修士論文
pp-wave 背景上の弦理論と超対称ゲージ理論

井手口 恒太

2003 年 1 月 10 日

目 次

第 1 章　導入 **4**

第 2 章　AdS/CFT 対応 と CFT **6**
2.1 AdS/CFT 対応 6
2.2 4 次元の Conformal Field Theory 8
2.2.1 Conformal 対称性 8
2.2.2 CFT の性質 9

第 3 章　pp-wave 背景 **11**
3.1 pp-wave 11
3.2 ペンローズ極限 11
3.3 pp-wave 背景の性質 13
3.3.1 点粒子の伝播 13
3.3.2 背景の持つ対称性 14

第 4 章　RR-flux の入った pp-wave 上の Type IIB Superstring **18**
4.1 RR-flux の入った pp-wave 背景上での Type IIB Superstring Green-Schwarz 作用 18
4.1.1 Cartan 1-Form による Green-Schwarz 作用の記述 18
4.1.2 局所対称性 21
4.2 Explicit な GS action 22
4.2.1 Coset Superspace の Parameterization 22
4.2.2 κ 対称性のゲージ固定と Cartan 1-Form 24
4.2.3 κ 対称性がゲージ固定された GS 作用 25
4.2.4 Bosonic 対称性のゲージ固定 26
4.3 pp-wave 上の Superstring の量子化 28
4.3.1 古典解 28
4.3.2 量子化と状態空間 29
4.3.3 ゲージ固定後の対称性の実現 32

第 5 章　BMN 対応 **35**
5.1 $AdS_5 \times S^5$ から得られる Maximally Supersymmetric pp-wave 解 35
5.2 BMN Proposal 35
5.2.1 BPS 状態の対応 36
5.2.2 String Mode との対応 37

第 6 章 $\mathcal{N}=4$ Super Yang-Mills 理論の BMN 極限 **39**
6.1 $\mathcal{N}=4$ Super Yang-Mills 理論 . . . 39
6.2 BMN limit と $\mathcal{N}=4$ SYM . . . 40
6.3 Planar Level での Anomalous Dimension . . . 41
6.3.1 Wave Function Renormalization . . . 41
6.3.2 BMN Operator の Planar, 1-Loop での Anomalous Dimension . . . 43
6.4 Torus Level での計算 . . . 46
6.4.1 Tree Level, Torus Level の計算 . . . 46
6.5 Torus, 1-Loop での Anomalous Dimension . . . 49
6.5.1 Nearest Neighbor Diagram . . . 49
6.5.2 Semi-Nearest Neighbor Diagram . . . 50
6.5.3 Non-Nearest Neighbor Diagram . . . 51
6.6 Single Trace Operator と Double Trace Operator の間の Mixing . . . 52
6.7 1-Loop, Torus Level での Anomalous Dimension . . . 54
6.8 より広い Class の BMN Operator の 2 点関数とその Anomalous Dimension . . . 55
6.8.1 $SO(4)$ の既約表現による分解 . . . 56
6.8.2 $g_2^2\lambda'$ までの 2 点関数 . . . 56
6.8.3 **9** 表現 Operator と **6** 表現の Operator の 2 点関数 . . . 57
6.8.4 **1** 表現 Operator の 2 点関数 . . . 58

第 7 章 Light-Cone String Field Theory **60**
7.1 第一量子化から第二量子化へ . . . 60
7.2 Flat Space での Light-Cone String Field Theory . . . 60
7.2.1 Flat Space での GS superstring の第一量子化 . . . 61
7.2.2 Interaction Term . . . 64
7.2.3 Vertex Operator の決定 . . . 66
7.2.4 Neumann 係数の Explicit な形 . . . 69
7.2.5 Prefactor の決定 . . . 71
7.3 pp-wave 上の Light-Cone String Field Theory . . . 76
7.3.1 Free Theory . . . 76
7.3.2 Kinematical Constraint . . . 77
7.3.3 pp-wave Neumann 係数の性質: Factorization と Large μ での振舞い . . . 79
7.3.4 Prefactor の決定 . . . 82
7.4 Interaction Vertex の Matrix Element . . . 88
7.4.1 Bosonic State の間の Matrix Element . . . 88
7.5 pp-wave Nuemann 係数 . . . 90
7.5.1 Y, k の $\mu=0$ での値 . . . 91
7.5.2 Y, k に対する微分方程式 . . . 91
7.5.3 微分方程式の解 . . . 92
7.5.4 Large μ での漸近的振舞い . . . 94

第 8 章　$g_2 \neq 0$ への BMN 対応の拡張 **96**
8.1　$g_2 \neq 0$ の場合の対応 97
8.2　State Operator Mapping 98
8.3　SFT での Contact Term からの寄与の計算 100

第 9 章　結論 **103**

付 録 A Notation **105**

付 録 B $\mathcal{N} = 4$ SYM の Feynman Rule **107**

付 録 C SYM の Loop 計算での有用な公式 **109**

付 録 D CFT での Matrix Element と 和公式 **111**
D.1　Matrix Element 111
D.2　和公式 112

付 録 E Neumann 係数を計算する際の有用な関係式 **113**
E.1　Flat Space Neumann 係数に関する計算 113
E.1.1　有用な行列の積の公式 113
E.1.2　Flat Space Neumann 係数の Factorization 関係式 115
E.2　pp-wave の Neumann 係数に関すること 115
E.2.1　Fermionic Neumann 係数 115
E.2.2　(7.285) に現れる NY の計算 115
E.2.3　積分変換 116

第1章　導入

ゲージ理論と弦理論の双対性の探究は、1970 年代から現在まで長い間続けられてきた。70 年代に 'tHooft が $U(N)$ ヤン・ミルズ理論が、$g_{\rm YM} \to 0$, $N \to \infty$, $g_{\rm YM}N$: fixed の極限で λ, $\frac{1}{N}$ の 2 つの parameter で記述される理論となることを発見する [1]。λ が feynmann diagram の loop 展開係数となり、$\frac{1}{N}$ は feynman diagram の genus 展開係数となる。この genus 展開から、'tHooft は large N field theory と string theory との間の対応を予想した。この双対性が存在するのならば、片方の理論を調べることでもう片方の理論に対する知識が得られる。従って、field theory を探究することにも、string theory を探究することにも非常に有用なものとなる。

1997 年に、Maldacena により AdS/CFT 対応 [2] が提唱された。これは、$AdS \times X$ 上の string theory と AdS の境界上の field theory の双対性を予想したものである。これは、'tHooft が予想した string/field theory duality の具体形と見ることができる。この AdS/CFT 対応は近年盛んに研究されてきた。特に、この AdS/CFT 対応で最も基本的なモデルは RR-flux F_5 の入った $AdS_5 \times S^5$ 上の Type IIB superstring と 4 次元 $\mathcal{N} = 4$ $SU(N)$ 超対称ヤン・ミルズ理論 (SYM) の対応である。$AdS_5 \times S^5$ 上の背景には RR-flux が入っているため、string を NSR 定式化で扱うことは難しいが、Green-Schwarz 定式化では作用が書けている。しかし、この作用は light-cone ゲージに止めても free theory にはならないため、量子化することは難しい。その結果、AdS/CFT の研究は string 側が supergravity 近似となるような領域で主に行なわれてきており、string mode を含んだ場合の研究はあまり進んでいない。また、この supergravity 近似の parameter 領域では CFT 側は λ が大きくなるため、field theory 側は非摂動領域となる。

そのような中で 2001 年に、Type IIB の maximally supersymmetric な pp-wave 背景上の string は量子化できることが見付かった。つまり、pp-wave 上の string に対して、$AdS \times S$ の場合と同様に Green-Schwarz 作用を書くことができるが、その作用を light-cone ゲージに止めると free theory になるため、量子化することができる。さらに、この pp-wave は $AdS_5 \times S^5$ の Penrose limit により得られることが分かった。AdS/CFT 対応に基づくとこの AdS 側の Penrose 極限は CFT 側ではあるセクターだけを見るような極限 (BMN 極限) に対応する。この極限は、$g_{\rm YM}$: fixed, $N \to \infty$, $J \to \infty$, $\frac{N}{J^2}$: fixed というものである。ここでの J とは R 対称性のある方向の角運動量である。そこで、$AdS_5 \times S^5$ の極限として Berenstein, Maldacena, Nastase により pp-wave 上の string 理論と CFT のそのセクターの対応が提唱された。特に、対称性の generator の対応の極限を考えることで、$P^- = \mu(\Delta - J)$, $P^+ = \frac{\Delta+J}{2\mu R^2}$ の対応を提唱している。

BMN が具体的に示した対応は、free string theory と planar level の CFT の対応である。彼らは、この level での string state と CFT の operator の mapping を提案して、CFT 側は BMN 極限で新しい定数 $\lambda' = \frac{\lambda}{J^2}$ が摂動展開係数となることを予想した。実際に、λ' を展開係数として CFT 側の計算を行い、string 側の spectrum と CFT operator の planar 近似での anomalous dimension は一致することを確かめている。この段階では、string は free であり field theory は

planar 近似であるが、full theory としては string には相互作用を考慮に入れなくてはならないし、field theory には non-planar diagram の寄与を考えなくてはならない。実際、BMN 極限で non-planar diagram の寄与は無視できず、結果に効いてくることが分かる。genus 展開係数は $g_2^2 = \frac{J^2}{N}$ である。CFT 側の genus 展開は string 側でも genus 展開、つまり string interaction に対応して欲しいが、実際この係数を string 側の言葉で書くと $g_2^2 = g_s \mu \alpha' p^+$ となり string の結合定数 g_s に比例している。興味深いことに、この係数 g_2 と λ' とは独立に定められるので、ともに摂動展開が適用できる小さい領域におくことができる。つまり、string theory 側も field theory 側もともに摂動領域となり、展開できる。従って、双方の計算を遂行することができる。

BMN 対応を full theory に拡張する試みはいくつかのグループにより行われており、いくつかの異なる予想が立てられている。種々の検証が行われる中で、最も妥当だと思われるものが、Gross, Mikhailov, Roiban らによるものである。BMN は string と CFT の両側で対称性 operator $P^- = \mu(\Delta - J)$ と同定したのであるが、Gross, Mikhailov, Roiban らはこの関係が full theory の場合にもそのまま成り立つと予想したのである。これはごく自然な予想である。これを検証するために、CFT 側では non-planar level を含めた相関関数の計算が行なわれている。string 側では light-cone string field theory を構築して、その interaction Hamiltonian を用いて matrix element の計算が行われている。

この pp-wave に関する一連の研究により、初めて string mode と dual な field theory の対応の関係を見ることができた。

この論文の構成は以下の通りである。まず、第 2 章では large N field theory と AdS_5/CFT_4 対応について簡単にまとめておく。第 3 章では pp-wave geometry についてその性質を見る。第 4 章では pp-wave 上の Type IIB superstring が量子化できることを見る。第 5 章では BMN の提唱した対応について見る。第 6 章では CFT 側の相関関数の計算を行い、anomalous dimension を求める。第 7 章では pp-wave 上の light-cone string field theory を構築して、light-cone Hamiltonian の interaction term の matrix element を計算する。第 8 章では、BMN 対応を interacting string の場合へ拡張した場合について考察をする。第 9 章では、現在までで分かったことをまとめる。

第2章　AdS/CFT 対応 とCFT

1997 年に Maldacena によって、AdS 上の string theory とその boundary 上の 4 次元 Conformal field theory との間の双対性が予想された。これは、AdS/CFT 対応 [2, 3, 4, 5, 6] と呼ばれる。AdS/CFT 対応は Large N field theory と string theory の間の双対性の具体例として注目を浴びている。また、bulk の理論と boundary の理論の間の関係、つまり holography[7, 8] という観点からも大きな注目を浴びている。この章では、AdS/CFT 対応の最も simple な AdS_5/CFT_4 対応について簡単に記述する。そして、4 次元の CFT の性質について短くまとめておく。

2.1　AdS/CFT 対応

AdS/CFT 双対性は、D3-brane が N 枚重なっている系を 2 つの異なる見方をすることにより予想される。D3-brane であるので、bulk theory は Type IIB superstring である。この系には D3-brane に端点を持つ open string と bulk を伝播している Type IIB closed string が存在する。bulk は $9+1$ 次元であり、D3-brane はその中の $3+1$ 次元に拡がっている。この系は low energy $E \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha'}}$ では、string の massless モードだけが励起される。bulk の massless mode は Type IIB supergravity の field component であり、その effective Lagrangian S_{bulk} は Type IIB supergravity の Lagrangian に α' correction を加えたものとなる。一方、brane 上の massless mode は $D=4$ $\mathcal{N}=4$ $U(N)$ 超対称 Yang-Mills 理論の component であり、effective Lagrangian S_{brane} はその理論の Lagrangian に α' correction を加えたものである。全系の effective Lagrangian S は上記の $S_{\text{bulk}}+S_{\text{brane}}$ に bulk と brane 間の相互作用項 $S_{\text{interaction}}$ を加えたものである。

$$S = S_{\text{bulk}} + S_{\text{brane}} + S_{\text{interaction}} \tag{2.1}$$

さてここで、low energy limit をとると、$S_{\text{interaction}}$ は消え、S_{bulk} は free gravity theory になり、そして、S_{brane} は α' correction が消えて $\mathcal{N}=4$ $U(N)$ SYM となる。つまり、bulk の gravity theory と brane 上の SYM 理論は decouple する。

ここで、もう少し詳しく low energy 極限を考えておこう。low energy 極限は考えている energy scale と dimensionless parameter を止めて α' をゼロに持っていくことで、考えることができる。dimensionless parameter とは g_s や N である。$\alpha' \to 0$ によって、$S_{\text{interaction}}$ は消え、S_{bulk} と S_{brane} の α' correction term も消える。従って、上で述べた通り decouple した 2 つの理論、bulk の free gravity と brane 上の $\mathcal{N}=4$ $U(N)$ SYM が残る。

今度は、この系を違う視点に立って見てみよう。Type IIB supergravity には、D3-brane を表

わしていると考えられる 3-brane 解が存在する。この解は、

$$ds^2 = f^{-1/2}(-dt^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + f^{1/2}(dr^2 + r^2 d\Omega_5^2), \tag{2.2}$$

$$F_5 = (1 + *)dt \wedge dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge df^{-1}, \tag{2.3}$$

$$f = 1 + \frac{R^4}{r^4}, \qquad R^4 = 4\pi g_s \alpha'^2 N. \tag{2.4}$$

ここで、(t, x_1, x_2, x_3) が brane の world volume 方向の座標である。$r = 0$ に brane が存在すると考えることができる。この解は実際、half BPS であり、16 個の supersymmetry を保つ。また、$\int_{S^5} F_5 = N$ であり、RR-charge を持つ。これらの性質は D3-brane と一致する。ここで注意すべきことは、g_{tt} が空間依存性の factor $f^{-1/2}$ を持つことである。このため、redshift の効果で r の位置にいる観測者が観測するエネルギー E_c は、r が ∞ の位置にいる観測者が観測するエネルギー E と比べて、

$$E = f^{-1/4} E_1, \tag{2.5}$$

となる。この見方で、無限遠にいる観測者の観点での low energy 極限を考えよう。low energy で残る励起としては、まず bulk を伝播する massless モードがある。その他に、(2.5) により $r = 0$ の近傍を伝播しているモードは例え string の励起モードであっても low energy になり得る。実際、string の励起モードは $E_1 \sim \frac{1}{\sqrt{\alpha'}}$ だが (2.5) により観測者には $E \sim E_c \frac{r}{\sqrt{\alpha'}} \sim \frac{r}{\alpha'}$ と見える。先程の open string の見方のときにも行ったように、low energy 極限を energy scale と dimensionless parameter を止めて α' をゼロにすることで考える。energy scale E を有限の値で止めるためには、$\alpha' \to 0$ としたとき $\frac{r}{\alpha'}$ が有限になるような $r \to 0$ を考えなくてはならない。この r での string 励起モードは low energy モードとして観測者に見えているわけである。このような r の領域では、$\alpha' \to 0$ で時空の geometry が、

$$ds^2 = \alpha' \left[\frac{U^2}{\sqrt{4\pi g_s N}}(-dt^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + \sqrt{4\pi g_s N} \left(\frac{dU^2}{U^2} + d\Omega_5^2 \right) \right], \tag{2.6}$$

となっている。ここで、$U = \frac{r}{\alpha'}$ であり、上記の議論からこの座標 U が適切なものであることは明らかである。(2.6) は $AdS_5 \times S^5$ である。よって、今の見方でも low energy 極限で 2 つの decouple した理論が得られた。1 つは bulk を伝播する Type IIB supergravity であり、もう 1 つは $AdS_5 \times S^5$ (2.6) を伝播する Type IIB superstring である。

ここまでで、同一の系の 2 つの異なった見方を述べた。どちらの見方をしても、この系は low energy 極限では 2 つの decouple した理論になることが分かった。open string の立場に立った場合には、bulk の Type IIB supergravity と brane 上の $\mathcal{N} = 4$ $U(N)$ SYM に分離し、3-brane 解の観点では bulk の Type IIB supergravity と $AdS_5 \times S^5$ 上の Type IIB superstring に分かれた。bulk の Type IIB supergravity は両者の見方で一致するので、これを同一のものと考えられる。残った方の理論も 2 つの見方の間で一致すると予想するのも妥当である。つまり、4 次元の $\mathcal{N} = 4$ $SU(N)$ SYM と $AdS_5 \times S^5$ 上の Type IIB superstring が同等の理論であると予想できる。これが AdS/CFT 対応である。ここで、$U(N)$ でなくて $SU(N)$ としたのは、$U(N)$ の中の $U(1)$ は brane 全体の位置を平行移動する自由度だからである。

2.2 4次元のConformal Field Theory

AdS/CFT 対応の field theory 側の理論は $\mathcal{N}=4$ SYM であった。この理論は dimensionful parameter を含まず、古典的に conformal 不変性を持つ。実際には $\beta=0$ よりこの理論は量子的にも conformal 不変性を持っている。この節では、conformal 対称性と conformal field theory について簡単にまとめておく。

2.2.1 Conformal 対称性

多様体 (M,g) から自分自身への写像のうち、g を任意のスケール因子を除いて不変に保つような写像の成す群が conformal 群である。Minkowski 時空の conformal 群は 2 次元多様体かそれ以外で異なる性質を持つ。

Minkowski 時空の conformal 群はその定義から Poincare 群をその部分群として含むのは明らかである。Poincare 代数は、並進 P_μ, 回転 $L_{\mu\nu}$ からなる。群の次元は $\frac{D(D+1)}{2}$ である。conformal 代数はこの Poincare 代数に dilation D と special conformal K_μ を加えたものである。dilation 変換は scale 変換のことであり、

$$x^\mu = \lambda x^\mu, \tag{2.7}$$

の変換であり、1 つの parameter で指定される。special conformal 変換は、

$$x^\mu = \frac{x^\mu + a^\mu}{1+2x^\nu a_\nu + a^2x^2}, \tag{2.8}$$

であり、D 個 の parameter で指定される。よって、Minkowski 時空の conformal 群の次元は $\frac{(D+1)(D+2)}{2}$ である。ここで代数の交換関係を書き下しておこう。

$$[L^{\mu\nu},P^\rho] = -i(\eta^{\mu\rho}P^\nu - \eta^{\nu\rho}P^\mu), \qquad [L^{\mu\nu},K^\rho] = -i(\eta^{\mu\rho}K^\nu - \eta_{\nu\rho}K^\mu), \tag{2.9}$$

$$[L^{\mu\nu},L^{\rho\sigma}] = i\eta^{\mu\rho}L^{\nu\sigma} \pm 3\text{terms}, \qquad [P^\mu,K^\nu] = 2iM^{\mu\nu} - 2i\eta^{\mu\nu}D, \tag{2.10}$$

$$[D,P^\mu] = -iP^\mu, \qquad [D,K^\mu] = iK^\mu, \tag{2.11}$$

この conformal 対称性を field theory として実現するためには、dimensionful parameter を持たない理論を考えればよい。このような field theory は classical なレベルでは Poincare 対称性の他に dilation 変換に対しても不変である。Poincare + dilation に対して不変性であれば、special conformal 変換に対しても不変であることが示せる。従って、この理論は classical には confomal 対称性を持つことが分かる。しかし dilation 変換に対する不変性は量子化すると一般には壊れてしまう。これは、renormalization によって scale parameter が理論に持ちこまれるためである。このことをエネルギー運動量 tensor の言葉で書いておこう。dilation 不変性はエネルギー運動量 tensor $T^{\mu\nu}$ が traceless であることで表わせる。これは作用の計量による変分 $\lambda g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial g^{\mu\nu}}$ を考えることで得られる。古典的には dilation 不変でも、量子効果を入れると、$T^{\mu\nu}$ はベータ関数 β に比例するようになる。従って、β がゼロでなければ、量子的には dilation は破れていることになる。

一般には古典的な conformal 対称性は量子的には壊れていると書いたが、AdS_5/CFT_4 対応で表われる field theory は $\mathcal{N}=4$ SYM であり、この理論は $\beta=0$ で量子化しても conformal 不変性が壊れない。そこで、conformal field theory の性質を簡単に見ていくことにする。

2.2.2 CFT の性質

conformal 対称性の場での表現を考えよう。dilation operator D の固有値 $-i\Delta$ を持つ場を考える。代数 (2.9)- (2.11) から P^μ の作用でこの Δ は 1 だけ大きくなり、K^μ の作用で Δ は 1 だけ小さくなる。ユニタリな場の理論では、Δ に lower bound が課されるのでそれぞれの conformal 群の既約表現に対して最小の Δ を持つ場 $\phi(x)$ が存在する。つまり、そのような場は $x=0$ で K^μ の作用によって消える。このような場のことを primary field と呼ぶ。primary field に対する各 generator の作用は、

$$[P_\mu, \phi(x)] = i\partial_\mu \phi(x), \qquad [L_{\mu\nu}, \phi(x)] = [i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) + \Sigma_{\mu\nu}]\phi(x), \tag{2.12}$$

$$[D, \phi(x)] = i(-\Delta + x^\mu \partial_\mu)\phi(x), \qquad [K_\mu, \phi(x)] = [i(x^2\partial_\mu - 2x_\mu x^\nu \partial_\nu + 2x_\mu \Delta) - 2x^\nu \Sigma_{\mu\nu}]\phi(x), \tag{2.13}$$

である。ここで、$\Sigma_{\mu\nu}$ は Lorentz 代数 $L_{\mu\nu}$ の ϕ の属する有限次元表現である。

次に primary operator の相関関数を見てみよう。相関関数の形は conformal 対称性により強く制限される。特に、2 点関数の形は operator の normalization を決めれば完全に決まってしまう。また、3 点関数の形も係数を除いて決まってしまう。このことを見てみよう。ここでは簡単のために Lorentz scalar である primary field を考える。このような field は conformal 変換 $x' = x'(x)$ で、

$$\phi'(x') = \left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|^{-\Delta/D} \phi(x), \tag{2.14}$$

と変換する。ここで $\left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|$ は Jacobian である。従って、2 点関数は、

$$\langle \phi_1(x_1')\phi_2(x_2')\rangle = \left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|_{x=x_1}^{-\Delta_1/D} \left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|_{x=x_2}^{-\Delta_2/D} \langle \phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\rangle, \tag{2.15}$$

という変換性を持つ。x' として並進変換と回転変換を用いると、Jacobian は 1 であり、$\langle \phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\rangle = f(|x_1 - x_2|)$ が従う。dilation 変換をもってくると $f(|x_1-x_2|) = \lambda^{\Delta_1+\Delta_2} f(\lambda|x_1-x_2|)$ が要請されるので、$f(|x_1-x_2|) = \frac{C_{12}}{|x_1-x_2|^{\Delta_1+\Delta_2}}$ となる。最後に special conformal 変換を考えることで、

$$\frac{C_{12}}{|x_1-x_2|^{\Delta_1+\Delta_2}} = \frac{C_{12}(\gamma_1\gamma_2)^{(\Delta_1+\Delta_2)/2}}{\gamma_1^{\Delta_1}\gamma_2^{\Delta_2}|x_1-x_2|^{\Delta_1+\Delta_2}}, \tag{2.16}$$

が要請される。ただし、$\gamma_i = 1 + a\cdot x_i + a^2 x_i^2$ である。これは $\Delta_1 = \Delta_2$ のときのみ満たされる。つまり、2 つの場の conformal dimension が異なる場合は 2 点関数は消えてしまう。場の基底を 2 点関数が規格直交化されるように持ってくれば、

$$\langle \phi_i(0)\phi_j(x)\rangle = \frac{\delta_{ij}}{|x|^{2\Delta_i}}, \tag{2.17}$$

となる。3 点関数も同様にして conformal 対称性から、

$$\langle \phi_i(x_1)\phi_j(x_2)\phi_k(x_3)\rangle = \frac{c_{ijk}}{|x_1-x_2|^{\Delta_1+\Delta_2-\Delta_3}|x_1-x_3|^{\Delta_1+\Delta_3-\Delta_2}|x_2-x_3|^{\Delta_2+\Delta_3-\Delta_1}}, \tag{2.18}$$

となる。ここで c_{ijk} は未定の係数である。4 点関数以上になると、4 つの座標点 x_1, x_2, x_3, x_4 から conformal 不変量 harmonic ratio が作れるので、4 点以上の相関関数はこの harmonic ratio の任意の関数でありうる。

ここでは scalar 場にしかふれなかったが、Lorentz 群の他の表現に属する場に対しても conformal 対称性により同様にして 2 点関数と 3 点関数に対する表式が得られる。

第3章　pp-wave 背景

この章では、pp-wave 幾何に関する基本的な性質を見る。特に、Penrose 極限で得られる pp-wave について詳しく見ていく。この章の最後には、次章以降で扱うことになる Type IIB supergravity の maximally supersymmetric な pp-wave 背景の対称性についてまとめておく。

3.1　pp-wave

D 次元擬リーマン多様体 (M, g) を考えよう。signature は almost minus とする。計量 g が、

$$ds^2 = -2dx^+dx^- + H(x^+, x^i){dx^+}^2 + \sum_{i=1}^{D-2} {dx^i}^2, \tag{3.1}$$

の形をしている場合、この幾何を pp-wave と呼ぶ。この計量の Ricci tensor で消えない成分は、

$$R_{++} = -\frac{1}{2}\sum_{i}^{D-2} \partial_i\partial_i H, \tag{3.2}$$

だけである。flux がない場合は、Einstein 方程式は、$R_{++} = 0$ となるが、この方程式の解の一つとして重力波解、

$$H = \frac{f(x^+)}{|y|^{D-4}}, \tag{3.3}$$

が存在する。この background は漸近的に flat な空間である。今後この文章で扱うものは、Type IIB supergravity の background であり、そこには flux が存在する。

3.2　ペンローズ極限

Penrose は任意の space time は plane wave geometry を持つことを示した [9]。この plane wave space time はヌル測地線の近傍だけをみるある極限をとることで現れる。この Penrose の議論は超重力理論に拡張できる [10, 11]。ここではこの超重力に拡張された議論を述べる。

supergravity には p-form potential A_p や dilaton ϕ が存在しているので、D 次元の擬リーマン多様体 (M, g, A_p, ϕ) を考える。conjugate points を含まないヌル測地線の近傍で計量 g が次の形となるような座標 $(U, V, Y^i)(i = 1, \ldots, D-2)$ を取ることができる。

$$ds^2 = dV(-2dU + \alpha(U, V, Y)dV + \sum_{i=1}^{D-2} \beta_i(U, V, Y)dY^i) + \sum_{i,j=1}^{D-2} C_{ij}(U, V, Y)dY^i dY^j \tag{3.4}$$

ベクトル場 $X = \frac{\partial}{\partial U}$ は $\nabla_X X = 0$ であり、X が生成する流れは測地線である。これらの測地線は U をアファインパラメータとする V, Y^i 一定のヌル測地線である。$A_p \to A_p + d\Lambda_{p-1}$ の gauge 自由度を使って、

$$\left(\frac{\partial}{\partial U}, iA_p\right) = 0 \tag{3.5}$$

と gauge 固定をする。component で書けば、

$$A_{Ui_1\ldots i_p-1} = A_{UVi_1\ldots i_p-2} = 0.$$

ここで次の一般座標変換をする。

$$U = u, \qquad V = \Omega^2 v, \qquad Y^i = \Omega y^i \tag{3.6}$$

この座標系では 3.4 は

$$ds^2 = \Omega^2\{dv(-2du + \Omega^2\alpha(u, \Omega^2 v, \Omega y)dv + \Omega\sum \beta_i(u, \Omega^2 v, \Omega y)dy^i) + \sum C_{ij}(u, \Omega^2 v, \Omega y)dy^i dy^j\} \tag{3.7}$$

次に

$$g_\Omega = \Omega^{-2} g, \qquad A_\Omega = \Omega^{-p} A, \qquad F_\Omega = \Omega^{-p} F, \qquad \Phi_\Omega = \Phi \tag{3.8}$$

と再定義する。ここで、ペンローズ極限

$$\bar{g} \equiv \lim_{\Omega\to 0} g_\Omega, \qquad \bar{A}_p \equiv \lim_{\Omega\to 0} A_\Omega, \qquad \bar{F}_p \equiv \lim_{\Omega\to 0} F_\Omega, \qquad \bar{\Phi} \equiv \lim_{\Omega\to 0} \Phi_\Omega \tag{3.9}$$

をとると、

$$\bar{g} = -2dudv + C_{ij}(u)dy^i dy^j \tag{3.10}$$

を得る。ただし、$C_{ij}(u) = C_{ij}(u, 0, 0)$。この極限で $\bar{A}_p$ では $dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_p}$ の形の項が残り、$dv \wedge dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_{p-1}}$ の形の項は消える。

$$\begin{aligned} \bar{A}_p &= \bar{A}_{i_1\ldots i_p}(u)dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_p} \\ \bar{F}_p &= \bar{A}'_{i_1\ldots i_p}(u)dv \wedge dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_p}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

(3.10),(3.12) より $\bar{F}_{p+1} \wedge *\bar{F}_{p+1} = 0$ であり、$\bar{F}_{p+1}$ はヌルである。

Brinkman 座標　今後用いるのは、Rosen 座標 (u, v, y^i) ではなく、Brinkman 座標 (x^+, x^-, x^i) である。Rosen 座標から Brinkman 座標への座標変換は

$$u = x^+, v = x^- + \frac{1}{2}\sum_{i,j} M_{ij}(x+)x^i x^j, y^i = \sum_j Q^i_j(x^+)x^j \tag{3.12}$$

ここで Q^i_j は可逆な逆行列、$M^i_j \equiv Q'^i{}_j C_{kl} Q^l_j = (Q^t C Q)_{ij}$ であり、Q^i_j は

$$\begin{cases} Q^t(x^+)C(x^+)Q(x^+) = 1 \\ M = M^t \end{cases} \tag{3.13}$$

を見たす。(3.13) の解 Q が存在することは次のように示される。
$C_{ij}(x^+)$ は実対称行列なので、$Q_0^t C Q_0 = 1$ なる $Q_0(x^+)$ が存在する。直交行列 $O(x^+)$ を Q_0 の右からかけても、$(Q_0 O)^t C (Q_0 O) = 1$ は満たされる。$M_0 \equiv Q_0' C Q_0$ を対称部分 S_0 と反対称部分 A_0 に $M_0 = S_0 + A_0$ と分解する。そして、$Q = Q_0 O$ とおいて $M = Q'^t C Q$ が対称行列となるように直交行列 $O(x^+)$ を決めればよい。実際、

$$M = O'^t Q_0^t C Q_0 O + O^t Q_0'^t C Q_0 O = O'^t O + O^t M_0 O = O'^t O + O^t S_0 O + O^t A_0 O$$

なので、$O' = -(O^t A_0)^t$ となるように $O(x^+)$ をとれば M は対称になる。この方程式は $O(x^+)$ の線型一階微分方程式なので解ける。

(3.10),(3.12) より、

$$ds^2 = -2dx^+ dx^- + \sum_{i,j=1}^{8} A_{ij}(x^+) x^i x^j {dx^+}^2 + \sum_{i=1}^{8} {dx^i}^2. \tag{3.14}$$

nnn ただし、$A_{ij}(x^+) = -(\sum_k C_{kl} Q_i'^k)' Q_j^l$ である。ゲージ場 (3.12) は、

$$\bar{F}_{p+1} = \bar{A}'_{i_1 \ldots i_p} Q_{j_1}^{i_1}(x^+) \ldots Q_{j_p}^{i_p} dx^+ \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_p} \tag{3.15}$$

となる。

3.3 pp-wave 背景の性質

前節で、Penrose limit で現れる幾何は、(3.14) の形の pp-wave であることを見た。この空間の Ricci tensor は、$R_{++} = -\frac{1}{2} A_{ii}(x^+)$ である。この空間は、(3.3) と違って漸近的 flat ではない。また、$\sum_i A_{ii} \neq 0$ の時は、Einstein 方程式を満たすためには、flux が入らなければならない。これからは (3.14) の形の pp-wave の性質を見ていく。まず、この空間を伝播する点粒子を考える。次にこの空間の持つ対称性を見る [12]。

3.3.1 点粒子の伝播

それでは、まず pp-wave 空間上で点粒子がどのように振舞うのかを見てみる。bosonic な点粒子の作用は、

$$S = \frac{1}{2} \int d\tau \left(e^{-1} g_{\mu\nu} \frac{dX^\mu}{d\tau} \frac{dX^\nu}{d\tau} - e m^2 \right), \tag{3.16}$$

light-cone ゲージ $x^+ = \tau$ をとって、作用から x^+, x^-, e を取り除くと、

$$S = \frac{1}{2} \int d\tau \left[p^+ (\dot{x}^{i2} + A_{ij}(x^+) x^i x^j) - \frac{m^2}{p^+} \right], \tag{3.17}$$

x^i に対する運動方程式は、

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} - A_{ij} x^j = 0. \tag{3.18}$$

ハミルトニアンは、

$$-p^- = H = \frac{{p^i}^2}{2p^+} - \frac{p^+}{2}A_{ij}x^i x^j + \frac{m^2}{2p^+}, \tag{3.19}$$

A_{ij} の x^+ 依存性がなければ、この系は調和振動子であることが分かる。ただし、A_{ij} の固有値が負ならば振動数 ω^2 は正となるが、A_{ij} の固有値が正のモードに対しては w^2 は負となる。つまり、A_{ij} の固有値が負のモードは $x^i = 0$ の周りで振動するが、A_{ij} の固有値が正のモードは $x^i = 0$ から離れていく。A_{ij} に x^+ 依存性がある場合は、時間依存の振動数を持った調和振動子の系となる。

以降では、A_{ij} は x^+ 依存性を持たない constant だとする。まず、背景に flux が入っておらず、A_{ij} が真空の Einstein 方程式の解の場合を考えよう。このとき、A_{ii} はゼロでなければならない。従って、A_{ij} は正負両方の固有値を持つ。つまり、$x^i = 0$ から負の固有値を持った方向に離れた点粒子は $x^i = 0$ の周りで振動し、正の固有値を持った方向に離れた点粒子は $x^i = 0$ から離れていく。次に背景に constant flux が入っている場合を考える。このときは、A_{ii} は負になる。その中でも、A_{ij} の固有値は全て負となるような場合を考えよう。この場合は、$x^i = 0$ からどの方向に離れても $x^i = 0$ の周りで振動する。つまり、この場合には粒子は重力ポテンシャルから抜け出すことができない。特に、$A_{ij} = -\mu^2\delta_{ij}$ としよう。実際、$D = 10$ ではこの背景に self-dual constant 5-form flux F_5 を入れることで、maximally supersymmetric な Type IIB supergravity 解となる。この maximally susy の背景を伝播する点粒子の系は、8 つの振動数 $\omega = \mu$ の調和振動子となる。これを量子化すると、その spectrum は

$$p^- = \sum_{i=1}^{D-2} \mu(n_i + \frac{1}{2}), \tag{3.20}$$

となる。

3.3.2 背景の持つ対称性

A_{ij} を定数として、

$$\begin{aligned} ds^2 &= -2dx^+dx^- + A_{ij}x^i x^j {dx^+}^2 + {dx^i}^2 & (3.21)\\ F &= \mu dx^+ \wedge (dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4 + dx^5 \wedge dx^6 \wedge dx^7 \wedge dx^8) & (3.22) \end{aligned}$$

の背景が持つ対称性を考えよう。vielbein を次のようにとる。

$$\begin{cases} e^{\hat{+}} &= \partial_+ + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{8} A_{ij}x^i x^j \partial_- \\ e^{\hat{-}} &= \partial_- \\ e^{\hat{i}} &= \partial_i \end{cases} \tag{3.23}$$

双対基底は、

$$\begin{cases} e^{\hat{+}} &= dx^+ \\ e^{\hat{-}} &= dx^- - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{8} A_{ij}x^i x^j dx^+ \\ e^{\hat{i}} &= dx^i \end{cases} \tag{3.24}$$

となる。Lorentz 添字の上げ下げには $\eta^{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$, $\eta_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$ を用いる。

$$\eta^{\hat{+}\hat{-}} = \eta^{\hat{-}\hat{+}} = -1, \quad \eta^{ij} = 1 \quad (\text{これ以外は } 0.) \tag{3.25}$$

$$\eta_{\hat{+}\hat{-}} = \eta_{\hat{-}\hat{+}} = -1, \quad \eta_{ij} = 1 \quad (\text{これ以外は } 0.) \tag{3.26}$$

スピン接続は

$$\omega^{\hat{-}i} = -\sum_j A_{ij} x^j dx^+ \quad (\text{これ以外は } 0) \tag{3.27}$$

background の持つ対称性変換とは、その変換によって background が変化を受けないものである。bosonic 対称性は等長変換群であり、Killing vector がその generator である。fermionic な対称性は gravitino の変換がゼロになるという条件である killing spinor equation から求まる。equation の解 Killing spinor の個数だけ fermionic 対称性がある。

Killing Spinor Equation さてそれでは、Killing spinor 方程式を解くことで pp-wave background の fermionic な対称性を調べる。[1]

$$(\nabla_\mu + \Omega_\mu)\xi = 0. \tag{3.28}$$

ただし、

$$\nabla_\mu = \partial_\mu + \frac{1}{4}\omega_\mu^{\hat{\mu}\hat{\nu}}\Gamma_{\hat{\mu}\hat{\nu}}, \qquad \Omega_\mu = -\frac{i}{480}F_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4\nu_5}\Gamma^{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4\nu_5}\Gamma_\mu. \tag{3.29}$$

これらを成分ごとに書き下すと、∇_μ は直ちに、

$$\nabla_- = \partial_\mu, \qquad \nabla_I = \partial_I, \qquad \nabla_+ = \partial_+ - \frac{1}{2}\sum_{I,J} A_{IJ}x^J\Gamma_{\hat{-}I}. \tag{3.30}$$

Ω_μ は、

$$\Omega_\mu = -\frac{i}{4}\mu(\Gamma^{+1234}\Gamma_\mu + \Gamma^{+5678}\Gamma_\mu). \tag{3.31}$$

ここで、

$$\Gamma^{+1234} = e^+_{\hat{\mu}_1}e^1_{\hat{\mu}_2}e^2_{\hat{\mu}_3}e^3_{\hat{\mu}_4}e^4_{\hat{\mu}_5}\Gamma^{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\hat{\mu}_3\hat{\mu}_4\hat{\mu}_5} = \Gamma^{\hat{+}}\Pi, \qquad \Gamma^{+5678} = \Gamma^{\hat{+}}\Pi', \tag{3.32}$$

$$\Gamma_+ = -\Gamma^{\hat{-}} + \frac{1}{2}A_{IJ}x^Ix^J\Gamma^{\hat{+}}, \qquad \Gamma_- = -\Gamma^{\hat{+}}, \tag{3.33}$$

に気を付けて、さらに (A.12) と (A.15) を用いると、

$$\Omega_+ = \frac{i}{4}\mu\Gamma^{\hat{+}}(\Pi + \Pi')\Gamma^{\hat{-}}, \qquad \Omega_- = 0, \tag{3.34}$$

$$\Omega_i = \frac{i}{2}\mu\Gamma^{\hat{+}}\Gamma^i\Pi, \qquad \Omega_{i'} = \frac{i}{2}\mu\Gamma^{\hat{+}}\Gamma^{i'}\Pi'. \tag{3.35}$$

(3.28) で $\mu = -$ のときは、$\partial_-\xi = 0$。従って、ξ は x_- に依存しない。$\mu = I$ のときには、

$$\partial_I\xi = -\Omega_I\xi. \tag{3.36}$$

[1] 以下では、Γ matrix を 32 次元の表式で書いていくが、16 次元の表式に直すことは容易である。Γ 行列の notation と有用な関係式は付録 A にまとめてある。

$\Gamma^{\hat{+}}\Gamma^{\hat{+}}$ から $\Omega_I\Omega_J = 0$ が従うので、上式に Ω_J をかけると、$\partial_I\partial_J\xi = 0$。よって、$\xi$ は x^I に関して高々1 次である。そこで、

$$\xi = \chi + \sum_I x^I \varepsilon_I, \tag{3.37}$$

とおく。ここで、χ, ε は x^+ 依存の chiral spinor である。(3.37) を (3.36) に代入すると、$\varepsilon_I = -\Omega_I\chi$ を得る[2]。よって、

$$\xi = \chi(x^+) - x^I\Omega_I\chi(x^+), \tag{3.38}$$

となる。最後に、(3.28) で $\mu = +$ の場合に上式を代入すると、

$$\chi' - x^I\Omega_I\chi' + \frac{1}{2}A_{IJ}x^J\Gamma^{\hat{+}I}\chi - \frac{1}{2}A_{IJ}x^J\Gamma^{\hat{+}I}x^K\Omega_K\chi + \frac{i}{4}\mu\Gamma^{\hat{+}}(\Pi+\Pi')\Gamma^{\hat{-}} - \frac{i}{4}\mu\Gamma^{\hat{+}}(\Pi+\Pi')\Gamma^{\hat{-}}x^I\Omega_I\chi = 0. \tag{3.39}$$

ただし、$'$ は x^+ での微分である。第 4 項は、(A.12) から消える。左から $\Gamma^{\hat{+}}$ をかけて (A.12) を使うと、第一項のみ消えずに残り、$\Gamma^{\hat{+}}\chi' = 0$。従って、第 2 項はゼロとおいて良い。第 5 項は

$$\frac{i}{4}\mu\Gamma^{\hat{+}}(\Pi+\Pi')\Gamma^{\hat{-}}\chi = \frac{i}{4}\mu(-2-\Gamma^{\hat{-}}\Gamma^{\hat{+}})(\Pi+\Pi')\chi = -\frac{i}{2}\mu(\Pi+\Pi')\chi. \tag{3.40}$$

ただし、最後の等式では (A.15) を使った。第 6 項は、

$$\frac{i}{4}\mu\Gamma^{\hat{+}}(\Pi+\Pi')\Gamma^{\hat{-}}x^I\Omega_I\chi = -\frac{i}{4}\mu(-2-\Gamma^{\hat{-}}\Gamma^{\hat{+}})(\Pi+\Pi')x^I\Omega_I\chi = \frac{i}{2}\mu(\Pi+\Pi')x^I\Omega_I\chi. \tag{3.41}$$

最後の等式では、Ω_I は 6 つの Γ 行列の積であり $\Omega_I\chi$ は positive chirality spinor なので (A.15) を用いた。さらに、Ω_I に (3.35) を代入して、χ が positive chirarity spinor であることを使うと第 6 項は、

$$\frac{\mu^2}{2}x^I\Gamma^{\hat{+}}\Gamma^I\chi, \tag{3.42}$$

と変形できる。以上をまとめると、(3.39) は

$$\left[\partial_+ - \frac{i\mu}{2}(\Pi+\Pi')\right]\chi = \left[\frac{1}{2}A_{IJ}x^J\Gamma^I + \frac{\mu^2}{2}x^I\Gamma^I\right]\Gamma^{\hat{+}}\chi. \tag{3.43}$$

左辺は x^I 依存性がなく、右辺は x^I 依存なので両辺は別々にゼロでなくてはならない。左辺は定数係数の線型一階常微分方程式なので、一つの初期条件に対して一つの解がある。初期条件を $\chi(0) = \chi_0$ とすると、

$$\chi(x^+) = \exp(\frac{i\mu}{2}x^+(\Pi+\Pi'))\chi_0. \tag{3.44}$$

この解の内、右辺をゼロとするものだけが解である。特に、$x^+ = 0$ で初期条件 χ_0 は右辺を満たさなければならないが、逆に初期条件が右辺を満たせば $\Gamma^{\hat{+}}\chi' = 0$ より任意の時刻 x^+ で右辺は満たされる。よって、右辺=0 とする初期条件の数だけ Killing spinor 解が存在する。$\Gamma^{\hat{+}}$ の作用により chiral spinor の半分の複素 8 成分は消える。よって、任意の A_{IJ} に対して 16 個の超対称性が存在する。特に、A_{IJ} を右辺の括弧の中が消えるように取れば、任意の初期条件にが右辺を満たすので、32 個の超対称性を全てを保つ max susy の background となることが分かる。このような A_{IJ} は $A_{IJ} = -\mu\delta_{IJ}$ だけである。

[2] 上式以外に $\Omega_I x^J\varepsilon_J = 0$ も出てくるがこれは上式により自動的に見たされている。

Maximally Supersymmetric な pp-wave 背景の対称性

それでは、maximally supersymmetric な背景 $A_{ij} = -\mu^2\delta_{ij}$ の持つ対称性を書いておく。まず、bosonic な対称性を生成する killing vector は、

$$P^- = -\partial_+, \qquad P^+ = -\partial_-, \qquad P^I = \cos(\mu x^+)\partial_I - \mu x^I \sin(\mu x^+)\partial_-, \tag{3.45}$$

$$J^{+I} = \frac{1}{\mu}\left(\sin(\mu x^+)\partial_I + \mu x^I \cos(\mu x^+)\partial_-\right), \tag{3.46}$$

$$J^{ij} = x^i\partial_j - x^j\partial_i, \qquad J^{i'j'} = x^{i'}\partial_{j'} - x^{j'}\partial_{i'}, \tag{3.47}$$

これらの生成子の交換関係は、Lie 括弧積

$$[X, Y] = (X^\mu(\partial_\mu Y^\nu) - Y^\mu(\partial_m X^\nu))\partial_\nu, \tag{3.48}$$

から計算できる。これを計算すると、

$$[P^-, P^I] = \mu^2 J^{+I}, \tag{3.49}$$

$$[P^-, J^{+I}] = -P^I, \qquad [P^I, J^{+J}] = -\delta_{IJ}P^+, \tag{3.50}$$

$$[P^i, J^{jk}] = \delta_{ij}P^k - \delta_{ik}P^j, \qquad [P^{i'}, J^{j'k'}] = \delta_{i'j'}P^{k'} - \delta_{i'k'}P^{j'}, \tag{3.51}$$

$$[J^{+i}, J^{jk}] = \delta_{ij}J^{+k} - \delta_{ik}J^{+j}, \qquad [J^{+i'}, J^{j'k'}] = \delta_{i'j'}J^{+k'} - \delta_{i'k'}J^{+j'}, \tag{3.52}$$

$$[J^{ij}, J^{kl}] = \delta_{jk}J^{il} - \delta_{jl}J^{ik} + \delta_{il}J^{jk} - \delta_{ik}J^{jl}, \qquad [J^{i'j'}, J^{k'l'}] = \delta_{j'k'}J^{i'l'} \pm 3\text{terms}, \tag{3.53}$$

となる。32 個の fermionic 生成子は negative chirality を持った複素 spinor Q_α である。fermionic 対称性と bosonic 対称性の交換関係は[3]、

$$[P^+, Q_\alpha] = -\frac{i\mu}{2}Q_\beta(\Pi + \Pi')^\beta{}_\alpha \tag{3.54}$$

$$[P^i, Q_\alpha] = -\frac{i\mu}{2}Q_\beta(\Pi\Gamma^i\Gamma^+)^\beta{}_\alpha \quad [P^{i'}, Q_\alpha] = -\frac{i\mu}{2}Q_\beta(\Pi'\Gamma^{i'}\Gamma^+)^\beta{}_\alpha \tag{3.55}$$

$$[J^{+i}, Q_\alpha] = -\frac{1}{2}Q_\beta(\Gamma^i\Gamma^+)^\beta{}_\alpha \quad [J^{+i'}, Q_\alpha] = -\frac{1}{2}Q_\beta(\Gamma^{i'}\Gamma^+)^\beta{}_\alpha \tag{3.56}$$

$$[J^{ij}, Q_\alpha] = \frac{1}{2}Q_\beta(\Gamma^{ij})^\beta{}_\alpha \quad [J^{i'j'}, Q_\alpha] = \frac{1}{2}Q_\beta(\Gamma^{i'j'})^\beta{}_\alpha \tag{3.57}$$

$\bar{Q}$ に対しては上式の complex conjugate を取ったものが成り立つ。fermionic 生成子同士の反交換関係は、

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_\beta\} = -2i\bar{\gamma}^\mu_{\alpha\beta}P^\mu - 2\mu(\bar{\gamma}^i\Pi)_{\alpha\beta}J^{+i} - 2\mu(\bar{\gamma}^{i'}\Pi')_{\alpha\beta}J^{+i'} + \mu(\bar{\gamma}^+\gamma^{ij}\Pi)_{\alpha\beta}J^{ij} + \mu(\bar{\gamma}^+\gamma^{i'j'}\Pi')_{\alpha\beta}J^{i'j'}, \tag{3.58}$$

以上が、背景の持つ対称性の交換関係である。後にこの背景は、$AdS_5 \times S^5$ の Penrose 極限として得られることを見るが、この交換関係は $AdS_5 \times S^5$ の対称性の contraction からも得られる [15]。

[3] fermionic な生成子を含む交換関係については、[13, 14] を参照のこと

第4章　RR-flux の入った pp-wave 上の Type IIB Superstring

前章で Type IIB supergravity の max susy な背景として RR-flux の入った pp-wave 解が存在することが分かった。この background は後で述べるように、$AdS_5 \times S^5$ solution の Penrose limit として得られることが分かり、string theory の exact な背景であることが期待される。この章では、この背景の中を伝播する superstring の作用を構築し、それが light-cone gauge で厳密に量子化できることを見る [16, 17]。

4.1　RR-flux の入った pp-wave 背景上での Type IIB Superstring Green-Schwarz 作用

考える背景は次のものである。

$$\begin{aligned} ds^2 &= -2dx^+dx^- - \mu^2 \textstyle\sum_{I=1}^{8} x^I{}^2 dx^+{}^2 + \sum_{I=1}^{8} dx^I{}^2 \\ F &= \mu dx^+ \wedge (dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^4 + dx^5 \wedge \cdots \wedge dx^8) \end{aligned} \tag{4.1}$$

(4.1) 上の superstring を考えよう。RR-flux が入っているので、fermion vertex operator の問題があり、NSR 定式化では今のところ上手に扱えない。そこで、Green-Schwarz 定式化を用いる。この手法は space time の超対称性を使って action を構築する[1]。対称性は前章で求めたように (3.49) から (3.58) の交換関係を持つ。以下では、簡単のため $\mu = 1$ とするが、必要な際はすぐに μ を復活できる。到達したい作用は次の性質をもつ。また、$\alpha' = 1$ とおく。

4.1.1　Cartan 1-Form による Green-Schwarz 作用の記述

pp-wave 上の superstring の Green-Schwarz 作用は、以下の 4 つの条件を見たすものであって欲しい。

1. bosonic 部分が (4.1) を target 空間とする σ model となっている。
2. 背景 (4.1) が持つ対称性 (3.49)- (3.58) をグローバル対称性として持っている。
3. fermionic なローカル対称性 κ 対称性を持っている。
4. flat space limit ($\mu \to 0$) で flat space の GS 作用となる。

