{1}{4}\{\Gamma_i, \bar{\Gamma}_j\}\{x^i, x^j\} + \frac{1}{4}[\Gamma_i, \bar{\Gamma}_j][x^i, x^j] \\ &= \frac{1}{2}\delta^{ij}\{x_i, x_j\} + \sum_i \sigma_i^3 \theta^i \\ &= \sum_i 2\theta_i (N_i + \frac{1}{2}) + \sum_i \sigma_i^3 \theta^i \end{aligned} \tag{4.164}$$

$$\bar{\Gamma}_i x^j \Gamma_j x^j = \sum_i 2\theta_i (N_i + \frac{1}{2}) + \sum_i \sigma_i^3 \theta^i \tag{4.165}$$

であるから、T を

$$T = \Gamma_i x^i \frac{1}{\sqrt{\Gamma_i x^i \bar{\Gamma}_j x^j}} \tag{4.166}$$

とすれば、この T は

$$TT^*T = T, \quad T^*TT^* = T^* \tag{4.167}$$

を満たし、$\mathcal{S}^-$ のスピンが $(-\frac{1}{2}, \ldots, -\frac{1}{2})$ である時 T は次元 1 のカーネルを持つ。よって、T の指数は

$$\mathrm{Index}(T) = -1 \tag{4.168}$$

と計算される。

更に、この指数と巻き付き数との関係を見る。今、Y の余次元である $\mathbb{R}^{2n}$ を考えて、$z_i = x^{2i-1} + ix^{2i}$ とした時の正則関数からなる Hilbert 空間 $\mathscr{H}$ を考える。この Hilbert 空間の基底は $z^k \equiv \prod_{i=0}^{k} (z_i)_i^k$ である。更に、$\mathbb{R}^{2n}$ の中の $2n-1$ 次元の球面 Σ^{2n-1} について、その上の正則関数から作る Hilbert 空間 $\mathscr{H}_\Sigma$ を考える。この球面上の 2 乗可積分な関数 $f \in L^2(\Sigma; d\Omega)$ から $\mathscr{H}_\Sigma$ への変換 P は次のように与えられる。

$$(Pf)(z) \equiv \int_\Sigma \frac{f(w)}{(1 - z \cdot \bar{w})} d\Omega \tag{4.169}$$

このようにして定義される Hilbert 空間 $\mathscr{H}_\Sigma$ を Hardy 空間という。この $\mathscr{H}_\Sigma$ の直交基底はやはり z^k で与えられる。ただし、$\mathscr{H}_\Sigma$ でのノルムは

$$(z^k, z^{k'}) \equiv \delta_{k,k'} \frac{2\pi^p \prod_i (k_i)!}{\Gamma(\sum_i k_i + p)} \tag{4.170}$$

と書くことができる。この非可換 $\mathbb{R}^{2n}$ に関する Hilbert 空間から Hardy 空間への制限写像は 1 対 1 で上への写像になっているので、T の指数は T の $\mathscr{H}_\Sigma$ への制限の指数と同じになる。

この Hardy 空間について Toeplitz 作用素を定義することができる。即ち、Σ 上の関数 f について、$M_f : \mathrm{H}_\Sigma \to L^2(\Sigma; d\Omega)$ は Hardy 空間上の演算子を Σ 上の関数に直して、f を掛けるという演算子とすれば、

$$\mathcal{T}_f \equiv PM_f \tag{4.171}$$

という演算子を定義することができる。

$$\mathcal{T}_{z_i} z^k = z^{k+e_i} \tag{4.172}$$

$$\mathcal{T}_{\bar{z}_i} z^k = 0 \quad (k_i = 0) \tag{4.173}$$

$$= 2\pi \frac{k_i}{\sum_i k_i + p - 1} z^{k-e_i} \tag{4.174}$$

であり、この $\mathcal{T}$ は Toeplitz 演算子になっている。

今、Hilbert 空間として $\mathscr{H}_\Sigma \otimes \mathbb{C}^{2^N}$ をとれば、演算子を行列値の演算子に容易に拡張することができる。すると、式 (4.166) で定義した T の Σ への制限は

$$T : \mathrm{H}_\Sigma \otimes S \to \mathrm{H}_\Sigma \otimes S \tag{4.175}$$

と見ることができる。ここで T は次のように書くことができる。

$$T = PM_\beta(x) \tag{4.176}$$

$$\beta(x) = \Gamma_i x^i \frac{1}{\sqrt{x^i x^i + \text{const.}}} \tag{4.177}$$

こうして定義された T は有界で Fredholm である。ここで、Boutet de Monvel の指数定理 [dM] を用いる。

$$\mathrm{Index}(T\Big|_{\mathscr{H}_\Sigma}) = \int_\Sigma \mathrm{ch}(\beta)\mathrm{Td}(T\Sigma) \tag{4.178}$$

但し $\mathrm{ch}(\beta)$ は ω_j を $H^i(GL(2^n, C), \mathbb{Q})$ の生成元として、

$$\mathrm{ch}(\beta) = \beta^* \left(\sum_{j\geq 0} (-1)^{j-1} \frac{\omega_{2j-1}}{(2j-1)!} \right) \tag{4.179}$$

で与えられる。また、$\mathrm{Td}(T\Sigma) = 1$ である。

この指数定理によって、非可換空間の上の関数としてのタキオン演算子の指数と巻き付き数のより一般的な関係を与えることができる。

4.4.5 Type IIA の D-brane と BDF 構成法

ある多様体 X が与えられた時、その上の関数環 $\mathrm{C}^\infty(X)$ によるコンパクト作用素の成す環の拡張を考える。すると、その拡張のある同値類が $K(X)$ 群の相対になっていることが知られている [BDF]。まずは、C^* 環の拡張の概念を定義する。

定義 4.4.4 (C^* 環の extension)
$\mathcal{A}, \mathcal{C}$ を C^* 環としたとき、$\mathcal{A}$ の $\mathcal{C}$ による拡張とは C^* 環 $\mathcal{B}$ と $\alpha : \mathcal{A} \to \mathcal{B}, \beta : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ の組で以下のような完全系列を成すものを言う。

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{B} \xrightarrow{\beta} \mathcal{C} \longrightarrow 0 \tag{4.180}$$

今は上の定義で $\mathcal{A} = \mathbb{K}, \mathcal{C} = \mathrm{C}^\infty(X)$ として考える。即ち、

$$0 \longrightarrow \mathbb{K} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{B} \xrightarrow{\beta} \mathrm{C}^\infty(X) \longrightarrow 0 \tag{4.181}$$

Gelfand-Naĭmark の定理 (定理 B.2.20) からあらゆる C* 環は Hilbert 空間 $\mathscr{H}$ 上の有界作用素の成す環 $\mathcal{B}(\mathscr{H})$ の部分環だと思うことができるので、上の定理の $\mathcal{B}$ は $\mathcal{B}(\mathscr{H})$ の部分環と考えることができる。ここで、$\mathrm{C}^\infty(X)$ から Calkin 代数 $\mathcal{B}(\mathscr{H})/\mathbb{K}$ への写像 τ を考える。$\pi : \mathcal{B}(\mathscr{H}) \to \mathcal{B}(\mathscr{H})/\mathbb{K}$ を射影であるとして、$f \in \mathrm{C}^\infty(X)$ に対して、$\mathcal{B}$ の元 $T_f \in \mathcal{B}$ で $\beta : \mathcal{B} \to \mathrm{C}^\infty(X)$ で f に映るようなものを選ぶことができる。このとき、$\tau : \mathrm{C}^\infty(X) \to \mathcal{B}(\mathscr{H})$ として

$$\tau(f) = \pi(T_f) \tag{4.182}$$

を満たすようなものを Busby invariant という。$\mathrm{C}^*(X)$ の可換性から、$T_f T_g - T_{fg} \in \mathbb{K}$ を言うことができるから、Busby invariant τ は代数としての準同形になっている。ここで、Busby invariant は代数の拡張に対して唯一つ定まることが知られている [WO, p57,**proposition3.2.5**]。また、Bubsy invariantτ から代数の拡張を定義することができる [WO, p58,**proposition 3.2.9**]。即ち、

$$\mathcal{B}' \equiv \{(a, f) \in \mathcal{B}(\mathscr{H}) \oplus \mathrm{C}^\infty(X)\} \tag{4.183}$$

として、

$$0 \longrightarrow \mathbb{K} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{B}' \xrightarrow{\beta} \mathrm{C}^\infty(X) \longrightarrow 0 \tag{4.184}$$

という代数の拡張を考えることができる。この拡張 Busby invariant は τ である。

この Busby invariant に対して、同値関係を定義する。

定義 4.4.5 (Busby invariant のユニタリ同値)
今、$\mathcal{A}$ の $\mathcal{C}$ による 2 つの環の拡張、

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \mathbb{K} \xrightarrow{\alpha_1} \mathcal{B}_1 \xrightarrow{\beta_1} \mathrm{C}^\infty(X) \longrightarrow 0 \\ 0 &\longrightarrow \mathbb{K} \xrightarrow{\alpha_2} \mathcal{B}_2 \xrightarrow{\beta_1} \mathrm{C}^\infty(X) \longrightarrow 0 \end{aligned} \tag{4.185}$$

がユニタリ同値であるとは、$\tau_1 = \pi(u)\tau_2\pi(u^*)$ なる Hilbert 空間上のユニタリ行列 u が存在することである。

この同値関係による Busby invariant の同値類を $\mathbf{Ext}(\mathrm{C}^\infty(X), \mathbb{K})$ と表記する。この $\mathbf{Ext}(\mathrm{C}^\infty(X), \mathbb{K})$ には加法が定義できる。即ち、

$$\tau_1 \oplus \tau_2 \to (B(\mathrm{H})/\mathbb{K}) \oplus (B(\mathrm{H})/\mathbb{K}) \cong (\mathrm{C}^\infty(X), \mathbb{K}) \tag{4.186}$$

と加法を定義する。この加法について、単位元 0 を定義することができる。この 0 とは、trivial extension 即ち、$\tau : \mathrm{C}^\infty(X) \to B(\mathrm{H})/\mathbb{K}$ を $\tau : \mathrm{C}^\infty(X) \to B(\mathrm{H})$ に持ち上げることのできるような拡張である [BDF, 1.17 Theorem]。この時、τ によって完全系列は分解するので $T_f = N_f + k \quad (k \in \mathbb{K})$ と書くことができる。この時 $N_f N_g = N_{fg}$ となる。更に、式 (4.186) で定義される加法についての逆元があることが知られている [BDF, 1.23 Theorem]。

よってこの $\mathbf{Ext}(\mathrm{C}^\infty(X),\mathbb{K})$ は群になっていることが分かる。更に、$\mathbf{Ext}(\mathrm{C}^\infty(X),\mathbb{K})$ から K 群を定義することができる。

$$\begin{aligned} K_1^a &= \mathbf{Ext}(\mathrm{C}^\infty(X),\mathbb{K}) \\ K_0^a &= \mathbf{Ext}(\mathrm{C}^\infty(X)\otimes C(S^1),\mathbb{K}) \end{aligned} \tag{4.187}$$

と定義すると、この K_*^a は Bott 周期性を持っていて [BDF, Section 6]、トポロジカル K-theory と相対な K 理論になっている [BDF, Section 7]。a の添字は"analytic" の a である。この K-theory の構成法を BDF 構成法という [BDF]。

Type IIA 理論の brane と代数の拡張

以上が、BDF 構成法の概要であるが、今 Type IIA 理論でのあらゆる brane は Hilbert 空間のコンパクト作用素の成す環 $\mathbb{K}$ の時空上の関数環 $\mathrm{C}^\infty(X)$ による拡張を定義する。

今、Type IIA 理論の奇数次元の brane を考えた時に、brane がいる多様体 W は時空 X の部分多様体である。W の上に Chan-Paton 束 E があるとすると、そこから $S\otimes E$ に値をとるような L^2spinor の Hilbert 空間 $\mathscr{H}$ を構成することができる。ここで、$S\to W$ は spin 束であるとする。この時、$S\otimes E$ の上の Dirac 演算子を $\not{D}_E$ と表記する。接続とメトリックを一般だとすると、$\not{D}_E$ はゼロモードを持たず、$\not{D}_E$ の固有値の正負によって、$\mathscr{H}$ は $\mathscr{H}=\mathscr{H}_+\oplus\mathscr{H}_-$ と分解する。

