目 次

第 1 章　Introduction **3**

第 2 章　行列模型のコンパクト化と非可換幾何 **7**
2.1　行列模型の動機 7
2.2　行列模型のコンパクト化 9
2.2.1　Taylor の コンパクト化 9
2.2.2　$N \to \infty$ 行列模型のコンパクト化 14
2.3　非可換幾何 23
2.4　非可換トーラス上の YM 理論 26

第 3 章　弦理論と非可換幾何 **29**
3.1　弦理論, σ 模型, Vertex Operator 29
3.2　Vertex Operator の OPE と $*$ 積 33
3.3　σ 模型から有効作用へ 36
3.3.1　S-matrix と有効理論 37
3.3.2　有効理論のゲージ対称性と σ 模型の正則化 40
3.4　場の再定義と $B \leftrightarrow \theta$ の関係 43
3.4.1　場の再定義 44
3.4.2　二つの表示による U(1) DBI 有効作用の等価性 46
3.5　非可換トーラスと 弦理論の B 場の関係 48
3.5.1　Fourier 変換と T-Dual 49
3.5.2　$B \neq 0$ のトーラスと非可換トーラス 50
3.5.3　非可換トーラスと Open String の OPE 56

第 4 章　T-Duality と 森田同値 **57**
4.1　Target Space の T-Duality 57
4.2　森田同値 63
4.3　T-Duality $\to$ 森田同値 65
4.4　森田同値 $\to$ T-Duality 69
4.5　open string と森田同値 74

第 5 章　変形量子化 **77**
5.1　変形量子化の動機 77
5.2　代数の変形理論 80

5.2.1 differential graded Lie algebra 80
5.2.2 Maurer-Cartan 方程式 85
5.2.3 L_∞-代数としての differential graded Lie algebra 87
5.2.4 コンパクト化と $X = \mathbb{R}^d$ での L_∞-写像の存在 91
5.3 Kontsevich の変形量子化公式 99

第 6 章 経路積分と変形量子化 102
6.1 Batalin-Vilkovisky 形式 103
6.1.1 場の Configuration Space とゲージ軌道 104
6.1.2 経路積分による量子論とゲージ固定 107
6.1.3 Batalin-Vilkovisky bracket と マスター方程式 109
6.2 BV-形式による量子化と変形量子化公式 115
6.2.1 マスター方程式による作用の決定 115
6.2.2 Superfield 形式 116
6.2.3 ゲージ固定 118
6.2.4 Feynman 則 と摂動展開 119

第1章　Introduction

点粒子の量子力学において, 点粒子の位置と運動量は物理的観測量として同時に対角化できない. つまり, 相空間上に点という概念がなくなり点が 「ぼやける」. 作用は 1 次元の時間による積分の形で書かれ, その 1 次元の場は (4 次元) 時空を target space とする写像である. 一方, 弦理論は 2 次元の場の理論であるが, 10 次元時空を target space とする弦の量子力学である. 点から弦へ空間的にも 1 次元の広がりを持つので, さらに物理的な空間上でも点が 「ぼやける」ことは自然とも思える. 形式的には, 点粒子の量子力学が位置と運動量を相空間とするシンプレクティック幾何で表されるのに対して, 弦理論と関係の深いと思われる非可換幾何は空間のみで相空間を張れるシンプレクティック幾何と言える.

非可換幾何学は, 考えたい空間をその上の関数の成す代数で考えるという立場をとる. 普通のハウスドルフ位相空間なら, その上の関数環はもちろん可換である. (さらに位相空間とその上の関数環の 1:1 対応について, Gelfand による代数学の大定理がある.) それを拡張して, 非可換な関数環を考えるとき, それに対応する空間を非可換空間と呼ぶ. 非可換幾何の物理への応用としては, 場の理論の発散の正則化として使われる試みが 1950 年頃に既にあった. [1]それがどの程度成功しているかは別として, 確かに紫外発散の解消として空間を非可換にする (空間上の点を 「ぼかす」) のは自然であるかも知れないし, 場の理論が弦理論の有効理論だとすると, 弦理論と非可換幾何の間にも関係がありそうである. 非可換幾何の具体的な弦理論との関係としては, open string の vertex operator の OPE がある極限で非可換な $*$ 積で表されること [11] などがある. また, その有効理論としてゲージ理論を考える時, world sheet の正則化として point splitting を選ぶと非可換なゲージ変換が出る. 異なる方法で正則化すると, 一般には違う理論になり, こうしてできる正則化の違いによってできる理論は等価であることが期待される. つまり, 同一の理論の表し方は一通りではない.

一方, 非可換幾何の弦理論との関係は, どちらかというと D-brane の幾何として, 行列模型を考えることにより生じた. $N \times N$ の行列の場は, その対角成分を N 個の D-brane の座標と解釈できる. しかし非対角成分の場により, 一般的には行列は非可換である. よって, background として対角行列をとり, D-brane の多体問題を考えても, 量子揺らぎにより一般的には非対角成分の場の寄与があり, D-brane の間に相互作用が働く. その効果を effective に取り入れることにより D-brane の位置に量子補正が加わり, 非対角成分も値を持ち非可換になる. (D-brane の位置が 「ぼやける」.) これが D-brane を probe とした弦理論の新しい不確定性関係 [39] である. また, 一般には古典解としても行列の非可換な解が考えられ, コンパクト化との関連で研究されている [1].

前者の open string の非可換性と, この D-brane の幾何による非可換性にはどういう関係があるだろうか ? D-brane の幾何も, その間の open string の幾何を見ているとも言えるので, それらの間には何らかの関係がありそうだが, 実は, 代数の言葉によるある同値関係 (森田同値) で結び

[1]統一模型の説明として使う試みもあった. (Connes による.)

付いていることが分かる. そしてその同値関係が弦理論の言葉では T-duality であることも分かる [17] [22].

open string と closed string の間の duality を信じると, これらの open string による物理を, closed string による物理として解釈し直せることが期待される. 一般的には難しいが, AdS/CFT 対応を使って, AdS background の場合にその対応を考える試みは最近多い. 一方, 変形量子化理論において, [25] では今考えている非可換な積の成す代数ともう一つの別の代数の間の変形を考える. この二つの代数は (ホモトピー) 同型であり, 非可換な積の成す代数 は open string の理論であり, もう一方の代数を closed string の理論と解釈できる. よって, 変形量子化で表される物理の間にもある種の open-closed duality を見ることができる.

変形量子化においてその非可換環の同型類を一つの理論と思うとき, それはある位相空間の変形と対応していて, metric の情報は入っていない (非可換環の同型な変換と座標変換が関係している). よって, 変形量子化による理論はある種の topological な理論に対応していると思われる. この非可換環は, 座標 x^i の巾展開で表し, (「座標が非可換」なので) $[x^i, x^j] = i\Theta^{ij}$ の関係式で割ったものと思える. この関係式から, x^i と x^j の積の対称部分は代数の演算には寄与しないことが分かる. さらに, 変形量子化の理論から非可換な積は, 2-form $\frac{i}{2}\Theta^{ij}\overleftarrow{\partial_i}\overrightarrow{\partial_j}$ によって生成されることが分かっていて, これを弦理論の二次元の作用の $\sim (G_{ij} + B_{ij})dx^i dx^j$ の dual だと思うと, x^i と x^j の積の対称部分を無視するので Θ^{ij} は反対称であり, 弦理論では background G_{ij} がない物理を見ることに対応する. これが, 上で言った open string の vertex operator の OPE が $*$ 積 になる極限である. このように, 変形量子化の表す理論は, 弦理論においては非常に特別な極限の物理であるかも知れない. しかし, この極限をとらなくても gackground が定数の時に有効作用の積は $*$ 積になるし, AdS の bulk $\leftrightarrow$ boundary の decoupling limit とこの特別な極限が対応しているということから Holography の理解についても有用である可能性もある. また, 理論が複雑な時, まずその対称性が高い場合 (topological, SUSY, CFT など) を考えるように, まず非可換幾何で表せる物理について考えることは, もっと広い物理を考えるのに非常に強力であるかも知れない. 重力を含む理論に対してのよい拡張, また σ 模型の higher loop での代数の拡張など, さらに非可換幾何を越えた代数関係により弦理論, あるいは弦の場の理論がきれいに定式化できることを期待したい.

この論文は以下のように構成されている.

2 章では行列模型のトーラスコンパクト化と非可換幾何の関係, 3 章では弦理論, 主に σ 模型と非可換幾何の関係について論ずる. 行列模型では技術的には特に弦理論を使わないが, それを考える動機としてある程度弦理論の一般的な知識があった方がよい. また 3 章では σ 模型について技術的にも弦理論で良く使う技術を使っている. よってそれぞれの章の始めで簡単にそれらについて復習する. どちらも大雑把な概念のみを説明し, 式の導出などの詳細を説明することを目的とはしない.

行列模型のコンパクト化の問題は, 弦理論で非可換幾何が注目されるようになったきっかけである. [2.2] では行列模型のコンパクト化の条件からどのようにして自然に非可換性が現れるかを実感するために, 行列の計算のみで計算してみてその非可換性の兆候を確かめる. その非可換性を記述する理論として [2.3] でこれから (特に行列模型について) 使う, 非可換幾何についての考え方と必要な知識をまとめる. そして [2.4] ではその非可換幾何の言葉で, 行列模型のコンパクト化に

よって現れる非可換トーラスの上のゲージ理論を構成する.

3章では非可換性と弦理論の NS-NS B 場との関係を説明することを目的とする. [3.2] で σ 模型の量子化の議論を使って σ 模型の境界の open string の vertex operator がその B 場の効果により非可換になり, ある特別な極限においてはその vertex operator の OPE が正確に $*$ 積となることを説明する. [3.3] ではその σ 模型の有効理論, 特にゲージ理論について非可換性の効果がどのように取り入れられるかを説明する. 有効理論の積は一般に上の特別な極限をとらなくても $*$ 積となる. そしてその有効理論の表し方は一通りではなく, B 場の取り入れ方によって古くから知られていたもともとの可換な有効作用を含むさまざまな表示の仕方があることを強調する. また (有効) ゲージ理論のゲージ対称性を σ 模型の分配関数の不変性の要求から導く. その手続きには正則化が必要で, point splitting による正則化から非可換なゲージ対称性が得られることを示した. 得られるゲージ対称性は正則化の手段により, 例えば Pauli-Villars の正則化からはもともとの可換なゲージ対称性が得られる. このことは σ 模型の異なる正則化によって得られる等価で異なる表示による有効理論が場の再定義で結びつけられることを示唆する. [3.4] ではその1例としてゲージ場の有効理論である $U(1)$ DBI 作用について, その2つの異なる表示によるものが場の再定義で移ることを確認する.

[3.5] ではこのような非可換性と弦理論の B 場の関係を非可換トーラス上のゲージ場について考える. 2章で見た非可換性を弦理論的に解釈する. 行列理論から非可換ゲージ理論を得るには1回 Fourier 変換をとった. B 場のない時は [2.2.1] でしたように Fourier 変換は T-dual と一致するが, 一般に B 場の存在する時は Fourier 変換と T-dual は異なることを [3.5.1] で強調する. [3.5.2] では実際に B 場の存在するトーラス上の open string の (zero mode の) 場の理論から, Fourier 変換により作用に $*$ 積が現れることを2つの例で見る. また3章の OPE に注目して非可換空間を導いた議論はもともとの空間がトーラスでもそのまま成り立つ. [3.5.3] ではそれによって現れる非可換トーラスと, [3.5.2] の議論の関係について説明する.

4章では非可換トーラスについて, 森田同値という代数の同値関係と T-duality の関係 (等価性) について論じる. その動機は2章での行列模型のコンパクト化の議論による. つまりコンパクト化の条件は森田同値の条件を出し, 実際に非可換トーラス上のゲージ理論の代数を求めようとすると T-duality group が現れた. [4.1] では復習としてトーラスに巻き付いた弦理論の σ 模型の Hamiltonian を不変に保つという要請から T-duality group を導出する. [4.2] では森田同値の定義とその性質を説明し, その物理的なイメージがつくように, 弦理論における対応物について触れる. そして [4.3] で T-duality で変換し合うものは森田同値であること, [4.4] でその逆の証明を紹介する. (それらで示したこともある条件つきであるが十分有用である.) [4.5] では open string と森田同値の関係について考える. またその解釈により, 今までした非可換トーラスについての議論をまとめる.

5章では, 非可換幾何学の1つとして変形量子化についての数学的な問題を紹介する. 変形量子化の問題とは, ある多様体上に Poisson 構造がある時その多様体上の関数環を associativity を保ったまま非可換化できるか ?またそれを非可換化の parameter $\hbar$ の摂動展開として表し, その $\hbar$ の1次が Poisson bracket となるように変形できるか ?という問題である. これができるということが Kontsevich によって解決され, その関数の非可換化の公式 ($*$ 積) も与えられた. 今までの章では $\mathbb{R}^d$, トーラス上の定数の B 場, つまり弦理論の flat な background による非可換化を考えた

が, この公式が与えられたことは, 一般に空間が曲がっていても, つまり B がもとの空間の座標によっていても同様に B 場によって $*$ 積が得られることを意味する. もちろんここでも関数環が非可換に変形できたということは, その下の多様体が 「非可換」になったことを意味する. [5.1] では変形量子化の動機, つまり非可換化の leading の項を Poisson bracket に制限する意味などについて述べる. [5.2] では変形量子化の存在の証明を紹介する. つまり Poisson 代数が与えられた時, それに対応する associative な $*$ 積の存在を考える. それには Poisson 代数を与える 2 回反対称テンソル場の空間と $*$ 積の成す空間に積構造も入れてそれぞれ代数空間にし, その代数空間の間の写像を構成するという方法をとる. ここでその 2 回反対称テンソル場は弦理論の $B_{\mu\nu}$ 場の逆行列である. この section は数学的な詳細に興味がなければ読み飛ばしても後を読むのに差し支えはない. しかしこの代数の変形理論が topological な弦理論, 又は 3 章でとる極限での弦理論において, B 場と非可換性の関係, あるいはもっと広く弦の代数の本質的な問題を含んでいるように見える. [5.3] では具体的に与えられた変形量子化の公式を紹介する. 例として Moyal 積を導く.

6 章では [5.3] を経路積分から導く. 作用は 2 次元重力を記述するものの 1 つとして考えられていたもの [30] が対応するが, その作用の補助場を積分しきることができる時, それは弦理論での B 場のみの σ 模型になる. 理論は topological であり, その作用は大きなゲージ対称性を持ち, さらにその微小ゲージ変換の Lie 積は閉じない. よって BRST 形式でも量子化できず, Batalin-Vilkovisky 形式を使う必要がある. [6.1] では Batalin-Vilkovisky 形式を説明する. BV-形式はほぼすべてのゲージ理論を量子化する手続きを原理的には与えるが, ゲージ固定の難しい理論はやはり BV-形式でも計算不能に近いほど複雑になるのでとても有用とは言えないが, ここでの作用は BV-形式が有効なよい例である. またこの BV-形式により [34] では closed string の場の理論の作用も決定され, 5 章のような代数の変形理論との関係も深い [34][35][27]. [6.2] では実際に BV-形式を使って作用を量子化し, 変形量子化の公式を導く. 公式を経路積分で導くことにより変形量子化の弦理論的な解釈がよりしやすくなる.

第2章　行列模型のコンパクト化と非可換幾何

弦理論で非可換幾何が注目されたのは, 行列模型のコンパクト化の解として非可換トーラスの定義式が自然に現れるという Connes, Douglas, Schwarz の仕事 [1] からである. この章ではまず [2.2] で行列模型のコンパクト化について, [2.2.2] で行列模型のコンパクト化の条件から技術的には行列計算のみで自然に非可換性が現れることを説明する. [2.3] で非可換幾何の定義と考え方を簡単に説明し, それを使って [2.4] で非可換トーラス上のゲージ場を構成する. 非可換トーラス上の持つ対称性や弦理論との関係など, 詳しい議論は 3 章以降にまわす.

その前に行列模型の弦理論的な動機とその概念を簡単に説明する.

[Notation]

$$
\begin{array}{rcl}
Mat(N) & : & N \times N \text{ 行列} \\
U(N) & : & N \times N \text{ ユニタリー行列} \\
Her(N) & : & N \times N \text{ エルミート行列} \\
Diag(N) & : & N \times N \text{ 対角行列}
\end{array}
$$

2.1　行列模型の動機

弦理論において行列模型を考える動機は, 弦理論の非摂動的な理論を作りたいということである. ここで摂動的とは, 理論にとって基本的な要素 (素粒子) を弦のみであると考え, 弦の散乱振幅を tree, 1-loop, 2-loop,$\cdots$ とそれぞれ計算し, 足しあげて求めることを意味する [3.1 参照]. 理論は結合定数を持っていて, 計算するグラフの loop の数とそれに対応する散乱振幅の値の持つ結合定数の巾は一般に比例している. よって足しあげた散乱振幅は結合定数の巾展開として与えられる.

しかし, 点粒子の場の理論において一般にソリトンが存在するように, 弦理論にもそのソリトンである D-brane が発見された [37]. ここでソリトンとは, 理論の素粒子と "dual" な局在化した energy を持った状態である. 摂動展開が「よい」時, つまり理論の結合定数が小さい時はソリトンは重く, そのような状態は理論に現れにくいが, 結合定数が大きくなるとソリトンは軽くなり, 理論に寄与する. ソリトンは理論の topology によるもので, その効果を非摂動的な効果という.

摂動的な弦理論はほぼできている. よって弦理論のソリトンである D-brane の効果を含む理論を考えたい. その 1 つの候補が行列模型である. しかし行列模型にもいろいろな型 (次元) のものが提案されていて, それが弦理論の何を表すか ?もその解釈はまちまちであり, まだよく分っていない. 基本的にはその作用は 10 次元の $U(N)$ **Super Yang-Mills** 作用 (以下 SYM と略す) から次元をおとし, ゲージ群 $U(N)$ の N について無限大の極限をとった形をしている. 主なものに, BFSS 行列模型 (1 次元 SYM) [2], IKKT 行列模型 (0 次元 SYM)[6] などがある.

なぜこのような作用が弦理論を記述することが期待できるかを少し説明する. もともと $p+1$ 次

元 $U(N)$ SYM 作用は N 枚の平行な (ほぼ一致した) Dp-brane (= 空間方向に p 次元 + 時間 1 次元の D-brane) の有効理論を記述する. 作用はフェルミオンを含む項を省略すると

$$S = \frac{1}{4g_{YM}^2} \int d^{p+1}x \, \mathrm{tr} \left(-F_{ij}F^{ij} - 2(D_i X^m)^2 + [X^m, X^n]^2 \right) \tag{2.1.1}$$

という形をしている. (フェルミオンを含む項も合わせたものがあとで出てくる (2.2.15) である[1].) 作用の場は次のように解釈できる. 時空は $\mathbb{R}^{10} = \mathbb{R}^{p+1} \times \mathbb{R}^{9-p}$ とし[2], $x = (x^0, \cdot\cdot, x^i, \cdot\cdot, x^p) \in \mathbb{R}^{p+1}$ を Dp-brane 上の座標, $x_\perp = (x^{p+1}, \cdot\cdot, x^m, \cdot\cdot, x^9) \in \mathbb{R}^{9-p}$ を Dp-brane と垂直な方向の座標として, Dp-brane 上の場 $A^i(x) \in Her(N)$, $i = 0, \cdots, p$, $X^m(x) \in Her(N)$, $m = p+1, \cdots, 9$ は N 個の内 2 つの **Dp-brane を結ぶ open string** の場と解釈できる (図 2.1). 実際弦理論として **open string** の端点は必ず **D-brane** 上 (**D-brane** の中) に存在する. つまり **D-brane** とは **open string** の境界である.

A^i は Dp-brane に沿った方向の場で, 今 Dp-brane に垂直な場 X^m について考える.

$$X^m = \begin{pmatrix} X_1^m & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & X_i^m & X_{ij}^m & \\ & & \ddots & & \\ & & X_{ji}^m & X_j^m & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & X_n^m \end{pmatrix} \in Her(N) \tag{2.1.2}$$

X^m の対角成分 X_i^m は その真空期待値を $\bar{X}_i^m$ を持っているとするとこの $\bar{X}_i^m$ は i 番目の D-brane の (m 方向の) 位置を表す. 残りの場の揺らぎはその D-brane の m 方向の揺らぎを表す. X^m の非対角成分 X_{ij}^m は i 番目の D-brane と j 番目の D-brane の間をつなぐ open string の場と解釈できる.

その解釈は次のように正当化できる. X_{ij}^m が弦の場であるならば, 弦の振動のモードを無視すれば, その質量は D-brane i,j の距離に比例するのが自然である. 場の理論として質量は作用の中の X_{ij}^m の 2 次の係数として現れる. $(X_{ij}^m)^2$ の係数は質量の 2 乗に比例する. 実際この場合もそうなっている. SYM 型作用 (2.1.1) の potential energy 項の $\mathrm{tr}[X^m, X^n]^2$ は, その対角成分に真空期待値 $\bar{X}_i^m$ 入れて展開すると, $(X_{ij}^m)^2$ の係数は $(\bar{X}_i^m - \bar{X}_j^m)^2$ に比例する[3].

よって SYM 作用は D-brane と弦の両方を含む理論であると言え, また低エネルギー有効理論としては正しい物理を記述するのでこのような SYM 型の行列模型は非摂動的な弦理論を記述するための大前提は満たしていると言える.

実際に弦理論の非摂動的な定義として行列模型を考える時は, これで行列のサイズ N を無限大にする. この Large N 極限の SYM 作用はその場の理論としての loop が closed string と対応することも期待される [40]. しかしこの論文ではそのような行列模型の 「量子論」は考えないのでここでは触れない.

[1] 時空の signature を (2.2.15) では Euclidean で考え, ここでは Lorentzian で考えているという違いはある.

[2] 超弦理論は 10 次元の理論である.

[3] m は縮約をとっている, つまり $m = p+1, \cdots, 9$ で和をとっている. また正確には $(X_{ij}^m)^2$ の係数が $(\bar{X}_i^m - \bar{X}_j^m)^2$ となるためにはゲージ固定しなければならない.

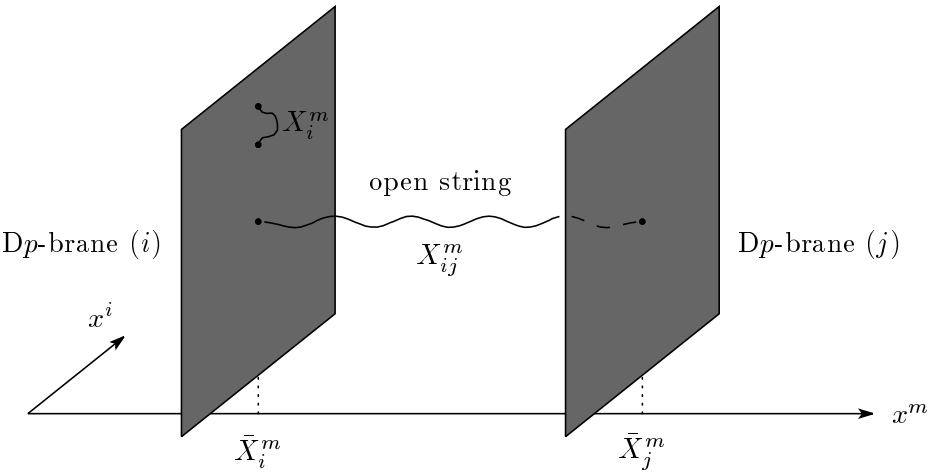

図 2.1: N 個の内の 2 個の Dp-brane と, その間の open string に注目した図. 低エネルギーでは open string の持つエネルギーは (相対論的に) 質量となり, その質量は長さに比例する.

2.2 行列模型のコンパクト化

[2.2.1] では行列のサイズが有限の N の行列模型 (SYM 作用) のコンパクト化について復習する. その計算は多少長いが, N を無限大にした行列模型のコンパクト化についてもその基本的な考えはここにある. そのあと [2.2.2] で N 無限大の行列模型について考える.

2.2.1 Taylor の コンパクト化

[作用の定義]

作用は簡単のため, 10 次元の $U(N)$ SYM 作用を $0+0$ 次元に dimensional ruduction したものを考える. (SYM 型の作用なら何次元のものでも同様の議論はできる.) ここで時間方向が 0 次元とは, Wick rotation (時間を t とすると $t \to it$ と変換すること) により signature を Lorentzian $(-,+,\cdots,+)$ から Euclidean $(+,\cdots,+)$ に移し, Euclide 化した時間を空間と同じように ruduction したものである. この Wick rotation で理論が移り合えるかどうかは微妙な点もあるが, ここではできると仮定する. これは, 有限の N 個の D-インスタントン[4] の束縛状態を考えていることに対応する [36].

作用は,

$$S = -\frac{1}{g^2}\,\mathrm{Tr}\left(\frac{1}{4}[X^\mu, X^\nu]^2 + \frac{1}{2}\bar{\psi}\Gamma^\mu[X^\mu, \psi]\right) \qquad \mu,\nu = 0,...,9 \tag{2.2.1}$$

ここで, X^μ と ψ はそれぞれ 10 次元のベクトルと Majorana-Weyl スピノルであり, $Her(N)$ に値をとる. 空間は Euclidean とし, この章では添字の上げ下げを気にせず空間についての足を右上に書く.

[4] D-インスタントン (又は D(-1)-brane) とは時間的にも空間的にも次元が 0 の D-brane のことをいう.

ゲージ変換は,

$$\begin{array}{c} X^\mu \longrightarrow U^\dagger X^\mu U \\ \psi \longrightarrow U^\dagger \psi U \end{array} \quad , \quad U \in U(N) \tag{2.2.2}$$

である. 作用の Tr の形から, 常にこのような対称性が存在する.

運動方程式は, フェルミオン場の back ground を $\psi = 0$ として

$$\frac{\partial}{\partial X^\mu_{ij}} \mathrm{Tr}\,[X^\rho, X^\nu]^2 = 4[X^\nu, [X^\mu, X^\nu]]_{ji}$$

より,

$$[X^\nu, [X^\mu, X^\nu]] = 0 \tag{2.2.3}$$

となるので行列のサイズ N が有限の時, 解は up to ゲージ変換で (ブロック) 対角行列にできる. (そしてその真空期待値は D-インスタントンの位置となる.)

あとでこの N を無限大にするが, そのときは (2.2.3) の解は一般的に

$$[X^\mu, X^\nu] = -i\mathcal{F}^{\mu\nu}\mathbf{1}, \qquad \mathcal{F}^{\nu\mu} = -\mathcal{F}^{\mu\nu} \quad \in \mathbb{R} \tag{2.2.4}$$

と表すことができる. $[X^\mu, X^\nu]$ は, 反エルミートで (2.2.3) を満たすためにはスカラー (単位行列 1 の定数倍) でなければならないので, 純虚数となる.

X^μ が有限のサイズの行列だと, (2.2.4) の両辺に Tr を掛けて $\theta^{\mu\nu} = 0$ でなければならない. このとき解はゲージ変換によって常に, 「X^μ がそれぞれ対角行列」の形に書ける. X^μ が無限次元の行列 ($N \to \infty$) だと, $\mathcal{F}^{\mu\nu} \neq 0$ の一般的な解が考えられる (2.2.39 参照).

[コンパクト化]

この模型は target space が $\mathbb{R}^{10}$ の場合を考えていて, 今そのうちの d 次元分を, $i = 0, 1, ..., d-1$ 方向を, 半径 R^i でコンパクト化することを考える. i 方向をコンパクト化するとは, 空間の 1 点 x_i を $x^i + 2\pi R^i$ と同一視するということである. その空間上の open string について考えると,

(♠) その一端を固定して, もう一端を x^i におくのと $x^i + 2\pi R^i$ におくのは明らかに異なる (後者は i 方向に 1 回巻き付いている).

しかし,

(♣) 両端の座標に同時に $2\pi R^i$ を加えた string はもとの string と同一視される.