[1] ここでの方法は、[18] で $AdS_5 \times S^5$ の場合に用いられているものと同じである。

背景の持つ超対称性により fermionic な dynamical variable の数は決まっている。その数を実現するために条件 (3) の κ 対称性は必要とされる。(1) から (4) の条件を満たすために、coset superspace 上の Cartan 1-form を用いる[2]。coset superspace は、対称性群 G の stability subgroup H の左剰余類がなす多様体 G/H である。ここで、H は部分代数 $J^{+I}, J^{ij}, J^{i'j'}$ から作られる部分群である。G/H は 10 個の even な座標 x^μ、16 個の grassman odd な複素 Majonara-Weyl spinor (chirality は正) の座標 θ^α で parameterize される。代表元を $G(x^\mu, \theta^\alpha, \bar{\theta}^\alpha)$ $(\in G)$ とする[3]。Cartan 1-form は G/H 上の Lie algebra valued 1-form として次のように定義される。

$$G^{-1}dG = L^\mu P^\mu + L^\alpha \bar{Q}_\alpha + \bar{L}^\alpha Q_\alpha + \frac{1}{2}L^{\mu\nu}J^{\mu\nu} \qquad (L^A = dX^M L^A_M) \tag{4.2}$$

ただし、$X^M = (x^\mu, \theta^\alpha, \bar{\theta}^\alpha)$、A は Lie 代数の基底の index。また、考えている pp-wave 背景には J^{-I}, $J^{i'j}$ はないため、上の表式の中で $L^{+I}, L^{i'j}$ は存在しないことに注意する。(4.2) に d を作用させると、$d^2 = 0$ より、

$$d(G^{-1}dG) = -(G^{-1}dG) \wedge (G^{-1}dG), \tag{4.3}$$

両辺の Lie 代数の成分の比較によって、次の Maurer-Cartan 方程式を得る。

$$\begin{aligned}
dL^\mu &= -L^{\mu\nu}L^\nu - 2i\bar{L}\bar{\gamma}^\mu L, & (4.4)\\
dL^\alpha &= -\frac{1}{4}L^{\mu\nu}(\gamma^{\mu\nu})^\alpha{}_\beta L^\beta + \frac{i}{2}L^\mu(\Pi\gamma^+\bar{\gamma}^\mu)^\alpha{}_\beta L^\beta & (4.5)\\
d\bar{L}^\alpha &= -\frac{1}{4}L^{\mu\nu}(\gamma^{\mu\nu})^\alpha{}_\beta \bar{L}^\beta - \frac{i}{2}L^\mu(\Pi\gamma^+\bar{\gamma}^\mu)^\alpha_\beta \bar{L}^\beta & (4.6)
\end{aligned}$$

ただし、$dL^{\mu\nu}$ に関する式は以降で使わないので、ここでは書いていない。1-form の交換に際しての符号変換は、L_B を bosonic な Cartan 1-form、 L_F を fermionic な Cartan 1-form として、

$$L_{B1}L_{B2} = -L_{B2}L_{B1}, \quad L_B L_F = -L_F L_B, \quad L_{F1}L_{F2} = L_{F2}L_{F1} \tag{4.7}$$

の convention を取る。parameter μ は $L^\mu \to \mu L^\mu, L^{\mu\nu} \to L^{\mu\nu}, L^\alpha \to \sqrt{\mu}L^\alpha, x^\mu \to \mu x^\mu, \theta^\alpha \to \sqrt{\mu}\theta$ と rescaling することで、復活させられる。

dynamical variable は world sheet (τ, σ) から coset superspace$(x^\mu, \theta^\alpha, \bar{\theta}^\alpha)$ への写像 $(x^\mu(\tau,\sigma), \theta^\alpha(\tau,\sigma), \bar{\theta}^\alpha(\tau,\sigma))$ と world sheet 上の計量 $g(\tau,\sigma)$ である。これらの写像による superspace 上の量の world sheet への引き戻しを用いて、条件 (1)-(4) を満たす world sheet 上の作用を作る。条件 (1), (2) から作用の運動項を与える部分 $\mathcal{L}_{\rm kin}$ は決まってしまう。しかし、この term だけでは (3) は満たされない。これを満たすためには、topological な term Wess-Zumino 項 $\mathcal{L}_{\rm WZ}$ が必要となる。この topological term は、superspace 上の G 不変な closed 3-form $\mathcal{H}$ から作られる。closed 3-form は局所的には $\mathcal{H} = d\mathcal{B}$ と表される。この $\mathcal{B}$ の worldsheet への引き戻しが $\mathcal{L}_{\rm WZ}$ である[4]。$\mathcal{H}$ は G の作用に対して不変だが、$\mathcal{B}$ は G の作用に対して、$\delta\mathcal{B} = d\mathcal{A}$ と total derivative だけ変化する。従って、worldsheet Lagrangian も G 変換で total derivative だけ変化するが、total derivative なので作用は G 不変となる。$\mathcal{L}_{\rm kin}$ と $\mathcal{L}_{\rm WZ}$ の間の relative な normalization は条件 (3) κ 対称性が満たされるように決められる。

[2]詳しくは、[19] を参照
[3]記号 G の乱用に注意。
[4]以下では、superspace 上の 2-form $\mathcal{B}$ も $\mathcal{L}_{\rm WZ}$ と書くことにする。

それではまず、flat space 上の GS 作用を Cartan 1-form の言葉で書いておこう。flat space の対称性は super Poincare G_0 で、bosonic 部分 $P_0^\mu, L_0^{\mu\nu}$ は 55 次元、fermionic 部分は $Q_{0\alpha}, \bar{Q}_{0\alpha}$ の 32 次元である。invariant subgroup H_0 は $L_0^{\mu\nu}$ で、superspace は座標 $(x_0^\mu, \theta_0^\alpha, \bar{\theta}_0^\alpha)$ で parameterize される。代表元を

$$G(x,\theta) = \exp(x^\mu P^\mu + \theta_0^\alpha \bar{Q}_{0\alpha} + \bar{\theta}_0^\alpha Q_{0\alpha}), \tag{4.8}$$

とすると、Cartan 1-form$G^{-1}dG = L_0^A T_A$ (T_A は super Poincare の generator) は、

$$L_0^\mu = dx_0^\mu - i\bar{\theta}_0\bar{\gamma}^\mu d\theta - i\theta\bar{\gamma}^\mu d\bar{\theta}, \quad L_0 = d\theta \tag{4.9}$$

flat space 上の GS 作用は、

$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_{0\ \mathrm{kin}} + c\mathcal{L}_{0\mathrm{WZ}}, \tag{4.10}$$

ただし、c は実数定数で、κ 対称性を持つよう決定される。ここで、$\mathcal{L}_{0\mathrm{kin}}, \mathcal{L}_{0\mathrm{WZ}}$ は、flat superspace 上の Cartan 1-form を用いて、

$$\mathcal{L}_{0\mathrm{kin}} = -\frac{1}{2}\sqrt{g}g^{ab}L_{0b}^\mu L_{0a}^\nu, \quad \mathcal{L}_{0\mathrm{WZ}} = d^{-1}\mathcal{H}_0 \tag{4.11}$$

ここで、$\mathcal{H}_0$ は closed 3-form で

$$\mathcal{H}_0 = iL_0^\mu L_0 \bar{\gamma}^\mu L_0 + h.c. \tag{4.12}$$

$\mathcal{L}_{0\mathrm{kin}}, L_{0\mathrm{WZ}}$ はそれぞれ G_0(super Poincare) の作用に対して不変である。また、bosonic の quadratic な部分は、$\mathcal{L}_{0\mathrm{kin}}$ から出てくるが、target space を flat space time とする σ model の形をしている。従って、条件 (1, 2) を満たしている。また、κ 対称性を保つためには、$\mathcal{L}_{0\mathrm{kin}}, \mathcal{L}_{0\mathrm{WZ}}$ の両方が必要で、定数 $c = 1$ が必要となる。
$L^{0\mu}$ (L^μ) は群 G_0 (G) の作用に対して、部分群 H_0 (H) の tangent vector として、L^{0a} (L^a) は H_0 (H) の tangent spinor として変換する。従って、部分群 H_0 (H) の不変量を $L^{0\mu}$ (L^μ) と L^{0a} (L^a) とから構成すれば、その量は G_0 (G) の不変量となっている。このようにして、$\mathcal{L}_{0\mathrm{kin}}, \mathcal{L}_{0\mathrm{WZ}}$ は作られている。pp-wave の場合も、flat space の場合と同様に Cartan 1-form に関して 2 次の項 $\mathcal{L}_{kin}$ と closed 3-form $\mathcal{L}_{\mathrm{WZ}}$(Cartan 1-form に関して 3 次の項) とを作ればよい。pp-wave の場合も条件 (1), (2) により $\mathcal{L}_{\mathrm{kin}}$ は決定される。

$$\mathcal{L}_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{2}\sqrt{g}g^{ab}L_b^\mu L_a^\mu \tag{4.13}$$

これは flat space の $\mathcal{L}_{0\mathrm{kin}}$ で Cartan 1-form を pp-wave の Cartan 1-form に変えただけである。Wess-Zumino term $\mathcal{L}_{\mathrm{WZ}}$ は closed 3-form から作られるが、L^μ, L^α からできる G 不変な closed 3-form は、

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^{\mathrm{q}} + (\mathcal{H}^{\mathrm{q}})^\dagger \tag{4.14}$$

$$\mathcal{H}^{\mathrm{q}} = iL^\mu L\bar{\gamma}^\mu L \tag{4.15}$$

である。この 3-form が実際 closed であることを計算してみよう。

$$\begin{aligned} d\mathcal{H}^{\mathrm{q}} &= iL^{\mu\nu}\left(-L^\nu L\gamma^\mu L - \frac{1}{4}L^\rho(\gamma^{\mu\nu})^\alpha{}_\beta L^\beta(\bar{\gamma}^\rho)_{\alpha\gamma}L^\gamma - \frac{1}{4}L^\rho L^\alpha(\bar{\gamma}^\rho)_{\alpha\beta}(\gamma^{\mu\nu})^\beta{}_\gamma L^\gamma\right) \\ &\quad +2\bar{L}\bar{\gamma}^\mu LL\bar{\gamma}^\mu L + \frac{1}{2}L^\mu L^\rho(\Pi\gamma^+\bar{\gamma}^\rho)^\alpha{}_\beta L^\beta(\bar{\gamma}^\mu)_{\alpha\gamma}L^\gamma - \frac{1}{2}L^\mu L^\alpha(\bar{g}^\mu)_{\alpha\beta}L^\rho(\Pi\gamma^+\bar{\gamma}^\rho)^\beta_\gamma L^\gamma \end{aligned} \tag{4.16}$$

一行目は、(4.7) と

$$(\bar{\gamma}^{\mu})_{\alpha\beta} = (\bar{\gamma}^{\mu})_{\beta\alpha}, \quad \bar{\gamma}^{\mu}\gamma^{\nu\rho} = \bar{\gamma}^{\mu\nu\rho} + \eta^{\mu\nu}\bar{\gamma}^{\rho} - \eta^{\mu\rho}\bar{\gamma}^{n}, \quad (\bar{\gamma}^{\mu\nu\rho})_{\alpha\beta} = -(\bar{\gamma}^{\mu\nu\rho})_{\beta\alpha} \tag{4.17}$$

を用いると消える。$2\bar{L}\bar{\gamma}^{\mu}L L\bar{\gamma}^{\mu}L$ は (4.7) と

$$\bar{\gamma}^{\mu}_{\alpha(\beta}\bar{\gamma}^{\mu}_{\varepsilon\delta)} = 0 \tag{4.18}$$

によって消える。残りは、

$$\frac{1}{2}L^{\mu}L^{\rho}(\Pi\gamma^{+}\bar{\gamma}^{\rho})^{\alpha}{}_{\beta}L^{\beta}(\bar{\gamma}^{\mu})_{\alpha\gamma}L^{\gamma} - \frac{1}{2}L^{\mu}L^{\alpha}(\bar{g}^{\mu})_{\alpha\beta}L^{\rho}(\Pi\gamma^{+}\bar{\gamma}^{\rho})^{\beta}_{\gamma}L^{\gamma} = L^{\mu}L^{\nu}L(\bar{\gamma}^{\mu}\Pi\gamma^{+}\bar{\gamma}^{\nu})L \tag{4.19}$$

だが、この項も (4.7) と

$$(\bar{\gamma}^{i}\Pi)_{\alpha\beta} = -(\bar{\gamma}^{i}\Pi)_{\beta\alpha}, \quad (\Pi\gamma^{+}\bar{\gamma}^{ij})_{\alpha\beta} = -(\Pi\gamma^{+}\bar{\gamma}^{ij})_{\beta\alpha}, \quad (\Pi\gamma^{+}\bar{\gamma}^{i'j'})_{\alpha\beta} = -(\Pi\gamma^{+}\bar{\gamma}^{i'j'})_{\beta\alpha} \tag{4.20}$$

によって消える。よって、

$$d\mathcal{H}^{\mathrm{q}} = 0 \tag{4.21}$$

が示された。$\mathcal{H}$ は closed 3-form であることが分かったので、局所的には 2-form $\mathcal{L}_{\mathrm{WZ}}$ を用いて、$\mathcal{H} = d\mathcal{L}_{\mathrm{WZ}}$ と書ける。以上の結果をまとめておこう。GS Lagrangian は

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\mathrm{kin}} + \mathcal{L}_{\mathrm{WZ}} \tag{4.22}$$

$$\mathcal{L}_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{2}\sqrt{g}g^{ab}L^{\mu}_{b}L^{\mu}_{a}, \qquad \mathcal{L}_{\mathrm{WZ}} = d^{-1}\mathcal{H} \tag{4.23}$$

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^{\mathrm{q}} + (\mathcal{H}^{\mathrm{q}})^{\dagger}, \qquad \mathcal{H}^{\mathrm{q}} = iL^{\mu}L\bar{\gamma}^{\mu}L. \tag{4.24}$$

ただし flat space の場合と同様、$\mathcal{L}_{\mathrm{kin}}$ と $\mathcal{L}_{\mathrm{WZ}}$ の相対的な normalization は κ 対称性を保つように決められている。

4.1.2 局所対称性

前節では、superspace の parameterization に依らない形で、GS 作用を求めた。ここでは、superspace の parameterization に依らない形で GS 作用の局所対称性を調べておく。flat space の場合と同様に、局所対称性には fermionic な κ 対称性と bosonic な worldsheet の一般座標変換, Weyl 対称性がある。

κ 対称性

world sheet 上の場の変分 $\delta X^{M}(\tau,\sigma)$, $\delta g^{ab}(\tau,\sigma)$ とする。この変分に対して、

$$\hat{\delta x}^{\mu} \equiv \delta X^{M}L^{\mu}_{M}, \quad \hat{\delta x}^{\mu\nu} \equiv \delta X^{M}L^{\mu\nu}_{M}, \quad \hat{\delta\theta}^{\alpha} \equiv \delta X^{M}L^{\alpha}_{M}, \quad \hat{\delta\bar{\theta}}^{\alpha} \equiv \delta X^{M}\bar{L}^{\alpha}_{M}, \tag{4.25}$$

を定義する。この量を用いて、κ 対称性は、

$$\hat{\delta x}^{\mu} = 0, \qquad \hat{\delta\theta} = 2L^{\mu}_{a}\gamma^{\mu}\kappa^{a}, \tag{4.26}$$

$$\delta(\sqrt{g}g^{ab}) = -8i\sqrt{g}(L^a\bar{\kappa}^b + L^b\bar{\kappa}^a - \frac{1}{2}g^{ab}L_c\bar{\kappa}^c) + h.c., \tag{4.27}$$

と定義される。ただし、$(\kappa(\tau,\sigma)^a)_\alpha$ は chirality 負の $SO(9,1)$ Majonara-Weyl spinor で world sheet vector である。また、$\bar{\kappa} = \kappa^\dagger$ であり、self dual constraints

$$\frac{\epsilon^{ab}}{\sqrt{g}}\kappa_b = -\bar{\kappa}^a, \quad \frac{\epsilon^{ab}}{\sqrt{g}} = -\kappa^a \tag{4.28}$$

を満たす。

Bosonic な局所対称性

前節で (4.22) が、fermionic な局所対称性 κ 対称性を持つことを見たが、(4.22) は bosonic な局所対称性として worldsheet 上の一般座標変換 (diffeomorphism) と Weyl 対称性を持つ。一般座標変換は、

$$\begin{aligned} \tau' = \tau'(\tau,\sigma), \sigma' = \sigma'(\tau,\sigma) \text{ に対して、} \qquad g'^{ab}(\tau',\sigma') &= \frac{\partial\sigma'^a}{\partial\sigma^c}\frac{\partial\sigma'^b}{\partial\sigma^d}g^{cd}(\tau,\sigma), \\ X'^M(\tau',\sigma') &= X^M(\tau,\sigma), \end{aligned} \tag{4.29}$$

である。実際にこの対称性を持つことは、GS 作用が 2 次元場の理論として一般共変な形で書かれていることから明かである。
Weyl 対称性は、

$$\begin{aligned} g'^{ab}(\tau,\sigma) &= \exp(2\omega(\tau,\sigma))g^{ab}(\tau,\sigma) \\ X'^M(\tau,\sigma) &= X^M(\tau,\sigma) \end{aligned} \tag{4.30}$$

である。これは、作用が dimensionful parameter を含まないことから従う。

4.2 Explicit な GS action

前節で coset superspace の parametrization に依らない GS superstring の作用が求まった。具体的な話を進めるには 2 次元 world sheet 上の場の理論としてのもっと具体的な形の作用が必要である。そのため、coset superspace の parameterization を決めて、作用 (4.22) を座標表示する。

4.2.1 Coset Superspace の Parameterization

cosetspace の parameterization を

$$G(x,\theta) = g(x)\mathrm{g}(\theta), \quad \mathrm{g}(\theta) = \exp(\theta\bar{Q} + \bar{\theta}Q) \tag{4.31}$$

とする。bosonic 部分の parametrization $g(x)$ は後で決める。この parameterization で Cartan 1-form を求めよう。そのために、

$$\theta_t \equiv t\theta, \qquad G_t(x,\theta) \equiv G(x,t\theta) \tag{4.32}$$

$$G_t^{-1}(x,\theta)dG_t(x,\theta) \equiv L_t^A(x,\theta)T^A \tag{4.33}$$

を定義する。L_t^A は

$$L_{t=1}^A = L^A \tag{4.34}$$

$$L_{t=0}^{\mu} = e^{\mu}, \quad L_{t=0}^{\mu\nu} = \omega^{\mu\nu}, \quad L_{t=0} = 0 \tag{4.35}$$

を満たす。ここで、$e^{\mu}, \omega^{\mu\nu}$ はそれぞれ (4.1) の vielbein とスピン接続である。
さて、(4.33) の両辺を t で微分すると、

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= -(\theta\bar{Q}+\bar{\theta}Q)L_t^AT^A + L_t^AT^A(\theta\bar{Q}+\bar{\theta}Q) + d\bar{\theta}Q + d\theta\bar{Q} = [L_t^AT^A, (\theta\bar{Q}+\bar{\theta}Q)] + d\bar{\theta}Q + d\theta\bar{Q} \\
&= (d\theta^{\alpha} + \frac{1}{4}L_t^{\mu\nu}(\gamma^{\mu\nu\alpha}{}_{\beta}\theta^{\beta}) - \frac{i}{2}L_t^{\mu}((\Pi\gamma^{+}\bar{\gamma}^{\mu})^{\alpha}{}_{\beta}\bar{\theta}^{\beta})\bar{Q}_{\alpha} \\
&\quad +(d\bar{\theta}^{a} + \frac{1}{4}L_t^{\mu}\nu(\gamma^{\mu\nu\alpha}{}_{\beta}\bar{\theta}^{\beta}) + \frac{i}{2}L_t^{\mu}(\Pi\gamma^{+}\bar{\gamma}^{\mu})^{\alpha}{}_{\beta}\bar{\theta}^{\beta})Q_{\alpha} \\
&\quad -(2i\bar{L}_t\gamma^{\mu}\theta + 2iL_t\gamma^{\mu}\bar{\theta})P^{\mu} + (2\theta\bar{\gamma}^{i}\Pi\bar{L}_t - 2\bar{\theta}\bar{\gamma}^{i}\Pi L_t)J^{+i} \\
&\quad -(\theta\bar{\gamma}^{+}\gamma^{ij}\Pi - \bar{\theta}\bar{\gamma}^{+}\gamma^{ij}\Pi)J^{ij} - (\theta\bar{\gamma}^{+}\gamma^{i'j'}\Pi' - \bar{\theta}\bar{\gamma}^{+}\gamma^{i'j'}\Pi')J^{i'j'} \qquad (4.36) \\
\text{右辺} &= \partial_t L_t^AT^A \qquad (4.37)
\end{aligned}$$

両辺の Lie 代数の係数比較によって、方程式

$$\begin{aligned}
\partial_t L_t &= d\theta + \frac{1}{4}L_t^{\mu\nu}\gamma^{\mu\nu}\theta - \frac{i}{2}L_t^{\mu}\Pi\gamma^{+}\bar{\gamma}^{\mu}\theta, &(4.38)\\
\partial_t L_t^{\mu} &= -2i\bar{L}_t\gamma^{\mu}\theta - 2iL_t\gamma^{\mu}\bar{\theta}, &(4.39)\\
\partial_t L_t^{-i} &= 2\theta\bar{\gamma}^{i}\Pi\bar{L}_t - 2\bar{\theta}\bar{\gamma}^{i}\Pi L_t, &(4.40)\\
\partial_t L_t^{-i'} &= 2\theta\bar{\gamma}^{i'}\Pi'\bar{L}_t - 2\bar{\theta}\bar{\gamma}^{i'}\Pi' L_t, &(4.41)\\
\partial_t L_t^{ij} &= -2\theta\bar{\gamma}^{+}\gamma^{ij}\Pi + 2\bar{\theta}\bar{\gamma}^{+}\gamma^{ij}\Pi, &(4.42)\\
\partial_t L_t^{i'j'} &= -2\theta\bar{\gamma}^{+}\gamma^{i'j'}\Pi' + 2\bar{\theta}\bar{\gamma}^{+}\gamma^{i'j'}\Pi', &(4.43)
\end{aligned}$$

を得る。この方程式は初期条件 (4.35) のもとで直接解くことができ、Cartan 1-form の explicit な形を得られる。しかし、κ 対称性のゲージ固定条件を用いることで、より簡単に我々が必要な範囲での Cartan 1-form を得ることができる。次節で後者の方法で Cartan 1-form を求める。

WZ 項の 2 次元の形

ここで、GS Lagrangian の WZ 項 $\mathcal{L}_{\rm WZ}$ を 2 次元の形で書きなおしておこう。まず、次の量を定義する。

$$\mathcal{L}_{\rm WZ}(t) \equiv d^{-1}(\mathcal{H}^{\rm q}(t) + h.c.) \tag{4.44}$$

$$\mathcal{H}^{\rm q}(t) \equiv iL_t^{\mu}L_t\gamma^{\mu}L_t \tag{4.45}$$

この定義から、

$$\mathcal{L}_{\rm WZ} = \mathcal{L}_{\rm WZ}(1) \tag{4.46}$$

である。また、(4.35) より、

$$\mathcal{H}^{\mathrm{q}}(0) = 0 \tag{4.47}$$

となる。
ここで、

$$\mathcal{H}^{\mathrm{q}} = \mathcal{H}^{\mathrm{q}}(0) + \int_0^1 dt \mathcal{H}^{\mathrm{q}}(t) \tag{4.48}$$

と書ける。(4.38)-(4.43) より、

$$\partial_t \mathcal{H}^{\mathrm{q}}(t) = -2id(L_t^\mu \theta \bar{\gamma}^\mu L_t), \tag{4.49}$$

が分かるので、(4.48), (4.44) より、

$$\mathcal{L}_{\mathrm{WZ}} = -2i \int_0^1 dt L_t^\mu \theta \gamma^\mu L_t + h.c. \tag{4.50}$$

よって、(4.22) より、全作用は、

$$\mathcal{L} = \int d\sigma^2 \left(\frac{1}{2}\sqrt{g} g^{ab} L_b^\mu L_a^\mu - 2i \int_0^1 dt \epsilon^{ab} L_{ta}^\mu (\theta \bar{\gamma}^\mu L_{tb} + \bar{\theta} \bar{\gamma}^\mu \bar{L}_{tb} \right), \tag{4.51}$$

となる。

4.2.2 κ 対称性のゲージ固定と Cartan 1-Form

GS Lagrangian (4.22) は、局所対称性として、world sheet 上の一般座標変換 (4.29)、Weyl 対称性 (4.30)、κ 対称性を持っている。これらのゲージ自由度のうち、まず fermionic 対称性 κ 対称性のゲージ固定を考えよう。この κ 対称性は flat space の場合と同様に fermionic な light-cone ゲージで固定できる。
fermionic light-cone ゲージは、

$$\bar{\gamma}^+ \theta = 0, \qquad \bar{\gamma}^+ \bar{\theta} = 0 \tag{4.52}$$

である。このゲージ固定により、それぞれ 16 成分ずつあった θ, $\bar{\theta}$ は 8 成分ずつに減る。これにより、spacetime の超対称性により要請される fermionic 座標の dynamical variable の数が達成される。
さて、ゲージ固定 (4.52) によって、狭められた superspace 上では、(4.38)-(4.43) を解くことが容易になる。まず、(4.35) のスピン接続に対して、

$$\omega^{ij} = 0, \qquad \omega^{i'j'} = 0 \tag{4.53}$$

となるように、coset space の bosonic 部分を parameterize する。(4.39) で $\mu = +$ のとき、(4.52) により $\partial_t L_t^+ = 0$。初期条件 (4.35) を考慮して、

$$L_t^+ = e^+. \tag{4.54}$$

(4.38) に $\bar{\gamma}^+$ をかけると (4.52) より $\partial_t \bar{\gamma}^+ L_t = 0$。初期条件より、

$$\bar{\gamma}^+ L_t = 0. \tag{4.55}$$

(4.39) が $\mu = I$ のとき、$\theta(\bar{\theta})$ と $\bar{L}_t(L_t)$ の間に $1 = -(\gamma^+\bar{\gamma}^- + \gamma^-\bar{\gamma}^+)/2$ をはさむと (4.52), (4.55) より $\partial_t L_t^I = 0$。初期条件とより、

$$L_t^I = e^I. \tag{4.56}$$

(4.42, 4.43) は、(4.52) より、$\partial_t L_t^{ij} = \partial_t L_t^{i'j'} = 0$ となる。(4.53) とより、

$$L_t^{ij} = 0, \qquad L_t^{i'j'} = 0. \tag{4.57}$$

(4.38) は (4.52, 4.54, 4.57) より、$\partial_t L_t = d\theta - ie^+\Pi\theta$ となる。初期条件とより、

$$L_t = t(d\theta - ie^+\Pi\theta). \tag{4.58}$$

(4.39) で $\mu = -$ のときは、(4.58) より、$\partial_t L_t^- = -2it(\bar{\theta}\bar{\gamma}^- d\theta + \theta\bar{\gamma}^- d\bar{\theta}) - 4te^+\bar{\theta}\bar{\gamma}^-\Pi\theta$ となる。初期条件とより、

$$L_t^- = e^- - it^2(\bar{\theta}\bar{\gamma}^- d\theta + \theta\bar{\gamma}^- d\bar{\theta}) - 2t^2 e^+\bar{\theta}\bar{\gamma}^-\Pi\theta. \tag{4.59}$$

以上 (4.54- 4.59) で $t = 1$ とおけば、

$$L^+ = e^+, \qquad L^I = e^I, \tag{4.60}$$

$$L^- = e^- - i(\bar{\theta}\bar{\gamma}^- d\theta + \theta\bar{\gamma}^- d\bar{\theta}) - 2e^+\bar{\theta}\bar{\gamma}^-\Pi\theta, \tag{4.61}$$

$$L = d\theta - ie^+\Pi\theta, \tag{4.62}$$

を得る。

4.2.3 κ 対称性がゲージ固定された GS 作用

前節までに得たことから、explicit な GS 作用が書き下せる。その前に、coset space の bosonic 部分の parameterization $g(x)$ をまだ決めていなかったので、決めておく必要がある。前節で得た Cartan 1-form を用いるためには、(4.53) を満たすような parameterization を採用する必要がある。3.3.2 節で用いたスピン接続 (3.27) はこの条件を満たしている。そこで、初期条件 (4.35) と 3.3.2 節で求めた $e^\mu, \omega^{\mu\nu}$ (3.23, 3.27) とが一致するように決めよう。それには

$$g(x) = \exp(-x^+P^-)\exp(-x^-P^+ + x^I P^I) \tag{4.63}$$

とすればよい。ここで、再び vielbein とスピン接続を書き下しておく。

$$e^+ = dx^+, \qquad e^- = dx^- + \frac{1}{2}x^{I\,2}dx^+, \qquad e^I = dx^I, \tag{4.64}$$

$$\omega^{\hat{-}i} = \mu x^i dx^+ \quad (\text{これ以外は } 0), \tag{4.65}$$

まず、WZ 項を計算する。(4.54)-(4.59),(4.64),(4.65) を (4.45) に代入すると、

$$\partial_t \mathcal{H}^{\mathrm{q}}(t) = -2id\left(-tdx^+ \wedge (\theta\bar{\gamma}^- d\theta) + t\sum_I dx^I \wedge (\theta\bar{\gamma}^I d\theta) - it\sum_I dx^I \wedge (dx^+\theta\bar{\gamma}^I\Pi\theta)\right)$$

ここで、後ろの 2 項に $1 = (\gamma^+\bar{\gamma}^- + \gamma^-\bar{\gamma}^+)/2$ をはさむと、これらの項は (4.52) よりそれぞれ消える。従って、

$$\partial_t \mathcal{H}^{\rm q}(t) = 2itd(dx^+ \wedge \theta\bar{\gamma}^- d\theta). \tag{4.66}$$

(4.50) に代入して、t 積分をすると、

$$\mathcal{L}_{\rm WZ} = i\epsilon^{ab}\partial_a x^+ \theta\bar{\gamma}^-\partial_b\theta + h.c. \tag{4.67}$$

kinetic 部分 $\mathcal{L}_{\rm kin}$ は、(4.60)-(4.62) を (4.51) に代入して、

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\rm kin} &= \frac{1}{2}\sqrt{g}g^{ab}\left(-2\partial_a x^+\partial_b x^- - {x^I}^2\partial_a x^+\partial_b x^+ + \partial_a x^I\partial_b x^I\right) \\ &\quad i\sqrt{g}g^{ab}\partial_a x^+\left(\bar{\theta}\bar{\gamma}^-\partial_b\theta + \theta\bar{\gamma}^-\partial_b\bar{\theta} - 2i\partial_b x^+\bar{\theta}\bar{\gamma}^-\Pi\theta\right).\end{aligned} \tag{4.68}$$

以上で、κ 対称性がゲージ固定された GS Lagrangian $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\rm kin} + \mathcal{L}_{\rm WZ}$ が求まった。さて、求めた Lagrangian を boson 部分と fermion 部分に分けて書き直しておこう。

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\rm B} + \mathcal{L}_{\rm F} \tag{4.69}$$

$$\mathcal{L}_{\rm B} \equiv \frac{1}{2}\sqrt{g}g^{ab}G_{\mu\nu}(x)\partial_a x^\mu\partial_b x^\nu \tag{4.70}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\rm F} &\equiv i\sqrt{g}g^{ab}\partial_a x^+(\bar{\theta}\bar{\gamma}^-\partial_b\theta + \theta\bar{\gamma}^-\partial_b\bar{\theta} - 2i\partial_b x^+\bar{\theta}\bar{\gamma}^-\Pi\theta) \\ &+ \quad i\epsilon^{ab}\partial_a x^+(\theta\bar{\gamma}^-\partial_b\theta + \bar{\theta}\bar{\gamma}^-\partial_b\bar{\theta})\end{aligned} \tag{4.71}$$

ただし、$G_{\mu\nu}(x)$ は (4.1) の計量である。期待していたとおり、boson 部分は (4.1) を target space とする 2 次元 σ model の形をしている。

4.2.4 Bosonic 対称性のゲージ固定

(4.69), (4.70), (4.71) にはまだ、bosonic な局所対称性一般座標変換と Weyl 対称性が残っている。その対称性をゲージ固定しよう。この場合も flat space と同様、(bosonic) light-cone ゲージで固定できる。そのため、まず、conformal ゲージ

$$\sqrt{g}g^{ab} = \eta^{ab}, \qquad \eta^{00} = 1, \quad \eta^{11} = -1. \tag{4.72}$$

をとる。このゲージでは (4.29) はまだ完全には止まっておらず、$(\tau-\sigma)' = f(\tau-\sigma), (\tau+\sigma)' = h(\tau+\sigma)$ の conformal 対称性が残っている。また、Virasoro 条件 $T_{ab} = 0$ も課さなくてはならない。ここで、T_{ab} は energy momentum tensor で、

$$T^{ab} \equiv \frac{2}{\sqrt{g}}\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta g^{ab}} = \bar{T}_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}g^{cd}\bar{T}_{cd}. \tag{4.73}$$

ただし、

$$\bar{T}_{ab} \equiv (-2\partial_a x^+\partial_b x^- - {x^I}^2\partial_a x^+\partial_b x^+ + \partial_a x^I\partial_b x^I) + 2i\partial_a x^+(\bar{\theta}\bar{\gamma}^-\partial_b\theta + \theta\bar{\gamma}^-\partial_b\bar{\theta} - 2i\partial_b x^+\bar{\theta}\bar{\gamma}^-\Pi\theta). \tag{4.74}$$

light-cone ゲージでは、残ったゲージ自由度 conformal 対称性と Virasoro 条件を用いて、古典的に $x^+(\tau,\sigma)$, $x^-(\tau,\sigma)$ を解いてしまう。残った bosonic な dynamical variable は transverse 方向の座標 $x^I(\tau,\sigma)$ だけである。この手法では、現れる場は全て物理的であり、ゴースト場や auxilialy field は現れない。そのため、量子化で得られる Hilbert 空間に物理状態を選び出す constraint をほとんど置かなくてよい。それでは、具体的に light-cone ゲージをとってみよう。
conformal ゲージの作用を x^- 関して変分すると、運動方程式

$$(\partial_0^2 - \partial_1^2)x^+ = 0 \tag{4.75}$$

を得る。この方程式の一般解は $x^+(\tau,\sigma) = \tilde{f}(\tau-\sigma) + \tilde{h}(\tau+\sigma)$ である。一方、conformal 対称性は、

$$\begin{aligned}\tau'(\tau,\sigma) &= f(\tau-\sigma) + h(\tau+\sigma),\\ \sigma'(\tau,\sigma) &= -f(\tau-\sigma) + h(\tau+\sigma).\end{aligned}$$

従って、conformal 変換によって、τ と $x^+(\tau,\sigma)$ を比例した形にできる。つまり、

$$x^+(\tau,\sigma) = p^+\tau, \tag{4.76}$$

と light-cone ゲージにできる。σ 方向の parameterization は $0 \le \sigma \le 2\pi$ である。(4.76) を (4.73) に代入して、成分ごとに書き下すと、

$$\begin{aligned}T_{00} = T_{11} &= +\frac{1}{2}(-2\dot{x}^-p^+ - {p^+}^2{x^I}^2 + (\dot{x}^I)^2) + \frac{1}{2}{x'^I}^2 \\ &\quad + i(\bar{\theta}\bar{\gamma}^-\dot{\theta} + \theta\bar{\gamma}^-\dot{\bar{\theta}} - 2ip^+\bar{\theta}\bar{\gamma}^-\Pi\theta) = 0, \qquad (4.77)\\ T_{01} = T_{10} &= +(-p^+x'^- + \dot{x}^Ix'^I) + i(\bar{\theta}\bar{\gamma}^-\theta' + \theta\bar{\gamma}^-\bar{\theta}') = 0. \qquad (4.78)\end{aligned}$$

ただし、$\theta \to \sqrt{p^+}\theta$ と再定義しておいた。light-cone ゲージでは x^- は、Virasoro 条件 (4.77), (4.78) を x^- について解くことによって決まる。

さて、light-cone ゲージで固定された GS 作用は、[5]

$$\begin{aligned}L_{\rm lc} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\mathcal{L}_{\rm Blc} + \mathcal{L}_{\rm Flc}), \qquad (4.79)\\ \mathcal{L}_{\rm Blc} &= \frac{1}{2}\partial_a x^I\partial^a x^I - \frac{1}{2}{p^+}^2{x^I}^2, \qquad (4.80)\\ \mathcal{L}_{\rm Flc} &= +i(\bar{\theta}\bar{\gamma}^-\partial_0\theta + \theta\bar{\gamma}^-\partial_0\bar{\theta} + \theta\bar{\gamma}^-\partial_1\theta + \bar{\theta}\bar{\gamma}^-\partial_1\bar{\theta}) + 2p^+\bar{\theta}\bar{\gamma}^-\Pi\theta. \qquad (4.81)\end{aligned}$$

この作用は、worldsheet 上の場で 2 次の項しかでておらず厳密に解け、よって厳密に量子化することができる。後のために、θ, $\bar{\theta}$ を worldsheet 上の Majonara spinor の形に組み直しておく。

$$\theta^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta+\bar{\theta}), \qquad \theta^2 = \frac{1}{\sqrt{2}i}(\theta-\bar{\theta}). \tag{4.82}$$

[5] α' を復活させるには、$p^+ \to \alpha' p^+$ として、(4.79) の $\frac{1}{2\pi}$ を $\frac{1}{2\pi\alpha'}$ にする。μ を復活させるには、(4.80), (4.81) の質量項に μ をかければよい。

$\theta^{1\dagger} = \theta^1$, $\theta^{2\dagger} = \theta^2$ である。この座標で、$\mathcal{L}_{\rm Flc}$ を書き直すと、

$$\mathcal{L}_{\rm Flc} = i(\theta^1\bar{\gamma}^-\partial_+\theta^1 + \theta^2\bar{\gamma}^-\partial_-\theta^2 + 2p^+\theta^1\bar{\gamma}^-\Pi\theta^2) \tag{4.83}$$

ただし、$\partial_+ = \partial_0 + \partial_1$, $\partial_- = \partial_0 - \partial_1$ で worldsheet 上の微分演算子である。共役運動量は、

$$\mathcal{P}_I \equiv \frac{\delta\mathcal{L}_{\rm lc}}{\delta\dot{x}^I} = \dot{x}^I, \quad \mathcal{S}^1 \equiv \frac{\delta\mathcal{L}_{\rm lc}}{\delta\dot{\theta^1}} = i\theta^1\bar{\gamma}^-, \quad \mathcal{S}^2 \equiv \frac{\delta\mathcal{L}_{\rm lc}}{\delta\dot{\theta^2}} = i\theta^2\bar{\gamma}^-. \tag{4.84}$$

Hamiltonian は、

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\rm lc} &= \mathcal{P}_I\dot{x}^I + \mathcal{S}^1\dot{\theta^1} + \mathcal{S}^2\dot{\theta^2} - \mathcal{L}_{\rm lc} &(4.85)\\ &= \frac{1}{2}(\mathcal{P}_I{}^I + x'^{I\,2} + p^{+2}x^{I\,2}) - i(\theta^1\bar{\gamma}^-\theta'^1 - \theta^2\bar{\gamma}^-\theta'^2) - 2ip^+\theta^1\bar{\gamma}^-\Pi\theta^2 &(4.86)\end{aligned}$$

P^- は、

$$P^- = \frac{1}{p^+}\int_0^{2\pi}\mathcal{H}_{\rm lc}, \tag{4.87}$$

である。さて、Virasoro 条件 (4.77), (4.78) は $x^-(\tau,\sigma)$ を他の dynamical variable で表すのに使われることを見た。しかし、closed string を考えているので、constraint(4.78) を worldsheet 上で string に沿って 1 周積分すると、$p^+x'^-$ の項は落ちて、

$$\int d\sigma\left(P_Ix'^I + i(\theta^1\bar{\gamma}^-\theta'^1 + \theta^2\bar{\gamma}^-\theta'^2)\right) = 0, \tag{4.88}$$

という x^- に依らない constraint を得る。この constraint の起源は、conformal 対称性を light-cone gauge(4.76) に止めても、closed string の始点を変える σ 方向への overall の並進対称性は残っていることにある。(4.88) は量子化して得た Hilbert 空間に課される physical state condition である。light-cone ゲージでは、この条件が唯一の physical state condition である。

4.3 pp-wave 上の Superstring の量子化

前節で得た light-cone ゲージの GS Lagrangian は worldsheet 上の free theory になっており、厳密に量子化することができる。ここでは、まず (4.79), (4.80), (4.83) から得られる運動方程式を解く。それから正準量子化を行い、状態空間を構築する。

4.3.1 古典解

(4.79) から従う運動方程式は、

$$\partial_+\partial_-x^I + m^2x^{I\,2} = 0. \tag{4.89}$$

$$\partial_+\theta^1 - m\Pi\theta^2 = 0, \qquad \partial_-\theta^2 + m\Pi\theta^1 = 0. \tag{4.90}$$

ただし、$m = 2\pi\mu\alpha'p^+$ である[6]。closed string の境界条件は、

$$x^I(\tau,\sigma+1) = x^I(\tau,\sigma), \qquad \theta(\tau,\sigma+1) = \theta(\tau,\sigma). \tag{4.91}$$

[6] ここでは、string の worldsheet 上の長さを $0 \le \sigma \le 1$ ととった。そのため、質量 m は上記の値となる。

(4.89) の一般解はただちに書けて、

$$x^I(\tau,\sigma) = \cos(m\tau)x_0^I + m^{-1}\sin(m\tau)p_0^I + i\sum_{n\neq 0}\frac{1}{\omega_n}(\varphi_n^1(\tau,\sigma)\alpha_n^{1I} + \varphi_n^2(\tau,\sigma)\alpha_n^{2I}). \tag{4.92}$$

ここで、

$$\varphi_n^1(\tau,\sigma) = \exp(-i(\omega_n - k_n\sigma)), \qquad \varphi_n^2(\tau,\sigma) = \exp(-i(\omega_n\tau + k_n\sigma)). \tag{4.93}$$

$$k_n = 2\pi n, \qquad \omega_n = \begin{cases} \sqrt{k_n^2+m^2} & (n>0) \\ -\sqrt{k_n^2+m^2} & (n<0). \end{cases} \tag{4.94}$$

正準運動量 $\mathcal{P}_I$ は、

$$\mathcal{P}_I(\tau,\sigma) = -m\sin(m\tau)x_0^I + \cos(m\tau)p_0^I + \sum_{n\neq 0}(\varphi_n^1\alpha_n^{1I} + \varphi_n^2\alpha_n^{2I}). \tag{4.95}$$

次に fermion 部分に移ろう。(4.90) の第 1 式を ∂_- で微分して、第 2 式を代入すると、x^I の運動方程式 (4.89) と同様の方程式が θ^1 に対して得られる。同様にして、θ^2 に対しても (4.89) と同様の方程式が得られる。これらを (4.91) のもとで解き、(4.90) を考慮すると、

$$\theta^1(\tau,\sigma) = \cos(m\tau)\theta_0^1 + \sin(m\tau)\Pi\theta_0^2 + \sum_{n\neq 0}c_n\left(\varphi_n^1(\tau,\sigma)\theta_n^1 + i\frac{\omega_n - k_n}{m}\varphi_n^2(\tau,\sigma)\Pi\theta_n^2\right), \tag{4.96}$$

$$\theta^2(\tau,\sigma) = \cos(m\tau)\theta_0^2 - \sin(m\tau)\Pi\theta_0^1 + \sum_{n\neq 0}c_n\left(\varphi_n^2(\tau,\sigma)\theta_n^2 - i\frac{\omega_n - k_n}{m}\varphi_n^1(\tau,\sigma)\Pi\theta_n^1\right). \tag{4.97}$$

ただし、

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\omega_n - k_n}{m})^2}}, \tag{4.98}$$

であり、この係数は後の交換関係がきれいな形になるようにとられたものである。共役運動量は、

$$\mathcal{S}^{\mathcal{I}}(\tau,\sigma) = -i\bar{\gamma}^-\theta^{\mathcal{I}}(\tau,\sigma) \qquad \mathcal{I} = 1,2. \tag{4.99}$$

であり、これは第 2 類拘束条件をなす。量子化するためには、Dirac の処方により、この拘束系に対する Dirac 括弧を導入し、それを用いて量子化しなければならない。Dirac 括弧は、

$$[p_0^I, x_0^J]_D = \delta^{IJ}, \qquad [\alpha_m^{\mathcal{I}I}, \alpha_n^{\mathcal{J}J}]_D = \frac{i}{2}\omega_m\delta_{m+n}\delta^{\mathcal{I}\mathcal{J}}\delta^{IJ}, \tag{4.100}$$

$$\{\theta_m^{\mathcal{I}\alpha}, \theta_n^{\mathcal{J}\beta}\}_D = \frac{i}{4}(\gamma^+)^{\alpha\beta}\delta^{\mathcal{I}\mathcal{J}}\delta_{m+n,0}. \tag{4.101}$$

4.3.2 量子化と状態空間

量子化は、dynamical variable $x^I(\tau,\sigma)$, $\theta^{\mathcal{I}}(\tau,\sigma)$ を operator $\hat{x}^I(\tau,\sigma)$, $\hat{\theta}^{\mathcal{I}}(\tau,\sigma)$ として、前節で得た Dirac 括弧 $[.,.]_D$, $\{.,.\}_D$ をそれぞれ $i[.,.]$, $i\{.,.\}$ とすれば得られる。

$$[\hat{p}_0^I, \hat{x}_0^J] = -i\delta^{IJ}, \qquad [\hat{\alpha}_m^{\mathcal{I}I}, \hat{\alpha}_n^{\mathcal{J}J}] = \frac{1}{2}\omega_m\delta_{m+n}\delta^{\mathcal{I}\mathcal{J}}\delta^{IJ}, \tag{4.102}$$

$$\{\hat{\theta}_m^{\mathcal{I}\alpha}, \hat{\theta}_n^{\mathcal{J}\beta}\} = \frac{1}{4}(\gamma^+)^{\alpha\beta}\delta^{\mathcal{I}\mathcal{J}}\delta_{m+n,0}. \tag{4.103}$$

Hamiltonian(4.86) は fermion の運動方程式 (4.90) を用いると、

$$P^- = \frac{1}{2\pi\alpha' p^+}\int_0^1 d\sigma \left(\frac{1}{2}(\mathcal{P}_I^2 + x'^{I\,2} + m^2 x^{I\,2}) + i(\theta^1\bar{\gamma}^-\dot{\theta}^1 + \theta^2\bar{\gamma}^-\dot{\theta}^2)\right) \tag{4.104}$$

これに ocsillator 展開した式 (4.92), (4.96), (4.97) を代入すると、

$$(2\pi\alpha')P^- = E_0 + E^1 + E^2, \tag{4.105}$$

$$E_0 = \frac{1}{2p^+}(p_0^{I\,2} + m^2 x_0^{I\,2}) + \frac{2im}{p^+}\theta_0^1\bar{\gamma}^-\Pi\theta_0^2, \tag{4.106}$$

$$E^{\mathcal{I}} = \frac{1}{p^+}\sum_{n\neq 0}(\alpha_{-n}^{cII}\alpha_n^{\mathcal{J}J} + \omega_n\theta_{-n}^{\mathcal{I}}\bar{\gamma}^-\theta_n^{\mathcal{I}}), \qquad \mathcal{I} = 1, 2. \tag{4.107}$$

E_0 はゼロモードからの寄与であり、E^1, E^2 は string の振動モードからの寄与である。ここで注意すべき点は、massive な worldsheet 理論であったため、ゼロモードも調和振動子型の寄与を Hamiltonian に与えることである。このため、ゼロモードの energy spectrum も離散的になる。状態空間の energy spectrum が見易い形になるように、次の operator a_0^I, a_n^{cII}, θ_0, $\eta_n^{\mathcal{I}}$ で書き直そう。

$$a_0^I = \frac{1}{\sqrt{2m}}(p_0^I - imx_0^I), \qquad a_0^{I\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2m}}(p_0^I + imx_0^I), \tag{4.108}$$

$$\alpha_n^{\mathcal{I}I} = \sqrt{\frac{\omega_n}{2}}a_n^{\mathcal{I}I}, \qquad \alpha_{-n}^{\mathcal{I}I} = \sqrt{\frac{\omega_n}{2}}a_n^{\mathcal{I}I\dagger}, \qquad (n = 1, 2, \dots) \tag{4.109}$$

$$\theta_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta_0^1 - i\theta_0^2), \qquad \theta_0^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta_0^1 + i\theta_0^2), \tag{4.110}$$

$$\theta_n^{\mathcal{I}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\eta_n^{\mathcal{I}}, \qquad \theta_{-n}^{\mathcal{I}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\eta_n^{\mathcal{I}\dagger}, \qquad (n = 1, 2, \dots) \tag{4.111}$$

$$\tag{4.112}$$

すると、(4.102), (4.103) は、

$$[a_0^I, a_0^{J\dagger}] = \delta^{IJ}, \qquad [a_m^{\mathcal{I}I}, a_n^{\mathcal{J}J\dagger}] = \delta_{mn}\delta^{\mathcal{I}\mathcal{J}}\delta^{IJ}, \tag{4.113}$$

$$\{\theta_0^\alpha, \theta_0^{\beta\dagger}\} = \frac{1}{4}(\gamma^+)^{\alpha\beta}, \qquad \{\eta_m^{\mathcal{I}\alpha}, \eta_n^{\mathcal{J}\beta\dagger}\} = \frac{1}{2}(\gamma^+)^{\alpha\beta}\delta_{mn}\delta^{\mathcal{I}\mathcal{J}}. \tag{4.114}$$

以降、$\bar{a} = a^\dagger$, $\bar{\theta} = \theta^\dagger$ という表式を使う。
この operator を使って、Hamiltonian を表示すると、

$$E_0 = 2\pi\alpha'\mu\mathcal{E}_0, \qquad \mathcal{E}_0 = \bar{a}_0^I a_0^I + 4 + 2\bar{\theta}_0\bar{\gamma}^-\Pi\theta_0, \tag{4.115}$$

$$E^{\mathcal{I}} = \frac{1}{p^+}\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n(\bar{a}_n^{\mathcal{I}I}a_n^{\mathcal{I}I} + \bar{\eta}_n^{\mathcal{I}}\bar{\gamma}^-\eta_n^{\mathcal{I}}). \tag{4.116}$$

ここで、$\mathcal{E}_0$ の $+4 = \frac{1}{2}\cdot 8$ は、bosonic なゼロモード a_0^I, $\bar{a}_0^I$ を normal ordering にする際に出てくる。

$$\frac{1}{2p^+}({p_0^I}^2 + m^2 {x_0^I}^2) = \mu \bar{a}_0^I a_0^I + \frac{i}{2}[p_0^I, x_0^I] = \mu \bar{a}_0^I a_0^I + \frac{1}{2}\cdot 8.$$

fermionic なゼロモード θ_0, $\bar{\theta}_0$ の積の順序は、

$$2i\mu\theta_0^1\bar{\gamma}^-\Pi\theta_0^2 = 2\bar{\theta}_0\bar{\gamma}^-\Pi\theta_0 - \theta_0^1\bar{\gamma}^-\Pi\theta_0^1 - \theta_0^2\bar{\gamma}^-\Pi\theta_0^2. \tag{4.117}$$