W の上の連続関数の環 $\mathrm{C}^\infty(W)$ は $\mathscr{H}$ の上で M_f として表現されているが、この M_f は一般には $\mathscr{H}_+$ を保たない。よって射影演算子 $P_+:\mathscr{H}\to\mathscr{H}_+$ としたときに、

$$T_f \equiv P_+ M_f \tag{4.188}$$

とすることで、Toeplitz 演算子を作ることができる。この時 $T_{f_1}T_{f_2}-T_{f_1f_2}$ はコンパクトな演算子であるから T_f 達によって生成される代数を $\mathcal{B}$ とすれば、次のような $\mathbb{K}$ の $\mathrm{C}^\infty(W)$ による拡張を定義することができる。

$$0\longrightarrow\mathbb{K}\xrightarrow{\alpha}\mathcal{B}'\xrightarrow{\beta}\mathrm{C}^\infty(W)\longrightarrow 0 \tag{4.189}$$

この拡張に対応する Busby invariant は $\tau: f\mapsto\pi(T_f)$ である。更に、写像 $\phi: W\to X$ による引き戻し $\phi^*:\mathrm{C}^\infty(X)\to\mathrm{C}^\infty(W)$ によって、$\mathbb{K}$ の $\mathrm{C}^\infty(X)$ による拡張

$$0\longrightarrow\mathbb{K}\xrightarrow{\alpha}\mathcal{B}\xrightarrow{\beta}\mathrm{C}^\infty(X)\longrightarrow 0 \tag{4.190}$$

を定義することができる。この拡張に対応する Busby invariant は $\tau\circ\phi^*:\mathrm{C}^\infty(X)\to Q(\mathscr{H})$ で定義される。

以上で、brane が $\mathbb{K}$ の $\mathrm{C}^\infty(X)$ による拡張を定義することが分かったが、$K_1^a(X)$ の定義に用いたユニタリ同値に対応する同値関係を (W,E,ϕ) に対して定義すれば、$K_1^a(X)$ と $\{[(W,E,\phi)]\}$ は 1 対 1 の関係にある。

ここで、$K_1^a(X)$ と D-brane のチャージの関係について議論する。今 X がコンパクト·偶数次元でスピン多様体であるとすれば K_1^a は Poincaré デュアリティーによって、トーションの自由度を除いて一致する。即ち、

$$K_1^a(X) \otimes \mathbb{Q} \cong K^1(X) \otimes \mathbb{Q} \tag{4.191}$$

しかし、トーションを考えた時はこの $K_1^a(X)$ と $K^1(X)$ の関係は複雑になる。

D-brane のチャージとは関係がないが、代数の拡張の理論と D-brane の関係で予想される面白い点は、Busby invariant は D-brane の位置の情報を含んでいるように思える点である。即ち、2.1 節の末尾に示した C* 環の言葉を幾何の言葉に直す辞書によれば、空間の部分集合は C* 環のイデアルによって定義される。Busby invariant $\tau : \mathrm{C}^\infty(X) \to \mathcal{B}$ の核 $\mathrm{Ker}(\tau)$ はまさに C* 環 $\mathrm{C}^\infty(X)$ のイデアルである。よって、このイデアルによって D-brane の位置が記述されると思うのは自然な発想である。

4.4.6　非自明な dB がある時の D-brane のチャージ

今迄の議論は非可換性が全空間で一定である場合について行なわれてきた。その結果弦理論での brane チャージは K-theory によって分類されることを見てきたが dB が非自明である時には twisted K-theory によって brane のチャージを分類するべきであるということが提案されている [BM]。

Twisted K-theory

まず最初に Rosenberg[Ros] らによる方法で、twisted K-theory を定義する。

定義 4.4.6 (twisted K-theory)
twisted K-theory はコンパクトな Hausdorff 空間 X と $[H] \in H^3(X, \mathbb{Z})$ に対して以下のように定義される。

$$K^j(X, [H]) \equiv K_j(C_0(X, E_{[H]})) \tag{4.192}$$

ここで、E_H はファイバーを $\mathbb{K}$ 構造群を $\mathrm{Aut}(\mathbb{K})$ として、その Dixmier-Douady invariant $\delta(E)$ が $[H]$ であるような局所自明束である。

ここで Dixmier-Douady invariant は次のように定義される。

Dixmier-Douady invariant

今、X の良い開被覆を $\{U_i\}$ とする。この時 $C_0(X, E)$ 即ち $\mathbb{K}$ 束 E の連続で無限遠で消えるような section からなる C* 環の元は各パッチ U_i の上の関数 $R_i : U_i \to \mathbb{K}$ の集合で、2 つのパッチ U_i, U_j の交わりの上で

$$R_i = g_{ij} R_j g_{ij}^{-1} = \mathrm{Ad}(g_{ij}) R_j \tag{4.193}$$

となるようなものである。ここで、$g_{ij} : U_i \cap U_j \to U(\mathscr{H})$ はユニタリ変換に値をとる連続関数で、$g_{ij}g_{ji} = 1$ を満たす。式 (4.193) が矛盾しない為には、$U_i \cap U_j \cap U_k$ で、

$$g_{ij}g_{jk}g_{kl} = g_{jk}g_{ki}g_{ij} = g_{kl}g_{li}g_{ij} = \zeta_{ijk} \in U(1) \tag{4.194}$$

でなくてはならない。さらに、$U_i \cap U_j \cap U_k \cap U_l$ に於いて次が成立する。

$$\begin{aligned} \zeta_{ijk}\zeta_{ikl} &= g_{ij}g_{jk}g_{kl}g_{li} \\ &= g_{jk}g_{kl}g_{lj}g_{jl}g_{li}g_{ij} \\ &= \zeta_{jkl}\zeta_{ijl} \end{aligned} \tag{4.195}$$

よって、次のような $\mathbb{Z}$ に値をもつČech 3-cocycle が存在する。

$$\log\zeta_{ijk} + \log\zeta_{ikl} - \log\zeta_{jkl} - \log\zeta_{ijl} = 2\pi i\kappa_{ijkl} \in \mathbb{Z} \tag{4.196}$$

この $\{\kappa_{ijkl}\} \in H^3(X, \mathbb{Z})$ が局所自明な $\mathbb{K}$ 束 E の Dixmier-Douady invariant である。

Twisted K-theory の物理

以上で、twisted K-theory を定義することができた。Bouwknegt、Mathai らによる提案は次のようなものである。

仮説 4.4.7
$H = dB$ が非自明であるとき D-brane のチャージは K-theory $K^i(C_0(X))$ ではなく、twisted K-theory $K^i(C_0(X, E_{[H]}))$ によって分類される。

確認として、$[H] = 0$ の時には $\mathbb{K}$ 束 E は自明なものになる。すると、K 群の stability(定理 B.2.27 より)

$$k^i(C_0(X, E)) = K^i(C_0(X) \otimes \mathbb{K}) = K^i(X_0(X)) \tag{4.197}$$

となり、普通の K-theory に一致する。

一般の $\mathbb{K}$ の中の射影演算子の像は有限次元であるから、$C_0(X, E_{[H]})$ の中の射影演算子は有限次元のファイバーをもつ束のように見える。

今、例として可換な空間の上で考える。$\{U_i\}$ を十分良い被覆であるとして、各パッチ U_i の上の射影演算子を $p_i (p_i = p_i^* = p^2)$ とすれば、$U_i \cap U_j$ では、

$$p_i = \mathrm{Ad}(g_{ij})p_j \tag{4.198}$$

となり、この変換によって映った先の演算子はやはり、射影演算子の性質を満たす事が分かる。即ち $(\mathrm{Ad}(p_i)) = (\mathrm{Ad}(p_i))^* = (\mathrm{Ad}(g_{ij}))^2$ が成立する。この射影演算子の像 $\{V_{i,x}\}\,(x \in U_i)$ は変換関数 g_{ij} で移り合う空間 X の上の連続な関数である。この性質からこの $\{V_{i,x}\}$ を X 上のゲージ束と見ることができる。よって、この $\{U_i, \{V_{i,x}\}_{x\in U_i}, g_{ij}\}$ によって X の上のゲー

ジ束を定義することができる。この定義の仕方には ambiguity があるのでこの定義でうまくいっているかどうかは自明ではないが、圏の層を導入することによってこの問題は解決できる。

このゲージ束は、元の $\mathbb{K}$ 束に $[H] \in H^3(X, \mathbb{Z})$ による捻れが入っているので、このゲージ束自体 $[H]$ による影響を受けていると考えられ、Bouwknegt Mathai らによる提案はもっともなように感じられる。

今、p, q を $C_0(X, E_{[H]})$ の中の射影演算子であるとする。$p_i = \Lambda_i^* \Lambda_i, q_i = \Lambda_i \Lambda_i^*$ であるような $\Lambda \in C_0(X, E_{[H]})$ が存在するとき、射影演算子 p, q は Murray-von Neumann 同値であると言われるが、この Murray-von Neumann 同値は p, q によって定義されるゲージ束 $\{U_i, \{V_{i,x}\}_{x \in U_i}, g_i j\}, \{U_i, \{W_{i,x}\}_{x \in U_i}, g_i j\}$ の同型関係になる。すなわち、

$$\begin{aligned} \Lambda_i V_{i,x} &= \Lambda_i \Lambda_i^* \Lambda_i \mathscr{H} \\ &= q_i \Lambda_i \subset W_{i,x} \end{aligned} \tag{4.199}$$

$$\begin{aligned} \Lambda_i^* V_{i,x} &= \Lambda_i^* \Lambda_i \Lambda_i^* \mathscr{H} \\ &= p_i \Lambda_i^* \subset V_{i,x} \end{aligned} \tag{4.200}$$

となって、お互いに移り合う。

さらに、このゲージ束の同型類に対して直和を定義することができる。

$$\{U_i, \{V_{i,x}\}_{x \in U_i}, g_i j\} \oplus \{U_i, \{W_{i,x}\}_{x \in U_i}, g_i j\} = \{U_i, \{V_{i,x} \oplus W_{i,x}\}_{x \in U_i}, g_i j\} \tag{4.201}$$

この直和によって定義される半群の Grothendieck 群を取ることで $K^0(X, [H])$ のより簡単な定義を得ることができる。

4.4.7　Bott 周期性の非可換ソリトンによる説明

今迄は主に $B \to \infty$ の極限をとって議論をしていたが、$B = 0$ の極限でも D-brane と GMS ソリトンの関係が成立しているという仮定を置くと、Bott 周期性という K 群で重要な性質が非可換ソリトンの言葉を使って説明できる [HM]。

K 群は Bott 周期性 (定理 B.1.24) という性質を持っている。即ちコンパクト空間 X に対して、

$$\begin{aligned} K(X) \cong K^{-2}(X) &\cong \tilde{K}(S^2 \wedge (X/\phi)) \\ &\cong \tilde{K}(S^2 \wedge (X/\phi)) \\ &\cong \tilde{K}(I^2 \times (X/\phi)) \\ &\cong \tilde{K}((X \times \mathbb{R}^2)^\infty) \\ &\cong K_{\mathrm{cpt}}(X \times \mathbb{R}^2) \end{aligned} \tag{4.202}$$

但し、$K_{\mathrm{cpt}}(X \times \mathbb{R}^2)$ とは $\mathbb{R}^2$ の無限遠で全てのベクトルが $\mathbf{0}$ につぶれるようなベクトル束から作った K 群である。また、2 行目から 3 行目の等式は、以下のトポロジーの関係式 ([Rot,

p333]) を用いる。

$$X^\infty \wedge Y^\infty \approx (X \times Y)^\infty \tag{4.203}$$

ここで、$\approx$ とは位相同相であり、X^∞ は X の 1 点コンパクト化である (1.4 小節参照)。

これを、代数的な K-theory の言葉に書き直すと、以下のようになる。

$$K(\mathrm{C}^\infty(X)) \cong K(C(X) \otimes C_0(\mathbb{R}^2)) \tag{4.204}$$

ここで、C_0 とは無限遠で 0 になるような関数の成す C* 環である。この式を物理的に説明することができる。

K 群は stable 即ち、森田同値に対して不変である。つまり、

$$K(C(X)) = K(C(X) \otimes \mathbb{M}_N(\mathbb{C})) \xrightarrow{N\to\infty} K(C(X) \otimes \mathbb{K}) \tag{4.205}$$