行列模型において, 行列 X^μ の対角成分 X^μ_{nn} は D-brane の座標と解釈され, 非対角成分 X^μ_{mn} は D-brane X^μ_{mm} から D-brane X^μ_{nn} を走る string と解釈された [2.1 参照]. よって巻き付いた string の状態 をすべて数えるために, コンパクト化する i 方向に対して,

$$\begin{aligned} \vec{\tilde{X}}_W &:= (\tilde{X}_{w_0}, .., \tilde{X}_{w_\mu}, .., \tilde{X}_{w_9}) \\ \tilde{X}_{w_i} &:= \{X^i + w_i 2\pi R^i | w_i \in \mathbb{Z} : \text{巻き付き数}\} \\ \tilde{X}_{w_m} &:= \{X^m\} \qquad m = d, ..., 9 \\ W &= (w_0, .., w_i, .., w_{d-1}, 0, ..., 0) : \text{multi index} \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

をすべて対角ブロックに並べて,

$$\vec{\tilde{X}} = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \hline \ddots & \vec{\tilde{X}}_R & \ddots & \vec{\tilde{X}}_{RS} & \ddots \\ \hline \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \hline \ddots & \vec{\tilde{X}}_{SR} & \ddots & \vec{\tilde{X}}_S & \ddots \\ \hline \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{array}\right) \tag{2.2.6}$$

という無限次元の行列をつくり, 作用を

$$S = -\frac{1}{g^2}\,\mathrm{Tr}\left(\frac{1}{4}[\tilde{X}^\mu, \tilde{X}^\nu]^2 + \frac{1}{2}\bar{\tilde{\psi}}\Gamma^\mu[\tilde{X}^\mu, \tilde{\psi}]\right) \tag{2.2.7}$$

と構成し直す. R, S は 巻き付き数の multi index である. 作用は Tr をとっているので対角ブロックに並べ方によらない. 非対角ブロック $\vec{\tilde{X}}_{RS}$ はトーラス上の D-brane クラスターから自分自身への巻き付き数 $R-S$ の string の状態を表す. この行列の μ 成分を $\tilde{X}^\mu$ と表すことにする.

この Tr を, $N\times N$ 行列の $\tilde{X}^\mu_{RS}$, $\tilde{\psi}^\mu_{RS}$ についてのものと, その無限個のブロック行列についてのもの (巻き付き数の足 R, S についてのもの) とに分け, ブロック行列についてのものをばらし, $N\times N$ 行列についてのトレースを tr と表す. また, $\tilde{X}^\mu_{RS}$, $\tilde{\psi}^\mu_{RS}$ を $N\times N$ 行列として X^μ_{RS}, ψ^μ_{RS} と書き直し, $\tilde{X}^\mu$ の対角ブロックは $\tilde{X}^\mu_W = 2\pi R^\mu w^\mu + X^\mu_{WW}$ と書き直す. (2.2.7) は

$$\begin{aligned} S \;=\; -\frac{1}{g^2}\sum_{R,S}\mathrm{tr}\Big\{ & \frac{1}{4}(x^i_{RS}X^j_{RS} - x^j_{RS}X^i_{RS} + [X^i,X^j]_{RS})(x^i_{SR}X^j_{SR} - x^j_{SR}X^i_{SR} + [X^i,X^j]_{SR}) \\ & + \frac{1}{2}(x^i_{RS}X^m_{RS} + [X^i,X^m]_{RS})(x^i_{SR}X^m_{SR} + [X^i,X^m]_{SR}) \\ & + \frac{1}{4}[X^m,X^n]_{RS}[X^m,X^n]_{SR} \\ & + \frac{1}{2}\bar{\psi}_{SR}\Gamma^i(x^i_{RS}\psi_{RS} + [X^i,\psi]_{RS}) \\ & + \frac{1}{2}\bar{\psi}_{SR}\Gamma^m[X^m,\psi]_{RS}\Big\} \end{aligned} \tag{2.2.8}$$

となる. ここで,

$$x^i_{RS} := 2\pi R^i(r^i - s^i) \qquad \begin{aligned} R &= (r^0,\cdots,r^i,\cdots,r^{d-1},0,\cdots,0)\in\mathbb{Z}^d \\ S &= (r^0,\cdots,s^i,\cdots,s^{d-1},0,\cdots,0)\in\mathbb{Z}^d \end{aligned}$$

$$[X^\mu,X^\nu]_{RS} := X^\mu_{RW}X^\nu_{WS} - X^\nu_{RW}X^\mu_{WS}$$

である. 今, (♣) の条件より, $\tilde{X}_R$ と $\tilde{X}_S$ の間をまたがる string の自由度 X_{RS} について $X_{RS} \sim X_{R+W\ S+W}\quad \forall W$ の同一視をする. よって X_{RS} の同値類は $R-S$ でラベルされる. (フェルミオン ψ_{RS} についても同様.) x^i_{RS}, X^m_{RS}, ψ_{RS} を

$$\begin{aligned} x^i_{RS} &\Longrightarrow p^i \\ X^i_{RS} &\Longrightarrow X^i(p) \longleftrightarrow A^i(x) \\ X^m_{RS} &\Longrightarrow X^m(p) \longleftrightarrow X^m(x) \\ \psi_{RS} &\Longrightarrow \psi(p) \end{aligned} \tag{2.2.9}$$

と書き直す. $\longleftrightarrow$ は, これらをこの後逆 Fourier 展開するときの対応する場を表す. 和 $\sum_{RS}$ は $p \sim R - S$ に関する和と, 重心に関する和 $\left(\sum_W \text{とする}\right)$ に分けられる. 作用を書き直すと,

$$
\begin{aligned}
S = & -\frac{(\sum_W 1)}{g^2}\sum_p \\
& \mathrm{tr}\Big\{\frac{1}{4}(p^iX^j(p) - p^jX^i(p) + [X^i,X^j](p))(-p^iX^j(-p) + p^jX^i(-p) + [X^i,X^j](-p)) \\
& + \frac{1}{2}(p^iX^m(p) + [X^i,X^m](p))(-p^iX^m(-p) + [X^i,X^m](-p)) \\
& + \frac{1}{4}[X^m,X^n](p)[X^m,X^n](-p) \\
& + \frac{1}{2}\bar{\psi}(-p)\Gamma^i(p^i\psi(p) + [X^i,\psi](p)) \\
& + \frac{1}{2}\bar{\psi}(-p)\Gamma^m[X^m,\psi](p)\Big\}.
\end{aligned}
\tag{2.2.10}
$$

となる. ここで逆 Fourier 展開をする. [5]コンパクト化の周期を $2\pi R^i$, トーラスの体積を $V = (2\pi)^d R^0 R^1 \cdots R^{d-1}$ として,

$$
X^j(p) = \frac{V}{(2\pi)^d}\int d^dx A^j(x)e^{-ipx} \tag{2.2.11}
$$

などとそれぞれの場を書き直す. これより (2.2.10) の中の p に関する場は

$$
\begin{aligned}
p^iX^j(p) &= -i\frac{V}{(2\pi)^d}\int d^dx(\partial^iA^j(x))e^{-ip\cdot x} \\
[X^i,X^j](p) &= \frac{V}{(2\pi)^d}\int d^dx[A^i(x),A^j(x)]e^{-ip\cdot x}
\end{aligned}
$$

などとなり, すべて x に関する場に直すことができる. ここで x はコンパクト化によって新しくできる座標で, $\int d^dx$ の範囲はもとのトーラスの半径の dual の $1/R^i$ となる. また 2 番目の式では

$$
\sum_p e^{-ip(x-x')} = \frac{(2\pi)^d}{V}\delta(x-x') \tag{2.2.12}
$$

を使った.

(2.2.10) の p 依存性は 1 項ごとに p に関する場と $-p$ に関する場の組で表されていたので, この書き換えにより各項から $e^{-ipx}e^{-i(-p)x'}$ を出す. この p と $-p$ の組の現れ方は, 無限次元のブロック行列の Tr が運動量保存の条件に変わったことによる. この $e^{-ipx}e^{-i(-p)x'}$ を再び (2.2.12)

[5] X はもともと mass dimension 1 に定義した. よって, $R^i \sim p^i$ は運動量として正しい次元を持ち, この変換により, x^i も正しい次元 (mass dim -1) を持つ.

を使って書き換えて, 作用は

$$
\begin{aligned}
S = \frac{1}{g^2}\frac{V}{(2\pi)^d}\int d^dx \\
\times \mathrm{tr}\Big[& \frac{1}{4}\left\{(\partial^i A^j(x) - \partial^j A^i(x)) + i[A^i(x), A^j(x)]\right\}^2 \\
& + \frac{1}{2}\left\{(\partial^i X^m(x) + i[A^i(x), X^m(x)]\right\}^2 \\
& - \frac{1}{4}\left\{[X^m(x), X^n(x)]\right\}^2 \\
& + \frac{i}{2}\left\{\bar{\psi}(x)\Gamma^i(\partial^i\psi(x) + i[A^i(x), \psi(x)]\right\} \\
& - \frac{1}{2}\left\{\bar{\psi}(x)\Gamma^m[X^m(x), \psi(x)]\right\}\Big].
\end{aligned}
\tag{2.2.13}
$$

となる. 重心運動量についての無限個のコピー $\sum_W$ は (♣) の同一視により無視して落とした. そして d 次元 YM 結合定数 g_d を

$$
g_d^2 \equiv \frac{(2\pi)^d}{V} g^2, \tag{2.2.14}
$$

と定義して, 作用は d 次元の SYM になる[6].

$$
\begin{aligned}
S_d = \int d^dx \frac{1}{g_d^2}\,\mathrm{tr}\Big\{ & \frac{1}{4}(F^{ij})^2 + \frac{1}{2}(D^iX^m)^2 - \frac{1}{4}[X^m, X^n]^2 \\
& + \frac{i}{2}\bar{\psi}\Gamma^i(D^i\psi) - \frac{1}{2}\bar{\psi}\Gamma^m[X^m, \psi]\Big\}.
\end{aligned}
\tag{2.2.15}
$$

またこの Fourier 変換のかわりに今の変換を, 新しくできた無限次元の行列を (Fourier 展開した形で書いた) 関数へ作用する作用素と解釈することによって得ることもできる. つまり理論を運動量表示で見ていると考える. 非自明なのは 無限次元の $\tilde{X}^i$ (トーラスコンパクト化される方向の場) である. それが作用する関数を $\phi(x)$ として, その Fourier 展開の係数を ϕ_W と書く. つまり,

$$
\phi(x) = \sum_W \phi_W e^{i(2\pi R^\mu w^\mu)x^\mu}\ , \qquad \phi_W = \frac{V}{(2\pi)^d}\int d^dx \phi(x) e^{-ipx}
$$

(これは, ϕ に対する (2.2.11) の関係であり, $p^\mu = 2\pi R^\mu w^\mu$ を使った.) $\tilde{X}^i$ の $\phi(x)$ への作用を

$$
\begin{pmatrix}
\ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\
\ddots & \tilde{X}^i_R & \tilde{X}^i_{RS} & \tilde{X}^i_{RT} & \ddots \\
\ddots & \tilde{X}^i_{SR} & \tilde{X}^i_S & \tilde{X}^i_{ST} & \ddots \\
\ddots & \tilde{X}^i_{TR} & \tilde{X}^i_{TS} & \tilde{X}^i_T & \ddots \\
\ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots
\end{pmatrix}
\cdot
\begin{pmatrix}
\vdots \\ \phi_R \\ \phi_S \\ \phi_T \\ \vdots
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
\vdots \\ \tilde{X}^i_{RW}\phi_W \\ \tilde{X}^i_{SW}\phi_W \\ \tilde{X}^i_{TW}\phi_W \\ \vdots
\end{pmatrix}
\tag{2.2.16}
$$

[6] もちろんコンパクト化した作用が supersymmetry を持つかどうかはコンパクト化の次元による.

と表す. $2\pi R^\mu w^\mu =: p_W^\mu$ と表して, 右辺の 1 成分を計算してみると, また (2.2.12) を使って

$$\begin{aligned}\tilde{X}^i_{SW}\phi_W &= \left(p^i_S\delta_{SW} + \frac{V}{(2\pi)^d}\int d^dx A^i(x)e^{-i(p_S-p_W)x}\right)\cdot\frac{V}{(2\pi)^d}\int d^dx'\phi(x)e^{-ip_W x'} \\ &= \frac{V}{(2\pi)^d}\int d^dx(-i\partial^i + A^i(x))\phi(x)e^{-ip_S x}\ .\end{aligned} \tag{2.2.17}$$

よって関数の運動量 p_W の Fourier 係数が常に W 行目に表現されると考えると, operator として $\tilde{X}^i \sim -i\partial^i + A^i(x)$ となる.

さらに左から行列が掛かってきても同じようになることは, 運動量の足 W が無限次元の行列の足から来ていることより明らかである. この operator 解釈の方が後の話との関係が見やすい.

まとめると, (♠) string の巻き付き数を数えあげるため, 行列を無限次元に拡張した. そして, (♣) トーラス上同一点 (同一線) へのその被覆空間上の string の平行移動を同一視するために, D-brane のブロックの足 W はその差 $S-W$ が同じものについて同一視した. また, 無限次元に拡張した行列の足はまた $n\times n$ ブロックについての足に戻るものと, 運動量の足に分かれ, それによって無限次元の Tr も $n\times n$ 行列についての tr と運動量についての $\sum \sim \int d^dp$ に分かれた. 無限次元のゲージ不変性 Tr から, 分けた項はそれぞれ運動量を保存し, それを Fourier 変換 (展開) することによって local な場の理論ができた.

[3] では今の話のコンパクト化する方向が 1 次元のときについて書かれている. 一般の d 次元では, 今得られたものよりもっと広いコンパクト化が考えられることが, 次に分かる. 実際, この Taylor のコンパクト化でも弦理論の B 場を考えることにより (♣) の同一視の条件を "twist" して拡張することが考えられ, その結果はこの後の議論と一致する [5]. この時, 今 x の dual として運動量として定義した p は一般には x と弦の Hamiltonian について正準共役なものからずれることに注意する [3.5.1 参照].

2.2.2 $N\to\infty$ 行列模型のコンパクト化

作用は上で使ったもので行列のサイズ N を無限大にしたものについて考える. もう一度書くと,

$$S = -\frac{1}{g^2}\,\mathrm{Tr}\left(\frac{1}{4}[X_\mu, X_\nu]^2 + \frac{1}{2}\bar{\psi}\Gamma^\mu[X_\mu,\psi]\right)\ . \tag{2.2.18}$$

これは弦理論の非摂動的 (構成的) 定義として [6] で提案されたが, ここではただ簡単のためこれを使う. 一般次元の SYM 作用からでも同様の議論はできる.

これを d 次元コンパクト化する時, 上の (♣) に対応する拘束条件を行列の場の自由度に課したい. そのために, 系全体の d 次元トーラスの被覆空間上の平行移動でトーラス上同一点に移すものが, ある種のゲージ変換となっていることを要請する.

$$\begin{aligned} X_i + 2\pi R_i &= U_i^{-1}X_iU_i, \qquad i = 0,1,...,d-1 \\ X_\mu &= U_i^{-1}X_\mu U_i, \qquad \mu\neq i \\ \psi &= U_i^{-1}\psi U_i \end{aligned} \tag{2.2.19}$$

ここで両辺は $Her(N)$ に値をとるので $U_i\in U(N)$ とする. この条件は N が有限だと成り立たないことが, 両辺の Tr をとることによって分かる. U_i で行列の場の自由度の拘束条件を決めるので, 固定された U_i の組 1 つに対して 1 つの理論がある. つまり U_i の組は, 理論のモジュライである.

(♠) の条件はどうなっているであろうか ?実はそれは既に入っていて, 前の議論で無限次元に拡張した行列が今の $N \to \infty$ の行列に対応している. よって, さきほど構成した解は, この $N \to \infty$ の行列の中に埋め込まれていることが期待される.

さて上の拘束条件 (2.2.19) を満たす解を実際に探してみる.

$[d = 1]$

このとき, 解は前の Taylor 流のコンパクト化の時と一致する.
具体的に解を探してみる.

$$X_0 + 2\pi R_0 = U_0^{-1} X_0 U_0$$

の両辺をゲージ変換 U で対角化することを考える. しかしそのとき U はその他の場もすべて同時に変換するので, U が X_0 の場に依存するとやりにくい. よって, X_0 を background $\bar{X}_0$ と量子揺らぎ A_0 に分けて $X_0 = \bar{X}_0 + A_0$ と表し, background を U で対角化する. すると

$$U^{-1}(\bar{X}_0 + A_0)U + 2\pi R_0 = (U^{-1}U_0^{-1}U)U^{-1}(\bar{X}_0 + A_0)U(U^{-1}U_0U)^{-1}$$

となり, このとき $\bar{X}_0$ は成分が左上から右下にいくに従って小さくなるように対角化する. U で変換された後の場と U_0 を元の記号で書き直して,

$$\bar{X}_0 + 2\pi R_0 - U_0^{-1}\bar{X}_0 U_0 = U_0^{-1}A_0U_0 - A_0 \ (= 0) \tag{2.2.20}$$

となる. 左辺は background について, 右辺は量子場についての式なので, 両辺は独立に 0 となる. 左辺を $\bar{X}_0 U = [\bar{X}_0, U] + U\bar{X}_0$ を使って書き直すと,

$$[\bar{X}_0, U_0] = 2\pi R_0 \cdot U_0 \tag{2.2.21}$$

となり, この解を解くことを考える. $\mathbf{1}_{n_i}$ を $n_i \times n_i$ 単位行列として, $\bar{X}_0$ を

$$\bar{X}_0 = \begin{pmatrix} \ddots & & & \\ & x_i \cdot \mathbf{1}_{n_i} & & \\ & & x_{i+1} \cdot \mathbf{1}_{n_{i+1}} & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \qquad , \cdots > x_i > x_{i+1} > \cdots$$

とブロック行列で表し, (2.2.21) をこのブロックを成分としてばらすと $(x_i - x_k)U_{0(i,k)} = 2\pi R_0 U_{0(i,k)}$ となる. ここで $U_{0(i,k)}$ は $n_i \times n_k$ 行列. よって $x_i - x_k = 2\pi R_0$ 又は $U_{0,(i,k)} = 0$. また U_0 は逆行列を持つので, $U_{0(i,k)} = 0$ $\exists i,\ \forall k$ 又は $U_{0,ik} = 0$ $\forall i,\ \exists k$ であってはならない.

この条件から U_0, そして同時に $\bar{X}_0$ の形がほぼ決まる. 今 $\cdots > x_i > x_{i+1} > \cdots$ なので, $U_{0(i,k)}$ の下三角 $i \geq k$ はすべて 0 である.

- [case 1]　ある i_0 で $U_{0(i_0,i_0+1)} \neq 0$ だとする. すると, $x_{i_0} - x_{i_0+x} = 2\pi R_0$. この時その下の列について, $(x_{i_0+1} - x_k)U_{0(i_0+1,k)} = 2\pi R_0 U_{0(i_0+1,k)}$ を考えると, これがどの k についても $x_{i_0+1} - x_k \neq 2\pi R_0$ だと $i_0 + 1$ 列の $U_{0(i_0+1,k)}$ がすべて 0 となって U_0 が逆行列を持

たない. よってある $k > i_0+1$ では $x_{i_0+1} - x_k = 2\pi R_0$ (※$U_{0(i_0+1,k)} \neq 0$ となり得る) が, $k \neq i_0+2$ だと $i+1$ 行で $U_{0(j,i_0+1)}$ となる j が存在しない. よって $x_{i_0+1} - x_{i_0+2} = 2\pi R_0$, $U_{0(i_0+1,i_0+2)} \neq 0$. $U_{0(i_0+1,i_0+2)}$ 以外に同じ行または列に $U_{0(kl)\neq 0}$ となるものはない. 同様にして斜め右下, 左上に $U_{0(k,l)} \neq 0$ がのび, それらでできる U_0 が逆行列を持つために各ブロックは正方行列でないとならない. (対角ブロックの行列はすべて正方行列なので) 正方行列のランクはすべて同じになる. (そのランクを N_{gauge} とする.) また, $\bar{X}_0$ は, 一般の i で $x_i = 2\pi R_0 + x_{i+1}$ と決まった.

$$U_0 = \begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ 0 & * & & & \\ & 0 & * & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & & \end{pmatrix} \qquad \bar{X}_0 = \begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ & 2\pi R_0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & -2\pi R_0 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} + \text{const}$$

ここで, 成分はそれぞれ $N_{gauge} \times N_{gauge}$ 行列であり, $U_0^\dagger U_0 = 1$ より, U_0 の各成分 (∗) がまたユニタリー行列になる.

- [case 2] 一般的にある i_0 , $j \in \mathbb{Z}_{>0}$ で $U_{0(i_0,i_0+j)} \neq 0$ だとする. すると $x_{i_0} - x_{i_0+j} = 2\pi R_0$. このときその 1 行下について, case 1 と同様に $U_{0(i_0+1,k)} \neq 0$ となるものを考えると, $k = i_0+j+1$ でないと i_0+j+1 列の $U_{l,i_0+j+1} \neq 0$ となるものがない. よって $U_{0(i_0+1,i_0+j+1)} \neq 0$. 同様にこれが右下, 左上に延びる. また non-zero の $U_{0(k,l)}$ は正方行列. ここで, 一般の i に関して $x_i = 2\pi R_0 + x_{i+j}$ であることが分かったので, これらのブロックを $j \times j$ 個ずつまとめてそのまとめた行列のランクを N_{gauge} とする. これで上の case 1 に帰着させる. 上と違うのは $N_{gauge} \times N_{gauge}$ のブロックが, $\bar{X}_0$ に関しては j 個に分かれた真空期待値を持っていること, U_0 のブロックはそのため j 個のブロック対角な形に制限されていることである. (U_0 に関する違いは重要でない.) $\bar{X}_0$ の形を

$$\bar{X}_0 = \text{diag}\{\cdots 4\pi R_0 + V, 2\pi R_0 + V, 0 + V, -2\pi R_0 + V, -4\pi R_0 + V, \cdots\} \tag{2.2.22}$$

と書いておく. 成分はそれぞれ $N_{gauge} \times N_{gauge}$ 行列で, V は j 個に分かれた真空期待値とする. これは A_0 の方に吸収させれば良い.

さてこれで case 1 について考えれば良い. 残っている条件は (2.2.20) の A_0 についてがあるが, その前に $\bar{X}_0$ の形から, まだ自由な ($\bar{X}_0$ を対角化するために使った) ゲージ変換が残っていることが分かるのでそれを使って U_0 の値を固定する. 残っているゲージ変換は $U = \text{diag}\{\cdots u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \cdots\}$, $u_i \in U(N_{gauge})$ である. (case 2 の場合はこれをブロック対角に制限しなければならないが, 同様にできることは明らかなので省略する.) これを U_0 に作用させると,

$$\left(U^\dagger U_0 U\right)_{(i,j)} = u_i^\dagger U_{0(i,j)} \delta_{i+1,j} u_j = u_i^\dagger U_{0(i,i+1)} u_{i+1} \delta_{i+1,j}$$

となり, $U_{0(i,i+1)} u_{i+1} \in U(N_{gauge})$ なので i について順々に u_i を決めていって $U_{0(i,j)} = 1\delta_{i+1,j}$ に

移すことができた.

$$U_0 = \begin{pmatrix} \ddots & & & \\ 0 & \mathbf{1} & & \\ & 0 & \mathbf{1} & \\ & & 0 & \ddots \\ & & & \end{pmatrix} \tag{2.2.23}$$

これより残っている $A_0, X_1, \cdots, X_9, \psi$ についての条件を求める. $(2.2.19)(2.2.20)$ よりこれらはすべて U_0 と可換である. これらの場を一般的に X と表して, その条件は

$$[X, U_0] = 0$$

である. これを X, U_0 共に $Mat(N_{gauge})$ 成分に分けて計算すると $(2.2.23)$ より

$$X_{i+1,j+1} = X_{i,j} \tag{2.2.24}$$

となる.

さて, このように出てきた $\bar{X}_0$, A_0 についての条件 $(2.2.22)(2.2.24)$ は, [2.2.1] の Taylor のコンパクト化の 1 次元の場合とぴったり一致することが分かる. $(2.2.6)$ の $\tilde{X}_0$ がここでの X_0 であり, $\tilde{X}_0$ の中の巻き付き数の部分がここでの $\bar{X}_0$, 残りが $A_0(+V)$ に対応している. そして $(2.2.24)$ の条件は, $(\clubsuit)$ の条件そのものである.

ここで, 得られた行列の解を $(2.2.17)$ でやったように運動量固有状態 ϕ_W に作用しているものと考え, その表現に書き換える. ただし, 他の文献と揃えるために少し notation を変える. それぞれの行列が作用する N_{gauge} 行縦ベクトルの関数 $\phi(x_0)$ を

$$\phi(x_0) = \sum_{w_0} \phi(w_0) e^{iw_0 \cdot x_0} \ , \quad \phi(w_0) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int dx_0 \phi(x_0) e^{-iw_0 \cdot x_0}$$

と表す. つまり x_0 を, その周期が 2π となるように定義する[7]. そして $(2.2.16)$ と同様 N_{gauge} 行縦ベクトルの運動量固有状態 $\phi(w_0)$ をさらに無限次元縦ベクトルとして並べるが, $(2.2.16)$ での multi index $R, S, T, \cdots$ はここでは w_0 であり, $\bar{X}_0$ の対角成分の順番を固定したことから, $\phi(w_0)$ もそれに対応する順に並べる.

この表現により, U_0 は (コンパクト化の S^1 と dual の) S^1 の関数環の生成子になる. 実際

$$U_0\phi = \begin{pmatrix} \ddots & & & \\ 0 & \mathbf{1} & & \\ & 0 & \mathbf{1} & \\ & & 0 & \ddots \\ & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ \phi(w_0 = 1) \\ \phi(w_0 = 0) \\ \phi(w_0 = -1) \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \phi(w_0 = 0) \\ \phi(w_0 = -1) \\ \phi(w_0 = -2) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

[7] [2.2.1] の notation とはそこでの $2\pi R^0 \cdot x^0$ を x_0 と定義することによって対応がつく.

より, U_0 : $\phi(w_0) \to \phi(w_0 - 1)$ と作用する. つまり $U_0\phi$ はその運動量 w_0 の Fourier 係数として $\phi(w_0 - 1)$ を持つ. よって $U_0\phi(x_0) = \sum_{w_0} \phi(w_0 - 1)e^{iw_0 \cdot x_0} = e^{i \cdot x_0} \sum_{w_0} \phi(w_0)e^{iw_0 \cdot x_0}$ となり

$$U_0 \simeq e^{ix_0} \tag{2.2.25}$$

と表されることが分かる.

その他の行列については (2.2.17) と同様にできる. X を U_0 と可換な行列 $A_0, X_1, \cdots, X_9, \psi$ として

$$\bar{X}_0 \simeq -2\pi i R_0 \partial_0$$
$$X \simeq X(x_0)$$

となる.

一般の次元では, Taylor のコンパクト化より一般的な解が存在する. 1 次元の時に一致するのは, コンパクト化する次元とゲージ変換の自由度が釣り合っているからである. つまり, $(\bar{X}_0, U_0)$ の解を決める時, $\bar{X}_0$ を U でちょうど対角化できたことが効いている.

対角行列の真空期待値 V は A_0 と一緒にして, (2.2.17) のように Fourier 変換すると, そのまま対角型の真空期待値をもつ (今の場合 1 次元の) 場の理論になることが分かる. これもなかなか面白いが, 以下このように dual の場の理論に残る真空期待値については考えない.

$[d = 2]$

このとき拘束条件 (2.2.19) は

$$U_0 U_1 = \lambda U_1 U_0$$

と, U_0 と U_1 が非可換となる解を許す. 実際, 場 X_μ, ψ に U_1, U_0, ${U_1}^{-1}$, ${U_0}^{-1}$ の随伴作用を順々に作用させて拘束条件 (2.2.19) を使うことにより,

$$X_\mu = ({U_0}^{-1}{U_1}^{-1}U_0U_1)X_\mu \left({U_0}^{-1}{U_1}^{-1}U_0U_1\right)^{-1}$$
$$\psi = ({U_0}^{-1}{U_1}^{-1}U_0U_1)\psi \left({U_0}^{-1}{U_1}^{-1}U_0U_1\right)^{-1}$$

となり, ${U_0}^{-1}{U_1}^{-1}U_0U_1$ は拘束条件 (2.2.19) を課した場 X_μ, ψ と常に可換である. よって Schur の補題より ${U_0}^{-1}{U_1}^{-1}U_0U_1$ は, この U_0, U_1 で特徴付けられる理論においてスカラーである. よって

$$U_0 U_1 = \lambda U_1 U_0 \ , \quad \lambda = e^{2\pi i \Theta} \tag{2.2.26}$$

とおく. $U_i \in U(N)$ なので, 両辺の † をとることにより $\lambda^* = \lambda^{-1}$ となり, 上のように表すことができる. この Θ は行列模型のモジュライと言え, 1 つ固定してその上の理論を考える.