ここで、$(\bar{\gamma}^-\Pi)_{\alpha\beta} = (\bar{\gamma}^-\Pi)_{\beta\alpha}$ を使うと、

$$\theta_0^1\bar{\gamma}^-\Pi\theta_0^1 = \frac{1}{2}\{\theta_0^{1\alpha}, \theta_0^{1\beta}\}(\bar{\gamma}^-\Pi)_{\alpha\beta} = \frac{1}{8}\mathrm{Tr}(\gamma^+\bar{\gamma}^-\Pi) = 0. \tag{4.118}$$

同様に、$\theta_0^2\bar{\gamma}^-\Pi\theta_0^2 = 0$。よって、fermion のゼロモードからの normal ordering constant への寄与はない。string mode の normal ordering constant は、bosonic mode からは、

$$\frac{1}{p^+}\sum_{n\neq 0}\alpha_{-n}^{\mathcal{I}I}\alpha_n^{\mathcal{I}I} = \frac{1}{p^+}\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n\bar{a}_n^{\mathcal{I}I}a_n^{\mathcal{I}I} + \frac{1}{p^+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\omega_n}{2}. \tag{4.119}$$

fermionic mode からは、

$$\frac{1}{p^+}\sum_{n\neq 0}\omega_n\theta_{-n}^{\mathcal{I}}\bar{\gamma}^-\theta_n^{\mathcal{I}} = \frac{1}{p^+}\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n\bar{\eta}_n^{\mathcal{I}}\bar{\gamma}^-\eta_n^{\mathcal{I}} - \frac{1}{p^+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\omega_n}{2}. \tag{4.120}$$

従って、string mode の constant は相殺する。これは、bosonic モードと fermionic モードの自由度の数が同じことからの帰結である。

ここで、この量子化で得る状態空間について考えよう。まず、p^+ は全ての生成消滅演算子と可換であるので、状態は任意実数の label p^+ を持つ。生成消滅演算子に関して、Fock vacuum は、

$$a_0^I|0,p^+\rangle, \quad \theta_0|0,p^+\rangle, \quad a_n^{cII}|0,p^+\rangle, \quad \eta_n^{\mathcal{I}}|0,p^+\rangle, \quad n = 1,2,3,\ldots, \tag{4.121}$$

と取るのが自然である。しかし、vacuum の取り方については不定性があり、後に詳しく述べる。一般の状態は Fock vacuum $|0,p^+\rangle$ に生成演算子 $\bar{a}_0^I$, $\bar{\theta}_0$, $\bar{a}_n^{\prime cII}$, $\bar{\eta}_n^{\mathcal{I}}$ をかけていくとできる。先にも述べたが、ゼロモード $\bar{a}_0^I$, $\bar{\theta}_0$ も (4.115) により離散的な spectrum を与える。
さて、physical state はこの空間に physical state condition (4.88) を課したものである。つまり、(4.88) の左辺を $\mathcal{A}$ と置くと、

$$\mathcal{A}|\Phi_{phys}\rangle = 0, \tag{4.122}$$

$$\mathcal{A} = N^1 - N^2, \tag{4.123}$$

ここで、

$$N^{\mathcal{I}} = \sum_{n=1}^{\infty}k_n(\bar{a}_n^{\mathcal{I}I}a_n^{\mathcal{I}I} + \bar{\eta}_n^{\mathcal{I}}\bar{\gamma}^-\eta_n^{\mathcal{I}}) = 2\pi\sum_{n=1}^{\infty}nN_n^{\mathcal{I}} \quad (\text{no sum for } \mathcal{I}). \tag{4.124}$$

$N_n^{\mathcal{I}}$ は worldsheet 上で $\mathcal{I}$ の方向に進む、n 番目の励起状態の占有数である。つまり、この条件は右方向に進む波と左方向に進む波との間の level matching condition である。
占有数 $N_n^{\mathcal{I}}$ を用いて、energy spectrum を書き直しておく。

$$P^- = \mu\sum_{\mathcal{I}=1,2}\sum_{n=0}^{\infty}N_n^{\mathcal{I}}\sqrt{1 + \frac{n^2}{(\mu\alpha' p^+)^2}}. \tag{4.125}$$

4.3.3 ゲージ固定後の対称性の実現

flat space の場合、light-cone ゲージに固定してしまうと、manifest な Lorentz 対称性を破ってしまう。今の場合も同様に light-cone ゲージの作用 (4.79), (4.80), (4.81) は manifest には global 対称性 (3.49)-(3.57) を持っていない。そこで、global 対称性の生成子を Noether charge として作り、その交換関係が (3.49)-(3.57) を満たすことを確認しなければならない。
generator は 2 種類に分類できる。一つは P^+, P^I, J^{+I}, J^{ij}, $J^{i'j'}$, Q^+, $\bar{Q}^+$ であり、これらは kinematical generator と呼ばれる。もう一つは、P^+, Q^-, $\bar{Q}^-$ であり、dynamical generator と呼ばれる。kinematical generator は string interaction を入れた際にも、free なときの形を維持し、correction を受けずに quadratic なままでいる。dynamical generator は correction を受ける generator である。ただし、Q^+, Q^- は、

$$Q^+ \equiv \frac{1}{2}\bar{\gamma}^-\gamma^+ Q, \qquad Q^- \equiv \frac{1}{2}\bar{\gamma}^+\gamma^- Q, \tag{4.126}$$

で定義される。

generator を worldsheet 上の dynamical variable で書くと、

$$P^+ = p^+, \qquad P^I = \int d\sigma(\cos(\mu x^+)\mathcal{P}^I + \mu \sin(\mu x^+) x^I p^+), \tag{4.127}$$

$$J^{+I} = \int d\sigma(\mu^{-1}\sin(\mu x^+)\mathcal{P}^I - \cos(\mu x^+) x^I p^+), \tag{4.128}$$

$$J^{ij} = \int d\sigma(x^i\mathcal{P}^i - x^j\mathcal{P}^i - i\bar{\theta}\bar{\gamma}^-\gamma^{ij}\theta), \qquad J^{i'j'} = \int d\sigma(x^{i'}\mathcal{P}^{j'} - x^{j'}\mathcal{P}^{i'} - i\bar{\theta}\bar{\gamma}^-\gamma^{i'j'}\theta). \tag{4.129}$$

$$Q^+ = 2\sqrt{p^+}\int d\sigma \bar{\gamma}^- e^{i\mu x^+ \Pi}\theta, \qquad \bar{Q}^+ = 2\sqrt{p^+}\int d\sigma \bar{\gamma}^- e^{-i\mu x^+ \Pi}\bar{\theta}. \tag{4.130}$$

dynamical generator は、P^- は (4.87) に書いてある。Q^-, $\bar{Q}^-$ は、

$$Q^- = \int d\sigma(2\mathcal{P}^I\bar{\gamma}^I\theta - 2x'^I\bar{\gamma}^I\bar{\theta} + 2ip^+x^I\bar{\gamma}^I\Pi\theta), \tag{4.131}$$

$$\bar{Q^-} = \int d\sigma(2\mathcal{P}^I\bar{\gamma}^I\bar{\theta} - 2x'^I\bar{\gamma}^I\theta - 2ip^+x^I\bar{\gamma}^I\Pi\bar{\theta}), \tag{4.132}$$

である。これらの generator は、交換関係 (3.49)- (3.57) を満たす。

さらに、(4.127)- (4.132) を ocsillator 表示しておこう。kinematical generator のうち、

$$P^+ = p^+, \quad P^I = p_0^I, \quad J^{+I} = -ix_0^I p^+, \tag{4.133}$$

$$Q^+ = 2\sqrt{p^+}\bar{\gamma}^-\bar{\theta}_0, \quad \bar{Q}^+ = 2\sqrt{p^+}\bar{\gamma}^-\theta_0. \tag{4.134}$$

は、ゼロモードだけに依っている。

$$J^{IJ} = J_0^{IJ} + \sum_{\mathcal{I}=1,2}\sum_{n=1}^{\infty}(\bar{a}_n^{\mathcal{I}I}a_n^{\mathcal{I}J} - \bar{a}_n^{\mathcal{I}J}a_n^{\mathcal{I}I} + \frac{1}{2}\bar{\eta}_n^{\mathcal{I}}\bar{\gamma}^-\gamma^{IJ}\eta_n^{\mathcal{I}}), \tag{4.135}$$

$$J_0^{IJ} = \bar{a}_0^I a_0^J - \bar{a}_0^J a_0^I + \frac{1}{2}\sum_{\mathcal{I}=1,2}\theta_0^{\mathcal{I}}\bar{\gamma}^-\gamma^{IJ}\theta_0^{\mathcal{I}}, \tag{4.136}$$

は、string mode も含んでいる。dynamical generator は

$$\sqrt{p^+}Q^{-1} = 2p_0^I\bar{\gamma}^I\theta_0^1 - 2mx_0^I\bar{\gamma}^I\Pi\theta_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(2\sqrt{\omega_n}c_n\bar{a}_n^{1I}\bar{\gamma}^I\eta_n^1 + \frac{im}{\sqrt{\omega_n}c_n}\bar{a}_n^{2I}\bar{\gamma}^I\Pi\eta_n^2 + h.c.), \quad (4.137)$$

$$\sqrt{p^+}Q^{-2} = 2p_0^I\bar{\gamma}^I\theta_0^2 + 2mx_0^I\bar{\gamma}^I\Pi\theta_0^1 + \sum_{n=1}^{\infty}(2\sqrt{\omega_n}c_n\bar{a}_n^{2I}\bar{\gamma}^I\eta_n^2 - \frac{im}{\sqrt{\omega_n}c_n}\bar{a}_n^{1I}\bar{\gamma}^I\Pi\eta_n^1 + h.c.). \quad (4.138)$$

P^- は、(4.105), (4.115), (4.116) に与えられている。

ゼロモードの ‘真空’ について

Fock vacuum の選び方に関して、fermionic なゼロモードの vacuum の選び方には不定性がある。これは、fermionic ゼロモードの生成消滅演算子の取り方の不定性に由来する。この演算子を (4.110) と取ると、vacuum の定義は (4.121) であった。この vacuum は、$H|0\rangle = 4\mu$ のエネルギーを持つ。生成消滅演算子を変えれば異なる真空が選ばれることを見よう。
まず、

$$\theta_R = \frac{1+\Pi}{\sqrt{2}}\theta_0, \theta_L = \frac{1-\Pi}{\sqrt{2}}\theta_0, \quad (4.139)$$

を定義する。この operator を使って反交換関係を書き直すと、

$$\{\theta_R^\alpha, \bar{\theta}_R^\beta\} = \frac{1}{4}((1+\Pi)\gamma^+)^{\alpha\beta}, \qquad \{\theta_L^\alpha, \bar{\theta}_L^\beta\} = \frac{1}{4}((1-\Pi)\gamma^+)^{\alpha\beta}, \qquad \{\theta_R^\alpha, \bar{\theta}_L^\beta\} = 0. \quad (4.140)$$

また、Hamiltonian のゼロモード部分は、

$$E_0 = \mu\mathcal{E}_0, \qquad \mathcal{E}_0 = \bar{a}_0^I a_0^I + \bar{\theta}_L\bar{\gamma}^-\theta_L - \bar{\theta}_R\bar{\gamma}^-\theta_R + 4. \quad (4.141)$$

(4.121) は、

$$\theta_R|0\rangle = \theta_L|0\rangle = 0, \quad (4.142)$$

で定義される。fermion ゼロモードの energy spectrum は、n_R, n_L をそれぞれ $\bar{\theta}_R$, $\bar{\theta}_L$ の excitation 数として、

$$\mathcal{E}_0(n_R, n_L) = 4 - n_R + n_L \quad (4.143)$$

となる。excitation 数 n_R, n_L はそれぞれ 0 から 4 の値をとる。これは、(4.139) により、$\theta_R(\bar{\theta}_R)$, $\theta_L(\bar{\theta}_L)$ の独立な成分はそれぞれ複素で 4 つずつだからである。従って fermionic ゼロモードは $0, \mu, \ldots, 8\mu$ のエネルギー状態からなる。
真空を

$$\bar{\theta}_R|0\rangle = \theta_L|0\rangle = 0 \quad (4.144)$$

と取ればこの真空のエネルギーは 0 であり、他のゼロモードのエネルギーは、

$$\mathcal{E}_0(\bar{n}_R, n_L) = \bar{n}_R + n_L, \quad (4.145)$$

となり、再び 0 から 8μ までの energy spectrum を与える。
他にも、

$$\bar{\theta}_R|0\rangle = \bar{\theta}_L|0\rangle = 0, \qquad \mathcal{E}_0(\bar{n}_R, \bar{n}_L) = 4 + \bar{n}_R - \bar{n}_L, \quad (4.146)$$

$$\theta_R|0\rangle = \bar{\theta}_L|0\rangle = 0, \qquad \mathcal{E}_0(n_R, \bar{n}_L) = 8 - n_R - \bar{n}_L, \tag{4.147}$$

等と真空を取ることができる。いずれの場合も fermionic ゼロモードの $0, \mu, \ldots, 8\mu$ の energy spectrum を与える。実際これらの真空の取り方は単なる状態の label の問題であり、どの' 真空' を選んでも系の記述は同等である。

第5章　BMN対応

この章では、まず $AdS_5 \times S^5$ の Penrose 極限として max susy pp-wave が得られることを見る。そして、pp-wave 上の弦理論と CFT の間の双対性について BMN の行った予想を説明する。

5.1　$AdS_5 \times S^5$ から得られる Maximally Supersymmetric pp-wave 解

$AdS^5 \times S^5$ の座標としてグローバル座標をとる。

$$ds^2 = R^2 \left(-\cosh^2 \rho dt^2 + d\rho^2 + \sinh^2 \rho d\Omega_3^2 + \cos^2 \theta d\psi^2 + d\theta^2 + \sin^2 \theta d\Omega'^2_3 \right). \tag{5.1}$$

ただし、$R = (4\pi g_s N \alpha'^2)^{\frac{1}{4}}$。ここで、$\rho = 0$, $\theta = 0$ で ψ に沿って進むヌル測地線にの周りでのペンローズ極限を考える。$\tilde{x}^+ = \frac{t+\psi}{2}$, $\tilde{x}^- = t - \psi$ とおいて、

$$\tilde{x}^+ = \mu x^+ \quad \tilde{x}^- = \frac{x^-}{\mu R^2} \quad \rho = \frac{r}{R}, \quad \theta = \frac{y}{R} \tag{5.2}$$

とおく。極限

$$N \to \infty, \quad g_s : \text{fixed} \tag{5.3}$$

により、次の pp-wave background を得る [20]。

$$\begin{aligned} ds^2 &= -2dx^+dx^- - \mu^2(r^2+y^2)dx^{+2} + dr^2 + d\Omega_3^2 + dy^2 + d\Omega'^2_3 \\ &= -2dx^+dx^- - \mu^2 \sum_{I=1}^{8} x^{I\,2} dx^{+2} + \sum_{I=1}^{8} dx^{I\,2}, \\ F &= \mu dx^+ \wedge (dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4 + dx^5 \wedge dx^6 \wedge dx^7 \wedge dx^8). \end{aligned} \tag{5.4}$$

ただし、2 つの R^4 をまとめて 1 つの R^8 $(x^I,\, I = 1, \ldots 8)$ とした。

5.2　BMN Proposal

AdS/CFT duality により $AdS^5 \times S^5$ 上の type IIB superstring と 4 次元 $\mathcal{N} = 4$ SYM とは dual な理論であると予想される。pp-wave geometry (5.4) が (5.1) の極限から得られることから、(5.4) 上の type IIB superstring と $\mathcal{N} = 4$ SYM との間には何らかの関係があることが考えられる。これを見るためには、対称性を比べてみるのが便利である。$AdS^5 \times S^5$ の bosonic な isometry は AdS^5 の $SO(4,2)$ と S^5 の $SO(6)$ の直積である。これは、SYM 側では、4 次元の共形対称性 $SO(4,2)$

と $\mathcal{N}=4$ の R 対称性 $SU(4)\sim SO(6)$ に対応する。特に、AdS 側のエネルギー $E=i\partial_t$ は CFT 側の conformal dimension Δ に対応し、AdS 側の角運動量 $J=-i\partial_\psi$ は CFT 側の R charge に対応する。この角運動量 J は $SO(6)$ の内の一つの generator である。座標変換 (5.2) と (5.4) の isometry を考慮すると、

$$P^- = i\partial_{x^+} = i\mu\partial_{\tilde{x}^+} = i\mu(\partial_t+\partial_\psi) = \mu(\Delta - J), \tag{5.5}$$

$$P^+ = i\partial_{x^-} = i\frac{1}{\mu R^2}\partial_{\tilde{x}^-} = i\frac{1}{2\mu R^2}(\partial_t-\partial_\psi) = \frac{(\Delta+J)}{2\mu R^2}. \tag{5.6}$$

極限 (5.3) で有限の P^+, P^- を与えるのは、$J\sim N^{\frac{1}{2}}$ のときである。前章で、pp-wave background (5.4) 上の superstring は厳密に量子化できて、P^+, P^- が有限の spectrum(4.125) を得た。(5.6) より、

$$\mu\alpha' P^+ = \frac{\Delta+J}{2(g_{\rm YM}^2N)^{1/2}} \sim \frac{J}{(g_{\rm YM}^2N)^{1/2}}, \tag{5.7}$$

となるので、string spectrum を (5.5) を用いて CFT 側の parameter で書き直すと、

$$\frac{P^-}{\mu} = \Delta - J = \sum_{\mathcal{I}=1,2}\sum_{n=0}^{\infty} N_n^{\mathcal{I}}\sqrt{1+\lambda'^2 n^2}, \qquad \lambda' \equiv \frac{g_{\rm YM}^2N}{J^2}, \tag{5.8}$$

となる。Berenstein, Maldacena, Nastase は対称性の generator の対応 (5.5), (5.6) に基き、pp-wave 上の superstring の状態に対応する CFT 側の operator を提案した [21]。

5.2.1 BPS 状態の対応

AdS^5/CFT_4 対応では、AdS 側の supergravity モードは CFT 側の BPS な single trace operator に対応していた。従って、pp-wave 上の supergravity モードは CFT 側の BPS な single trace operator に対応しているはずである。

まず、$P^-=0$ の状態 $|0,p^+\rangle$ に対応する operator を考える。$\Delta - J = 0$ の single trace operator は $Tr[Z^J]$ だけである。ここで、$Z=\phi^5+i\phi^6$ であり、J は 56 平面の回転 generator とする。この operator は chiral(BPS) primary であり、supersymmetry によって、その conformal dimension は守られている。従って、Δ は全ての λ' に対して $\Delta = J$ である。この operator の normalization を

$$O^J \equiv \frac{2^{J/2}}{\sqrt{JN^J}}{\rm Tr}Z^J, \tag{5.9}$$

と定める。これは、$\langle \bar{O^J}O^J\rangle_{\rm free,planar}=1$ となるように決めた。他の supergravity mode に対応する operator は J 個の Z の中に $\Delta - J = 1$ の operator を挿入して、symmetric trace をとったものである。$\Delta - J = 1$ の operator としては、bosonic なモードとして、ϕ^i $(i=1,2,3,4)$ と $D_iZ = \partial_i Z + [A_i, Z]$ がある。ここで、ϕ^i の i は $SO(6)$ vector の $5,6$ 成分以外を走り、D_iZ の i は 4 次元空間の coordinate index を走る。fermionic モードとしては、gaugino ψ の 16 成分のうち、$J=\frac{1}{2}$ の 8 成分がある。

supergravity mode は、light-cone vacuum にゼロモードの生成演算子をかけてできる状態である。$AdS^5\times S^5$ のときと同様に、これらの状態は 1 つの supermultilet をなす。従って、(5.9)

以外の supergravity mode に対応する operator は、(5.9) を (5.4) が持つ対称性で変換することで得られる。ここで、(5.9) が chiral primary であるので、変換に用いるのは $SO(6)$, conformal, supersymmetry の lowering operator である。例えば、O^{J+1} に $SO(6)$ の適当な lowering operator をかけると、

$$\frac{2^{(J+1)/2}}{\sqrt{J}}\sum_{l=0}^{J-1}\frac{1}{\sqrt{JN^{J+1}}}\mathrm{Tr}[Z^l\phi Z^{J-l}]=\frac{2^{(J+1)/2}}{\sqrt{N^{J+1}}}\mathrm{Tr}[\phi Z^J] \tag{5.10}$$

を得る。ここで、$\phi=\frac{\phi^1+i\phi^2}{\sqrt{2}}$ である。ここで、trace の cyclicity を用いて、ϕ を一番前に持ってきた。この operator は pp-wave 側の $\bar{a}_0^\phi|0,p^+\rangle$ に対応する。ただし、$\bar{a}_0^\phi=\bar{a}_0^5+i\bar{a}_0^6$ である。O^{J+2} に $SO(6)$ の lowering operator と supersymmetry の lowering operator を作用させれば、

$$\frac{2^{(J+2)/2}}{\sqrt{JN^{J+2}}}\sum_{l=0}^{J}\mathrm{Tr}[\phi Z^l\psi_{J=\frac{1}{2}}Z^{J-l}] \tag{5.11}$$

を得る。これは、$\bar{\theta}_0\bar{a}_0^\phi|0,p^+\rangle$ に対応する。これらの operator は全て BPS であり、conformal dimension は任意の λ に対して free theory のときの値を保持する。pp-wave 側の energy spectrum (4.125) と比較すると、関係 (5.5) を満たしている。このようにして、pp-wave 側の supergravity mode と CFT 側の operator との正確な対応を得る。ここで、pp-wave 側の creation operator と CFT 側の挿入する場の対応をまとめて書いておく。一番右は、挿入場を作るために用いる対称性である。

pp-wave 側の生成演算子		CFT 側の挿入場	
$\bar{a}_0^i$	$\leftrightarrow$	D_iZ	conformal 対称性 の lowering operator
$\bar{a}_0^{i'}$	$\leftrightarrow$	$\phi^{i'-4}$	$SO(6)$ の lowering operator
$\bar{\theta}_0$	$\leftrightarrow$	$\psi_{J=\frac{1}{2}}$	supersymmetry の lowering operator

(5.12)

5.2.2 String Mode との対応

BMN は pp-wave 側の string mode の CFT 側の対応物として次の proposal をした。

string creation oprator は、CFT 側ではゼロモードと同じ $\Delta-J=1$ の場を O^J に挿入することに相当する。ただし、挿入した場の位置の足しあげの際、各項には位置依存の位相 $e^{\frac{2\pi inl}{J}}$ がかかる。ここで、n は string creation operator の mode number(今後、場 Z に沿った 'momentum' とも呼ぶ)、l は挿入場の trace の中での位置である。

分かり易くするため、具体例を考えよう。まず、string creation operator が 1 つだけかかった状態を考える。$\bar{a}_n^8$ をかけたとする。$\bar{a}_n^8|0,p^+\rangle$ に対応する operator は、

$$\frac{2^{(J+1)/2}}{\sqrt{J}}\sum_{l=0}^{J}\frac{1}{\sqrt{JN^{J+1}}}e^{\frac{2\pi inl}{J}}\mathrm{Tr}[Z^l\phi^4Z^{j-l}], \tag{5.13}$$

と予想される。しかし、この operator は trace の cyclicity により消える。これは、string 側では (4.122) により、$\bar{a}_n^8|0,p^+\rangle$ は物理状態に入っていないことと consistent である。物理状態を考え

るには少くとも 2 つ以上の creation operator が必要である。そこで、$\bar{a}^7_{-n}\bar{a}^8_n|0,p^+\rangle$ をとる。この状態に対応する operator は、

$$\frac{2^{(J+2)/2}}{\sqrt{JN^{J+2}}}\sum_{l=0}^{J} e^{\frac{2\pi inl}{J}}\mathrm{Tr}[\phi^3 Z^l \phi^4 Z J-l]. \tag{5.14}$$

と予想される。Z に沿った momentum がゼロでない場合は trace の cyclicity を用いることにより、operator は消えてしまう。string 側の level matching condition (4.122) は CFT 側ではこのようにして、実現されている。

さて、supergravity mode に対応する operator ($n=0$) は、BPS であったので、conformal dimension は free theory の値が interacting theory でも保持された。しかし、string mode に対応する operator は BPS ではなく、conformal dimension は保持されない。特に、$n=0$ の場合は任意の J の値に対して、conformal dimension は interaction による変更を受けないが、$n\neq 0$ の operator に関しては一般の J に対しては、その conformal dimension への correction (anomalous dimension) が発散してしまい、spectrum から decouple する。しかし、今考えている極限 $J\sim\sqrt{N}\to\infty$ では operator は almost BPS になり、conformal dimension への correction は受けるが、それは有限となる。

BMN の予想の正当性を確かめるために、関係 $P^- = \Delta - J$ を満たすことを示したい。従って、CFT 側で BMN operator の anomalous dimension を計算する。実際、BMN operator の anomalous dimension を摂動論で計算すると、coupling constant $\lambda' = \frac{\lambda}{J^2}$ での摂動展開となる。従って、λ' が小さい領域では摂動計算で anomalous dimension が計算できる。このことを次に見ていく。この節の最後に supergravity mode の場合に (5.12) を書いたように、string mode と CFT operator の対応を書いておく。

string mode		CFT 側の挿入場
$\bar{a}^i_n$	$\leftrightarrow$	$e^{\frac{2\pi inl}{J}} D_i Z$
$\bar{a}^{i'}_n$	$\leftrightarrow$	$e^{\frac{2\pi inl}{J}} \phi^{i'}$
$\bar{\theta}_n$	$\leftrightarrow$	$e^{\frac{2\pi inl}{J}} \psi_{J=\frac{1}{2}}$

(5.15)

第6章　$\mathcal{N}=4$ Super Yang-Mills 理論のBMN極限

この章では、$\mathcal{N}=4$ SYM の BMN 極限について考察する。まず、BMN の予想を確かめるために planar, 1-loop レベルでの 2 点関数の計算を行い、anomalous dimension を求める。さらに、non-planar に BMN 対応を拡張することを念頭に置いて、torus レベルでの 2 点関数の計算を行う。

6.1　$\mathcal{N}=4$ Super Yang-Mills 理論

重力を含まない理論では、粒子のスピンの大きさの最大値は 1 である。従って、massless 粒子の spectrum の議論から、最大の supersymmetry の個数は 16 である。4 次元では $\mathcal{N}=4$ の理論が最大の超対称性を持った理論である。ここでは、ゲージ対称性として $U(N)$ を持った 4 次元 $\mathcal{N}=4$ SYM 理論を考える。この理論は、10 次元 $\mathcal{N}=1$ SYM 理論の dimensional reduction から得ることが出きる。

この理論の古典作用には、dimensionful な parameter は存在しない。従って、古典的には conformal 対称性を持つ。さらに、量子化しても β function は消えるので、量子論的にも coupling constant の全領域で conformal 対称性は保たれる。この conformal 対称性により $\mathcal{N}=4$ の超対称性は、2 倍に拡大されて、32 個の超対称性を持つ理論となる。よって、グローバル対称性は、bosonic なものが 4 次元の Minkowski 空間の conformal 対称性 $SO(4,2)$ と R 対称性 $SU(4)\sim SO(6)$ であり、fermionic なものが $\mathcal{N}=4$ 超対称性と conformal 超対称性である。これらが作る群は $SU(2,2|4)$ である。

この理論の作用は、どのグローバル対称性を manifest にするかで様々な表わし方がある。全ての対称性が見易い形になっている作用は、今のところ分かっていない。BMN operator の中で我々が主に見ていくものは、R 対称性の部分群 $SO(4)$ の index を持ったものである。従って、まず R 対称性 $SO(6)$ が manifest になっている作用を記述する。理論に現れる component は、gauge 場 $A^a_\mu(x)$, scalar 場 $\phi^a_i(x)$, spinor 場 $\psi^{a\alpha}(x)$ である。A^a_μ は $U(N)$ adjoint (index a), $SO(6)$ singlet であり、$\phi^a_i(x)$ は $U(N)$ adjoint, $SO(6)$ vector (index i) で、$\psi^{a\alpha}(x)$ は $U(N)$ adjoint, $SO(6)$ spinor (index α) である。

Lorentz signature の作用は、

$$S=\frac{1}{g^2_{YM}}\int dx^4\mathrm{Tr}\left(-\frac{1}{2}F^2_{\mu\nu}+(D_\mu\phi)^2+\bar{\psi}i\gamma^\mu D_\mu\psi+\bar{\psi}\Gamma^i[\phi_i,\psi]+\frac{1}{2}[\phi_i,\phi_j]^2\right).$$

ここで、

$$A_\mu(x)=A^a_\mu(x)T^a,\quad \phi_i(x)=\phi^a_i(x)T^a,\quad \psi^\alpha(x)=\psi^{a\alpha}(x)T^a,$$

$$D_\mu = \partial_\mu - i[A_\mu,], \qquad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\mu - \partial_n A_\mu - i[A_\mu, A_\nu]. \tag{6.1}$$

flat metric は almost minus $\eta^{\mu\nu} = (+---)$ にとる。T^a はリー代数の fundamental representation であり、

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c, \quad \mathrm{Tr}(T^aT^b) = \frac{1}{2}\delta^{ab}. \tag{6.2}$$

共変ゲージに固定した作用は、

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{gf}} =& \frac{1}{g_{YM}^2}\int dx^4 \mathrm{Tr}\Big(-\frac{1}{2}F_{\mu\nu}^2 + (D_\mu\phi)^2 + \bar{\psi}i\gamma^\mu D_\mu\psi \\ &+ \bar{\psi}\Gamma^i[\phi_i, \psi] + \frac{1}{2}[\phi_i, \phi_j]^2 + \partial_\mu\bar{c}D_\mu c - \xi(\partial_\mu A_\mu)^2\Big). \end{aligned} \tag{6.3}$$

以下では、feynman ゲージ $\xi = 1$ で計算する。また、計算上の便宜のため、Euclid 化しておく。$t \to -it$, $A_0 \to iA_0$ とすると、

$$iS_{\mathrm{gf}} = -\int dx^4\Big(\frac{1}{2}F_{\mu\nu}^2 + (D_\mu\phi^i)^2 + \bar{\psi}i\gamma^\mu D_\mu\phi + \partial_\mu\bar{c}\Delta_\mu c - \frac{1}{2}[\phi^i, \phi^j]^2 - \bar{\psi}\Gamma^i[f^i, \psi] + \xi(\partial_\mu A_\mu)^2\Big) \tag{6.4}$$

$$\equiv -S_{\mathrm{E}}, \tag{6.5}$$

feynman rule を得るため展開しておこう。

$$S_{\mathrm{E}} = \int dx^4 \mathrm{Tr}\Big((\partial_\mu A_\nu)^2 + (\partial_\mu\phi^i)^2 + \bar{\psi}i\gamma^\mu\partial_\mu\psi + \partial_\mu\bar{c}\partial_\mu c \tag{6.6}$$

$$- \frac{1}{2}[\phi^i, \phi^j]^2 - [A_\mu, \phi^i]^2 - \frac{1}{2}[A_m, A_\nu]^2 \tag{6.7}$$

$$- 2i\partial_\mu\phi^i[A_\mu, \phi^i] - 2i\partial_\mu A_\nu[A_\mu, A_\nu] - \bar{\psi}\Gamma^i[\phi^i, \psi] + \bar{\psi}\gamma^\mu[A_\mu, \psi] - i\partial_\mu\bar{c}[A_\mu, c]\Big). \tag{6.8}$$

feynman rule は付録 B にのせておく。

6.2 BMN limit と $\mathcal{N} = 4$ SYM

AdS/CFT 対応に基づき、BMN limit

$$N \to \infty \quad \frac{J}{\sqrt{N}} : \text{fixed}, \quad \Delta - J : \text{fixed}, \quad g_{YM}^2 : \text{fixed}. \tag{6.9}$$

での $\mathcal{N} = 4$ SYM と pp-wave 上の string theory の間の双対性に関する予想を前章で見た。そこで、$\mathcal{N} = 4$ SYM が BMN limit でどのように振舞うのかを述べておく。まず、Large N field theory となっており、'tHooft coupling λ は、$\lambda \to \infty$ になっている。従って、strong coupling であり、一見すると摂動計算は不可能に見える。また、genus 展開 parameter $\frac{1}{N}$ は BMN limit で $\frac{1}{N} \to 0$ となり、higher genus は効いてこないように見える。しかし、これはどちらも間違いである。実際には、coupling constant は $\lambda, \frac{1}{N}$ ではなく、loop 展開も genus 展開も摂動領域に

することができる。loop 展開の parameter は $\lambda' \equiv \frac{g_{YM}^2 N}{J^2}$ であり、genus 展開の parameter は $g_2^2 \equiv \left(\frac{J^2}{N}\right)$ である。field theory 側で genus 展開が意味をなすということは、field theory 側から string theory 側の interaction についての情報を得ることが出来ると予想できる。前の章で、pp-wave 上の string の worldsheet action を得てそれを量子化したが、それは、曲った時空上の free な string の第一量子化である。string の dynamics を得るためには string interaction を考えなければならない。string interaction は string theory 側の genus 展開で見ることができるが、この genus 展開を dual な CFT 側で見ることできるかもしれない。これは非常に興味深いことである。まずこの章では、SYM の BMN limit を見ていく。具体的には、BMN operator の anomalous dimension を摂動的に計算して、planar level でこれが string spectrum と一致することを見る。次に、torus level での anomalous dimension を計算する。この近似ではもはや BMN operator は dilation operator の固有状態ではなくなっていて、他の operator と mixing を起こしている。anomalous dimension を求めるためには、この mixing を operator の再定義によって解いてやらなければならないことをみる。string interaction に関しては、後の章で述べる。

6.3 Planar Level での Anomalous Dimension

この節では、BMN operator の anomalous dimesion を 1-loop, planar の近似で求める [21]。つまり、λ' に関しては最低次とその次の次数まで、γ_2 に関しては最低次までの近似である。
operator $\mathcal{O}(x)$ の anomalous dimension を計算するには、conjugate な operator $\mathcal{O}$ との 2 点関数から求めるのが簡単である。confomal 対称性から 2 点関数の形は、

$$\langle 0|\mathcal{O}(x)\bar{\mathcal{O}}(0)|0\rangle = \frac{1}{|x|^{2\Delta_{\mathcal{O}}}}, \tag{6.10}$$

と決まる。ここで、$\Delta_{\mathcal{O}}$ は $\mathcal{O}(x)$ の quantum な conformal dimension である。$\mathcal{O}(x)$ の classical な conformal dimension を $\Delta_{\mathcal{O}0}$ とすると、

$$\Delta_{\mathcal{O}} = \Delta_{\mathcal{O}0} + \delta\Delta_{\mathcal{O}}, \tag{6.11}$$

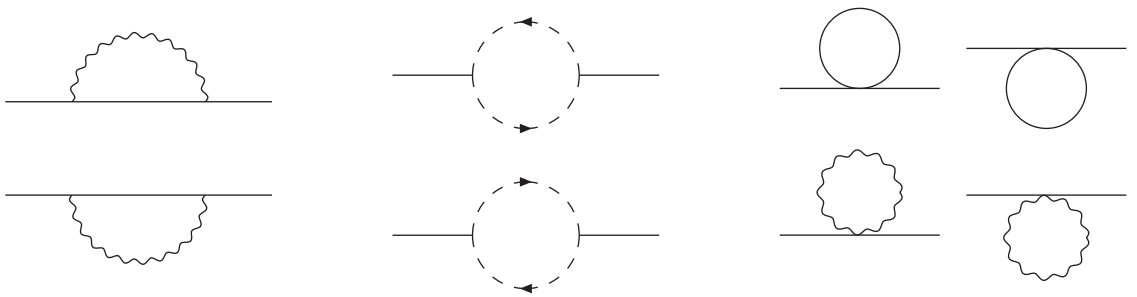
となり、$\delta\Delta_{\mathcal{O}}$ が anomalous dimension である。実際は、(6.10) の量子補正は発散する。1-loop level では、

$$\langle \mathcal{O}(x)\bar{\mathcal{O}}(0)\rangle = \frac{1}{|x|^{2\Delta_{\mathcal{O}0}}}(1 + \delta\Delta_{\mathcal{O}} \log(x\Lambda)^{-2} + \text{finite.}) \tag{6.12}$$

となる。$\log\Lambda^2$ と finite term は reguralization scheme による。これから用いる dimensional regularization では、$\log\Lambda^2$ は $\frac{1}{\epsilon}$ の形で現れる。

6.3.1 Wave Function Renormalization

まず、propagator に対する量子補正を計算しておく。考える operator は Z, ϕ^i からできているので、それらの propagator を考える。まず、$\langle Z(x)\bar{Z}(0)\rangle$ を計算する。1-loop level で 考慮すべき feynman diagram は、gluon を交換するもの、fermion loop、そして 4 点 vertex による diagram の 3 種類ある。ここで、diagram は 2 重線であるので、6.1 の (a), (c) のように上向きと下向きの



(a) (b) (c)

図 6.1: propagator への 1-loop 量子補正: (a) gluon exchange, (b) fermion loop, (c) 4 点 vertex からの寄与

ものがあることに注意が必要である。

regularization は dimensional regularization を行う。$\omega = 2 - \epsilon$ として、$d = 2\omega$ 次元で計算する。gluon exchange からの寄与は、

$$g_{YM}^2 \lambda \frac{1}{2p^2} \int \frac{dk^{2\omega}}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{4(p(p+k) + p^2 + (p+k)^2 + (p+k)p)}{2k^2 2(k+p)^2} \frac{1}{2p^2} \times 2$$
$$= g_{YM}^2 \lambda \frac{1}{2(p^2)^2} \int \frac{dk^{2\omega}}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{(k+2p)^2}{k^2(k+p)^2}. \tag{6.13}$$

fermion loop からの寄与は、

$$g_{YM}^2 \lambda \frac{1}{2p^2} \int \frac{dk^{2\omega}}{(2\pi)^{2\omega}} \left((-1)\mathrm{tr} \frac{-\gamma \cdot k}{2k^2} \Gamma_{56}^+ \frac{-\gamma \cdot (k+p)}{2(k+p)^2} \Gamma_{56}^- \right.$$
$$\left. + (-1)\mathrm{tr} \frac{-\gamma \cdot k}{2k^2} (-\Gamma_{56}^-) \frac{-\gamma \cdot (-(k+p))}{2(k+p)^2} (-\Gamma_{56}^+) \right) \frac{1}{2p^2}$$
$$= 8 g_{YM}^2 \lambda \frac{1}{2(p^2)^2} \int \frac{dx^{2\omega}}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k(k+p)}{k^2(k+p)^2}. \tag{6.14}$$

4 点 vertex の diagram からの寄与は、

$$g_{YM}^2 \lambda \frac{1}{2p^2} \int \frac{dk^{2\omega}}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{2k^2} (-2 \cdot 4 - 2 \cdot 2 + 2 - 2 \cdot 4) \frac{1}{2p^2} \times 2$$
$$= -9 g_{YM}^2 \lambda \frac{1}{2(p^2)^2} \int \frac{dk^{2\omega}}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{k^2} \tag{6.15}$$

(6.13), (6.14), (6.15) を合わせて、

$$\frac{g_{YM}^2 \lambda}{2(p^2)^2} \left(\int \frac{dk^{2\omega}}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{(k+2p)^2}{k^2(k+p)^2} + 8 \int \frac{dk^{2\omega}}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k(k+p)}{k^2(k+p)^2} - 9 \int \frac{dk^{2\omega}}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{k^2} \right)$$
$$= -2 \frac{g_{YM}^2 \lambda}{p^2} \frac{1}{(4\pi)^{2-\epsilon}} \frac{\Gamma(\epsilon)\Gamma(1-\epsilon)^2}{\Gamma(2-2\epsilon)} \frac{1}{(p^2)^\epsilon} \tag{6.16}$$
$$\to -2\lambda \left(\frac{1}{\epsilon} + 2 + \log 4\pi - \gamma + \log \frac{1}{p^2} \right) \frac{g_{YM}^2}{2p^2} \qquad (\epsilon \to 0) \tag{6.17}$$

フーリエ変換 (C.13) を用いると、

$$\langle 0|Z(x)\bar{Z}(0)|0\rangle = g_{YM}^2\Delta(x)(1-\frac{\lambda\Gamma(2-\omega)\Gamma(\omega-1)}{8\pi^\omega(2\omega-3)}(x^2)^{2-\omega}) \tag{6.18}$$

ここで、$\Delta(x)$ は 2ω 次元での free propagator であり、(C.14) である。$\phi^i(x)$ に対する propagator の 1-loop 計算も同様にして行うと、$Z(x)$ の結果と一致する。

6.3.2 BMN Operator の Planar, 1-Loop での Anomalous Dimension

それでは、BMN operator の planar, 1-loop での anomalous dimension を計算してみよう。ここでは最も簡単な BMN operator $O^J_{12,m} = \sum_{l=0}^J e^{\frac{2\pi ilm}{J}}\mathrm{Tr}[\phi^1 Z^l \phi^2 Z^{J-l}]$ を見る。$\mathcal{O}^J_{12,m}$ と $\bar{\mathcal{O}}^J_{12,n}$ の 2 点関数 $\langle 0|\mathcal{O}^J_{12,m}(x)\bar{\mathcal{O}}^J_{12,n}(0)|0\rangle$ を求める。1-loop で BMN operator 同士が mixing を起こしているかどうかを確かめるためにも、$m \neq n$ の場合も計算する。従って、考えるべき diagram は、ϕ と Z の間の interaction、2 つの Z の間の interaction、propagator への補正の 3 種類である。これらを順に考えていこう。

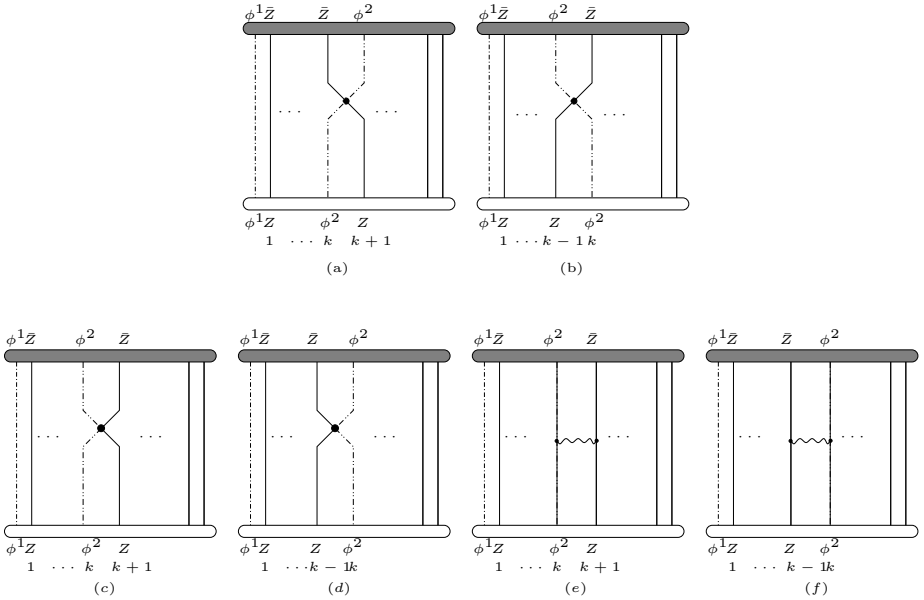


図 6.2: ϕ と Z の間の相互作用: 'momentum' 依存の diagram(上段) と依存しない diagram (下段)

以下では、diagram の結果は見易くするため、$D(x)$ を省略して書く。ここで、

$$D(x) = \frac{1}{8\pi^2}\left(\frac{N}{2}\right)^{J+2}\Delta^{J+2}(x) \tag{6.19}$$

まず、ϕ と Z の間の interaction を見る。このタイプの diagram はさらに 2 種類に分けられる。ひとつは ϕ と Z の位置を変えるもので、もうひとつは変えないものである。位置を変える diagram は、図 6.2 (a), (b) であり、vertex $\mathrm{Tr}[Z\phi^i\bar{Z}\phi^i]$ からくる。$\mathcal{O}(x)$ の中で loop に関与しない ϕ を

Tr の cyclicity を用いて、一番左に持ってきておく。まず、ϕ^1 が loop に加わる場合を考える。図 6.2 (a),(b) からの寄与は、

$$(a) : \lambda e^{\frac{i2\pi(m-n)k}{J} - \frac{i2\pi n}{J}} (\log x^2\Lambda^2 + \text{finite.}) \tag{6.20}$$

$$(b) : \lambda e^{\frac{i2\pi(m-n)k}{J} + \frac{i2\pi n}{J}} (\log x^2\Lambda^2 + \text{finite.}). \tag{6.21}$$

ただし、$k = 0, J$ のときは、ϕ^1 と ϕ^2 が隣接するので、$k = 0$ では (b) は消え、$k = J$ では (a) は消える。0 から J まで k について足し上げると、これらは合計して、

$$\begin{array}{cc} \lambda J(e^{\frac{i2\pi m}{J}} + e^{\frac{i2\pi m}{J}})(\log x^2\Lambda^2 + \text{finite.}) & (n = m) \\ 0 & (n \neq m) \end{array} \tag{6.22}$$

ϕ^2 が loop に加わる場合は、ϕ^1 の場合と比べて、phase が逆符号になることだけが変わる。従って、ϕ^1, ϕ^2 合わせた寄与は (6.22) を 2 倍したものである。
ϕ の位置を変えない diagram は、図 6.2 (c), (d), (e), (f) であり、これらの寄与は、4 点 vertex からは、

$$(c) : -\lambda e^{\frac{i2\pi(m-n)k}{J}} (\log x^2\Lambda^2 + \text{finite.}), \tag{6.23}$$

gluon exchange からは、

$$(d) : \lambda e^{\frac{i2\pi(m-n)k}{J}} (\log x^2\Lambda^2 + \text{finite.}), \tag{6.24}$$

となり、2 つの寄与は打ち消しあう。(e), (f) も打ち消し合う。これは、ϕ^2 が loop に入る場合も同様である。従って、図 6.2 (c) - (f) からの寄与は m,n に依らず、0 である。

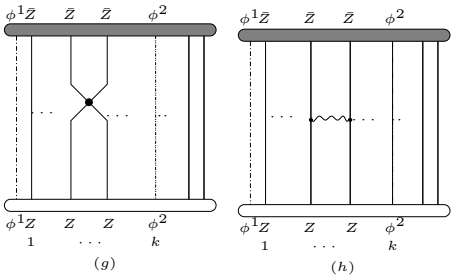


図 6.3: ZZ 同士の相互作用

次に、Z 同士の interaction の diagram 図 6.3 を考える。これらの diagram からの寄与は、今度は打ち消し合わずに強めあい、

$$(g) + (h) : \lambda e^{\frac{i2\pi(m-n)k}{J}} (\log x^2\Lambda^2 + \text{finite.}). \tag{6.25}$$

k を固定したとき、隣接する Z の組は J-2 通りある。ただし、$k = 0, J$ のときは ϕ 同士が隣接しているため、隣接する Z の組は $J - 1$ 通りである。このことを考慮して、k について足し合わせると、

$$\begin{array}{cc} ((J-2)(J-1) + 2(J-1))\lambda(\log x^2\Lambda^2 + \text{finite.}) & (n = m) \\ (-(J-2) + 2(J-1))\lambda(\log x^2\Lambda^2 + \text{finite.}) & (n \neq m). \end{array} \tag{6.26}$$

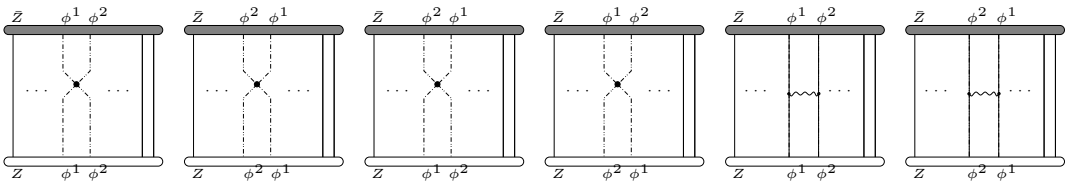


図 6.4: ϕ^1 と ϕ^2 の相互作用

ϕ 同士が相互作用する diagram は図 6.4 であり、これらの寄与は、

$$(-1) + (+2) + (+1)\lambda(\log x^2\Lambda^2 + \text{finite.}). \tag{6.27}$$

最後に、propagator への補正の diagram 図 6.5 である。これらの寄与は、(6.17) より、

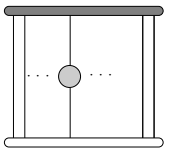


図 6.5: propagator への補正

$$-\lambda e^{\frac{i2\pi(m-n)k}{J}}(\log x^2\Lambda^2 + \text{finite.}). \tag{6.28}$$

$\mathcal{O}(x)$ の場の数は $J+2$ 個であることを考慮しつつ、k についての和をとると、

$$\begin{array}{c} -(J+2)(J+1)(\log x^2\Lambda^2 + \text{finite.}) \quad (n=m) \\ -(J+2)(\log x^2\Lambda^2 + \text{finite.}) \qquad (n\neq m). \end{array} \tag{6.29}$$

以上の結果 (6.22), (6.26), (6.27), (6.29) を足し合わせて、planar, 1-loop までの 2 点関数が求まる。

$$\langle 0|\mathcal{O}^J_{12,m}(x)\bar{\mathcal{O}}^J_{12,n}(0)|0\rangle = \delta_{mn}\Delta^{J+2}\left(1 + \frac{\lambda}{2\pi^2}(\cos(\tfrac{2\pi m}{J}) - 1)\log(x^2\Lambda^2)\right). \tag{6.30}$$

よって、$J \gg 1$ の BMN limit では、anomalous dimension は、

$$\delta\Delta_{\mathcal{O}^J_{12,m}} = \frac{\lambda}{J^2}m^2. \tag{6.31}$$

string theory 側の spectrum と一致する。前に述べたように、摂動展開の展開係数は $\lambda' = \frac{\lambda}{J^2}$ となっている。従って、$\lambda' \ll 1$ で摂動展開は意味をなすであろう。上記 2 点関数は添字 m, n に関して対角化されており、planar, 1-loop level では BMN operator 同士は mixing を起こしていない。

planar level での λ' に関する higher order の計算もなされており、string spectrum との一致が確認されている。[22] では 2-loop の計算が行われている。さらに、[23] では λ' の all order で string spectrum を完全に再現することが確かめられている。

6.4 Torus Level での計算

それでは、genus 展開を torus level まで含めてみよう [24, 25]。ここでは、話を見易く単純にするために、次の operator を考えることにする。

$$\mathcal{O}_n^J = \frac{1}{\sqrt{JN^{J+2}}} \sum_{l=0}^{J} e^{\frac{i2\pi nl}{J}} \mathrm{Tr}[\phi Z^l \psi Z^{J-l}] \tag{6.32}$$

$$\phi = \frac{\phi^1 + i\phi^2}{\sqrt{2}} \qquad \psi = \frac{\phi^3 + i\phi^4}{\sqrt{2}} \tag{6.33}$$

複素 scalar 場 ϕ, ψ, Z は $\mathcal{N} = 1$ の言葉で $\mathcal{N} = 4$ を書いたときにでてくる 3 つの chiral superfield の lowest component である。