である。ここで $\mathbb{K}$ は Fock 空間に作用するコンパクトなオペレーターの成す環である。今、この関係が $B \to 0$ の極限で成立していると思うと、2 次元で無限遠において十分急速に減衰する関数を非可換化した演算子の成す代数は $\mathbb{K}$ であるから、

$$K(C(X)) = K(C(X) \otimes C_0(\mathbb{R}^2)) \tag{4.206}$$

となり、Bott 周期性の表式を得る。

第5章　結論

この論文では、数学としての非可換幾何学の紹介とその場の理論への応用さらに非可換幾何的な性質が弦理論から自然に出てくることを見てきた。

3 章で見たように、時空の非可換性が直ちに量子的な発散の困難を解決するという直感的な予想は、必ずしも正しくはない。非可換空間の上の場の理論の摂動論に於いては UV/IR 混合や String とのアナロジーといった面白い性質が見える一方で、planar なダイアグラムでは紫外発散は赤外発散と混合するというより困難な形で紫外発散を残してしまう。これは、最も単純な変形量子化によって構成された非可換幾何学的な設定では、重力の量子化の困難を克服することができないということを意味している。

一方で、我々は重力の量子化の困難を克服した理論として弦理論を知っている。現在の、弦理論でいう非可換幾何は人為的に B 場のバックグラウンドや座標同士の非可換性を入れて、「無理矢理」非可換幾何的な状況を作ったという設定を研究の対象にしていることが多い。しかし、例えば、4.1 節では、時空の不確定性が、弦理論が量子重力理論として上手くいっている理由の大きな要素である world sheet の共形不変性を元にしているということを示した。このことは、弦理論がバックグラウンドの選択に依らずに非可換幾何的な性質を持っていることを示唆しているように見える。さらに、非可換空間上でのソリトンが弦理論での非摂動論的な対象である D-brane を記述していることが確からしいという事実や、弦理論の非摂動論的な定式化の候補として数々の成功を収めている Matrix theory や、String field theory が非可換幾何的な性質を持っているという事実もまた、未だ正体の知られていない弦理論の非摂動論的な定式化に非可換幾何学が大きな役割を果たしていることを示唆している。

さらに、可換な幾何学において重要な役割を果たして来たホモロジー代数でやっていた事を、非可換幾何学に於いては K-theory でやらざるを得ないが、弦理論に於いて非摂動論的な対象である D-brane のチャージの分類を K-theory を用いてやらなくてはならないという事実もまた、非可換幾何学が弦理論の非摂動論的な定式化において重要な役割を果たしているという事の傍証になっていると考えられる。

この論文の最初にも述べたが、現在の弦理論を取り巻く状況は、量子力学が誕生する直前の状況に擬えることができる。量子力学の誕生の際に行なわれたことは運動量や座標といった物理量を演算子に置き換えることであり、数学の言葉で言えば、位相空間の量子化である。一方で非可換幾何学は、空間そのものの量子化である。昨今の弦理論の非摂動論的な定式化の試みの様々な側面の中で非可換幾何学が重要な研究対象になってきた事は偶然とは思えない。

物理学の大きな流れとして、微小なスケールの物理を知ろうとすると我々が直観的に知っ

ている概念を代数の言葉に置き直し更に修正を加えなくてはなくてはならない、ということが言えるように思える。その意味で、空間そのものよりもその上の関数の成す代数を研究対象とする非可換幾何学は、その流れに沿っている。

現在のところ物理学に於ける非可換幾何学を用いた議論は、非可換幾何学の単純なセットアップを対象にしてなされた観察を元にした議論が殆どである。非可換幾何学のより包括的な体系を元にした議論をすることができれば、弦理論の非摂動論的な定式化について、大きなヒントを得ることができるのではないだろうか。

謝辞

数学に関する質問に丁寧に答えて下さった小笠さん·小西さん、String Field Theory について貴重な情報をくれた大森君、全般的に数々の情報とアドバイスを与えて下さった高柳匡さん·寺嶋靖治さん、辛抱強く丁寧に指導して下さった松尾先生、そして自分を精神的に支えてくれた人達に心から感謝します。

付 録A　圏

A.1　圏の定義

定義 A.1.1 (圏)
圏は対象[1] (object) と射 (morphism) という 2 つの構成要素からなり morphism は次の 4 つの性質を満たす。

C1 射 f について始域 (domain)$\mathrm{dom}\, f$ と終域 (codomain)$\mathrm{cod}\, f$ と呼ばれる二つの対象が存在している。これをまとめて

$$\mathrm{dom}\, f \xrightarrow{f} \mathrm{cod}\, f \tag{A.1}$$

と表記する。

C2 全ての対象 A に対して射 1_A が存在してその始域と終域は A である。このような射は恒等射と呼ばれる。

C3 2 つの射 f, g があって $\mathrm{dom}\, f = \mathrm{cod}\, f$ の時、射 h で $\mathrm{dom}\, h = \mathrm{dom}\, f$ かつ $\mathrm{cod}\, h = \mathrm{cod}\, g$ となるようなものが存在する。このような射 h を合成 (composite) といい、このような射を $f \circ g$ と書く。

C4 上で定義した合成について結合則が成り立つ。即ち

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h \tag{A.2}$$

C5 恒等射との合成はそれ自身である。即ち、$A \xrightarrow{f} B$ に対し、

$$1_A \circ f = f, f \circ 1_B = f \tag{A.3}$$

である。

この論文で現われる圏の具体例としては以下のようなものがある。

[1] 本論の文章での「対象」はこの意味で用いている訳ではなく、一般名詞の「対象」である。

圏の名前	対象	射
コンパクト空間の圏	コンパクト空間	連続写像
C* 環の成す圏	C* 環	$*$-写像

図 A.1: この論文で現われる圏のカタログ

A.2 関手

関手とは圏としての構造をある程度保存するような圏から圏への写像である。

定義 A.2.1 (共変関手)
2 つの圏 $\mathscr{B}, \mathscr{C}$ に対して $\mathscr{B}$ から $\mathscr{C}$ への関手 F は $\mathscr{B}$ の対象·射を $\mathscr{C}$ の対象·射に写すもので次の性質を満たす。

F1 $A \in \mathrm{Ob}(\mathscr{B})$ として $F(1_A) = 1_{F(A)}$

F2 $f, g \in \mathrm{Hom}(\mathscr{B})$ として $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$

このことを

$$F : \mathscr{B} \to \mathscr{C} \tag{A.4}$$

と書く。

定義 A.2.2 (反変関手)
定義は共変関手とほぼ同じであるが写像の合成の仕方を逆にするような関手である。即ち、

cF1 $A \in \mathrm{Ob}(\mathscr{B})$ として $F(1_A) = 1_{F(A)}$

cF2 $f, g \in \mathrm{Hom}(\mathscr{B})$ として $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$

更に、関手によって映された射 i が共変関手によって映された場合を i_* 反変関手によって映された場合を i^* と書くことが多い。

A.3 圏同値

圏同値とは、おおざっぱにいって数学的な対象として同じものであるということである。

定義 A.3.1 (圏同値)
2 つの圏 $\mathscr{B}, \mathscr{C}$ について、次の性質を満たす 2 つの関手 $\mathscr{B} \xrightarrow{F} \mathscr{C}, \mathscr{C} \xrightarrow{G} \mathscr{B}$ が存在するとき圏 $\mathscr{B}$ と C は圏同値であるという。

$$G \circ F \simeq I_{\mathscr{B}} (\text{恒等関手}) \tag{A.5}$$

$$F \circ G \simeq I_{\mathscr{C}} (\text{恒等関手}) \tag{A.6}$$

付 録B　K-theory

K-theoryは非可換幾何学を研究する上で非常に重要な概念である、可換な空間の上でホモロジーが重要な性質を帯びていたが、それに対応するような非可換な時空の上での C* 環のホモロジーを考えることが難しい。その替わりとして K-theoryによってホモロジー代数の替わりの役目を果たさせなくてはならない。K-thoeryは可換な空間のトポロジーについても考えることができる。ここではまず始めに B.1 節で可換なコンパクト空間の K-theoryについての説明をする。次いで B.2 節で非可換な空間にも適用することができる C* 環の K-theoryを説明する。

B.1　トポロジカル K-theory

この節では、まず K 群の実際的な定義と C* 環の K-thoeryにも通用する抽象的な K 群の定義を与える。次いで、必要な準備をした後に K^{-n} 群 (higher K-group) を定義する。最後に、具体的に K 群を計算するのに強力な武器となる K 群の長完全系列と Bott 周期性について説明する。

B.1.1　トポロジカル K-theory の実際的な定義

抽象的な K-theory の定義は後回しにするとして、まずはある空間の上の K 群 (若しくは K^0 群) を定義する。

定義 B.1.1 (空間上の K 群)
空間 X の上の全てのベクトル束の同型類の集合を $\mathrm{Vect}(X)$ と書く。このとき空間 X の K 群 (もしくは K^0 群) は、次のような同値関係を用いて ($E, F, G \in \mathrm{Vect}(X)$ とする。)

$$(E, F) \sim (E \oplus G, F \oplus G) \tag{B.1}$$

$$K \equiv \mathrm{Vect}(X) \times \mathrm{Vect}(X)/\sim \tag{B.2}$$

と定義される。

ここでトポロジーでよく知られた定理がある。

定理 B.1.2
あるコンパクト Hausdorff 空間上のベクトル束 E が与えられた時にベクトル束 F があって、その直積 $E \oplus F$ が自明なベクトル束になる。

証明. Atiyah の教科書 [Ati, Section1.4] を参照。 □

この定理を使うと、次数 n の自明なベクトル束を $\mathfrak{n}$ と表記して多様体 X の K 群は必ず $(\mathfrak{n}, G)$ の形に書ける。よって、

$$K(X) \cong \mathbb{Z} \times \mathrm{Vect}(X) \tag{B.3}$$

が言える。

B.1.2 K 群の抽象的な定義

次に K 群の抽象的な定義を与える。

定義 B.1.3 (K 群 (Grothendieck 群))
X を任意の空間とし、$\mathrm{Vect}(X)$ を X 上のベクトル束の集合に半群の構造を入れたものとする。但し、加法はベクトル束の直積によって定義するものとする。

このとき、任意の半群 $\mathcal{A}$ に対して以下のような性質をもつアーベル群 $K(\mathcal{A})$ が唯一つ存在しそれを Grothendieck 群という。この $K(\mathcal{A})$ を半群 $\mathcal{A}$ の K 群 (若しくは K^0 群) という。

K1 ある半群準同形 $\alpha : \mathcal{A} \to K(\mathcal{A})$ があって
任意の群 G と半群準同形 $\gamma : \mathcal{A} \to G$ に対して、
群準同形 $\kappa : K(\mathcal{A}) \to G$ で $\gamma = \kappa\alpha$ を満たすものが唯一つ存在する。

K 群 (Groethendieck 群) の唯一性を証明する前に、このような K 群を具体的に構成する。これは最初に定義した K 群の定義に一致している。まず、$F(\mathcal{A})$ を $\mathcal{A}$ の元すべてからなる自由アーベル群とする。$E(\mathcal{A})$ を $a + b - (a \oplus b) \quad (a, b \in \mathcal{A})$ で生成される $E(\mathcal{A})$ の部分群とする。但し $+, \oplus$ はそれぞれ自由アーベル群の加法と半群 $\mathcal{A}$ の加法である、この時、

定理 B.1.4 (K 群 (Grothendieck 群) の具体形)
$K(\mathcal{A}) = F(\mathcal{A})/E(\mathcal{A})$ である。