(2.2.19) の解を探してみる.

$$X_0 = \bar{X}_0 + A_0 \ , \qquad X_1 = \bar{X}_1 + A_1$$

と分けて, まず $\bar{X}_0$, $\bar{X}_1$, U_0, U_1 の間の条件を考える.

$$\begin{array}{ccc} \bar{X}_0 & \overset{a)\ 2\pi R_0}{\longleftrightarrow} & U_0 \\ -if \updownarrow & & \updownarrow\ b)\ \lambda \\ \bar{X}_1 & \overset{c)\ 2\pi R_1}{\longleftrightarrow} & U_1 \end{array} \tag{2.2.27}$$

存在する条件は

$$\begin{array}{ll} a) \quad [\bar{X}_0, U_0] = 2\pi R_0 U_0 & c) \quad [\bar{X}_1, U_1] = 2\pi R_1 U_1 \\ b) \quad U_0 U_1 = \lambda U_1 U_0 & \end{array} \tag{2.2.28}$$

(ただし b) の λ は手で固定) と, あと上の図を斜めに

$$ab) \quad [\bar{X}_0, U_1] = 0 \qquad cb) \quad [\bar{X}_1, U_0] = 0 \tag{2.2.29}$$

があり, 一般的には

$$[X_0, X_1] = -if \cdot \mathbf{1} \tag{2.2.30}$$

となる解が許される.

a) $d = 1$ の時に導いたものを使う. $\bar{X}_0$ は対角行列で, U_0 は (2.2.23). そのブロック成分のランク (N_{gauge} としたもの) を, 今 N/N_0 とする. つまり今無限次元 ($N \times N$) の行列を

$$Mat(N) \longrightarrow Mat(N_0) \otimes Mat(N/N_0)$$

と分けた. $N_0 \sim \infty$, $N/N_0 \sim \infty$ とする.

b) これを $Mat(N_0)$ について成分にばらして計算する. 成分はそれぞれ $Mat(N/N_0)$ の元で, $Mat(N_0)$ についての足を $i, j, \cdots$ として, (2.2.23) より $(U_0U_1)_{(i,k)} - \lambda(U_1U_0)_{(i,k)} = \delta_{i,j-1}U_{1(j,k)} - \lambda U_{1(i,j)}\delta_{j+1,k} = U_{1(i+1,k)} - \lambda U_{1(i,k-1)} = 0$ より,

$$U_{1(i+1,j+1)} = \lambda U_{1(i,j)} \ . \tag{2.2.31}$$

ab) a) より $\bar{X}_{0,i} = (i-k)2\pi R_0 + \bar{X}_{0,k}$ なので $[\bar{X}_0, U_1]_{(i,k)} = [\bar{X}_{0,k}, U_{1(i,k)}] + (i-k)2\pi R_0 U_{1(i,k)} = 0$ であり,

$$\begin{array}{lll} i = k & [\bar{X}_{0,i}, U_{1(i,i)}] = 0 & \text{対角行列 } \bar{X}_{0,k} \text{ と可換} \\ i \neq k & (x_{0,k,a} - x_{0,k,b})U_{1(i,k)(a,b)} = -(i-k)2\pi R_0 U_{1(i,k)(a,b)} & \text{よって } U_{1(i,k)} = 0 \end{array}$$

となる. ここで $\bar{X}_{0,k} =: \mathrm{diag}\{\cdots x_{0,k,a} \cdots x_{0,k,b} \cdots\}$ とし, $i \neq k$ で $U_{1(i,k)} = 0$ は a) で $x_{0,k,a} - x_{0,k,b} < 2\pi R_0$ であることから従う.

a) と ab) より

$$U_{1(i,j)} = \delta_{ij}\lambda^i u_1 \ , \quad [u_1, \bar{X}_{0,k}] = 0 \ , \quad u_1 \in U(N/N_0) \tag{2.2.32}$$

と書ける.

cb) $[\bar{X}_1, U_0]_{(i,k)} = \bar{X}_{1(i,k+1)} - \bar{X}_{1(i+1,k)} = 0$ より

$$\bar{X}_{1(i+1,k+1)} = \bar{X}_{1(i,k)} \ , \quad \bar{X}_{1(i,k)} \in Her(N/N_0) \ . \tag{2.2.33}$$

c) 同様にして

$$\begin{array}{ll} i = k & [\bar{X}_{1,i}, u_1] = 2\pi R_1 u_1 \\ i \neq k & \bar{X}_{1(i,k)} u_1 = \lambda^{i-k} u_1 \bar{X}_{1(i,k)} \ . \end{array}$$

これを解くのに $\bar{X}_{1,(i,k)}$ を対角化したい. しかしゲージ変換 U の自由度は a) ですべて使ってしまったので使えず, 新しくゲージ変換 $g \in U(N/N_0)$ を導入して

$$\begin{array}{ccc} \bar{X}_{1(i,k)}^{g_{(i,k)}} & \longrightarrow & \bar{X}_{1(i,k)} := g_{(i,k)}^{\dagger} \bar{X}_{1(i,k)} g_{(i,k)} \\ u_1 & \longrightarrow & u_1^{g_{(i,k)}} := g_{(i,k)}^{\dagger} u_1 g_{(i,k)} \end{array} \tag{2.2.34}$$

と移す. ここで $\bar{X}_{1(i,k)}^{g_{(i,k)}} \in Diag(N/N_0)$.

$N/N_0 = N_1 \times N_{gauge}$ としてさらに行列を

$$Mat(N/N_0) \longrightarrow Mat(N_1) \otimes Mat(N_{gauge})$$

と分ける. $N_1 \sim \infty$, N_{gauge} は有限とし, N_1 の足を $a, b, \cdots$ とする.

$i = k$ の時, cb) より $\bar{X}_{1,i} = \bar{X}_{1,i+1}$ なので添字 i を省略してその対角 (ブロック) 成分を $x_{1,a}$ と表して $(x_{1,a} - x_{1,b}) u_{1(a,b)} = 2\pi R_1 u_{1(a,b)}$ となり a) の時,(2.2.22) と同様にして

$$\bar{X}_{1,i}^{g} = \begin{pmatrix} \ddots & & & & & \\ & 2\pi R_1 + V_1 & & & & \\ & & 0 + V_1 & & & \\ & & & -2\pi R_1 + V_1 & & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}, \qquad u_1^g = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & & & \\ & 0 & \mathbf{1} & & \\ & & 0 & \mathbf{1} & \\ & & & 0 & \ddots \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \tag{2.2.35}$$

となる. ここで $V_1 \in Diag(N_{gauge})$ とする.

同様に $i \neq k$ の時別の $g_{(i,k)} \in U(N/N_0)$ で対角化すると $\bar{X}_{1(i,k)}^{g} \in Diag(N/N_0)$ の対角成分を $x_{1(i,k)a}^{g} \in Diag(N_{gauge})$ として

$$(x_{1(i,k)a}^{g} - \lambda^{i-k} x_{1(i,k)c}^{g}) u_{1(a,c)} = 0 \qquad \in Mat(N_{gauge})$$

となり, $\lambda^{k-i} = e^{2\pi i(i-k)\Theta} = 1$ の時のみ $\bar{X}_{1(i,k)} \neq 0$ なる解が存在し得る. これは Θ が有理数の時と無理数の時で事情が異なるがここでは Θ は無理数とし,

$$\bar{X}_{1(i,k)} = 0 \ , \quad i \neq k$$

とする.

さて結果をまとめると, 無限次元の行列は

$$\begin{gathered} Mat(N) = Mat(N_0) \otimes Mat(N_1) \otimes Mat(N_{gauge}) \\ N_0 \sim \infty \ , \quad N_1 \sim \infty \ , \quad N_{gauge} : \text{有限} \end{gathered}$$

と分かれ,

$$D^R := \begin{pmatrix} \ddots & & & & & \\ & 2\pi R & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & -2\pi R & & \\ & & & & \ddots & \end{pmatrix}, \qquad U_B^\lambda := \begin{pmatrix} \ddots & & & & & \\ & \lambda^{-1} & & & & \\ & & \lambda^0 & & & \\ & & & \lambda^1 & & \\ & & & & \ddots & \end{pmatrix}$$
$$U_m = \begin{pmatrix} \ddots & & & \\ 0 & \mathbf{1} & & \\ & 0 & \mathbf{1} & \\ & & 0 & \ddots \end{pmatrix} \tag{2.2.36}$$

と定義して

$$\begin{array}{rcccc} U_0 = & U_m(N_0) & \otimes & \mathbf{1} & \\ \bar{X}_0 = & D^{R_0}(N_0) & \otimes & \mathbf{1} & \\ + & \mathbf{1} & \otimes & V_0 & \xrightarrow{\mathbf{1}\otimes g} \\ U_1 = & U_B^\lambda(N_0) & \otimes & u_1 & \\ \bar{X}_1 = & \mathbf{1}(N_0) & \otimes & \bar{X}_{1,i} & \end{array} \qquad \begin{array}{rcccc} U_0 = & U_m & \otimes & \mathbf{1}\otimes\mathbf{1} \\ \bar{X}_0 = & D^{R_0} & \otimes & \mathbf{1} \\ + & \mathbf{1} & \otimes & g^\dagger V_0 g \\ U_1 = & U_B^\lambda & \otimes & U_m\otimes\mathbf{1} \\ \bar{X}_1 = & \mathbf{1} & \otimes & D^{R_1}\otimes\mathbf{1} \\ + & \mathbf{1} & \otimes & \mathbf{1}\otimes V_1 \end{array} \tag{2.2.37}$$

となった. ここで $V_0 \in Diag(N_1 \times N_{gauge}), V_1 \in Diag(N_{gauge}), g \in U(N_1 \times N_{gauge})$ は不定部分である. これらの作用素に対する状態として (2.2.16) のように

$$\otimes_{w_0,w_1}\phi(w_0,w_1) \simeq \begin{pmatrix} \vdots \\ \phi_0(w_0=1) \\ \phi_0(w_0=0) \\ \phi_0(w_0=-1) \\ \vdots \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \vdots \\ \phi(w_1=1) \\ \phi(w_1=0) \\ \phi(w_1=-1) \\ \vdots \end{pmatrix} \otimes \phi_{gauge} \tag{2.2.38}$$

を考える. $\phi_i(w_i)$ は状態 $\phi(x_i)$ の運動量 w_i の Fourier 成分を表し, ϕ_{gauge} は N_{gauge} 行縦ベクトルを表す.

D^R, U_B^λ, U_M をこの表示による表現に直す. $D^R \simeq -2\pi R\partial$, $U_m \simeq e^{ix_i}$ であることは既に見た. それぞれ $\phi(w_i)$ に作用させ, それを $\phi(x_i)$ の運動量 $2\pi R^i w_i$ の Fourier 成分と思うことにより U_B^λ は

$$\begin{aligned} U_B^\lambda :&\phi(w) \to e^{2\pi i\Theta w}\phi(w) \\ &\longrightarrow U_B^\lambda\phi(x) = e^{2\pi\Theta\partial}\phi(x) \end{aligned}$$

となる.

(2.2.37) は $V_0 = 0$ の時非可換トーラスとその上の 「自明束」を表す. 解に任意性が残ったのは λ の値を固定しても行列模型のコンパクト化によってできるゲージ理論は 1 通りではないことを意味する. 実際はあと一つ, (2.2.32) の $[\bar{X}_{0,i}, u_1] = 0$ という条件が残っていて, それ以外に background

$\bar{X}_0, \bar{X}_1$ が行列模型の運動方程式 (2.2.4) を満たすという条件をおき[8], さらに X_0 , X_1 がコンパクト化によってできるトーラス上のベクトル束[9]として well-defined となる条件を課す (詳しくは [2.4] 参照). その結果トーラス T^2_Θ 上にできるゲージ理論はランクと first Chern class の 2 つの整数によって決まることを [2.4] で見る.

その最後の条件は [2.4] で考えることにして, その他の V_0 に関する条件について考える.

- (2.2.32) の $[\bar{X}_{0,i}, u_1] = 0$ という条件について, $g^\dagger V_0 g =: h_0 \in Her(N_1 \times N_{gauge})$ とおくと $[h_0, U_m] = 0$ となり, それを解くと

$$h_{0(a+1,b+1)} = h_{0(a,b)} \ , \quad h_{0(b,a)} = h^\dagger_{0(a,b)} \ .$$

  よって $h_0 = (U_m)^a \otimes h_{0(a,0)}$, $h_{0(-a,0)} = h^\dagger_{0(a,0)}$ と書ける.

- $$[\bar{X}_0, \bar{X}_1] = -(2\pi)^2 R_0 R_1 f, \ f \in \mathbb{R} \tag{2.2.39}$$

  より $h_0 \simeq 2\pi R_0 f x_1$ となる必要がある. そのような h_0 は $(U_m)^a \simeq e^{iax_0}$ より Fourier 展開を使って

$$h_{0(a,0)} = 2\pi i R_1 f (-1)^a / a$$

  と決まる.

以上でパラメーター $f \in \mathbb{R}$ の任意性を残してコンパクト化してできる場の形が分かった.

しかしまだ重要なことが 1 つ残っている. 代数関係式 (2.2.28) (2.2.29)(2.2.30) の解として求められた (2.2.37) は, それらすべての場を U の adjoint でゲージ変換したものも解である. この任意性は (2.2.38) で $\phi_i(w_i)$ を運動量 Fourier 成分と決めたことと関係する. $(U\phi)_i(w_i)$ を運動量 Fourier 成分と同一視することと場 $X \to U^{-1}XU$ を解とすることが対応している. そして正確にはその U と f の間に [2.4] で議論するベクトル束として well-defined になるための条件が加わることになる.

[d 一般]

$d = 2$ のときと同様にして

$$U_i U_j = \lambda_{ij} U_j U_i, \qquad \lambda_{ji} = -\lambda_{ij}$$

U_i の組は, この λ_{ij} で特徴付けられる.

[8] この条件は物理的には, コンパクト化してできた (D-brane の) 状態が BPS 状態となるための条件である (4.4.4 参照).

[9] 正確には射影加群

2.3 非可換幾何

名前の通り, 非可換幾何とは, 非可換な (点描像のない) 空間をあらわすための幾何学である. しかしその空間を直接扱うのではなく, その空間上の関数の代数を見ることによって空間を捉えるという, 代数的な立場をとる. 例えば, $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ という空間について考えるとする. その上の関数は Fourier 展開できて, S^1 の半径を 1, S^1 上の座標を $x \in [0, 2\pi]$ として, S^1 上の関数の代数の基底を $\exp(ix)$ とできる. つまり, 位相空間 S^1 はその dual で考えると $\exp(ix)$ で生成される代数であると言える. [10]

一般的に, 非可換でない位相空間に対して,

定理 2.3.1 (Gelfand) コンパクト空間 X と連続写像の圏と, 1 を持つ可換 C^*- 環 $C(X)$ と $*$-写像の圏は, 同値である

という定理がある. C^*- 環とは, 簡単に言えば空間 X 上の波動関数 $C(X)$ のようなもので, 内積が定義でき, その内積が距離の公理を満たし[11], $*$-写像を持つものである. C^*-環の $*$ は複素共役の意味である.

非可換幾何の概念は, とにかく今位相空間 X とその上の可換環 $C(X)$ が対応していて, その可換環 $C(X)$ を非可換な環にすると, それに対応する空間 X はどうなるか ? ということである.

$$\begin{array}{ccc} \text{位相空間 } X & \longleftrightarrow & \text{可換環 } C(X) \\ & & \Downarrow \\ \hat{X}\ ? & \longleftarrow & \text{非可換環 } \hat{C}(X) \end{array}$$

この非可換環 $\hat{C}(X)$ の表す 空間 $\hat{X}$ は, 一般にハウスドルフ位相でなくなり, 空間上の「点」と言う概念がなくなっている. つまり点が「ぼやける」. よって非可換幾何は, ハウスドルフ位相の入らないような拡張された空間 (葉層構造の理論など [12]) の理論を考えるのに強力であり, これが Connes らの非可換幾何 [7] のもともとの動機である. 場の理論的には, これは「空間の正則化」とも思える.

さてこの非可換環 $\hat{C}(X)$ に対応する空間 $\hat{X}$ を, 可換環 $C(X)$ に対応する空間からの「変形」として考えるとき, 非可換環 $\hat{C}(X)$ の表現として便利な表現がある. それは, 関数環としてはそのまま 可換環 $C(X)$ のものを使い, その積を位相空間 X の座標での微分作用素を使って, 非可換な積にするもので, これを変形量子化と呼ぶ.

変形量子化 位相空間 X 上の関数環 $C(X)$ の積として, 非可換な $*$ 積 と言うものを入れる. $*$ 積は, 非可換化のパラメーター $\hbar$ の摂動級数の形で定義される.

$*$ 積 $B(\ ,\ )$ とは, $B : C(X) \otimes C(X) \to C(X)$ であり, $B(f,g) = f \cdot g + \sum_{n=1}^{\infty} \hbar^n B_i(f,g), \quad f, g \in C(X)$, B_i はそれぞれ bidifferential operator で, 次の二つの条件を満たすものである.

- B_1 は X 上の Poisson bracket . つまり, $\hbar B_1(f,g) = \frac{i\hbar}{2}\{f,g\}$.

[10] 正確に位相空間と 1 : 1 対応とするには, その上の関数の代数は空間の 1 点で 0 となる関数の成す極大イデアルで割らなければならない.

[11] 内積は二つの波動関数の積の X 上での積分. 距離の公理は三角不等式など. これらの条件を満たすものを Banach 空間と言う. 細かいことを言うと X がコンパクトでないと, $1 \in C(X)$ の内積が規格化できない.

[12] 例: 二次元トーラス上を走る (平行な) 直線 (の属)

- B は結合的. つまり, $B(B(f,g),h) = B(f,B(g,h)), \quad f,g,h \in C(X)$.

Poisson 多様体 X に対して, $*$ 積は常に存在し, unique に決まる. (変形量子化の一般論について, 詳しくは 5 章で触れる.) $X = \mathbb{R}^n$ のときは, $*$ 積は Moyal 積になる.

Moyal 積 は, R^n 上の座標 x^i を使って次のように表される.

$$f * g(x) = f(x) e^{\frac{i}{2}\theta^{ij}\overleftarrow{\partial_i}\overrightarrow{\partial_j}} g(x), \qquad \theta \backsim \mathcal{O}(\hbar) \tag{2.3.1}$$

ここで, $\overleftarrow{\partial_i}, \overrightarrow{\partial_j}$ はそれぞれ, 左に作用する $\frac{\partial}{\partial x^i}$, 右に作用する $\frac{\partial}{\partial x^i}$ で, それらは可換なので, これが上の $*$ 積の二つの条件を満たすことは自明である. トーラス $R^n/\mathbb{Z}^n$ 上にもこの Moyal 積が入る.

ここで, $*$ 積が Moyal 積になる変形量子化された空間 $\hat{X}$ について, その上の関数環 $\hat{C}(X)$ のパラメーター x^i (非可換化のパラメーター が $\hbar = 0$ の時, それは対応する位相空間 X の座標となる) の交換関係を見てみる. 関数環 $C(X)$ は, x^i による形式的テイラー展開により表現されていると思って良い. よって x^i を $\hat{X}$ 上の関数として見て,

$$[x^i, x^j] = x^i * x^j - x^j * x^i = i\theta^{ij} \tag{2.3.2}$$

ただし, $*$ は上の Moyal 積 (2.3.1) である. $X = \hat{X}$ のときは $\theta^{ij} = 0$ なので可換になる. しかし, $\theta^{ij} \neq 0$ の時, x^i を $\hat{X}$ 上の座標だと思うと, 確かに 「座標が非可換」になっている. この非可換な x^i を量子座標と呼び, 非可換トーラスをこれを使って表す文献も多い [10][8][9]. [13]

非可換環 $\hat{C}(X)$ 上の微分 δ は, $\hat{C}(X)$ 上に作用する自己同型群の微小変換 (の基底) と考えられ, リー環を成す. このリー環を L, 自己同型群を $\tilde{L}$ と定義する. 微分 δ は, $\hat{f} \in \hat{C}(X)$ で $(\delta\hat{f}) \in \hat{C}(X)$ であり, ライプニッツ則を満たし, $\hbar = 0$ で普通の関数環 $C(X)$ 上の微分となるものを定義すればよい. ライプニッツ則は

$$\delta(\hat{f}\hat{g}) = (\delta\hat{f})\hat{g} + \hat{f}(\delta\hat{g}), \qquad \hat{f}, \hat{g} \in \hat{C}(X).$$

これを $*$ 積で表現して,

$$\delta(f * g) = (\delta f) * g + f(\delta *)g + f * (\delta g) = (\delta f) * g + f * (\delta g).$$

よって条件は, $(\delta *) = 0$ (δ と $*$ が可換) . 原理的には, これを満たす δ を,

$$\delta_i = \partial_i + \sum_{n=1}^{\infty} \hbar^n D_n, \qquad D_n = C_i^I \partial_I \tag{2.3.3}$$

として, $\hbar$ について連続に, オーダーごとに探せば良い. ここで, I は, multi index , $C_i^I \in C(X)$ である. 作り方から, リー環 L の基底は d 個となる. $*$ 積が Moyal 積のときは, 常に ∂ と $*$ が可換なので, 任意の $\hbar$ (または θ) で, $\delta_i = \partial_i$ と定義できる.

T_θ^d 上の加群の接続を定義する.
加群はベクトル束だと思って問題ない. 定義は, ([4.2 参照])

[13] それらの文献では x^i を σ^i と表しているが, この論文では 2 次元面の座標に σ を使っているのでそれを避け, $\mathbf{x}^i$ と表すことにする.

$$\mathcal{A} = T^d_\theta \text{ 上 } E \text{ が左加群} \Longleftrightarrow a \in \mathcal{A} \text{ :環, } \xi \in E \text{ :加法群} \quad \text{で, } a \cdot \xi \in E$$

である.

左加群上の接続 ∇_i は, ベクトル束の時と全く同様

$$\nabla_i(a \cdot \xi) = \delta_i a \cdot \xi + a \cdot \nabla_i \xi : \text{ライプニッツ則} \tag{2.3.4}$$

を満たすものとして定義される. 曲率 F_{ij} は

$$F_{ij} = [\nabla_i, \nabla_j] - \nabla_{[\delta_i, \delta_j]} \tag{2.3.5}$$

で, ベクトル束の時と同様これは $\mathrm{E}nd_{\mathcal{A}}E$ に値をとることが確認できる. ただし,

$$\mathrm{E}nd_{\mathcal{A}}E \text{ とは } E \text{ の自己準同型写像であり, } \mathcal{A} \text{ と可換なものである.}\ ^{14}$$

右加群, 両側加群のときもすべて同様に定義できる.

非可換トーラス　d 次元 (非可換) トーラス上の関数環は, $U_i, \quad i = 0, 1, ..., d-1$ により生成される. それらの間の代数関係式は,

$$U_i U_j = e^{2\pi i \Theta^{ij}} U_j U_i. \tag{2.3.6}$$

非可換幾何において, 空間 $\hat{X}$ は 常にその上の関数環で考えるので, $\{U_i | i = 0, 1, ..., d-1\} =: T^d_\Theta$ と定義して, この T^d_Θ 自体, または $(2.3.6)$ を非可換トーラスと呼ぶ.

$\Theta = 0$ のとき, トーラスの周期を 2π に scaling して[15] T^d_0 の生成子は $U_i = e^{ix^i}$ となるので, 上の関係式 $(2.3.6)$ は $*$ 積の表現では, $U_i = e^{ix^i}$, $* = \exp \pi i \Theta^{ij} \overleftarrow{\partial_i} \overrightarrow{\partial_j}$ となる.

T^d_Θ 上の微分は, 上の議論により $*$ 積による表現で, $\delta_i = \partial_i$ なので,

$$\delta_i U_j = i\delta_{ij} U_j \quad (\in C(X)). \tag{2.3.7}$$

また, $*$ 積のかわりに量子座標 $[\mathrm{x}^i, \mathrm{x}^j] = 2\pi i \Theta^{ij}$, $[\partial_i, \mathrm{x}^j] = \delta^j_i$ を使って

$$U_i = e^{i\mathrm{x}^i}, \qquad \partial_i U_j = i\delta_{ij} U_j$$

と表すこともできる[16]. x^i 同士の交換関係が nilpotent (2 回すると消える) なので, Candell-Beker-Hausdorff の公式より $(2.3.6)$ も成り立つことが分かる.

T^d_Θ 上の左 (, 右, 両側) 加群についての接続, 曲率も上のように定義でき, 今 δ_i と δ_j は可換なので, 曲率は

$$F_{ij} = [\nabla_i, \nabla_j] \tag{2.3.8}$$

である.

行列理論		非可換幾何
ゲージ変換	$U_i \to U_i \in \mathcal{A}_\Theta$	非可換トーラス上の非可換環
コンパクト化する Higgs 場	$X_i \to -2\pi i R_i \nabla_i + A_i \in Conn_{\mathcal{A}_\Theta}(E)$	非可換トーラス上の接続
コンパクト化しない Higgs 場	$X_m \to A_\mu \in \mathrm{E}nd_{\mathcal{A}_\Theta} E$	非可換トーラス上のゲージ場
弦の端点を結ぶ和	$\mathrm{Tr} \to \int d^d x \,\mathrm{tr}$	トーラス上の場の積分

2.4 非可換トーラス上の YM 理論

さてここで, 行列模型の場の自由度と, その非可換幾何での解釈の対応を見る.

[2.2.2] で具体的にコンパクト化の条件 (2.2.19) を満たす解を探してみたように, 無限次元の行列はその条件によってトーラスの次元分の代数のテンソル積とゲージ束のテンソル積に分かれた.

$$\text{無限次元行列} \overset{\text{コンパクト化}}{\longrightarrow} \mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_d \otimes U(N_{gauge})$$

その条件 (2.2.19) の意味を振り返ってみる. d 次元コンパクト化において (2.2.19) から導かれた条件をまとめると, $X_i = \bar{X}_i + A_i$ として

$$\begin{array}{lccc} 1) & [\bar{X}_i, U_j] = 2\pi R_i \delta_{ij} U_j & \longrightarrow & (-2\pi i R_i \nabla_i U_i) = 2\pi R_i \delta_{ij} U_j \\ 2) & [A_i, U_j] = 0 & \longrightarrow & A_i U_j = U_j A_i \\ 3) & U_i^{-1} U_j^{-1} U_i U_j \propto \mathbf{1} & \longrightarrow & U_i U_j = \lambda U_j U_i \end{array}$$

1) $\bar{X}_i$ がトーラス上の関数 $U_j \in \mathcal{A}_\Theta$ に微分 + 定数曲率の background として働くことを表す. つまり $(\nabla_i U_j) = i\delta_{ij} U_j$. ここで $\nabla_i = \partial_i - i f_{ij} \mathbf{x}_j$ (x, ∂ は量子座標表現) .

2) トーラスを成す代数とその上のゲージ場の成す代数は可換である. よって $A \in \mathrm{E}nd_{\mathcal{A}} E$. 4 章ではこれと森田同値との関係について説明する.

3) 理論のモジュライとして手で固定した.

さて d 次元コンパクト化について形式的に上の 1) 2) 3) の解を求めてみる [8][9]. 実際はそのトーラス上の (スカラー, ゲージ, フェルミオンの) ベクトル束が well-defined となるためのコサイクル条件が加わる. これらをすべて満たす解の完全系を $d > 2$ で見つけるのは難しい. (多分完全には解かれていない.) ここでは $\{U_i\}$ の上の場の一般的な構成法を d 次元で行ない, 具体的にその場の代数の基底を求めるのは簡単に $d = 2$ の場合を紹介する.

まず量子座標とその微分

$$[\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j] = -2\pi i \Theta_{ij} \ , \quad [\partial^i, \mathbf{x}_j] = \delta^i_j \ , \quad [\partial^i, \partial^j] = 0$$

を用意する. コンパクト化されてできる非可換トーラス $\mathcal{A}_{-\Theta}$ 上の場 (の 1 つ, 自明束) の代数である $\mathcal{A}_\Theta$ を

$$U_i^+ := e^{i\mathbf{x}_i} \ , \quad U_i^+ U_j^+ = e^{2\pi i \Theta_{ij}} U_j^+ U_i^+$$

[14] ベクトル束の $\mathrm{E}nd_{\mathcal{A}} E \ni F_{ij}$ も, $\mathcal{A} \ni f$ を底空間上の (可換) 関数環として, $F_{ij}(f \cdot \xi) = f(F_{ij}\xi)$ であった.

[15] この scaling は代数関係式としては微分の定義に吸収できる.

[16] 実際は量子座標を使う時は $e^{i\mathbf{x}^i}$ をトーラスと可換なその上の場の代数 (dual torus とも呼ぶ) の基底として使うことが多い [10][8][9].

と定義する. これと可換な非可換トーラス $\mathcal{A}_{-\Theta}$ の基底は

$$U_i = e^{i\mathbf{x}_i - 2\pi\Theta_{ij}\partial^j} \ , \quad U_iU_j = e^{-2\pi i\Theta_{ij}}U_jU_i$$

と表せる. $\{U_i^+\}$ と U_i が可換であることは, $[\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_k + 2\pi i\Theta_{kj}\partial^j] = 0$ であることから従う. [2.2.2] の議論での natation と合わせると単純に $\mathbf{x}_i = x_i - \pi i\Theta_{ij}\partial^j, \mathbf{x}_i + 2\pi i\Theta_{ij}\partial^j = x_i + \pi i\Theta_{ij}\partial^j$ である.