6.4.1 Tree Level, Torus Level の計算

まず、BMN limit での higher genus の diagram の様子を探るために、BPS operator $\mathcal{O}(x)$ (5.9) の 2 点関数を計算してみる。planar level では、

$$\langle \mathcal{O}^J(x) \bar{\mathcal{O}}^J(0) \rangle_{\text{free, planar}} = \frac{1}{(4\pi^2 x^2)^J}. \tag{6.34}$$

torus diagram は、torus 上には書けるが sphere 上には書けないような diagram である。

そのような diagram を考えるために、まず periodic square で考えよう。single trace operator を 円で表わし、$\mathcal{O}$ は白色、$\bar{\mathcal{O}}$ は灰色で円の中を塗りつぶして表わす。torus diagram は図 6.6 上段のように、J 個の propagator を 3 つあるいは 4 つの束に分けたものであることが分かる。より見易い形に図 6.6 下段のように diagram を書くことができる。3 つあるいは 4 つの束への分け方の場合の数は、

$$\binom{J}{3} + \binom{J}{4} = \binom{J+1}{4} \sim \frac{J^4}{4!} \qquad (J \gg 1) \tag{6.35}$$

そして、縮約の仕方は cyclic permutation の数 J だけある。各々の diagram の寄与は free diagram の diagram の寄与よりに $\frac{1}{N^2}$ を掛けたものである。これらを合わせると、

$$\langle \mathcal{O}^J(x) \bar{\mathcal{O}}^J(0) \rangle_{\text{free, torus}} = \frac{J^4}{4! N^2} \frac{1}{(4\pi^2 x^2)^J} \tag{6.36}$$

よって、genus counting parameter は $g_2^2 = \frac{J^4}{N^2}$ であることが分かる。つまり、個々の diagram の寄与は $\frac{1}{N^2}$ の factor で抑えられるが、それらの個数が J^4 の order だけあるので、BMN limit $J \sim \sqrt{N} \to \infty$ では全体として有限の寄与を与えるのである。それでは、free SYM で BMN operator $\mathcal{O}_n^J$ の 2 点関数の torus diagram の計算をしよう。planar level では、

$$\langle \mathcal{O}_m^J(x) \bar{\mathcal{O}}_n^J(x) \rangle_{\text{free, planar}} = \frac{\delta_{mn}}{(4\pi^2 x^2)^{J+2}} \tag{6.37}$$

torus を考える場合、$\mathcal{O}$ の場合とほとんど同じであるが、J を $J+2$ にして、diagram の propagator のうち、1 つを ϕ の propagator に他の 1 つを ψ の propagator に変え、残りは Z の

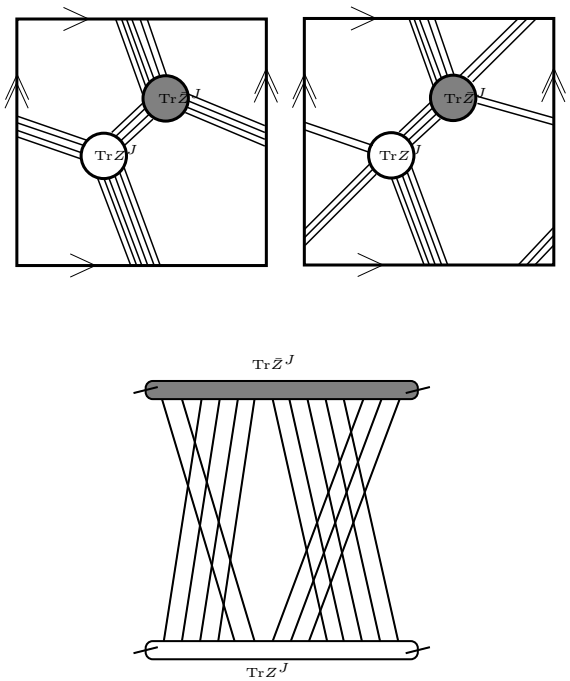


図 6.6: tree level の torus diagram

propagator のままにした diagram を考えればよい。ϕ と ψ の propagator がどこにあるかによって、relative phase が掛かってくる。diagram の記法として、図 6.7 を用いる。ϕ が常に一番左にくるようにしておく。あとは、ψ をどこに置くかを決めればよい。ψ が J_1 にあり、ϕ との間に L_1 個の Z が挟まれているときには、$e^{\frac{2\pi i L_1(m-n)}{J}}$ の phase がかかる。ψ が J_5 にあり、J_5 の中で ϕ の図 6.7 でみて右から L_5 番目にあるときには、$e^{\frac{-2\pi i L_5(m-n)}{J}}$ がかかる。J_2 の左から L_2 番目にある場合には、$e^{2\pi i\frac{(J_1+L_2)m-(J_1+J_4+J_3+L_2)n}{J}}$ がかかる。J_3 の左から L_3 番目にあるときは、$e^{2\pi i\frac{(J_1+J_2+L_3)m-(J_1+J_4+L_3)n}{J}}$ がかかり、J_4 の左から L_4 番目にある場合は、$e^{2\pi i\frac{(J_1+J_2+J_3+L_4)m-(J_1+L_4)n}{J}}$ の phase がかかる。これらの phase factor をそれぞれ $1 \le L_i \le J_i$ で和をとり、さらに全てを足し合わせて、最後に $J_1+J_2+J_3+J_4+J_5 = J+1$, $J_1, J_5 \ge 0$, $J_2, J_3, J_4 \ge 1$ の条件付きで、J_i の和をとる。

$$\langle \mathcal{O}_m^J(x)\bar{\mathcal{O}}_n^J(0)\rangle = \sum_{\substack{J_1+\cdots+J_5=J+1 \\ J_1,J_5\ge 0 \\ J_2,J_3,J-4\ge 1}} \Bigg(\sum_{L_1=1}^{J_1} e^{2\pi i\frac{(m-n)L_1}{J}} + \sum_{L_5=1}^{J_5} e^{2\pi i\frac{-(m-n)L_5}{J}} + \sum_{L_2=1}^{J_2} e^{2\pi i\frac{J_1 m-(J_1+J_4+J_3)n+(m-n)L_2}{J}} + \sum_{L_3=1}^{J_3} e^{2\pi i\frac{(m-n)J_1+J_2 m-J_4 n+(m-n)L_3}{J}} + \sum_{L_4=1}^{J_4} e^{2\pi i\frac{(m-n)J_1+J_2 m+J_3 m+(m-n)L_4}{J}} \Bigg) \times \frac{1}{JN^2}\frac{1}{(4\pi x^2)^{J+2}} \tag{6.38}$$

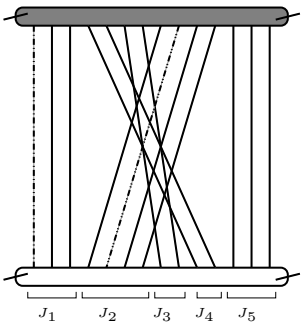


図 6.7: BMN operator の free, torus diagram

$j_i = \frac{J_i}{J}$, $L_i = \frac{L_i}{J}$ とおき、$J \sim \sqrt{N}$, J_i が大きいとして和を積分にすると、$\frac{1}{JN^2}\frac{1}{(4\pi x^2)^{J+2}}$ の前の係数は、

$$
\begin{aligned}
J^5 A_{mn} \equiv J^5 \int_0^1 dj_1 \cdots dj_5 \delta(j_1 + \cdots j_5 - 1) \\
\left(\int_0^{j_1} dl_1 e^{2\pi i(m-n)l_1} + \int_0^{j_5} dl_5 e^{-2\pi i(m-n)l_5} + e^{2\pi((m-n)j_1 - nj_4 - nJ_3)} \int_0^{j_2} dl_2 e^{2\pi i(m-n)l_2} \right. \\
\left. + e^{2\pi i((m-n)j_1 + mj_2 - nj_4)} \int_0^{j_3} dl_3 e^{2\pi i(m-n)l_3} + e^{2\pi i((m-n)j_1 + mj_2 + mj_3)} \int_0^{j_4} dl_4 e^{2\pi i(m-n)l_4} \right)
\end{aligned}
\tag{6.39}
$$

まず、j_5 積分を δ 関数を用いて行い、

$$
\int_{\substack{0 \le j_1 + \cdots + j_4 \le 1 \\ 0 \le j_i \le 1}} dj_1 \cdots dj_4 = \int_0^1 dj_1 \int_0^{1-j_1} dj_2 \int_0^{1-j_1-j_2} dj_3 \int_0^{1-j_1-j_2-j_3} dj_4 \tag{6.40}
$$

を用いて計算すると、

$$
A_{mn} = \begin{cases}
\frac{1}{24}, & (m = n = 0), \\
\frac{1}{60} - \frac{1}{24\pi^2 m^2} + \frac{7}{16\pi^4 m^4}, & (m = n \neq 0), \\
\frac{1}{48\pi^2 m^2} + \frac{35}{128\pi^4 m^4}, & (m = -n \neq 0), \\
0, & (m = 0, n \neq 0 \text{ or } n = 0, m \neq 0), \\
\frac{1}{4\pi^2 (m-n)^2} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{\pi^2 m^2} + \frac{1}{\pi^2 n^2} - \frac{3}{2\pi^2 mn} - \frac{1}{2\pi^2 (m-n)^2} \right), & (others),
\end{cases}
\tag{6.41}
$$

以上から、free SYM, torus level での 2 点関数は、

$$
\langle \mathcal{O}_m^J(x) \bar{\mathcal{O}}_n^J(0) \rangle_{\text{free, torus}} = \frac{g_2^2 A_{mn}}{(4\pi^2 x^2)^{J+2}}, \tag{6.42}
$$

と求まった。ここで分かるように、BMN operator でも genus counting constant は $g_2^2 = \frac{J^4}{N^2}$ となることには変わりがない。また、planar, 1-loop では BMN operator 同士は mixing を起こしていなかったが、tourus diagram では free theory の段階ですでに BMN operator 同士で mixing を起こしていることが分かる。

6.5 Torus, 1-Loop での Anomalous Dimension

さてこの節では、torus,1-loop での BMN operator の 2 点関数を計算する。実は計算をより単純にしてくれる次の事実が存在する。BMN operator の 2 点関数では、1-loop では genus 展開の all order で、4 点 vertex の D-term, gluon exchange そして self energy の寄与は打ち消しあう。これは、chiral primary operator の 2 点関数が 1-loop レベルでは量子補正を受けないことを示す議論 [26] を少し拡張したものである。従って、4 点 vertex の F-term だけを考えればよい。Euclidean の作用では F-term の形は、

$$V_{\rm F} = 4g_{\rm YM}^2 {\rm Tr}([Z,\phi][\bar{\phi},\bar{Z}] + [Z,\psi][\bar{\psi},\bar{Z}] + [\phi,\psi][\bar{\psi},\bar{\phi}]). \tag{6.43}$$

4 点 vertex による 1-loop, torus diagram には interaction point を経由する loop が 2 つある。ひとつは、$\mathcal{O}(x)$ から出て interaction point y を経て $\mathcal{O}(x)$ に戻るもの、もうひとつは $\bar{\mathcal{O}}(0)$ から出て interaction point を経由して $\bar{\mathcal{O}}(x)$ に戻るものである。これらの loop の torus の 2 つの cycle への巻き付き方によって、diagram は分類できる。2 つの loop が cycle へ巻き付かない、1 つだけが巻き付く、2 つが同じ cycle へ巻き付く、2 つが異なる cycle へ巻き付く場合の 4 通りがある。最後の種類の diagram は F-term vertex によっては実現できない。他のものは存在して、それぞれ、6.8 に挙げるような形をしている。この形に由来して 1 番目のものを nearest neighbor diagram,

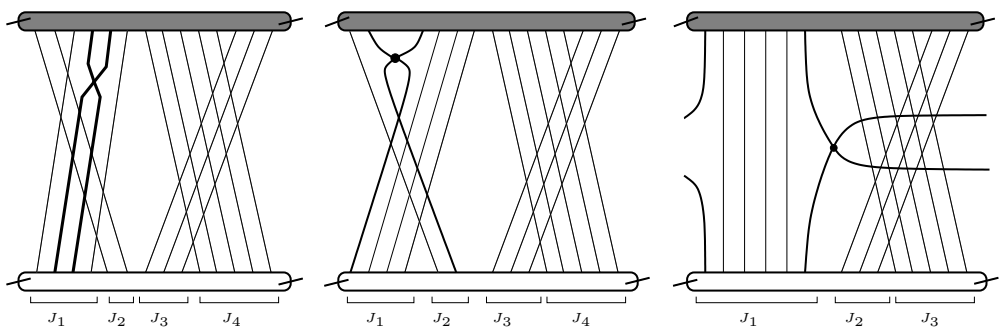


図 6.8: 1-loop, torus diagram 左から、巻き付きがない diagram, 1 つだけ巻き付く diagram, 2 つが同じ cycle に巻き付く diagram

2 番目のものを semi-nearest neighbor diagram, 3 番目のものを non-nearest neighbor diagram と呼ぶ。これらを順に評価していこう。

6.5.1 Nearest Neighbor Diagram

この diagram は interaction point につながる propagator が同じ束の中に入っているものである。相互作用する場は隣接している。従って、ϕ, ψ が相互作用する場合これらを入れ替えても relative factor は出ないので、operator の中では ϕ と ψ に関して対称になる。一方、F-term で ϕ と ψ をつなげる vertex は ϕ と ψ に対して反対称で入っているので、ϕ, ψ 間で相互作用している diagram は消える。Z と ϕ の間で相互作用している場合を考えよう。vertex は、6.9 である。考えている diagram (図 6.8 の一番左のもの) の相互作用 vertex が図 6.9 のどれであるかによっ

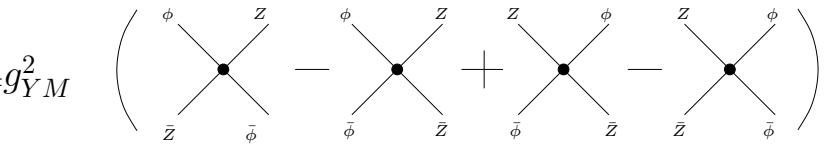


図 6.9: F-term vertex

て、diagram から 4 つの diagram が得られる。これら 4 つの diagram を合わせた全体の寄与は、free diagram (vertex を取り除き、左側の propagator を ϕ の propagator としたもの) に factor

$$\lambda'(-4)(1-e^{\frac{2\pi in}{J}})(1-e^{\frac{-2\pi im}{J}})\frac{\log(\Lambda^2x^2)}{32\pi^2}\sim -e^{i\pi\frac{(n-m)}{J}}\frac{\lambda' nm}{2J^2}\log(\Lambda^2x^2)\qquad (J\sim\sqrt{N}\to\infty) \tag{6.44}$$

を掛けたものである。残りの ψ ,Z 間の相互作用による diagram からの寄与は、$\mathcal{O}$ の ϕ と ψ の位置間の位相の関係から、(6.44) からの寄与の複素共役を取ったものである。従って、nearest neighbor diagram からの寄与を足し合わせると

$$-\lambda' g_2^2 A_{mn} mn \frac{\log(\Lambda^2x^2)}{(4\pi^2x^2)^{J+2}}. \tag{6.45}$$

6.5.2 Semi-Nearest Neighbor Diagram

この diagram ではある propagator の束の左端の propagator とその隣の束の右端の propagator が vertex につながっている。このとき、相互作用する場は $\mathcal{O}$ か $\bar{\mathcal{O}}$ のどちらか一方の中で隣接している。従って、nearest neighbor のときと同じように、ϕ, ψ は operator の中では対称になり、F-term の反対称性により、ϕ, ψ が相互作用する diagram の寄与はゼロになる。また、ψ, Z 間の相互作用からの寄与が、ϕ, Z 間の相互作用の複素共役になることも nearest neighbor のときと同様である。よって、ϕ, Z 間の相互作用だけを考えればよい。
まず、trace の cyclic permutation を用いて相互作用に関与する propagator を左端に持ってくる。6.10 の左側のように J_1 の左端と J_2 の右端が相互作用する場合と、右側のように J_1 の左端

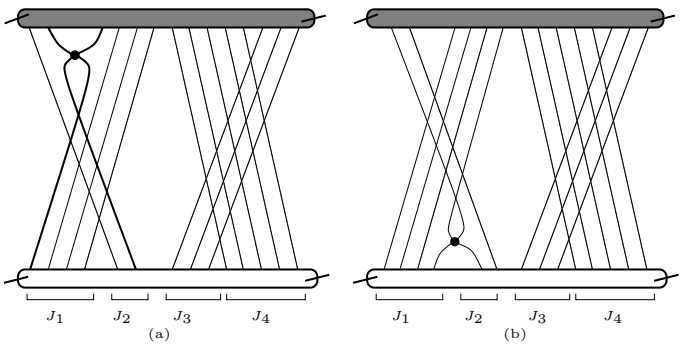


図 6.10: Semi nearest neighbor diagram

と J_2 の右端が相互作用する場合の 2 通りがある。まず、(a) を考える。nearest neighbor のとき

と同様に、(a) の diagram で 4 つの diagram を表わしているとする。位置が定まっていないのは ψ だけであり、位相に注意して ψ の位置を足し上げればよい。

ψ が J_1 の束の K_1 にいるときの relative phase は、4 つの diagram からの寄与を足し合わせて、

$$(1-e^{-2\pi i\frac{n}{J}})e^{2\pi i\frac{(m-n)K_1}{J}}(e^{2\pi i\frac{m(J_3+J_4)}{J}}-1). \tag{6.46}$$

ψ が J_2 の束の K_2 にあるときは、

$$(1-e^{-2\pi i\frac{n}{J}})e^{2\pi i\frac{m(J_1+K_2)-n(J_1+J_4+J_3+K_2)}{J}}(e^{2\pi i\frac{m(J_3+J_4)}{J}}-1). \tag{6.47}$$

ψ が J_3 の束の K_3 にいるときには、

$$(1-e^{-2\pi i\frac{n}{J}})e^{2\pi i\frac{mK_3-n(J_1+J_4+K_3)}{J}}(1-e^{2\pi i\frac{m(J_1+J_2)}{J}}). \tag{6.48}$$

ψ が J_4 の束の K_4 にあるときは、

$$(1-e^{-2\pi i\frac{n}{J}})e^{2\pi i\frac{m(J_3+K_4)-n(J_1+K_4)}{J}}(1-e^{2\pi i\frac{m(J_1+J_2)}{J}}). \tag{6.49}$$

これで全ての phase が求まったので、free SYM での 2 点関数の torus diagram のときのように、$J\to\infty$ で $j_i=\frac{J_i}{J}$, $k_i=\frac{K_i}{J}$ とおいて、K_i に関する和を $\int_0^{j_i}dk_i$ に、J_i に関する和を $\int_0^1 dj_1\cdots dj_4\delta(j_1+\cdots+j_4-1)$ で置き換えて計算する。計算は、まず J_i の束に由来する項をそれぞれ k_i で積分して、それらを足し合わせて、j_1, j_2, j_3, j_4 の積分をすればよい。結果は、

$$-i(1-e^{-2\pi i\frac{n}{J}})\frac{\left(\frac{3(m-2n)(2m-n)(m^2-mn+n^2)}{m^2n^2}+2(m-n)^2\pi^2\right)}{12(m-n)^3\pi^3}, \tag{6.50}$$

となる。

diagram (b) からの寄与は、(a) で $m\leftrightarrow n$ としたものである。ψ, Z が相互作用する diagram からの寄与も合わせて、Semi-nearest neighbor diagram からの寄与は、

$$-\lambda' g_2^2 A_{mn}(m-n)^2\frac{\log(\Lambda^2x^2)}{(4\pi^2x^2)^{J+2}}. \tag{6.51}$$

この Semi-nearest neighbor diagram の数は nearest neighbor diagram と比べて、factor $O(\frac{1}{J})$ だけ少ないが、vertex を経由する loop のうち 1 つが、cycle に巻き付き $O(J)$ 個の場を飛び越す。そのため、$O(|1-e^{2\pi i\frac{1}{J}}|)=O(\frac{1}{J})$ の factor が Nearest neighbor に比べて 1 つ少ない。つまり、Nearest neighbor はこの factor により、$O(\frac{1}{J^2})$ で suppress されるが、Semi-nearest neighbor には $O(\frac{1}{J})$ しか掛からない。よって、結果的に Nearest neighbor と Semi-nearest neighbor は同じオーダーの寄与を与える。

6.5.3 Non-Nearest Neighbor Diagram

最後に、Non-nearest neighbor diagram を考える。図 6.8 の一番右側に示されているように、この diagram は同じ propagator の束の両端が相互作用に関わる。この diagram は propagator を 4 つの束ではなくで 3 つの束に分けなくては描くことができない。ϕ と ψ が相互作用に関わる

diagram は、ψ が固定されるので、束の中での ψ の位置の足し合わせがなく、diagram の数が ϕ と Z の相互作用の場合に比べて factor $O(\frac{1}{J})$ 少ない。従って、無視してよい。ψ と Z の相互作用による寄与は、前と同様 ϕ と Z によるものの複素共役である。

図 6.8 のように vertex に関わる propagator を J_1 の両端に持ってくる。そして、ψ の位置に関する足し合わせをする。

ψ が J_1 の k 番目にあるときの 4 つの diagram の phase factor の和は、

$$e^{-2\pi i\frac{(m-n)K_1}{J}}(1-e^{-2\pi i\frac{n(J_2+J_3+1)}{J}})(e^{2\pi i\frac{m(J_2+J_3+1)}{J}}-1) \tag{6.52}$$

ψ が J_2 の K_2 番目にいるときには、

$$e^{2\pi i\frac{(m-n)K_2-nJ_3}{J}}(1-e^{-2\pi i\frac{nJ_1}{J}})(e^{2\pi i\frac{mJ_1}{J}}-1) \tag{6.53}$$

ψ が J_3 の K_3 番目にいるときには、

$$e^{2\pi i\frac{m(K_3+J_2)-nK_3}{J}}(1-e^{-2\pi i\frac{nJ_1}{J}})(e^{2\pi i\frac{mJ_1}{J}}-1) \tag{6.54}$$

以上を前と同様に $J\to\infty$ として積分する。ψ と Z の相互作用から得られる寄与も合わせて、2 点関数への補正

$$-\lambda' g_2^2\frac{B_{mn}}{4\pi^2}\frac{\log(\Lambda^2x^2)}{(4\pi^2x^2)^{J+2}}, \tag{6.55}$$

$$B_{mn}=\begin{cases}0, & n=0 \text{ or } m=0,\\ \frac{1}{3}+\frac{5}{2\pi^2m^2}, & m=n\neq 0,\\ -\frac{15}{8\pi^2m^2}, & m=-n\neq 0,\\ \frac{3}{2\pi^2mn}+\frac{1}{2\pi^2(m-n)^2}, & \text{others.}\end{cases} \tag{6.56}$$

を得る。

Non-nearest neighbor diagram では 4 つではなく 3 つに propagator を分けるため、diagram の数は Semi-nearest neighbor よりも factor $O(\frac{1}{J})$ だけ少ない。しかし、vertex を経由する loop が 2 つとも torus の cycle に巻き付き、相互作用している場が $\mathcal{O}(x)$, $\bar{\mathcal{O}}(0)$ のどちらの operator の中でも $O(J)$ の飛び越えをする。従って、diagram が前述の factor で suppress されない。よって、Non-nearest neighbor diagram 全体としての寄与は、Nearest, Semi-nearest neighbor と同じオーダーである。

最後に、今までに得た 1-loop, torus レベルまでの 2 点関数をまとめておく。

$$\langle\bar{\mathcal{O}}_m^J(0)\mathcal{O}_n^J(x)\rangle=\left((\delta_{mn}+g_2^2A_{mn})(1-(m^2-mn+n^2)\lambda'\log\Lambda^2x^2)-g_2^2\lambda'\frac{B_{mn}}{4\pi^2}\log\Lambda^2x^2\right)\frac{1}{(4\pi^2x^2)^{J+2}}. \tag{6.57}$$

6.6 Single Trace Operator と Double Trace Operator の間の Mixing

ここまでの計算より、torus level では BMN operator 同士は operator mixing を起こしており、anomalous dimension を得るにはこの mixing を解く必要があることが分かった。さらに、BMN

operator は double trace operator とも mixing を起こしており [27]、この mixing も解かなければならない [28, 29, 30]。この節ではこの mixing を見る。BMN operator $\mathcal{O}_m^J(x)$ と mixing を起こす可能性のある double trace operator は : $\mathcal{O}_p^{J_1}\mathcal{O}^{J-J_1}$: (x), : $\mathcal{O}_\phi\mathcal{O}_\psi$: (x) だが、後者とは mixing を起こさない (appendix 参照) ので前者だけを考える。

$$\mathcal{O}_{py}^J(x) \equiv : \mathcal{O}_p^{J_1}\mathcal{O}^{J-J_1} : (x) \qquad (y = \tfrac{J_1}{J}), \tag{6.58}$$

と書くことにする。$\mathcal{O}_m^J$ と $\mathcal{O}_{py}^J$ の間の mixing は、この後すぐに見るようにオーダーが g_2 である。このことから、これらの operator の間の mixing を解いた際の $O(g_2^k)$ の補正は BMN operator の anomalous dimension には $O(g_2^{k+1})$ で効いてくる。従って、1-loop, torus レベル $\lambda' g_2^2$ の anomalous dimension を得るためには、BMN operator と double trace operator の間の mixing は、オーダー g_2 のレベルで解けば十分である。つまり、ouble trace operator が関わる 2 点関数は 1-loop, planar レベルまで求めればよい。一方、BMN operator あるいは double trace operator 同士の mixing は、$O(g_2^2)$ である。このことから、まず BMN operator と double trace operator の間の mixing を $O(g_2)$ で解いてしまい、その後に BMN operator 同士の mixing を $O(g_2^2)$ で解くことにする。

1-loop, planar レベルまでの 2 点関数を実際に計算すると、

$$\langle \bar{\mathcal{O}}_m^J(0)\mathcal{O}_n^J(x)\rangle = \delta_{mn}(1 - \lambda' m^2 \log(\Lambda^2 x^2)), \tag{6.59}$$

$$\langle \bar{\mathcal{O}}_m^J(0)\mathcal{O}_{py}^J(x)\rangle = g_2 C_{m,py}(1 - \lambda'(a_{mk} + b_{mk}) \log(\Lambda^2 x^2)). \tag{6.60}$$

$$\langle \bar{\mathcal{O}}_{py}^J(0)\mathcal{O}_{qz}^J(x)\rangle = \delta_{pq}\delta_{yz}(1 - \lambda' k^2 \log(\Lambda^2 x^2)) \tag{6.61}$$

ただし、

$$C_{m,py} = \sqrt{\frac{1-y}{Jy}}\frac{\sin^2(m\pi y)}{\pi^2(m-k)^2}, \quad k = \frac{p}{y}, \quad a_{mk} = k^2, \quad b_{mk} = m(m-k). \tag{6.62}$$

である。実は、single trace operator と double trace operator の間の 2 点関数は single trace operator の 3 点関数 [30, 31, 32] から求めることができる。これらの定数は 3 点関数の言葉で書かれたものである。

さて、2 点関数が対角化されるように operator を再定義しよう。ここで、対称性について注意しておかなければならない。R 対称性 $SO(6)$ の vector 表現のスカラー場 $\phi^i(x)$ $(i = 1, \cdots, 4)$ を挿入した BMN operator は、$SO(6)$ の部分群 $SO(4)$ の表現を成す。特に今考えている operator $\mathcal{O}_n^J(x)$ は $SO(4)$ の部分群 $SU(2)$ の $2 \otimes 2 = 1 \oplus 3$ 表現に含まれている。具体的には、

$$\mathcal{O}_m^{\pm J} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathcal{O}_m^J \pm \mathcal{O}_{-m}^J), \tag{6.63}$$

は、$\mathcal{O}_m^{+J}$ が 3 表現に含まれ、$\mathcal{O}_m^{-J}$ は 1 表現である。conformal 対称性と R 対称性は可換なので、R 対称性の異なる表現に属する operator は一般的には異なる conformal dimension を持つ。従って、$\mathcal{O}_m^{+J}$ と $\mathcal{O}_m^{-J}$ は別々に扱われる必要がある。この $\mathcal{O}_m^{\pm J}$ を用いて、eqrefss2, (6.60), (6.61) を書き直しておく。

$$\langle \bar{\mathcal{O}}_m^{\pm J}(0)\mathcal{O}_n^{\pm J}(x)\rangle = \delta_{mn}(1 - \lambda' m^2 \log(\Lambda^2 x^2)), \qquad \langle \bar{\mathcal{O}}_m^{\pm J}(0)\mathcal{O}_n^{\mp J}(x)\rangle = 0, \tag{6.64}$$

$$\langle \bar{\mathcal{O}}_m^{\pm J}(0)\mathcal{O}_{py}^{\pm J}(x)\rangle = g_2 C_{m,py}^{\pm}\left(1 - \lambda'(a_{mk}^{\pm} + b_{mk}^{\pm}) \log(\Lambda^2 x^2)\right), \qquad \langle \bar{\mathcal{O}}_m^{\pm J}(0)\mathcal{O}_{py}^{\mp J}(x)\rangle = 0, \tag{6.65}$$

$$\langle \bar{\mathcal{O}}_{py}^{\pm J}(0)\mathcal{O}_{qz}^{\pm J}(x)\rangle = \delta_{pq}\delta_{yz}(1 - \lambda' k^2 \log(\Lambda^2 x^2)), \qquad \langle \bar{\mathcal{O}}_{py}^{\pm J}(0)\mathcal{O}_{qz}^{\mp J}(x)\rangle = 0. \tag{6.66}$$

表記の簡約のため、double trace operator の index (p, y) を i と書くことにする。また、operator $\mathcal{O}_m^{\pm J}$, $\mathcal{O}_i^{\pm J}$ をまとめて、$\mathcal{O}_A$ $(A = (\pm, m), (\pm, i))$ と書くことにする。

対角化された operator を $\mathcal{O}'^{\pm J}_m$, $\mathcal{O}'^{\pm J}_i$ とする。

$$\mathcal{O}'_A = \mathcal{O}_B S_{BA}. \tag{6.67}$$

planar では operator mixing は起こらなかったので、これらは、$g_2 = 0$ でそれぞれ $\mathcal{O}_m^{\pm J}$, $\mathcal{O}_i^{\pm J}$ になるようにとる。これらの operator の 2 点関数は、

$$\langle \bar{\mathcal{O}}'_A(0)\mathcal{O}'_B(x)\rangle = \frac{N}{(4\pi^2 x^2)^{J+2}}\delta_{AB}\left(1 - \lambda'\gamma_A \log \Lambda^2 x^2\right), \tag{6.68}$$

の形をしている。N は normalization factor であり、$\lambda'\gamma_A$ が anomalous dimension である。

まず、この mixing を g_2 の level で解いてしまうと、

$$\mathcal{O}''^{\pm J}_m = \mathcal{O}^{\pm J}_m + g_2 \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{J_1=0}^{J} C^{\pm}_{m,py}\frac{a^{\pm}_{mk} + b^{\pm}_{mk} - m^2}{m^2 - k^2}\mathcal{O}^{\pm J}_{py} \tag{6.69}$$

$$\mathcal{O}''^{\pm J}_{py} = \mathcal{O}^{\pm J}_{py} - g_2 \sum_{m=0}^{\infty} C^{\pm}_{m,py}\frac{a^{\pm}_{mk} + b^{\pm}_{mk} - k^2}{m^2 - k^2}\mathcal{O}^{\pm J}_{m} \tag{6.70}$$

これらの operator $\mathcal{O}''_A$ は、$O(g_2)$ のオーダーで対角化されている。

6.7 1-Loop, Torus Level での Anomalous Dimension

前節で $O(g_2)$ で BMN operator と double trace operator の間の mixing を解いた。この節では、$\mathcal{O}''_m$ をさらに $O(g_2^2)$ まで対角化する。そして、その対角化された operator の anomalous dimension を得る。

まず、$\mathcal{O}''_A$ の 2 点関数が必要である。まず、$\mathcal{O}''_m$ と $\mathcal{O}''_i$ の間の 2 点関数は、$O(g_2^3)$ である。$\mathcal{O}''_A$ は $O(g_2)$ で対角化されたのだから、この量は $O(g_2^2)$ の値を持つ可能性があるが、今の場合は $\mathcal{O}_m$ 同士あるいは $\mathcal{O}_i$ 同士の mixing が $O(g_2^2)$ であったことために、$O(g_2^3)$ の値となる。従って、$\mathcal{O}''_m$ あるいは $\mathcal{O}''_i$ の組を独立に扱ってしまってよい。ここでは、$\mathcal{O}''_m$ だけを考える。

$\mathcal{O}''_m$ 同士の $O(\lambda' g_2^2)$ までの 2 点関数は、(6.57), (6.65), (6.66), (6.69) から、

$$\langle \bar{\mathcal{O}}''^{\pm J}_m(0)\mathcal{O}''^{\pm J}_n(x)\rangle = \delta_{mn}\left(1 - \lambda' m^2 \log(\Lambda^2 x^2)\right) \tag{6.71}$$

$$+ g_2^2\left((M_{mn} \pm M_{m,-n}) - \lambda'\left(mn(M_{mn} \mp M_{m,-n}) + \frac{1}{4\pi^2}(D_{mn} \pm D_{mn})\right)\log(\Lambda^2 x^2)\right). \tag{6.72}$$

ここで、

$$M_{mn} = M^1_{mn} + M^2_{mn}, \qquad D_{mn} = D^1_{mn} + D^2_{mn}, \tag{6.73}$$

$$M^1_{mn} = A_{mn}, \qquad D^1_{mn} = B_{mn} + 4\pi^2(m-n)^2 A_{mn}, \tag{6.74}$$

$$M^2_{mn} = \begin{cases} -\frac{1}{40} + \frac{1}{12\pi^2 n^2} - \frac{49}{128\pi^4 n^4}, & (n = m \neq 0), \\ -\frac{1}{96\pi^2 n^2} - \frac{35}{256\pi^4 n^4}, & (n = -m \neq 0), \\ -\frac{1}{8\pi^2(m-n)^2} + \frac{3}{16\pi^4(m-n)^4} + \frac{1}{8\pi^4(m-n)^2(m+n)^2} - \frac{3}{16\pi^4 m^2 n^2} - \frac{3}{16\pi^4 mn(m-n)^2}, & (n \neq m), \end{cases} \tag{6.75}$$

$$D^2_{mn} = \begin{cases} -\frac{1}{4} - \frac{45}{32\pi^2 n^2}, & (n = m \text{ or } n = -m), \\ -\frac{1}{2} - \frac{3}{4\pi^2 n^2} - \frac{3}{4\pi^2 m^2} + \frac{3}{8\pi^2(n-m)^2} + \frac{3}{8\pi^2(n+m)^2}, & (n \neq m). \end{cases} \tag{6.76}$$

対角化するには、

$$\mathcal{O}'^{\pm J}_m = \mathcal{O}''^{\pm J}_m + g_2^2 \sum_n T_{mn} \mathcal{O}''^{\pm J}_n, \tag{6.77}$$

とする。ただし、

$$T_{mm} = -\frac{M_{mm}}{2}, \quad T_{m,-m} = -\frac{M_{m,-m}}{2}, \quad T_{mn} = -\frac{mM_{mn}}{m+n} + \frac{D_{mn}}{4\pi^2(m^2-n^2)}. \tag{6.78}$$

この operator の anomalous dimension は、

$$\Delta^{\pm}_m - J - 2 = \lambda' \left(m^2 + \frac{g_2^2}{4\pi^2} (\frac{1}{12} + \frac{35}{32\pi^2 m^2}) \right). \tag{6.79}$$

興味深いことに、$SU(2)$ の異なる既約表現に属する operator の anomalous dimension が一致することが分かった。次節でもっと広い class の operator に関してもこの anomalous dimension の一致が起こることを見る。

以上で、$\mathcal{O}(g_2^2)$ までで dilation operator の固有状態である $\mathcal{O}'_A$ が得られた。ただし、後に分かるように基底 $\mathcal{O}'_A$ は string 側の状態に対応する基底ではない。これは、string 側の基底は $g_2 \neq 0$ では H の固有状態ではないことから明らかであろう。

6.8 より広い Class の BMN Operator の 2 点関数とその Anomalous Dimension

前節までに見てきた BMN operator は、その impurity operator ϕ^i $(i = 1, 2, 3, 4)$ が R 対称性に起因する $SO(4)$ のベクトル表現に属するものであった。ただし、ϕ^1, ϕ^2 等を複素場に組み、その holomorphic な場 ϕ, ψ のみを impurity として入れてきた。前節で見たように、$SO(4)$ を $SO(2) \times SO(2)$ の表現に分解したときに、このような場は片方の $SO(2)$ に対してだけ non-trivial な表現を成す。しかし、BMN operator には anti-holomorphic 場 $\bar{\phi}$, $\bar{\psi}$ を impurity として加えたものも含まれている。この節では、より一般の two impurity BMN operator の 2 点関数と anomalous dimension についてまとめておく [28]。具体的には、任意の ϕ^i を impurity として含む two impurity BMN operator を考える。これらの operator は $SO(4)$ の $\mathbf{4} \times \mathbf{4}$ 表現に属している。従って、この節では ϕ^i $(i = 1, 2, 3, 4)$ を複素 notation で表わすのをやめて、実数場の notation のままで表わす。

6.8.1 $SO(4)$ の既約表現による分解

まず、operator の表示法の notation を書いておく。single trace operator に対しては、

$$\mathcal{O}^J = \frac{1}{\sqrt{JN^J}}\mathrm{Tr}Z^J, \tag{6.80}$$

$$\mathcal{O}_i^J = \frac{1}{\sqrt{N^{J+1}}}\mathrm{Tr}[\psi_i Z^J], \tag{6.81}$$

$$\mathcal{O}_{ij,m}^J = \frac{2^{J+2}}{\sqrt{JN^{J+2}}}\left(\sum_{p=0}^{J} e^{2\pi ipm/J}\mathrm{Tr}[\phi_i Z^p \phi_j Z^{J-p}] - \delta_{ij}\mathrm{Tr}[\bar{Z}Z^{J+1}]\right), \tag{6.82}$$

double trace operator に対しては、

$$\mathcal{T}_{ij}^{J,y} =: \mathcal{O}_i^{y\cdot J}\mathcal{O}_j^{(1-y)\cdot J} :, \tag{6.83}$$

$$\mathcal{T}_{ij,p}^{J,y} =: \mathcal{O}_{ij,p}^{y\cdot J}\mathcal{O}^{(1-y)\cdot J}. \tag{6.84}$$

suffix ij を持つ場は、$SO(4)$ の $\mathbf{4}\times\mathbf{4}$ に属している。前節でも書いたように、anomalous dimension は $SO(4)$ の既約表現ごとで違う値を受ける可能性があるので、これらの operator を traceless 対称表現 $\mathbf{9}$, 反対称表現 $\mathbf{6}$, singlet $\mathbf{1}$ に分解しておこう。

9 表現 :
$$\mathcal{O}_{(ij),m}^J = \frac{1}{2}(\mathcal{O}_{ij,m}^J + \mathcal{O}_{ji,m}^J) - \frac{1}{4}\delta_{ij}\sum_{k=1}^{4}\mathcal{O}_{kk,m}^J, \tag{6.85}$$

6 表現 :
$$\mathcal{O}_{[ij],m}^J = \frac{1}{2}(\mathcal{O}_{ij,m}^J - \mathcal{O}_{ji,m}^J), \tag{6.86}$$

1 表現 :
$$\mathcal{O}_{\mathbf{1},m}^J = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{4}\mathcal{O}_{kk,m}^J. \tag{6.87}$$

ここでは、$\mathcal{O}_{ij,m}^J$ に関してだけ書いたが、他の operator に対しても同様に分解しておく。元の operator の性質 $\mathcal{O}_{ij,m} = -\mathcal{O}_{ji,m}$ からこれらの operator に対しては、

$$\mathcal{O}_{(ij),-m}^J = \mathcal{O}_{(ji),m}^J, \qquad \mathcal{O}_{[ij],-m}^J = -\mathcal{O}_{[ji],m}^J, \qquad \mathcal{O}_{\mathbf{1},-m}^J = \mathcal{O}_{\mathbf{1},m}^J, \tag{6.88}$$

が成り立っている。

6.8.2 $g_2^2\lambda'$ までの 2 点関数

前節では、$SO(4)$ の既約表現によって operator を分類したが、この章では表記の便宜のため[1]に対称 traceless と反対称 operator に関する 2 点関数は元の operator の形で書いておく。つまり、$\mathcal{O}_{ij,m}^J$, $\mathcal{T}_{ij,p}^{J,y}$, $\mathcal{T}_{ij}^{J,y}$ $(i \neq j)$ の間の 2 点関数を書いておく。singlet 表現の operator に関しては再定義された operator の間の 2 点関数を書いておく。

[1]実際には、計算の上でも元の operator で計算した方が簡単である。

6.8.3 9 表現 Operator と 6 表現の Operator の 2 点関数

まず、対称 traceless と反対称表現の operator の 2 点関数をまとめておく。

$$\begin{aligned}\langle\bar{\mathcal{O}}^J_{ij,m},\mathcal{O}^J_{ij,n}\rangle =&\delta_{mn}\left(1-\lambda' m^2\ln(\Lambda^2x^2)\right)\\ &+g_2^2\left(M^1_{mn}-\lambda'(mnM^1_{mn}+\frac{1}{4\pi^2}D^1_{mn})\ln(\Lambda^2x^2)\right)+\mathcal{O}(g_2^4),\end{aligned}\tag{6.89}$$

$$\langle\bar{\mathcal{T}}^{J,y}_{ij}\mathcal{T}^{J,z}_{ij}\rangle=\delta_{yz}+\mathcal{O}(g_2^2),\tag{6.90}$$

$$\langle\bar{\mathcal{T}}^{J,y}_{ij,p}\mathcal{T}^{J,z}_{ij,q}\rangle=\delta_{pq}\delta_{yz}\left(1-\lambda'\frac{p^2}{y^2}\ln(\Lambda^2x^2)\right)+\mathcal{O}(g_2^2),\tag{6.91}$$

$$\langle\bar{\mathcal{T}}^{J,y}_{ij,p}\mathcal{T}^{J,z}_{ij}\rangle=\mathcal{O}(g_2^2),\tag{6.92}$$

$$\langle\bar{\mathcal{O}}^J_{ij,m}\mathcal{T}^{J,y}_{ij,p}\rangle=g_2C_{m,py}\left(1-\lambda'(\frac{p^2}{y^2}-m\frac{p}{y}+m^2)\ln(\Lambda^2x^2)\right)+\mathcal{O}(g_2^3),\tag{6.93}$$

$$\langle\bar{\mathcal{O}}^J_{ij,m}\mathcal{T}^{J,y}_{ij}\rangle=g_2C_{m,y}\left(1-\lambda' m^2\ln(\Lambda^2x^2)\right)+\mathcal{O}(g_2^3).\tag{6.94}$$

ただし、$C_{m,py}$ は (6.62) であり、$C_{m,y}$ は、

$$C_{m,y}=\delta_{m0}\frac{y}{\sqrt{J}}-\frac{1}{\sqrt{J}\pi^2}\frac{\sin^2(\pi my)}{m^2},\tag{6.95}$$

である。前と同様にこれらの mixing を $\mathcal{O}(g_2^2)$ までで解くために、operator の再定義をしよう。まず、$\mathcal{O}(g_2)$ までの精度で mixing を起こさないように再定義された operator $\mathcal{O}''$, $\mathcal{T}''$ は、

$$\mathcal{O}''^J_{ij,m}=\mathcal{O}^J_{ij,m}-\sum_{p,y}g_2C_{m,py}\frac{p}{p+ny}\mathcal{T}^{J,y}_{ij,p},\tag{6.96}$$

$$\mathcal{T}''^{J,y}_{ij,p}=\mathcal{T}^{J,y}_{ij,p}-\sum_{m}g_2C_{m,py}\frac{my}{p+my}\mathcal{O}^J_{ij,m},\tag{6.97}$$

$$\mathcal{T}''^{J,y}_{ij}=\mathcal{T}^{J,y}_{ij}-\sum_{m}g_2C_{m,y}\mathcal{O}^J_{ij,m},\tag{6.98}$$

これらの operator の線形結合をとって、$\mathcal{O}(g_2^2)$ で mixing を起こさないようにした single trace operator $\mathcal{O}'$ は、

$$\mathcal{O}'^J_{ij,m}=\mathcal{O}''^J_{ij,m}+g_2^2\sum_n T_{mn}\mathcal{O}''^J_{ij,n},\tag{6.99}$$

である。ただし、ここで mixing を起こさないといっても $m\neq n$ の operator の間ではなく、$|m|\neq|n|$ の operator の間で mixing を起こさないという意味である。つまり、$m=-n$ の場合にはまだ mixing を起こす。これは前で述べたように、dilation operator の本当の固有 operator は $\mathcal{O}^J_{ij,m}$ に対応するものではなく、$\mathcal{O}^J_{(ij),m}$, $\mathcal{O}^J_{[ij],m}$ に対応するものだからである。このことから、$\mathcal{O}'^J_{ij,m}$ は、

$$\langle\bar{\mathcal{O}}'^J_{ij,m}\mathcal{O}'^J_{ij,n}\rangle=\delta_{mn}-\left(\delta_{mn}\frac{\gamma^{\mathbf{9}}_m+\gamma^{\mathbf{6}}_m}{2}+\delta_{m,-n}\frac{\gamma^{\mathbf{9}}_m-\gamma^{\mathbf{6}}_m}{2}\right)\ln(\Lambda^2x^2),\tag{6.100}$$

となるように取られている。$\gamma_m^{\mathbf{9}}$, $\gamma_m^{\mathbf{6}}$ はそれぞれ $\mathcal{O}'^J_{(ij),m}$、$\mathcal{O}'^J_{[ij],m}$ の anomalous dimension である。ここで、

$$\langle \bar{\mathcal{O}}'^J_{ij,m}\mathcal{O}^J_{ij,-m}\rangle = \frac{\gamma_m^{\mathbf{9}}-\gamma_m^{\mathbf{6}}}{2}\ln(\Lambda^2x^2) = g_2^2\lambda'\left(2n^2M_{m,-m}-\frac{1}{4\pi^2}D_{m,-m}\right)\ln(\Lambda^2x^2)=0, \quad (6.101)$$

となる。よって前節で述べたように、$\gamma_m^{\mathbf{9}}=\gamma_m^{\mathbf{6}}$ となり、異なる既約表現に属する operator の間で anomalous dimension が縮退していることが分かる。実は、後で分かるように $\gamma_m^{\mathbf{1}}$ もこれらの値と一致しており、3 つの表現の anomalous dimension は一致することが分かる。この現象は、supersymmetry に起因するものである。

anomalous dimension は前節で求めたとおり、

$$\gamma_m^{\mathbf{9}}=\gamma_m^{\mathbf{6}}=J+2+\lambda'\left(m^2+\frac{g_2^2}{4\pi^2}\left(\frac{1}{12}+\frac{35}{32\pi^2m^2}\right)\right), \quad (6.102)$$

となる。

6.8.4 1 表現 Operator の 2 点関数

これらの operator の 2 点関数は、

$$\begin{aligned}
\langle \bar{\mathcal{O}}^J_{\mathbf{1},\mathbf{m}}\mathcal{O}^J_{1,n}\rangle =& (\delta_{mn}+\delta_{m,-n})\left(1-\lambda' m^2\ln(\Lambda^2x^2)\right) && (6.103)\\
&+ g_2^2\left(M^1_{mn}+M^1_{m,-n}-\lambda' mn(M^1_{mn}-M^1_{m,-n}\ln(\Lambda^2x^2))\right)+\mathcal{O}(g_2^4), && (6.104)\\
\langle \bar{\mathcal{T}}^{J,y}_{\mathbf{1},p}\mathcal{T}^{J,z}_{\mathbf{1},q}\rangle =& \delta_{yz}(\delta_{pq}+\delta_{p,-q})\left(1-\lambda'\frac{p^2}{y^2}\ln(\Lambda^2x^2)\right)\mathcal{O}(g_2^2), && (6.105)\\
\langle \bar{\mathcal{T}}^{j,y}_{\mathbf{1}}\mathcal{T}^{J,z}_{\mathbf{1}}\rangle =& \delta_{yz}\delta_{y,1-z}+\mathcal{O}(g_2^2), && (6.106)\\
\langle \bar{\mathcal{T}}^{J,y}_{\mathbf{1},p}\bar{\mathcal{O}}^J_{\mathbf{1},m}g_2C_{m,py}\left(1-\lambda'\frac{p}{y}m\ln(\Lambda^2x^2)\right)&+g_2C_{-m,py}\left(1+\lambda'\frac{p}{y}m\ln(\Lambda^2x^2)\right)+\mathcal{O}(g_2^3), && (6.107)\\
\langle \bar{\mathcal{T}}^{J,y}_{\mathbf{1}}\mathcal{O}^J_{\mathbf{1},m}\rangle =& 2g_2C_{m,y}+\mathcal{O}(g_2^3), && (6.108)\\
\bar{\mathcal{T}}^{J,y}_{\mathbf{1}}\mathcal{T}^{J,z}_{\mathbf{1}p}\rangle =& \mathcal{O}(g_2^2), && (6.109)
\end{aligned}$$

今までと同様に g_2 レベルで mixing を解くと、

$$\mathcal{O}''^J_{\mathbf{1},m}=\mathcal{O}^J_{\mathbf{1},m}-\sum_{p,y}g_2C_{m,py}\frac{m}{\frac{p}{y}+m}\mathcal{T}^{J,y}_{\mathbf{1},p}, \quad (6.110)$$

$$\mathcal{T}''^{J,y}_{\mathbf{1},p}=\mathcal{T}^{J,y}_{\mathbf{1},p}-\sum_{m}g_2C_{m,py}\frac{\frac{p}{y}}{\frac{p}{y}+m}\mathcal{O}^J_{\mathbf{1},m}, \quad (6.111)$$

$$\mathcal{T}''^{J,y}_{\mathbf{1}}=\mathcal{T}^{J,y}_{\mathbf{1}}. \quad (6.112)$$

g_2^2 order までで mixing が解かれた single trace operator は、

$$\mathcal{O}'^J_{\mathbf{1},m}=\mathcal{O}''^J_{\mathbf{1},m}+g_2^2\sum_n T'_{mn}\mathcal{O}''^J_{\mathbf{1},n}, \quad (6.113)$$

となる。ただし、

$$T'_{mm} = -\frac{M'_{mm}}{2}, \qquad T'_{m,-m} = -\frac{M'_{m,-m}}{2}, \qquad T'_{mn} = -\frac{mM'_{mn}}{m+n}, \tag{6.114}$$

である。この operator の 2 点関数は、

$$\langle \bar{\mathcal{O}}''^J_{\mathbf{1},m} \mathcal{O}''^J_{\mathbf{1},n} \rangle = (\delta_{mn} + \delta_{m,-n}) \left(1 + \lambda' \left(m^2 + \frac{g_2^2}{4\pi^2} \left(\frac{1}{12} + \frac{35}{32\pi^2 m^2} \right) \right) \ln(\Lambda^2 x^2) \right). \tag{6.115}$$

ここでの $\delta_{m,-n}$ は (6.88) $\mathcal{O}^J_{\mathbf{1},m} = \mathcal{O}^J_{\mathbf{1},-m}$ からくるものである。先にふれたように、$\mathcal{O}_{\mathbf{1}}$ の anomalous dimension は **9**, **6** 表現の operator と一致することが分かる。

第7章　Light-Cone String Field Theory

この章では、string interaction を direct に考えるために pp-wave 上の Light-cone string field theory を構築しよう。方法は、Green, Schwarz, Brink による flat space の場合 [33] とほとんど同じである。そこでまず、flat space の場合の構成を振り返る。その後、pp-wave へその方法を適用する。