証明. 定義 B.1.3 で定義した α として、自明な写像、即ち $a \in \mathcal{A}$ に対して a の同値類 $[a]$ を対応させるような写像を選ぶ。
今群 G と半群準同 形 γ を与えたとき、$\tilde{\kappa}$ として $a \in E(\mathcal{A})$ を $\gamma(a)$ に映すような写像を選ぶ。この $\tilde{\kappa}$ は $[a]$ の同値類の選び方に依らない。何故なら、$a, b, c, d \in \mathcal{A}$ として γ, κ が準同形であることから、

$$\tilde{\kappa}(a + b + c - (b \oplus c)) = \gamma(a) \tag{B.4}$$

であるからである。よって、$\tilde{\kappa}$ は $\kappa : F(\mathcal{A})/E(\mathcal{A}) \to G$ に持ち上がる。
また、このことは κ の唯一性も示している。 □

K 群の唯一性の証明

B.1.3 の群 G として K 群としての性質を満たす $K'(\mathcal{A})$ を考えると準同形 $\kappa : K(\mathcal{A}) \to K'(\mathcal{A})$ を与える。
同様にして準同形 $\kappa' : K'(\mathcal{A}) \to K(\mathcal{A})$ を得ることができる。
κ の唯一性から、$\kappa' \circ \kappa$ は恒等写像でなくてはならない。
よって、$K(\mathcal{A}) \cong K'(\mathcal{A})$ が言える。

さらに、図 B.1 は可換であり、半群準同形 $\delta : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ について、次のことが言える。但し

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{B} & \xrightarrow{\epsilon} & \mathcal{C} \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha_{\mathcal{A}}} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_{\mathcal{B}}} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_{\mathcal{C}}} \\ K(\mathcal{A}) & \xrightarrow{K(\delta)} & K(\mathcal{B}) & \xrightarrow{K(\epsilon)} & K(\mathcal{C}) \end{array}$$

図 B.1: K-theory の関手性

$K(\delta)$ は半群準同形写像 $\alpha_{\mathcal{B}} \circ \delta$ により、$K(\mathcal{A})$ の定義から定まる準同形写像である。$K(\delta)$ の定義より、この図式は可換である。

定理 B.1.5 (K-theory の関手性)
$(\alpha, K(\mathcal{A}))$ の組は半群の成す圏からの (反変) 関手となっている。即ち、定義 A.2.1 のような性質を満たしている。(図 B.1)

証明. 定義 A.2.1 の $F1$ は $K(\mathcal{A})$ の唯一性から直ちに従う。
$F2$ も、K 群の定義である κ の唯一性から従う。 □

B.1.3 相対 K 群 (relative K-group) と $\tilde{K}$ 群 (reduced K-group)

K 群の定義を定義する際に K^0 群という別称を与えたのは $K^{-n}(n \in \mathbb{Z})$ という K 群の系列があるからである。この K^{-n} は $\tilde{K}$ 群と相対 K 群を用いて定義される。

まず以下のような圏の関手を考える。但し、$\mathscr{C}$ はコンパクト空間の成す圏で $\mathscr{C}^+$ は基点を定めたコンパクト空間の成す圏で ϕ は空集合である。また、$Y \subset X$ とする。

$$\begin{array}{ccccc} \mathscr{C}^2 & \longrightarrow & \mathscr{C}^+ & \qquad & \mathscr{C} & \longrightarrow & \mathscr{C}^2 \\ (X, Y) & \longmapsto & X/Y & & X & \longmapsto & (X, \phi) \end{array} \tag{B.5}$$

相対 K 群はこの関手によって $\tilde{K}$ 群から定義される。

$\tilde{K}$ 群は、B.1.3 で定義した $\mathscr{C}^+$ の対象に対して以下のように定義されている。

定義 B.1.6 ($\tilde{K}$ 群)
空間 X とその基点 x_0 について包含写像 $i : \{x_0\} \to X$ を定義する。そこで、$\tilde{K}$ 群は i の引き戻し写像 i^* について

$$\tilde{K} \equiv \mathrm{Ker}(K(X) \xrightarrow{i^*} K(x_0)) \tag{B.6}$$

と定義される。

$\tilde{K}$ もやはり、$\mathscr{C}^+$ からの反変関手になっている。それを示す前に基礎的な定理を一つ与える。

定理 B.1.7 (完全系列の分解)
短完全系列

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{j} Z \longrightarrow 0 \tag{B.7}$$

が、$k \circ j = \mathrm{id}_Y$ となる準同形 $k : Z \to Y$ もしくは $l \circ i = \mathrm{id}_X$ となる準同形 $l : Y \to X$ を持つときこの短完全系列は分解すると言われ、

$$Y \cong X \oplus Z \tag{B.8}$$

が成立する。

この定理を用いて、$\tilde{K}$ の関手性を証明する。

定理 B.1.8 ($\tilde{K}$ 群の関手性)
$\tilde{K}$ は $\mathscr{C}^+$ からの反変関手である。

証明. まず、$\tilde{K}(X)$ の定義と i^* によって自明なバンドルが自明なバンドルに映ることから、以下のような完全系列を書くことができる。

$$0 \longrightarrow \tilde{K}(X) \longrightarrow K(X) \xrightarrow{i^*} K(x_0) \longrightarrow 0 \tag{B.9}$$

collapsing map $c : x_0 \to X$(即ち、全ての $x \in X$ を x_0 に映す写像) の引き戻し c^* を考えると、$c^* \circ i^* = \mathrm{id}_{K(A)}$ であるから、この完全系列が分解することが分かる。よって、$X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}^+)$ として

$$K(X) = \tilde{K}(X) \oplus K(x_0) \tag{B.10}$$

この分解によって、$\tilde{K}$ は圏 $\mathscr{C}^+$ からの関手であることが分かる。 □

この $\tilde{K}$ 群を使って、相対 K 群を定義する。

定義 B.1.9 (相対 K 群)

$$K(X, Y) \equiv \tilde{K}(X/Y)$$

特に、$K(X, \phi) \cong K(X)$ である。

ここで、smash 積を定義する。

定義 B.1.10 (smash 積)
$X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}^+)$ として、smash 積 $X \wedge Y$ とは、

$$X \wedge Y \equiv X \times Y / ((X \times y_0) \cup (x_0 \times Y)) \tag{B.11}$$

この積は結合律を満たす。即ち $X, Y, Z \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}^+)$ として

$$(X \wedge Y) \wedge Z \cong X \wedge (Y \wedge Z) = X \times Y \times Z / ((X \times Y \times z_0 \cup X \times y_0 \times Z \cup x_0 \times Y \times Z)) \tag{B.12}$$

今、$I = [0,1]$ として $I/\{0,1\} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}^+)$ でありこれは S^1 に基点を定めたものである。この時

$$S^n = \overbrace{S^1 \wedge S^1 \wedge \cdots \wedge S^1}^{\text{n 個}} \tag{B.13}$$

である。

定義 B.1.11 (縮約懸垂)
$X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}^+)$ として、$S^1 \wedge X$ を縮約懸垂 (reduced suspension) という。

B.1.4 K^{-n} 群

こうして、K^{-n} 群を定義する準備が整った。K^{-n} 群は次のようにして定義される。

定義 B.1.12 (K^{-n} 群)

$$\begin{array}{lcll} \tilde{K}^{-n}(X) & = & \tilde{K}(S^n X) & (K \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}^+)) \\ K^{-n}(X,Y) & = & \tilde{K}^n(X/Y) = \tilde{K}(S^n(X/Y)) & ((X,Y) \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}^2)) \\ K^{-n}(X) & = & K^{-n}(X,\phi) = \tilde{K}(S^n(X^+)) & (X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})) \end{array} \tag{B.14}$$

これらが、反変関手になっていることは自明である。このようにして、K^{-n} 群が定義できるが、実は後に B.1.24 で述べるように n に関して modulo2 の周期性がある。即ち、K^{-n} 群には K^0 と K^1 の 2 種類しかない。

B.1.5 K-theory の基本的な性質

ここで、K^{-n} 群について知られているいくつかの事実を列挙する。特に、コホモロジーで知られている相対ホモロジーの長完全系列 (詳細は [Fom, 第 1 章] を参照。次の式は p35 にある。) に対応する物が K-theory にも存在することが知られている。

$$\cdots \longrightarrow H^k(X,Y) \longrightarrow H^k(X) \longrightarrow H^k(Y) \xrightarrow{\delta^*} H^{k+1}(X,Y) \longrightarrow \cdots \tag{B.15}$$

に対応するものが K-theory にも存在する。

まず準備として、X の錐と懸垂を定義する。

定義 B.1.13 (錐)
空間 X の錐 CX とは、

$$CX \equiv [0,1] \times X / \{0\} \times X \tag{B.16}$$

である。ここで、$1 \times X$ を X そのものと見做すという約束をする。

定義 B.1.14 (懸垂)
X の 懸垂とは以下のものである。

$$CX/X(=[0,1]\times X/\{0,1\}\times X) \tag{B.17}$$

のことである。錐を作る操作は、コンパクト空間の圏 $\mathscr{C}$ から基点を持つコンパクト空間の圏 $\mathscr{C}^+$ への関手である。これは縮約懸垂が $\mathscr{C}^+$ から $\mathscr{C}^+$ への関手であることと対照的である。ところで懸垂は名前が示す通り縮約懸垂と関係している。特に、K-theory では懸垂と縮約懸垂は同じ意味を持っている。即ち、

定理 B.1.15 (K-theory での縮約懸垂と懸垂の等価性)

$$K(SX)\cong K(CX/X), \tilde{K}(SX)\cong K(CX,X) \tag{B.18}$$

証明. $X\in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ とする $I\equiv Cx_0/x_0$ を CX/X の部分空間と見做すことができる。
この時 $(CX/X)/(Cx_0/x_0)\cong SX$ である。Cx_0/x_0 は1点可縮であるから $\mathrm{Vect}(X)\cong\mathrm{Vect}(X/I)$ なので $K(SX)\cong K(CX/X), \tilde{K}(SX)\cong K(CX,X)$ がいえる。 □

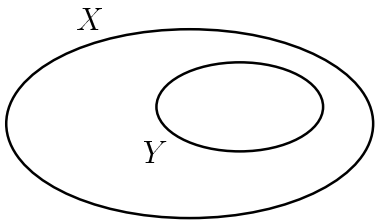


図 B.2: $X\cup Y$

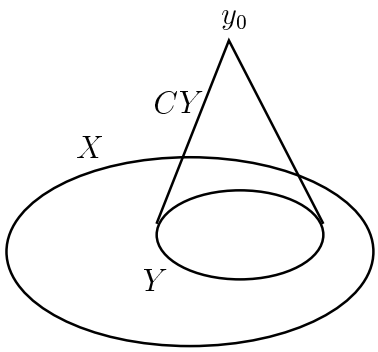


図 B.3: $X\cup CY$

次に、$(X,Y)\in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}^2)(Y\subset X)$ を考えると、$X\cup CY\in\mathrm{Ob}(\mathscr{C}^+)$ であり、また $X\cup CY/X=CY/Y$ であるから、次のことが言える。

補題 B.1.16
$Y\in\mathrm{Ob}(\mathscr{C}^+)$ として、

$$K(X\cup CY,X)\cong K(C,CY)\cong\tilde{K}(SY)\cong\tilde{K}^{-1}(X) \tag{B.19}$$

補題 B.1.17
$(X,Y)\in\mathscr{C}^2$ とし、$i:Y\to X, j:(X,\phi)\to(X,Y)$ を包含写像とする。この時、次のような完全系列を作ることができる。

$$K(X,Y)\xrightarrow{j^*}K(X)\xrightarrow{i^*}K(Y) \tag{B.20}$$

証明. $Y \xrightarrow{j\circ i} (Y,Y)$ だから、$i^*\circ j^* = 0$
今 K-theory での同値類を $[\cdots]$ と書くことにする。$\xi \in \mathrm{Ker}i^*$ とした時、$\xi = [E] - [\mathfrak{n}]$ の形で書くと、$i^*\xi = 0$ より $[E]$ の Y への制限 $[E\,|_Y]$ は $[\mathfrak{n}]$ に等しい。
したがって、ある自明なベクトル束 $\mathfrak{m}$ があって以下が成立する。

$$(E\oplus\mathfrak{m})\,|_Y = \mathfrak{n}\oplus\mathfrak{m} \tag{B.21}$$

これは、$E\oplus\mathfrak{m}$ の Y での自明化 α を見付けたということであり、$E\oplus\mathfrak{m}/\alpha$ は X/Y 上のベクトル束である。よって、同値類 $\eta \equiv [E\oplus\mathfrak{m}/\alpha] - [\mathfrak{m}\oplus\mathfrak{n}] \in K(X,Y)$ が定義できた。つまり、$\xi \in \mathrm{Ker}i^*$ に対して $\eta \in K(X,Y)$ が定まる。
ここで、

$$j^*([E\oplus\mathfrak{m}/\alpha] - [\mathfrak{m}\oplus\mathfrak{n}]) = [E] - [\mathfrak{n}] \tag{B.22}$$