$U(1)$ の定数曲率を持つ接続 $\nabla^i \sim \bar{X}_i$ は $\mathrm{f}^{ij} \in \mathbb{R}$ として

$$\nabla^i = \partial^i + i\mathrm{f}^{ij}\mathbf{x}_j$$

と表すことができる. ここで $\mathrm{f}^{ii} = 0$ とする[17]. 実際 $i\mathrm{f}^{ij}\mathbf{x}_j$ は $\{U_i\}$ と可換なので

$$[\nabla^i, U_j] = i\delta_{ij}U_j$$

を満たしている. f^{ij} は i, j について反対称という条件はおかずに考える[18].

$U(1)$ の定数曲率 $\mathcal{F}$ は

$$\mathcal{F}^{jk} := i[\nabla^j, \nabla^k] = (\mathrm{f} - \mathrm{f}^T - 2\pi\mathrm{f}\Theta\mathrm{f}^T)^{jk}$$

となる. $\mathcal{A}_{-\Theta}$ 上の接続の周期的な境界の張り合わせの条件 (twisted b.c.) を

$$\nabla^i(\mathbf{x}_m + 2\pi\delta^j_m) = \Omega_j(\mathbf{x}_m)\nabla^i(\mathbf{x}_m)\Omega_j^{-1}(\mathbf{x}_m) \tag{2.4.1}$$

とし, P^{jl} を定数, W_j をランク $N_{gauge} = n$ の定数ユニタリー行列として

$$\Omega_j = e^{iP^{jl}\mathbf{x}_l}W_j \tag{2.4.2}$$

という形のものについて考える. (2.4.2) を (2.4.1) に代入すると

$$2\pi\mathrm{f} = -(2\pi\mathrm{f}\Theta + 1)P^T \tag{2.4.3}$$

となる. f を反対称行列に制限すると $P^{T,-1} = -(\Theta + \frac{1}{2\pi\mathrm{f}})$ より P も反対称となり,

$$P = (1 + 2\pi\mathrm{f}\Theta)^{-1}2\pi\mathrm{f} = 2\pi\mathrm{f}(1 + \Theta 2\pi\mathrm{f})^{-1}$$
$$2\pi\mathrm{f} = P(1 - \Theta P)^{-1} = (1 - P\Theta)^{-1}P$$

となる [9]. 上の 2 式の 2 つ目の等号はそれぞれ $P^T = -P, \mathrm{f}^T = -\mathrm{f}$ であることを使った. しかしここでは一般の (2.4.3) の場合を考える.

また局所座標系が張り合うために cocycle 条件

$$\Omega_j(\mathbf{x}_m + 2\pi\delta^i_m)\Omega_i(\mathbf{x}_m) = \Omega_i(\mathbf{x}_m + 2\pi\delta^j_m)\Omega_j(\mathbf{x}_m) \tag{2.4.4}$$

---

[17] i について縮約はとらない.

[18] [9] では $\mathbf{f}^{ij}$ を i, j について反対称にして議論している. ここでの $\mathbf{f}^{ij}$ が [9] では F^{ij} と表されている. あとでこれを 2 次元トーラスの場合に応用し, 2 次元の時は同じ曲率 $\mathcal{F}^{12}$ を持つ定数接続を $\mathbf{f}^{21} = -\mathbf{f}^{12}$ とおくより $\mathbf{f}^{12} = f, \mathbf{f}^{21} = 0$ と表示した方が便利なので, ここでは $\mathbf{f}^{ij}$ が反対称という条件をおかない.

を満たす必要があり, これに (2.4.2) を代入することにより W に関して

$$W_iW_j = e^{-2\pi iM^{ij}/n}W_jW_i \tag{2.4.5}$$

$$M := n(P - P^T + P\Theta P^T)\ ,\ n \in \mathbb{Z} \tag{2.4.6}$$

の条件がつく. W は定数行列だったので, この式の両辺について determinant をとって $(e^{-2\pi iM^{ij}/n})^n = 1$, つまり $M^{ij} \in \mathbb{Z}$ であることが分かる. (定義より M は反対称行列.) M はトーラス上の $U(1)$ ベクトル束の first Chern class である.

(2.4.3)(2.4.6) より一般には P を消去して, 非可換性 Θ, $M \in Mat(d, \mathbb{Z})$, ランク n, を決めると定数接続 f が決まることが分かる.

ここで $d = 2$ 次元の時に制限して考える. (これ以上一般の次元で解を考えるのは難しい.)

$$\mathrm{f} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -f & 0 \end{pmatrix}\ ,\qquad M = \begin{pmatrix} 0 & m \\ -m & 0 \end{pmatrix},\quad m \in \mathbb{Z} \tag{2.4.7}$$

と表して, (2.4.3) を P について解き, それを (2.4.6) に代入して P を消去することにより

$$\frac{m}{n} = \frac{2\pi f}{1 - 2\pi f\Theta} \tag{2.4.8}$$

となる. つまり, 非可換性 Θ とベクトル束のランク n を決めると magnetic flux f, ベクトル束の twist された数 m の間には関係式があることがトーラス上のゲージ場が 「切断」となるための条件から出た.

さらに, (2.4.1) を具体的に解くことができて [1][10] [8], ゲージ場の成す代数, つまり $\mathcal{A}_\Theta$ と可換な ($\mathcal{A}_{-\Theta}$ を含む) 代数の基底を Z_1, Z_2 として

$$Z_1 = e^{i\mathbf{x}_1/(n-m\Theta)}W_1^b\ ,\quad Z_2 = e^{i\mathbf{x}_2/n}W_2^{-b}$$

とれ, Z_1 , Z_2 の交換関係は

$$Z_1Z_2 = e^{2\pi i\widehat{\Theta}}Z_2Z_1\ ,\quad \widehat{\Theta} = \frac{a(-\Theta) + b}{m(-\Theta) + n} \tag{2.4.9}$$

と決まる. ここで (2.4.5)(2.4.7) より $W_1W_2 = e^{-2\pi im/n}W_2W_1$, また a, b は $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ m & n \end{smallmatrix}\right) \in SL(2, \mathbb{Z})$ を満たすもの, つまり $\left|\begin{smallmatrix} a & b \\ m & n \end{smallmatrix}\right| = 1$ を満たす整数であり, (互いに素な) m, n を与えると唯ひとつに決まる. $\widehat{\Theta}$ は e の肩に乗っているので modulo Z で定義されていることに注意する.

言えたことは, $T^2_\Theta = \mathcal{A}_\Theta$ 上のゲージ場の成す代数として $\mathcal{A}_{-\Theta}$ に任意の $SL(2, \mathbb{Z})$ 変換をしたものがとれるということである. この $SL(2, \mathbb{Z})$ は 2 次元のトーラスコンパクト化における T-duality group $SO(2, 2\ |\mathbb{Z}) \simeq SL(2, \mathbb{Z}) \times SL(2, \mathbb{Z})$ の片方である.

一般の d 次元では (2.4.1) を解くことは難しいが, 特別な場合については $\widehat{\Theta}$ は同様に $-\Theta$ を T-duality group $SO(d, d\ |\mathbb{Z})$ の部分群で変換したものが得られている [9],etc.

このような議論が動機となり, 森田同値と T-duality group の関係が研究された. それを 4 章で議論する. また [4.5] ではその物理的な解釈を議論するので, その前に [3.5] でトーラスの非可換性の弦理論的な解釈について説明する.

第3章　弦理論と非可換幾何

2 章でコンパクト化からの非可換トーラスについて触れたが, 一般にトーラスでなくても弦理論から自然に非可換空間が現れる. 空間の非可換化は理論を open string で見た時の, 弦理論の NS-NS B 場の効果によるものである. まず空間が $\mathbb{R}^d$ の場合に [3.2] で vertex operator の OPE から自然に非可換性が現れることを見て, [3.3] でそれらの 2 次元面の σ 模型の理論から有効理論に持ち上げる時, 有効理論の表示の仕方は一通りではないことを見る. そして [3.4] で得られた非可換なゲージ場に関する有効理論として 2 通りの表示による Dirac-Born-Infeld 作用の間の関係をみる. 2 つは等価な理論であるので, その結果それらは場の再定義で結び付いていることを見る. [12]

最後に [3.5] では 2 章で見た行列模型のコンパクト化によるトーラスの非可換性についてその弦理論的な解釈を説明する. [15][5][16]

その前に, 弦理論について基本的な用語と考え方を説明する.

3.1　弦理論, σ 模型, Vertex Operator

場の理論において取り出せる情報は散乱振幅である. 同じ散乱振幅を持つ理論は同一視される. 場の理論において不満な点はそれが重力を含んでいないということが主である. よって点粒子を (空間的に) 1 次元の弦に変えてみる. これが弦理論である. 他にも一般化の仕様はあるかも知れないが, 弦理論は今まで数々の非自明な問題を乗り越えてきた.

さてこの弦理論も技術的にも, 物理の捉え方も場の理論から多くのものを受け継いでいる. 取り出せる情報はやはり散乱振幅である. また相互作用は弦の伝搬によって伝えられる.

まず点粒子の量子力学と比べてみる. (時間を入れて粒子は 1 次元, 弦は 2 次元.) 時間と空間をまとめて時空と呼び, 一般的に d 次元とし, その中を点粒子, 又は弦が飛んでいる状況を考える. 時空の点を x と表して, x_1 から x_2 に粒子が伝搬する確率振幅を考えるとする (図 3.1(a)). それ

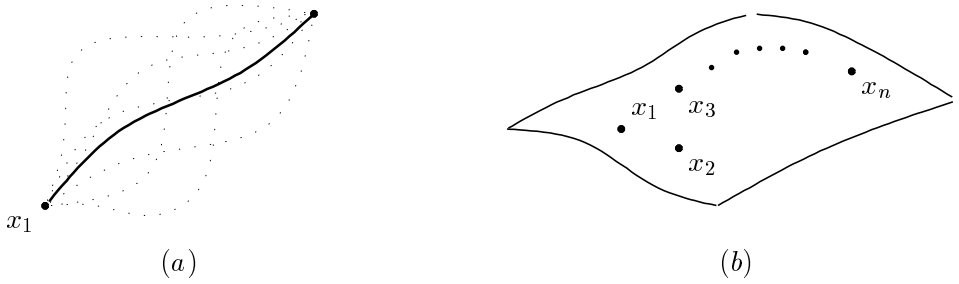

図 3.1: (a) 粒子の量子力学としての x_1 から x_2 への伝搬. 量子力学は粒子の生成, 消滅ができないので粒子の外線は 2 点でしか考えることができない. (b) $x_1, \cdots, x_n$ を通る弦の伝搬.)

と対応して弦の伝搬の確率振幅を考える. 時空の点 $x_1, \cdots, x_n$ を通る弦を考える (図 3.1(b)). 粒子, 弦の configuration はある作用 S (の Gaussian) による重み e^{-S} で平均される. その平均を $\langle \quad \rangle$ で表して, 確率振幅は大体次のようにして与えられる.

$$Amp(x_1, \cdots, x_n) = \Big\langle \prod_{i=1}^{n} \int d^2\sigma_i \sqrt{h} \delta(x_i - X(\sigma_i)) \Big\rangle \ . \tag{3.1.1}$$

ここで σ は弦上の 2 次元の座標であり, $X(\sigma)$ は弦の時空の中での座標である. 弦のどこかが $x_1, \cdots, x_n$ を通っている確率を表す.

今時空にとってこの弦の物理は場の理論ではなく量子力学である. しかし点粒子から 1 次元増えた弦に変わったことによる大きな違いは, 弦の生成や消滅の軌跡が多様体として書けるということである. 「外線」$x_1, \cdots x_n$ が $n = 2$ 以外でも考えられる理由もそれから来ている. 実際 (図

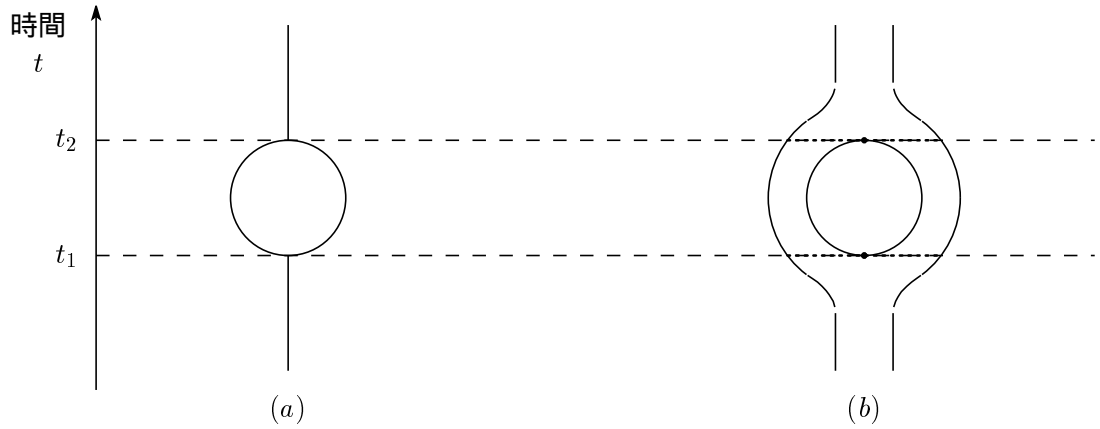

図 3.2: (a) 点粒子の生成と消滅. (b) 弦の生成, 消滅. (a),(b) 共にある時間 t_1 で二つに分かれ, t_2 で 1 つに戻った図. 点粒子の場合 t_1, t_2 で特異性を持ち, vertex が必要となるので場の理論でのみこのような理論が考えられる. convention によるが $t = \sigma^1$ としてよい.

3.1(b)) を「ゆがめる」と (図 3.3) のように書け, p 個の弦が $n - p$ 個の弦に分かれた描像になる.

注. 生成, 消滅など, 状態 を考える時は常に時空の 1 方向を時間にとってその時間が一定である余次元 1 の超平面で切って考える.

よって弦の生成, 消滅を表す topology を与えれば (多様体なので) それに対応する作用を作ることができ, その topology についての散乱振幅が計算でき, さらに 外線を与えた時それらの可能な **topology** についての振幅をすべて足し上げることによって時空の d 次元場の理論としての散乱振幅を構成できる.

振幅 (3.1.1) は運動量表示で表されることが多い. これを Fourier 変換すると,

$$\begin{aligned} Amp(p_1, \cdots, p_n) &= \int d^d x_1 \cdots d^d x_n e^{ip_1 \cdot x_1} \cdots e^{ip_n \cdot x_n} \Big\langle \prod_{i=1}^{n} \int d^2\sigma_i \sqrt{h} \delta(x_i - X(\sigma_i)) \Big\rangle \\ &= \Big\langle \prod_{i=1}^{n} \int d^2\sigma_i \sqrt{h} e^{ip_i \cdot X_i(\sigma_i)} \Big\rangle \end{aligned}$$

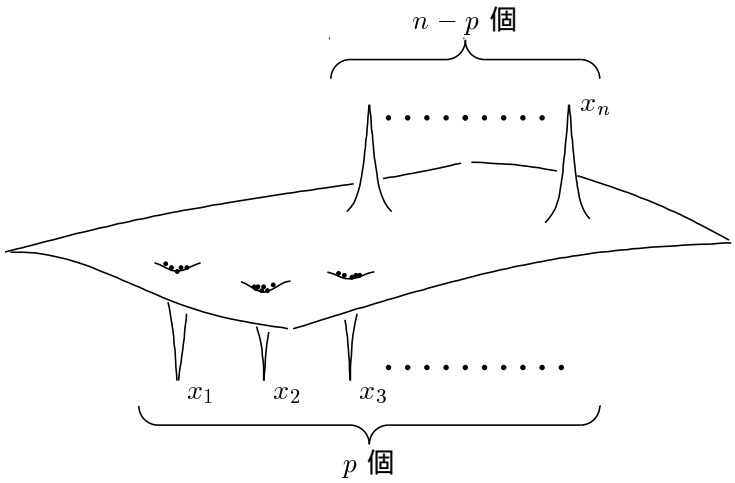

図 3.3: 弦の外線. p 個の弦 (closed string) が入って来て $n-p$ 個の弦が出ていく散乱を表す.

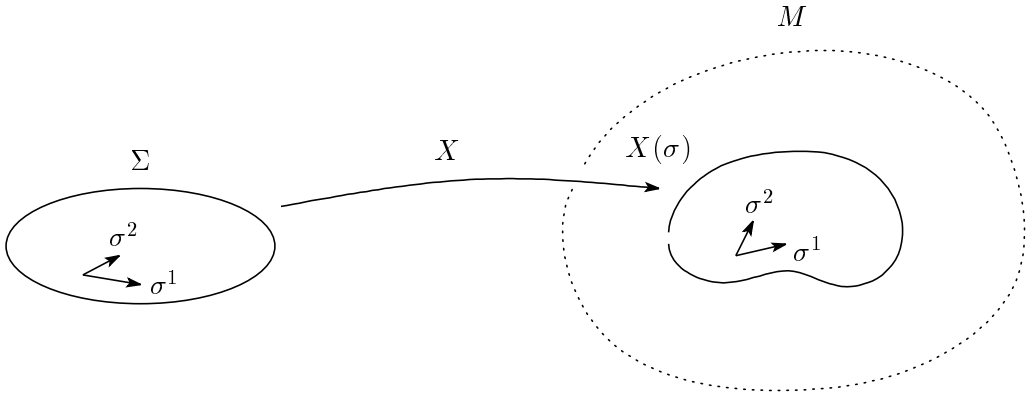

図 3.4: σ 模型. 写像 $X(\sigma)$ を world sheet 上の場とする 2 次元 world sheet での場の理論である.

となる. この $\int d^2\sigma_i\sqrt{h}e^{ip_i\cdot X_i(\sigma_i)}$ が **vertex operator** (の 1 つ) であり, 場の理論での運動量固有状態の外線に対応する (図 3.3).

もう少し詳しく, 特に $X(\sigma)$ の意味などを説明する. 時空中の弦を数式で扱うために次のように考える. ある topology をもったリーマン面 (open でもよい) を Σ とし, そこに座標 (σ^1,σ^2) を入れる. それを時空に埋め込み, Σ 上の点 σ の時空での座標を $X(\sigma)$ とする. つまり $X(\sigma)$ はリーマン面 Σ から時空への写像である. このような Σ と 写像 X で与えられる模型を σ 模型 と呼ぶ. (一般には Σ がリーマン面 (弦), 埋め込む先の空間が時空でないときも含み,) Σ を **world sheet**, 埋め込む先の空間を **target space** と呼ぶ (図 3.4).

ここで最も自然で基本的な作用 S を考えてみる.

$$S=\frac{1}{4\pi\alpha'}\int_\Sigma d^2\sigma\sqrt{h}h^{\alpha\beta}g_{ij}\partial_\alpha X^i\partial_\beta X^j\ . \tag{3.1.2}$$

ここで, $h^{\alpha\beta}(\sigma), g_{ij}(X)$ はそれぞれ Σ,target space の metric であり, どちらについても Euclidean, Lorentzian のどちらを使うこともある. (そして Wick rotation で移り合う.) 作用の古典解 $=$

S の極値 は, (粒子では測地線) , 弦では極小曲面が自然である[1]. 実際この作用はそうなっているし, この論文で以下使う作用もそのようなものを使っている.

弦の物理は target space にある configuration で弦が存在する状態であるとし, そのように考えるとこの σ 模型には 2 つの物理的状態の over counting がある.

1. Differeomorphism invariance (reparametrization invariance) Σ 上の座標 σ は計算するために手で入れたもので, 物理はその座標の取り方によらない.

$$\sigma^1 \longrightarrow f^1(\sigma^1,\sigma^2)\ , \qquad \sigma^2 \longrightarrow f^2(\sigma^1,\sigma^2)\ , \quad f^1, f^2 \in C(\Sigma)$$

   の $2\times C(\Sigma)$ の自由度.
   逆に Σ 上の座標を固定しても, それを target space M に埋め込む時 M 上で同じ configuration を与える写像 X は無限にある. (ある $X(\sigma)$ から弦の configuration を変えないホモトピー変形など.) [2] この 2 つは 写像 X にとって等価である.
2. Weyl 対称性 さらにこれを固定した作用 (3.1.2) は metric h の rescaling によらない. つまり物理がその rescaling によらない. (下で説明.) よってこのゲージ自由度[3] を物理的な自由度からはずす.

この Diff×Weyl による物理状態の over counting を割って重み e^{-S} つきの分配関数 Z を作りたい.

$$\langle 1\rangle \sim Z = \int \frac{\mathcal{D}X\mathcal{D}h}{diff\times Weyl} 1 e^{-S}\ .$$

($\sim$ は適当に規格化することを意味する.) まず 1. Diff を固定することを考える. Σ の座標 σ を動かすことによって metric $h^{\alpha\beta}$ を

$$h^{\alpha\beta} = e^{\phi}\eta^{\alpha\beta}$$

という形にできる. ここで $\eta = \mathrm{diag}(\pm,\pm)$ [4]. metric をこの形に固定することを **conformal gauge** という. simple で計算しやすい形であるし, h をこの形に固定することで座標 σ の取り方を決めたことになる. 実際 h は 2×2 実対称行列なので自由度は $3\times C(\Sigma)$ であり, それを f^1, f^2 の $2\times C(\Sigma)$ で割ると $1\times C(\Sigma)$ の自由度が残り, それが e^{ϕ} である.

これにより作用 S について

$$\sqrt{h}h^{\alpha\beta} \longrightarrow \sqrt{\eta}\eta^{\alpha\beta} = \pm\eta^{\alpha\beta}$$

より, 作用の形が simple になる. さらにこの ϕ 依存性が消えるということはこの作用は metric h の rescaling に対して不変であることを意味する. [5] この対称性を **Weyl** 対称性といい, この対称性を持つ理論を共形場理論 (以下 CFT と呼ぶ) という. よって弦理論は **CFT** で表される.

[1] 粒子の作用は測地距離, 弦の作用は面積に比例していればもっと自然であるが作用の中の場が多項式でないと計算するのに適していない. またそのような作用とこれから使う作用 (とその他にも) がいろいろな対称性より等価になることが知られている.

[2] 全体の diffeo をこのホモトピー変形で割った空間を写像類群の空間 (Teichmuller 空間) という.

[3] [6.1.1 参照]. そこで (定義 6.1.1) の Noether current がここで言っているゲージ自由度である.

[4] world sheet Σ を Euclidean にするか Lorentzian にするかで符号は異なる. [3.2][4.1] 参照.

[5] このあと量子化するが, 量子論的にもこの対称性が保たれるのは $g_{ij}(X)$ が bosonic で Ricci flat, 次元が $d=26$, また超対称性をもつ超弦理論 (作用 S に fermion の場もある) で $d=10$ などの条件がつく. 一般に古典的な対称性が量子論で壊れることを **anomaly** という.

3.2 Vertex Operator の OPE と $*$ 積

vertex operator のなす代数構造は, OPE によって決められるが, open string の vertex operator の OPE について, ある特別な極限 (B 場が大きくて g が無視できるような極限) を考えると, それは $*$ 積になる [11] [12].

まず, background g, B が定数のときについて, open string のσ 模型を量子化して, $\langle X^i(\tau)X^j(\tau')\rangle$ を求める. 目標は (3.2.12) である. 作用は conformal gauge で

$$S_{EWS} = \frac{1}{4\pi\alpha'}\int_\Sigma (g_{ij}\partial_\alpha X^i\partial^\alpha X^j - 2\pi i\alpha' B_{ij}\epsilon^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^i\partial_\beta X^j) \tag{3.2.1}$$

である. world sheet Σ は Euclidean metric を使う, つまり (τ,σ) に対して signature は $(+,+)$ である[6]. 時空の次元は $i=1,\cdots,d$ とし, Σ の領域は $\sigma\geq 0$ の上半平面 H とする. X で変分して

$$\delta S = \frac{1}{2\pi\alpha'}\int_\Sigma \partial_\alpha\{(g_{ij}\partial^\alpha X^i + 2\pi i\alpha'\epsilon^{\alpha\beta}B_{ij}\partial_\beta X^i)\delta X^j\} - \frac{1}{2\pi\alpha'}\int_\Sigma g_{ij}\partial^2 X^i\delta X^j \tag{3.2.2}$$

より, 運動方程式, 境界条件はそれぞれ

$$\partial^2 X^i = 0 \qquad g_{ij}\partial^\sigma X^i + 2\pi i\alpha' B_{ij}\partial_\tau X^i|_{\sigma=0} = 0 \tag{3.2.3}$$

となる. ここで $\partial^2 = \partial_\tau^2 + \partial_\sigma^2$ とする. 境界条件について大雑把に言うと $g_{ij} >> \alpha' B_{ij}$ でノイマン境界条件, $g_{ij} << \alpha' B_{ij}$ でディリクレ境界条件になっていることが分かる. (両辺に絶対値がついているものとする.)

$$\begin{array}{cc} z := \tau + i\sigma & \bar{z} = \tau - i\sigma \\ \partial := \partial_z = \frac{1}{2}(\partial_\tau - i\partial_\sigma) & \bar{\partial} := \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_\tau + i\partial_\sigma) \end{array} \tag{3.2.4}$$

と定義して (3.2.3) は

$$\partial\bar{\partial}X^i = 0 \qquad g_{ij}(\partial-\bar{\partial})X^i + 2\pi\alpha' B_{ij}(\partial+\bar{\partial})X^i|_{z=\bar{z}} = 0$$

と書きかわる. ここで propagator $\langle X^i(z)X^j(\bar{z})\rangle$ についての条件を (3.2.1) から経路積分形式により直接導く. 積分の $\int dX^i(z)$ の表面項が消えることを使って

$$\begin{aligned} 0 &= \int \mathcal{D}X \frac{\delta}{\delta X^i}(e^{-S_{EWS}}\cdot X^j(z')) \\ &= \int \mathcal{D}X\{\delta_i^j\delta^2(z-z')e^{-S_{EWS}} + X^j(-\frac{\delta S_{EWS}}{\delta X^i(z)}e^{-S_{EWS}})\} \\ &= \int \mathcal{D}X e^{-S_{EWS}}[\delta_i^j\delta^2(z-z') - \frac{1}{2\pi\alpha'}\{-g_{ik}\partial^2 X^k(z) \\ &\qquad + \delta(z-\bar{z})(g_{ik}i(\partial-\bar{\partial})X^k(z) + 2\pi i\alpha' B_{ik}(\partial+\bar{\partial})X^k(z))\}] \end{aligned}$$

これより,

$$\tfrac{1}{2\pi\alpha'}\partial^2\langle X^i(z)X^j(z')\rangle = -g^{ij}\delta^2(z-z') \quad \mathrm{Im}z,\ \mathrm{Im}z' > 0 \tag{3.2.5}$$

$$(g_{ij}+2\pi\alpha' B_{ij})\partial\langle X^j(z)X^k(z')\rangle = (g_{ij}-2\pi\alpha' B_{ij})\bar{\partial}\langle X^j(z)X^k(z')\rangle \quad z=\bar{z}\ \ (z\neq z') \tag{3.2.6}$$

[6] [4.1] では energy spectrum をみるため Hamiltonian 形式にもっていくので Lorentzian world sheet を使う.

となる. ここで $X(z)$ は正則部分を表しているわけではなく, 正則部分と反正則部分を足し合わせたものを表す. closed string の自由場の場合はそれらは独立 (理論が正則部分と反正則部分の直積で表される) だが, open string の場合, 境界条件 (3.2.6) により正則部分と反正則部分の間に条件式があり, その関係を満たして足し合わされたものがこれから導く $X(z)$ (その propagator) である.

(3.2.5) より, 解の形は

$$\langle X^i(z)X^j(z')\rangle = a^{ij}\ln(z-z') + a'^{ij}\ln(\bar{z}-\bar{z}') + b^{ij}\ln(z-\bar{z}') + b'^{ij}\ln(\bar{z}-z') \tag{3.2.7}$$

の形で表される. a, a', b, b' は z, $\bar{z}$ によらない行列で, world sheet の領域 Σ は $\sigma \geq 0$ なので, $\mathrm{Im}z$, $\mathrm{Im}z' \geq 0$ である. ここで $\langle X^i(z)X^j(z')\rangle$ が一価であることを考えると $a = a'$ となる. z, $\bar{z} \in \Sigma$ なので z は $\bar{z}$ の周りを回ることができ, $a\ln(z-z') + a'\ln(\bar{z}-\bar{z}') = 2a\ln|z-z'|$ の形でなければならない. つまり $a = a'$. b, b' の項については z, z' が上半平面, $\bar{z}$, $\bar{z}'$ が下半平面に属するため, $(z-\bar{z}')$, $(\bar{z}-z')$ は共に角度 π 以上回らないので b, b' が独立のままで一価である.