7.1　第一量子化から第二量子化へ

前の章で、RR-flux の入った maximally supersymmetric な pp-wave 上の free string は、light-cone gauge で worldsheet 上の作用が free theory となり、容易に第一量子化できることを見た。もちろん、free string の第一量子化であるのでこの段階では、string 同士の相互作用の情報は入っていない。そこで、第二量子化の形式に移り、string 同士の相互作用を考慮することにする。

第一量子化の Hilbert 空間を $\mathcal{H}_1$ とする。これは、string が一つのみある状態である。string が m 個ある状態は、m 個の $\mathcal{H}_1$ の直積であり、これを $\mathcal{H}_m$ とする。full string theory の Hilbert 空間は、$\mathcal{H} = |vacuum\rangle \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \cdots$ である。string field theory での dynamical variable は波動汎関数 string field である。light-cone でゲージ固定されているので、時間発展 parameter は、$\tau = x^+$ である。以下の formalism では、string field の momentum 表示を用いる。つまり、string field は τ, p^+, $p^I(\sigma)$, $\lambda^\alpha(\sigma)$ の関数である。$\mathcal{H}_1$ に作用する第一量子化の言葉で書かれた global 対称性の生成子は、string field を用いて書き直すことによって、$\mathcal{H}$ に作用する生成子にすることができる。この生成子は free theory のものであり、string field に関して、quadratic である。従って、これらの生成子は string の数を変えない。つまり、$\mathcal{H}_m$ から $\mathcal{H}_m$ への写像を与える。我々の目的は、この free theory の operator に interaction term を摂動的に加えることである。その際、coupling constant の order by order で global 対称性の代数の交換関係を壊さないようにしなくてはならない。そのため interaction term に強い条件が課せられる。実際、この条件から interaction term は一意に決まる。そのことを以下で見ていく。

7.2　Flat Space での Light-Cone String Field Theory

pp-wave 上の light-cone string field theory は、flat space の場合の手法をそのまま適用できる。従って、まず flat space での light-cone string field theory を見ていく [33, 34]。

7.2.1 Flat Space での GS superstring の第一量子化

ではまず、flat space での Green-Schwarz superstring についてまとめておく。flat space が持つ対称性は 10 次元の superpoincare 群である。string の worldsheet 上の長さを

$$-\pi|\alpha| \leq \sigma \leq \pi|\alpha|, \tag{7.1}$$

で parameterize する。ただし、

$$\alpha \equiv 2p^+, \tag{7.2}$$

である。ここで、p^+ は正負どちらの値も取れる。正の場合は入射する string 、負の場合は出射する string を表わす。closed string なので、

$$x^I(\tau, \sigma - \pi\alpha) = x^I(\tau, \sigma + \pi\alpha), \tag{7.3}$$

$$\theta^\alpha(\tau, \sigma - \pi\alpha) = \theta^\alpha(\tau, \sigma + \pi\alpha). \tag{7.4}$$

まず、bosonic sector を見る。座標 x^I とその共役運動量 $p^I = \frac{\dot{x}^I}{4\pi}$ の mode 展開は、

$$x^I(0,\sigma) = x^I + i\sum_{n\neq 0}(\alpha_n^I e^{-in\sigma/|\alpha|} + \tilde{\alpha}_n^I e^{-in\sigma/|\alpha|}) \tag{7.5}$$

$$= x^I + \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{n}}\left(x_n^{1I}\cos\frac{n\sigma}{|\alpha|} + x_n^{2I}\sin\frac{n\sigma}{|\alpha|}\right), \tag{7.6}$$

$$p^I(0,\sigma) = \frac{1}{2\pi|\alpha|}\left(p^I + \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{2n}\left(p_n^{1I}\cos\frac{n\sigma}{|\alpha|}p_n^{2I}\sin\frac{n\sigma}{|\alpha|}\right)\right). \tag{7.7}$$

ここで、

$$x_n^{1I} \equiv \frac{i}{\sqrt{n}}(\alpha_n^{1I} - \alpha_{-n}^{1I}), \qquad n > 0, \tag{7.8}$$

$$x_n^{2I} \equiv -\frac{1}{\sqrt{n}}(\alpha_n^{2I} + \alpha_{-n}^{2I}), \qquad n > 0, \tag{7.9}$$

$$p_n^{1I} \equiv \frac{1}{2\sqrt{n}}(\alpha_n^{1I} + \alpha_{-n}^{1I}), \qquad n > 0, \tag{7.10}$$

$$p_n^{2I} \equiv \frac{i}{2\sqrt{n}}(\alpha_n^{2I} - \alpha_{-n}^{2I}), \qquad n > 0, \tag{7.11}$$

$$\alpha_n^{1I} \equiv \sqrt{\frac{1}{2}}(\alpha_n^I + \tilde{\alpha}_n^I), \tag{7.12}$$

$$\alpha_n^{2I} \equiv \sqrt{\frac{1}{2}}(\alpha_n^I - \tilde{\alpha}_n^I). \tag{7.13}$$

以下では、表記の簡単のため transverse space time の index I は省略する。
operator の交換関係は、

$$[x(\sigma), p(\sigma')] = i\delta(\sigma - \sigma'), \tag{7.14}$$

$$[x(\sigma), x(\sigma')] = [p(\sigma), p(\sigma')] = 0. \tag{7.15}$$

これから、

$$[x_m^{\mathcal{I}}, p_n^{\mathcal{J}}] = i\delta^{\mathcal{I}\mathcal{J}}\delta_{mn}, \tag{7.16}$$

$$[x_m^{\mathcal{I}}, x_n^{\mathcal{I}}] = [p_m^{\mathcal{I}}, p_n^{\mathcal{J}}] = 0, \qquad (\mathcal{I} = 1, 2). \tag{7.17}$$

$$\tag{7.18}$$

次に fermionic 座標に移ろう。mode 展開は、

$$\theta^\alpha(0,\sigma) = \theta^\alpha + \sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\theta_n^{1\alpha}\cos\frac{n\sigma}{|\alpha|} + \theta_n^{2\alpha}\sin\frac{n\sigma}{|\alpha|}\right), \tag{7.19}$$

$$\lambda^\alpha(0,\sigma) = \frac{1}{2\pi|\alpha|}\left(\lambda^\alpha + \sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n^{1\alpha}\cos\frac{n\sigma}{|\alpha|} + \lambda_n^{2\alpha}\sin\frac{n\sigma}{|\alpha|}\right)\right). \tag{7.20}$$

ただし、

$$\theta_n^1 = \frac{1}{\alpha}(Q_n^1 + Q_{-n}^2) \qquad (n > 1), \tag{7.21}$$

$$\theta_n^2 = \frac{1}{\alpha}(Q_n^2 - Q_{-n}^1) \qquad (n > 1), \tag{7.22}$$

$$\lambda_n^1 = \frac{1}{2}(Q_n^2 + Q_{-n}^1) \qquad (n > 1), \tag{7.23}$$

$$\lambda_n^2 = \frac{1}{2}(-Q_n^1 + Q_{-n}^2 \qquad (n > 1), \tag{7.24}$$

交換関係は、

$$\{\theta(\sigma), \lambda(\sigma')\} = \delta(\sigma - \sigma'), \tag{7.25}$$

$$\{\theta(\sigma), \theta(\sigma')\} = \{\lambda(\sigma), \lambda(\sigma')\} = 0. \tag{7.26}$$

より、

$$\{Q_m^1, Q_n^1\} = \{Q_m^2, Q_n^2\} = \alpha\delta_{m+n,0}, \tag{7.27}$$

$$\{Q_m^1, Q_n^2\} = 0, \tag{7.28}$$

Hamiltonian は、

$$H = \int_0^{2\pi|\alpha|} d\sigma \left(2\pi e(\alpha)(p(\sigma))^2 + \frac{e(\alpha)}{8\pi}(x'(\sigma))^2 + 2\pi\lambda'(\sigma)\lambda(\sigma) - \frac{1}{8\pi}\theta'(\sigma)\theta(\sigma)\right) \equiv \int_0^{2\pi|\alpha|} h(\sigma). \tag{7.29}$$

physical state condition は、string の原点 $s = 0$ の parameterization の任意性からくるものだけである。σ 方向の overall の並進の生成子は、

$$t = \int_{-\pi|\alpha|}^{\pi|\alpha|} d\sigma(\theta'(\sigma)\lambda(\sigma) + ix'(\sigma)\cdot p(\sigma)) = \frac{i}{|\alpha|}(\tilde{N} - N). \tag{7.30}$$

ただし、

$$N=\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_{-n}\alpha_n+\frac{n}{\alpha}Q_{-n}Q_n),\tilde{N}=\sum_{n=1}^{\infty}(\tilde{\alpha}_{-n}\tilde{\alpha}_n+\frac{n}{\alpha}\tilde{Q}_{-n}\tilde{Q}_n). \tag{7.31}$$

よって、physical state condition は、

$$N-\tilde{N}=0, \tag{7.32}$$

である。系の対称性は、次のように worldsheet 上の場で実現されている。kinematical generator $P^I, J^{IJ}, J^{I+}, Q^{+\mathcal{I}}$ は、

$$P^I=\int_0^{2\pi|\alpha|}d\sigma p^I(\sigma)=p^I,\qquad J^{I+}=\int_0^{2\pi|\alpha|}d\sigma\left(\frac{e(\alpha)}{\pi}x^i(\sigma)-x^+p^i(\sigma)\right)=x^Ip^+-p^Ix^+, \tag{7.33}$$

$$J^{IJ}=\frac{1}{2\pi|\alpha|}\int_0^{2\pi|\alpha|}d\sigma\left(x^i(\sigma)p^i(\sigma)-x^j(\sigma)p^i(\sigma)-\frac{1}{2}i\theta(\sigma)\gamma^{IJ}\lambda(\sigma)\right), \tag{7.34}$$

$$Q^{+1}=\int_0^{2\pi|\alpha|}d\sigma\frac{e(\alpha)}{2\sqrt{2}\pi}\theta(\sigma)=\frac{1}{2}\alpha\theta\equiv q^{+1},\qquad Q^{+2}=\int_0^{2\pi|\alpha|}d\sigma\sqrt{2}\lambda(\sigma)=\sqrt{2}\lambda\equiv q^{+2}, \tag{7.35}$$

dynamical generator $H, Q^{-\mathcal{I}}, J^{+-}, J^{I-}$ は、

$$J^{+-}=x^+H+\frac{1}{2}\{\alpha,\frac{\partial}{\partial\alpha}\}-\frac{i}{4}\int_0^{2\pi|\alpha|}d\sigma[\theta(\sigma),\lambda(\sigma)], \tag{7.36}$$

$$J^{I-}=2ip^I\tfrac{\partial}{\partial\alpha}+\tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi|\alpha|}d\sigma\left(\{x^I(\sigma),h(\sigma)\}+\pi ie(\alpha)(\lambda\gamma\cdot p(\sigma)\gamma^I\theta(\sigma)-\theta(\sigma)\gamma^I\gamma\cdot p(\sigma)\lambda(\sigma))\right), \tag{7.37}$$

$$Q^{-1}=\int_0^{2\pi|\alpha|}d\sigma\left(\gamma\cdot p(\sigma)\theta(\sigma)+ie(\alpha)\gamma\cdot x'(\sigma)\lambda(\sigma)\right), \tag{7.38}$$

$$Q^{-2}=\int_0^{2\pi|\alpha|}d\sigma\left(4\pi e(\alpha)\gamma\cdot p(\sigma)\lambda(\sigma)-\frac{i}{4\pi}\gamma\cdot x'(\sigma)\theta(\sigma)\right). \tag{7.39}$$

H は、(7.29) に書いてある。

さて、ここまでのことを第二量子化の言葉で書き直そう。まず、dynamical variable は string field $\Phi[\tau,\alpha,p(\sigma),\lambda(\sigma)]$ である。ここでは、運動量表示を用いる。同時刻 (τ) 交換関係は、

$$\left[\Phi[\tau,\alpha_1,p_1(\sigma),\lambda_1(\sigma)],\Phi[\tau,\alpha_2,p_2(\sigma),\lambda_2(\sigma)]\right]=\frac{1}{\alpha_1}\delta(\alpha_1+\alpha_2)\Delta^8[p_1(\sigma)+p_2(\sigma)]\Delta^8[\lambda_1(\sigma)+\lambda_2(\sigma)]. \tag{7.40}$$

第一量子化の生成子 G は、それぞれ

$$G_2=\frac{1}{2}\int d\alpha D^8p(\sigma)D^8\lambda(\sigma)\alpha\Phi[-\alpha,-p(\sigma),-\lambda(\sigma)]G\Phi[\alpha,p(\sigma),\lambda(\sigma)], \tag{7.41}$$

とすることで、第二量子化の生成子となる。ここで、suffix の 2 は、string field に関して 2 次の形をしていることを示すためにつけた。後に explicit に汎関数積分を行う際、string field を number

basis component で展開しておくと便利である。その準備として、bosonic variable と fermionic variable それぞれの number basis から momentum basis への変換関数、つまり調和振動子の波動関数を求めておく必要がある。

bosonic な場合は、

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1, \qquad \hat{p} = \frac{1}{2}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \tag{7.42}$$

$$|p\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \psi_n(p) = (\text{const.}) \exp(-\tfrac{1}{4}p^2 + p\hat{a}^\dagger - \tfrac{1}{2}\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger)|0\rangle. \tag{7.43}$$

であり、$\psi_n(p)$ は普通の調和振動子の波動関数である。fermionic variable の場合は、

$$\{\hat{Q}^{\mathcal{I}}, \hat{Q}^{\mathcal{J}\dagger}\} = \alpha\delta^{\mathcal{I}\mathcal{J}} \quad (\mathcal{I} = 1, 2), \qquad \hat{\lambda}^1 = \tfrac{1}{2}(\hat{Q}^2 + \hat{Q}^{1\dagger}), \quad \hat{\lambda}^2 = \tfrac{1}{2}(-\hat{Q}^1 + \hat{Q}^{2\dagger}). \tag{7.44}$$

この operator に対して、

$$\hat{\lambda}^1|\lambda^1\lambda^2\rangle = \lambda^1|\lambda^1\lambda^2\rangle, \quad \hat{\lambda}^2|\lambda^1\lambda^2\rangle = \lambda^2|\lambda^1\lambda^2\rangle, \tag{7.45}$$

なる状態は、

$$\begin{aligned} |\lambda^1\lambda^2\rangle &= (\text{const.}) \exp\left[\frac{2}{\alpha}(\lambda^1\lambda^2 + \lambda^2\hat{Q}^{1\dagger} - \lambda^1\hat{Q}^{2\dagger} + \tfrac{1}{2}\hat{Q}^{1\dagger}\hat{Q}^{2\dagger})\right]|0\rangle \\ &= \left(\chi_{00} + \tfrac{1}{\sqrt{\alpha}}\chi_{10}\hat{Q}^{1\dagger} + \tfrac{1}{\sqrt{\alpha}}\chi_{01}\hat{Q}^{2\dagger} + \tfrac{1}{\alpha}\chi_{11}\hat{Q}^{1\dagger}\hat{Q}^{2\dagger}\right)|0\rangle, \end{aligned} \tag{7.46}$$

$$\chi_{00} = 1 + \frac{2}{\alpha}\lambda^1\lambda^2, \qquad \chi_{10} = \frac{2}{\sqrt{\alpha}}\lambda^2, \tag{7.47}$$

$$\chi_{01} = -\frac{2}{\sqrt{\alpha}}\lambda^1, \qquad \chi_{11} = 1 - \frac{2}{\alpha}\lambda^1\lambda^2. \tag{7.48}$$

これらを用いて、string field を number basis で展開すると、

$$\begin{aligned} \Phi[p(\sigma), \lambda(\sigma)] &= \Phi(p, \lambda; p_1^1, p_2^1, \cdots; p_1^2, p_2^2 \cdots; \lambda_1^1, \lambda_2^1, \cdots; \lambda_1^2, \lambda_2^2, \cdots) \\ &= \sum_{\{n_k^1, n_l^2, m_s^1, m_s^2\}} \phi_{\{n_k^1, n_l^2, m_s^1, m_s^2\}}(p, \lambda) \prod_k \psi_{n_k^1}(p_k^1) \prod_l \psi_{n_l^2}\psi(p_l^2) \prod_s \chi_{m_s^1, m_s^2}(\lambda_s^1, \lambda_s^2). \end{aligned} \tag{7.49}$$

7.2.2 Interaction Term

ここまでで、free theory の第二量子化された形は得られた。この free theory を、interacting theory にしよう。まず、Hamiltonian は、

$$H = H_2 + \kappa H_3 + O(\kappa^2), \tag{7.50}$$

となる。ここで、κ は coupling constant である。Hamiltonian に interaction term が加わることによって、superpoincare 代数は閉じなくなってしまう。superpoincare 代数を κ の order by order

で実現するために、他の生成子にも interaction term を加えなければならない。interaction term をつけ加えなくてはならない生成子は、dynamical generator であり、kinematical generator は free theory のままでよい。ここでは、$O(\kappa)$ までを考える。

以下では、$O(\kappa)$ の interaction term を super poincare 代数が実現するように決定する。この方法は次の 2 段階からなる。まず初めに、kinematical generator と dynamical generator との間の交換関係から、interaction term のおおまかな形を決定する。そして、dynamical generator 同士の交換関係から interaction term の形を決定する。

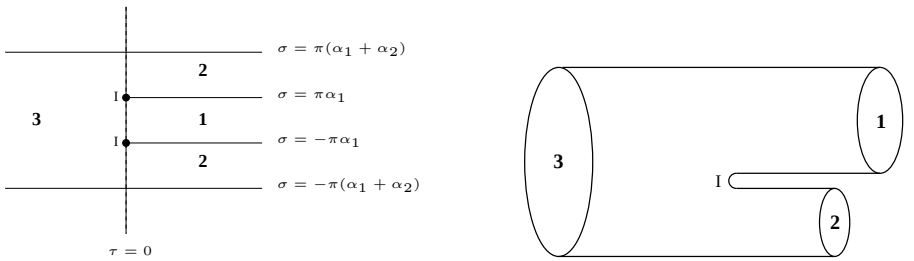


図 7.1: 相互作用点での各 string の parameterization.$\sigma = \pi\alpha_1$ と $\sigma = -\pi\alpha_1$ は同一視され、$\sigma = \pi(\alpha_1 + \alpha_2)$ と $\sigma = -\pi(\alpha_1 + \alpha_2)$ は同一視される。I が相互作用点である。

type II string の interaction は exchange 型のものである。interaction の際の string の parametrization は、

$$\sigma_1 = \sigma, \qquad -\pi\alpha_1 \le \sigma \le \pi\alpha_1, \tag{7.51}$$

$$\sigma_2 = \begin{cases} \sigma - \pi\alpha_1, & \pi\alpha_1 \le \sigma \le \pi(\alpha_1 + \alpha_2), \\ \sigma + \pi\alpha_1, & -\pi(\alpha_1 + \alpha_2) \le \sigma \le -\pi\alpha_1, \end{cases} \tag{7.52}$$

$$\sigma_3 = -\sigma, \qquad -\pi(\alpha_1 + \alpha_2) \le \sigma \le \pi(\alpha_1 + \alpha_2). \tag{7.53}$$

それぞれの string の座標は上の範囲でのみ値を持ち、それ以外の範囲では 0 とする。つまり、

$$p_r(\sigma) = \Theta_r p_r(\sigma_r), \tag{7.54}$$

$$\lambda_r(\sigma) = \Theta_r \lambda_r(\sigma_r). \tag{7.55}$$

ここで、[1]

$$p_r(\sigma_r) = \frac{1}{2\pi|\alpha|}\left(p^{(r)} + \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{2n}\left(p_n^{1(r)}\cos\frac{n\sigma_r}{|\alpha_r|} + p_n^{2(r)}\sin\frac{n\sigma_r}{|\alpha_r|}\right)\right), \tag{7.56}$$

$$\lambda_r(\sigma_r) = \frac{1}{2\pi|\alpha_r|}\left(\lambda^{(r)} + \sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n^{1(r)}\cos\frac{n\sigma}{|\alpha_r|} + \lambda_n^{2(r)}\sin\frac{n\sigma}{|\alpha_r|}\right)\right), \tag{7.57}$$

$$\Theta_1 = \theta(\pi\alpha_1 - |\sigma|), \tag{7.58}$$

$$\Theta_2 = \theta(|\sigma| - \pi\alpha_1), \tag{7.59}$$

$$\Theta_3 = 1, \tag{7.60}$$

[1]ここでの θ はステップ関数であり、fermionic 座標の $\theta(\sigma)$ ではない。

7.2.3 Vertex Operator の決定

ではまず、kinematical generator と dynamical generator の間の交換関係から情報を得よう。H_3, $Q_3^{-\mathcal{I}}$ は全ての kinematical generator と交換するのでこれらについて考える。

まず、H_3 について考察しよう。P^+ と H_3 は交換するので、$\delta(\sum_{r=1}^3 \alpha_r)$ が H_3 に含まれる。そして、H_3 は全ての kinematical generator と交換する。P^I, Q^{+2} と交換することは、H_3 に $\Delta^8(\sum_{r=1}^3 p_r(\sigma))$, $\Delta^8(\sum_{r=1}^3 \lambda_r(\sigma))$ を含むことで実現できる。従って、

$$H_3 = \int d\mu_3 G(\alpha_r, p_r(\sigma), x_r'(\sigma), \lambda_r(\sigma))\Phi(1)\Phi(2)\Phi(3), \tag{7.61}$$

ここで、

$$d\mu_3 = \left(\prod_{r=1}^3 d\alpha_r D^8 p_r(\sigma) D^8 \lambda_r(\sigma)\right) \delta(\sum \alpha_r)\Delta^8[\sum p_r(\sigma)]\Delta^8[\sum \lambda_r(\sigma)], \tag{7.62}$$

という形に決まる。ただし、G は $\sum\alpha$, $\sum p(\sigma)$, $\sum\lambda(\sigma)$ と交換する。kinematical generator J^{I+}, Q^{+1} と交換するためには、

$$e(\alpha)\frac{\partial}{\partial p(\sigma)}, \qquad e(\alpha)\frac{\partial}{\partial\lambda(\sigma)} \tag{7.63}$$

も保存しなくてはならない。しかし、これらは、

$$\sum_r e_r(\alpha_r)\frac{\partial}{\partial p_r(\sigma)}\Delta^8[\sum p_r(\sigma)] = 0, \qquad \sum_r e_r(\alpha_r)\frac{\partial}{\partial\lambda_r(\sigma)}\Delta^8[\sum\lambda_r(\sigma)] = 0, \tag{7.64}$$

から、G が $\sum e_r\frac{\partial}{\partial p_r(\sigma)}$, $\sum e_r\frac{\partial}{\partial\lambda_r(\sigma)}$ と交換するならば、(7.61) も J^{I+}, Q^{+1} と交換することが分かる。

$Q^{+\mathcal{I}}$ も P^+ と全ての kinematical generator と交換する。従って、H_3 に対するここまでの議論は、$Q^{+\mathcal{I}}$ の interaction term $Q_3^{-\mathcal{I}}$ に対しても成り立つ。G が他の関数 $G^{-\mathcal{I}}$ に変わるだけである。

さて、これらの operator を explicit に表わすために ocsillator 表示 (7.49) を用いて、汎関数積分を実行してしまおう。汎関数の delta 関数は、各フーリエ・モードの delta 関数の無限積で定義される。

$$\Delta^8\left[\sum_{r=1}^3 p_r(\sigma)\right] = \delta^8\left(\sum_{r=1}^3 p^{(r)}\right)\prod_{m=1}^\infty\left[\delta^8\left(\sum_{r=1}^3\sum_{n=1}^\infty A_{mn}^{(r)}p_n^{1(r)} + \frac{1}{\sqrt{2}}B_m\mathbb{P}\right)\right.$$
$$\left.\times\delta^8\left(\sum_{r=1}^3\sum_{n=1}^\infty\frac{n}{m\beta_r}A_{mn}^{(r)}p_n^{2(r)}\right)\right], \tag{7.65}$$

$$\Delta^8\left[\sum_{r=1}^3 \lambda_r(\sigma)\right] = \delta^8\left(\sum_{r=1}^3 \lambda^{(r)}\right)\prod_{m=1}^\infty\left[\delta^8\left(\sum_{r=1}^3\sum_{n=1}^\infty\sqrt{\frac{m}{n}}A_{mn}^{(r)}\lambda_n^{1(r)} - \sqrt{\frac{m}{2}}B_m\Lambda\right)\right.$$
$$\left.\times\delta^8\left(\sum_{r=1}^3\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{\beta_r}\sqrt{\frac{n}{m}}A_{mn}^{(r)}\lambda_n^{2(r)}\right)\right]. \tag{7.66}$$

ただし、

$$A^{(1)}_{mn} = (-1)^m \frac{2}{\pi\alpha_1}\sqrt{\frac{n}{m}}\int_0^{\pi\alpha_1} d\sigma \cos\frac{n\sigma}{\alpha_1}\cos\frac{m\sigma}{\alpha_3}, \tag{7.67}$$

$$A^{(2)}_{mn} = (-1)^m \frac{2}{\pi\alpha_2}\sqrt{\frac{n}{m}}\int_{\pi\alpha_1}^{\pi(\alpha_1+\alpha_2)} d\sigma \cos\frac{n(\sigma-\pi\alpha_1)}{\alpha_2}\cos\frac{m\sigma}{\alpha_3}, \tag{7.68}$$

$$A^{(3)}_{mn} = \delta_{mn}, \tag{7.69}$$

$$B_m = -(-1)^m \frac{2}{\pi\alpha_1\alpha_2\sqrt{m}}\int_0^{\pi\alpha_1} d\sigma \cos\frac{m\sigma}{\alpha_3}, \tag{7.70}$$

$$\beta_r = \frac{\alpha_r}{\alpha_3}, \tag{7.71}$$

$$\mathbb{P} = \alpha_1 p^{(2)} - \alpha_2 p^{(1)}, \tag{7.72}$$

$$\Lambda = \alpha_1\lambda^{(2)} - \alpha_2\lambda^{(1)}. \tag{7.73}$$

実際には、$A^{(1)}_{mn}$, $A^{(2)}_{mn}$, B_m には $(-1)^m$ の factor は現われない。しかし、$r=3$ の string が physical state condition $t=0$ を満たしているときにはこの factor をつけ加えることができる。今後の簡単のためにこの factor を加えた上記の形を用いる。(7.61) に (7.49) と上記のデルタ関数を代入する。そして、デルタ関数を用いて $r=3$ string の variable $(p_n^{1(3)}, p_n^{1(3)}, \lambda_n^{1(3)}, \lambda_n^{2(3)})$ に関して積分してしまう。

$$H_3 = \int d\mu_3^0 \sum_{\{n^{(1)},n^{(2)},n^{(3)}\}} C\left(\{n^{(1)},n^{(2)},n^{(3)}\}\right)\prod_{r=1}^{3}\phi_{\{n^{(r)}\}}(\alpha_r,p^{(r)},\lambda^{(r)}). \tag{7.74}$$

ただし、$\{n^{(r)}\}$ は、$\{\ n_k^{1(r)}, n_l^{2(r)}, m_s^{1(r)}, m_s^{2(r)}\}$ を表わしている。$n_k^{1(r)}$, $n_l^{2(r)}$, $m_s^{1(r)}$, $m_s^{2(r)}$ はそれぞれ $\alpha_k^{1(r)}$, $\alpha_l^{2(r)}$, $Q_s^{1(r)}$, $Q_s^{2(r)}$ の励起数である。$d\mu_3^0$ は、

$$d\mu_3^0 = \left(\prod_{r=1}^{3} d\alpha_r dp^{(r)} d\lambda^{(r)}\right)\delta(\sum\alpha_r)\delta^8(\sum p^{(r)})\delta^8(\sum\lambda^{(r)}). \tag{7.75}$$

$C\left(\{n^{(1)},n^{(2)},n^{(3)}\}\right)$ は、

$$C\left(\{n^{(1)n},n^{(2)},n^{(3)}\}\right) = \int\left(\prod_{r=1}^{2}\prod_{n=1}^{\infty} d^8p_n^{1(r)}d^8p_n^{2(r)}d^8\lambda_n^{1(r)}d^8\lambda_n^{2(r)}\right)G(\alpha_r,p_n^{1(r)},p_n^{2(r)},\lambda_n^{1(r)},\lambda_n^{2(r)})$$
$$\times\prod_{r=1}^{3}\prod_{k}\psi_{n_k^{1(r)}}(p_k^{1(r)})\prod_{l}\psi_{n_l^{2(r)}}(p_l^{2(r)})\prod_{s}\chi_{m_s^{1(r)},m_s^{2(r)}}(\lambda_s^{1(r)},\lambda_s^{2(r)}). \tag{7.76}$$

ここで、$r=3$ string の variable の値は、デルタ関数 (7.65), (7.66) に従う値を取るとする。さて、ここで次の $\mathcal{H}_3$ の元 を定義する。

$$|H_3\rangle = \sum_{\{n^{(1)},n^{(2)},n^{(3)}\}} C\left(\{n^{(1)},n^{(2)},n^{(3)}\}\right)|\{n^{(1)},n^{(2)},n^{(3)}\}\rangle. \tag{7.77}$$

この vetex 状態は、

$$|H_3\rangle = \int \left(\prod_{r=1}^{2} \prod_{n=1}^{\infty} d^8 p_n^{1(r)} d^8 p_n^{2(r)} d^8 \lambda_n^{1(r)} d^8 \lambda_n^{2(r)} \right) G(\alpha_r, p_n^{1(r)}, p_n^{2(r)}, \lambda_n^{1(r)}, \lambda_n^{2(r)})$$
$$\times \exp\left[\sum_{r=1}^{3} \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}(p_k^{1(r)})^2 - \frac{1}{2k}(\alpha_{-k}^{1(r)})^2 + \frac{1}{\sqrt{k}} p_k^{1(r)} \alpha_{-k}^{1(r)} - \frac{1}{4}(p_k^{2(r)})^2 - \frac{1}{2k}(\alpha_{-k}^{2(r)})^2 + \frac{1}{\sqrt{k}} p_k^{2(r)} \alpha_{-k}^{2(r)} \right) \right]$$
$$\times \exp\left[\sum_{r=1}^{3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\alpha_r} (\lambda_k^{1(r)} \lambda_k^{2(r)} + \lambda_k^{2(r)} Q_{-k}^{1(r)} - \lambda_k^{1(r)} Q_{-k}^{2(r)} + \frac{1}{2} Q_{-k}^{1(r)} Q_{-k}^{2(r)}) \right] |0\rangle. \tag{7.78}$$

ここで explicit に計算するために、G を operator にして積分の外に出してしまい、残りの部分を $|V\rangle$ と定義する。

$$|H_3\rangle = G_{\rm op} |V\rangle. \tag{7.79}$$

$Q_3^{-\mathcal{I}}$ に対しても同様に、

$$|Q_3^{-\mathcal{I}}\rangle = G_{\rm op}^{-\mathcal{I}} |V\rangle, \tag{7.80}$$

と出きる。つまり、$|V\rangle$ は、これらの interaction vertex に共通である。$|V\rangle$ の形をまとめると、bosonic 部分は、

$$\int \left(\prod_{r=1}^{2} \prod_{n=1}^{\infty} d^8 p_n^{1(r)} d^8 p_n^{2(r)} \right) \exp\Big[- \sum_{r,s=1}^{2} \sum_{m,n=1}^{\infty} p_m^{1(r)} M_{mn}^{1rs} p_n^{1(s)} + \sum_{r=1}^{2} \sum_{m=1}^{\infty} V_m^{1r} p_m^{1(r)} \tag{7.81}$$
$$- \sum_{r,s=1}^{2} \sum_{m,n=1}^{\infty} p^{2(r)} M_{mn}^{2rs} p_n^{2(s)} + \sum_{r=1}^{2} \sum_{m=1}^{\infty} V_m^{2r} p_m^{2(r)} + C_0 \Big], \tag{7.82}$$

$$M_{mn}^{1rs} = \frac{1}{4} \left(\delta^{rs} \delta_{mn} + \sum_{k=1}^{\infty} A_{km}^{(r)} A_{kn}^{(s)} \right) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 + A^{(1)^T} A^{(1)} & A^{(1)^T} A^{(2)} \\ A^{(2)^T} A^{(1)} & 1 + A^{(2)^T} A^{(2)} \end{pmatrix}, \tag{7.83}$$

$$V_m^{1r} = \frac{1}{\sqrt{m}} \alpha_{-m}^{1(r)} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \mathbb{P} \sum_{k=1}^{\infty} B_k A_{km}^{(r)} - \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{-k}^{1(3)} A_{km}^{(r)} \tag{7.84}$$
$$= \begin{pmatrix} C^{-\frac{1}{2}} \alpha^{1(1)^\dagger} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \mathbb{P} A^{(1)^T} B - C^{-\frac{1}{2}} A^{(1)^T} \alpha^{1(3)^\dagger} \\ C^{-\frac{1}{2}} \alpha^{1(2)^\dagger} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \mathbb{P} A^{(2)^T} B - C^{-\frac{1}{2}} A^{(2)^T} \alpha^{1(3)^\dagger} \end{pmatrix}, \tag{7.85}$$

$$M_{mn}^{2rs} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{\beta_1^2} C A^{(1)^T} C^{-2} A^{(1)} C & \frac{1}{\beta_1 \beta_2} C A^{(1)^T} C^{-2} A^{(2)} C \\ \frac{1}{\beta_2 \beta_1} C A^{(2)^T} C^{-2} A^{(1)} C & 1 + \frac{1}{\beta_2^2} C A^{(2)^T} C^{-2} A^{(2)} C \end{pmatrix}, \tag{7.86}$$

$$V_m^{2r} = \begin{pmatrix} C^{-\frac{1}{2}} \alpha^{2(1)^\dagger} - \frac{1}{\beta_1} C A^{(1)^T} C^{-1} \alpha^{2(3)^\dagger} \\ C^{-\frac{1}{2}} \alpha^{2(2)^\dagger} - \frac{1}{\beta_2} C A^{(2)^T} C^{-1} \alpha^{2(3)^\dagger} \end{pmatrix}, \tag{7.87}$$

$$C_0 = -\sum_{r=1}^{3}\sum_{\mathcal{I}=1}^{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}(\alpha_{-k}^{\mathcal{I}r})^2 - \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{\infty}B_k^2\mathbb{P}^2 - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2k}}\mathbb{P}B_k\alpha_{-k}^{1(3)}. \tag{7.88}$$

ただし、

$$C_{mn} = m\delta_{mn}. \tag{7.89}$$

fermionic 部分も同様にガウス積分の形に書ける。これらのガウス積分をしてしまうと、

$$|V\rangle = E_\alpha E_Q|0\rangle. \tag{7.90}$$

ここで、

$$E_\alpha = \exp\left[\frac{1}{2}\sum_{r,s=1}^{3}\sum_{m,n=1}^{\infty}(\alpha_{-m}^{1(r)}\bar{N}_{mn}^{rs}\alpha_{-n}^{1(s)} + \alpha_{-m}^{2(r)}\bar{N}_{mn}^{rs}\alpha_{-n}^{2(s)}) + \sqrt{2}\mathbb{P}\sum_{r=1}^{3}\sum_{m=1}^{\infty}\bar{N}_m^r\alpha_{-m}^{1(r)} + 2K\mathbb{P}^2\right], \tag{7.91}$$

$$E_Q = \exp\left[\sum_{r,s=1}^{3}\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_r}Q_{-m}^{2(r)}(C\bar{N}^{rs})_{mn}Q_{-n}^{1(s)} - \sqrt{2}\Lambda\sum_{r=1}^{3}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_r}(\bar{N}^rC)_mQ_{-m}^{2(r)}\right]. \tag{7.92}$$

$$\bar{N}_{mn}^{rs} = (C^{-1})_{mn}\delta^{rs} - \frac{2}{\sqrt{mn}}(A^{(r)\mathrm{T}}\Gamma^{-1}A^{(s)})_{mn}, \tag{7.93}$$

$$\bar{N}_m^r = -\frac{1}{\sqrt{m}}(A^{(r)\mathrm{T}}\Gamma^{-1}B)_m, \tag{7.94}$$

$$K = -\frac{1}{4}B^T\Gamma^{-1}B. \tag{7.95}$$

Neumann 係数 $\bar{N}$ や K には、無限次元行列 Γ の逆行列が入っており、このままの形では implicit な形である。Vertex operator の explicit な形を求めるには、Neumann 係数や K を explicit に表わす必要がある。

ガウス積分の際に出てくる汎関数 determinant は bosonic 積分と fermionic 積分の間で打ち消しあう。

7.2.4 Neumann 係数の Explicit な形

この節では、Neumann 行列 $\bar{N}_{mn}^{rs}$, $\bar{N}_m^r$ と K の explicit な形を求める [34, 35]。

まず、(7.67),(7.68),(7.70) の積分を実行しておこう。

$$A_{mn}^{(1)} = -\frac{2}{\pi}\sqrt{mn}(-1)^{m+n}\frac{\beta_1\sin(m\pi\beta_1)}{n^2 - m^2\beta_1^2}, \tag{7.96}$$

$$A_{mn}^{(2)} = -\frac{2}{\pi}\sqrt{mn}(-1)^{m}\frac{\beta_2\sin(m\pi\beta_1)}{n^2 - m^2\beta_2^2}, \tag{7.97}$$

$$B_m = -\frac{2}{\pi}\frac{\alpha_3}{\alpha_1\alpha_2}m^{-\frac{3}{2}}(-1)^m\sin(m\pi\beta_1). \tag{7.98}$$

$\bar{N}^{rs}_{mn}$ と $\bar{N}^{r}_{m}$ の間には次の関係式が成り立つ。証明は、付録にある。

$$\bar{N}^{rs}_{mn} = -\frac{mn\alpha}{n\alpha_r + m\alpha_s}\bar{N}^{r}_{m}\bar{N}^{s}_{n}. \tag{7.99}$$

従って、Neumann 係数に関しては $\bar{N}^{r}_{m}$ を求めればよい。

さて、係数 $A^(r)$, B に関して、次の関係式が成り立つを示そう。

$$\sum_{p=1}^{\infty}\sqrt{p}\bar{f}^{(3)}_{p}B_p = -\frac{2\tau_0}{\alpha_1\alpha_2}, \tag{7.100}$$

$$\sum_{p=1}^{\infty}\sqrt{p}\bar{f}^{(3)}_{p}A^{(r)}_{pm} = \frac{\alpha_3}{\alpha_r}\sqrt{m}\bar{f}^{(r)}_{m}, \tag{7.101}$$

$$\sum_{r=1}^{3}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\sqrt{p}}{\alpha_r}A^{(r)}_{mp}\bar{f}^{(r)}_{p} = -B_m. \tag{7.102}$$

ただし、

$$\bar{f}^{(r)}_{m} = f_m\left(-\frac{\alpha_{r+1}}{\alpha_r}\right)e^{\frac{m\tau_0}{\alpha_r}}, \tag{7.103}$$

$$f_m(\gamma) = \frac{1}{m!}\frac{\Gamma(m\gamma)}{\Gamma(m\gamma+1-m)}, \tag{7.104}$$

$$\tau_0 = \sum_{r=1}^{3}\alpha_r\log|\alpha_r|, \tag{7.105}$$

であり、ここで α_4 は α_1 を表わすとする。

上記の式より、(7.101) は、

$$\sum_{p=1}^{\infty}\sqrt{p}\bar{f}^{(3)}_{p}A^{(r)}_{pm} = -\frac{2}{\pi}\sqrt{m}(-1)^m\beta_1\sum_{p=1}^{\infty}(-1)^p\frac{p}{p!}\frac{\Gamma(-p\beta_1)\sin(p\pi\beta_1)}{(m^2-p^2\beta_1^2)\Gamma(1-p\beta-p)}e^{\frac{p\tau_0}{\alpha_3}} \tag{7.106}$$

$$= 2\sqrt{m}(-1)^m\beta_1\sum_{p=1}^{\infty}(-1)^p\frac{p}{p!}\frac{1}{m^2-p^2\beta_1^2}\frac{1}{\Gamma(1+p\beta_1)\Gamma(1-p-p\beta_1)}e^{\frac{p\tau_0}{\alpha_3}}. \tag{7.107}$$

最後の式変形では公式 $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{z}{\sin(\pi z)}$ を使った。上式の分数の極の位置について見てみよう。$\Gamma(z)$ の極は $z = 0, -1, -2, -3, /dots$ にあり、$\frac{1}{\Gamma(z)}$ には極はない。従って、$\frac{1}{\Gamma(1+p\beta_1)\Gamma(1+p\beta_2)}\frac{1}{m^2-p^2\beta_1^2}$ の極は、$\beta = \frac{m}{\beta_1} < 0$ に一位の極があるだけである。m は正の整数であるので、$\beta = -\frac{m}{\beta_1}$ は極でないことに注意する。また、$-1 < \beta_1 < 0$ にも注意する。このことから、$\Gamma(z)$ の $z = -n$ での留数が $\frac{(-1)^n}{n!}$ であることを用いて、上の表式を複素積分で書き直せる。

$$2\sqrt{m}(-1)^m\beta_1\int_C\frac{dp}{2\pi i}\Gamma(-p)\frac{p}{m^2-p^2\beta_1^2}\frac{1}{\Gamma(1+p\beta_1)\Gamma(1-p-p\beta_1)}e^{\frac{p\tau_0}{\alpha_3}}. \tag{7.108}$$

積分経路 C は図 7.2 (a) である。

被積分関数は、$|p| \to \infty$ で $p^{-5/2}$ と振舞うので、積分経路 図 7.2 (b) を考えることにより、結局

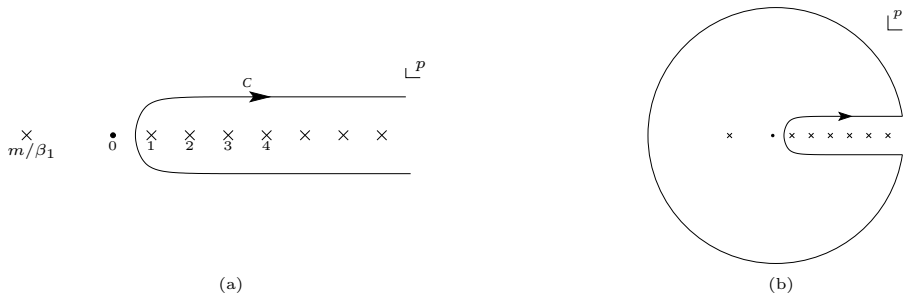


図 7.2: 積分路

(7.108) は $p = \frac{m}{\beta_1}$ での留数の値をとる。よって、

$$\sum_{p=1}^{\infty} \sqrt{p} \bar{f}_p^{(3)} A_{pm}^{(1)} = -\frac{1}{\beta_1} \frac{\sqrt{m}(-1)^m \Gamma(-m\beta_1)}{\Gamma(1+m)\Gamma(1-m-m/\beta_1)} e^{m\tau_0/\beta_1 \alpha_3} = \frac{\sqrt{m}}{\beta_1} \bar{f}_m^{(1)}. \tag{7.109}$$

最後の等式では、$\Gamma(z)\Gamma(-z) = -\frac{\pi}{z \sin \pi z}$ を用いた。これで、(7.101) で $r = 1$ としたものが示せた。(7.100), (7.101), (7.102) の他の式も同様に無限級数をガンマ関数の留数積分に直すことで証明できる。

(7.101) に $A_{nm}^{(r)}$ をかけて、m と r の和をとる。行列で書くと、

$$(\bar{f}^{(3)T} C^{\frac{1}{2}} \Gamma)_n = \sum_r \frac{1}{\beta_r} (\bar{f}^{(r)T} C^{\frac{1}{2}} A^{(r)^T})_n. \tag{7.110}$$

この式の右から Γ^{-1} をかけ、T をとって、(7.102) を使うと、

$$(\Gamma^{-1} B)_m = -\frac{1}{\alpha_3} \sqrt{m} \bar{f}_m^{(3)}. \tag{7.111}$$

この式の左から $A^{(r)^T}$ をかけると、(7.94) と比較することで、

$$\bar{N}_m^r = \frac{1}{\alpha_r} \bar{f}_m^{(r)}, \tag{7.112}$$

を得る。K は (7.111) の左から B^T をかけることにより、

$$K = -\frac{\tau_0}{2\alpha}. \tag{7.113}$$

以上で、vertex 状態の explicit な形を得た。

7.2.5 Prefactor の決定

前節で kinematical constraint から共通の vetex operator $|V\rangle$ が求まった。interaction term の完全な形は、

$$|H_3\rangle = G_{\rm op} |V\rangle, \tag{7.114}$$

$$|Q_3^{\mathcal{I}-}\rangle = G_{\rm op}^{\mathcal{I}-}|V\rangle, \tag{7.115}$$

である。この節では prefactor $G_{\rm op}$, $G_{\rm op}^{\mathcal{I}-}$ を kinematical constraint と dynamical constraint を用いて決定する。

interaction term を 7.61 の形で書きたいので、ここでの $G_{\rm op}$, $G_{\rm op}^{\mathcal{I}-}$ は、operator $p(\sigma)$, $\lambda(\sigma)$ 等の関数として求めたい。string の相互作用は $\sigma = \pm\pi\alpha_1$ で局所的に起こる。従って、この $G_{\rm op}$, $G_{\rm op}^{\mathcal{I}-}$ は $\sigma = \pm\pi\alpha_1$ の量 $p(\pm\pi\alpha_1)$, $\lambda(\pm\pi\alpha_1)$ 等で構成されているはずである。しかし、実は operator $p(\sigma)$, $\lambda(\sigma)$ 等は $|V\rangle$ に掛かったとき、$\sigma = \pm\pi\alpha_1$ で singular になるので、

$$|\pi\alpha_1 - \sigma| \to 0, \tag{7.116}$$

の極限をとって上手く $G_{\rm op}$, $G_{\rm op}^{\mathcal{I}-}$ を定義してやらなくてはならない。一方、運動量表示ではなく、oscillator 表示を用いると $G_{\rm op}$, $G_{\rm op}^{\mathcal{I}-}$ は困難なく well-defined に定義できる。よって、まず oscillator 表示でこれらの operator を求める。

prefactor G は生成演算子、消滅演算子の両方から成っているだろう。$|V\rangle$ は $E_\alpha E_Q|0\rangle$ と求まっているが、この E_α, E_Q は生成演算子だけから成っていた。そこで、G を交換関係を使って E の右側に移動することで次の形にすることができる。

$$G_{\rm op}E_\alpha E_Q|0\rangle = E_\alpha E_Q K|0\rangle. \tag{7.117}$$

ここで、K は生成演算子だけから成っている。従って、K は E_α, E_β と交換する。このように書き直すことによって、G を求める代わりに K を求めることにする。

前にも述べたように interaction term が kinematical constraint を満たすためには、$|V\rangle$ だけでなく prefactor も local 対称性を保たなくてはならない。つまり、

$$\left[\sum_{r=1}^{3} p_r(\sigma), K\right] = \left[\sum_{r=1}^{3} e_r x_r(\sigma), K\right] = 0, \tag{7.118}$$

$$\left[\sum_{r=1}^{3} \lambda_r(\sigma), K\right] = \left[\sum_{r=1}^{3} e_r \theta_r(\sigma), K\right] = 0. \tag{7.119}$$

まず、(7.118), (7.119) を満たす oscillator に関して 1 次の operator を見付けよう[2]。これが prefactor の構成要素となる。string の cosine mode に対しては、

$$X^1 = \mathbb{P} + \sum_{r=1}^{3}\sum_{n=1}^{\infty} F_n^{1r}\alpha_{-n}^{1(r)}. \tag{7.120}$$

string の sine mode に対しては、

$$X^2 = \sum_{r=1}^{3}\sum_{n=1}^{\infty} F_n^{2r}\alpha_{-n}^{1(r)}. \tag{7.121}$$

[2]この文章には書かないが、supergravity の interaction term を今と同様の方法で構成する場合は、$\mathbb{P}$ を用いて prefactor を構成する。(7.120), (7.121) などは $\mathbb{P}$ を string に拡張したものである。

さて、(7.118), (7.119) で K を X^1 に置き換えよう。(7.119) は trivial に満たされる。(7.118) はフーリエ変換をして、

$$\sum_r (A^{(r)} C^{\frac{1}{2}} F^{1r})_m = 0, \qquad \sum_r (A^{(r)} C^{-\frac{1}{2}} F^{1r})_m - \frac{\alpha}{\sqrt{2}} B_m = 0, \tag{7.122}$$

となる。これらの式の解は (7.102) と $\sum_r \frac{1}{\alpha_r} A^{(r)} C^{3/2} \bar{N}^r = 0$ より、

$$F_n^{1r} = -\frac{\alpha}{\alpha_r \sqrt{2}} (C\bar{N}^r)_m, \tag{7.123}$$

である。X^2 の場合も同様に、(7.118) から、

$$\sum_r (A^{(r)} C^{\frac{1}{2}} F^{2r})_m = 0, \qquad \sum_r \frac{1}{\alpha_r} (A^{(r)} C^{\frac{3}{2}} F^{2r})_m = 0. \tag{7.124}$$

第一式の解は先と同じものである。しかし、この解を第二式に代入すると発散してしまう。このことは一見問題に思えるが、実はこの発散は continuum basis では $\delta(\sigma - \pi\alpha_1) - \delta(\sigma + \pi\alpha_1)$ と表わされる。interaction point では $\sigma = \pi\alpha_1$ と $\sigma = -\pi\alpha_1$ は同一視されるので、この発散は打ち消しあう。よって、この発散は問題ではなく

$$F^{2r} = F^{1r}. \tag{7.125}$$

は (7.124) の両方の式の解である。
次に fermionic mode に移ろう。ここでも、supergravity mode の場合からの類推で、

$$Y = \Lambda + \sum_{r=1}^{3} \sum_{n=1}^{\infty} (G_n^{1r} Q_{-n}^{1(r)} + G_n^{2r} Q_{-n}^{2(r)}), \tag{7.126}$$

とする。前と同様に、(7.118), (7.119)[3] の K の代わりに Y を入れると、今度は (7.118) が trivial に満たされ、(7.119) からは、

$$\sum_r (A^{(r)} C^{\frac{1}{2}} G^{1r})_m = 0, \qquad \sum_r \alpha_r (A^{(r)} C^{-\frac{1}{2}} G^{1r})_m - \frac{\alpha}{\sqrt{2}} B_m = 0, \tag{7.127}$$

$$\sum_r (A^{(r)} C^{\frac{1}{2}} G^{2r})_m = 0, \qquad \sum_r \alpha_r (A^{(r)} C^{-\frac{1}{2}} G^{2r})_m = 0. \tag{7.128}$$

(7.127) は (7.122) と同じ式であり、従って解は $G^{1r} = F^{1r}$ である。G^{2r} に関しては $G_m^{2r} = \alpha_r^{-2} (C^2 \bar{N}^r)_m$ が解となるが、実はこの項は prefactor の中には入ってこない。従って、$G^{2r} = 0$ としておく。
ここまでで、(7.118), (7.119) を満たす演算子 X^1, X^2, Y を得た。これらの任意の関数は再び (7.118), (7.119) を満たす。[4]従って、これらの演算子を用いて prefactor を探す。以降では、$Q^{\mathcal{I}-}$ ではなく、Q^-, $\bar{Q}^-$ basis で話を進める。そこで、

$$X = X^1 + X^2, \qquad \tilde{X} = X^1 - X^2, \tag{7.129}$$

[3]ここでは、Y は fermionic な量なので (7.119) の交換子 $[,]$ は反交換子 $\{,\}$ に置き換えられる。
[4]関数が Y に関して奇の場合には (7.119) の交換子は反交換子となる。