であるから以下がいえる

$$\mathrm{Ker}i^* = \mathrm{Im}j^* \tag{B.23}$$

よって、式 (B.20) が完全系列であることが示された。 □

補題 B.1.18
$(X,Y) \in \mathscr{C}^2(Y\subset X), Y \in C^+$ で X の基点として、y_0 をとると以下は完全系列である。

$$K(X,Y) \longrightarrow \tilde{K}(X) \longrightarrow \tilde{K}(Y) \tag{B.24}$$

証明. 補題 B.1.17 と以下の $K(X), K(Y)$ の分解から明らかである。

$$\begin{aligned} K(X) &\cong \tilde{K}(X)\oplus K(y_0) \\ K(Y) &\cong \tilde{K}(Y)\oplus K(y_0) \end{aligned} \tag{B.25}$$

□

以上で長完全系列を示す準備が整った。

定理 B.1.19
以下は完全系列である。

$$\cdots \longrightarrow K^{-2}(Y) \xrightarrow{\delta} K^{-1}(X,Y) \xrightarrow{j^*} K^{-1}(X) \xrightarrow{i^*} K^{-1}(Y) \xrightarrow{\delta} K^0(X,Y) \xrightarrow{j^*} K^0(X) \xrightarrow{i^*} K^0(Y) \tag{B.26}$$

証明. 以下の系列の完全性を示せば十分である。

$$\tilde{K}^{-1}(X) \xrightarrow{i^*} \tilde{K}^{-1} \xrightarrow{\delta} \tilde{K}^0(X,Y) \xrightarrow{j^*} \tilde{K}^0(X) \xrightarrow{i^*} \tilde{K}^0(Y) \tag{B.27}$$

何故ならば、各 $\tilde{K}$ 群に $K(y_0)$ を付け加えることで、完全性を損うことなく K 群の完全系列にすることができるて、かつ、$(X,Y) \to (S^nX, S^nY)$ の置き換えで長い完全系列に継ぎ合わせることができるからである。

最後の 3 項の完全性は補題 B.20 で示した完全系列そのものである。

次に、$((X \cup CY), X) \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}^2)(Y \in \mathscr{C}^+)$ を考える。補題 B.1.18 より次の完全系列を得る。但し、k, m は自然な包含写像である。

$$K(X \cup CY) \xrightarrow{m^*} \tilde{K}(X \cup CY) \xrightarrow{k^*} \tilde{K}(X) \tag{B.28}$$

今 $p : X \cup CY \to (X \cup CY)/CY = X/Y$ を CY を 1 点 y_0 に縮める写像だと考えると、CY は 1 点可縮なので $\tilde{K}(X/Y) \xrightarrow[\cong]{p^*} \tilde{K}(X \cup CY)$ は同型写像である。また、$k^* \circ p^* = j^*$ である。さらに補題 B.1.16 を用いると、同型写像 $\theta : K^{-1}(X) \to K(X \cup CY, X)$ が存在するから $\delta \equiv p^* \circ \theta$ とすると、

$$\begin{array}{ccccc} K^{-1}(X) & \xrightarrow{\delta} & \tilde{K}(X/Y) \cong K(X/Y) & \xrightarrow{j^*} & \tilde{K}(X) \\ \theta \downarrow \cong & & p^* \downarrow \cong & \nearrow_{k^*} & \\ K(X \cup CY, X) & \xrightarrow{m^*} & \tilde{K}(X \cup CY) & & \end{array} \tag{B.29}$$

で真中の完全性が言えた。

最後に、$(X \cup C_1Y \cup C_2X, X \cup C_1Y) \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}^2)$ を考える。やはり、補題 B.1.18 より完全系列

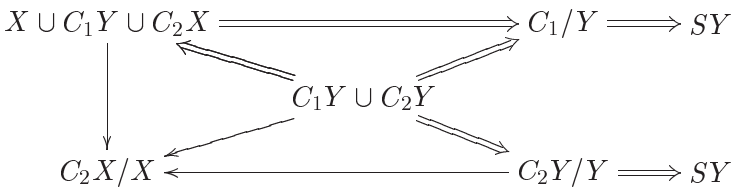
$$K(X \cup C_1Y \cup C_2X, X \cup C_1Y) \longrightarrow \tilde{K}(X \cup C_1Y \cup C_2X) \longrightarrow \tilde{K}(X \cup C_1Y) \tag{B.30}$$

を得る。以下の図式の符号の不定性を別にした、可換性が言えれば最初の 3 項の完全性を示すことができる。

$$\begin{array}{ccc} K(X \cup C_1Y \cup C_2X, X \cup C_1Y) & \longrightarrow & \tilde{K}(X \cup C_1Y \cup C_2X) \\ \updownarrow \cong & & \updownarrow \cong \\ \tilde{K}(C_2X/X) & & \tilde{K}(C_1Y/Y) \\ \updownarrow \cong & & \updownarrow \cong \\ K^{-1}(X) & \xrightarrow{i^*} & K^{-1}(Y) \end{array} \tag{B.31}$$

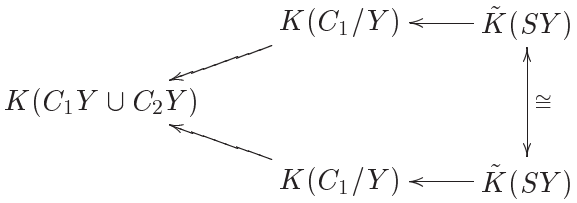
この図式の可換性を示すにあたって問題になるのは、i^* は同じ錐同士の包含写像で定義されているが図式 B.31 を上から回って行くと異なる錐の経由してしまう点にある。

そこで、以下のような図式を考える。



(B.32)

ただし、ここで現われる写像は全て collapsion 写像である。2 重の矢印は潰している部分が 1 点可縮であり K 群の同形を誘導することを意味している。図式 B.31 が可換であることを示すためにはこの図式から誘導される次の図式が可換であることを言えば良い。



(B.33)

このことは次に示す補題からいうことができる。即ち、 □

補題 B.1.20
$S^1 \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}^+)$ して $T : S^1 \to S^1$ を同じ S^1 を基点から逆回りに回るような写像であるとする。この時 $T \wedge \mathrm{id}_Y : SY \to SY$ なる写像を考えると、$y \in \tilde{K}(SX)$ として

$$(T \wedge 1)^* y = -y \tag{B.34}$$

である。

定理 B.1.19 から幾つかの系を導くことができる。

定義 B.1.21 (牽縮 (retract))
空間 X とその部分空間 Y があった時、連続写像 $f : X \to Y$ で f の Y への制限が恒等写像であるような f が存在するとき Y を X の牽縮 (retract) と言う。

$$f\,|_Y = \mathrm{id}_Y \tag{B.35}$$

系 B.1.22
Y を X の牽縮とするとき、完全系列 $K^{-n}(X,Y) \to K^{-n}(X) \to K^{-n}(Y)$ は分解する。即ち、

$$K^{-n}(X) \cong K^{-n}(X,Y) \oplus K^{-n}(Y) \tag{B.36}$$

となる。

証明. X は Y の牽縮であるから $f\big|_Y = \mathrm{id}_Y$ となるような $f : X \to Y$ が存在する。
$f^* \circ i^*$ が $\mathrm{id}_{K^{-n}(Y)}$ であることから、i^* は全射でなくてはならない。
定理 B.1.19 の式 (B.26) より、

$$K^{-n-1}(X) \xrightarrow{i^*} K^{-n-1}(Y) \xrightarrow{\delta} K^{-n}(X,Y) \xrightarrow{j^*} K^{-n}(X) \tag{B.37}$$

が完全系列であることから、j^* は全射である。
したがって、

$$0 \longrightarrow K^{-n} \xrightarrow{j^*} K^{-n}(X) \xrightarrow{i^*} K^{-n}(Y) \longrightarrow 0 \tag{B.38}$$

という短完全系列を作ることができる。
すると、$f^* \circ i^* = id_{K^{-n}(Y)}$ であるから完全系列は分解して、式 (B.36) が言える。 □

系 B.1.23
$X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}^+)$ とするとき $X \times Y$ から X, Y への射影 $\pi_X : X \times Y \to X$ と $\pi_Y : X \times Y \to Y$ は次の同型を誘導する。

$$\tilde{K}^{-n}(X \times Y) \cong \tilde{K}^{-n}(X \wedge Y) \oplus \tilde{K}^{-n}(X) \oplus \tilde{K}^{-n}(Y) \tag{B.39}$$

証明. X は $X \times Y$ の牽縮である。また、Y は $(X \times Y)/X$ の牽縮である。よって、系 B.1.22 を二回適用すればよい。 □

B.1.6 Bott 周期性定理

K-theory で知られている強力な大定理として Bott 周期性定理 [AB] がある。

定理 B.1.24

$$K(X) \cong K(X)^{-2} \tag{B.40}$$

証明. 証明は Atiyah の教科書 [Ati, Section2.3] を参照。 □

この定理と定理 B.1.19 を使うと次のような循環する完全系列 (6-term exact sequence) があることが分かる。

$$\begin{array}{ccccc} K^{-1}(X,Y) & \xrightarrow{j^*} & K^{-1}(X) & \xrightarrow{i^*} & K^{-1}(Y) \\ {\scriptstyle\delta}\uparrow & & & & \downarrow{\scriptstyle\delta} \\ K^0(Y) & \xleftarrow[i^*]{} & K^0(X) & \xleftarrow[j^*]{} & K^0(X,Y) \end{array} \tag{B.41}$$

この完全系列は、具体的な K 群を計算する上で強力な武器になる。

B.2 C* 環の K-theory

K-theory には色々な種類があり、幾何的な K-theory の他に純粋に代数的な K-theory がある。ここでは、そのような K-theory の 1 種である。C* 環の K-theory について説明する。この C* 環の K-theory は可換な空間 X 上の関数環 $\mathrm{C}^\infty(X)$ について考えた時にはトポロジカルな K-thoery に一致している。これは、可換な空間の上の関数の成す C* 環を考えた時に、トポロジカルな K-theory に対応するものである。非可換幾何学の K-theory を考える場合は C* 環の K-theory を考えざるを得ない。

この節では、まず C* 環の定義をした後に、C* 環の乗法単位元の存在について議論する。さらに、C* 環の K-theory とは直接関係無いが Hilbert 空間の上での表現について説明する。その後に K 群とその性質をいくつか述べて、C* 環の K-theory の言葉でトポロジカルな概念がどのように記述されるかについての説明を交じえつつ最後に Bott 周期性と巡回する長完全系列について言及する。

B.2.1 C* 環

C* 環は、物理の文脈ではしばしば、Hilbert 空間に作用するオペレータのなす環として登場する。非可換幾何学においては、2.1 節で述べた通り非可換幾何学の定義に必要不可欠な道具である。C* 環を定義するのに不可欠な概念として $*$-operation と Banach 環という概念がある。

C* 環を定義するにあたって、まず最初に代数に対する $*$ という操作を定義する。この $*$-operation の 1 例として、演算子の Hermite 共役をとるという操作が挙げられる。

定義 B.2.1 ($*$-operation)
$\mathbb{C}$ 上の代数 $\mathcal{A}$ が与えられた時、次の性質をもつような $* : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ を $*$-operation と言う。また $*$ の $a \in \mathcal{A}$ への作用を a^* と書く。$(a, b \in \mathcal{A},\ \alpha, \beta \in \mathcal{A})$ として

St1 $a^{**} = a$

St2 $(ab)^* = b^* a^*$

St3 $(\alpha a + \beta b)^* = \bar{\alpha} a^* + \bar{\beta} b^*$

定義 B.2.2 ($*$-Algebra)
$*$-operation が定義されているような代数を $*$-Algebra という。

また、この操作の定義に伴なって、次のような写像を定義する。

定義 B.2.3 ($*$-準同形写像)
$*$-準同形写像とは、$*$-Algebra から $*$-Algebra への環準同形写像で、$*$-operation と可換な準同形写像をいう。