これを (3.2.6) に代入して,

$$\Big[(g+2\pi\alpha' B)\Big(\frac{a}{z-z'}+\frac{b}{z-\bar{z}'}\Big) - (g-2\pi\alpha' B)\Big(\frac{a}{\bar{z}-\bar{z}'}+\frac{b'}{\bar{z}-z'}\Big)\Big]_{z=\bar{z}} = 0$$

となり, $z=\bar{z}$ としてこれが $\frac{1}{z-z'}$, $\frac{1}{z-\bar{z}'}$ の係数について独立に成り立っていなければならないので

$$(g+2\pi\alpha' B)a - (g-2\pi\alpha' B)b' = 0 \qquad (g-2\pi\alpha' B)a - (g+2\pi\alpha' B)b = 0 \tag{3.2.8}$$

であり, b, b' は a で表せる. 最後に (3.2.5) に

$$\begin{aligned}\langle X^i(z)X^j(z')\rangle = 2a^{ij}\ln|z-z'| &+ \Big(\frac{1}{g+2\pi\alpha' B}(g-2\pi\alpha' B)\Big)^{ij}\ln(z-\bar{z}') \\ &+ \Big(\frac{1}{g-2\pi\alpha' B}(g+2\pi\alpha' B)\Big)^{ij}\ln(\bar{z}-z')\end{aligned}$$

を代入して両辺を $\int d^2u \ln|z-z'| = 2\pi$ を使って積分して, $a^{ij} = -\frac{\alpha'}{2}g^{ij}$ と決まる. さらに,

$$E := g + 2\pi\alpha' B$$

を定義して

$$\begin{aligned}E^{-1}E^t &= E^{-1}(2g-E) = 2E^{-1}g - \mathbf{1} \\ E^{t,-1}E &= E^{t,-1}(2g-E^t) = 2E^{t,-1}g - \mathbf{1}\end{aligned}$$

を使って $\ln(z-\bar{z}')$, $\ln(\bar{z}-z')$ を対称, 反対称部分に分けると

$$G^{ij} + \frac{\theta^{ij}}{2\pi\alpha'} = \left(\frac{1}{g+2\pi\alpha' B}\right)^{ij} \tag{3.2.9}$$

を定義して

$$\begin{aligned}\langle X^i(z)X^j(z')\rangle = -\alpha'\Big[&g^{ij}\ln|z-z'| - g^{ij}\ln|z-\bar{z}'| + G^{ij}\ln|z-\bar{z}'|^2 \\ &+ \frac{1}{2\pi\alpha'}\theta^{ij}\ln\frac{z-\bar{z}'}{\bar{z}-z'} + D^{ij}\Big]\end{aligned} \tag{3.2.10}$$

となる [13]. ここで D^{ij} は今まで無視していたが, 条件式 (3.2.5), (3.2.6) が共に $\langle X^i(z)X^j(z')\rangle$ に微分がかかった形をしているからこの定数の不定性を持つ. この G^{ij}, θ^{ij} を closed string の g^{ij}, B^{ij} に対応する open string の変数 (G^{ij} は metric) と呼ぶことにする.

G, θ を具体的に求めておくと,

$$\begin{aligned} G^{ij} &= \left(\frac{1}{g+2\pi\alpha' B}\right)^{ij}_S = \left(\frac{1}{g+2\pi\alpha' B} g \frac{1}{g-2\pi\alpha' B}\right)^{ij} \\ G_{ij} &= g_{ij} - (2\pi\alpha')^2 \big(B g^{-1} B\big)_{ij} \\ \theta^{ij} &= 2\pi\alpha' \left(\frac{1}{g+2\pi\alpha' B}\right)^{ij}_A = -(2\pi\alpha')^2 \left(\frac{1}{g+2\pi\alpha' B} B \frac{1}{g-2\pi\alpha' B}\right)^{ij}. \end{aligned} \tag{3.2.11}$$

ここで open string vertex operator に注目すると, $z=\bar{z}$, $z'=\bar{z}'$ なので

$$\langle X^i(\tau)X^j(\tau')\rangle = -\alpha' G^{ij}\ln(\tau-\tau')^2 + \frac{i}{2}\theta^{ij}\epsilon(\tau-\tau') \tag{3.2.12}$$

となる. ここで τ, τ' はそれぞれ z, z' の実部分で, $\epsilon(\tau)$ は $\tau>0$ で $\epsilon=1$, $\tau<0$ で $\epsilon=-1$ となる関数で, こうなるように D_{ij} を適当に合わせた. $\mathrm{Im}z\to 0$, $\mathrm{Im}z'\to 0$ の極限をとる時に ln の中の $\frac{z-\bar{z}'}{\bar{z}-z'}$ は分母と分子で長さは等しく, 先に $\mathrm{Im}z'=0$ にすると z を $\tau>\tau'$ で boundary に近づけるときに比べて $\tau<\tau'$ では $z-\bar{z}'$ から 角度 π, $\bar{z}-z'$ から $-\pi$ を出すので $\ln(\frac{z-\bar{z}'}{\bar{z}-z'})$ から 2π を出し, 上の式が導かれる.

これより, open string vertex operator の OPE を計算すると

$$e^{ip\cdot X}(\tau)\cdot e^{iq\cdot X}(\tau') \sim (\tau-\tau')^{2\alpha' G^{ij}p_i q_j} e^{-\frac{1}{2}i\theta^{ij}p_i q_j} e^{i(p+q)\cdot X}(\tau') + \dots \tag{3.2.13}$$

となる. $(\tau-\tau')^{2\alpha' G^{ij}p_i q_j}$ は anomalous dimension に対応していて, この項がないとこの OPE が $*$ 積になることが分かる. 今 open string の変数 G^{ij}, θ^{ij} を固定したいので, 上の OPE を $*$ 積にするために $\alpha'\to 0$ の極限をとる. その極限のとり方は, $B\to\infty$ にならないように考えると

$$\begin{aligned} \alpha' &\sim \epsilon^{\frac{1}{2}} \to 0 \\ g_{ij} &\sim \epsilon \to 0 \end{aligned} \tag{3.2.14}$$

と一つに決まる. この極限操作で B は一定となる. 境界条件はこのときディリクレである. $d+1$-brane の中に埋め込まれた D0-brane を端点に持つ弦のような状態に対応する. propagator はこのとき

$$\langle X^i(\tau)X^j(0)\rangle = \frac{i}{2}\theta^{ij}\epsilon(\tau). \tag{3.2.15}$$

vertex operator の OPE は

$$:e^{ip_i X^i(\tau)}:\ :e^{iq_i X^i(0)}:= e^{-\frac{i}{2}\theta^{ij}p_i q_j \epsilon(\tau)} :e^{ipX(\tau)+iqX(0)}:. \tag{3.2.16}$$

また, この X^i 上の一般の関数はこれを逆 Fourier 変換に使うことにより,

$$:f(X(\tau)):\ :g(X(0)):=: e^{\frac{i}{2}\epsilon(\tau)\theta^{ij}\frac{\partial}{\partial X^i(\tau)}\frac{\partial}{\partial X^j(0)}} f(X(\tau))g(X(0)):\tag{3.2.17}$$

となり, $\tau \geq 0$ から極限をとると

$$\lim_{\tau\to 0^+} :f(X(\tau)): \quad :g(X(0)) :=: f(X(0)) * g(X(0)) : \tag{3.2.18}$$

が導かれる. この代数関係を見ると, $*$ 積には自然に operator 形式としての time ordering (Weyl ordering) が入っていることが分かる. もちろん経路積分方式によって表すこともでき [11], それは 6 章で扱う模型での $\alpha^{ij} \sim \theta^{ij}$ が定数のときにあたる.

B 場がない方向もある時についても同様に $*$ 積の入った $\mathbb{R}^d$ が現れる極限がある. それは B 場のある方向を r 次元として, g_{ij} はその r 次元の方向 ($1 \leq i, j \leq r$) のみ (3.2.14) の極限をとり, 残りの部分については固定して,

$$\begin{aligned} G^{ij} &= \begin{cases} -\frac{1}{(2\pi\alpha')^2} \left(\frac{1}{B} g \frac{1}{B}\right)^{ij} & i,j = 1,\dots,r \\ g^{ij} & \text{その他} \end{cases} \\ G_{ij} &= \begin{cases} -(2\pi\alpha')^2 (B g^{-1} B)_{ij} & i,j = 1,\dots,r \\ g_{ij} & \text{その他} \end{cases} \\ \theta^{ij} &= \begin{cases} \left(\frac{1}{B}\right)^{ij} & i,j = 1,\dots,r \\ 0 & \text{その他.} \end{cases} \end{aligned} \tag{3.2.19}$$

とすればよい. $r \times r$ 方向のみ非可換な $\mathbb{R}^d$ が現れる. 以下は簡単のため B 場が入った方向のみについて考える.

以上 open string vertex の OPE を propagator から直接計算するとこの極限で $*$ 積になることを見た. トーラス上では運動量 p が量子化されていて, この積 (3.2.16) がそのままトーラス上の関数 U_i の非可換な積 (2.3.6) に対応していることが分かる.

一方 [11] では, open string vertex の OPE を background $g = \mathbf{1}$ の周りで定数の B 場の効果を摂動として加えて, 経路積分表示による変形量子化 [29] の Moyal 積の場合と一致することを示してある. この計算の途中でやはり G^{ij}, θ^{ij}(3.2.9) の二つの項の寄与が現れ, G^{ij} の項は boundary の場 (つまり外線の場 $f(X)$, $g(X)$) を適当に繰り込むことによって落とせるので無視すると言っている. 繰り込むとは, 簡単に言えば理論の注目する energy scale を変えるということなので, これは, (3.2.12) の G^{ij} の項を落とすために $\alpha' \to 0$ 極限 (3.2.14) をとったことと対応している.

3.3 σ 模型から有効作用へ

弦理論の有効理論の作用の形は, 有効作用の持つべき対称性から可能な形を場の巾展開の形で書き並べ, それらの係数を on-shell の状態について対応する弦理論の S-matrix を計算することによって得るという方法によって決定される. (もちろん完全に決定することは一般にできず, 任意性が残る.) 有効作用の 1 つの項 ($\Phi_1 \cdots \Phi_n$ とする) に対応する S-matrix とは, Φ_i に対応する vertex operator を V_{Φ_i} として CFT の相関関数で外線に (on-shell の) $V_{\Phi_1} \cdots V_{\Phi_n}$ を挿入して, CFT のモジュライ空間上 (今の場合 τ) で積分したものである.

上の議論で特別な $\alpha' \to 0$ 極限をとったときのみ, 関数の積が $*$ 積になることを見たが, ここではこの極限をとらずに一般的に考える. [3.3.1] で open string の量子化から得られる有効ゲージ理

論について, $\theta = 0$ $(B = 0)$ の時, 上の手続きで有効理論が得られるとして, $\theta \neq 0$ の時, その影響が $\theta = 0$ の有効理論から積を $*$ 積に変えるだけで採り入れられることを見る.

[3.3.2] ではそうして得られた (積が $*$ 積で定義された) 有効理論の作用を保つゲージ変換を σ 模型から導く. 2 次元面の理論の正則化の方法によって異なるゲージ変換が現れ, 有効理論の作用を保つゲージ変換を導く正則化は point splitting であることを見る.

3.3.1 S-matrix と有効理論

まず先に簡単な $\alpha' \to 0$ 極限 (G_{ij} の効果のない時) について相関関数の性質を見る.

- disk の境界 ($\sigma = 0, \tau$) に vertex operator が挿入している時, (3.2.16) を順々に使うことにより

$$\left\langle \prod_{k=1}^{n} e^{ip_i^k X^i(\tau_k)} \right\rangle = \left\langle : e^{ip_i^1 X^i(\tau_1)} : \cdots \left(: e^{ip_i^{n-2} X^i(\tau_{n-2})} : \left(: e^{ip_i^{n-2} X^i(\tau_{n-2})} : : e^{ip_i^n X^i(\tau_n)} : \right) \right) \right\rangle$$
$$= e^{-\frac{i}{2}\sum_{k>l} p_i^k \theta^{ij} p_j^l \epsilon(\tau_k - \tau_l)} \delta\left(\sum p^k\right) \tag{3.3.1}$$

となる. このように相関関数には必ず運動量保存のデルタ関数が現れる. $\alpha \to 0$ 極限をとらなくてもこの性質は変わらない.

- これを逆 Fourier 変換に使うことにより,

$$\left\langle \prod_k f_n(X(\tau_k)) \right\rangle = \left\langle \prod_k \left(\int \frac{d^d p^k}{(2\pi)^d} \hat{f}_k(p^k) : e^{ip_i^k X^i(\tau_k)} : \right) \right\rangle \tag{3.3.2}$$
$$= \int dx f_1(x) * f_2(x) * \cdots * f_n(x) \ . \tag{3.3.3}$$

以上の 2 つの計算で, $\left\langle \prod_k : e^{ip^k X(\tau_k)} : \right\rangle = \delta\left(\sum p^k\right) = \int dx e^{\sum_k ip^k x_k}$ であることを使った. (X をモード展開することにより得られる.)

ここで $*$ 積の性質について見ておく.

- (3.3.1) について

$$e^{-\frac{i}{2}\sum_{k>l} p_i^k \theta^{ij} p_j^l \epsilon(\tau_k - \tau_l)} = e^{-\frac{i}{2}\sum_{\tau_k > \tau_l} p_i^k \theta^{ij} p_j^l}$$

について簡単のため vertex が Disk の境界上 $\tau_1 > \tau_2 > \cdots$ と並んでいるとして, 運動量保存 $\sum_k p_i^k = 0$ を使うと

$$e^{-\frac{i}{2}\sum_{1\geq k,l\geq n,\ k>l} p_i^k \theta^{ij} p_j^l} = e^{-\frac{i}{2}\sum_{1\geq k,l\geq n-1,\ k>l} p_i^k \theta^{ij} p_j^l} \cdot e^{-\frac{i}{2}(\sum_{k=1}^{n-1} p_i^k)\theta^{ij} p_j^n}$$
$$= e^{-\frac{i}{2}\sum_{1\geq k,l\geq n-1,\ k>l} p_i^k \theta^{ij} p_j^l} = e^{-\frac{i}{2} p_i^n \theta^{ij} (\sum_{k=1}^{n-1} p_j^k)} \cdot e^{-\frac{i}{2}\sum_{1\geq k,l\geq n-1,\ k>l} p_i^k \theta^{ij} p_j^l}$$

となり, これは $\{1, \cdots, n\}$ の順番を cyclic に回しても不変である.

- この性質を受け継いで, (3.3.3) は f_k を cyclic に回す操作で不変である. それは (3.3.3) の形で見ると, $*$ 積の微分が 1 つ以上掛かった項に対して部分積分することによって分かる.

$$\int dx\big(f_1 * \cdots * f_i\big) * \big(f_{i+1} * \cdots * f_n\big) = \int dx\big(f_1 * \cdots * f_i\big) \cdot \big(f_{i+1} * \cdots * f_n\big)$$
$$= \int dx\big(f_{i+1} * \cdots * f_n\big) \cdot \big(f_1 * \cdots * f_i\big) = \int dx\big(f_{i+1} * \cdots * f_n\big) * \big(f_1 * \cdots * f_i\big) \ .$$

  $*$ 積は associative なのでどの $*$ 積を先に演算するかは自由である. また, 上のように f_i と f_{i+1} の間の $*$ 積を最後に演算する時, 例えばその $*$ 積の中の $\overleftarrow{\partial_i}$ はその左にある $f_1 * \cdots * f_i$ 全体に掛かっていることに注意する.

  上の計算の過程より, 積分の中の $*$ 積の (任意の) 1 つは普通の積 $\cdot$ に変えて良いことが分かる. また, この cyclic permutation の不変性より, f_i が (Chan-Paton) 行列値で積分が $\int dx \operatorname{Tr} f_1 * \cdots * f_n$ の形で書かれている時, 同様に cyclic permutation で不変である. よって $*$ 積, もっと一般的に associativity は open string の理論に適した性質であると言える.

さて, ここで $\alpha' \to 0$ の極限をとらない一般的な話に戻る. S-matrix の計算において θ の影響は, $\theta = 0$ の時に得られた有効理論の積を $*$ 積に変えるだけで得られる. まず $P^k(\partial_{\tau_k} X, \partial^2_{\tau_k} X, \cdots)$ を任意の τ_k 微分の掛かった場 X の多項式として

$$\left\langle \prod_{n=1}^{k} P_n(\partial X(\tau_n), \partial^2 X(\tau_n), \dots) e^{ip^n \cdot X(\tau_n)} \right\rangle_{G,\theta}$$
$$= e^{-\frac{i}{2}\sum_{n>m} p_i^n \theta^{ij} p_j^m \epsilon(\tau_n - \tau_m)} \left\langle \prod_{n=1}^{k} P_n(\partial X(\tau_n), \partial^2 X(\tau_n), \dots) e^{ip^n \cdot X(\tau_n)} \right\rangle_{G,\theta=0} \tag{3.3.4}$$

ここで, $\langle \quad \rangle_{G,\theta}$ は, propagator が G と θ によって表されている時の真空期待値である. これは $\alpha' \to 0$ 極限をとらない時の積 (3.2.13) についてまず background が定数なので $e^{-\alpha' \ln(\tau-\tau')^2 \overleftarrow{\partial_i} G^{ij} \overrightarrow{\partial_j}}$ と $* = e^{\frac{i}{2} \overleftarrow{\partial_i} \theta^{ij} \overrightarrow{\partial_j} \epsilon(\tau-\tau')}$ が可換なこと, そして θ の効果である $*$ の微分 $\overleftarrow{\partial_i}$ は $\partial = \partial_\tau$ の掛かった X をたたくと逆に $\frac{i}{2}\theta^{ij}\epsilon(\tau - \tau')$ が τ 微分を受け消えてしまうので $*$ は (3.3.4) の exp にしか掛からないという性質を使っている.

これからゲージ場の vertex operator についての S-matrix を計算する. ゲージ場の vertex operator は, その vertex の挿入によって 2 次元面の共形対称性を壊す補正として必要な ghost の寄与を無視すると

$$V = \int \xi \cdot \partial X e^{ip \cdot X} \tag{3.3.5}$$

という形をしている. ξ は A の p-運動量成分で, 偏光を持っているが *openstring* の Chan-Paton factor をもつので行列が tensor されていると考える. ここでは θ の効果に注目するので ghost の寄与は重要でない. on-shell かつ 物理的自由度であるための条件は

$$\xi \cdot p = p \cdot p = 0 \tag{3.3.6}$$

であり, ここで $\cdot$ は open string metric G^{ij} での内積を表す. よって一般的にゲージ場の n 点 S-matrix は (3.3.4) より

$$\left\langle \prod_n \xi^n \cdot \partial X e^{ip^n \cdot X(\tau_n)} \right\rangle_{G,\theta} = e^{-\frac{i}{2}\sum_{n>m} p_i^n \theta^{ij} p_j^m \epsilon(\tau_n - \tau_m)} \left\langle \prod_n \xi^n \cdot \partial X e^{ip^n \cdot X(\tau_n)} \right\rangle_{G,\theta=0} \tag{3.3.7}$$

となる. これから有効作用の 1 項を求めるには一般的には τ_k で積分する. Chan-Paton factor を持つので, τ_k はその順番を保った区間がモジュライ空間となる. 例えば, $\tau_1 > \tau_2 > \cdots$ のグラフについてはその区間で τ_k を積分する. 正確には上半平面には $SL(2,\mathbb{R})$ の自己同型 (2 次元面でのゲージ変換) が働いていて, 3 つの自由度を食べる. よってこの open string のモジュライ空間の次元は $n-3$ である. そして対応する有効作用の形はこの場合, 対称性から field strength の巾 (と共変微分) の Tr の形をしていることを仮定できる. ただしこの有効作用の中で積は $*$ 積となっていて, field strength $\hat{F}$ は (3.4.2) で定義する「非可換」な field strength である. (共変微分も同様.)

$$\hat{F}_{ij} = \partial_i \hat{A}_j - \partial_j \hat{A}_i - i\hat{A}_i * \hat{A}_j + i\hat{A}_j * \hat{A}_i \tag{3.3.8}$$

具体的に 3 点関数の S-matrix を 得られる有効作用の leading (α' 補正がない) である YM 作用と比べてみる. 3 点関数の S-matrix を計算すると

$$\begin{aligned}\left\langle \xi^1 \cdot \partial X e^{ip^1 \cdot X(\tau_1)}\ \xi^2 \cdot \partial X e^{ip^2 \cdot X(\tau_2)}\ \xi^3 \cdot \partial X e^{ip^3 \cdot X(\tau_3)} \right\rangle &\sim \frac{1}{(\tau_1-\tau_2)(\tau_2-\tau_3)(\tau_3-\tau_1)} \\ &\cdot \left(\xi^1\cdot\xi^2 p^2\cdot\xi^3 + \xi^1\cdot\xi^3 p^1\cdot\xi^2 + \xi^2\cdot\xi^3 p^3\cdot\xi^1 + 2\alpha' p^3\cdot\xi^1 p^1\cdot\xi^2 p^2\cdot\xi^3\right) \\ &\cdot e^{-\frac{i}{2}\left(p_i^1\theta^{ij}p_j^2\epsilon(\tau_1-\tau_2) + p_i^2\theta^{ij}p_j^3\epsilon(\tau_2-\tau_3) + p_i^3\theta^{ij}p_j^1\epsilon(\tau_3-\tau_1)\right)}\end{aligned} \tag{3.3.9}$$

となる. 始めに言ったように今ゲージ場の vertex operator について ghost の寄与を無視している. 本当は境界への vertex operator の挿入は (境界に沿った方向の) 対称性を (実) 1 次元壊すので 1 つゲージ固定したことになっていて, それに対応して ゲージ場の vertex operator には ghost が 1 つついている. よって 3 つ挿入するとちょうど $SL(2,\mathbb{R})$ 対称性が固定され, そのゲージ固定による Faddeev-Popov determinant が 3 つの ghost による Van-der-Monde determinant $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \tau_1 & \tau_2 & \tau_3 \\ \tau_1^2 & \tau_2^2 & \tau_3^2 \end{vmatrix} = (\tau_1-\tau_2)(\tau_2-\tau_3)(\tau_3-\tau_1)$ となり, それが ghost の odd な統計性より分子に来る. よって τ 依存性は cancel する. 3 点 S-matrix は

$$\left(\xi^1\cdot\xi^2 p^2\cdot\xi^3 + \xi^1\cdot\xi^3 p^1\cdot\xi^2 + \xi^2\cdot\xi^3 p^3\cdot\xi^1 + 2\alpha' p^3\cdot\xi^1 p^1\cdot\xi^2 p^2\cdot\xi^3\right)\cdot e^{-\frac{i}{2}p_i^1\theta^{ij}p_j^2} \tag{3.3.10}$$

となる. 始めの 3 項は YM 作用からの 3 点関数と同じである.

$$\frac{(\alpha')^{\frac{3-p}{2}}}{4(2\pi)^{p-2}G_s}\int \sqrt{\det G}\, G^{ii'}G^{jj'}\ \mathrm{Tr}\ \hat{F}_{ij} * \hat{F}_{i'j'} \tag{3.3.11}$$

ここで G_s は open string の結合定数で, [3.4.2] で DBI 作用を open string の変数による表示の時と closed string のときとで leading の項 (場の 0 次) が一致するように決める. (3.3.10) の最後の項は, 有効作用の $\alpha'\hat{F}^3$ の中の $(\partial\hat{A})^3$ 部分である. ($\alpha' \to 0$ の極限ではなくなる.)

このようにして, 原理的には有効理論について場の巾の低い方から順々に $\mathrm{Tr}\,\hat{D}^m\hat{F}^n$ の係数を決めていくことができるようにみえる. しかしこの決め方により, これは on-shell の状態を比べるので実際には高次の項については任意性が残る. 例えば運動方程式 $\hat{D}\hat{F}=0$ より $\mathrm{Tr}\cdots(\hat{D}\hat{F})\cdots$ 項についての情報は S-matrix から得ることができない. つまり, up to 運動方程式でしか決められない. また, 高次では open string のモジュライ空間の積分が発散し, 正則化の手段によってしまうという困難もある.

しかし, 逆に拘束条件も考えられる. 今求めたものは σ 模型側で, 定数の B 場の効果を 2 次元面上積分しきって境界の propagator を作って計算した. 一方, 普通 g 場のみで propagator を作ると思うと, $\theta=0$ の propagator ができ, 有効作用の形はまだ採り入れられていない B 場の影響により F が $F+B$ に置き換わる[7] . この 2 つの理論は等価なはずである. そして [3.4] でやるようにこの 2 つの有効理論が場の再定義で結びつくことが提案された [12]. よって $(\hat{F},*)$ で作られる有効理論と $(F+B,\cdot)$ で作られる有効理論がその場の再定義によって移ることを要請すると, それが拘束条件となる. それによって $\hat{D}\hat{F}$ の補正を含むような有効作用が作れる可能性がある [14]. 微分 $D\sim\partial$ は運動量 p に対応し, 次元をあわせると $\sqrt{\alpha'}p$ である.

[3.4.2] ではこのような微分を含む項を無視した DBI 有効作用について上の 2 つの表示によるものの間に場の再定義による写像があることを見る. ここで 微分 $D\sim\partial$ は運動量 p に対応し, 次元をあわせると $\sqrt{\alpha'}p$ であるので, これを無視することは低エネルギーの理論をみていることに対応し, $\hat{D}\hat{F}$ の補正を考えることはその高エネルギーの α' 補正を考えることに対応する.

しかし, このような高エネルギーの物理において, ゲージ場のみで有効理論が作れる保証はないかもしれない. つまり, このような有効理論をある種の弦の場の理論のゲージ場のみの部分と考えると, 高エネルギーにおいてゲージ場が他の場と混ざりあってゲージ場のみの理論を取り出すことができないかもしれない.

3.3.2 有効理論のゲージ対称性と σ 模型の正則化

ここで, ゲージ場のゲージ対称性について考える. まずそのゲージ変換で σ 模型が不変になる対称性を探す. その対称性が, σ 模型 (とその B 依存性の分け方) に対応する有効作用を不変に保つことが望まれる. 結果は, σ 模型の正則化の方法による. 「非可換」ゲージ理論に適した正則化は point splitting であることが分かる.

作用は, (3.2.1) の S_{EWS} にゲージ場の minimal coupling の項を加えたものを考える.

$$S_{gauge}=S_{EWS}+S_A\ ,\qquad S_A=-i\int d\tau A_i(X)\partial_\tau X^i \tag{3.3.12}$$

ゲージ場 A は $U(1)$ で計算するが, 一般に $U(N)$ でも同様にできる. A が 一般に $U(N)$ の時について, propagator に B 場の効果を入れない時, A のゲージ変換は 2 種類ある.

$$\begin{array}{cc} A\longrightarrow A+d\lambda+i[\lambda,A]\ , & B\longrightarrow B \\ A\longrightarrow A-\Lambda\ , & B\longrightarrow B+d\Lambda \end{array} \tag{3.3.13}$$

ここで B は closed string の場 (2 次元面との minimal coupling) なので行列の足をもたず, よって Λ は $U(1)$ の対称性である. これらをそれぞれ λ-対称性, Λ-対称性と呼ぶことにする.

[7] $B\to B-d\Lambda$, $A\to d\Lambda$ のゲージ変換より, F と B は常にこの組で現れる. [3.3.2 参照]

この Λ-対称性により B 場は F の $U(1)$ 部分と混ざる. 例えば上の (3.3.12) の S_{gauge} において, S_{EWS} の中の B 場は表面項になる (3.2.2) ので, その効果は A_i に $A_{U(1),i} = -\frac{1}{2}B_{ij}X^j$ を加えることに置き換えられる.

今は B_{ij} の効果は propagator に取り入れたので, ゲージ場 A の真空期待値は無限遠で 0 とする. propagator を g_{ij} のみで作れば B_{ij} の効果はゲージ場 A の真空期待値として取り入れられる. そのように B_{ij} の効果を取り入れる時 propagator と真空期待値への分け方によって任意の表示の仕方がある. また, 一般の多様体上のゲージ場はそれが非自明なベクトル束の時, この $U(1)$ のゲージ変換で F の真空期待値をいたるところ 0 にはできない. [2.4] の twisted bundle はまさにこの $A_{U(1),i} = -\frac{1}{2}B_{ij}X^j$ の期待値をもって周期的に張り合わさっていることが (2.4.1) 接続の形から分かる.