を定義しておく。以下の計算では X, Y と Q_2 の交換関係や Q_2 が $|V\rangle$ に作用したものを X, Y の言葉で書き直した関係式が有用になる。そこで、それらの式を書き下しておく。

$$\left[Q_{2r}^{-\dot{a}}, \widetilde{X}^I\right] = 0, \qquad \left\{\sum_r Q_{2r}^{-\dot{a}}, Y^b\right\} = \sqrt{\frac{1}{2}}\eta(\gamma\cdot X)^{\dot{a}b}, \tag{7.130}$$

$$(\textstyle\sum_r Q_{2r}^{-\dot{a}})|V\rangle\delta^{17} = -\dfrac{\sqrt{2}\bar{\eta}}{\alpha}(\gamma\cdot XY)^{\dot{a}}|V\rangle\delta^{17}. \tag{7.131}$$

supergravity mode の interaction term は H_3 は p^I に関して二次であり、Q_3 は p^I に関して一次であった。そこで、string の場合にも同様であるとする。つまり、H_3 は X に関して二次であり、Q は X に関して一次とおこう。

$$|H_3\rangle = \tilde{X}^I X^J v^{IJ}(Y) E_\alpha E_Q |0\rangle\delta^{17}, \tag{7.132}$$

$$|Q_3^{-\dot{a}}\rangle = \tilde{X}^I s^{I\dot{a}}(Y) E^\alpha E^Q |0\rangle\delta^{17}, \tag{7.133}$$

$$|\tilde{Q}_3^{-\dot{a}}\rangle = X^I \tilde{s}^{I\dot{a}}(Y) E^\alpha E^Q |0\rangle\delta^{17}. \tag{7.134}$$

ただし、$\delta^{17} = \delta^8(\sum_{r=1}^3 p_r)\delta^8(\sum_{r=1}^3 \lambda_r)\delta(\sum_{r=1}^3 \alpha_r)$ である。ここまでで、kinematical constraint だけから上記の形が得られた。ここからは、dynamical constraint を用いて、$v^{IJ}(Y)$, $s^{I\dot{a}}(Y)$, $\tilde{s}^{I\dot{a}}(Y)$ の形を求める。dynamical generator 同士の交換関係のうち v^{IJ}, s^-, $\tilde{s}^-$ を決めるのに使われるものは、Q^-, $\tilde{Q}^-$ 同士の交換関係である。

$$\{Q^{-\dot{a}}, Q^{-\dot{b}}\} = 2H\delta^{\dot{a}\dot{b}}, \tag{7.135}$$

$$\{\bar{Q}^{-\dot{a}}, \bar{Q}^{-\dot{b}}\} = 2H\delta^{\dot{a}\dot{b}}, \tag{7.136}$$

$$\{Q^{-\dot{a}}, \bar{Q}^{-\dot{b}}\} = 0. \tag{7.137}$$

(7.135), (7.136) はそれぞれ $O(\kappa)$ の項に対しては、

$$\sum_r q_r^{-\dot{a}}|Q_3^{-\dot{b}}\rangle + \sum_r q_r^{-\dot{b}}|Q_3^{-\dot{a}}\rangle = 2|H_3\rangle\delta^{\dot{a}\dot{b}}, \tag{7.138}$$

$$\sum_r \tilde{q}_r^{-\dot{a}}|\tilde{Q}_3^{-\dot{b}}\rangle + \sum_r \tilde{q}_r^{-\dot{b}}|\tilde{Q}_3^{-\dot{a}}\rangle = 2|H_3\rangle\delta^{\dot{a}\dot{b}}, \tag{7.139}$$

の式を与える。ここで、q_r^-, $\tilde{q}_r^-$ は第一量子化での string (r) の生成子である。(7.130), (7.131) を用いると (7.138), (7.139) はそれぞれ、

$$v^{IJ}\delta^{\dot{a}\dot{b}} = \frac{i}{\sqrt{2}\alpha}\gamma^J_{\dot{a}a}D^a s^{I\dot{b}} + (\dot{a}\leftrightarrow\dot{b}), \qquad v^{IJ}\delta^{\dot{a}\dot{b}} = -\frac{i}{\sqrt{2}\alpha}\gamma^I_{\dot{a}a}\bar{D}^a \tilde{s}^{J\dot{b}} + (\dot{a}\leftrightarrow\dot{b}), \tag{7.140}$$

を与える。ただし、

$$D^a \equiv \eta Y^a + \frac{1}{2}\alpha\bar{\eta}\frac{\partial}{\partial Y^a}, \tag{7.141}$$

である。ここで $\eta = e^{i\pi/4}$ である。これらの解は、

$$v^{IJ} = w^{IJ} + y^{IJ}, \tag{7.142}$$

$$s^{I\dot{a}} = -\frac{i}{\sqrt{2}}(\eta s_1^{I\dot{a}} + \bar{\eta}s_2^{I\dot{a}}), \tag{7.143}$$

$$\tilde{s}^{I\dot{a}} = \frac{i}{\sqrt{2}}(\bar{\eta}s_1^{I\dot{a}} + \eta s_2^{I\dot{a}}), \tag{7.144}$$

である。ただし、

$$w^{IJ} = \delta^{IJ} + \left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2 \frac{1}{4!} t^{IJ}_{abcd} Y^a Y^b Y^c Y^d + \left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^4 \frac{1}{8!} \delta^{IJ} \epsilon_{abcdefgh} Y^a \cdots Y^h, \tag{7.145}$$

$$y^{IJ} = -i\frac{\alpha'}{\alpha}\frac{1}{2!}\gamma^{IJ}_{ab} Y^a Y^b - i\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^3 \frac{1}{2\cdot 6!}\gamma^{IJ}_{ab}\epsilon^{ab}{}_{cdefgh} Y^c \cdots Y^h, \tag{7.146}$$

$$s^I_{1\dot{a}} = \sqrt{2\alpha'}\gamma^I_{a\dot{a}} Y^a + \sqrt{2\alpha'}\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2 \frac{1}{6!} u^I_{abc\dot{a}} \epsilon^{abc}{}_{defgh} Y^d \cdots Y^h, \tag{7.147}$$

$$s^I_{2\dot{a}} = -\sqrt{2\alpha'}\frac{\alpha'}{\alpha}\frac{1}{3!} u^I_{abc\dot{a}} Y^a Y^b Y^c + \sqrt{2\alpha'}\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^3 \frac{1}{7!}\gamma^I_{a\dot{a}}\epsilon^a{}_{bcdefgh} Y^b \cdots Y^h, \tag{7.148}$$

である。ここで、$u^I_{abc\dot{a}}$, t^{IJ}_{abcd} はそれぞれ (A.18), (A.19) である。上の解は残りの式 (7.137) も満たしている。

さて、ここまでで prefactor が oscillator 表示で求まった。この形を contunuum basis 表示で表わしたい。この節の最初に述べたように、continuum basis 表示では prefactor はナイーヴには $\sigma = \pm\pi\alpha_1$ の量の関数であるが、これらの量は singular である。この singularity を上手く取り除くために、G は適切な量の極限 $\sigma \to \pm\pi\alpha_1$ として定義されなくてはならない。そのために、次を満たす量 $X(\sigma)$, $\tilde{X}(\sigma)$, $Y(\sigma)$ が欲しい。

$$\lim_{\sigma\to\pi\alpha_1} X(\sigma)E_\alpha|0\rangle = XE_\alpha|0\rangle, \tag{7.149}$$

$$\lim_{\sigma\to\pi\alpha_1} \tilde{X}(\sigma)E_\alpha|0\rangle = \tilde{X}E_\alpha|0\rangle, \tag{7.150}$$

$$\lim_{\sigma\to\pi\alpha_1} Y(\sigma)E_Q|0\rangle = YE_Q|0\rangle. \tag{7.151}$$

これらは実際に求められて、

$$X(\sigma) = -2\pi\sqrt{-\alpha}(\pi\alpha_1 - \sigma)^{\frac{1}{2}}\left[p^{(1)}(\sigma) - \frac{1}{4\pi}x^{(1)\prime}(\sigma) + p^{(1)}(-\sigma) - \frac{1}{4\pi}x^{(1)\prime}(-\sigma)\right], \tag{7.152}$$

$$\tilde{X}(\sigma) = -2\pi\sqrt{-\alpha}(\pi\alpha_1 - \sigma)^{\frac{1}{2}}\left[p^{(1)}(\sigma) + \frac{1}{4\pi}x^{(1)\prime}(\sigma) + p^{(1)}(-\sigma) + \frac{1}{4\pi}x^{(1)\prime}(-\sigma)\right], \tag{7.153}$$

$$Y(\sigma) = -2\pi\sqrt{-\alpha}(\pi\alpha_1 - \sigma)^{\frac{1}{2}}\left[\lambda^{(1)}(\sigma) + \lambda^{(1)}(-\sigma)\right]. \tag{7.154}$$

各 operator に掛かっている $(\pi\alpha_1 - \sigma)^{\frac{1}{2}}$ の factor は、$X(\sigma)E_\alpha|0\rangle$ の際に出てくる singurality を打ち消すためのものである。これらから、prefactor の continuum basis 表示が求まり、interaction vertex は string field の言葉で、

$$H_3 = \lim_{\sigma\to\pi\alpha_1}\int d\mu_3 \tilde{X}^I(\sigma)X^J(\sigma)v^{IJ}(Y(\sigma))\Phi(1)\Phi(2)\Phi(3), \tag{7.155}$$

$$Q_3^{-\dot{a}} = \lim_{\sigma\to\pi\alpha_1}\int d\mu_3 X^I(\sigma)s^{I\dot{a}}(Y(\sigma))\Phi(1)\Phi(2)\Phi(3), \tag{7.156}$$

$$\tilde{Q}^{-\dot{a}} = \lim_{\sigma\to\pi\alpha_1}\int d\mu_3 \tilde{X}^I(\sigma)\tilde{s}^{I\dot{a}}(Y(\sigma))\Phi(1)\Phi(2)\Phi(3), \tag{7.157}$$

と書ける。最終的な形はこの continuum basis 表示の方が綺麗だが、実用上の計算では oscillator 表示の方が扱い易い。また、前に述べたように continuum basis 表示の prefactor は生成演算子、消滅演算子の両方から成っていることが分かる。

7.3 pp-wave 上の Light-Cone String Field Theory

ここからは、pp-wave 上の light-cone string field thoery を考える。第一量子化から第二量子化への移行は、flat space の場合とほぼ同じ方法で行なうことができる [36, 37, 38, 39]。

flat space の対称性と pp-wave の対称性は大きく異なっている。代数の数からして、fermionic なものはどちらも 32 個であるが、bosonic なものは flat space は 55 個であり、pp-wave は 30 個であり、違いがある。pp-wave には、J^{+-}, J^{-I}, $J^{ij'}$ に相当する 25 個の代数がないのである。それにも関わらず、light-cone string field theory を構築する際に、flat space での議論をほとんどそのまま pp-wave の場合にも適用することができる。このことを以下で見ていこう。

7.3.1 Free Theory

第一量子化の notation を以下で便利なものにするため、前のものと少し変える。そこで、簡単にまとめておく。

まず、$\alpha = 2p^+$ として、string の worldsheet 上の長さを、

$$-\pi|\alpha| \leq \sigma \leq \pi|\alpha|, \tag{7.158}$$

とする。bosonic sector の作用は、

$$S_{\rm b} = \frac{e(\alpha)}{8\pi}\int_{-\pi|\alpha|}^{\pi|\alpha|} d\sigma\delta_{IJ}(\partial_+ x^I \partial_- x^J - \mu^2 x^I x^J), \tag{7.159}$$

ここで、$\partial_\pm = \partial_\tau \pm \partial_\sigma$ である。$x(\tau,\sigma)$, $p(\tau,\sigma) = \frac{1}{4\pi}\dot{x}(\tau,\sigma)$ をモード展開すると、

$$x(\sigma) = x_0 + \sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(x_n \cos\frac{n\sigma}{|\alpha|} + x_{-n}\sin\frac{n\sigma}{|\alpha|}\right), \tag{7.160}$$

$$p(0,\sigma) = \frac{1}{2\pi|\alpha|}\left(p_0 + \sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty}(p_n\cos\frac{n\sigma}{|\alpha|} + p_{-n}\sin\frac{n\sigma}{|\alpha|})\right). \tag{7.161}$$

ここで、

$$x_n = \frac{i}{\sqrt{\omega_n}}(a_n - a_n^\dagger), \qquad p_n = \frac{\sqrt{\omega_n}}{2}(a_n + a_n^\dagger), \qquad \omega_n = \sqrt{n^2 + (\alpha\mu)^2}. \tag{7.162}$$

正準交換関係は、

$$[x(\sigma), p(\sigma')] = i\delta(\sigma - \sigma') \tag{7.163}$$

より、

$$[a_m, a_n^\dagger] = \delta_{mn}, \tag{7.164}$$

$$[x_m, p_n] = i\delta_{mn}. \tag{7.165}$$

fermionic sector は、

$$S_{\rm f} = \frac{1}{8\pi}\int d\tau \int_0^{2\pi|\alpha|} d\sigma \left[i(\bar\theta\partial_\tau\theta + \theta\partial_\sigma\bar\theta) - \theta\partial_\sigma\theta + \bar\theta\partial_\sigma\bar\theta - 2\mu\bar\theta\Pi\theta \right]. \tag{7.166}$$

θ と共役運動量 $i\lambda = i\frac{1}{4\pi}\bar\theta$ を mode 展開すると、

$$\theta(0,\sigma) = \theta_0 + \sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\theta_n \cos\frac{n\sigma}{|\alpha|} + \theta_{-n}\sin\frac{n\sigma}{|\alpha|}\right), \tag{7.167}$$

$$\lambda(0,\sigma) = \frac{1}{2\pi|\alpha|}\left[\lambda_0 + \sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n \cos\frac{n\sigma}{|\alpha|} + \lambda_{-n}\sin\frac{n\sigma}{|\alpha|}\right)\right]. \tag{7.168}$$

正準交換関係

$$\{\theta(\sigma), \lambda(\sigma')\} = \delta(\sigma - \sigma'), \tag{7.169}$$

より、

$$\{\theta_m, \lambda_n\} = \delta_{mn}, \tag{7.170}$$

が従う。

kinematical generator は、P^+, P^I, J^{+I}, J^{ij}, $J^{i'j'}$, Q^+, $\bar Q^+$ である。dynamical generator は H, Q^-, $\bar Q^-$ である。flat space の場合と同様に、kinematical generator は interaction term を加えなくてよい generator であり、dynamical generator は interaction term を加えるべき generator である。

flat space の場合は、H_3, $Q_3^{+\mathcal{I}}$ は全ての kinematical generator と交換した。pp-wave の場合は、代数の交換関係は flat space の場合よりも複雑になっている。例えば、H と P^I は交換しない。しかし、H と P^I の交換関係の右辺は、kinematical generator J^{+I} である。両辺での摂動 parameter の次数を比較すると、H_3 は P^I と交換することが分かる。同様にして、H_3 は全ての kinematical generator と交換することが分かる。従って、flat space のときと同様の kinematical constraint が H_3 に課せられる。

7.3.2 Kinematical Constraint

それではまず、kinematical constraint を考える。すぐ前で説明したように、この constraint は free theory の場合と同様である。つまり、

$$\sum_{r=1}^{3} p_r(\sigma) = 0, \qquad \sum_{r=1}^{3} e(\alpha_r)x_r(\sigma) = 0, \tag{7.171}$$

$$\sum_{r=1}^{3} \lambda_r(\sigma) = 0, \qquad \sum_{r=1}^{3} e(\alpha_r)\theta_r(\sigma) = 0. \tag{7.172}$$

従って、interaction term は flat space の場合と同様に、

$$H_3 = \int d\mu_3 h_3(\alpha_r, p_r(\sigma), x_r'(\sigma), \lambda_r(\sigma))\Phi(1)\Phi(2)\Phi(3), \tag{7.173}$$

である。ここで、

$$\Phi(r) = \Phi[\tau, \alpha_r, p_r(\sigma), \lambda_r(\sigma)], \tag{7.174}$$

$$d\mu_3 = \left(\prod_{r=1}^{3} d\alpha_r D^8 p_r(\sigma) D^8 \lambda_r(\sigma) \right) \delta\left(\sum \alpha_r\right) \Delta^8\left[\sum p_r(\sigma)\right] \Delta^8\left[\sum \lambda_r(\sigma)\right]. \tag{7.175}$$

flat space の場合と同様に、explicit に計算するために oscillator 表示を用いる。デルタ汎関数も前と同様に、各 fourier mode[5] のデルタ関数の無限積と定義して、

$$\Delta\left[\sum_{r=1}^{3} p_r(\sigma)\right] = \prod_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\sum_{r=1}^{3} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_{mn}^{(r)} p_n^{(r)} \right). \tag{7.176}$$

ここで、$X_{mn}^{(r)}$ は flat space の場合の $A^{(r)}$, B, C を用いて次のように表わされる。

$r = 1, 2$ の場合は、

$$X_{mn}^{(r)} = \begin{cases} (C^{\frac{1}{2}} A^{(r)} C^{-\frac{1}{2}})_{mn} & m, n > 0, \\ \frac{\alpha_3}{\alpha_r} (C^{-\frac{1}{2}} A^{(r)} C^{\frac{1}{2}})_{mn} & m, n < 0, \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \epsilon^{rs} \alpha_s (C^{\frac{1}{2}} B)_m & n = 0 \text{ and } m > 0, \\ 1 & m = n = 0, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{7.177}$$

ただし、ϵ^{rs} は $\epsilon^{12} = 1$ の 2×2 反対称行列である。$r = 3$ の場合は、

$$X_{mn}^{(3)} = \delta_{mn}. \tag{7.178}$$

pp-wave では、ゼロモードも massive になり調和振動子となるので、$m = 0$ として string mode と同様に扱われている。

flat space の場合と同様に、$\mathcal{H}_3$ の状態 $|H_3\rangle$, $|V\rangle$ を定義して、

$$|H_3\rangle = h_3 |V\rangle, \tag{7.179}$$

$$|V\rangle = \int d\mu_3 \sum_{\{n^{(1)}, n^{(2)}, n^{(3)}\}} \prod_{r=1}^{3} \left[\prod_{k=-\infty}^{\infty} \psi_{n_k}(p_k^{(r)}) \prod_{s=1}^{\infty} \tilde{\chi}_{m_l^{(r)} m_{-l}^{(r)}}(\lambda_l^{(r)}, \lambda_{-l}^{(r)}) \right] |\{n^{(1)}, n^{(2)}, n^{(3)}\}\rangle. \tag{7.180}$$

$|Q_3^-\rangle$, $|\bar{Q}_3^-\rangle$ は h_3 をそれぞれ q_3, $\bar{q}_3$ 変えたものである。bosonicE_a 部分と fermionic 部分 E_b に分けておく。

$$|V\rangle = E_a E_b |0\rangle. \tag{7.181}$$

bosonic sector は、

$$E_a = \int \left(\prod_{r=1}^{3} \prod_{n=-\infty}^{\infty} dp_n^{(r)} \left(\frac{2}{\pi \omega_n^r} \right) \right) \Delta\left[\sum_{r=1}^{3} p_r(\sigma)\right] \tag{7.182}$$

$$\times \exp\left[\sum_{r=1}^{3} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(-\frac{1}{\omega_n^r} {p_n^{(r)}}^2 + \frac{2}{\sqrt{\omega_n^r}} p_n^{(r)} {a_n^{(r)}}^\dagger - \frac{1}{2} {a_n^{(r)}}^\dagger {a_n^{(r)}}^\dagger \right) \right]. \tag{7.183}$$

[5] flat space の場合と同様 cosine mode と sine mode に分ける

ガウス積分を行うと、

$$E_a = \exp\left[\frac{1}{2}\sum_{r,s=1}^{3}\sum_{m,n=-\infty}^{\infty} a_m^{(r)\dagger}\bar{N}_{mn}^{rs}a_n^{(s)\dagger}\right], \tag{7.184}$$

ここで、

$$\bar{N}_{mn}^{rs} = \delta^{rs}\delta_{mn} - 2(C_{(r)}^{\frac{1}{2}}X^{(r)^T}\Gamma_a^{-1}X^{(s)}C_{(s)}^{\frac{1}{2}})_{mn}, \tag{7.185}$$

$$(\Gamma_a)_{mn} = \sum_{r=1}^{3}(X^{(r)}C_{(r)}X^{(r)^T})_{mn}, \tag{7.186}$$

$$(C_{(r)})_{mn} = w_n^r\delta_{mn}, \tag{7.187}$$

である。flat な場合と同様、Neumann 係数 $\bar{N}_{mn}^{rs}$ には無限次元行列 Γ_+ の逆行列が出てくる。そのため、ここで得た vertex operator はまだ explicit な形をしていない。完全に explicit な形を得るためには、Neumann 係数の explicit な形を求めなくてはならない。

fermionic 部分もガウス積分することにより、

$$E_b = \exp\left[\sum_{r,s=1}^{3}\sum_{m,n=1}^{\infty} b_{-m}^{(r)\ \dagger}Q_{mn}^{rs}b_n^{(s)\dagger} - \sqrt{2}\Lambda\sum_{r=1}^{3}\sum_{m=1}^{\infty}Q_m^r b_{-m}^{(r)\ \dagger}\right]E_b^0|0\rangle, \tag{7.188}$$

となる。ここで、E_b^0 はゼロモードだけから成る部分である。また、$|0\rangle$ は $|0\rangle_1\otimes|0\rangle_2\otimes|0\rangle_3$ だが、$|0\rangle_{(r)}$ は $H_2^{(r)}$ の固有値がゼロつまり $b_0^{(r)\dagger}$ によって消される真空ではない。この真空は $\theta_0^{(r)}$ で消される真空である。よって、$H_2^{(r)}|0\rangle_{(r)} = 4\mu e(\alpha_r)$ である。この真空は前にも書いたように、$\mu\to 0$ で flat space の真空に一致する真空である。Q^{rs}, Q^r, E_b^0 の形は付録 E.2.1 にのせておく。

7.3.3 pp-wave Neumann 係数の性質: Factorization と Large μ での振舞い

ここでは、前節で求めた pp-wave Neumann 係数の性質を見ておこう [40, 38, 41]。ここで見る性質を用いて、次節で Neumann 係数の explicit な形を exact に求める。

上記の Γ_a は和公式を用いると、block diagonal な形であることが分かる。

$$(\Gamma_a)_{mn} = \begin{cases} (C^{\frac{1}{2}}\Gamma_+C^{\frac{1}{2}})_{mn}, & m,n>0, \\ -2\mu\alpha_3, & m=n=0, \\ (C^{\frac{1}{2}}\Gamma_-C^{\frac{1}{2}})_{-m,-n}, & m,n<0. \end{cases} \tag{7.189}$$

ここで、

$$\Gamma_+ = \sum_{r=1}^{3}A^{(r)}U_{(r)}A^{(r)^T}, \qquad \Gamma_- = \sum_{r=1}^{3}A_-^{(r)}U_{(r)}^{-1}A_-^{(r)^T}, \tag{7.190}$$

$$U_{(r)} = C^{-1}(C_{(r)}-\mu\alpha_r), \quad U_{(r)}^{-1} = C^{-1}(C_{(r)}+\mu\alpha_r), \quad A_-^{(r)} = \frac{\alpha_3}{\alpha_r}C^{-1}A^{(r)}C. \tag{7.191}$$

これを用いて、Neumann 係数を書き直しておく。$m,n>0$ の場合には non-vanishing component は、

$$\bar{N}_{mn}^{rs} = \delta^{rs}\delta_{mn} - 2\left[(C_rC^{-1})^{\frac{1}{2}}A^{(r)^T}\Gamma_+^{-1}A^{(s)}(C_sC^{-1})^{\frac{1}{2}}\right]_{mn}, \qquad m,n>0, \quad r,s\in\{1,2,3\}, \tag{7.192}$$

$$\bar{N}^{rs}_{m0} = \bar{N}^{sr}_{0m} = \sqrt{2\mu\alpha_s}\epsilon^{st}\alpha_t \left[(C_r C^{-1})^{\frac{1}{2}} A^{(r)^T} Y\right]_m, \qquad m > 0, \quad r,s,t \in \{1,2\}, \tag{7.193}$$

$$\bar{N}^{3r}_{m0} = \bar{N}^{r3}_{0m} = \sqrt{2m\alpha_r}\epsilon^{rs}\alpha_s \left[(C_3 C^{-1})^{\frac{1}{2}} Y\right]_m, \qquad m > 0, \quad r,s \in \{1,2\}, \tag{7.194}$$

$$\bar{N}^{rs}_{00} = \delta^{rs} + \frac{\sqrt{\alpha_r\alpha_s}}{\alpha_3} - \mu\sqrt{\alpha_r\alpha_s}\epsilon^{rt}\epsilon^{su}\alpha_t\alpha_u k, \qquad r,s,t,u \in \{1,2\}, \tag{7.195}$$

$$\bar{N}^{r3}_{00} = \bar{N}^{3r}_{00} = -\sqrt{\left|\frac{\alpha_r}{\alpha_3}\right|}, \qquad r,s \in \{1,2\}. \tag{7.196}$$

ただし、

$$Y = \Gamma_+^{-1} B, \qquad k = B^T \Gamma_+^{-1} B. \tag{7.197}$$

である。negative integer の component で non-vanishing なものは、

$$\bar{N}^{rs}_{-m,-n} = -(U_{(r)} \bar{N}^{rs} U_{(s)})_{mn}, \qquad m,n > 0, \tag{7.198}$$

だけである[6]。

Neumann 係数の Factorization

さて、flat space の Neumann 係数は (7.99) のように factorize されていた。さらに、N^r_m に関しては (7.112) と exiplicit な形が求まっていた。このことと (7.113) とから、vertex の explicit な形が得られていた。これらの flat space での結果を、pp-wave の場合、つまり $\mu \neq 0$ の場合に拡張したい。ここではまず、pp-wave の場合に一般化された (7.99) を求めよう [40, 38]。そこで、$\tilde{\Gamma}_+ = \sum_{r=1}^{\infty} A^{(r)} U^{-1}_{(r)} A^{(r)^T}$ を定義して、$\Gamma_+ C^{-1} \tilde{\Gamma}_+$ を考える。(E.9), (E.16) を用いると、

$$\Gamma_+ C^{-1} \tilde{\Gamma}_+ = U_3 C^{-1} \tilde{\Gamma}_+ + \Gamma_+ C^{-1} U_3^{-1} - \frac{\alpha_1\alpha_2}{2} BB^T. \tag{7.199}$$

また、(7.191), (E.16) から $\tilde{\Gamma}_+ = \Gamma_+ + \mu\alpha BB^T$ が分かる。これを上式に代入して、左右両側から Γ_+^{-1} をかけると、

$$C^{-1} + \frac{1}{2}\alpha_1\alpha_2 YY^T + \mu\alpha ZY^T = \Gamma_+^{-1} U_3 C^{-1} + C^{-1} U_3^{-1} \Gamma_+^{-1}. \tag{7.200}$$

ただし、$Z = (1 - \Gamma_+^{-1} U_3) C^{-1} B$ である。この式から Z を消去したい。そこで、(7.200) 右から B をかけると、$Z(1 + \mu\alpha k) = C^{-1} U_3^{-1} - \frac{\alpha_1\alpha_2 k}{2} Y$ となるので、この Z を (7.200) に代入して、C を左右からかけると、

$$\{\Gamma_+^{-1}, C_3\} = C + \frac{\alpha_1\alpha_2}{2(1+\mu\alpha k)} C U_3^{-1} YY^T C U_3^{-1} \tag{7.201}$$

を得る。この式から、(7.99) 一般化である次の関係式が得られる。

$$\bar{N}^{rs}_{mn} = -\frac{mn\alpha}{1+\mu\alpha k} \frac{\bar{N}^r_m \bar{N}^s_n}{\alpha_s \omega^r_m + \alpha_r \omega^s_n}. \tag{7.202}$$

ここで、

$$\bar{N}^r_m = -\left[(C^{-1} C_r)^{\frac{1}{2}} U_r^{-1} A^{(r)^T} Y\right]. \tag{7.203}$$

[6] Γ_+ は well-defined な量であるが、Γ_- は発散してしまい ill-defined な量である。しかし、well-defined な関係式 $\Gamma_-^{-1} = U_{(3)}(1 - \Gamma_+^{-1} U_{(3)})$ が導ける。これにより、$m,n < 0$ の Neumann 係数が $m,n > 0$ のものと関係づけられる。

Large μ 領域での Neumann 係数の振舞い

string 理論とゲージ理論側との双対性を調べるためには、large $\mu\alpha' p^+$ 領域での Neumann 係数の振舞いが知りたい。そこで、Neumann 係数に出てくる量の large μ での振舞いを調べよう [40]。ここで、気を付けなくてはならないことは、無限次元行列の積には無限級数が表われるが、この無限級数と large μ limit は一般には可換ではないことである。これを見るために、次の簡単な例を見てみる。

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} \frac{1}{1+\lambda p^2} = \frac{1}{6}\left(\pi^2 + 3\lambda - 3\pi\sqrt{\lambda}\coth\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}\right) \sim \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda} + O(\lambda), \tag{7.204}$$

ここでは、有限の λ についてまず和を計算して、それから $\lambda \to 0$ の limit をとったが、もし和をとる前に summand の limit をとってしまうと、$\sqrt{\lambda}$ の項は出てこず、λ のべきの項しか出てこない。これと同様の現象が我々の扱う無限次元の行列やベクトルに対しても生じるため、最後に large μ limit をとるように気を付けなくてはならない。まず、Γ_+^{-1} から考えよう。leading term は、(7.201) の第一項であり、

$$\Gamma_+^{-1} = \frac{1}{2} C C_3^{-1} + R. \tag{7.205}$$

この第一項は、$\frac{1}{2}CC_3^{-1} \to -\frac{C}{2\mu\alpha_3} + \frac{C^3}{4(\mu\alpha_3)^3} + \cdots$ と展開される。R の leading term は $O(\mu^{-4})$ である。上の表式を (7.205) に代入することで R に対する式

$$\{R, C_3\} = \frac{1}{2}\frac{\alpha_1\alpha_2}{1+\mu\alpha k} C U_r^{-1} Y Y^T C U_3^{-1}, \tag{7.206}$$

が得られる。ここで、large μ で、

$$R \to a_R \frac{\pi}{(\mu\alpha_3)^4}\left(\frac{\alpha_1 _ 2}{\alpha_3}\right)^2 C^3 B B^T C^3 + \cdots, \tag{7.207}$$

を仮定する。
同様にして、k の subleading term に対して、

$$k \to -\frac{1}{\mu\alpha} - a_k \frac{1}{\pi(\mu\alpha_1\alpha_2)^2} + \cdots, \tag{7.208}$$

と仮定する。Y に対しても subleading term に対して、

$$Y \to \frac{1}{\mu\alpha_3}\left[-\frac{1}{2}C + \left(\frac{1}{4} - x\right)\frac{C^3}{(\mu\alpha_3)^2} + \cdots\right] B, \tag{7.209}$$

を仮定する。(7.207), (7.208) を (7.206) に代入して leading term を比べることで、

$$a_R a_k = \frac{1}{64}, \tag{7.210}$$

を得る。
これらの定数 a_R, a_K, x はここまででは未知の定数だが、特に x は P^- の string state の間の matrix element に現れてくるため、重要である。後に Γ_+^{-1}, Y, k 等の explicit な形を求めるが、それによって、これらの定数は $a_R = \frac{1}{16}$, $a_k = \frac{1}{4}$, $x = \frac{1}{16}$ と求まる。

7.3.4 Prefactor の決定

さて、prefactor の決定をしよう [39, 36]。prefactor は pp-wave の場合も flat space の場合と同様の手法で決定できる。まず、prefactor は kinetic constraint を壊すことがないようなものでなくてはならない。この条件から、prefactor を構成する要素 $\mathcal{K}$, $\mathcal{Y}$ を決定する。これらは、oscillator に関して linear である。そして、dynamical constraint を課すことで $\mathcal{K}$, $\mathcal{Y}$ の言葉で prefactor が決定される。

Building Block $\mathcal{K}$, $\mathcal{Y}$ の構成

それでは、まず $\mathcal{K}$ を決定する。

$$\mathcal{K} \equiv \sum_{r=1}^{3} \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_{m(r)} a_m^{(r)\dagger} = \mathcal{K}_0 + \mathcal{K}_+ + \mathcal{K}_-, \tag{7.211}$$

$$\mathcal{K}_0 \equiv \sum_{r=1}^{3} F_{0(r)} a_m^{(r)\dagger}, \qquad \mathcal{K}_+ \equiv \sum_{r=1}^{3} \sum_{m=1}^{\infty} F_{m(r)} a_m^{(r)\dagger}, \qquad \mathcal{K}_- \equiv \sum_{r=1}^{3} \sum_{m=1}^{\infty} F_{-m(r)} a_{-m}^{(r)\ \dagger}. \tag{7.212}$$

$\mathcal{K}$ に対する kinematical constraint は、

$$[\sum_{r=1}^{3} p_r(\sigma_r), \mathcal{K}] = [\sum_{r=1}^{3} e(\alpha_r) x_r(\sigma_r), \mathcal{K}] = 0. \tag{7.213}$$

この式をフーリエ・モード に分解すると、

$$\sum_{r=1}^{3} X^{(r)} C_r^{1/2} F_{(r)} = \sum_{r=1}^{3} \alpha_r X^{(r)} C_r^{-1/2} F_{(r)} = 0. \tag{7.214}$$

$X^{(r)}$ の形から、上式は non-negative モードと negative モードに分離する。また、ゼロ・モードはすぐに解けて、

$$F_{0(1)} = -\sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \sqrt{\mu\alpha_1}\alpha_2, \qquad F_{0(2)} = \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \sqrt{\mu\alpha_2}\alpha_1, \qquad F_{0(3)} = 0. \tag{7.215}$$

positive モードに対する式は、(7.215) を (7.214) に代入して、

$$\sum_{r=1}^{3} [A^{(r)} C^{-1/2} C_r^{1/2} F_{(r)}] = \frac{1}{\sqrt{\alpha'}} \mu\alpha B, \tag{7.216}$$

$$\sum_{r=1}^{3} \mu\alpha_r [A^{(r)} C^{-1/2} C_r^{-1/2} F_{(r)}] = \frac{1}{\sqrt{\alpha'}} \mu\alpha B. \tag{7.217}$$

(7.216) から (7.217) を引いて、

$$\sum_{r=1}^{3} A^{(r)} C^{1/2} C_r^{-1/2} U_r F_{(r)} = 0. \tag{7.218}$$

これから、(E.15) より、

$$F_{(r)} = \frac{1}{\alpha_r}[C_r^{1/2} C^{1/2} U_r^{-1} A^{(r)^T} V, \tag{7.219}$$

を得る。ただし、V は任意のベクトルである。この V はこの式を (7.217) に代入することで得られる。結局 $F_{(r)}$ は、

$$F_{(r)} = \frac{1}{\sqrt{\alpha'}} \frac{\alpha}{\alpha_r} C_r^{1/2} C^{1/2} U_r^{-1} A^{(r)^T} \tilde{\Gamma}_+^{-1} B \tag{7.220}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{\alpha'}} \frac{1}{1+\mu\alpha k} \frac{\alpha}{\alpha_r} C \bar{N}^r. \tag{7.221}$$

以上で non-negative モードの $\mathcal{K}_0 + \mathcal{K}_+$ が求まったが、これは $\mu \to 0$ で flat space の X になることが簡単に分かる。

次に、negative モードに移ろう。(7.214) は、

$$\sum_{r=1}^{3} \frac{1}{\alpha_r} [A^{(r)} C^{1/2} C_r^{1/2} F_{(r)}]_{-m} = 0, \tag{7.222}$$

$$\sum_{r=1}^{3} [A^{(r)} C^{1/2} C_{(r)}^{-1/2} F_{(r)}]_{-m} = 0. \tag{7.223}$$

(7.223) を (7.218) と見比べることにより、

$$F_{-m(r)} \sim U_{mr} F_{m(r)} \qquad (U_{mr} \text{は} U_r \text{の} mm \text{成分}) \tag{7.224}$$

と予想できるが、これを (7.222) に代入すると発散してしまう。しかし、この operator $\mathcal{K}_-$ を worldsheet 上の場の形で表わすと、この発散は $\delta(\sigma - \pi\alpha_1) - \delta(\sigma + \pi\alpha_1)$ の形によるものであることが分かる。$\sigma = \pi\alpha_1$ と $\sigma = -\pi\alpha_1$ は相互作用点であり、同一視される点である。従って、この発散は打ち消し合い、問題を起こさない。この現象は、flat space の場合に起こっているものと同様のものである。よって、$F_{-m(r)}$ は

$$F_{-m(r)} = i U_{mr} F_{m(r)}, \tag{7.225}$$

である。ここで normalization factor i は、operator $\mathcal{K}_-$ を worldsheet の場で表わした際に望ましい形が得られるようにとられた。

それでは、fermionic な building block $\mathcal{Y}$ に移ろう。$\mathcal{Y}$ に課される kinematical constraint は、

$$\{\sum_{r=1}^{3} \lambda_r(\sigma), \mathcal{Y}\} = \{\sum_{r=1}^{3} e(\alpha_r)\theta_r(\sigma), \mathcal{Y}\} = 0. \tag{7.226}$$

flatspace の場合と同様に、negative モードの oscillator は prefactor に入ってこない。従って、以下では non-negative モードだけを考えればよい。$\mathcal{Y}$ は、

$$\mathcal{Y} = \sum_{r=1}^{3} G_{0(r)} \lambda_0^{(r)} + \sum_{r=1}^{3} \sum_{m=1}^{\infty} G_{m(r)} b_m^{(r)\dagger}. \tag{7.227}$$

ただし、$G_{0(3)}$ は $\sum_{r=1}^{3}\lambda_0^{(r)}|E_b^0\rangle = 0$ を用いて、ゼロとした。(7.226) をフーリエ展開して、

$$\sum_{r=1}^{3}\frac{1}{\sqrt{|\alpha_r|}}[A^{(r)}CC_r^{-1/2}P_rG_{(r)}]_m = 0, \tag{7.228}$$

$$-[C^{1/2}B]_m\sum_{r,s=1}^{2}\epsilon^{rs}\alpha_r\alpha_sG_{0(r)} + \sum_{r=1}^{3}e(\alpha_r)\sqrt{|\alpha_r|}[C^{1/2}A^{(r)}C_r^{-1/2}P_r^{-1}G_{(r)}]_m = 0. \tag{7.229}$$

ゼロ・モードは簡単に解けて、

$$G_{0(1)} = -\sqrt{\frac{2}{\alpha'}}\alpha_2, \qquad G_{0(2)} = \sqrt{\frac{2}{\alpha'}}\alpha_1. \tag{7.230}$$

positive モードに関して考えよう。(7.228) から (E.15) を用いて、$G_{(r)} = \frac{e(\alpha_r)}{\sqrt{|\alpha_r|}}P_r^{-1}C_r^{-1/2}A^{(r)^T}W$ と書ける。ここで、W は任意のベクトルである。(7.229) に上のゼロ・モードを代入して、

$$\sum_{r=1}^{3}e(\alpha_r)\sqrt{|\alpha_r|}[A^{(r)}C_r^{-1/2}P_r^{-1}G_{(r)}]_m = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha'}}B_m. \tag{7.231}$$

W はこの式に代入することにより求まり、

$$G_{m(r)} = \frac{\alpha e(\alpha_r)}{\sqrt{\alpha'|\alpha_r|}}[P_r^{-1}C_r^{1/2}A^{(r)^T}\tilde{\Upsilon}^{-1}B]_m. \tag{7.232}$$

ここで、

$$\tilde{\Upsilon} \equiv \sum_{r=1}^{3}A^{(r)}P_r^{-2}A^{(r)^T}, \qquad \tilde{\Upsilon}^{-1} = \Gamma^{-1} - \frac{1}{2}\frac{\mu\alpha}{1+\mu\alpha k}(\Gamma^{-1}B)(\Gamma^{-1}B)^T(1+\Pi). \tag{7.233}$$

よって、$G_{(r)}$ は bosonic mode の $F_{(r)}$ を用いて、

$$G_{(r)} = (1+\frac{1}{2}\mu\alpha k(1-\Pi))\sqrt{|\alpha_r|}P_r^{-1}U_rC^{-1/2}F_{(r)}, \tag{7.234}$$

と書ける。

$\mathcal{K}$, $\mathcal{Y}$ の Continuum Basis 表示

以上で、prefactor を構成する要素 $\mathcal{K}$, $\mathcal{Y}$ が求まった。ここでは、$\mathcal{K}$, $\mathcal{Y}$ は kinematical constraint を用いて定義され、ocsillator basis で表示されている。これらの $\mathcal{K}$, $\mathcal{Y}$ を worldsheet 上の場で表わそう。flat space の場合と同じように、次の量を定義する。

$$\partial X(\sigma) = 4\pi\frac{\sqrt{-\alpha}}{\alpha'}(\pi\alpha_1-\sigma)^{1/2}(x_1'(\sigma)+x_1'(-\sigma)), \tag{7.235}$$

$$P(\sigma) = -2\pi\sqrt{-\sigma}(\pi\alpha_1-\sigma)^{1/2}(p_1(\sigma)+p_1(-\sigma)). \tag{7.236}$$

ここで、$\lim_{\sigma\to\pi\alpha_1} P(\sigma)|V\rangle$ を考える。$p(\sigma)$ を ocsillator 表示して計算すると、

$$\begin{aligned} P|V\rangle &\equiv \lim_{\sigma\to\pi\alpha_1} P(\sigma)|V\rangle \\ &= -\frac{2\sqrt{-\alpha}}{\alpha_1\sqrt{\alpha'}} \lim_{\epsilon\to 0} \sigma^{1/2} \sum_{r=1}^{3}\sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sqrt{\omega_{n(1)}} \cos(n\epsilon/\alpha_1) \bar{N}^{1r}_{nm}\right] a_m^{(r)\dagger}|V\rangle. \end{aligned} \tag{7.237}$$

実際に ϵ をゼロにもっていくと、大括弧の中は large n の項の和が発散するようになる。その発散と $\epsilon^{1/2}$ が打ち消しあい、有限の結果を与えるわけである。そこで、$\bar{N}^{1r}_{nm}$ を large n で近似して、

$$\bar{N}^{1r}_{n0} \sim -\sqrt{2\mu\alpha_r}\epsilon^{rs}\alpha_s \bar{N}^1_n, \qquad \bar{N}^{1r}_{nm} \sim -\frac{\alpha}{\alpha_r}\frac{1}{1+\mu\alpha k}(n^{-1/2}C^{1/2}\bar{N}^1)_n (C\bar{N}^r)_m \quad m>0. \tag{7.238}$$

これを (7.237) で使うと、

$$P|V\rangle = f(\mu)(\mathcal{K}_0+\mathcal{K}_+)|V\rangle, \qquad f(\mu) = -2\frac{\sqrt{-\alpha}}{\alpha_1}\lim_{\epsilon\to 0}\epsilon^{1/2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n}\cos(n\epsilon/\alpha_1)\bar{N}^1_n. \tag{7.239}$$

これから、P と $\mathcal{K}_0+\mathcal{K}_+$ は normalization $f(\mu)$ 以外は一致している。よって、continuum basis での表示が得られた。$\mu=0$ では $f(0)=1$ であり、continuum basis と oscillator basis の表示は normalization を含めて一致する。これは、flat space の場合に見た通りである。

同様にして、negative モードに対しても

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi}\partial X|V\rangle &\equiv \lim_{\sigma\to\pi\alpha_1}\frac{1}{4\pi}\partial X(\sigma)|V\rangle \\ &= \frac{2i\sqrt{-\alpha}}{\alpha_1\sqrt{\alpha'}}\lim_{\epsilon\to 0}\epsilon^{1/2}\sum_{r=1}^{3}\sum_{m=1}^{\infty}\left[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{\sqrt{\omega_{n(1)}}}\cos(n\epsilon/\alpha_1)\bar{N}^{rs}_{-n,-m}\right] a_{-m}^{(r)\ \dagger}|V\rangle. \end{aligned} \tag{7.240}$$

ここで、large n での Neumann 係数の positive モードと negative モードの間の関係式 $\bar{N}^{1r}_{-n,-m} \sim -\bar{N}^{1r}_{nm}U_{mr}$ を用いると、

$$\partial X|V\rangle = f(\mu)\mathcal{K}_-|V\rangle. \tag{7.241}$$

ここで、P と $\mathcal{K}_0+\mathcal{K}_+$ の関係と共通の normalization factor $f(\mu)$ が出てくるように、$\mathcal{K}_-$ の normalization factor i は決めたのであった。

fermionic モードの場合も、

$$Y(\sigma) = -2\pi\sqrt{\frac{-2\sigma}{\alpha'}}(\pi\alpha_1-\sigma)^{1/2}(\lambda_1(\sigma)+\lambda_1(-\sigma)), \tag{7.242}$$

を定義して、

$$\begin{aligned} Y|V\rangle &\equiv \lim_{\sigma\to\pi\alpha_1} Y(\sigma)|V\rangle \\ &= -\sqrt{\frac{2}{\alpha'}}\sqrt{\frac{-2\alpha}{\alpha_1}}\lim_{\epsilon\to 0}\epsilon^{1/2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cos(n\epsilon/\alpha_1)\left[\sqrt{2}\Lambda Q^1_n + \sum_{r=1}^{3}\sum_{m=1}^{\infty}Q^{1r}_{nm}b_m^{(r)\dagger}\right]|V\rangle. \end{aligned} \tag{7.243}$$

large n での fermionic な Neumann 係数の振舞いは、

$$Q^1_n \sim \frac{1}{\sqrt{\alpha_1}}\frac{1}{1+\mu\alpha k}(1+\frac{1}{2}\mu\alpha k(1+\Pi))[n^{-1/2}C\bar{N}^1]_n, \tag{7.244}$$

$$Q^{1r}_{nm} \sim \frac{\alpha'}{\alpha_1}\frac{1}{1+\mu\alpha k}(1+\frac{1}{2}\mu\alpha k(1+\Pi))[n^{-1/2}C\bar{N}^1]_n G_{m(r)}. \tag{7.245}$$

よって、

$$Y|V\rangle = f(\mu)\frac{1}{1+\mu\alpha k}(1+\frac{1}{2}\mu\alpha k(1+\Pi))\mathcal{Y}|V\rangle, \tag{7.246}$$

が分かる。bosonic 係数の場合と同じ normalization $f(\mu)$ 以外に、μ 依存の spinor に働く matrix が normalization に入ってくる。これらの factor は $\mu \to 0$ で 1 となる。つまり、$\mu = 0$ では $Y|V\rangle = \mathcal{Y}|V\rangle$ となり、flat space の場合の結果と一致する。bosonic 係数と fermionic 係数に共通の normalization factor $f(\mu)$ は、後で述べる interaction term の overall normalization 等に簡単に吸収できるため重要でない。しかし、bosonic 係数と fermionic 係数の間の relative な normalization の違い $\frac{1}{1+\mu\alpha k}(1+\frac{1}{2}\mu\alpha k(1+\Pi))$ は重要である。

Dynamical Constraint による Prefactor の決定

dynmical constraint を課すことによって、prefactor を求める。ここで、supercharge Q^-, $\bar{Q}^-$ の線形結合

$$\sqrt{2}\eta Q \equiv Q^- + i\bar{Q}^-, \qquad \sqrt{2}\bar{\eta}\tilde{Q} \equiv Q^- - i\bar{Q}^- \tag{7.247}$$

を定義しておく。ただし、$\eta = e^{i\pi/4}$ である。この supercharge で dynamical generator 同士の代数の交換関係を書くと、

$$\{Q_{\dot{a}}, \tilde{Q}_{\dot{b}}\} = 0, \quad \{Q_{\dot{a}}, Q_{\dot{b}}\} = \{\tilde{Q}_{\dot{a}}, \tilde{Q}_{\dot{b}}\} = 2\delta_{\dot{a}\dot{b}}H + i\mu\left((\gamma_{ij}\Pi)_{\dot{a}\dot{b}}J^{ij} + (\gamma_{i'j'}\Pi)_{\dot{a}\dot{b}}J^{i'j'}\right). \tag{7.248}$$

ここで、kinematical generator J^{ij}, $J^{i'j'}$ は interaction term による correction を受けないので $O(\kappa)$ の項には入ってこない。従って、interaction term が従う交換関係、つまり dynamical constraint は flat space の場合と同じものになる。これを書き下すと、

$$\sum_{r=1}^{3} Q^{(r)}_{2\dot{a}}|Q_{3\dot{b}}\rangle + \sum_{r=1}^{3} Q^{(r)}_{2\dot{b}}|Q_{3\dot{a}}\rangle = 2|H_3\rangle\delta_{\dot{a}\dot{b}}, \tag{7.249}$$

$$\sum_{r=1}^{3} \tilde{Q}^{(r)}_{2\dot{a}}|\tilde{Q}_{3\dot{b}}\rangle + \sum_{r=1}^{3} \tilde{Q}^{(r)}_{2\dot{b}}|\tilde{Q}_{3\dot{a}}\rangle = 2|H_3\rangle\delta_{\dot{a}\dot{b}}, \tag{7.250}$$

$$\sum_{r=1}^{3} Q^{(r)}_{2\dot{a}}|\tilde{Q}_{3\dot{b}}\rangle + \sum_{r=1}^{3} \tilde{Q}^{(r)}_{2\dot{b}}|Q_{3\dot{a}}\rangle = 0. \tag{7.251}$$

以下の計算では、Q_2 と $\mathcal{K}$, $\mathcal{Y}$ の交換関係や Q_2 の $|V\rangle$ への作用を $\mathcal{K}$, $\mathcal{Y}$ の言葉で書き直す関係式が有用であるので書き下しておこう。

$$\frac{2\eta}{\sqrt{\alpha'}}\sum_{r=1}^{3}[Q_{(r)}, \tilde{\mathcal{K}}]|V\rangle = \frac{2\bar{\eta}}{\sqrt{\alpha'}}\sum_{r=1}^{3}[\tilde{Q}^{(r)}, \mathcal{K}]|V\rangle = \mu\gamma(1+\Pi)\mathcal{Y}|V\rangle, \tag{7.252}$$

$$\frac{2\eta}{\sqrt{\alpha'}}\sum_{r=1}^{3}\{Q^{(r)},\mathcal{Y}\}\tilde{\mathcal{K}}^I|V\rangle = i\gamma^J(1+\frac{1}{2}\mu\alpha k(1-\Pi))\mathcal{K}^J\tilde{\mathcal{K}}^I|V\rangle - i\mu\frac{\alpha}{\alpha'}\gamma^I(1-\Pi)|V\rangle, \tag{7.253}$$

$$\frac{2\bar{\eta}}{\sqrt{\alpha'}}\sum_{r=1}^{3}\{\tilde{Q}^{(r)},\mathcal{Y}\}\mathcal{K}^I|V\rangle = -i\gamma^J(1+\frac{1}{2}\mu\alpha k(1-\Pi))\tilde{\mathcal{K}}^J\mathcal{K}^I|V\rangle + i\mu\frac{\alpha}{\alpha'}\gamma^I(1-\Pi)|V\rangle. \tag{7.254}$$

$$\frac{2\eta}{\sqrt{\alpha'}}\sum_{r=1}^{3}Q^{(r)}|V\rangle = -\frac{\alpha'}{\alpha}\mathcal{K}\gamma(1+\tfrac{1}{2}\mu\alpha k(1+\Pi))\mathcal{Y}|V\rangle, \tag{7.255}$$

$$\frac{2\bar{\eta}}{\sqrt{\alpha'}}\sum_{r=1}^{3}\tilde{Q}^{(r)}|V\rangle = -\frac{\alpha'}{\alpha}\tilde{\mathcal{K}}\gamma(1+\tfrac{1}{2}\mu\alpha k(1+\Pi))\mathcal{Y}|V\rangle, \tag{7.256}$$