次に、ノルムの概念を説明する。

定義 B.2.4 (ノルム)
ノルムとは、次のような $\mathbb{C}$ 上の代数 $\mathcal{A}$ から $\mathbb{R}$ への写像である。但し、$a, b \in \mathcal{A}$, $\alpha \in \mathbb{C}$ である。

Nr1 $\|a\| \geq 0$

Nr2 $\|\alpha a\| = |\alpha|\|a\|$

Nr3 $\|a+b\| \leq \|a\| + \|b\|, \|ab\| \leq \|a\|\|b\|$

このノルムによって、トポロジーを定義できる。

定義 B.2.5 (normed topology)
$U(a,\epsilon) \equiv \{b \in \mathcal{A} \mid \|a-b\| < \epsilon\}(a \in \mathcal{A}, \epsilon \in \mathbb{R})$ を近傍とするトポロジーを定義することができる。このトポロジーを normed topology という。

定義 B.2.6 (Banach 環)
ノルムが定義されていて、について完備つまり、Causy 列の極限操作について閉じている環を Banach 環という。

この、2 つの概念から Banach$*$-Algebra と C* 環の概念を定義できる。

定義 B.2.7 (Banach $*$-Algebra)
Banach 環で、$*$-operation を持ち次の性質を満すものを Banach $*$-Algebra という。

$$\|a^*\| = \|a\| \tag{B.42}$$

定義 B.2.8 (C* 環)
Banach $*$-Algebra で次の性質 (C* 等式) を満すものを C* 環という。

$$\|aa^*\| = \|a\|^2 \tag{B.43}$$

以上で、C* 環が定義できた。

B.2.2 C* 環の乗法単位元

前の小節で定義した C* 環には、必ずしも乗法単位元が存在しない (unital でない)。しかし、任意の C* 環について、以下で定義されるような近似的乗法単位元 (approximate unit) が存在することが知られている。

定義 B.2.9 (近似的乗法単位元 (approximate unit))
近似的乗法単位元とは、次のような性質をみたす $\mathcal{A}$ 内の有向集合 (net)$\{a_\lambda\}_\lambda$ である。

AU1 $a_\lambda^* = a_\lambda, \|a_\lambda\|$

AU2 $\lambda \leq \mu$ ならば $a_\lambda \leq a_\mu$

AU3 任意の $x \in \mathcal{A}$ について $\lim_\lambda \|xe_\lambda - x\| = \lim_\lambda \|e_\lambda x - x\| = 0$

近似的乗法単位元の存在についての証明は、Arveson の教科書 [Arv, **Theorem1.8.2**] を参照。

更に、C* 環 $\mathcal{A}$ について、$\mathcal{A}$ を含むような乗法単位元を持つ代数 $\mathcal{A}^{\sim}$ を作ることができる。この $\mathcal{A}^{\sim}$ は $\mathcal{A} \oplus \mathbb{C}$ のような形をしている。

定理 B.2.10 (minimal unitalization $\mathcal{A}^{\sim}$)
乗法単位元を持たない C* 環 $\mathcal{A}$ について、minimal unitalization $\mathcal{A}^{\sim}$ なる C* 環が存在する。

証明. Banach 空間 $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ を $\mathcal{A}$ に作用する有界な作用素 (有界の概念は定義 B.2.15 と同様にして定義することがでる。) の成す環とする。このとき $\mathcal{A}$ を $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ に埋め込むことができる。すなわち、

$$i(a) \equiv [a' \mapsto aa'] \tag{B.44}$$

今、$\mathcal{B}(\mathcal{A})$ にオペレーターとしてのノルム (これも定義 B.2.16 と同様の定義で定義できる。) と $\mathcal{A}$ のノルムに関して $i : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{A})$ は等長変換であることが言える。即ち、$\mathcal{B}(\mathcal{A})$ のノルムの定義より $\|i(a)\| \leq \|a\|$ だが、一方で $\mathcal{A}$ の C* 等式 (B.43) より、$\|i(a)\| \geq \|i(a)(\frac{a^*}{\|a\|})\| = \|a\|$ なので、$\|i(a)\| = \|a\|$ が言える。

そこで、$\mathcal{A}^{\sim} \subset \mathcal{B}(\mathcal{A})$ を次のように定義する。

$$\mathcal{A}^{\sim} \equiv i(\mathcal{A}) + \mathbb{C}I \qquad I \in \mathcal{B}(\mathcal{A})\text{:恒等写像} \tag{B.45}$$

今仮に、$\mathcal{A}$ が乗法単位元を持っているとすれば $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}^{\sim}$ である。$\mathcal{A}$ が乗法単位元を持っていないときにこの $\mathcal{A}^{+}$ が C* 環になっていることを示したい。

問題は、$\mathcal{B}(\mathcal{A})$ は元々C* 環の $*$-operation を持っていないことである。そこで、$\mathcal{A}^{+}$ の $*$-operation を以下のように定義する。

$$(i(a) + \alpha I)^* \equiv i(a^*) + \bar{\alpha} I \tag{B.46}$$

この $*$-operation は C* 等式を満たすことを示さねばならない。近似的乗法単位元の存在から、任意の小さな正数 $\epsilon > 0$ と $x \equiv i(a) + \alpha I$ について次の等式を満たすような $b \in \mathcal{A}$ が存在する。

$$\begin{aligned} \|x\|^2 = \|\ (a) + \alpha I\|^2 &\leq \|(i(a) + \alpha I)(b)\| + \epsilon \\ &= \|(ab + \alpha b)^*(ab + \alpha b)\| + \epsilon \\ &\leq \|b^*\|\,\|(i(a) + \alpha I)^*(i(a) + \alpha I)\| + \epsilon \\ &\leq \|x^* x\| + \epsilon \end{aligned} \tag{B.47}$$

するとノルムの性質から $\epsilon \to 0$ の極限で $\|x\|^2 \leq \|x^* x\| \leq \|x^*\|\|x\| = \|x\|^2$ が言える。 □

定理 B.2.11
$\mathcal{A}$ が乗法単位元を持たい時 $\mathcal{A}^{\sim} / \mathcal{A} \cong \mathbb{C}$ である。

定義 B.2.12 ($\mathcal{A}^+$)
C* 環 $\mathcal{A}$ に対して $\mathcal{A}^+$ とは、$\mathcal{A}\times\mathbb{C}$ で積が次のように定義されているものをいう。

$$(a,\alpha)(b,\beta)\equiv(ab+\alpha b+\beta a,\alpha\beta) \tag{B.48}$$

定理 B.2.13 ($\mathcal{A}^+$ の性質)
$\mathcal{A}^+$ について次の事が言える。

(1) $\mathcal{A}^+$ は乗法単位元 $(0,1)$ を持った C^*-algebra である。

(2) $\mathcal{A}$ が乗法単位元を持たない時、$\mathcal{A}^+\cong\mathcal{A}^\sim$ である。

(3) $\mathcal{A}$ が乗法単位元 $1_{\mathcal{A}}$ を持つ時、$\mathcal{A}^+\cong A\oplus\mathbb{C}$ である。

(4) $\mathcal{A}^+/\mathcal{A}\cong\mathbb{C}$ である。

証明. $\mathcal{A}$ が乗法単位元を持たないとした時、$\psi:(a,\alpha)\mapsto i(a)+\alpha I$ は $*$-同型写像である。更に、$A^\sim$ から誘導されるノルムについて $\mathcal{A}^+$ は C* 環になっている。また、$\mathcal{A}$ は $\psi^{-1}(i(\mathcal{A}))$ なるイデアルに同型だから、$\mathcal{A}/\mathcal{A}\cong\mathbb{C}$ である。

$\mathcal{A}$ が乗法単位元をもつ時、$\mathcal{A}^+$ は写像 $\varphi:(a,\alpha)\mapsto(a+\alpha 1_{\mathcal{A}},\alpha)$ によって $\mathcal{A}\oplus\mathbb{C}$ に同型である。さらに、$\mathcal{A}^+$ は $\mathcal{A}\oplus\mathbb{C}$ から誘導されるノルムによって C* 環になる。また $A\cong\varphi^{-1}(\mathcal{A}\oplus 0),\mathbb{C}\cong\varphi^{-1}(0\oplus\mathbb{C})$ はそれぞれ $\mathcal{A}^+$ のイデアルで $\mathcal{A}^+/\mathcal{A}\cong\mathbb{C},\mathcal{A}^+/\mathbb{C}=\mathcal{A}$ である。 □

B.2.3 C* 環の Hilbert 空間上の表現

物理の文脈でよく出てくる C* 環には、多様体上の関数 (場) や Hilbert 空間 $\mathscr{H}$ 上の (有界な) 作用素環などがある。実はどのような C* 環もある Hilbert 空間 $\mathscr{H}$ 上の表現があることが知られている。よって、C* 環といった時には Hilbert 空間上の作用素の環と思えばよい。

まず、Hilbert 空間の定義を述べる。

定義 B.2.14 ((複素)Hilbert 空間)
複素 Hilbert 空間 $\mathscr{H}$ とは次のような性質を満たす、内積と呼ばれる双線型写像 $(\cdot,\cdot):\mathscr{H}^2\to\mathbb{R}$ をもつ線型空間である。

H1 $(x,y)^*=(y,x)$

H2 $(x,x)\le 0$

H3 $(x,x)=0\Leftrightarrow x=0$

H4 (x,x) で定義されるノルム $\|x\|\equiv(x,x)$ について閉じている。

Hilbert 空間上の作用素の中で物理的に興味があるのは、ある状態に対して有限な固有値を持つような作用素である。

定義 B.2.15 (有界作用素 (bounded operator))
Hilbert 空間の作用素 A があったとき、正数 $M \in \mathbb{R}_+$ で Hilbert 空間の任意の元 $x \in \mathscr{H}$ に対して、$\|Ax\| \leq M\|x\|$ を満たすものが存在するとき、A を有界作用素 (bounded operator) という。また、有界作用素が成す Hilbert 空間上の作用素環の部分 C* 環を $\mathcal{B}(\mathscr{H})$ と書く。

有界作用素の $*$-operation について閉じている閉部分環は、C* 環になっている。このとき作用素のノルムを定義しなくてはならない。

定義 B.2.16 (線型作用素のノルム)
線型空間 X から線型空間 Y への線型作用素 a のノルムは次のように定義されている。

$$\|a\| \equiv \sup_{\|x\| \in X} \|Mx\| \tag{B.49}$$

このノルムについて、線型作用素の成す環に位相を導入することができる。更に、有界作用素の成す環 $\mathcal{B}(\mathscr{H})$ 対しては次のようにしてもう 2 通りの位相を定義することができる。

定義 B.2.17 (強位相)
Hilbert 空間上の作用素の集合で $\{A \mid \|Ax\| < \epsilon \,\text{for}\, \forall x \in \mathscr{H}\}$ からなる集合を近傍とするような位相を強位相という

定義 B.2.18 (弱位相)
Hilbert 空間上の作用素の集合で $\{A \mid (y, Ax) < \epsilon \,\text{for}\, \forall x, y \in \mathscr{H}\}$ からなる集合を近傍とするような位相を弱位相という

定義 B.2.19 (コンパクト作用素)
Hilbert 空間 $\mathscr{H}$ 上の作用素 A がコンパクトであるとは、Hilbert 空間内の任意の有界集合 $X \subset \mathscr{H}$ の A による像 $A(X)$ がコンパクトであることをいう。

ここで、この肢節の冒頭で述べた定理を述べる。

定理 B.2.20 (Gel'fand-Naĭmark)
あらゆる C* 環はある Hilbert 空間 $\mathscr{H}$ の有界作用素の環 $\mathcal{B}(\mathscr{H})$ の $*$-operation について閉じた閉部分環と同型である。

証明. 証明は、Arveson の教科書 [Arv, Section1.6,1.7] を参照。 □

B.2.4 C* 環の K_0 群の定義

2.3.1 の中で、冪等な射影演算子 $p = p^* = p^2$ が非可換幾何でのベクトル束に対応しているといった。そうすると、非可換幾何でのトポロジカル K-theory の対応物として、冪等な射影演算子による K-theory を考えることができそうである。実際、C* 環の K-theory はそのようにして構成される。