これから A が $U(1)$ の時について, ゲージ変換を A の巾展開で表し, 有効作用を不変にするゲージ変換を σ 模型から導出することを試みる. その leading (A の 0 次) の項は $\partial\lambda$ であり, A の n 次の項を λ^n として

$$\delta A_i = \partial_i\lambda + \lambda_i^1 + \lambda_i^2 + \cdots \tag{3.3.14}$$

と表し, この変換で分配関数が不変であるように λ^n を決めていくことを考える. S_{EWS} を propagator に使ったのでそれ以外の, つまり S_A を揺らぎ (有効作用の場) として分配関数を

$$Z = \int \mathcal{D}X e^{-(S_{EWS}+S_A)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int \mathcal{D}X (i\int d\tau A_i(X)\partial_\tau X^i)^n e^{-S_{EWS}}$$

と展開する. これがゲージ変換 (3.3.14) で不変となる条件は

$$0 = \delta Z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i)^n}{n!}\int \mathcal{D}X (\int d\tau \delta A_i(X)\partial_\tau X^i)(\int d\tau' A_{i'}(X)\partial'_\tau X^{i'})^n e^{-S_{EWS}}$$

であり, この条件式を A の次数ごとに見て

$$\begin{array}{ll}
n=0 & \left\langle \int d\tau \partial_i\lambda(X_\tau)\partial_\tau X^i \right\rangle = 0 \\
n=1 & \left\langle i\int d\tau' d\tau \partial_\tau X^i A_{i'}(X(\tau'))\partial_{\tau'}X^{i'}\partial_i\lambda(X(\tau)) + \int d\tau \lambda^1(X(\tau))\partial_\tau X^i \right\rangle = 0 \\
n=2 & \left\langle -\frac{1}{2}\int A_{i_1}(X(\tau_1))A_{i_2}(X(\tau_2))\partial_i\lambda(X(\tau)) + i\int A_{i_1}(X(\tau_1))\lambda^1(X(\tau)) + \int \lambda^2(X) \right\rangle = 0 \\
\cdots & \cdots \qquad \cdots \\
n & \sum_{k,l\geq 0, k+l=n}\frac{1}{l!}\left\langle \left(\int d\lambda^k(X)\right)\left(i\int dA_i(X)\right)^l \right\rangle = 0
\end{array} \tag{3.3.15}$$

となる. ここで積分については $n=2$ では $\int = \int dX^{i_1}\cdots dX^{i_l}d\tau$, 一般の n では境界 τ 上の 1-form の積分として適当に省略して表した. また $\langle\ \ \rangle$ は $\int \mathcal{D}X$ で積分して適当に規格化した平均を意味するが, ここで行なう計算はその平均をとる前の $\left\langle\ \ \right\rangle$ の中の異なる τ での場 X について propagator(3.2.15) で contract をとる OPE の計算まで行なえば十分である. propagator の形から ∂_τ の微分がかかった $\partial_\tau X^i$ は contract しない (3.3.4 参照) ので, A と λ の間のみ contract がとられることに注意する.

この propagator(3.2.15) に発散はないが, world sheet の境界の重なった 2 点の間を伝搬する時 singular であったので正則化しなければならない. ここで **point splitting** による正則化を使う

ことにする. つまり τ, τ' にある場についての $\int d\tau d\tau'$ の積分は $|\tau - \tau'| < \delta$ の部分を切り取りそれ以外の部分を積分し, そのあと $\delta \to 0$ の極限をとる.

さて (3.3.15) より順々に λ^n を決めていくことができる. (3.3.15) より

- $n = 0$　この時 contract をとる部分はなく, $d\tau \partial_i \lambda(X_\tau) \partial_\tau X^i = d\lambda$ は表面項なのでそれ自身が消えている.　(これがゲージ変換の leading の項が $\partial_i \lambda$ である理由とも言える.)

- $n = 1$　第 1 項目について $A_i(X)$ と $\partial_{\tau'} \lambda$ の contract をとり point splitting で正則化して

$$
\begin{aligned}
i \int d\tau' A_i(X) \partial'_\tau X^i \cdot \int d\tau \partial_\tau \lambda &:= i \int d\tau' : A_i(X) \partial'_\tau X^i : \int d\tau : \partial_\tau \lambda : \\
&= i \int d\tau' : A_i(X(\tau')) \partial'_\tau X^i(\tau') : \ : \Big(\lambda(X(\tau'^-)) - \lambda(X(\tau'^+)) \Big) : \\
&= i \int d\tau : \left(A_i(X) * \lambda - \lambda * A_i(X) \right) \partial_\tau X^i :
\end{aligned}
$$

  となる. τ の積分は正則化により切り取られた端 τ'^-, τ'^+ の表面項になった.

  これより $\lambda_i^1 = i(\lambda * \hat{A}_i - \hat{A}_i * \lambda)$ と決まった.

- $n = 2$　第 1 項目について $\partial_i \lambda(X(\tau))$ が一つの $A(X)$ と contract した段階を考えると, $A(X)$ が 2 つあるのでそれは 2 通りあり

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{2} \int d\tau_1 d\tau_2 d\tau : A_{i_1}(X(\tau_1)) \partial_{\tau_1} X^{i_1} : \ : A_{i_2}(X(\tau_2)) \partial_{\tau_2} X^{i_2} : \ : \partial_i \lambda(X(\tau)) \partial_\tau X^i : \\
= - \int d\tau_1 d\tau_2 : A_{i_1}(X(\tau_1)) \partial_{\tau_1} X^{i_1} : \ : \left(A_{i_2}(X) * \lambda - \lambda * A_{i_2}(X) \right) \partial_{\tau_2} X^{i_2} :
\end{aligned}
$$

  となり, 第 2 項目の contract をとらない段階と比べると打ち消し合うことが分かる. よって $\lambda^2 = 0$ と決まる.

- $n - 1 \to n$　ここまで来たらもう結果は見えるが, 帰納法で示す. λ, λ^1 が上のように決まり, $\lambda^3 = \cdots = \lambda^{n-1} = 0$ と仮定する. すると (3.3.15) で n の時, 生き残っている項は $(k,l) = (0,n)(1,n-1)(n,0)$　($\lambda^{k=0} := \lambda$ とする) の 3 項であり, $n = 2$ の時と同様に $(k,l) = (0,n)$ の項で $\partial_\tau \lambda$ と $A(X)$ が 1 回 contract をとるとそれは n 通りあり, それは $(k,l) = (1,n-1)$ の項で contract をとらない段階と比べて打ち消しあっていることが分かる. よって $(k,l) = (n,0)$ の項のみ残り, $\lambda^n = 0$ であることが決まる.

以上でゲージ変換は求まった.

$$
\hat{\delta} \hat{A}_i = \partial_i \lambda + i \lambda * \hat{A}_i - i \hat{A}_i * \lambda \ . \tag{3.3.16}
$$

同様にしてゲージ場が一般の $U(N)$ でもこうなることが予想できる.

これは B_{ij} の効果を propagator に入れた表示の有効理論の作用を不変に保つゲージ変換になっている. 実際, 普通のゲージ理論との類推から, 積が $*$ 積になった有効作用が $*$ 積での共変微分 $\hat{D}$ と field strength $\hat{F}$ の多項式の Tr をとったもので作られることを認めると, ゲージ変換を $U \in U(N)$ として

$$
\hat{F} \longrightarrow U^{-1} * \hat{F} * U \ , \qquad \hat{D} \longrightarrow U^{-1} * \hat{D} * U
$$

より Tr をとって対称性が保たれることが分かる. この Lie 環での無限小変換を [3.4] でまとめてある. 一方 B_{ij} を真空期待値の方に取り入れると普通の積によるゲージ理論となるのでゲージ変換は

$$F + B \longrightarrow U^{-1}(F + B)U \ , \qquad D \longrightarrow U^{-1}DU \tag{3.3.17}$$

である. (B_{ij} は $U(1)$ 部分であり行列でないので U の作用で変化しない.) またこれらの中間の, B_{ij} の効果を 2 つに分け propagator から積も $*$ 積になり, field strength の真空期待値も non-zero である表示もでき, その有効作用を保つゲージ変換も同様に存在する.

しかし今 point splitting で正則化して B_{ij} 入りの propagator でゲージ変換を求めたがこれを異なる正則化で求めると異なるゲージ変換が出る. 例えば Pauli-Villars の正則化を使うと決して $*$ 積にならず普通の (3.3.17) のゲージ変換になる. よってこのような **open string** の理論の有効作用の対称性を保つ 「よい」正則化は **point splitting** であると言える.

また, (今の場合 2 次元の) 場の理論において, 異なる正則化によってできる理論の違いはその場の理論の結合定数を変えることによって吸収できる. 今 2 つの異なる表示による有効理論の間の関係を考えると, 理論 (の対称性) が σ 模型の world sheet の正則化によるということは σ 模型の結合定数の再定義に吸収できることを意味し, σ 模型の結合定数は今の場合 background のゲージ場 A (と B_{ij}) である. [8] この background が有効作用の場である. よってこれらの異なる表示による等価な有効作用は場の再定義によって移りあうことができるはずであるというのが [12] の主張である. [3.4] ではそのような有効作用の 1 つである $U(1)$-DBI 作用についてその主張を確認する.

3.4 場の再定義と $B \leftrightarrow \theta$ の関係

上の議論から, 同じ弦理論 (の有効理論) について closed string の変数 ($g_s, g, B, F, \cdot$) による表示と, $*$ 積の代数である open string の変数 ($G_s, G, \hat{F}, *$) による表示の両方が可能であることを主張できる. その確認として, $\mathbb{R}^n$ の D-brane の DBI 有効作用について, その二つの表示による理論が等価であることを示す. ここで closed string の変数による有効理論は 「もともとの」ゲージ理論であり, open string の変数による有効理論とは 「非可換な」ゲージ理論のことである. [12]

一般的に, ゲージ群を $U(N)$ として, notation をまとめておく.

$$\begin{aligned}
&A_i : U(N) \text{ のリー環の基本表現行列に値をとるもともとのゲージ場} \\
&D_i = \partial_i - iA_i : \text{共変微分} \\
&F_{ij} = i[D_i, D_j] = \partial_i A_j - \partial_j A_i - i[A_i, A_j] : \text{field} \quad \text{strength} \\
&\delta_\lambda A_i = [D_i, \lambda] = \partial_i \lambda + i[\lambda, A_i] : \text{ゲージ変換} \\
&\delta_\lambda F_{ij} = i[\lambda, F_{ij}]
\end{aligned} \tag{3.4.1}$$

[8] 実際ある $X = x$ の周りで $A(X)$ を Taylor 展開した係数はまさに結合定数である.

$\hat{A} = \hat{A}(A) : U(N)$ のリー環の基本表現行列に値をとるゲージ場, 非可換

$[\quad,\quad]_\theta, \{\quad,\quad\}_\theta$: それぞれ積を $*$ 積にした交換, 反交換関係

$$\begin{aligned}
\hat{D}_i &= \partial_i - i\hat{A}_i \\
\hat{F}_{ij} &= i[D_i, D_j]_\theta = \partial_i A_j - \partial_j A_i - i[A_i, A_j]_\theta \\
\hat{\delta}_\lambda \hat{A}_i &= [D_i, \lambda]_\theta = \partial_i \lambda + i[\lambda, A_i]_\theta \\
\hat{\delta}_\lambda \hat{F}_{ij} &= i[\lambda, \hat{F}_{ij}]_\theta
\end{aligned} \tag{3.4.2}$$

space-time は Euclidean とする.

3.4.1 場の再定義

まず, 場の再定義による A から $\hat{A}$ への写像 T をつくる.

$$\begin{aligned}
&T : (A, \lambda) \to T(A, \lambda) = (\hat{A}(A), \hat{\lambda}(A, \lambda)) \\
&T = \mathrm{Id} + \sum_{n=1}^{\infty} \hbar^n T_n,
\end{aligned} \tag{3.4.3}$$

ここで $\hbar$ は 2.3 の非可換化のパラメーターで, $\theta \sim \hbar$. この写像 T は, 5 章の変形量子化理論の意味での 「ゲージ変換」に似ている. (場の理論の意味でのゲージ変換は, このあとも議論する λ で, これとは関係ない.) 変形量子化理論において, 写像 T が 「ゲージ変換」となるためには T は A (と微分作用素) で生成される代数 $C(A) \ni F(A), G(A)$ に関して

$$T(F(A) \cdot G(A)) = T(F(A)) * T(G(A)) \tag{3.4.4}$$

が成り立っていることが条件で, これは二つの代数 ($\leftrightarrow$ 理論) が同型となるための条件である. (詳しくは $[5.1]$ で説明する.) ここで構成する T はこの条件を満たすであろうか ?実は場の再定義とは, その代数の生成子 A についての変換を決めることによって, 代数全体の変換 T を定義している. つまり, $(3.4.4)$ は場の再定義の定義である. 結局, 場の再定義とは, 代数の変形理論における同型写像 (の一部) であると言える. しかしゲージ群が $U(1)$ のときでももはや $T(F(A) \cdot G(A)) = T(G(A) \cdot F(A))$ は成り立っていないのでその辺は微妙である. このあとの DBI 作用についての議論では作用の表面項と ∂F の項を無視するので, それによってこの $(3.4.4)$ の関係が回復している可能性はある.

さらに写像 T が満たさなくてはならない条件がある. A の理論と $\hat{A}$ の理論は共にゲージ変換を持っているので, A をゲージ変換で移したものを写像 T で移したものは, A を T 移してゲージ変換したものと一致していなければならない. [9] ゲージ変換を λ による微小変換で表して,

$$\begin{array}{ccc}
A & \longrightarrow & A + \delta A \\
\downarrow & & \downarrow \\
\hat{A} & \to \hat{A}(A) + \delta_{\hat{\lambda}} \hat{A}(A) = & \hat{A}(A + \delta A)
\end{array} \tag{3.4.5}$$

[9] 変形量子化理論において, この場の理論の意味でのゲージ変換の対応物はないが, 変形量子化理論の 「ゲージ変換」に含まれていると考えても良い.

これは, ゲージ変換で割った代数 ($\leftrightarrow$ 物理量) の間の写像 T が well-defined になるための条件である. この変換は, もともとのゲージ理論の gauge slice を 非可換なゲージ理論の gauge slice に移すとは限らない. 物理が等価であるとは, 物理的自由度の間に対応があれば良いのでそれは問題ない. 実際, これから作る A から $\hat{A}$ への写像は gauge slice を保たない. あとでそれを見ておく.

非自明なのは closed string の変数による表示と open string の変数による表示の DBI作用 ($U(1)$ の場合について) を結ぶ場の再定義などで, 上の等式 (3.4.5) を満たすものが存在するということである. これを次の章で示す.

さて等式 (3.4.5) の解となる写像 T を探す.

$$\begin{aligned} A'(A) &= \hat{A}(A) - A \\ \lambda'(A,\lambda) &= \hat{\lambda}(A,\lambda) - \lambda \end{aligned} \tag{3.4.6}$$

と定義する. 写像 T の定義より, $A'(A), \lambda'(A,\lambda) \in \mathcal{O}(\theta^1)$ である. 等式 (3.4.5) は λ の 1 乗, θ の 1 乗以下の式として,

$$A'_i(A+\delta_\lambda A) - A'_i(A) - \partial_i\lambda' = i[\lambda', A_i]_\theta + i[\lambda, A'_i]_\theta + i([\lambda, A_i]_\theta - [\lambda, A_i]) \tag{3.4.7}$$

と書ける. まずこの θ についての 1 次近似解として,

$$A'_i(A+\delta_\lambda A) - A'_i(A) - \partial_i\lambda' = i[\lambda', A_i] + i[\lambda, A'_i] - \frac{1}{2}\theta^{kl}\{\partial_k\lambda, \partial_l A_i\} \tag{3.4.8}$$

となり,

$$\begin{aligned} A'_i(A) &= -\frac{1}{4}\theta^{kl}\{A_k, \partial_l A_i + F_{li}\} \\ \lambda'(A,\lambda) &= \frac{1}{4}\theta^{ij}\{\partial_i\lambda, A_j\} \end{aligned} \tag{3.4.9}$$

がその 1 次近似解となっていることが確認できる. $\hat{A}_i(A)$ から (3.4.2) , ビアンキ恒等式を使って,

$$\hat{F}_{ij} = F_{ij} + \frac{1}{4}\theta^{ij}(2\{F_{ik}, F_{jl}\} - \{A_k, D_l F_{ij} + \partial_l F_{ij}\}) + \mathcal{O}(\theta^2) \tag{3.4.10}$$

となることも計算できる.

それらの 1 次近似解を使って, 任意の θ のオールオーダーでの写像 T の, θ に関する微分方程式を得ることができる. よって写像 T の 「存在」は言える. [10] (3.4.7), (3.4.9), (3.4.10) について, 写像 T を A_θ から $A_{\theta+\delta\theta}$ への写像と思い直す. つまり,

$$\begin{array}{ccccc} A \longrightarrow A_\theta & & \hat{A} \longrightarrow A_{\theta+\delta\theta} & & A' \longrightarrow \delta A_\theta = \delta\theta^{kl}\frac{\partial}{\partial\theta^{kl}}A_\theta \\ \lambda \longrightarrow \lambda_\theta & & \hat{\lambda} \longrightarrow \lambda_{\theta+\delta\theta} & & \lambda' \longrightarrow \delta\lambda_\theta = \delta\theta^{kl}\frac{\partial}{\partial\theta^{kl}}\lambda_\theta \\ [\quad,\quad] \longrightarrow [\quad,\quad]_\theta & & [\quad,\quad]_\theta \longrightarrow [\quad,\quad]_{\theta+\delta\theta} & & \end{array} \tag{3.4.11}$$

と読み直す. すると,

$$\delta(f*g) = f(\delta\theta^{kl}\frac{\partial}{\partial\theta^{kl}}*)g = \frac{i}{2}\delta\theta^{kl}\partial_k f\partial_l g \tag{3.4.12}$$

[10] もちろん θ の大きいところでの巾展開の収束性は分からない.

より, (3.4.7) の第三項目は,

$$i([\lambda_\theta, A_{i,\theta}]_{\theta+\delta\theta} - [\lambda_\theta, A_{i,\theta}]_\theta) = -\frac{1}{2}\delta\theta^{kl}\{\partial_k\lambda_\theta, \partial_l A_{i,\theta}\}_\theta$$

と書き直せる. その結果, (3.4.7) は, (3.4.11) で書き直すと θ の一次近似式 (3.4.8) の積を $*$ 積に置き換えただけの形になり, $\delta\theta$ は微小変換なので, 一次近似解 (3.4.9), (3.4.10) を (3.4.11) で書き直したものは exact となる. よって, θ に関する微分方程式は,

$$\delta A_i(A)_\theta = -\frac{1}{4}\theta^{kl}\{A_{k,\theta}, \partial_l A_{i,\theta} + F_{li,\theta}\}_\theta \tag{3.4.13}$$

$$\delta\lambda(A,\lambda)_\theta = \frac{1}{4}\theta^{ij}\{\partial_i\lambda_\theta, A_{j,\theta}\}_\theta \tag{3.4.14}$$

$$\delta F_{ij,\theta} = \frac{1}{4}\theta^{ij}(2\{F_{ik,\theta}, F_{jl,\theta}\}_\theta - \{A_{k,\theta}, D_{l,\theta}F_{ij,\theta} + \partial_l F_{ij,\theta}\}_\theta) \tag{3.4.15}$$

となる.

最後にこの写像が gauge slice を保たないことを θ, λ の無限小レベルで見ておく. ここで非可換なゲージ変換も群にはなっていることを注意する. これはもともとのゲージ変換で Lie bracket を $*$ 積入りのものに変えるだけなので当然である.

$$(\delta_\lambda\delta_{\lambda'} - \delta_{\lambda'}\delta_\lambda)A_i = \delta_{i[\lambda,\lambda']}A_i$$

はどちらの場合でも成り立つ. gauge slice に関しては,

$$\begin{aligned}[\lambda+\delta\lambda, \lambda'+\delta\lambda']_{\theta+\delta\theta} - ([\lambda,\lambda]_\theta + \delta[\lambda,\lambda']) &= [\lambda,\lambda']_{(\theta+\delta\theta)-\theta} + [\delta\lambda,\lambda'] + [\lambda,\delta\lambda'] - \delta([\lambda,\lambda']) \\ &= \frac{i}{4}\delta^{kl}(\{\partial_k\lambda, \delta_{\lambda'}A_l\}_\theta - \{\partial_k\lambda', \delta_\lambda A_l\}_\theta)\end{aligned}$$

となっている. gauge slice を保たないということは, 今作った A から $\hat{A}$ への写像と等価な別の A から $\hat{A}+\delta_{\hat{\lambda}}$ への写像が存在するということである. ここで 「別」とは, 2 つの写像が異なる物理的自由度の組を結びつけるという意味である. よって今作った写像以外にも (3.4.5) を満たす写像は存在することが分かる.

3.4.2 二つの表示による U(1) DBI 有効作用の等価性

ここで, 二つの表示による U(1) 有効 DBI 作用が上の場の再定義によって結びついていることを見る. しかし, DBI 有効作用は 弦理論の mass scale より小さい運動量の物理を見ているので, そもそも作用を展開したときの ∂F の項などは意味を持たない. よって作用の間の等価性を見る時, ∂F の項は無視する. 同様に, 表面項も DBI 有効作用の段階で無視されているので見ない.

さて, 比べる作用は, closed string の変数による作用

$$\mathcal{L}_{DBI} = \frac{1}{g_s(2\pi)^p(\alpha')^{\frac{p+1}{2}}}\sqrt{\det(g+2\pi\alpha'(B+F))} \tag{3.4.16}$$

と, open string の変数による作用

$$\hat{\mathcal{L}}_{DBI} = \frac{1}{G_s(2\pi)^p(\alpha')^{\frac{p+1}{2}}}\sqrt{\det(G+2\pi\alpha'\hat{F})}, \quad \text{積は } *_{\theta_0} \text{ 積} \tag{3.4.17}$$

で, g_s, G_s, g, G, B を定数とし, F, $\hat{F}$ を場とする. G_s は, open string の結合定数であり, $F=\hat{F}=0$ で作用 (3.4.16), (3.4.17) の値が等しくなるように決める. (作用の F, $\hat{F}$ についての展開の leading の定数を等しくなるようにするということ.) つまり,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{DBI}(F=0) &= \frac{1}{g_s(2\pi)^p(\alpha')^{\frac{p+1}{2}}}\sqrt{\det(g+2\pi\alpha' B)} \\ \hat{\mathcal{L}}_{DBI}(\hat{F}=0) &= \frac{1}{G_s(2\pi)^p(\alpha')^{\frac{p+1}{2}}}\sqrt{\det G}\end{aligned} \tag{3.4.18}$$

の二つが等しいことを要請して,

$$G_s = g_s\left(\frac{\det G}{\det(g+2\pi\alpha' B)}\right)^{\frac{1}{2}} = g_s\left(\frac{\det G}{\det g}\right)^{\frac{1}{4}} = g_s\left(\frac{\det(g+2\pi\alpha' B)}{\det g}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.4.19}$$

また, これよりこの DBI 作用を展開した時の F^2 の係数を $1/4g_{YM}^2$ と定義することによって YM 結合定数が決まり,

$$\frac{1}{g_{YM}^2} = \frac{1}{G_s(2\pi)^p(\alpha')^{\frac{p+1}{2}}}(2\pi\alpha')^2 = \frac{(\alpha')^{\frac{3-p}{2}}}{(2\pi)^{p-2}g_s}\left(\frac{\det(g+2\pi\alpha' B)}{\det G}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.4.20}$$

二つの作用 (3.4.16), (3.4.17) を比べるのに, θ のオールオーダーについて直接書き換えるのは, 計算上不可能に近い[11] ので, 二つの間の連続変形を作り, その微小変形に対して作用が不変 (等価) であることを微分方程式 (3.4.13) (3.4.14) (3.4.15) を使って示す.

連続変形のパラメーターを Φ とし, その中間の作用を

$$\mathcal{L}_{DBI,\theta} = \frac{1}{G_{s,\theta}(2\pi)^p(\alpha')^{\frac{p+1}{2}}}\sqrt{\det(G_\theta + 2\pi\alpha'(F_\theta+\Phi))}, \quad \text{積は } *_\theta \text{ 積} \tag{3.4.21}$$

とする. これにより二つの間の path をつくるので, $\Phi = B$ で $\theta = 0$, $\Phi = 0$ で $\theta = \theta_0$ とする.

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{L}_{DBI}(& g_s, & g, & B, & 0) \\ & & \Downarrow & & \\ \mathcal{L}_{DBI,\theta}(& G_{s,\theta}, & G_\theta, & \Phi, & \theta) \\ & & \Downarrow & & \\ \hat{\mathcal{L}}_{DBI}(& G_s, & G, & 0, & \theta_0) \end{array} \tag{3.4.22}$$

ある $\Phi \in [0,B]$ での $G_{s,\theta}$, G_θ , θ は, path をつなぐというだけなら何でも良いが, Φ の変化に対して作用が等価であり続ける $G_{s,\theta}$, G_θ があってほしい. さてもともと G , G_s はそれぞれ (3.2.9), (3.4.19) によって決められていた. その G を $G_\theta + 2\pi\alpha'\Phi$ に変えることによって, G , G_s を自然に定義してみる. つまり,

$$\begin{aligned}\frac{1}{G_{\theta,ij}+2\pi\alpha'\Phi_{ij}} + \frac{\theta^{ij}}{2\pi\alpha'} &= \left(\frac{1}{g+2\pi\alpha' B}\right)^{ij} \\ G_{s,\theta} &= g_s\left(\frac{\det(G_\theta+2\pi\alpha'\Phi)}{\det(g+2\pi\alpha' B)}\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned} \tag{3.4.23}$$

[11] 実際, 微分方程式 (3.4.13) (3.4.14) (3.4.15) を一般的に解くのが不可能に近い.

実はこれでうまくいく. また, (3.4.23) の上の式より, Φ と θ は $1:1$ に対応している (片方を決めればもう片方が決まる) ので, Φ を動かすと思う変わりに $\theta \in [0, \theta_0]$ を動かすと考える. 示すことは $\mathcal{L}_{DBI,\theta}$ を θ で変分して,

$$\delta \left[\frac{1}{G_{s,\theta}} \det(G_\theta + F_\theta + \Phi)^{\frac{1}{2}} \right] = \mathcal{O}(\partial F_\theta) + \text{表面項} \tag{3.4.24}$$

である. 実際, $\delta G_\theta + \delta\Phi$, $\delta G_{s,\theta}$ が (3.4.23) より計算できるので, あと $U(1)$ の場合の (3.4.15) を使って (3.4.24) を示すことができる.

この結果について少しコメントする.

- Φ と作用の対称性について. 簡単のため $\alpha' \to 0$ 極限 ($g_{ij} \to 0$ はとらない) で, 作用 $\mathcal{L}_{DBI,\theta}$ (3.4.21) を展開すると,

  $$\mathcal{L}_{YM,\theta} = \frac{1}{4g^2_{YM,\theta}} \sqrt{G} G^{ik} G^{jl} \operatorname{Tr}(F_\theta + \Phi)_{ij} *_\theta (F_\theta + \Phi)_{kl}$$

  となる. $B = 0$ だと

  $$\mathcal{L}_{YM,\theta_0} = \frac{1}{4g^2_{YM,\theta_0}} \sqrt{G} G^{ik} G^{jl} \operatorname{Tr} F_{ij,\theta_0} *_{\theta_0} F_{kl,\theta_0}$$

  で, $\theta = 0$ では

  $$\mathcal{L}_{YM} = \frac{1}{g^2_{YM}} \sqrt{g} g^{ik} g^{jl} \operatorname{Tr}(F + B)_{ij} (F + B)_{kl}$$

  である. B 場は field strength F の期待値と思えるので magnetic flux と言える. (普通無限遠で F の期待値が 0 となるように B を決める.) 非可換性の効果は (巾展開の収束性などどちらかの表示しか well-defined にならないときなどもあるが一般には) B 場に押しつけることもできるし θ の方に押しつけることもできる. しかしここの議論からさらにその中間の (Φ, θ) による表示もあると言える. 実際 [12] では back ground によらない作用の表示を考えるには, Yang-Mills 作用のこのような拡張が自然であることが主張されているし, [4.4] の議論で触れるように T-duality で別の理論に移ると, 一般にはこの Φ を持った作用になり, [1][22] では等価な理論として行列模型の作用の形を Φ を持った形に拡張している.

- (3.2.14) の $\alpha' \to 0$ 極限では, closed string の変数による $\mathcal{L}_{DBI}$ は g の周りで巾展開できない. 一方 $\hat{\mathcal{L}}_{DBI}$ は open string metric G_{ij} の周りで巾展開することができる. よってこの極限では非可換な有効作用 $\hat{\mathcal{L}}_{DBI}$ の方が場の理論として良い表示になっている.

  [2] のように行列模型をコンパクト化する時も, 実はある弦理論的な理由からコンパクト化の周期の小さい極限に興味があり, それはここでの $\alpha' \to 0$ 極限に対応している. [3.5] ではトーラス上の理論の非可換性の弦理論的な説明を行なう.

