この講演は, ソリトン理論・可積分系研究の一つの新しい方向の紹介である. ここで言う「非可換化」とは「非可換空間上への拡張」を指す.

非可換空間は座標関数同士の積の非可換性で特徴付けられる：

$$[x^i, x^j] = i\theta^{ij}. \tag{1}$$

ここで, θ^{ij} は反対称な実定数であり, 非可換パラメータと呼ばれる. この関係式は, 量子力学の正準交換関係：$[q, p] = i\hbar$ に類似しており, 「空間の不確定性関係」を導く. このことから非可換空間上では, 粒子の位置は完全に決めることができず, ある広がった分布を持つ. その結果, 可換な空間上では存在した場の特異点が, 非可換空間上では解消されるということが起こりうる.

非可換ソリトンにおいても, 特異点解消が一般に起こり, 可換な場合には見られない面白い結果を生み出す. 例えば, 非可換インスタントンでは, (完備化された) インスタントン・モジュライ空間の特異点が解消し, 特異でない $U(1)$ インスタントン解を具体的に構成することができる.

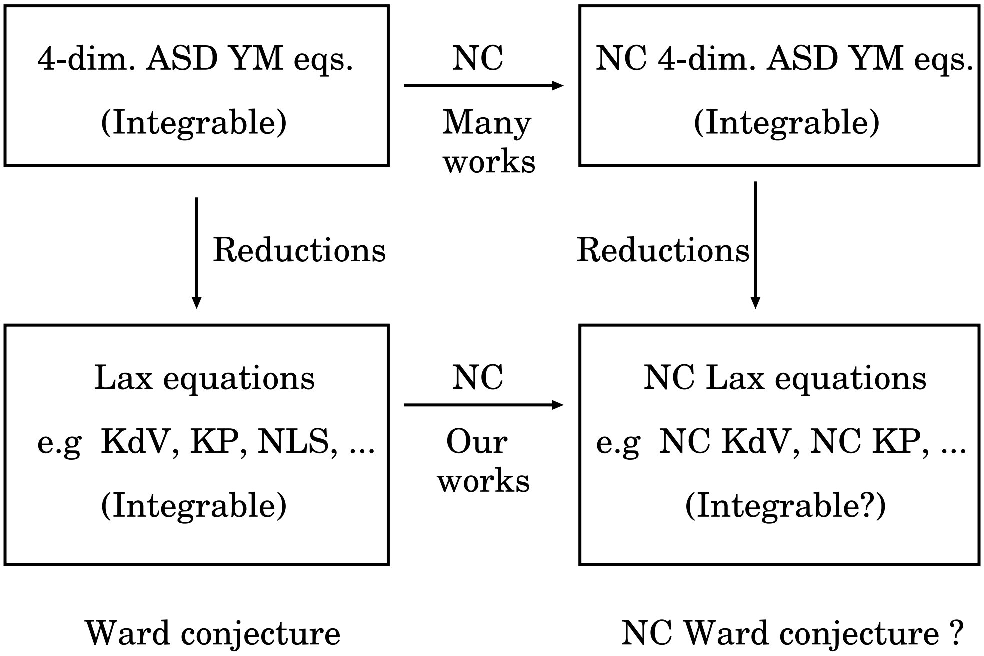
非可換空間上のゲージ理論は, 背景磁場 (B 場) 中の D ブレインの有効理論として近年非常に精力的に調べられた. 特に非可換 4 次元空間上の自己双対なゲージ場の配位 (非可換インスタントン) は ADHM 構成法によって具体的に厳密に構成され, 対応する D ブレインの性質についても理解が進んだ [1]. これは自己双対 Yang-Mills 方程式が非可換空間でも「解ける」すなわち「可積分である」ことを意味する.

一方, より低次元のソリトン方程式, 可積分系として, KdV 方程式, KP 方程式といったものが多数知られている. これらの非可換化についても, 特異点の解消から新しい物理的対象が現れることは十分期待されるが, その体系的研究はこれまでほぼ皆無であった. 非可換空間上の場の方程式というのは無限回微分方程式で記述され, それが解けるという状況はむしろ奇跡に近いのである.

ところがこれらのソリトン方程式, 可積分系は実は 4 次元の自己双対 Yang-Mills 方程式の次元還元によって (ほとんど全て) 得られることが知られている (Ward 予想 [2]). 膨大なリストが [3] にまとめられている. これと自己双対 Yang-Mills 方程式の非可換化の成功を合わせると, KdV 方程式, KP 方程式といったソリトン方程式の非可換化も非常に面白いものと期待される.

次元還元によって得られた方程式は直接にはLax表示の形で書ける．Lax表示を持つ方程式の多くは可積分性が期待されるのである．

この講演では, ソリトン理論, 可積分系の非可換化について議論する．戸田晃一氏(富山県立大)と私は, 非可換空間上のLax方程式(Lax表示を持つ方程式)の生成法を提唱し, 様々な新しい非可換Lax方程式を見出した[4, 5]．これらの方程式は既知の非可換可積分方程式とちょうど一致し, 可積分系の非可換化の一意性を示唆している．私達はWard予想の非可換版にあたる次の予想を提唱した：「非可換Lax方程式は可積分であり, 4次元非可換自己双対Yang-Mills方程式の次元還元によって得られるであろう．(下図)」これは可積分系研究の新しい地平を切り開く可能性を秘めている．弦理論との関わりも非常に興味深い．



参考文献

[1] 浜中 真志, 『ADHM/Nahm構成法とその双対性』, 素粒子論研究 **106-1** (2002-10) 1-60 [http://www2.yukawa.kyoto-u.ac.jp/~hamanaka].

[2] R. S. Ward, Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A **315** (1985) 451.

[3] L. J. Mason and N. M. Woodhouse, *Integrability, Self-Duality, and Twistor Theory* (Oxford UP, 1996) [ISBN/0-19-853498-1].

[4] K. Toda, PrHEP-unesp2002/038, proceedings of workshop on integrable theories, solitons and duality, Sao Paulo, Brazil, 1-6 July 2002.

[5] M. Hamanaka and K. Toda, hep-th/0211148; hep-th/0301213.