C* 環 $\mathcal{A}$ が与えられた時、$\mathbb{M}_n(\mathcal{A})$ 中の冪等な射影演算子を p とする。この射影演算子を用いて、半群を構成する。その後は、トポロジカルな K 群の抽象的と同様にして、Grothandieck 群を構成することで K_{00} 群を得ることができる。しかし、射影演算子に行列の積からくる加群の構造をそのまま入れることには問題がある。何故なら、射影演算子は直交であるとは限らないからである。例えば、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{B.50}$$

であるが、可換幾何学のベクトル束とその K-theory への対応を考えた時に、右辺は左辺の 2 つのベクトル束の直積になって欲しい。しかし、実際にはそうはなっていない。その為に別の半群としての構造を入れる必要がある。必要とされるような半群の構造は、二つの射影演算子 $p, q \in \mathbb{M}_n(\mathcal{A})$ に対して、

$$p + q = \mathrm{diag}(p, q) \tag{B.51}$$

のように無理矢理直交にして足すような半群である。このような半群を定義するために、射影演算子の同値関係を定義する。実は、この同値関係には 3 通りの同値な定義がある。

定義 B.2.21 (射影演算子の同値関係)
射影演算子 p と q が同値であるとは、以下の 3 つの等価な定義を満たすことである。

(1) 以下のような性質を満たす $v \in \mathbb{M}_\infty(\mathcal{A})$ が存在する

$$p = v^* v, q = v v^* \tag{B.52}$$

(2) ($\mathcal{A}$ が乗法単位元を持つことを仮定した時) ユニタリ行列 $u \in U(n, \mathcal{A})$ があって

$$p = uqu^* \tag{B.53}$$

(3) ノルムの位相について連続な変形で結びついている。

このことを $p \sim q$ と書き、この同値関係による同値類を $[\cdots]$ と書く。この 3 つの関係が同値関係になっていることは簡単に確かめることができる。同値関係の意味を分かり易くする為に 3 通りの同値関係の定義を紹介したが、今後は主に (1) の同値関係のみを用いる。3 つの同値関係の等価性については、[WO, Chapter4,5] を参照。

まず、上の同値関係の定義から簡単に分かることとして射影演算子 p と q が直交していない時に、同値関係を使って直交させることができる。何故なら、

$$uu^* = \begin{pmatrix} p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad uu^* = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & p \end{pmatrix}, \quad \text{但し } u = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & p \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \tag{B.54}$$

であるから、p を q と直交するブロックまで自由に持って行くことができるからである。よって、この同値類による加法は式 B.51 のようにして、定義できる。

定義 B.2.22 (射影演算子の加法)
射影演算子の加法は $p \sim p', q \sim q', p' \perp q'$ として、

$$[p] + [q] \equiv \mathrm{diag}(p+q) \equiv [p' \oplus q'] \tag{B.55}$$

この加法の基本的な性質として以下のことが分かる。

定理 B.2.23

(1) 定義 B.2.22 の加法は上手く定義されている。

証明. $p \sim p', q \sim q', p \perp q, p' \perp q'$ とすれば $p = uu^*, p' = u^*u, q = vv^*, q' = v^*v$ なる u, v が存在して、$w = u \oplus v$ とすれば、$p \oplus q = ww^*, p' \oplus q' = w^*w$ だから、$p \oplus q = p' \oplus q'$ □

(2) $p \oplus q = q \oplus p$

証明. $u = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & p \\ q & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ とすれば $p \oplus q = uu^*, \quad q \oplus p = u^*u$ □

これで射影演算子から望むような半群を構成できたので、そこから Grothendieck 群 (定義 B.1.3) をトポロジカルな K 群と同様にして構成するとことで K_{00} 群を得ることができる。まとめると、

定義 B.2.24 ($K_{00}(\mathcal{A})$ 群)
C* 環 $\mathcal{A}$ の K_0 群は、$\mathbb{M}_\infty(\mathcal{A})$ の中の自己共役で冪等な元の同値類 (定義 B.2.21) に対して定義 B.2.22 の加法から定義された半群から構成した Grotehndick 群である。

例えば簡単な例を挙げれば $K_{00}(\mathcal{A})$ 群の具体例は $K_{00}(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}$ である。すなわち、$\mathbb{M}_\infty(\mathbb{C})$ の冪等な射影演算子の同値類は、射影演算子の Rank によって分類されるすなわち $\mathbb{N}$、よってそこから構成した Grothendieck 群は $\mathbb{Z}$ である。

以上の準備を経て、$K_0(\mathcal{A})$ は次のようにして定義される。

定義 B.2.25 ($K_0(\mathcal{A})$ 群)
$\pi : \mathcal{A}^+ \to \mathcal{A}^+ / \mathcal{A} \cong \mathbb{C}$ (定理 B.2.13 参照) として、

$$K_0(A) \equiv \mathrm{Ker}(\pi_* : K_{00}(\mathcal{A}^+) \to K_{00}(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}) \subset K_{00}(\mathcal{A}^+) \tag{B.56}$$

乗法単位元を持つ C* 環 $\mathcal{A}^*$ については $K_{00}(\mathcal{A}) = K_0(\mathcal{A})$ である。また、トポロジカル K-theory の時と同様に K_0 の元は $[p] - [q]$ の形で書くことができる。

B.2.5 K_0 群の性質

トポロジカル K-theory がコンパクト空間からの反変関手になっているのと同じように、C* 環の K_0 は C* 環の圏からの共変関手になっていることが言える。ここで、反変が共変になっているのは「多様体 $\to$ その上の関数」のところで一度反変と共変が入れ替わるからである。

定理 B.2.26 (K_0 の共変関手性)
C* 環の K_0 は C* 環の圏からの共変関手である。

証明. C* 環 $\mathcal{A}$ から C* 環 $\mathcal{B}$ への写像 $i : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ が与えられたとするとき。射影演算子の同値類の差の間の写像が誘導される。

$$i_*([(a_{ij}^1)] - [(b_{ij}^2)]) = [(i^+ a_{ij})] - [(i^+ b_{ij})] \tag{B.57}$$

但し、(x_{ij}) は $\mathcal{A}$ から $\mathcal{A}^+$ の自然な埋め込みであり、$i^+ : \mathcal{A}^+ \to \mathcal{B}^+$ は $i^+(a, \alpha) \equiv (i(a), \alpha)$ で定義されている。 □

K_0 は $\mathbb{K}$ をテンソルする操作 (実は、森田同値) に関して不変である。

定理 B.2.27 (K_0 の stability)
C* 環 $\mathcal{A}$ について $K_0(\mathcal{A}) \cong K_0(A \otimes \mathbb{K})$ である。

証明. $\Phi_{nm} : \mathbb{M}_m(\mathcal{A}) \hookrightarrow \mathbb{M}_n(\mathcal{A})\,(m \leq n)$ を行列の左上に埋め込む写像だと考える。すると以下のような図式は可換である。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{\Phi_{m1}} & \mathbb{M}_m(\mathcal{A}) \\ & \searrow^{\Phi_{n1}} & \downarrow{\scriptstyle \Phi_{nm}} \\ & & \mathbb{M}_n(\mathcal{A}) \end{array} \tag{B.58}$$

従って、Φ_{n1} は $K_0(\mathcal{A})$ と $K_0(\mathcal{A})$ の同型を誘導する。何故ならば、K_0 群の構成法を思い出せば $\mathbb{M}_\infty(\mathbb{M}(\mathcal{A})) = \mathbb{M}_i n f t y(\mathcal{A})$ であるから、$K_{00}(\mathcal{A})$ と $K_{00}(\mathbb{M}_n(\mathcal{A}))$ は一致するからである。

よって、上の可換図式は、次のような可換図式を誘導する。

$$\begin{array}{ccc} K_0(\mathcal{A}) & \xleftarrow{{\Phi_{m1}}_*^{-1}} & K_0(\mathbb{M}_m(\mathcal{A})) \\ & \nwarrow^{{\Phi_{m1}}_*^{-1}} & \downarrow{\scriptstyle {\Phi_{nm}}_*} \\ & & K_0(\mathbb{M}_m(\mathcal{A})) \end{array} \tag{B.59}$$

ここで $\mathbb{M}_n(\mathcal{A})$ の帰納的極限 $\mathbb{K}\otimes\mathcal{A}$ を考えると、以下の図式が書ける。

$$\begin{array}{ccc} K_0(\mathbb{M}_m(\mathcal{A})) & \xrightarrow{\Phi_{m*}} & K_0(\mathcal{A}\otimes\mathbb{K}) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \Phi_{nm*}} & \overset{\cong}{\nearrow}\ \ \searrow & \Big\downarrow{\scriptstyle \Xi} \\ K_0(\mathbb{M}_n(\mathcal{A})) & \xrightarrow{\cong} & K_0(\mathcal{A}) \end{array} \qquad \text{(B.60)}$$

ここで帰納的極限の普遍性 ([WO, AppendixL] 参照) より Ξ は同型写像である。 □

次に C* 環 K-theory にも長完全系列があるが、その準備として短完全系列を導く。

定理 B.2.28 (K_0 の短完全系列)
完全系列 C* 環 $\mathcal{J}$ を C* 環 $\mathcal{A}$ のイデアルとして $0\to\mathcal{J}\xrightarrow{\iota}\mathcal{A}\xrightarrow{\pi}\mathcal{A}/\mathcal{J}\to 0$ なる完全系列は以下の K_0 群の完全系列を誘導する。

$$K_0(\mathcal{J})\xrightarrow{\iota_*}K_0(\mathcal{A})\xrightarrow{\pi_*}K_0(\mathcal{A}/\mathcal{J}) \qquad \text{(B.61)}$$

証明. Wegge-Olsen の教科書 [WO, p199,**Theorem6.3.2**] を参照。 □

C* 環の K-theory の重要な性質として K_0 群のホモトピー不変性があるが、それについて述べる前に前に準備としてトポロジーの概念の幾つかを C* 環の言葉で定義する。

定義 B.2.29

ホモトピー同値 二つの写像 $\alpha,\beta:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ がホモトピー同値とは、$\gamma_t:\mathcal{A}\to\mathcal{B}\ (t\in[0,1])$ が存在して全ての $a\in\mathcal{A}$ について $[0,1]\mapsto\gamma_t(a)$ が $\mathcal{B}$ のノルムについて連続な経路であることをいう。このことを $\alpha\sim_h\beta$ と表記する。

同値 (equivarence) 写像 $\alpha:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ が同値であるとは、写像 $\beta:B\to A$ が存在して $\beta\circ\alpha\sim_h \mathrm{id}_{\mathcal{A}}$ かつ $\alpha\circ\beta\sim_h \mathrm{id}_{\mathcal{B}}$ であることを言う。

牽縮 (retraction) 写像 α が deformation retraction であるとは α が equivarence であり、$\alpha\circ\beta=\mathrm{id}_{\mathcal{B}}$ であることを言う。

可縮 (contractable) $\mathcal{A}$ が可縮 (contractable) であるとは、$\mathrm{id}_{\mathcal{A}}\sim_h 0$ であることをいう。

定理 B.2.30 (K-theory のホモトピー不変性)
$\alpha_1,\alpha_2:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ がホモトピー同値な写像である時、関手 K_0 によって誘導された写像は $\alpha_{1*}=\alpha_{2*}$ である。

証明. K_0 群の定義に用いた同値関係 (定義 B.2.21) の定義から自明である。 □

系 B.2.31
$\alpha:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ が同値 (equivarence) であるとき、$K_0(\mathcal{A})\cong K_0(\mathcal{B})$ である。
特に、$\mathcal{A}$ が可縮であるとき $K_0(\mathcal{A})=0$

さらに、トポロジーの概念のいくつかの概念を C* 環の言葉に焼き直す。

定義 B.2.32

錐体 (cone) C* 環 $\mathcal{A}$ の錐体とは、以下で定義される C* 環のことを言う。

$$C\mathcal{A} \equiv \{f \in C([0,1] \to \mathcal{A}) \mid f(0) = 0\} \tag{B.62}$$