3.5 非可換トーラスと 弦理論の B 場の関係

2 章では行列模型をコンパクト化することによって非可換性が現れることを見た. 一方, 3 章では [3.2] で, 弦理論の open string の vertex operator に注目することにより非可換性が現れること

を見た. その非可換性は弦理論の B 場の寄与によるものだった. その議論は空間がトーラスの時もそのまま応用できる.

しかしここではコンパクト化と非可換トーラスのもう少し直観的な関係を弦理論で考える. B 場がある時に [2.2.1] のような Fourier 変換をすると, 非可換性が現れることを見る.

[3.5.1] ではその Fourier 変換と T-dual の違いについて考える. [3.5.2] で Fourier 変換から直観的に非可換性を導く. そしてその議論と [3.2] の議論の関係を [3.5.3] で考える.

3.5.1 Fourier 変換と T-Dual

Fourier 変換も T-dual も座標と運動量を入れ換える変換である. よって [3] ではコンパクト化した D-brane の T-dual として Fourier 変換が使われた. [2.2.1] でも Fourier 変換を使ったが, それによって得られた結果は T-dual そのものであった. しかし一般に B 場があるときには T-dual と Fourier 変換は異なるということである. 非可換性は, Fourier 変換の方によって現れる.

弦理論から, その有効理論である場の理論を出す時, 場の理論は点粒子の理論なので, 弦の長さがもろに効いてくるような理論であっては意味がない. 理論の変数をうまく定義して, 弦は限りなく点に近くなり (理論が local), 共役な運動量は限りなく連続になることが望まれる. トーラス上において, 弦の巻き付き数と運動量は両方量子化されているが, コンパクト化の半径を限りなく小さくしたとき, 弦が巻き付くためのエネルギーは無限小となり巻き付き数は無限に大きいものまで物理に寄与し, 運動量は大きく離散化される. よって, 空間の半径ができるだけ大きくなるように理論の変数を変換する. それがこの場合 Fourier 変換である.

次にこの極限で巻き付き数と運動量を入れ換える T-dual を 2 次元トーラスについて考える. ここでその半径を $(R_1, R_2) \to (1, 1)$ とするために, metric の方を

$$g = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} R_1^2 & 0 \\ 0 & R_2^2 \end{pmatrix}$$

と定義する (4 章 (4.1.1) 参照). ただし R_1, R_2 は string length $l_s = \sqrt{\alpha'}$ で割って無次元化する. [4.1] で見るように

$$E := g + B = \begin{pmatrix} R_1^2 & B \\ -B & R_2^2 \end{pmatrix}$$

を定義して, E は T-duality group によって $E' = (AE+B)(CE+D)^{-1} \quad g = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right) \in SO(d, d|\mathbb{Z})$ の変換をし, 運動量と巻き付き数を入れ換える典型的な T-dual は $J = \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{smallmatrix}\right)$ であるので,

$$E \longrightarrow \frac{1}{E} = \frac{1}{R_1^2 R_2^2 + B^2} \begin{pmatrix} R_2^2 & -B \\ B & R_1^2 \end{pmatrix}$$

と変換される. 今 (3.2.14) に対応する極限を考えると, ここで新しく定義した g は 3 章の g を α' で割ってあるものなので, $g \sim \epsilon^{\frac{1}{2}} \to 0$. よって

$$R_1 = R_2 \to 0, \qquad B : fixed \tag{3.5.1}$$

の極限をとることに対応する. metric は

$$g' = \frac{1}{R_1^2 R_2^2 + B^2} \begin{pmatrix} R_2^2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & R_1^2 \end{pmatrix} \overset{R_1/B=R_2/B\to 0}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} R_2^2/B^2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & R_1^2/B^2 \end{pmatrix}$$

となる. よって T-dual をとっても場の理論の記述のよいところには移らない. $B = 0$ の時は, $g = \left(\begin{smallmatrix} R_1^2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & R_2^2 \end{smallmatrix}\right)$ を $g' = \left(\begin{smallmatrix} 1/R_1^2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1/R_2^2 \end{smallmatrix}\right)$ に移すようになっていて, T-dual と Fourier 変換が一致していることが分かる.

次に Fourier 変換と T-dual において, 座標 x^i と運動量 p_i の関係を見る.

- Fourier 変換を考える時, 2 章などでまず座標 x^i を新しく移る相空間の運動量を p_i' と同一視し, それを逆 Fourier 変換して新しい空間座標の x'^i に移った. よってもともとの空間の x^i に metric (内積) g_{ij} が入っていたとすると, それを新しい相空間の p_i' の内積 G^{ij} と同一視する. そして新しい座標 x'^i の内積は G_{ij} と逆行列をとる. よって荒い言い方をすれば, **metric** について逆行列をとることが **Fourier** 変換であると言える.

- T-duality とは一般に弦についてその Hamiltonian を保つ変換である. 今議論している T-dual はその中でも典型的な弦の (トーラス上の) 巻き付き数と運動量を入れ換える変換であった. ここで運動量とは Hamiltonian により決まる弦の座標 X^i の正準共役量である. closed string について [4.1] でやる (4.1.3) ように

$$P_i = \frac{1}{2\pi}(g_{ij}\dot{X}^j + B_{ij}\acute{X}^j) = \frac{1}{2\pi}p_i + \mathcal{O}(\alpha') \tag{3.5.2}$$

  である. ここで P_i は弦の量子座標 X^i の正準共役量で, p_i はその zero mode の重心運動量である. これは Fourier 変換のときの $p_i \sim g_{ij}\dot{x}^j$ とは異なる. これが T-dual と Fourier 変換の違いである. B_{ij} で一致することが分かる.

3.5.2 $B \neq 0$ のトーラスと非可換トーラス

ここでトーラス上の非可換性が B 場の効果である直観的な説明を 2 つ紹介する.

[B 場のある T^2 の D1-brane]

1 つ目は, B 場の存在する 2 次元トーラス上の D0-brane の 1 方向について T-dual をとって $D1$-brane になったものについて考える [15].

もともとのトーラスの周期を R_1, R_2 として, この T-dual は 複素 Kähler form $B + iR_1R_2$ と複素構造 $\tau = R_2/R_1$ を入れ換える.

もともとのトーラス上で N 個の D0-brane であったとすると 1 方向 T-dual をとった時, N 個の D1-brane となり, その (T-dual をとった) D1-brane の空間的に広がっている方向を x^1 とし, もう 1 方向を x^2 とする. この新しくできたトーラスを T_1^2 し, T-dual をとった 1 方向の周期は $0 \leq x^1 \leq \frac{1}{R_1}$ となる.

2 章の議論と同様 D-brane の間をつなぐ open string の zero mode (つまり長さに比例する質量を持ったひも) を考える. open string は T_1^2 上の metric を感じてその最短距離 (その方向を

x^2 方向とする) を走る. この open string (の zero mode) の場の理論を考える. つまり T_1^2 上の open string の状態をすべて足しあげて作用を考える. T_1^2 の被覆空間 $\tilde{T}_1^2$ をとり open string の端点の座標を $(x^1, x^2) = (x^1, w_2 R_2)$ と表す. $\tilde{T}_1^2$ 上の 2 点 $x = (x^1, w_2 R_2)$, $x = (x^1, w_2' R_2)$ の間をつなぐ open string は $w_2 - w_2'$ 回巻き付いている. このような open string の状態の足しあげについて, x^1 方向は普通に積分すれば良い. しかし今 $R_1, R_2 \to 0$ の極限を考える時, このような巻き付いた状態の寄与が多くなり, 逆に x^2 方向の運動量は大きく量子化されてしまうので x^2 方向については Fourier 変換をとることを考える. よって x^2 方向を運動量 p_2 と思いたい.

今 x^2 方向の並進対称性[12] より, 向き付けられた open string についてその始点を $x^2 = 0$ に移動させることができる. この時 open string の質量はその終点の座標に一致し, それを運動量と同一視して Fourier 変換をとることができる.

しかし注意することは今 B 場の効果により上の並進対称性は「変形」している. 例えば, $\tilde{T}_1^2$ 上の点 $(x^1, w_2 R_2)$ は $(x^1 - w_2 B/R_1, 0)$ と同一視される. これが空間の非局所性を引き出すことをこれから見る.

今この open string の場の理論について 3 点 vertex を考えてみる. (n 点への拡張は自明である.) open string の場の vertex はそれの持つ Chan-Paton factor の自由度に対するゲージ不変性より向き付けられた open string の端が一致して閉じていなければならない (図 3.5(a)). この vertex に対応する open string の world sheet の相互作用を (図 3.5(b)) に表した. これを並進対

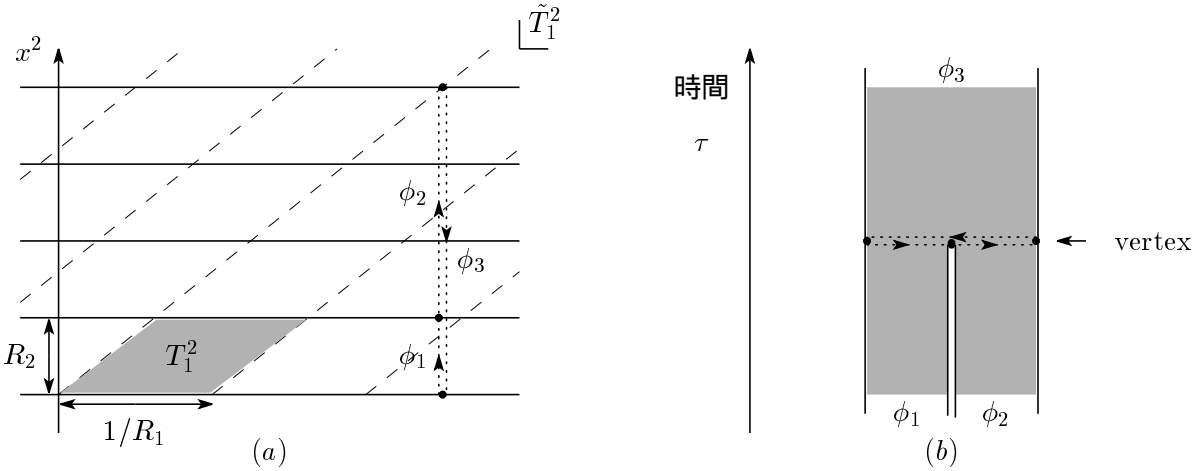

図 3.5: (a) T_1^2 の被覆空間 $\tilde{T}_1^2$ 上の open string の 3 点 vertex. (b) 3 点 vertex の world sheet での図. 点線が 3 点 vertex を表す. これを写像により $\tilde{T}_1^2$ に埋め込んだものが (a).

称性によりそれぞれの open string の始点を $w_2 = 0$ に同一視すると (図 3.6), 3 点 vertex につい

[12] もちろん x^1 方向の並進対称性もある.

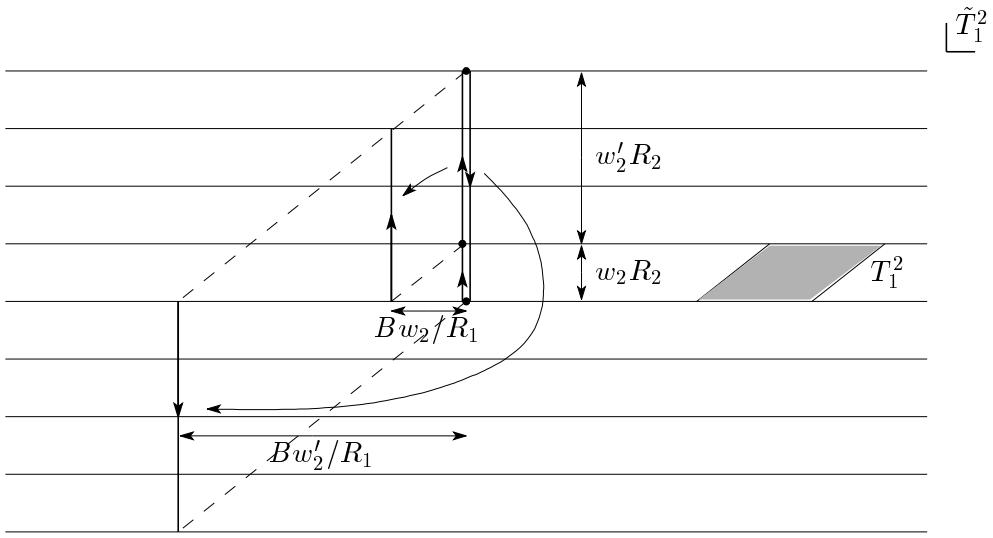

図 3.6: 3 点 vertex の ϕ_2, ϕ_3 をトーラス T_1^2 の周期の方向に並行移動し, 3 点 vertex を成す 3 つの open string の始点を $w_2 = 0$ においた.

ての作用は

$$\begin{aligned} S_{int} &= \sum_{w_2, w'_2} \int dx^1 \phi_1(x^1 - \frac{B(w_2 + w_2')}{R_1}, -w_2 - w_2')\phi_2(x^1, w_2)\phi_3(x^1 - Bw_2/R_1, w_2') \\ &= \sum_{w_2, w'_2} \int dx^1 \left(\exp\left(-\frac{B(w_2 + w_2')}{R_1} \frac{\partial}{\partial x^1} \right) \phi_1(x^1, -w_2 - w'_2) \right) \\ &\qquad \cdot \phi_2(x^1, w_2) \exp\left(-\frac{Bw_2}{R_1} \frac{\partial}{\partial x^1} \right) \phi_3(x^1, w'_2). \end{aligned}$$

となり, それを Fourier 変換して x^1, また新しくできる座標 x^2 [13] を適当に rescale して,

$$\begin{aligned} S_{int} \sim \int dx^1 dx^2 \ \exp\left(-\frac{B}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x^{1\prime\prime}} \frac{\partial}{\partial x^{2\prime\prime}} \right) \phi_1(x^{1\prime\prime}, x^{2\prime\prime}) \\ \cdot \exp\left(\frac{B}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x^{1\prime}} \frac{\partial}{\partial x^{2\prime}} \right) \phi_2(x^1, x^{2\prime})\phi_3(x^{1\prime}, x^2) \Big|_{x^{i\prime} = x^{i\prime\prime} = x^i}. \end{aligned}$$

となる. 普通の $*$ 積と比べて少し形が異なるのは, Fourier 変換を x^2 方向のみとり, x^1 方向は T-dual で 1 次元増やしたからである. しかし, 非可換性が現れる様子が直観的に見えた.

[B 場のある 2 次元トーラス上の D0-brane]

もう一つの説明として, B 場のある 2 次元トーラス T^2 上の D0-brane の間をつなぐ open string の zero mode について同様に弦の場の n 点 vertex を考え, それを 2 次元方向に T-dual をとったものが $*$ 積になることを見る [16][5]. D0-brane の数を N とする.

[13] もともとのトーラスの x^2 とは異なる.

まず T^2 上の 1 つの open string についてその B 場の影響を考える. world sheet は時間を $-\infty < \tau < +\infty$, またその時間を固定した時の open string のパラメーターを $0 \leq \sigma \leq \pi$ とし (図 3.7(a)), 作用は Lorentzian で

$$S_{LWS} = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\tau \int_0^\pi d\sigma [g_{ij}\partial_\alpha X^i \partial^\alpha X^j + 2\pi\alpha' \epsilon B_{ij} \partial_\alpha X^i \partial_\beta X^j]$$

である. 共役運動量は

$$P_i = \frac{\delta}{\delta \partial_\tau X^i} S_{WS} = \frac{1}{2\pi}(g_{ij}\dot{X^j} + B_{ij}\acute{X^j})$$

で, これより Hamiltonian は,

$$H_{WS} = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi d\sigma [(2\pi P_k - B_{ki}\acute{X^i}) g^{kl} (2\pi P_l - B_{lj}\acute{X^j}) + \acute{X^i} g_{ik} g^{kl} g_{lj} \acute{X^j}]$$

となる. ただし $\dot{X^j} = \partial_\tau X^j = \partial^\tau X^j$, $\acute{X^j} = \partial_\sigma X^j = -\partial^\sigma X^j$ とした. これらは弦の $\sigma = 0, \pi$ での境界条件を使っていないので [4.1] で考える closed string の時と同じである.

この H_{WS} の形より, B 場の中の open string の運動は $B = 0$ の時の $2\pi P_i$ を $2\pi P_i - B_{ij}\acute{X^j}$ に変えた Hamiltonian に制御されることが分かる. $X(\sigma)$ と $P(\sigma)$ の交換関係

$$[X^i(\sigma), P_j(\sigma')] = i\delta^i_j \delta(\sigma - \sigma') \ , \ [X^i(\sigma), X^j(\sigma')] = [P_i(\sigma), P_j(\sigma')] = 0$$

から共役運動量を $P_i(\sigma) = -i\frac{\delta}{\delta X^i(\sigma)}$ と表し, それに対応して $P_i(\sigma) - \frac{i}{2\pi} B_{ij} \acute{X^j}(\sigma) =: \frac{\delta_B}{\delta X^i(\sigma)}$ と定義すると, $\frac{\delta_B}{\delta X^i}$ は次のように書き換えることができる.

$$\begin{aligned} \frac{\delta_B}{\delta X^i(\sigma)} :=& \frac{\delta}{\delta X^i(\sigma)} - \frac{i}{2\pi} B_{ij} \acute{X^j}(\sigma) \ \left(= \frac{1}{2\pi} g_{ij} \dot{X^j}(\sigma) \right) \\ &= U_B \frac{\delta}{\delta X^i(\sigma)} U_B^{-1} \ , \\ U_B &:= \exp\Big(\frac{i}{4\pi} \int_0^\pi d\sigma B_{ij} X^i(\sigma) \frac{\partial}{\partial\sigma} X^j(\sigma) \Big) \ . \end{aligned} \tag{3.5.3}$$

よって $B = 0$ の時の Hamiltonian を $H_{WS,0}$ とすると, これが $X, \frac{\delta}{\delta X}$ の多項式で書けていることに注意して

$$H_{WS} = U_B H_{WS,0} U_B^{-1}$$

と表すことができ, これより H_{WS} に対応する弦の波動関数を $\phi_B(X)$, $H_{WS,0}$ に対応する $B = 0$ の時の波動関数を $\phi(X)$ とすると

$$\phi_B(X) = U_B \phi(X)$$

と表されることが分かる. 以下 Fourier 変換 (展開) を考えるので $\phi(X)$ の表現で考える.

以上のことを使って次に (B 場のある) 2 次元トーラス T^2 上の open string の場の理論について考える. 上の議論での弦の波動関数 $\phi_B(X), \phi(X)$ を弦の場として格上げさせる. T^2 の被覆空間 $\tilde{T}^2$

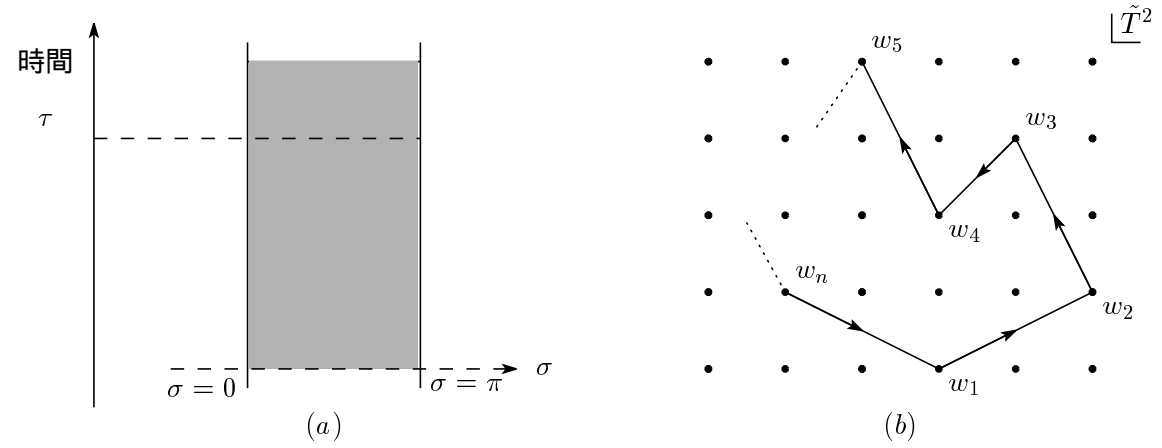

図 3.7: (a) open string の world sheet. 太線は open string の状態を表す. $z = \exp(\tau + i\sigma)$ と (共形) 変換して, [3.2] で扱った上半平面の open string に移ることができる. (b) $\tilde{T}^2$ 上の n 点 vertex.

をとって, その格子点 a を (w_a^1, w_a^2) とし, 一般的に $\tilde{T}^2$ 上の n 点 vertex を考える (図3.7(b)). これは弦の world sheet では (3.8(a)) のような物理を考えることに対応する. $w_a, w_{a+1} \in \tilde{T}^2$ の間をつなぐ open string の場は今までと同様 zero mode に注目すると $\phi_B(X) = \phi_B(w_{a+1}, w_a) = \phi_B(w_{a+1} - w_a)$ と表せる. このとき,

$$\phi_B(w_{a+1}, w_a) = U_B^{a+1,a}\phi(w_{a+1}, w_a)$$
$$U_B^{a+1,a} := \exp\Big(\frac{i}{4\pi}\int_0^\pi d\sigma B_{ij}X^i(\sigma)\frac{\partial}{\partial\sigma}X^j(\sigma)\Big)$$

となる. ただし積分の中の X は $X^i(\sigma = 0) = w_a^i$, $X^i(\sigma = \pi) = w_{a+1}^i$ で $X^i(\sigma), 0 \le \sigma \le \pi$ は target space 上その間の直線に値をとる. この線分に囲まれた target space の領域 (n 角形) を V と表す.

$$\begin{aligned}&\mathrm{tr}\phi_B(w_n - w_{n-1})\phi_B(w_{n-1} - w_{n-2})\cdots\phi_B(w_2 - w_1)\phi_B(w_1 - w_n)\\ &\quad = \mathrm{tr}\big(U_B^{n,n-1}U_B^{n-1,n-2}\cdots U_B^{2,1}U_B^{1,n}\big)\cdot\phi(w_n - w_{n-1})\phi(w_{n-1} - w_{n-2})\cdots\phi(w_2 - w_1)\phi(w_1 - w_n)\end{aligned}$$

であり[14] , $\big(U_B^{n,n-1}U_B^{n-1,n-2}\cdots U_B^{2,1}U_B^{1,n}\big)$ は n 点 vertex の囲む領域 I での B の積分を表面項に直した形になっている.

$$e^B := \exp\Big(\frac{i}{4\pi}\int_D B_{ij}dX^i \wedge dX^j\Big) = U_B^{n,n-1}U_B^{n-1,n-2}\cdots U_B^{2,1}U_B^{1,n} .$$

ここで D は world sheet の disk を意味するが積分の値は V にのみより world sheet の変形にはよらない[15].

[14] U_B はゲージ群としては $U(1)$ 部分, またそれぞれの U_B は異なる world sheet の変数を持つので, 異なる ϕ とは可換である.

[15] 今 target space の T^2 が world sheet と同じ 2 次元なので計算が簡略化されている一方, D と V の区別が曖昧である. これらの議論は target space が一般の次元 d のトーラスの場合にも簡単に拡張できる. その時積分は V を X で引き戻した X^*V について D 上とる.

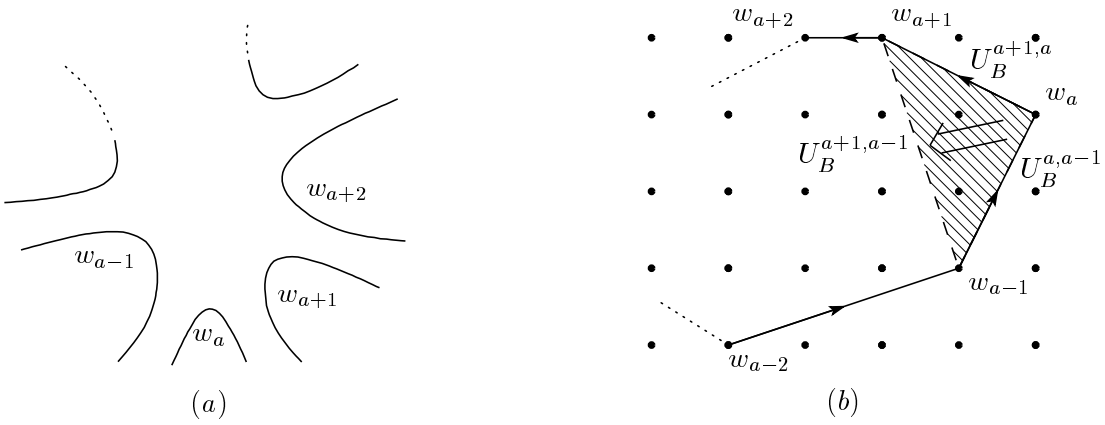

図 3.8: (a) n 点 vertex の world sheet の点 w_a で相互作用した図. (b) w_a について先に和をとるため, w_a 依存性を 3 角形の面積と $U_B^{a+1,a-1}$ に分ける.

以上で B_{ij} 場がある時の $\tilde{T}^2$ 上の n 点 vertex は, B_{ij} 場がないときと比べて B_{ij} 場を I で積分した値を位相としてひろうことが分かった.

次に前と同様この n 点 vertex の target space 上の場の理論を考える. その作用は

$$S_{int} = \sum_{w_a^i} e^B \operatorname{tr} \phi(w_n - w_{n-1}) \cdots \phi(w_1 - w_n) \ . \tag{3.5.4}$$

つまりすべての n 点 vertex について足しあげるため, 各点 w_a について和をとる. これは次のように計算できる. まず点 w_a について始めに積分することを考える. これは world sheet の物理では弦 $\phi(w_{a+1} - w_a)$ と弦 $\phi(w_a - w_{a-1})$ が始めに相互作用することを表す (図 3.8(a)). しかし open string の associativity よりどの w_a が先に相互作用しても理論は不変である. さて target space 側で見てまず積分 $U_B^{a+1,a} U_B^{a,a-1}$ を 3 角形 (w_{a-1}, w_a, w_{a+1}) の積分と $U_B^{a+1,a-1}$ に分ける (図 3.8(b)). T^2 の周期を 2π として 3 角形 (w_{a-1}, w_a, w_{a+1}) の積分は

$$\frac{1}{2} \int B_{ij} dX^i \wedge dX^j = -\frac{1}{2} B (2\pi)^2 \begin{vmatrix} w_{a+1}^1 - w_a^1 & w_a^1 - w_{a-1}^1 \\ w_{a+1}^2 - w_a^2 & w_a^2 - w_{a-1}^2 \end{vmatrix} \ , \quad B := B_{12}$$

となるので (3.5.4) は

$$S_{int} = \cdots U_B^{a+1,a-1} \sum_{w_a^1, w_a^2} \phi(w_{a+1} - w_a) e^{-\pi i B \begin{vmatrix} w_{a+1}^1 - w_a^1 & w_a^1 - w_{a-1}^1 \\ w_{a+1}^2 - w_a^2 & w_a^2 - w_{a-1}^2 \end{vmatrix}} \phi(w_a - w_{a-1}) \cdots \tag{3.5.5}$$

と書ける. 前の議論, また [2.2.1] の議論と同様[16] 新しくできる空間の座標を (x^1, x^2) として, $\phi(w_{a+1} - w_a) = \int dx \phi(x) e^{-i(w_{a+1} - w_a)x}$ と逆 Fourier 変換したものを代入して $\sum_{w_a^1, w_a^2}$ で足しあげることにより

$$S_{int} = \cdots U_B^{a+1,a-1} \int dx \phi_{a+1,a}(x) e^{\pi i B \epsilon^{ij} \overleftarrow{\partial_i} \overrightarrow{\partial_j}} \phi_{a,a-1}(x) e^{-i(w_{a+1} - w_{a-1})x} \cdots$$

[16] [41] で B 場がない時の n 点 vertex の議論をした. また [41] ではさらにその量子論を考えた.

となり $\phi(x_{a+1}-x_a)$ と $\phi(x_a-x_{a-1})$ の x_a での相互作用が Fourier 変換により $*$ 積に変わった. これを繰り返して

$$S_{int} \sim \int d^2x \,\mathrm{tr}\,\phi_{n,n-1} * \cdots * \mathrm{tr}\,\phi_{1,n}\ , \quad * = e^{\pi i B_{ij}\overleftarrow{\partial_i}\overrightarrow{\partial_j}}$$

となる. ここで [2.2.1] と同様, 並行移動不変性より w_a についての和 $\sum_{w_a^i}$ のうちの 1 つは無視する. (前の議論ではその自由度を使って open string の始点を $w_2=0$ に固定した.)