さて、prefactor の形として flat space からの類推で次の仮定をする。

$$|H_3\rangle = \left((1+\mu\alpha k)\tilde{\mathcal{K}}^I\mathcal{K}^J - \mu\frac{\alpha}{\alpha'}\delta^{IJ}\right)v_{IJ}(Y)|V\rangle, \tag{7.257}$$

$$|Q_{3\dot{a}}\rangle = (1+\mu\alpha k)^{1/2}\tilde{\mathcal{K}}^I s^I_{\dot{a}}(Y)|V\rangle, \tag{7.258}$$

$$|\tilde{Q}_{3\dot{a}}\rangle = (1+\mu\alpha k)^{1/2}\mathcal{K}^I\tilde{s}^I_{\dot{a}}(Y)|V\rangle, \tag{7.259}$$

ただし、(7.243) の Y から factor $f(\mu)$ を取り除いたものを改めて Y と再定義した。

$$Y \equiv \frac{1}{1+\mu\alpha k}(1+\frac{1}{2}\mu\alpha k(1+\Pi))\mathcal{Y}. \tag{7.260}$$

また、

$$\tilde{\mathcal{K}} \equiv \mathcal{K}_0 + \mathcal{K}_+ - \mathcal{K}_-, \tag{7.261}$$

である。(7.249), (7.250) にこれらの仮定を代入して、(7.252), (7.253), (7.254), (7.255) を用いて計算すると、v^{IJ}, $s^I_{\dot{a}}$, $\tilde{s}^I_d a$ に対して、

$$\delta_{\dot{a}\dot{b}}v^{IJ} = i\frac{\alpha'^{3/2}}{2\alpha}\gamma^J_{a(\dot{a}}D^a s^I_{\dot{b})}, \qquad \delta_{\dot{a}\dot{b}}v^{IJ} = -i\frac{\alpha'^{3/2}}{2\alpha}\gamma^I_{a(\dot{a}}\bar{D}^a\tilde{s}^J_{\dot{b})}. \tag{7.262}$$

$$-\delta_{\dot{a}\dot{b}}v^{IJ} = i\frac{\alpha'^{3/2}}{2\alpha}\gamma^I_{a(\alpha}\left(D^a + i[\Pi\bar{D}]^a\right)s^I_{\dot{b})}, \quad -\delta_{\dot{a}\dot{b}}v^{IJ} = -i\frac{\alpha'^{3/2}}{2\alpha}\gamma^I_{a(\dot{a}}\left(\bar{D}^a - i[\Pi D]^a\right)\tilde{s}^I_{\dot{b})}, \tag{7.263}$$

という式を得る。D^a, $\bar{D}^a$ は flat space のときと同様、$D^a \equiv \eta Y^a + \bar{\eta}\frac{\alpha}{\alpha'}\frac{\partial}{\partial Y_a}$, $\bar{D}^a \equiv \bar{\eta}Y^a + \eta\frac{\alpha}{\alpha'}\frac{\partial}{\partial Y_a}$ である。(7.262) は $\tilde{\mathcal{K}}^I\mathcal{K}^J$ に比例する項から (7.263) は $\mu\delta^{IJ}$ に比例する項から得られる。(7.262) は flat space のときの式と同じである。従って、(7.262) の解は flat space と同じであり、

$$v^{IJ} = w^{IJ} + y^{IJ}, \qquad s^I_{da} = -\frac{2}{\alpha'}\frac{i}{\sqrt{2}}(\eta s^I_{1\dot{a}} + \bar{\eta}s^I_{2\dot{a}}), \qquad \tilde{s}^I_{\dot{a}} = \frac{2}{\alpha'}\frac{i}{\sqrt{2}}(\bar{\eta}s^I_{1\dot{a}} + \eta s^I_{2\dot{a}}). \tag{7.264}$$

これらの解は、pp-wave に特有の式 (7.263) も満たしている。

最後に、この解が (7.251) を満たすことを確かめることは、(7.257), (7.258), (7.259) の仮定の正当性を確かめるためにも重要だが、これは実際に満たされている。(7.251) からも flat space の場合と同様の式と pp-wave のみに表われる式が出てくる。

以上で prefactor が求まった。よって、dynamical generator の $O(\kappa)$ の interaction term が求まった。しかし、ここで気を付けなくてはならないのは、ここまででではこの interaction term の overall normalization は求まっていないということである。また、摂動展開係数 κ についてもふれていなかった。normalization factor は g_s, μ, α', α_r の関数であり、κ は g_s, μ, α' の関数である。従って、これらの factor をまとめて κ と書くことにする。これを決定するのは、flat space の場合よりも厄介である。なぜならば、pp-wave には J^{-I} の generator がないからである。この normalization factor は、supergravity での計算結果と small μ 領域で比較するか、CFT の計算結果と large μ 領域で比較するかして漸近的な振舞いを決定できる。

7.4 Interaction Vertex の Matrix Element

この章では、CFT 側との双対性を視野に入れて、前節で得た H_3 の string state 間の matrix element を求める。前節では、H_3 をまず 3-string state の状態として $|H_3\rangle$ を oscillator basis で求めた。flat space の場合と同様にこの $|H_3\rangle$ から汎関数表示を得ることができる。しかし、flat space の節で述べたように実際の計算では 3-string state の状態として表わされている oscillator 表示の方が扱いやすい。従って、この章では $|H_3\rangle$ を用いて、matrix element を計算していく [37, 42, 39]。

3 つの string state $|\psi_1\rangle$, $|\psi_2\rangle$, $\psi_3\rangle$ の間の H_3 の matrix element は、

$$\langle\psi_3|H_3|\psi_1\rangle|\psi_2\rangle = \langle\psi_3|\langle\psi_2|\langle\psi_1|H_3\rangle, \tag{7.265}$$

となる。

7.4.1 Bosonic State の間の Matrix Element

ここでは、bosonic excitation のみを持つ状態の間の matrix element を考える。ここでは、CFT 側と比較するために two impurity state を考える。この章で用いてきた string field theory の oscillator basis と BMN の oscillator basis は、次で移り合う。

$$a_n^{\rm BMN} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_{|n|} + ie(n)a_{-|n|}), \qquad a_0^{\rm BMN} = a_0, \tag{7.266}$$

以下では、記号の簡略化のために

$$\alpha_n \equiv a_n^{\rm BMN}, \tag{7.267}$$

と書く。他の量も BMN basis に直しておこう。Neumann 係数は、

$$\widetilde{N}^{rs}_{mn} = \begin{cases} \frac{1}{2}\bar{N}^{rs}_{|m||n|}(1 + U_{rm}U_{sn}), & m, n \neq 0, \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{N}^{rs}_{|m|0}, & m \neq 0, \\ \bar{N}^{rs}_{00}, & m = n = 0, \end{cases} \tag{7.268}$$

prefactor を構成する $\mathcal{K}$, $\tilde{\mathcal{K}}$ は、

$$\mathcal{K} = \sum_{r=1}^{3}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{K}_{n(r)}{\alpha_n^{(r)}}^\dagger, \qquad \tilde{\mathcal{K}} = \sum_{r=1}^{3}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \tilde{\mathcal{K}}_{n(r)}{\alpha_n^{(r)}}^\dagger, \tag{7.269}$$

ただし、

$$\mathcal{K}_{n(r)} = \begin{cases} F_{0(r)}, & n=0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}F_{|n|(r)}(1-U_{rn}), & n\neq 0 \end{cases}, \qquad \tilde{\mathcal{K}}_{n(r)} = \begin{cases} F_{0(r)}, & n=0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}F_{|n|(r)}(1+U_{rn}), & n\neq 0 \end{cases}. \tag{7.270}$$

考える string state は、

$$|v\rangle_r, \qquad |0_i\rangle_r \equiv \alpha_0^{(r)i\dagger}|v\rangle, \qquad |n_{ij}\rangle_r \equiv \alpha_n^{(r)i\dagger}\alpha_{-n}^{(r)j\dagger}, \tag{7.271}$$

である。気を付けなくてならないのは、BMN 状態は $b_0^\dagger$ の真空 $|v\rangle$ に BMN basis oscillator をかけて作られており、string field theory は $\theta_0^\dagger$ の真空 $|0\rangle$ を用いていることである。これらの vacuum は、

$${}_r\langle v| = {}_r\langle 0|\left(\frac{\alpha_r}{2}\right)^2\prod_{a=5}^{8}\theta_0^{(r)a}, \quad r=1,2, \qquad {}_3\langle v| = {}_r\langle 0|\left(\frac{\alpha_3}{2}\right)^2\prod_{a=1}^{4}\theta_0^{(3)a}. \tag{7.272}$$

で関係づく。

さて、今は bosonic excitation のみの string state の matrix element を考えているので、fermionic oscillator からの寄与は vacuum に含まれているゼロ・モードからのみ受ける。${}_1\langle v|_2\langle v|_3\langle v|$ には 12 個の fermionic ゼロ・モードが含まれているが、これらのうち 8 個は $|V\rangle$ の中の E_{0b} と contract する。残りの 4 個を prefactor の中のゼロ・モードと contract しなくてはならない。従って、prefactor の内効いてくるのは v^{IJ} の中の Y^4 の項だけである。このことを考慮して fermionic モードからの寄与を計算してしまうと、

$$-\left(\frac{\alpha_3}{2}\right)^4(1+\mu\alpha k)^{-2}\Pi_{IJ}, \tag{7.273}$$

となる。ただし、$\Pi_{IJ} \equiv t^{IJ}_{5678} = \mathrm{diag}(\mathbf{1}_4, -\mathbf{1}_4)$ である。

次に、まだ決まっていなかった normalization を考えよう。前節の最後で κ を normalization factor と摂動展開係数をまとめたものとして再定義した。これは、supergravity との比較により small μ 領域で CFT との比較により large μ 領域での漸近的振舞いが決定される。この両方の漸近的振舞いを満たすには、

$$\kappa = g_s\frac{\pi^7\alpha'^3}{\alpha^2}(1+\mu\alpha k)^2, \tag{7.274}$$

とすればよい。そこで、この式が μ の全領域で正しいと予想できる。以上から、bosonic state 間の matrix element を計算する際には、interaction vertex は、

$$\kappa|H_3\rangle = -\pi g_s\alpha'\mu^2(1+\mu\alpha k)\tilde{\mathcal{K}}^I\mathcal{K}^J\Pi_{IJ}E_a|0\rangle\delta\left(\textstyle\sum\alpha_r\right), \tag{7.275}$$

となる。ここで、$|V\rangle$ の中に含まれる bosonic ゼロ・モードのガウス積分の際に出てきた determinant $\left(\frac{2}{\alpha'}\frac{2\mu}{\pi^3}\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_3}\right)^2$ も含めておいた。(7.275) を Neumann 係数の factorization の関係式 (7.202) を用いて、次のように書き直すと matrix element の計算の見通しがよくなる。

$$\kappa|H_3\rangle = \frac{1}{2}g_2\beta(\beta+1)\sum_{r=1}^{3}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{\omega_{nr}}{\alpha_r}\alpha_n^{(r)I\dagger}\alpha_{-n}^{(r)J}\Pi_{IJ}E_a\rangle|\alpha_3|\delta(\textstyle\sum\alpha_r). \tag{7.276}$$

ここで、prefactor の 2 つの生成消滅演算子の内、一つが消滅演算子になっていることに注意しよう。また、$g_s = \frac{g_2}{4\pi\mu^2\alpha_3^2}$ を用いて g_s を書き直しておいた。(7.276) が実際に (7.275) に等しいことを見るには、この消滅演算子 $\alpha_{-n}^{(r)J}$ を E_a の右側に移動すればよい。

matrix element を計算すると、

$$\kappa\langle n_{1,2}|H_3|0_1\rangle|0_2\rangle = \frac{1}{2}g_2\beta(\beta+1)\left(\frac{\omega_{n3}}{\alpha_3}\widetilde{N}^{31}_{m0}\widetilde{N}^{32}_{m0}\times 2 + \frac{\omega_{01}}{\alpha_1}\widetilde{N}^{31}_{m0}\widetilde{N}^{32}_{m0} + \frac{\omega_{02}}{\alpha_2}\widetilde{N}^{32}_{m0}\widetilde{N}^{31}_{m0}\right)|\alpha_3|\delta(\textstyle\sum\alpha_r)$$
$$= -g_2\mu\alpha_1\alpha_2(-\beta(\beta+1))^{3/2}\left[CU_3^{-1}C_3\right]_n(\bar{N}^3_{|n|})^2|\alpha_3|\delta(\textstyle\sum\alpha_r), \tag{7.277}$$

$$\kappa\langle n_{1,2}|H_3|m_{1,2}\rangle|v\rangle = g_2\frac{\beta+1}{4\alpha_3^2}(\alpha_1\omega_{n3}+\alpha_3\omega_{m1})(\bar{N}^{13}_{|m||n|})^2(1-U^2_{m1}U^2_{n3})|\alpha_3|\delta(\textstyle\sum\alpha_r), \tag{7.278}$$

CFT 側の matrix element と比較するために、large μ で展開しておこう。

$$\kappa\langle n_{12}|H_3|0_1\rangle|0_2\rangle = -\mu g_2\lambda'\sqrt{-\beta(\beta+1)}\frac{\sin^2(n\pi\beta)}{2\pi^2}\left[1-\frac{1}{4}(3-16x)n^2\lambda'+O(\lambda'^2)\right]|\alpha_3|\delta(\textstyle\sum\alpha), \tag{7.279}$$

$$\kappa\langle n_{1,2}|H_3|m_{1,2}\rangle|v\rangle = \left[\mu g_2\lambda'(\beta+1)\frac{\sin^2(n\pi\beta)}{2\pi^2}+O(\lambda'^2)\right]|\alpha_3|\delta(\textstyle\sum\alpha). \tag{7.280}$$

7.5 pp-wave Nuemann 係数

この節では pp-wave Neumann 係数に対するより扱い易い形を得る [43]。ここで得られる形は基本的な関数の無限和を含んでいるが、その級数は任意の有限の μ に対して収束する。この形から、large μ 漸近展開が求められ、まだ求まっていなかった定数 a_R, a_k, x が決められる。

前節まで分かっていることは次のことである。まず、$\mu = 0$ つまり flat space のときの explicit な形は分かっている。また、一般の μ の場合の factorization (7.202) も得られている。そして、large μ での漸近的な振舞いも予想されている。factorization の関係があるので、我々が知るべきなのは Y_m, k である。

ここで μ の役割に関しておさらいしておく。μ はそれ自体では物理的な意味を持たない量であった。この量は、一般座標変換で好きな値に設定できるからである。意味を持つのは $\alpha' p^+\mu$ である。今まで large μ といってきたのは、つまりは large $\alpha' p^+\mu$ のことである。そこで、この節では $\alpha_3 = p^+_{(3)}\alpha' = -1$ とする。このように設定すると、Γ_+, Y, k 等は μ, $\alpha_1 = -\beta_1$ の関数である。以下では、$y = \alpha_1$ と書く。

以降の道筋を簡単に書いておこう。まず、前節までに得られた無限次元の行列に関する関係式を用いて、Y,k に対する微分方程式を導く。その微分方程式と flat space での知識と large μ での leading term から Y, k を求めることができる。そして、得られた形から large μ での振舞いを求め、subleading term の定数を求める。

7.5.1 Y, k の $\mu = 0$ での値

ここで、Y, k の flat space $\mu = 0$ での値を flat space の結果を用いて書いておく。$\mu = 0$ では $Y_m = -\bar{N}_m^{\text{3pp-wave}} = -\sqrt{m}\bar{N}_m^{\text{3flat}}$, $k = -\frac{1}{4}K$ であるので、(7.112), (7.113) より、

$$Y(\mu = 0, y) = \frac{\sqrt{m}\Gamma(my)}{m!\Gamma(my + 1 - m)} e^{-m\tau_0} = \frac{\Gamma(1 + my)\Gamma(1 + m(1 - y))}{2\Gamma(1 + m)} e^{-m\tau_0} B_m, \tag{7.281}$$

$$k(\mu = 0, y) = -2(\frac{\ln y}{1 - y} + \frac{\ln(1 - y)}{y}), \tag{7.282}$$

となる。

7.5.2 Y, k に対する微分方程式

以下では、$'$ は μ 微分を表わすことにする。まず、Γ_+ を μ で微分すると、(E.16) を用いて、

$$\Gamma_+' = \mu N - \frac{1}{2}\alpha B B^T, \tag{7.283}$$

ただし、

$$N = \sum_{r=1}^{3} \alpha_r^2 A^{(r)} C^{-1} C_r^{-1} A^{(r)^T}. \tag{7.284}$$

$0 = \frac{\partial}{\partial\mu}(\Gamma_+\Gamma_+^{-1}) = \Gamma_+'\Gamma_+^{-1} + \Gamma_+\Gamma_+^{-1'}$ なので、

$$Y' = \frac{1}{2}k\alpha Y - \mu\Gamma_+^{-1} N Y, \tag{7.285}$$

が導かれる。ここで appendix で示しているように、前節までに示した関係式を用いて、NY は (E.32) $NY = g_1 C_3^{-2} B + g_2 B$ の形に書くことができる。(7.285) で NY をこの形に置きかえて、左から B^T をかけると、

$$k' = \frac{1}{2}\alpha k^2 - \mu g_2 k - \mu g_1 k_2, \tag{7.286}$$

が得られる。g_1, g_2 は μ, α, k, k_1 で書かれる scalar 量であり、appendix (E.33), (E.34) に書いてある通りである。k_i も appendix (E.31) に書いてあるように、$k_i = B^T C_3^{-i} Y$ である。$i = 2$ の k_2 は explicit に計算できていないが、(7.286) の右辺に含まれている。従って、(7.286) だけでは k の微分方程式としてあまり意味をなさない。k_2 等の計算できていない量を含んでいない方程式を導きたいのである。そこで、(7.285) を別の形に変形しよう。$[C_3^{-1}, \{\Gamma_+^{-1}, C_3^{-1}\}] = [C_3^{-2}, \Gamma_+^{-1}]$ に (7.201) を用いると、

$$[C_3^{-2}, \Gamma_+^{-1}]B = -\frac{1}{2}\frac{\alpha}{1 + \mu\alpha k}\left[(k - \mu k_1)(C_3^{-1} - \mu C_3^{-2}) - (k_1 - \mu k_2)(1 - \mu C_3^{-1})\right] Y, \tag{7.287}$$

よって、

$$\Gamma_+^{-1} C_3^{-2} B = \frac{1}{2}\frac{\alpha}{1 + \mu\alpha k}\left[(k_2\mu - k_1) + (k - \mu^2 k_2) C_3^{-1} + (\tfrac{2}{\alpha} + k\mu + k_1\mu^2) C_3^{-2}\right] Y, \tag{7.288}$$

が導ける。これを (7.285) の $\Gamma_+^{-1}NY$ の中の項[7]に用いると、

$$Y' = (F_0 + F_1 C_3^{-1} + F_2 C_3^{-2})Y, \tag{7.289}$$

となる。ここで、

$$F_0 = \tfrac{1}{2}\alpha k - \mu g_2 + \tfrac{1}{2}\mu g_1 \frac{\alpha}{1+\mu\alpha k}(k_1 - \mu k_2), \tag{7.290}$$

$$F_1 = -\tfrac{1}{2}\mu g_1 \frac{\alpha}{1+\mu\alpha k}(k - \mu^2 k_2), \tag{7.291}$$

$$F_2 = -\mu g_1 + \tfrac{1}{2}\mu^2 g_1 \frac{\alpha}{1+\mu\alpha k}(k - \mu k_1), \tag{7.292}$$

である。この関数 $F_0,\ F_1,\ F_2$ の中に (7.286) を k_2 について解いたものを代入すると、$F_0 = \frac{\alpha}{2}\frac{1}{1+\mu\alpha k}(k + \mu k'),\ F_1 = -\mu F_0,\ F_0 = -\mu$ となる。よって、$Y,\ k$ に関する微分方程式

$$\frac{\partial Y_m}{\partial \mu} = \left[\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial \mu}\left(1 - \frac{\mu}{\omega_m}\right) - \frac{\mu}{\omega_m}\right] Y_m, \tag{7.293}$$

が得られた。ただし、ここで $\omega_m \equiv \omega_{3m} = \sqrt{m^2+\mu^2}$ であり、また、

$$F(\mu, y) = \ln[1 + (\mu y(1-y)k(\mu, y))], \tag{7.294}$$

である。

7.5.3 微分方程式の解

(7.293) の形式解は直ちに書けて、

$$Y_m(\mu, y) = \frac{m}{\omega_m} \exp\left[\frac{1}{2}\int_0^\mu \frac{\partial F}{\partial \mu}\left(1 - \frac{\mu}{\omega_m}\right) d\mu\right] Y_m(0, y). \tag{7.295}$$

ここで、$Y_m(0, y)$ は flat space の Neumann 係数なのですでに explicit な形を知っており (7.281) に書いてある。(7.295) で $\mu \to \infty$ とすると、Y の漸近展開 (7.209) の leading term より、

$$\exp\left[\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\partial F}{\partial \mu}\left(1 - \frac{\mu}{\omega_m}\right) d\mu\right] = \frac{B_m}{2Y_m(0, y)}. \tag{7.296}$$

両辺の log をとり左辺を部分積分すると、

$$\int_0^\infty (m^2+\mu^2)^{-3/2} F(\mu, y) d\mu = G(m, y), \tag{7.297}$$

ここで、(7.281) より、

$$G(m, y) = \frac{2\tau_0}{m} + \frac{2}{m^2}\ln\left(\frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+zy)\Gamma(1+z(1-y))}\right), \tag{7.298}$$

[7] NY はここでも (E.32) の形に書きかえておく。

である。ここで、$G(m,y)$ は m を複素数としたとき右半平面で正則である。また、この右半平面では $|z|\to\infty$ のとき $\frac{1}{z^2}$ に比例して $G(z,y)\to 0$ となる。従って、$G(m,y)$ の $m=1,2,3,..,$ から右半平面への拡張は一意である。このことから、$G(m,y)$ から $F(\mu,y)$ への逆積分変換が存在する。appendix で説明している積分変換を用いると、$F(\mu,y)=-i\frac{\mu^2}{\pi}\int_0^\pi d\theta G(-i\mu\cos\theta,y)\cos\theta$ となる。(7.298) を代入すると、

$$F(\mu,y)=2\mu\tau_0+\frac{2i}{\pi}\int_0^\pi\frac{d\theta}{\cos\theta}\ln\left[\frac{\Gamma(1-i\mu\cos\theta)}{\Gamma(1-i\mu y\cos\theta)\Gamma(1-i\mu(1-y)\cos\theta)}\right]. \tag{7.299}$$

これを μ に関して微分すると、

$$\frac{\partial F(\mu,y)}{\partial\mu}=2\tau_0+\frac{2}{\pi}\int_0^\pi d\theta\left[\psi(1-i\mu\cos\theta)-y\psi(1-i\mu y\cos\theta)-(1-y)\psi(1-i\mu(1-y)\cos\theta)\right], \tag{7.300}$$

ここで ψ はポリガンマ関数であり、$\psi=(\ln\Gamma)'$ である。$\psi(1+z)=-\gamma+z\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n(z+n)}$ と $\int_0^\pi\frac{d\theta}{a+b\cos\theta}=\frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$ を用いると、

$$\frac{\partial F(\mu,y)}{\partial\mu}=2\tau_0+2\sum_{n=1}^\infty\sum_{r=1}^3\frac{\alpha_r}{\omega_{rn}}, \tag{7.301}$$

が得られる。(7.294) より $F(0,y)=0$ なので、上式を積分すると、

$$F(\mu,y)=2\tau_0\mu+2\sum_{n=1}^\infty\sum_{r=1}^3\ln\left(\frac{\omega_{rn}+\mu\alpha_r}{n}\right)=2\tau_0\mu-2\ln\det(U_1U_2U_3). \tag{7.302}$$

ここで、$\mathrm{tr}\ln=\ln\det$ を用いた。$\det U_r$ は発散するが、$\det(U_1U_2U_3)$ は $\sum_{r=1}^3\alpha_r=0$ により収束する。そこで、各 $\det U_r$ を次の形に正則化しておく。

$$(\det U_r)_{\mathrm{reg}}=e^{-\phi(\mu\alpha_r)}, \tag{7.303}$$

$$\phi(x)=\sum_{n=1}^\infty\left[\ln\left(\frac{\sqrt{n^2+x^2}+x}{n}\right)-\frac{x}{n}\right]=\sum_{n=1}^\infty\left[\mathrm{arc\,sinh}\,\frac{x}{n}-\frac{x}{n}\right]. \tag{7.304}$$

これを用いると、$\sum_{r=1}^3\alpha_r=0$ なので、

$$F(\mu,y)=2\tau_0\mu-2\ln\prod_{r=1}^3\det(U_r)_{\mathrm{reg}}=2\tau_0\mu+2\sum_{r=1}^3\phi(\mu\alpha_r), \tag{7.305}$$

と書ける。よって、$Y_m(\mu,y)$ は、

$$Y_m(\mu,y)=\exp\left[(\mu-\omega_m)\tau_0+\sum_{r=1}^3(\phi_r-\phi_{mr})\right]\frac{m}{2\omega_m}B_m. \tag{7.306}$$

ただし、

$$\phi_r=\phi(\mu\alpha_r),\qquad\phi_{mr}=\sum_{n=1}^\infty\left[\ln\left(\frac{\omega_{rn}+\omega_n\alpha_r}{n}\right)-\frac{\omega_m\alpha_r}{n}\right]. \tag{7.307}$$

以上で、F,Y を μ の全領域で収束する級数の形で表わせた。

7.5.4 Large μ での漸近的振舞い

それでは、ここまでで得た Y, F の形から Γ_+^{-1}, k, Y の漸近展開に表われる定数 a_R, a_k, x を求めよう。まず、(7.294) に (7.208) を代入すると、

$$F(\mu, y) = -\ln\left(\frac{\pi\mu y(1-y)}{a_k}\right) + \cdots, \tag{7.308}$$

よって、$\frac{\partial F}{\partial \mu}$ の leading term は $-\frac{1}{\mu}$ となる。これと (7.209) を (7.293) に代入すると、

$$x = \frac{1}{16}, \tag{7.309}$$

が得られる。

次に a_k を考える。まず、$F(\mu, y)$ から leading term を取り除いた

$$\widetilde{F}(\mu, y) = F(\mu, y) + \ln\left(\frac{\pi\mu y(1-y)}{a_k}\right), \tag{7.310}$$

を定義する。(7.297) より、

$$\int_0^\infty (m^2+\mu^2)^{-3/2}\widetilde{F}(\mu, y)d\mu = G(m, y) + \frac{1}{m^2}\ln\left(\frac{m\pi y(1-y)}{2a_k}\right). \tag{7.311}$$

$m = \lambda n$, $\mu = \lambda\nu$ とリスケールする。すると、

$$\int_0^\infty (n^2+\nu^2)^{-3/2}\widetilde{F}(\lambda\nu, y)d\nu = \lambda^2\left[G(\lambda n, y) + \frac{1}{\lambda^2 n^2}\ln\left(\frac{\lambda n\pi y(1-y)}{2a_k}\right)\right], \tag{7.312}$$

$\lambda \to \infty$ で左辺はゼロとなる。右辺は $G(m, y)$ の表式 (7.298) を代入して、stirling の公式を用いると、$\frac{1}{n^2}\ln(4a_k)$ となる。従って、

$$a_k = \frac{1}{4}, \tag{7.313}$$

と求まる。(7.210) より、

$$a_r = \frac{1}{16}, \tag{7.314}$$

も求まる。

さて、subleading term の定数は求まったが、より話を先に進めよう。まず、$\phi(x)$ の 2 階微分を行うと、

$$\phi''(x) = -x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(x^2+n^2)^{3/2}} \approx -\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2}, \tag{7.315}$$

ここで、$\approx$ は $e^{-2\pi\mu|\alpha_r|}$ に比例する項を無視することを示す。$\frac{1}{\mu}$ の power に関しては全て order の項を残している。無視した $e^{-2\pi\mu|\alpha_r|}$ の項は、dual な CFT 側では non-perturbative な効果を表わしていると考えられる。2 回 μ で積分すると、

$$\phi(x) \approx -(x+\tfrac{1}{2})\ln x + c_1 x + c_2. \tag{7.316}$$

c_1, c_2 は積分定数である。c_1 は $\sum_{r=1}^{3} \alpha_r = 0$ により、$F(\mu, y)$ の中では効いてこない。$F(\mu, y)$ を上記の量で書くと、

$$F(\mu, y) \approx -ln[\mu y(1-y)] + 2c_2, \tag{7.317}$$

(7.308) と $a_k = \frac{1}{4}$ より、$c_2 = \frac{1}{2}\ln(4\pi)$ と求まる。従って、

$$F(\mu, y) \approx -\ln[4\pi\mu y(1-y)]. \tag{7.318}$$

となる。ここで注意すべきことは、この式は μ の power に関しては all order であることである。省いているのは指数的に小さい $e^{-2\pi\mu|\alpha_r|}$ に比例する項だけである。従って、(7.318) は (7.308) よりも強い条件である。(7.294), (7.318) から、

$$k(\mu, y) \approx \frac{1}{\mu y(1-y)} - \frac{1}{4\pi\mu^2 y^2(1-y)^2}, \tag{7.319}$$

と求まる。

$Y_m(\mu, y)$ に関しても ϕ_{mr} を (7.315) のような展開を求めることで、$\approx$ のレベルで漸近的振舞いが求められる。しかし、(7.295) を

$$Y_m(\mu, y) = \frac{m}{\omega_m} \exp\left[\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\partial F}{\partial \mu}\left(1 - \frac{\mu}{\omega_m}\right) d\mu - \int_\mu^\infty \frac{\partial F}{\partial \mu}\left(1 - \frac{\mu}{\omega_m}\right) d\mu\right] Y_m(0, y), \tag{7.320}$$

と分離することでも求められる。第 1 項は (7.296) であり、第 2 項は $\frac{\partial F}{\partial \mu} \approx -\frac{1}{\mu}$ を代入することで計算できる。そして、

$$Y_m(\mu, y) \approx \sqrt{\frac{\mu + \omega_m}{2\mu}} \frac{m}{2\omega_m} B_m, \tag{7.321}$$

と求まる。

第8章　$g_2 \neq 0$ へのBMN 対応の拡張

BMN が提唱した state-operator mapping は、string theory 側が free 理論で CFT 側が planar 近似のときには正確に成立することが分かった。しかし AdS/CFT 対応の極限として得られる双対性は、free string と planar CFT との間だけの双対性ではなく、full string theory つまり interacting string theory と non-planar も含めた CFT の間の双対性であることが期待される。そこで、この広い意味の BMN 対応についてこれから見ていく。

interacting string に対する BMN 対応の拡張はいくつかのグループにより異なった見解が述べられている。ここでは、Gross, Mikhailov, Roiban [29] らによるものを採用する。これは、BMN 対応の $g_2 \neq 0$ への自然な拡張と思われる。彼らの主張は、$g_2 \neq 0$ の場合にも (5.5), (5.6) の対応は成り立っているというものである。特に、(5.5) を書き直しておく。

$$\frac{P^-(g_s)}{\mu} = \Delta - J. \tag{8.1}$$

string 側の operator $\frac{P^-}{\mu}$ と CFT 側の operator $\Delta - J$ の間の等価性を確かめるには、それぞれの演算子が作用する空間の間の写像を求め、その対応関係のもとで演算子の matrix element が一致することを見ればよい。もちろん、それぞれの Hilbert 空間には内積が定義されており、これらの空間の間の写像はその構造を壊さないようなものでなくてはならない。この matrix element の一致は、固有値の一致と同じことである。この観点から、free string と planar CFT でどのようにこの対応がついていたのかをおさらいしておく。まず、string 側では Hilbert 空間は $\mathcal{H} = \text{vacuum} \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \cdots$ であった。ここで、$\mathcal{H}_1$ は一つの string のみがある状態で第一量子化の Hilbert 空間である。$\mathcal{H}_m$ は m 個の string がある状態で $\mathcal{H}_1$ の m 個の直積である。$\mathcal{H}_1$ は 4 章で oscillator 表示されているが、それぞれの状態は直交していた。また、$\mathcal{H}_m$ の状態と $\mathcal{H}_n$ $(m \neq n)$ の状態は直交している。そして、oscillator 表示された各状態は、$\frac{P^-}{\mu}$ の固有状態である。一方、CFT 側の Hilbert 空間は single trace operator である BMN operator とそれらの積で作られる multi trace operator から成っている。内積は free $(\lambda' = 0)$ SYM の 2 点関数から位置依存の factor を取り除いた係数である。この 2 点関数の係数は $g_2 = 0$ では BMN operator 同士で直交していた。また、single trace operator と multi trace operator の間でもこの近似では直交していた。multi trace operator 同士でも同様である。そして、これらの operator は $\Delta - J$ の固有 operator であった。これら 2 つの空間の間の対応は、$\mathcal{H}_1$ の状態と single trace BMN operator が対応し、$\mathcal{H}_2$ の状態と double trace BMN operator が対応するといったものだった。具体的な対応関係は前の章で書いた通りである。そして、実際にこれらの対応のもとで string 側 の状態の mass $\frac{P^-}{\mu}$ と CFT 側の状態の conformal dimension と角運動量の差 $\Delta - J$ の固有値が一致することを見た。ここからは、$g_2 \neq 0$ の場合の対応について考えていく。

8.1 $g_2 \neq 0$ の場合の対応

前に述べたように、free theory での state operator mapping は単純な対応であった。しかし、この対応は、interacting theory では成り立たなくなる。そのことを見るために、内積を考えよう。interacting theory の場合にも、内積を string 側では string state の間の内積、CFT 側では $\lambda' = 0$ SYM の 2 点関数の係数とするのが自然である。string 側の内積は interacting string にしても、その構成法から内積は free string の場合と変わりがない。つまり、異なる oscillator がかかった string state は直交している。一方、CFT 側では non-planar level では、BMN operator 同士で mixing を起こす。この mixing は、trace の数が同じ operator の間だけでなく、trace の数が異なる operator の間でも起きる。例えば、single trace BMN operator 同士の間でも mixing は起こり、single trace BMN oeprator と double trace BMN oeprator の間でも起きる。このため、2 点関数の係数はもはや直交していない。従って、free theory では string state と BMN operator の単純な対応が成立していたが、interacting theory ではこの対応を変更する必要がある。以下では、string state は動かさずに CFT の operator を再定義して string state に対応する operator を求める。

string state 基底に対応する CFT operator の基底は次の 2 つの条件を満たすものでなくてはならない。まず、内積は規格直交化されている必要がある。さらに、string 側の $\frac{P^-}{\mu}$ の matrix element と CFT 側の $\Delta - J$ の matrix element が一致していなければならない。規格直交化の条件によっては operator の基底は一意には決まらずに、ユニタリ変換の不定性がある。この不定性は matrix element の一致の条件によって止められる。

それでは、具体的にどのようにして string state に対応する basis を探してくるのかを考えよう。まず、operator の 2 点関数は、

$$|x|^{d_A+d_B}\langle \mathcal{O}_A(0)\bar{\mathcal{O}}_B(x)\rangle = G_{AB} - \Gamma_{AB}\log(\Lambda^2 x^2), \tag{8.2}$$

ここで、d_A, d_B は free theory の conformal dimension である。G_{AB} は free SYM $\lambda' = 0$ での 2 点関数の係数であり、この値が $\mathcal{O}_A$ と $\mathcal{O}_B$ の内積である。Γ_{AB} は anomalous dimension matrix である。$\mathcal{O}_A$, $\mathcal{O}_B$ が生成する状態 $|\mathcal{O}_A\rangle$, $|\mathcal{O}_B\rangle$ でこの内積を表わせば、

$$\langle \mathcal{O}_A|\mathcal{O}_B\rangle = G_{AB}, \tag{8.3}$$

となる。さて、dilation operator Δ の matrix element の anomalous 部分は、

$$\langle \mathcal{O}_A|(\Delta - J)_{\text{anomalous}}|\bar{\mathcal{O}}_B\rangle = \Gamma_{AB}, \tag{8.4}$$

となり、anomalous dimension matrix と一致する。

string state $|s_A\rangle$ に対応する新しい基底を $\widetilde{\mathcal{O}}_A$ とする。$\widetilde{\mathcal{O}}_A$ は $\mathcal{O}_A$ の線型変換である。この基底は内積に対して正規直交基底である必要がある。さらに、これらの基底の間の (8.1) の右辺の matrix element は対応する string state の間の (8.1) の左辺の matrix element と一致していなくてはならない。これらのことを式にして書いておこう[1]。

$$|s_A\rangle \leftrightarrow |\widetilde{\mathcal{O}}_A\rangle = U_{AB}|\mathcal{O}_B\rangle, \qquad \delta_{AB} = \langle s_A|s_B\rangle = \langle \widetilde{\mathcal{O}}_A|\widetilde{\mathcal{O}}_B\rangle = (UGU^\dagger)_{AB} = \delta_{AB}. \tag{8.5}$$

[1] (8.6) は anomalous 部分に対する式である。

$$\frac{1}{\mu}\langle s_A|P^-|s_B\rangle = \langle\widetilde{\mathcal{O}}_A|(\Delta - J)|\widetilde{\mathcal{O}}_B\rangle = (U\Gamma U^\dagger)_{AB}, \tag{8.6}$$

上式が g_2 の order by order で満たされるように U を決定していけばよい。次節では、この手続きを two inpurity を持つ single trace operator と double trace operator に対して行なう。

8.2 State Operator Mapping

それでは、実際に string state に対応する基底を見付け、BMN duality の dictionary に新たな内容を加えよう。CFT の operator として次のものを考える。

$$\mathcal{O}^J_{12,n} = \frac{1}{\sqrt{JN^{J+2}}}\sum_{l=0}^{J} e^{2\pi i l n/J}\mathrm{Tr}[\phi_1 Z^l \phi_2 Z^{J-l}], \tag{8.7}$$

$$\mathcal{T}^{J,y}_{12,p} =: \mathcal{O}^{y\cdot J}_{12,p}\mathcal{O}^{(1-y)\cdot J} :, \tag{8.8}$$

$$\mathcal{T}^{J,y}_{12} =: \mathcal{O}^{y\cdot J}_{1}\mathcal{O}^{(1-y)\cdot J}_{2} : . \tag{8.9}$$

これら two inpurity を持つ operator は今まで主に考察してきたものであり、これらの 2 点関数は $g_2^2\lambda'$ の精度まで求められている[2]。つまり、この精度までの G と Γ は得られている。以下では、g_2 の order by order で基底を求めていくので、G, Γ を g_2 で展開しておこう。

$$G = 1 + g_2 G^{(1)} + g_2^2 G^{(2)} + O(g_2^3), \tag{8.10}$$

$$\Gamma = \Gamma^{(0)} + g_2\Gamma^{(1)} + g_2^2\Gamma^{(2)} + O(g_2^3). \tag{8.11}$$

ここで、

$$G^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & C_{n,qz} & C_{n,z} \\ C_{pq,m} & 0 & 0 \\ C_{y,m} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad G^{(2)} = \begin{pmatrix} M^1_{n,m} & 0 & 0 \\ 0 & ? & ? \\ 0 & ? & ? \end{pmatrix}, \tag{8.12}$$

$$\frac{\Gamma^{(0)}}{\lambda'} = \begin{pmatrix} n^2\delta_{nm} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{p^2}{y^2}\delta_{pq}\delta_{yz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \frac{\Gamma^{(1)}}{\lambda'} = \begin{pmatrix} 0 & \Gamma^{(1)}_{n,qz} & \Gamma^{(1)}_{n,z} \\ \Gamma^{(1)}_{py,m} & 0 & 0 \\ \Gamma^{(1)}_{y,m} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{8.13}$$

$$\frac{\Gamma^{(2)}}{\lambda'} = \begin{pmatrix} nmM^1_{nm} + \frac{1}{4\pi^2}D^1_{nm} & 0 & 0 \\ & ? & ? \\ 0 & ? & ? \end{pmatrix}. \tag{8.14}$$

ここで、$\mathcal{O}^J_{12,n}, \mathcal{T}^{J,y}_{12,p}, \mathcal{T}^{J,y}_{12}$ に対応して行列を 3×3 の形に書いた。添字は、n, m が $\mathcal{O}^J_{12,n}$, $(p,y),(q,z)$ が $\mathcal{T}^{J,y}_{12,p}$, y, z が $\mathcal{T}^{J,y}_{12}$ のものである。? の部分はまだ計算できていない。さて変換行列も g_2 で展開しておく。

$$U = 1 + g_2 U^{(1)} + g_2^2 U^{(2)} + O(g_2^3). \tag{8.15}$$

この変換行列を使って定義された新しい基底の下での dilation operator の matrix element は、

$$\widetilde{\Gamma} = U\Gamma U^\dagger = \widetilde{\Gamma}^{(0)} + g_2\widetilde{\Gamma}^{(1)} + g_2^2\widetilde{\Gamma}^{(2)} + O(g_2^3), \tag{8.16}$$

[2]ただし、double trace operator 同士の 2 点関数は、$g_2\lambda'$ までしか分かっていない。

となる。ただし、

$$\widetilde{\Gamma}^{(0)} = \Gamma^{(0)}, \qquad \widetilde{\Gamma}^{(1)} = \Gamma^{(1)} + U^{(1)}\Gamma^{(0)} + \Gamma^{(0)}U^{(1)\dagger} \tag{8.17}$$

$$\widetilde{\Gamma}^{(2)} = \Gamma^{(2)} + U^{(1)}\Gamma^{(1)} + \Gamma^{(1)}U^{(1)\dagger} + U^{(1)}\Gamma^{(0)}U^{(1)\dagger} + U^{(2)}\Gamma^{(0)} + \Gamma^{(0)}U^{(2)\dagger}. \tag{8.18}$$

我々はすでに SFT の章で SFT 側の interaction Hamiltonian の matrix element を g_2 のレベルで計算している。従って、g_2 のレベルでは (8.5), (8.6) を用いて完全に基底を決定することができる。これは、(8.5), (8.6) を用いて $U^{(1)}$ を見付けることができることを意味する。実際にこの行列を求めると、

$$U^{(1)} = -\frac{1}{2}G^{(1)}, \tag{8.19}$$

となる[3]。前に述べたように $UGU^\dagger = 1$ の条件では U は一意には決まらず、ユニタリ変換分の不定性が残る。そこで、(8.6) を用いてこの不定性を止めたわけである。(8.19) は、実対称行列であることに注意しよう。実際、$UGU^\dagger = 1$ を満たす行列で実対称なものは (8.19) に一意に決まってしまう。

(8.19) の下で、matrix element は

$$\widetilde{\Gamma}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{\Gamma}^{(1)}_{n,qz} & \widetilde{\Gamma}^{(1)}_{n,z} \\ \widetilde{\Gamma}^{(1)}_{py,m} & 0 & 0 \\ \widetilde{\Gamma}^{(1)}_{y,m} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} \widetilde{\Gamma}^{(1)}_{n,py} &= \widetilde{\Gamma}^{(1)}_{py,n} = \lambda' \tfrac{\sqrt{1-y}}{\sqrt{Jy}} \tfrac{\sin^2(\pi n y)}{2\pi^2}, \\ \widetilde{\Gamma}^{(1)}_{n,y} &= \widetilde{\Gamma}^{(1)}_{y,n} = -\lambda' \tfrac{1}{\sqrt{J}} \tfrac{\sin^2(\pi n y)}{2\pi^2}, \end{aligned} \tag{8.20}$$

となる。ここで SFT の計算に用いた string state $|n_{12}\rangle$, $|0_1\rangle$, $|v\rangle$ をまとめて $|s'_A\rangle$ と書くと、この状態間の内積は、$\langle s'_A|s'_B\rangle = p^+_A\delta(p^+_A - p^+_B) = J_A\delta_{J_AJ_B}$ と規格化されていた。従って、(8.5) のように規格化された string state $|s_A\rangle$ とは、$|s_A\rangle = \frac{1}{\sqrt{J_A}}|s'_A\rangle$ だけ normalization の違いがある。従って、SFT の計算 (7.280), (7.279) をそれぞれ $\widetilde{\Gamma}^{(1)}_{py,n}$, $\widetilde{\Gamma}^{(1)}_{y,n}$ と比べるときには、SFT 側の結果に $\frac{1}{\sqrt{J^3y(1-y)}}$ をかけなければならない[4]。このことを考慮すると両側の量は実際に一致しており、$O(g_2)$ レベルで (8.6) が満たされていることが分かる。

上記の結果、g_2 レベルでは (8.5), (8.6) を満たす operator-state mapping が得られた。しかし、ここで示されたことは BMN duality の検証にはなっていない。なぜならば、両側での 3 点関数が一致するように基底を取ることは常に可能だからである。BMN duality ($g_2 \neq 0$) の検証は、より higher order に進むか、ここで確立した state-operator map を用いて (8.1) 以外の operator が string と CFT の両側で一致するかどうかを調べることでなされる。

SFT 側の計算からは λ' に関しては exact な量が得られるので、その結果から CFT 側の λ' 展開の higher order に対する予想を得ることができる。実際、(7.277), (7.278) は λ' の all order の結果なので、これは $\widetilde{\Gamma}^{(1)}$ に λ' の higher order を含めたものに対する予想となっている。

次に g_2^2 レベルに移ろう。g_2^2 レベルでは SFT 側の matrix element はまだ求めていなかった。従って、$U^{(2)}$ に対しては orthonormal の条件 (8.5) までしか今のところは決定できず、ユニタリ変換の不定性を取り除くことはできない。$\widetilde{\Gamma}^{(2)}$ を得るためには、一般には $\mathcal{O}(g_2^2)$ の基底の変換 $U^{(2)}$ が必要であるので、いまのところ $\mathcal{O}(g_2^2)$ レベルでの話はできないかに見える。しかし、実は $O(g_2)$ までの基底で、$O(g_2^2)$ の matrix element $\widetilde{\Gamma}^{(2)}$ のある成分は計算することができる。

[3] この行列が (8.5) を満たすことは簡単に分かる。(8.6) を満たすことはすぐ後で見る。

[4] string 側の量 β と CFT 側の量 y には $\beta = -y$ の関係がある。

もちろん $\widetilde{\Gamma}^{(2)}$ の完全な形を得るためには $U^{(2)}$ の完全な形が必要だが、$\widetilde{\Gamma}^{(2)}$ の中の部分的な成分は $O(g_2)$ までの基底と $O(g_2^2)$ の (8.5) から計算できるのである。まず、$O(g_2^2)$ の (8.5) は、$G^{(2)} + U^{(1)}G^{(1)} + G^{(1)}U^{(1)\dagger} + U^{(1)}U^{(1)\dagger} + U^{(2)} + U^{(2)\dagger} = 0$ である。これに (8.19) を代入することで、

$$U^{(2)} + U^{(2)\dagger} = \frac{3}{4}(G^{(1)})^2 - G^{(2)}. \tag{8.21}$$

一方、$\widetilde{\Gamma}^{(2)}$ は (8.18) に (8.19) を代入して、

$$\widetilde{\Gamma}^{(2)} = \Gamma^{(2)} - \frac{1}{2}G^{(1)}\Gamma^{(1)} - \frac{1}{2}\Gamma^{(1)}G^{(1)} + \frac{1}{4}G^{(1)}\Gamma^{(0)}G^{(1)} + U^{(2)}\Gamma^{(0)} + \Gamma^{(0)}U^{(2)}. \tag{8.22}$$

$U^{(2)}\Gamma^{(0)}$ の n,m 成分は $m^2(U^{(2)})_{nm}$ であり、$\Gamma^{(0)}U^{(2)\dagger}$ の n,m 成分は $n^2(U^{(2)\dagger})_{nm}$ である。これらを合わせて、(8.22) の n,m 成分の最後の 2 項は $m^2(U^{(2)})_{nm} + n^2(U^{(2)\dagger})_{nm}$ となる。ここで $n = m$ または $n = -m$ とすると、(8.21) を用いることでこの 2 項を求めることができる。従って、$U^{(2)}$ を完全に決定することなく、$\widetilde{\Gamma}^{(2)}$ の n,n 成分と $n,-n$ 成分は決まる。これらを計算すると、

$$\widetilde{\Gamma}^{(2)}_{nn} = \frac{\lambda'}{16\pi^2}\left(\frac{1}{3} + \frac{5}{2\pi^2 n^2}\right) = \frac{\lambda'}{16\pi^2}B_{nn}, \tag{8.23}$$

$$\widetilde{\Gamma}^{(2)}_{n,-n} = -\frac{15\lambda'}{128\pi^4 n^2} = \frac{\lambda'}{16\pi^2}B_{n,-n}, \tag{8.24}$$

これから、$m = \pm n$ の SFT 側の量に対して、

$$\frac{1}{\mu}\langle n_{12}|P^-|m_{12}\rangle|_{g_2^2} = \widetilde{\Gamma}^{(2)}_{nm}, \tag{8.25}$$

の予測が得られる。この予想を SFT 側で確認することは BMN duality ($g_2 \neq 0$) に対する非自明な検証となる。この量を実際に SFT 側で計算するには interaction term の中の $\mathcal{O}(g_2^2)$ の contact term の matrix element を計算することが必要である。

8.3 SFT での Contact Term からの寄与の計算

SFT 側で g_2^2 の order の計算をするためには、interaction term の中の contact term の計算をする必要がある。まず、この contact term について簡単に述べておく。dynamical generator は、

$$P^- = P_0^- + \kappa P_1^- + \kappa^2 P_2^- + \cdots, \qquad Q^- = Q_0 + \kappa Q_1 + \kappa^2 Q_2 + \cdots, \tag{8.26}$$

と展開される。すでに、P_1^-, Q_1 は 7 章で求めた。$g_2^2 \propto \kappa^2$ の計算を行うためには、P_2^- を求める必要がある。これらは、dynamical constraint より、

$$P_2^- = \frac{1}{2}\{Q_1^-, \bar{Q}_1^-\} + \{Q_0^-, \bar{Q}_2^-\} + \{Q_2^-, \bar{Q}_0^-\}, \tag{8.27}$$

の関係にある。つまり、まだ求まっていない Q_2 の形が必要となる。しかし、我々がこれから計算したいのは前節の最後の議論からも分かるように single string state 同士の matrix element で

ある。Q_2 は string field に関して 4 次、つまり 4 点相互作用の項であるので single string 同士の $\mathcal{O}(g_2^2)$ の matrix element には効いてこない。よって、(8.27) の第 1 項のみを考えればよい。

$$\langle n_{12}|\kappa^2 P_2^-|m_{12}\rangle = \langle n_{12}|\frac{\kappa^2}{2}\{Q_{\dot{a}}^-, \bar{Q}_{\dot{b}}^-\}|m_{12}\rangle. \tag{8.28}$$

2 つの Q の間に中間状態となる 2-impurity 状態を挟んで計算すると、

$$\langle n_{12}|\frac{\kappa^2}{2}\{Q_{\dot{a}}^-, \bar{Q}_{\dot{b}}^-\}|m_{12}\rangle = \frac{\mu g_2^2 \lambda'}{16\pi^2}\delta_{\dot{a}\dot{b}} B_{nm}, \tag{8.29}$$