懸垂 (suspention) C* 環 $\mathcal{A}$ の懸垂とは以下のような C* 環のことを言う。

$$S\mathcal{A} \equiv f \in CA \mid f(1) = 0 \tag{B.63}$$

定理 B.2.33
任意の C* 環 $\mathcal{A}$ についてその錐体 $C\mathcal{A}$ は可縮である。
また、任意の C* 環 $\mathcal{A}$ についてその錐体 $C\mathcal{A}$ は可縮である。

証明. $\gamma_t : C\mathcal{A} \to \mathcal{A}$ を $\gamma_t(f)(s) \equiv f(st)$ と定義すると、明かに $\gamma_1 = \mathrm{id}_{C\mathcal{A}}$ で $\gamma_0 = 0$ であるから $C\mathcal{A}$ は可縮である。 □

B.2.6 $K_n(\mathcal{A})$ 群

まずは、$K_1(\mathcal{A})$ 群を定義する。K_1 群は次のように定義される。

定義 B.2.34 ($K_1(\mathcal{A})$ 群)

$$K_1(\mathcal{A}) \equiv \mathrm{GL}_\infty(\mathcal{A}^+)/\mathrm{GL}_\infty(\mathcal{A}^+)_0 = U_\infty(\mathcal{A}^+)/U_\infty(\mathcal{A}^+)_0 \tag{B.64}$$

ここで、$GL_\infty(\mathcal{A}^+)_0, U_\infty(\mathcal{A}^+)_0$ とは、単位元と連続に継がっている元からなるイデアルである。実は、この $K_1(\mathcal{A})$ 群は $\mathcal{A}$ の懸垂 $S\mathcal{A}$ の K_0 群と同型である [WO, p138,**Theorem 7.2.5**]。

$$K_1(\mathcal{A}) \cong K_0(S\mathcal{A}) \tag{B.65}$$

トポロジカル K-theory の時と同様にして懸垂から $K_n(\mathcal{A})$ 群を定義することができる。

定義 B.2.35 (C* 環の K_n)

$$K_n(\mathcal{A}) \equiv K_0(S^n\mathcal{A}) \tag{B.66}$$

最後に、良く用いられる K_0 群と K_1 群のカタログを書いておく。

C* 環 $\mathcal{A}$	$K_0(\mathcal{A})$	$K_1(\mathcal{A})$
$\mathbb{C}$	$\mathbb{Z}$	0
$\mathbb{M}_n$	$\mathbb{Z}$	0
$\mathbb{M}_\infty$	$\mathbb{Z}$	0
$C_0(\mathbb{R}^{2n})$	0	$\mathbb{Z}$
$C_0(\mathbb{R}^{2n+1})$	$\mathbb{Z}$	0
$C(T^n)$	$\mathbb{Z}^{2^{2n-1}}$	$\mathbb{Z}^{2^{n-1}}$
$C(S^{2n})$	$\mathbb{Z}^2$	0
$C(S^{2n+1})$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$

図 B.4: 基本的な C* 環の K 群のカタログ

B.2.7 Bott 周期性と長完全系列

C* 環の K-theory にも Bott 周期性がある。即ち、

定理 B.2.36 (C* 環の Bott 周期性)

$$K_n(\mathcal{A}) \cong K_{n+2}(\mathcal{A}) \tag{B.67}$$

証明. Wegge-Olsen の教科書 [WO, Chapter9] を参照 □

さらに、これもトポロジカル K-theory とのアナロジーで巡回する完全系列が存在する。この長完全系列は K 群を具体的に計算する際に有力な武器となる。

$$\begin{array}{ccccc} K^1(\mathcal{J}) & \longrightarrow & K^1(\mathcal{A}) & \longrightarrow & K^1(\mathcal{A}/\mathcal{J}) \\ \uparrow & & & & \downarrow{\scriptstyle \delta} \\ K^0(\mathcal{A}/\mathcal{J}) & \longleftarrow & K^0(\mathcal{A}) & \longleftarrow & K^0(\mathcal{J}) \end{array} \tag{B.68}$$

参考文献

[AB] M. Atiyah and R. Bott. On the periodicity theorem for complex vector bundles. *Acta Math.*, Vol. 112, pp. 229–247, 1964.

[ABK] I. Y. Aref'eva, D. M. Belov, and A. S. Koshelev. Two-loop diagrams in noncommutative phi**4(4) theory. *Phys. Lett.*, Vol. B476, p. 431, 2000, hep-th/9912075.

[AIQU] G. Aldazabal, L. E. Ibanez, F. Quevedo, and A. M. Uranga. D-branes at singularities: A bottom-up approach to the string embedding of the standard model. *JHEP*, Vol. 08, p. 002, 2000, hep-th/0005067.

[AK1] T. Asakawa and I. Kishimoto. Comments on gauge equivalence in noncommutative geometry. *JHEP*, Vol. 11, p. 024, 1999, hep-th/9909139.

[AK2] T. Asakawa and I. Kishimoto. Noncommutative gauge theories from deformation quantization. *Nucl. Phys.*, Vol. B591, pp. 611–635, 2000, hep-th/0002138.

[Arv] W. Arveson. *An Introduction to C^*-Algebra.* Springer, 1976.

[Ati] M. F. Atiyah. *K-Theory.* ADDISON-WESLEY, 1967.

[BDF] L. G. Brown, R. G. Douglas, and P. A. Fillmore. Extensions of C^*-algebras and K-homology. *Ann. of Math. (2)*, Vol. 105, No. 2, pp. 265–324, 1977.

[BFSS] T. Banks, W. Fischler, S. H. Shenker, and L. Susskind. M theory as a matrix model: A conjecture. *Phys. Rev.*, Vol. D55, pp. 5112–5128, 1997, hep-th/9610043.

[BM] P. Bouwknegt and V. Mathai. D-branes, b-fields and twisted k-theory. *JHEP*, Vol. 03, p. 007, 2000, hep-th/0002023.

[BSZ] N. Berkovits, A. Sen, and B. Zwiebach. Tachyon condensation in superstring field theory. *Nucl. Phys.*, Vol. B587, pp. 147–178, 2000, hep-th/0002211.

[CF] A. S. Cattaneo and G. Felder. A path integral approach to the kontsevich quantization formula. *Commun. Math. Phys.*, Vol. 212, p. 591, 2000, math.qa/9902090.

[CHSW] P. Candelas, G. T. Horowitz, A. Strominger, and E. Witten. Vacuum configurations for superstrings. *Nucl. Phys.*, Vol. B258, pp. 46–74, 1985.

[Con] A. Connes. *Noncommutative Geometry.* ACAEMIC PRESS, 1994.

[dM] L. B. de Monvel. On the index of Toeplitz operators of several complex variables. *Invent. Math.*, Vol. 50, No. 3, pp. 249–272, 1978/79.

[dMKJMT] R. de Mello Koch, A. Jevicki, M. Mihailescu, and R. Tatar. Lumps and p-branes in open string field theory. *Phys. Lett.*, Vol. B482, p. 249, 2000, hep-th/0003031.

[DMR] K. Dasgupta, S. Mukhi, and G. Rajesh. Noncommutative tachyons. *JHEP*, Vol. 06, p. 022, 2000, hep-th/0005006.

[Fom] A. T. Fomenko. 微分幾何学とトポロジー. 共立出版, 1996.

[GMS] R. Gopakumar, S. Minwalla, and A. Strominger. Noncommutative solitons. *JHEP*, Vol. 05, p. 020, 2000, hep-th/0003160.

[HK] J. A. Harvey and P. Kraus. D-branes as unstable lumps in bosonic open string field theory. *JHEP*, Vol. 04, p. 012, 2000, hep-th/0002117.

[HKL] J. A. Harvey, P. Kraus, and F. Larsen. Exact noncommutative solitons. 2000, hep-th/0010060.

[HKLM] J. A. Harvey, P. Kraus, F. Larsen, and E. J. Martinec. D-branes and strings as non-commutative solitons. *JHEP*, Vol. 07, p. 042, 2000, hep-th/0005031.

[HM] J. A. Harvey and G. Moore. Noncommutative tachyons and k-theory. 2000, hep-th/0009030.

[IKKT] N. Ishibashi, H. Kawai, Y. Kitazawa, and A. Tsuchiya. A large-n reduced model as superstring. *Nucl. Phys.*, Vol. B498, p. 467, 1997, hep-th/9612115.

[Kon] M. Kontsevich. Deformation quantization of poisson manifolds, i. 1997, q-alg/9709040.

[Lan] G. Landi. An introduction to noncommutative spaces and their geometry. 1997, hep-th/9701078.

[Mad] J. Madore. *An Introduction to Noncommutative Differential Geometry and its Physial Applications.* Cambridge, 1995.

[Mat] Y. Matsuo. Topological charges of noncommutative soliton. 2000, hep-th/0009002.

[MRS] S. Minwalla, M. V. Raamsdonk, and N. Seiberg. Noncommutative perturbative dynamics. 1999, hep-th/9912072.

[Mur] G. J. Murphy. *C^*-ALGEBRLAS AND OPERATOR THEORY*. ACADEMIC PRESS, 1990.

[Pol] J. Polchinski. *STRING THEORY*. Cambridge, 1998.

[Rie] M. A. Rieffel. Critical points of yang-mills for noncommutative two tori. *J. Diff. Geom.*, Vol. 31, p. 535, 1990.

[Ros] J. Rosenberg. Continuous-trace algebras from the bundle theoretic point of view. *J. Austral. Math. Soc. Ser. A*, Vol. 47, No. 3, pp. 368–381, 1989.

[Rot] J. J. Rotman. *An Introduction to Algebraic Topology*. Springer, 1988.

[RS] M. V. Raamsdonk and N. Seiberg. Comments on noncommutative perturbative dynamics. *JHEP*, Vol. 03, p. 035, 2000, hep-th/0002186.

[Sen] A. Sen. Descent relations among bosonic d-branes. *Int. J. Mod. Phys.*, Vol. A14, p. 4061, 1999, hep-th/9902105.

[SW] N. Seiberg and E. Witten. String theory and noncommutative geometry. *JHEP*, Vol. 09, p. 032, 1999, hep-th/9908142.

[WB] J. Wess and J. Bagger. *Supesymmetry and Supergravity*. Princeton, 1976.

[Wei] S. Weiberg. *The Quantubm Theory of Fields*. Cambridge, 1995.

[Wit1] E. Witten. D-branes and k-theory. *JHEP*, Vol. 12, p. 019, 1998, hep-th/9810188.

[Wit2] E. Witten. Noncommutative geometry and string field theory. *Nucl. Phys.*, Vol. B268, p. 253, 1986.

[Wit3] E. Witten. Symmetry breaking patterns in superstring models. *Nucl. Phys.*, Vol. B258, p. 75, 1985.

[WO] N. E. Wegge-Olsen. *K-Theory and C^*-Algebras*. Oxford, 1993.

[Yon1] T. Yoneya. On the interpretation of minimal length in string theories. *Mod. Phys. Lett.*, Vol. A4, p. 1587, 1989.

[Yon2] T. Yoneya. String theory and space-time uncertainty principle. *Prog. Theor. Phys.*, Vol. 103, p. 1081, 2000, hep-th/0004074.

[Zho] C.-G. Zhou. Noncommutative scalar solitons at finite theta. 2000, hep-th/0007255.

[羽原] 羽原由修. 非可換幾何学とその超弦理論・ゲージ理論への応用. Master's thesis, 京都大学基礎物理学研修所, 2000.

[河田] 河田敬義. ホモロジー代数 I∼II. 岩波講座 基礎数学. 岩波書店, 1977.

[梶浦] 梶浦宏成. 弦理論と非可換幾何学. Master's thesis, 東京大学数理科学研究科, 2000.

[上杉] 上杉忠興. 超膜理論と行列模型. Master's thesis, 東京大学理学系研究科, 2000.

[大森] 大森一樹. Study of tachyon condensation using string field theory. Master's thesis, 東京大学理学系研究科, 2001.

[服部] 服部晶夫. 位相幾何学 I∼III. 岩波講座 基礎数学. 岩波書店, 1977.

[彌永] 彌永昭吉, 彌永健一. 集合と位相 I∼II. 岩波講座 基礎数学. 岩波書店, 1977.