となる [44]。特に、$m = n$, $m = -n$ のときは CFT 側からの予想 (8.23), (8.24) に一致していることが分かる。前節でも述べたように、これは $g_2 \neq 0$ での BMN duality に対する非自明な検証である。注意すべきことは、2 つの Q_1 の間にはさむ中間状態を 2-impurity state に限ったということである。これは、CFT 側の計算方法に対応する計算なのである。CFT 側では、まず λ を ∞ に持っていってしまい、BMN operator 以外を decouple させておいてから、BMN operator 同士の相関関数だけを計算した。SFT 側ではこれは中間状態を 2-impurity state に限ることに対応する。

CFT 側の固有値の SFT による再現

さてここで、CFT operator に対して得られた $\mathcal{O}(g_2^2)$ の固有値 (6.79) を SFT 側の計算で再現しておこう。固有値は $\mathcal{O}(g_s^2)$ で図 8.1 の補正を受ける。左側の diagram は P_1^- が 2 つ入ったもの

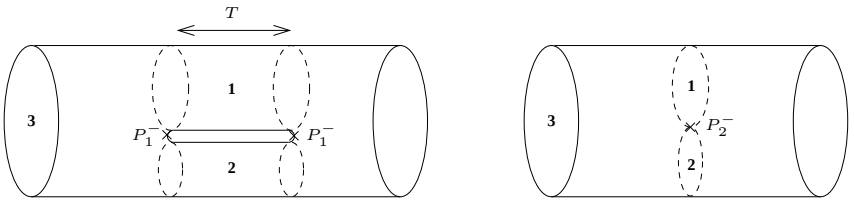


図 8.1: $\mathcal{O}(g_2^2)$ の mass renormalization に効いてくる string の diagram

であり、右側は P_2^- が 1 つ入ったものである。

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \langle n_{12}|\kappa P_1^- e^{T(P_0^- - E_n^0}\kappa P_1^-|m_{12}\rangle + \frac{\kappa^2}{2}\langle m_{12}|\{Q_1^-, \bar{Q}_1^-\}|n_{12}\rangle, \tag{8.30}$$

第 1 項が左図で、第 2 項が右図に対応する。これは、量子力学の摂動論の 2 次のエネルギーの計算に似ている。この系は、$g_s = 0$ で $m = \pm n$ で縮退しているので縮退した系に対する摂動論が必要である[5]。つまり、$m = \pm n$ に対する matrix element が必要となる。第 2 項はすでに計算し

[5] $\mathcal{O}(g_s)$ では single string 同士の matrix element はゼロであったので縮退は解けていない。

てあるので、第 1 項を計算しよう。$m = n$ の場合は、

$$\sum_{i\in\text{two impurity}} \frac{|\langle n_{12}|\kappa P_1^-|i\rangle|^2}{E_n - E_i} = \frac{\mu g_2^2 \lambda'}{4}\left(\sum_{p,y} \frac{(n-\frac{p}{y})^4}{n^2-\frac{p^2}{y^2}} C_{n,py}^2 + \sum_y n^2 C_{n,y}^2\right)|\alpha_3|\delta(\textstyle\sum\alpha) \tag{8.31}$$

$$= \frac{\mu g_2^2 \lambda'}{4}\left(\sum_{p,y}(n^2-\frac{p^2}{y^2}) C_{n,py}^2 + n^2\sum_y C_{n,y}^2\right)|\alpha_3|\delta(\textstyle\sum\alpha) \tag{8.32}$$

$$= -\frac{\mu g_2^2 \lambda'}{16\pi^2} B_{n,-n}|\alpha_3|\delta(\textstyle\sum\alpha). \tag{8.33}$$

$m = -n$ の場合も同様に、

$$\sum_{i\in\text{two impurity}} \frac{\langle n_{12}|\kappa P_1^-|i\rangle\langle i|\kappa P_1^-|-n_{12}\rangle}{E_n - E_i} = -\frac{\mu g_2^2 \lambda'}{16\pi^2} B_{n,-n}|\alpha_3|\delta(\textstyle\sum\alpha), \tag{8.34}$$

となる。ただし、$|i\rangle$ は前節で述べたように $\langle i|j\rangle = \delta_{ij}$ の normalization を持つとする。よって、前節の (8.29) と合わせると n, n 成分と $-n, -n$ 成分は、

$$\frac{\mu g_2^2 \lambda'}{16\pi^2}(B_{nn} - B_{n,-n}) = \frac{\mu g_2^2 \lambda'}{4\pi^2}\left(\frac{1}{12} + \frac{35}{32\pi^2 n^2}\right), \tag{8.35}$$

となり、$n, -n$ 成分はゼロとなる。従って、縮退は解けておらず、固有値の $\mathcal{O}(g_s^2)$ の補正は CFT 側の計算と一致することが分かる。縮退が解けないことは CFT のときも述べたように、supersymmetry によるものである。

第9章　結論

この文章では pp-wave 上の string theory と $\mathcal{N}=4$ $SU(N)$ SYM の部分的なセクターの双対性について見てきた。CFT 側は 2 つの dimensionless parameter $\lambda' = \frac{g_{\rm YM}^2 N}{J^2}$, $g_2 = \frac{J^2}{N}$ で記述される。λ' は loop 展開のパラメータで、g_2 は genus 展開のパラメータである。string 側の言葉で書くと、$\lambda' = \frac{1}{(\mu\alpha' p^+)^2}$, $g_2 = 4\pi g_s (\mu\alpha' p^+)^2$ となる。これらの parameter は同時に小さくとることができ、そこでは string も gauge theory も共に摂動展開でき、計算を遂行することができる。また、2 つの理論の operator 間の関係式として重要なものが、$P^-/\mu = \Delta - J$ である。

$g_2 = 0$ の場合には、string state と CFT の operator の間の対応は single (multi) string state と single (multi) trace BMN operator といった単純なものであった。実際に、CFT 側の摂動計算により string のスペクトラムが再現されることを見た。しかし、$g_2 \neq 0$ では CFT 側で operator mixing が起こるために、この対応は補正される必要がある。CFT の 2 点関数と SFT の P^- の matrix element を比較することで、two impurity single, double trace operator に関してこの対応を $\mathcal{O}(g_2^2)$ まで確立した。上の手続きの中で、この BMN duality に対する non-trivial な検証もなされた。この文章では扱っていないが、P^- 以外の他の operator の matrix element を計算してみることも検証のために重要である。また、multi trace BMN operator の 2 点関数の $\mathcal{O}(g_2^2)$ の計算をすることも重要である [46]。

本文章ではふれていないが、pp-wave string に対して、string bit formalism によるアプローチもなされている [47, 48]。この formalism から string-CFT 間の state-operator mapping に対して[1]、

$$\tilde{\mathcal{O}}^J = e^{-g_2\Sigma/2}\mathcal{O}^J, \tag{9.2}$$

という予想が得られる [49]。この基底では bit model の supersymmetry 代数が $\mathcal{O}(g_2)$ レベルで止まり、higher order の補正が出てこないのである。この基底変換は g_2 に関して all order である。この変換は g_2^2 まででは、本文で求めたものに一致している。bit model と SFT の関係を調べることも興味深い問題である。

CFT の計算では、λ' 展開は λ 展開での large N, large J limit であるとして行った。しかし、これが正しいという根拠はどこにもない。本来、λ 展開は small λ でのみ可能なはずである。この点はまだよく理解されていない。また、λ を ∞ に持っていくことにより BMN operator 以外を decouple させてから、two impurity BMN operator が張る空間の中だけで $\Delta - J$ を計算した。そのため、この CFT の計算に対応する計算法として SFT では中間状態としては two impurity state のみを考えた。この計算では、双方の計算は BMN duality と無矛盾であることが分かった

[1] ただし、

$$\Sigma\mathcal{O}^J_{12,n} = \sum_{p,y} C_{n,py}\mathcal{T}^{J,y}_{12,p} + \sum_y C_{n,y}\mathcal{T}^{J,y}_{12}, \tag{9.1}$$

である。

わけである。しかし、より理解を深めるためには λ を有限として全ての operator の空間で $\Delta - J$ を計算して、それから $\lambda \to \infty$, $J \to \infty$ をとって non-BMN operator を decouple させるといった計算法が望まれる。

pp-wave 上の string に関しては他にも様々な方向での研究がなされている。例えば、AdS/CFT の様々なバリエーションを考えることによって、様々な pp-wave 背景を考えることができる。例えば、orbifold の特異点に存在する D3 brane を考えることで、CFT 側は $\mathcal{N} = 2$ の quiver gauge theory になり、string 側は $AdS_5 \times S^5/Z_k$ 上の string theory になる。この Penrose limit を考えることで、Z_k で割られた pp-wave 背景と quiver gauge theory の BMN 対応が得られる [50, 51, 52]。また、pp-wave 上の D-brane を考えることもまた多く研究されている。

謝辞

アドバイスをしていただき、暖かく見守って下さった指導教官の松尾先生に感謝します。様々な質問に答えて下さった高柳さん、疋田さんに感謝します。原稿を読んでアドバイスを下さった今村さんに感謝します。また、いろいろとお世話になった研究室の方々に感謝します。

付 録A　Notation

$\hat{\mu}$, $\hat{\nu}$, $\hat{\gamma}$=0,$\cdots$, 9	$SO(9,1)$ vector indices,
μ, ν, ρ= 0,$\cdots$, 9	coordinate indices,
I, J, K= 1,$\cdots$, 8	$SO(8)$ vector or coordinate indices,
i, j, k=1,$\cdots$, 4	$SO(4)$ vector or coordinate indices,
i', j', k'=5,$\cdots$, 8	$SO(4)'$ vector or coordinate indices,
α, β, ε=1,$\cdots$, 16	$SO(9,1)$ chiral spinor indices,
a, b = 0,1	worldsheet coordinate indices.

ただし、混同の恐れがない場合は vector index の $\hat{}$ は書かない。

$SO(9,1)$ ガンマ行列　$SO(9,1)$ のガンマ行列は、

$$\{\Gamma^{\hat{\mu}}, \Gamma^{\hat{\mu}}\} = 2\eta^{\hat{\mu}\hat{\nu}} \tag{A.1}$$

$\eta^{\mu\nu}$ は almost plus とする。$SO(8)$ のガンマ行列 γ^I を用いて、次のように書いておく。

$$\Gamma^{\hat{\mu}} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma^{\hat{\mu}} \\ \bar{\gamma}^{\hat{\mu}} & 0 \end{pmatrix}, \tag{A.2}$$

$$\gamma^{\hat{\mu}}\bar{\gamma}^{\hat{\nu}} + \gamma^{\hat{\nu}}\bar{\gamma}^{\hat{\mu}} = 2\eta^{\hat{\mu}\hat{\nu}}, \qquad \gamma^{\hat{\mu}} = (\gamma^{\hat{\mu}})^{\alpha\beta}, \qquad \bar{\gamma}^{\hat{\mu}} = (\bar{\gamma}^{\hat{\mu}})_{\alpha\beta}, \tag{A.3}$$

$$\gamma^{\hat{\mu}} = (1, \gamma^I, \gamma^9), \qquad \bar{\gamma}^{\hat{\mu}} = (-1, \gamma^I, \gamma^9). \tag{A.4}$$

$G^{\hat{\mu}}$ に対して Majonara 表現となるような g^I を使う。従って、$C = \Gamma^0$ であり $g^{\hat{\mu}}$ は実対称である。$\Gamma^{\hat{+}}$, $\Gamma^{\hat{-}}$ は、

$$\Gamma^{\hat{+}} = \frac{\Gamma^0 + \Gamma^9}{\sqrt{2}}, \qquad \Gamma^{\hat{-}} = \frac{\Gamma^0 - \Gamma^9}{\sqrt{2}}. \tag{A.5}$$

$\gamma^{\hat{+}}$, $\gamma^{\hat{-}}$ 等も同様に定義する。

Γ_{11} は、

$$\Gamma_{11} \equiv \Gamma^0 \cdots \Gamma^9 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{A.6}$$

Γ, γ の反対称積は、

$$\Gamma^{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \frac{1}{2}(\Gamma^{\hat{\mu}}\Gamma^{\hat{\nu}} - \Gamma^{\hat{\nu}}\Gamma^{\hat{\mu}}), \qquad \Gamma^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}} = \frac{1}{6}(\Gamma^{\hat{\mu}}\Gamma^{\hat{\nu}}\Gamma^{\hat{\rho}} \pm 5terms), \tag{A.7}$$

$$(\gamma^{\hat{\mu}\hat{\nu}})^{\alpha}{}_{\beta} = \frac{1}{2}(\gamma^{\hat{\mu}}\gamma^{\hat{\nu}} - \gamma^{\hat{\nu}}\bar{\gamma}^{\hat{\mu}})^{\alpha}{}_{\beta}, \qquad (\bar{\gamma}^{\hat{\mu}\hat{\nu}})^{\alpha}{}_{\beta} = \frac{1}{2}(\bar{\gamma}^{\hat{\mu}}\gamma^{\hat{\nu}} - \bar{\gamma}^{\hat{\nu}}\gamma^{\hat{\mu}})^{\alpha}{}_{\beta}, \tag{A.8}$$

$$(\gamma^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}})^{\alpha\beta} = \frac{1}{6}(\gamma^{\hat{\mu}}\bar{\gamma}^{\hat{\nu}}\gamma^{\hat{\rho}})^{\alpha\beta} \pm 5terms, \qquad (\bar{\gamma}^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}})_{\alpha\beta} = \frac{1}{6}(\bar{\gamma}^{\hat{\mu}}\gamma^{\hat{\nu}}\bar{\gamma}^{\hat{\rho}})_{\alpha\beta} \pm 5terms, \tag{A.9}$$

とする。

32 次元の表式で、

$$\Pi \equiv \Gamma^1\Gamma^2\Gamma^3\Gamma^4, \qquad \Pi' \equiv \Gamma^5\Gamma^6\Gamma^7\Gamma^8, \tag{A.10}$$

と定義する。記号の簡略化のため 16 次元の表式の場合も同じ記号を使って、

$$\Pi^{\hat{\mu}}{}_{\hat{\nu}} \equiv (\gamma^1\bar{\gamma}^2\gamma^3\bar{\gamma}^4)^{\hat{\mu}}{}_{\hat{\nu}}, \qquad (\Pi')^{\hat{\mu}}{}_{\hat{\nu}} \equiv (\gamma^5\bar{\gamma}^6\gamma^7\bar{\gamma}^8)^{\hat{\mu}}{}_{\hat{\nu}}, \tag{A.11}$$

としておく。

以下では、有用な関係式をまとめておく。

$$(\Gamma^{\hat{+}})^2 = (\Gamma^{\hat{-}})^2 = 0, \qquad \gamma^{\hat{+}}\bar{\gamma}^{\hat{+}} = \gamma^{\hat{-}}\bar{\gamma}^{\hat{-}} = 0. \tag{A.12}$$

32 成分の Π に対しても 16 成分の Π に対しても、

$$\Pi^2 = 1, \qquad (\Pi')^2 = 1. \tag{A.13}$$

ξ_+ を positive chirality[1] の spinor とすると、

$$\Gamma^{\hat{+}}(\Pi + \Pi')\xi_+ = 0, \qquad \Gamma^{\hat{-}}(\Pi - \Pi')\xi_+ = 0. \tag{A.14}$$

この式は、16 成分の表式では、

$$\bar{\gamma}^{\hat{+}}(\Pi + \Pi') = 0, \qquad \bar{\gamma}^{\hat{-}}(\Pi - \Pi') = 0, \tag{A.15}$$

となる。ξ_- を negative chirality spinor とすると、

$$(\Pi + \Pi')\Gamma^{\hat{-}}\xi_- = 0, \qquad (\Pi - \Pi')\Gamma^{\hat{+}}\xi_- = 0, \tag{A.16}$$

$$(\Pi - \Pi')\gamma^{\hat{-}} = 0, \qquad (\Pi - \Pi')\gamma^{\hat{+}} = 0, \tag{A.17}$$

となる。

SFT で出てくる $SO(8)$ spinor の量を書いておく。

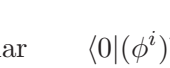
$$u^I_{abc\dot{a}} = -\gamma^{IJ}_{[ab}\gamma^J_{c]\dot{a}}, \tag{A.18}$$

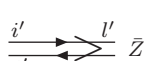
$$t^{IJ}_{abcd} = \gamma^{IK}_{[ab}\gamma^{JK}_{cd]}, \tag{A.19}$$

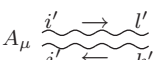
[1] positive chirality は $\Gamma_{11}\xi = +\xi$ で、negative chirality は $\Gamma_{11}\eta = -\eta$。

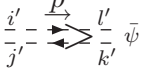
付 録B　$\mathcal{N}=4$ SYM のFeynman Rule

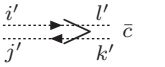
propagator:

scalar　$\langle 0|(\phi^i)^{i'}{}_{j'}(-p)(\phi^j)^{k'}{}_{l'}(p)|0\rangle_{\rm free} = (\phi^i)^{i'}{}_{j'}$  $(\phi^j)^{k'}{}_{l'} = g_{YM}^2\delta_{ij}\delta^{i'}_{l'}\delta^{k'}_{j'}\dfrac{1}{2p^2}$

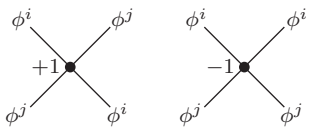
complex　$\langle 0|Z(-p)\bar{Z}(p)|0\rangle_{\rm free} = Z$  $\bar{Z} = g_{YM}^2\delta^{i'}_{l'}\delta^{k'}_{j'}\dfrac{1}{2p^2}$

gauge　$\langle 0|A_\mu(-p)A_\nu(p)|0\rangle_{\rm free} = A_\mu$  $A_\nu = g_{YM}^2\delta^{i'}_{l'}\delta^{k'}_{j'}\dfrac{1}{2p^2}$

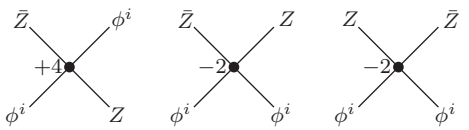
fermion　$\langle 0|\psi(-p)\bar{\psi}(p)|0\rangle_{\rm free} = \psi$  $\bar{\psi} = g_{YM}^2\delta^{i'}_{l'}\delta^{k'}_{j'}\dfrac{-\gamma\cdot p}{2p^2}$

ghost　$\langle 0|c(-p)\bar{c}(p)|0\rangle_{\rm free} = c$  $\bar{c} = g_{YM}^2\delta^{i'}_{l'}\delta^{k'}_{j'}\dfrac{1}{2p^2}$

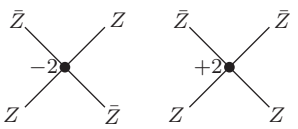
interaction vertex:



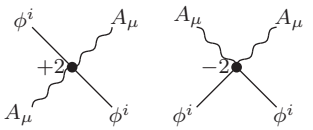
ϕ^4 の項



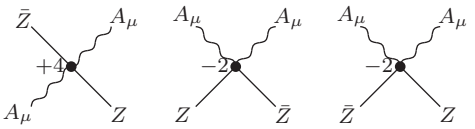
$\phi^2 Z^2$ の項



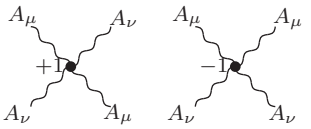
Z^4 の項



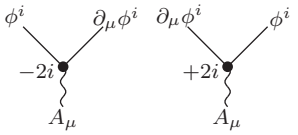
$A_\mu^2\phi^{i2}$ の項



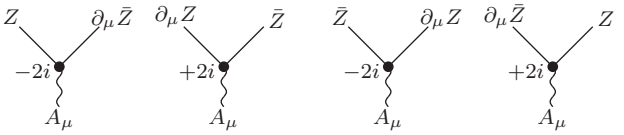
$A_\mu^2 Z^2$ の項



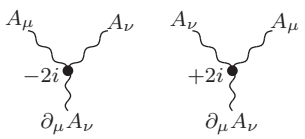
A_μ^4 の項



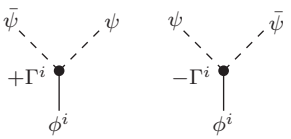
$A_\mu\phi^2$ の項



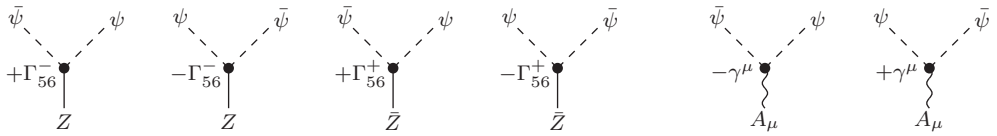
$A_\mu Z^2$ の項



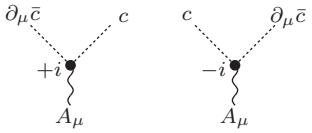
A_μ^3 の項



$\psi^2\phi$ の項



$\psi^2 Z$ の項　　$\psi^2 A_\mu$ の項

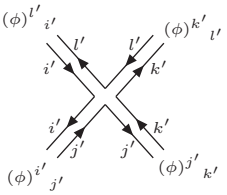


$c\bar{c}A_\mu$ の項

ただし、vertex の各点には $\frac{1}{g_{YM}^2}$ の factor がかかっているが、それは省略した。また、

$$\Gamma^\pm_{56} \equiv \frac{\Gamma^5 \pm \Gamma^6}{\sqrt{2}}. \tag{B.1}$$

vertex の見方は、



である。

付 録C　SYMのLoop計算での有用な公式

dimensional regularization での notation と有用な公式をまとめておく。

$$[d^{2\omega}k] = \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}}, \qquad \omega \equiv 2 - \epsilon. \tag{C.1}$$

dimensional regularization による loop 計算の公式

$$\int [d^{2\omega}k] \frac{1}{(k^2 + 2p\cdot k + m^2)^s} = \frac{\Gamma(s-\omega)}{(4\pi)^\omega \Gamma(s)} (m^2 - p^2)^{\omega - s}, \tag{C.2}$$

$$\int [d^{2\omega}k] \frac{k_\mu}{(k^2 + 2p\cdot k + m^2)^s} = -p_\mu \frac{\Gamma(s-\omega)}{(4\pi)^\omega \Gamma(s)} (m^2 - p^2)^{\omega - s}, \tag{C.3}$$

$$\int [d^{2\omega}k] \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 + 2p\cdot k + m^2)^s} = \frac{1}{(4\pi)^\omega \Gamma(s)} (m^2 - p^2)^{\omega - s} \times \left(p_\mu p_\nu \Gamma(s-\omega) + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\Gamma(s-\omega-1)(m^2 - p^2) \right). \tag{C.4}$$

Feynman パラメータの公式

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 dx \frac{1}{ax + b(1-x)^2}, \tag{C.5}$$

$$\frac{1}{a^\alpha b^\beta} = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha) + \Gamma(\beta)} \int_0^1 dx \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{(ax + b(1-x))^{\alpha+\beta}}. \tag{C.6}$$

オイラーの Γ 関数, B 関数

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty dt t^a e^{-t}, \tag{C.7}$$

$$B(a,b) = \int_0^1 dx x^{a-1}(1-x)^{b-1} = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}. \tag{C.8}$$

Γ 関数に関する公式

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a), \qquad \Gamma(n+1) = n!. \tag{C.9}$$

Γ の極 $(a = 0)$ の周りでの展開

$$\Gamma(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} - \gamma + O(\epsilon). \tag{C.10}$$

これらの公式を使って、1-loop 計算のいくつかを行っておく。

$$\begin{aligned}\int [d^{2\omega}p]\frac{1}{k^2(k+p)^2} &= \int_0^1 dx \int [d^{2\omega}p]\frac{1}{(k^2+(1-x)p\cdot k+(1-x)p^2)^2} \\ &= \frac{\Gamma(2-\omega)}{(4\pi)^\omega}\int_0^1 dx x^{\omega-2}(1-x)^{\omega-2}(p^2)^{\omega-2} = \frac{\Gamma(2-\omega)\Gamma(\omega-1)^2}{(4\pi)^\omega\Gamma(2\omega-2)}\frac{1}{(p^2)^{2-\omega}},\end{aligned} \tag{C.11}$$

$$\int [d^{2\omega}p]\frac{k_\mu}{k^2(k+p)^2} = -\frac{1}{2}\frac{\Gamma(2-\omega)\Gamma(\omega-1)^2}{(4\pi)^\omega\Gamma(2\omega-2)}\frac{p_\mu}{(p^2)^{2-\omega}}. \tag{C.12}$$

2ω 次元位置空間での propagator の表示は次の Fourier 変換を用いて得られる。

$$\int [d^{2\omega}p]\frac{e^{ipx}}{(p^2)^s} = \frac{\Gamma(\omega-s)}{4^s\pi^\omega\Gamma(s)}\frac{1}{(x^2)^{\omega-s}}. \tag{C.13}$$

$s=1$ とおけば、propagator が求まる。

$$\Delta(x) \equiv \frac{\Gamma(\omega-1)}{4\pi^\omega(x^2)^{\omega-1}}. \tag{C.14}$$

位置空間での loop 計算の積分公式も (C.2), (C.6) 等を用いて、

$$\begin{aligned}\left(\frac{\Gamma(\omega-1)}{4\pi^\omega}\right)^2 (x^2)^{2\omega-2}\int \frac{d^{2\omega}y}{(y^2)^{2\omega-2}[(y-x)^2]^{2\omega-2}} &= \frac{1}{16\pi^\omega}\frac{\Gamma(\omega-1)^2\Gamma(3\omega-4)}{\Gamma(2\omega-2)^2}\frac{\Gamma(2-\omega)^2}{\Gamma(4-2\omega)}(x^2)^{2-\omega} \\ &= \frac{1}{8\pi^2}\left(\frac{1}{\epsilon}+\gamma+1+\log\pi+\log x^2+O(\epsilon)\right),\end{aligned} \tag{C.15}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{\Gamma(\omega-1)}{4\pi^\omega}\right)^2 (x_1^2)^{\omega-1}(x_2^2)^{\omega-1}\int \frac{d^{2\omega}y}{(y^2)^{2\omega-2}[(y-x_1)^2]^{\omega-1}[(y-x_2)^2]^{\omega-1}} \\ = \frac{1}{16\pi^2}\left(\frac{1}{\epsilon}+\gamma+2+\log\pi+\log\frac{x_1^2x_2^2}{(x_2-x_1)^2}+O(\epsilon)\right).\end{aligned} \tag{C.16}$$

付 録D　CFT でのMatrix Element と 和公式

ここでは文中に出てくる CFT の Matrix element をまとめて書いておく。また、BMN operator の基底変換の際に必要な 3 点関数係数に対する和公式を計算しておく。

D.1　Matrix Element

$m \neq 0$, $n \neq 0$, $|m| \neq |n|$ とする。
single trace operator 同士の量に関する係数として、

$$M^1_{nn} = \frac{1}{60} - \frac{1}{24\pi^2 m^2} + \frac{7}{16\pi^4 m^4}, \tag{D.1}$$

$$M^1_{n,-n} = \frac{1}{48\pi^2 m^2} + \frac{35}{128\pi^4 m^4}, \tag{D.2}$$

$$M^1_{nm} = \frac{1}{4\pi^2(m-n)^2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{\pi^2 m^2} + \frac{1}{\pi^2 n^2} - \frac{3}{2\pi^2 mn} - \frac{1}{2\pi^2(m-n)^2}\right), \tag{D.3}$$

$$D^1_{nn} = D^1_{n,-n} = \frac{1}{3} + \frac{5}{2\pi^2 n^2}, \tag{D.4}$$

$$D^1_{nm} = \frac{1}{3} + \frac{1}{\pi^2 n^2} + \frac{1}{\pi^2 m^2}, \tag{D.5}$$

single trace operator と double trace operator との間の量の係数、つまり 3 点関数に関する係数として、

$$C_{n,py} = C_{py,n} = \frac{y^{3/2}\sqrt{1-y}}{\sqrt{J}\pi^2}\frac{\sin^2(\pi n y)}{(p-ny)^2}, \tag{D.6}$$

$$C_{n,y} = C_{y,n} = -\frac{1}{\sqrt{J}\pi^2}\frac{\sin^2(\pi n y)}{n^2}, \tag{D.7}$$

$$\Gamma^{(1)}_{n,py} = \Gamma^{(1)}_{py,n} = \left(\frac{p^2}{y^2} - \frac{pn}{y} + n^2\right) C_{n,py}, \tag{D.8}$$

$$\Gamma^{(1)}_{n,y} = \Gamma^{(1)}_{n,y} = n^2 C_{n,y}. \tag{D.9}$$

D.2 和公式

さて、3 点関数係数 $C_{n,py}$, $C_{n,y}$ の p, y や y に関する足し上げの公式は、

$$\begin{aligned}\sum_{p,y} C_{n,py}C_{py,m} &= \frac{J}{J\pi^4}\int_0^1 dyy^3(1-y)\sin^2(\pi ny)\sin^2(\pi my)\sum_{p=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(p-ny)^2(p-my)^2} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{30}-\frac{1}{12\pi^2n^2}+\frac{1}{2\pi^4n^4}, & n=m, \\ \frac{1}{6\pi^2(n-m)^2}+\frac{1}{4\pi^4n^2m^2}+\frac{1}{\pi^4nm(n-m)^2}-\frac{1}{4\pi^4(n-m)^4}, & n\neq m, \end{cases}\end{aligned} \tag{D.10}$$

$$\sum_{p,y}\frac{p}{y}C_{n,py}C_{py,m} = \begin{cases} n\left(\frac{1}{30}-\frac{1}{12\pi^2n^2}+\frac{7}{8\pi^4n^4}\right), & n=m, \\ (n+m)\left(\frac{1}{12\pi^2(n-m)^2}+\frac{1}{4\pi^4n^2m^2}+\frac{1}{8\pi^4nm(n-m)^2}-\frac{1}{8\pi^4(n-m)^4}\right), & n\neq m, \end{cases} \tag{D.11}$$

$$\sum_{p,y}\frac{p^2}{y^2}C_{n,py}C_{py,m} = \begin{cases} n^2\left(\frac{1}{30}+\frac{3}{2\pi^4n^4}\right), & n=m, \\ \frac{1}{4\pi^2(n-m)^2}\left(\frac{n^2+m^2}{3}+\frac{n^6+m^6-2nm(n^4+m^4)+n^3m^3}{\pi^2n^2m^2(n-m)^2}\right), & n\neq m, \end{cases} \tag{D.12}$$

$$\begin{aligned}\sum_{y} C_{n,y}C_{y,m} &= \frac{J}{J\pi^4}\int_0^1 dy\frac{\sin^2(\pi ny)}{n^2}\frac{\sin^2(\pi my)}{m^2} \\ &= \begin{cases} \frac{3}{8\pi^4n^4}, & |n|=|m|, \\ \frac{1}{4\pi^4n^2m^2}, & |n|\neq|m|, \end{cases}\end{aligned} \tag{D.13}$$

付 録E　Neumann 係数を計算する際の有用な関係式

Neumann 行列は、無限次元の行列である。この行列は、無限次元の行列 $A^{(r)}$, ベクトル B を用いて表わされる。一般に無限次元行列の積には無限級数が表われるため、explicit に求めることは難しい。この章では、本文では扱っていない計算を行なっておく。まず flat space の場合の Neumann 係数に関する計算をして、その後に pp-wave の Neumann 係数に関する計算をしておく。flat space の場合の計算は pp-wave の場合の計算の際にも有用である。

E.1　Flat Space Neumann 係数に関する計算

まず、$A^{(r)}$ や B に関する関係式を導いておく。ここでは無限級数をフーリエ級数を用いて書き直しすことにより関係式が得られる。さらに得られた関係式を用いて、flat space の Neumann 係数の factorization 関係式、つまり $\bar{N}^{rs}_m n$ と $\bar{N}^r_m$ の間の関係式 (7.99) を導く。

E.1.1　有用な行列の積の公式

$$A^{(r)^T} C A^{(s)} = -\frac{\alpha_3}{\alpha_r} C\delta^{rs}, \qquad r,s = 1,2, \tag{E.1}$$

$$A^{(r)^T} C B = 0, \qquad r = 1,2, \tag{E.2}$$

$$B^T C B = \frac{2}{\alpha_1 \alpha_2}, \tag{E.3}$$

これらの関係式は、次の公式を使って直ちに得られる。

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin^2(p\pi\beta)}{n^2 - p^2\gamma^2} = \frac{\pi\left[\cos\frac{n\pi}{\gamma} - \cos\left(\frac{n\pi}{\gamma}[1+2\beta]\right)\right]}{4n\gamma\sin\frac{n\pi}{\gamma}}, \tag{E.4}$$

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin^2(p\pi\beta)}{p^2} = -\frac{1}{2}\pi^2\beta(\beta+1), \tag{E.5}$$

$$\sum_{p=1}^{\infty}\frac{p^2\sin^2(p\pi\beta)}{(m^2-p^2\gamma_1^2)(n^2-p^2\gamma_2^2)}=\frac{1}{(m^2\gamma_2^2-n^2\gamma_1^2)}\left\{\frac{m\pi\left[\cos\left(\frac{m\pi}{\gamma_1}[1+2\beta]\right)-\cos\frac{m\pi}{\gamma_1}\right]}{4\gamma_1\sin\frac{m\pi}{\gamma_1}}\right.$$
$$\left.-\frac{n\pi\left[\cos\left(\frac{n\pi}{\gamma_2}[1+2b]\right)-\cos\frac{n\pi}{\gamma_2}\right]}{4\gamma_2\sin\frac{n\pi}{\gamma_2}}\right\},$$
ただし、$m^2\gamma_2^2\neq n^2\gamma_1^2$, (E.6)

$$\sum_{p=1}^{\infty}\frac{p^2\sin^2(p\pi\beta)}{(m^2-p^2\beta^2)^2}=-\frac{\pi^2}{4\beta^3}. \tag{E.7}$$

これらの公式は、フーリエ展開

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\frac{e^{iny}}{n+\alpha}=\frac{\pi}{\sin\pi\alpha}e^{-i\alpha y},\qquad -\pi<y<\pi, \tag{E.8}$$

から得られる。同様にして、

$$A^{(r)^T}C^{-1}A^{(s)}=-\frac{\alpha_r}{\alpha_3}C^{-1}\delta^{rs},\qquad r,s=1,2, \tag{E.9}$$

$$(\Gamma^{-1}C^{-1}A^{(r)})=(C^{-1}A^{(r)})+\frac{\alpha_r}{\alpha_3}(\Gamma^{-1}A^{(r)}C^{-1}),\qquad r=1,2, \tag{E.10}$$

も、上のフーリエ展開から得られる公式

$$\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\sin^2(p\pi\beta)}{(m^2-p^2\gamma_1^2)(n^2-p^2\gamma_2^2)}=0,\qquad \text{ただし、}m^2\gamma_2^2\neq n^2\gamma_1^2, \tag{E.11}$$

$$\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\sin^2(p\pi\beta)}{(m^2-p^2\beta^2)^2}=-\frac{\pi^2}{4m^2\beta}. \tag{E.12}$$

を使うことで導ける。このようにして、次の関係式も導ける。

$$B^TC^{-1}B=\frac{2\pi^2}{3\alpha_3^2}, \tag{E.13}$$

$$B^T\frac{C^3}{C^2-\lambda^2}B=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\alpha_3}{\alpha_1\alpha_2}\right)^2\frac{\cos\pi\lambda(1+2\beta_1)-\cos\pi\lambda}{\lambda\sin\pi\lambda}, \tag{E.14}$$

$$\sum_{r=1}^{3}\frac{1}{\alpha_r}A^{(r)}CA^{(r)^T}=0, \tag{E.15}$$

$$\sum_{r=1}^{3}\alpha_rA^{(r)}C^{-1}A^{(r)^T}=\frac{\alpha}{2}BB^T, \tag{E.16}$$

E.1.2 Flat Space Neumann 係数の Factorization 関係式

それでは、flat space の Neumann 係数 $\bar{N}^{rs}_{mn}$ と $\bar{N}^{r}_{m}$ の間の関係式 (7.99) を導こう。(E.9), (E.16) を用いると、

$$\Gamma C^{-1}\Gamma = C^{-1}\Gamma + \Gamma C^{-1} - \frac{\alpha_1\alpha_2}{2}BB^T. \tag{E.17}$$

左右から Γ^{-1} をかけると、

$$C^{-1} = C^{-1}\Gamma^{-1} - \Gamma^{-1}C^{-1} + \frac{\alpha_1\alpha_2}{2}(\Gamma^{-1}B)(\Gamma^{-1}B)^T, \tag{E.18}$$

(E.10) の transpose をとったものに上の式を使い、右から $A^{(s)}$ をかけると、

$$\frac{\alpha_1\alpha_2}{2}({A^{(r)}}^T\Gamma^{-1}B)({A^{(s)}}^T\Gamma^{-1}B)^T = {A^{(r)}}^T\Gamma^{-1}C^{-1}A^{(s)} + \frac{\alpha_r}{\alpha_3}C^{-1}{A^{(r)}}^T\Gamma^{-1}A^{(s)}, \tag{E.19}$$

右辺第一項に再び (E.10) を使うと、

$$\frac{\alpha}{2}({A^{(r)}}^T\Gamma^{-1}B)({A^{(s)}}^T\Gamma^{-1}B)^T = -\alpha_r C^{-1}\delta^{rs} + \left(\frac{\alpha_r}{m} + \frac{\alpha_s}{n}\right){A^{(r)}}^T\Gamma^{-1}A^{(s)}. \tag{E.20}$$

よって、

$$\bar{N}^{rs}_{mn} = -\frac{mn\alpha}{\alpha_r n + \alpha_s m}\bar{N}^{r}_{m}\bar{N}^{s}_{n}, \tag{E.21}$$

が導けた。

E.2 pp-wave の Neumann 係数に関すること

E.2.1 Fermionic Neumann 係数

fermionic Neumann 係数は、

$$Q^{rs}_{mn} = e(\alpha_r)\sqrt{|\frac{\alpha_s}{\alpha_r}|}[P_r^{-1}U_r C^{1/2}\bar{N}^{rs}C^{-1/2}U_s P_s^{-1}]_{mn}, \tag{E.22}$$

$$Q^{r}_{m} = \frac{e(\alpha_r)}{\sqrt{|\alpha_r|}}(q-\mu\alpha k)^{-1}(1+\tfrac{1}{2}\mu\alpha k(1+\Pi))[P_r C_r^{1/2}C^{1/2}\bar{N}^{r}]_{m}, \tag{E.23}$$

$$E^0_b = \prod_{a=1}^{8}[\sum_{r=1}^{3}\lambda_0^{(r)a}]. \tag{E.24}$$

E.2.2 (7.285) に現れる NY の計算

それでは、本文で用いた NY の関係式を示しておこう。まず、$\Gamma_+ CA^{(r)}$ に (E.1) を用いると、

$$\Gamma_+ CA^{(r)} = \frac{1}{\alpha_r}A^{(r)}C_r + C_3 A^{(r)}, \qquad r = 1, 2. \tag{E.25}$$

この式の左から Γ_+^{-1} をかけると、

$$\Gamma_+^{-1}C_3A^{(r)} = CA^{(r)} - \frac{1}{\alpha_r}\Gamma_+^{-1}A^{(r)}C_r, \qquad r = 1, 2. \tag{E.26}$$

左から B^T をかけて (E.2) を用いると、

$$Y^TCU_3^{-1}A^{(r)} = -\frac{1}{\alpha_r}Y^TA^{(r)}U_r^{-1}C, \qquad r = 1, 2, \tag{E.27}$$

を得る。(7.201) の右から $A^{(r)}$ をかけて、(E.26), (E.27) を用いると、

$$\Gamma_+^{-1}A^{(r)}C_r - \alpha_rC_3\Gamma_+^{-1}A^{(r)} = -\frac{1}{2}\frac{\alpha}{1+\mu\alpha k}CU_3^{-1}YY^TA^{(r)}U_r^{-1}C, \qquad r = 1, 2, \tag{E.28}$$

となる。この式と (7.201) を合わせることで、

$$\Gamma_+^{-1}A^{(r)}C_r - \alpha_rC_3\Gamma_+^{-1}A^{(r)} = C\delta_{r,3} - \frac{1}{2}\frac{\alpha}{1+\mu\alpha k}CU_3^{-1}YY^TA^{(r)}U_r^{-1}C, \qquad r = 1, 2, 3, \tag{E.29}$$

を得る。この式の左から $B^TC_3^{-1}$ を右から $\alpha_rC^{-1}C_r^{-1}A^{(r)^T}$ をかけて、r についての和をとると、

$$\left(1 - \frac{\mu}{2}\frac{\alpha}{1+\mu\alpha k}(k - \mu k_1)\right)Y^TN = \frac{1}{2}\left(\alpha k_1 + \frac{\alpha k}{2}\frac{\alpha}{1+\mu\alpha k}(k - \mu k_1)\right)B^T + B^TC_3^{-2}, \tag{E.30}$$

ただし、$k_1 = B^TC_3^{-1}Y$ である。本文で $B^TC_3^{-2}Y$ も現れるので合わせて、

$$k_i = B^TC_3^{-i}Y, \tag{E.31}$$

と定義しておく。この式の transpose をとると NY は、

$$NY = g_1C_3^{-2}B + g_2B, \tag{E.32}$$

となる。ただし、

$$g_1 = \frac{2(1+\mu\alpha k)}{2 + \mu\alpha k + \mu^2\alpha k_1}, \tag{E.33}$$

$$g_2 = \frac{\alpha}{2}\frac{\alpha k^2 + \mu\alpha k k_1 + 2k_1}{2 + \mu\alpha k + \mu^2\alpha k_1}, \tag{E.34}$$

である。

E.2.3 積分変換

本文で次の積分変換を用いて、$F(\mu, y)$ を求めた。ここで、その積分変換について書いておく。

定理　$g(z)$ が z の右半平面で正則であるとする。また、右半平面では $|z| \to \infty$ で $g(z)$ は power low で 0 になるとする。その時、

$$\int_0^\infty (z^2 + x^2)^{-3/2}f(x)dx = g(z), \qquad \mathrm{Re}(z) > 0, \tag{E.35}$$

の逆変換は、

$$f(x) = -i\frac{x^2}{\pi}\int_0^\pi g(-ix\cos\theta)\cos\theta d\theta, \tag{E.36}$$

で与えられる。

関連図書

[1] G. 't Hooft, "A PLANAR DIAGRAM THEORY FOR STRONG INTERACTIONS," *Nucl. Phys.* **B72** (1974) 461.

[2] J. M. Maldacena, "The large N limit of superconformal field theories and supergravity," *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998) 231–252, `hep-th/9711200`.

[3] S. S. Gubser, I. R. Klebanov, and A. M. Polyakov, "Gauge theory correlators from non-critical string theory," *Phys. Lett.* **B428** (1998) 105–114, `hep-th/9802109`.

[4] E. Witten, "Anti-de Sitter space and holography," *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998) 253–291, `hep-th/9802150`.

[5] O. Aharony, S. S. Gubser, J. M. Maldacena, H. Ooguri, and Y. Oz, "Large N field theories, string theory and gravity," *Phys. Rept.* **323** (2000) 183–386, `hep-th/9905111`.

[6] E. D'Hoker and D. Z. Freedman, "Supersymmetric gauge theories and the AdS/CFT correspondence," `hep-th/0201253`.

[7] G. 't Hooft, "Dimensional reduction in quantum gravity," `gr-qc/9310026`.

[8] L. Susskind, "The World as a hologram," *J. Math. Phys.* **36** (1995) 6377–6396, `hep-th/9409089`.

[9] R. Penrose, "Any spce-time has a plane wave as a limit," in *Differential geometry and relativity*, pp. 271–275. Reidel, Dordrecht, 1976.

[10] R. Gueven, "Plane wave limits and T-duality," *Phys. Lett.* **B482** (2000) 255–263, `hep-th/0005061`.

[11] M. Blau, J. Figueroa-O'Farrill, and G. Papadopoulos, "Penrose limits, supergravity and brane dynamics," *Class. Quant. Grav.* **19** (2002) 4753, `hep-th/0202111`.

[12] M. Blau, J. Figueroa-O'Farrill, C. Hull, and G. Papadopoulos, "A new maximally supersymmetric background of IIB superstring theory," *JHEP* **01** (2002) 047, `hep-th/0110242`.

[13] P. K. Townsend, "Killing spinors, supersymmetries and rotating intersecting branes," `hep-th/9901102`.

[14] J. M. Figueroa-O'Farrill, "On the supersymmetries of anti de Sitter vacua," *Class. Quant. Grav.* **16** (1999) 2043–2055, hep-th/9902066.

[15] M. Hatsuda, K. Kamimura, and M. Sakaguchi, "From super-AdS(5) x S**5 algebra to super-pp-wave algebra," *Nucl. Phys.* **B632** (2002) 114–120, hep-th/0202190.

[16] R. R. Metsaev, "Type IIB Green-Schwarz superstring in plane wave Ramond- Ramond background," *Nucl. Phys.* **B625** (2002) 70–96, hep-th/0112044.

[17] R. R. Metsaev and A. A. Tseytlin, "Exactly solvable model of superstring in plane wave Ramond- Ramond background," *Phys. Rev.* **D65** (2002) 126004, hep-th/0202109.

[18] R. R. Metsaev and A. A. Tseytlin, "Type IIB superstring action in AdS(5) x S(5) background," *Nucl. Phys.* **B533** (1998) 109–126, hep-th/9805028.

[19] P. van Nieuwenhuizen, "GENERAL THEORY OF COSET MANIFOLDS AND ANTISYMMETRIC TENSORS APPLIED TO KALUZA-KLEIN SUPERGRAVITY,". ITP-SB-84-57.

[20] M. Blau, J. Figueroa-O'Farrill, C. Hull, and G. Papadopoulos, "Penrose limits and maximal supersymmetry," *Class. Quant. Grav.* **19** (2002) L87–L95, hep-th/0201081.

[21] D. Berenstein, J. M. Maldacena, and H. Nastase, "Strings in flat space and pp waves from N = 4 super Yang Mills," *JHEP* **04** (2002) 013, hep-th/0202021.

[22] D. J. Gross, A. Mikhailov, and R. Roiban, "Operators with large R charge in N = 4 Yang-Mills theory," *Annals Phys.* **301** (2002) 31–52, hep-th/0205066.

[23] A. Santambrogio and D. Zanon, "Exact anomalous dimensions of N = 4 Yang-Mills operators with large R charge," *Phys. Lett.* **B545** (2002) 425–429, hep-th/0206079.

[24] C. Kristjansen, J. Plefka, G. W. Semenoff, and M. Staudacher, "A new double-scaling limit of N = 4 super Yang-Mills theory and PP-wave strings," *Nucl. Phys.* **B643** (2002) 3–30, hep-th/0205033.

[25] N. R. Constable *et al.*, "PP-wave string interactions from perturbative Yang-Mills theory," *JHEP* **07** (2002) 017, hep-th/0205089.

[26] E. D'Hoker, D. Z. Freedman, and W. Skiba, "Field theory tests for correlators in the AdS/CFT correspondence," *Phys. Rev.* **D59** (1999) 045008, hep-th/9807098.

[27] M. Bianchi, B. Eden, G. Rossi, and Y. S. Stanev, "On operator mixing in N = 4 SYM," *Nucl. Phys.* **B646** (2002) 69–101, hep-th/0205321.

[28] N. Beisert, C. Kristjansen, J. Plefka, G. W. Semenoff, and M. Staudacher, "BMN correlators and operator mixing in N = 4 super Yang- Mills theory," hep-th/0208178.

[29] D. J. Gross, A. Mikhailov, and R. Roiban, "A calculation of the plane wave string Hamiltonian from N = 4 super-Yang-Mills theory," hep-th/0208231.

[30] N. R. Constable, D. Z. Freedman, M. Headrick, and S. Minwalla, "Operator mixing and the BMN correspondence," *JHEP* **10** (2002) 068, hep-th/0209002.

[31] M.-x. Huang, "Three point functions of N = 4 super Yang Mills from light cone string field theory in pp-wave," *Phys. Lett.* **B542** (2002) 255–260, hep-th/0205311.

[32] C.-S. Chu, V. V. Khoze, and G. Travaglini, "Three-point functions in N = 4 Yang-Mills theory and pp- waves," *JHEP* **06** (2002) 011, hep-th/0206005.

[33] M. B. Green, J. H. Schwarz, and L. Brink, "SUPERFIELD THEORY OF TYPE II SUPERSTRINGS," *Nucl. Phys.* **B219** (1983) 437–478.

[34] M. B. Green and J. H. Schwarz, "SUPERSTRING INTERACTIONS," *Nucl. Phys.* **B218** (1983) 43–88.

[35] S. Mandelstam, "INTERACTING STRING PICTURE OF DUAL RESONANCE MODELS," *Nucl. Phys.* **B64** (1973) 205–235.

[36] M. Spradlin and A. Volovich, "Superstring interactions in a pp-wave background," *Phys. Rev.* **D66** (2002) 086004, hep-th/0204146.

[37] M. Spradlin and A. Volovich, "Superstring interactions in a pp-wave background. II," hep-th/0206073.

[38] A. Pankiewicz, "More comments on superstring interactions in the pp-wave background," *JHEP* **09** (2002) 056, hep-th/0208209.

[39] A. Pankiewicz and J. Stefanski, B., "pp-wave light-cone superstring field theory," hep-th/0210246.

[40] J. H. Schwarz, "Comments on superstring interactions in a plane-wave background," *JHEP* **09** (2002) 058, hep-th/0208179.

[41] I. R. Klebanov, M. Spradlin, and A. Volovich, "New effects in gauge theory from pp-wave superstrings," *Phys. Lett.* **B548** (2002) 111–118, hep-th/0206221.

[42] J. Gomis, S. Moriyama, and J.-w. Park, "SYM description of SFT Hamiltonian in a pp-wave background," hep-th/0210153.

[43] Y.-H. He, J. H. Schwarz, M. Spradlin, and A. Volovich, "Explicit formulas for Neumann coefficients in the plane- wave geometry," hep-th/0211198.

[44] R. Roiban, M. Spradlin, and A. Volovich, "On light-cone SFT contact terms in a plane wave," hep-th/0211220.

[45] N. Berkovits, "Conformal field theory for the superstring in a Ramond- Ramond plane wave background," *JHEP* **04** (2002) 037, hep-th/0203248.

[46] U. Gursoy, "Predictions for PP-wave string amplitudes from perturbative SYM," hep-th/0212118.

[47] H. Verlinde, "Bits, matrices and 1/N," hep-th/0206059.

[48] D. Vaman and H. Verlinde, "Bit strings from N = 4 gauge theory," hep-th/0209215.

[49] J. Pearson, M. Spradlin, D. Vaman, H. Verlinde, and A. Volovich, "Tracing the string: BMN correspondence at finite J**2/N," hep-th/0210102.

[50] M. Alishahiha and M. M. Sheikh-Jabbari, "The pp-wave limits of orbifolded AdS(5) x S(5)," *Phys. Lett.* **B535** (2002) 328–336, hep-th/0203018.

[51] N.-w. Kim, A. Pankiewicz, S.-J. Rey, and S. Theisen, "Superstring on pp-wave orbifold from large-N quiver gauge theory," *Eur. Phys. J.* **C25** (2002) 327–332, hep-th/0203080.

[52] T. Takayanagi and S. Terashima, "Strings on orbifolded pp-waves," *JHEP* **06** (2002) 036, hep-th/0203093.