以上で B 場が存在する時トーラス上小さい体積の極限で open string の低エネルギー有効理論は Fourier 変換で移すことにより $*$ 積の理論になることが分かった. もともとのトーラスでの D0-brane の数が $N=1$ の時はベクトル束 (射影加群) は行列 ([2.4] での W) としては可換なので非可換性は $\Theta = B$ となる.

3.5.3 非可換トーラスと Open String の OPE

2 章の議論では, 行列模型にコンパクト化の条件 (2.2.19) を課したことから closed string の変数で理論を見た時, ある D-brane とその間をつなぐ open string の状態ができていて, それを [3.5.1] の意味で Fourier 変換すると Θ で特徴づけられる非可換な代数の理論になり, その時 Θ には T-duality group が作用するだけの不定性があるように見えるということだった.

[3.5.2] の議論を行列模型の話と結びつけると, closed string の変数で理論が 1 つの D0-brane であった時それを Fourier 変換すると $\Theta = B$ であると言うことになる.

今トーラスについて考えているトーラスのサイズの小さい極限は (3.2.14) と対応している. 正確にはそれを [4.1] でみる. この極限において closed string の変数での T-duality の作用と, Θ に作用する $SO(d,d\,|\mathbb{Z})$ の変換が Fourier 変換と可換であることは明らかである.

よってコンパクト化の条件から Θ に $SO(d,d\,|\mathbb{Z})$ が作用することを示せば, closed string の変数側で T-duality でつながるすべての状態がコンパクト化の条件から出るということが言える. それを示すのが 4 章の目的である. (2 章ではコンパクト化の条件から森田同値の条件が現れた.)

さて [3.2] では open string の vertex operator の OPE に注目してそれにとって自然な metric G_{ij} に移った. これをトーラスの時について考えると, (3.2.14) の極限で open string の tachyon vertex operator は (運動量が量子化され) 非可換トーラスの $\mathcal{A}=\{U_i\}$ と同一視できる. OPE が U_i 同士の非可換な積になる. g_{ij} から G_{ij} に移る時,

$$\Big(\frac{1}{g+B}\Big)^{ij}_S = G^{ij}$$

であった. S は対称部分をとることを表す. これを [3.5.1] の議論で考えると, $g+B$ の逆数をとることは T-dual をとったことを意味し, そのあと G^{ij} を G_{ij} にすることは Fourier 変換をとったことを意味する. 実際これを [3.5.2] の D0-brane の時と比べると, その場合と今の場合は closed string の変数で見た時, トーラス T^d の全方向に T-dual をとることによって結び付いている. その T-dual は ((3.2.14) の極限で) B を B^{-1} に変換するので [3.2] で $g+B$ の逆数をとった操作と完全に対応する.

第4章　T-Duality と 森田同値

射影加群の理論で森田同値という同値関係がある. その森田同値が, T-duality と等価, つまり森田同値によって結びつけられるものは T-duality で結びついていて, その逆も成り立っている, ということが Schwarz, Rieffel らによって示された [17] [22] . この章ではその証明について説明する. そのためにまず [4.1] で B 場があるときの T-duality を復習し, [4.2] で森田同値とそれに関係するものの定義とその弦理論的な対応物を説明する. そして [4.3] で T-duality → 森田同値, [4.4] で森田同値 → T-duality の証明をする. 最後に [4.5] で森田同値の弦理論的な解釈について, [2.4],[3.5] の時を含めてもう一度考える [8][9][12].

4.1　Target Space の T-Duality

まず 10 次元の target space のうちの d 次元がトーラスコンパクト化されている場合について, そこに巻き付く closed string を考える. そして T-duality がその energy spectrum を保つという要請から T-duality group による background g_{ij}, B_{ij} の変換を導く. 目標は (4.1.22) 式とする. そのあとそれを 3 章の open string の変数による表示に移す.

target space を $T^d \times \mathbb{R}^{10-d}$ とし, 直積なので T^d 上の理論と $\mathbb{R}^{10-d}$ 上の理論は decouple するのでそのトーラス T^d 側について考える. トーラス上の座標を X^i , $i = 0, ..., d-1$ とし, background g_{ij}, B_{ij} は, T^d 上の座標によらない定数とする.　($g_{im} = B_{im} = 0$, $m = d, ..., 9$)

作用は world sheet を cylinder　(時間:$-\infty < \tau < \infty$, $\sigma \in [0, 2\pi] \simeq S^1$) とし, その signature を Lorentzian で表し, conformal gauge をとると

$$S_{LWS} = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\tau \int_0^{2\pi} d\sigma [g_{ij}\partial_\alpha X^i \partial^\alpha X^j + 2\pi\alpha' \epsilon B_{ij} \partial_\alpha X^i \partial_\beta X^j]$$

で表される. 今トーラスの周期は $2\pi R^i$ であったとし, それをすべて 2π とするために background を次のように調節して変える.

$$\begin{cases} 2\pi R^i \frac{g_{ij}}{\alpha'} 2\pi R_j = 2\pi \hat{g}_{ij} 2\pi \\ 2\pi R^i (2\pi B_{ij}) 2\pi R_j = 2\pi \hat{B}_{ij} 2\pi \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \hat{g}_{ij} = \frac{R^i R^j}{\alpha'} g_{ij} \\ \hat{B}_{ij} = 2\pi R^i R^j B_{ij} \end{cases} . \qquad (4.1.1)$$

ここで, $\hat{g}_{ij}$, $\hat{B}_{ij}$ は両方無次元である.　(そうするために g_{ij} は α' で割ってある.) 以後トーラス上ではこの $\hat{g}_{ij}$,$\hat{B}_{ij}$ を g_{ij},B_{ij} と書くことにする[1]. X の quotient condition は

$$X^i \sim X^i + 2\pi a^i \qquad a^i \in \mathbb{Z} \quad : \text{巻き付き数}$$

[1] あとで定義する E について, $E_{ij} := \hat{g}_{ij} + \hat{B}_{ij} = \frac{R^i R^j}{\alpha'}(g_{ij} + 2\pi\alpha' B_{ij})$ となっている. これは [12] の notation と一致する.

であり, トーラス上の closed string の作用は

$$S_{LWS} = \frac{1}{4\pi}\int d\tau \int_0^{2\pi} d\sigma [g_{ij}\partial_\alpha X^i \partial^\alpha X^j + \epsilon B_{ij}\partial_\alpha X^i \partial_\beta X^j] \tag{4.1.2}$$

となる. 共役運動量は,

$$P_i = \frac{\delta}{\delta \partial_\tau X^i} S_{WS} = \frac{1}{2\pi}(g_{ij}\dot{X^j} + B_{ij}\acute{X^j}) = \frac{1}{2\pi}p_i + \mathcal{O}(\alpha') \tag{4.1.3}$$

ここで, $\dot{X^j} = \partial_\tau X^j = \partial^\tau X^j$, $\acute{X^j} = \partial_\sigma X^j = -\partial^\sigma X^j$ で, p_i は弦の重心運動量である.
Hamiltonian は,

$$\begin{aligned} H_{WS} &= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\sigma [4\pi \dot{X^i}P_i - g_{ij}\dot{X^i}\dot{X^j} + g_{ij}\acute{X^i}\acute{X^j} - 2B_{ij}\dot{X^i}\acute{X^j}] \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\sigma [-\dot{X^i}g_{ik}g^{kl}g_{lj}\dot{X^j} + 2\dot{X^i}g_{ik}g^{kl}(2\pi P_l - B_{lj}\acute{X^j}) + g_{ij}\acute{X^i}\acute{X^j}] \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\sigma [(2\pi P_k - B_{ki}\acute{X^i})g^{kl}(2\pi P_l - B_{lj}\acute{X^j}) + \acute{X^i}g_{ik}g^{kl}g_{lj}\acute{X^j}] \\ &=: L_{0L} + L_{0R} = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\sigma (P_L^2 + P_R^2) \end{aligned} \tag{4.1.4}$$

で, 運動量についての拘束条件は,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{2\pi} d\sigma P_i \acute{X^i} = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\sigma 2(2\pi P_k - B_{ki}\acute{X^i})g^{kl}g_{lj}\acute{X^j} \\ &=: L_{0L} - L_{0R} = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\sigma (P_L^2 - P_R^2) \end{aligned} \tag{4.1.5}$$

となる. よって,

$$\begin{aligned} L_{0L} &= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\sigma \frac{1}{2}[(2\pi P_k - B_{ki}\acute{X^i}) + \acute{X^i}g_{ik}]g^{kl}[(2\pi P_l - B_{lj}\acute{X^j}) + g_{lj}\acute{X^j}] \\ L_{0R} &= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\sigma \frac{1}{2}[(2\pi P_k - B_{ki}\acute{X^i}) - \acute{X^i}g_{ik}]g^{kl}[(2\pi P_l - B_{lj}\acute{X^j}) - g_{lj}\acute{X^j}] \end{aligned} \tag{4.1.6}$$

であり, viel bein を

$$\sum_{a=0}^{d-1} e_i{}^a e^a{}_j = g_{ij} \qquad \sum_{a=0}^{d-1} e_i{}^a (e^{-1})_a{}^j = \delta_i^j \qquad \sum_{a=0}^{d-1} (e^{-1})^i{}_a (e^{-1})_a{}^j = g^{ij} \tag{4.1.7}$$

で定義して [2] ,

$$P_{La} = \frac{1}{\sqrt{2}}[2\pi P_k + (g_{ki} - B_{ki})\acute{X^i})](e^{-1})^k{}_a \qquad P_{Ra} = \frac{1}{\sqrt{2}}[2\pi P_k - (g_{ki} + B_{ki})\acute{X^i})](e^{-1})^k{}_a \tag{4.1.8}$$

[2] 添字の左右は行列としての足を表す. $e_i{}^a$ に対して $e^a{}_j$ は転置行列を表す.

となる.

T-duality は α' 補正のモードを変えないので, ここで弦の zero mode に注目する. X の zero mode は測地線であり, 運動量は重心運動量 p_i のみをみればよく, それはトーラス上なので量子化されていた. つまり,

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} dX^i = \int_0^{2\pi} \acute{X}^i d\sigma = 2\pi a^i, \quad \acute{X}^i = \text{const} \longrightarrow \acute{X}^i = a^i \qquad a^i \in \mathbb{Z} \\ \exp\left(ip_i X^i\right) = \exp\left(ip_i (X^i + 2\pi a^i)\right) \longrightarrow 2\pi P_i = p_i = b_i \qquad b_i \in \mathbb{Z}\end{aligned} \tag{4.1.9}$$

よって, (4.1.8) は

$$P_{La} \to p_{La} = \frac{1}{\sqrt{2}}[b_k + (g_{ki} - B_{ki})a^i](e^{-1})^k{}_a \qquad P_{Ra} \to p_{Ra} = \frac{1}{\sqrt{2}}[b_k - (g_{ki} + B_{ki})a^i](e^{-1})^k{}_a \tag{4.1.10}$$

となり, H_{WS} は (4.1.4) より,

$$\begin{aligned} H_{WS} &= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\sigma[(b - Ba)^t g^{-1}(b - Ba) + a^t g a \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a^t & (b - Ba)^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b - Ba \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a^t & b^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & B \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ee^t & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (e^t)^{-1}e^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & B \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}^t\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a^t & b^t \end{pmatrix} T_{(g,B)} T^t_{(g,B)}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} (= \frac{1}{2}(p^2_{La} + p^2_{Ra})\ ) \end{aligned} \tag{4.1.11}$$

$$T_{(g,B)} := \begin{pmatrix} \mathbf{1} & B \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (e^t)^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & B(e^t)^{-1} \\ \mathbf{0} & (e^t)^{-1} \end{pmatrix} \tag{4.1.12}$$

となり, 運動量の拘束条件 (4.1.5) は,

$$0 = \int_0^{2\pi} d\sigma P_i \acute{X}^i (= \frac{1}{2}(p^2_{La} - p^2_{Ra}) + N_L - N_R) = a^i b_i + N_L - N_R = 0 \tag{4.1.13}$$

となる[3].

さてこれらを準備として, これから $(a^t, b^t) \in \mathbb{Z}^{2d}$ に作用する自己同型変換として T-duality group T を導く. T は自己同型であるために $T \in SL(2d, \mathbb{Z})(\times\mathbb{Z}_2)$ [4] が必要条件であるが, さらに T が

(i) (4.1.13) の内積 $(a^t, b^t) = N_R - N_L$

[3] この N_L, N_R は弦の振動モードを計算しないと出ない. N_L, N_R は整数値に量子化されている.

[4] この $\mathbb{Z}_2 = \{-1, +1\}$ は T を $2d \times 2d$ 行列で書いた時の determinant であり, すぐあとで T-duality group を $O(d, d\,|\mathbb{Z})$ でなく $SO(d, d\,|\mathbb{Z})$ に制限するので結局落とされる.

(ii) (4.1.11) の Hamiltonian H_{WS}

を保つことを要請し, これらの条件を満たす T を T-duality group と呼ぶ. (i) から T-duality group が $SO(d,d\,|\mathbb{Z}) \ni T$ であることを見て, (ii) から background g, B の T による変換, つまり T-duality group の background への作用を導く.

(i) (4.1.13) の内積 $a^i b_i$ を保つ, (a^t, b^t) に作用する自己同型変換は,

$$\begin{pmatrix} a^t & b^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^t & b^t \end{pmatrix} T^t \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} T \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \tag{4.1.14}$$

が任意の $(a^t, b^t) \in \mathbb{Z}^{2d}$ について成り立つ $T \in SL(2d, \mathbb{Z})$ である. よって T の条件は

$$T^t \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \tag{4.1.15}$$

であり, これは $(S)O(d,d\,|\mathbb{Z})$ の条件そのものである[5]. この条件 (4.1.15) は,

$$T = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \ , \qquad A, B, C, D \in Mat(d, \mathbb{Z}) \tag{4.1.16}$$

と表して,

$$C^t A + A^t C = 0 \ , \qquad D^t B + B^t D = 0 \ , \qquad C^t B + A^t D = 1 \tag{4.1.17}$$

とも書ける. また, $T \in SO(d,d|\mathbb{Z})$ の時, $T^t \in SO(d,d|\mathbb{Z})$ である. これは (4.1.15) の両辺の inverse をとり, 左辺の $T^{t\,-1}$, T^{-1} を右辺に移すことにより得られる.

(ii) T の作用で (4.1.11) の H_{WS} が不変となるように background g, B の T による変換を導く. まず, (a^t, b^t) が

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \longrightarrow (T^t)^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \tag{4.1.18}$$

で変換するとする. このとき (4.1.11), (4.1.18) より

$$\begin{pmatrix} g - Bg^{-1}B & Bg^{-1} \\ g^{-1}B & g^{-1} \end{pmatrix} = T_{(g,B)} T^t_{(g,B)} \longrightarrow T T_{(g,B)} T^t_{(g,B)} T^t$$

と変換すれば, ハミルトニアン H_{WS} は不変である. よって $T_{(g,B)}$ は

$$T_{(g,B)} \longrightarrow T T_{(g,B)} \tag{4.1.19}$$

[5] (4.1.15) は $T \in O(d,d\,|\mathbb{Z})$ の条件である. さらにこれを $SO(d,d\,|\mathbb{Z})$ ($\det T = 1$ の部分) に制限することは, IIA 型の理論と IIB 型の間で移りあう T-duality を禁止することに対応する. つまり別の理論の間の (T-)duality ではなく, 1 つの理論に作用する自己同型群としての T-duality group を考える. 以降これらの理論を open string の理論として見るが, その時 open string の境界条件としての D-brane の状態は 1 つの理論の中で T-duality group で移り合う.

と変換し, $T_{(g,B)} \in O(d,d|\mathbb{R})$ （(4.1.17) を満たしている）なので, $TT_{(g,B)} \in O(d,d|\mathbb{R})$ であり. この変換は $T_{(g,B)}$ に自己同型群として作用している.

この $T_{(g,B)}$ の変換を g, B の変換に押しつける. ここで,

$$E := g + B \in Mat(d,\mathbb{R}) \tag{4.1.20}$$

と定義し, 群 $O(d,d|\mathbb{R}) \ni T_{(*)}$ の $d \times d$ 単位行列 I に対する作用として

$$T_{(*)} = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} \in O(d,d|\mathbb{R})$$
$$I \longrightarrow T_{(*)}(I) = (A'I + B')(C'I + D')^{-1}$$

を考えると, この作用も群になり（$T_{(*_1)}(T_{(*_2)}(I)) = (T_{(*_1)}T_{(*_2)})(I)$）, $T_{(*)}$ として $T_{(g,B)}$ を考えるとその作用は,

$$I \longrightarrow T_{(g,B)}(I) = (eI + B(e^t)^{-1})(0 \cdot I + (e^t)^{-1})^{-1} = E \tag{4.1.21}$$

となることが分かる. よって, E の変換が

$$E \longrightarrow T(E) = T(T_{(g,B)}(I)) = (AE + B)(CE + D)^{-1} \tag{4.1.22}$$

と決まる. これより自己同型変換 T の作用する $\{T_{(g,B)}\}$ の空間と, 同じく T の作用する $\{E\}$ の間の T-同変な同型写像が (4.1.21) で与えられることが分かった. よって (4.1.19) は $T_{(g,B)} =: T_E$ として

$$T_E \longrightarrow TT_E = T_{T(E)}$$

となり, $T_E = T_{(g,B)}$ の T による変換を E の変換に吸収する時, 吸収できる E の変換は (4.1.22) 唯ひとつに決まった. 以上で background の T-duality group による変換 (4.1.22) が定義できた.

ここで, [3.2] で導いた open string の変数 G, Θ, g_{YM} の T-duality group による変換を導く. g_{YM} は G_s と (3.4.20) で結び付いていて, g_s, G_s の変換は共に (3.4.19) で定義される [6]. ここでまとめておくと, 使う条件式は

$$E' = (AE + B)(CE + D)^{-1}, \qquad g_s' = \Big(\frac{\det g'}{\det g}\Big)^{\frac{1}{4}}, \qquad G_s' = \Big(\frac{\det G_s'}{\det G_s}\Big)^{\frac{1}{4}} = g_s\Big(\frac{\det E}{\det g}\Big)^{\frac{1}{2}} \tag{4.1.23}$$

であり, closed string の変数と open string の変数は

$$E^{-1} = G^{-1} + \Theta \tag{4.1.24}$$

で関係付けられている. また以下の計算で, $SO(d,d|\mathbb{Z})$ の条件 (4.1.17) を反復して使う.

$$C^tA + A^tC = 0\ , \qquad D^tB + B^tD = 0\ , \qquad C^tB + A^tD = 1 \tag{4.1.25}$$

[6] T-duality による g_s の変換も (3.4.19) でやったように DBI 有効作用の leading の値を保つように定義する.

G, Θ, g_{YM} の変換を導くため, 以下まず g, g_s の変換を求め, そして G, Θ, g_{YM} の順に導く.

$$\begin{aligned}
g' &= \frac{1}{2}(E' + E'^t) \\
&= \frac{1}{2}\{(AE+B)(CE+D)^{-1} + (CE+D)^{t,-1}(AE+B)^t\} \\
&= \frac{1}{2}(CE+D)^{t,-1}\{(CE+D)^t(AE+B) + (AE+D)^t(CE+D)\}(CE+D)^{-1} \\
&= \frac{1}{2}(CE+D)^{t,-1}\{E^t(0)E + E^t(1) + (1)E + (0)\}(CE+D)^{-1} \\
&= (CE+D)^{t,-1} g (CE+D)^{-1} \\
g'_s &= g_s\Big(\frac{\det g'}{\det g}\Big)^{\frac{1}{4}} = g_s \det(CE+D)^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

これより, open string の変数は

$$\begin{aligned}
G' &= \{\frac{1}{2}(E'^{-1} + E'^{t,-1})\}^{-1} \\
&= 2\{(CE+D)(AE+B)^{-1} + (AE+B)^{t,-1}(CE+D)\}^{-1} \\
&= 2(AE+B)^{t,-1}\{(AE+B)^t(CE+D) + (AE+D)^{t,-1}(CE+D)^t\}^{-1} \\
&= 2\{(A+DE^{-1})^{t,-1}E^{t,-1}(E^t+E)E^{-1}(A+DE^{-1})^{-1}\}^{-1} \\
&= (A+DE^{-1})2(E^{-1}+E^{t,-1})^{-1}(A+BE^{-1})^t \\
&= (A+BE^{-1})G(A+BE^{-1})^t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Theta &= \{E'^{-1}\}_A = \{(C+DE^{-1})(A+BE^{-1})^{-1}\}_A \\
G'_s &= g'_s\Big(\frac{\det E'}{\det g'}\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&= g_s \det(CE+D)^{-\frac{1}{2}}\Big(\frac{\det(AE+B)(CE+D)^{-1}}{\det g \cdot (CE+D)^{-2}}\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&= g_s\Big(\frac{\det(A+BE^{-1})E}{\det g}\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&= G_s \det(A+BE^{-1})^{\frac{1}{2}} \\
g'_{YM}\ (\propto G_s^{\frac{1}{2}}) &= g_{YM}\{\det(A+BE^{-1})\}^{\frac{1}{4}}
\end{aligned}$$

また, これからの議論は zero slop limit (3.2.14) について考えるので, これらのこの極限での値を求めておく. トーラスの g, B について, この極限は

$$\begin{gathered}
\alpha' \sim \epsilon^{\frac{1}{2}} \to 0 \quad g_{ij} \sim \epsilon^{\frac{1}{2}} \to 0 \quad B : \text{fixed} \\
E = g + B \longrightarrow 0 + \Theta^{-1}
\end{gathered} \tag{4.1.26}$$

であり, このとき

$$\begin{aligned}
G' = (A+BE^{-1})G(A+BE^{-1}) \quad &\longrightarrow G' = (A+B\Theta)G(A+B\Theta) \\
\Theta' = \{(C+DE^{-1})(A+BE^{-1})^{-1}\}_A \quad &\longrightarrow (C+D\Theta)(A+B\Theta)^{-1} \\
g'_{YM} = g_{YM}\{\det(A+BE^{-1})\}^{\frac{1}{4}} \quad &\longrightarrow g_{YM}\{\det(A+B\Theta)\}^{\frac{1}{4}}
\end{aligned} \tag{4.1.27}$$

となる. G に対する変換は線形変換になっている. しかし Θ の成分で有理数があると, G が退化することに注意する. Θ が有理数の時と無理数の時は大きく性質が異なる.

Θ の変換についてコメントする.

- $(C+D\Theta)(A+B\Theta)^{-1}$ は antisymmetric であることが確認できる.
- string の巻き付き数と運動量を入れ換える典型的な T-dual 変換

$$J := \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \in SO(d,d|\mathbb{Z})$$

を定義して, $(a\ b)$, Θ に対する変換 T を JTJ に置き換えると, この変換は

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} & \longrightarrow & (JTJ)^{t,-1} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ \Theta & \longrightarrow & (A\Theta+B)(C\Theta+D)^{-1} \end{array} \tag{4.1.28}$$

となり, 非可換トーラスの T-duality に関する文献の多くは DLCQ [20][21] による極限操作を考えているので普通この変換が用いられる. ここでも以降この変換を使うことにする. この J による違いは [3.5.3] で見た通りである. DLCQ による極限操作と [3.2] の zero slope 極限は T-dual J で結び付いている.

4.2 森田同値

ここでは, 環 $\mathcal{A}$ については C^*-環 (さらに リー環 L の作用に, 対して連続なもの), 加群 E については (有限) 射影加群を考える. C^*-環 $\mathcal{A}$ は 3.2 で見た通り vertex operator に対応し, 右, 又は左射影加群は open string の境界条件である D-brane に対応し, 射影両側加群 P はあと (4.5) で見るように open string に対応する.

定義 4.2.1 (加群)

$$\begin{array}{rcccc} E \text{ が } \mathcal{A}\text{-左加群} & \Longleftrightarrow & a\cdot\xi \in E & & a\in\mathcal{A},\ \xi\in E \\ E \text{ が } \hat{\mathcal{A}}\text{-右加群} & \Longleftrightarrow & \xi\cdot\hat{a} \in E & & \hat{a}\in\hat{\mathcal{A}},\ \xi\in E \\ E \text{ が } (\mathcal{A},\hat{\mathcal{A}})\text{-両側加群} & \Longleftrightarrow & (a\cdot\xi)\hat{a} = a(\xi\cdot\hat{a}) \in E & & \xi\in E \end{array}$$

この両側加群 ($\leftrightarrow$ open string) の定義は, open string の左端に入る vertex operator $\mathcal{A}$ と右端に入る vertex operator $\hat{\mathcal{A}}$ の順番が可換であることに対応する.

定義 4.2.2 ((有限) 射影加群)

$$\begin{aligned} &E \text{ が} C^* - \text{環上の (有限) 射影加群} \\ &\quad\Longleftrightarrow \exists E' : \mathcal{A}\text{-加群 } s.t. E\oplus E' \text{が (有限次元) 自由加群の直和} \end{aligned}$$

良く知られているように, 位相空間の上のベクトル束は適当な別のベクトル束と直和をとって trivial bundle にできるので, ベクトル束は有限射影加群である.

定義 **4.2.3** (　(強) 森田同値)

$$\hat{\mathcal{A}}\text{と}\mathcal{A}\text{が　(強) 森田同値} \Longleftrightarrow \exists E \text{ :(有限) 射影加群}, s.t.\ \hat{\mathcal{A}} \simeq \mathrm{End}_{\mathcal{A}}E$$

これは, [2.2] の行列模型の議論では無限次元の行列にコンパクト化の条件を課した時, 作用の中の行列の場 $\{X_i\}$ からできるゲージ場 $\{A_i\}$ は非可換トーラス上の関数 $\{U_i\}$ と可換という条件が出たことに関係する. その時 $\{U_i\} = \mathcal{A}$ とすると, $\{A_i\} = \mathrm{End}_{\mathcal{A}}E$ である. つまり非可換トーラスの成す代数とその上のゲージ場の成す代数は森田同値である. さらに代数 $\{U_i\}$ を決めた時, それと可換な $\{A_i\}$ は 1 つには決まらなかった. これらが　(右加群, 左加群の違いはあるが) また森田同値である. [4.3],[4.4] で示そうとしているのはその森田同値と T-duality の関係である.

森田同値にはもう一つ, 同値両側加群による良く使う定義がある.

定義 **4.2.4** ($(\mathcal{A}, \hat{\mathcal{A}})$-同値両側加群)

$$P\text{が}(\mathcal{A}, \hat{\mathcal{A}})\text{-同値両側加群} \Longleftrightarrow \langle \xi, \eta \rangle_{\mathcal{A}} \cdot \zeta = \xi \cdot \langle \eta, \zeta \rangle_{\hat{\mathcal{A}}}$$

ただし, $\langle\ ,\ \rangle_{\mathcal{A}}, \langle\ ,\ \rangle_{\hat{\mathcal{A}}}$ はそれぞれ P の $\mathcal{A}$, $\hat{\mathcal{A}}$ 上の dense [7] な内積とする.

定義 **4.2.5** (森田同値)

$$\mathcal{A}\text{と}\hat{\mathcal{A}}\text{が森田同値} \Longleftrightarrow (\mathcal{A}, \hat{\mathcal{A}})\text{-同値両側加群 } P \text{ が存在する.}$$

これと前の定義の同値性は大雑把に言うと,

- 前者 $\leftrightarrow$ 後者 $\hat{\mathcal{A}} \simeq \mathrm{End}_{\mathcal{A}}E$ ならば, $(\mathrm{End}_{\mathcal{A}}E, \mathcal{A})$-同値両側加群が存在する
- 後者 $\leftrightarrow$ 前者 $(\mathcal{A}, \hat{\mathcal{A}})$-同値両側加群が存在すると, $\mathcal{A} \simeq \mathrm{End}_{\hat{\mathcal{A}}}P$ である

ことから言える. この辺の議論は, $\mathcal{A}$ と $\hat{\mathcal{A}}$ が可換という両側加群の定義と, $\mathrm{End}_{\hat{\mathcal{A}}}P$ が $\hat{\mathcal{A}}$ と可換であることから $\mathcal{A}$ と $\mathrm{End}_{\hat{\mathcal{A}}}P$ が対応していることによる.

正確にはこの $(\mathcal{A}, \hat{\mathcal{A}})$-同値両側加群 P がここでの弦の役割に対応する.

森田同値な C^*-環は, 加群の圏の同値, また　(代数的) K-群, cyclic homology の同型を誘導する.

$(\mathcal{A}, \hat{\mathcal{A}})$-同値両側加群 P からその複素共役をとって $(\hat{\mathcal{A}}, \mathcal{A})$-同値両側加群 $\bar{P}$ が作れる. 具体的には $x \in P$ に対して $\overline{x} \in \overline{P}$ を, $\hat{a} \in \hat{\mathcal{A}}$ の左作用, $a \in \mathcal{A}$ の右作用を

$$\hat{a} \cdot \overline{x} = \overline{x \cdot \hat{a}^*} \qquad \overline{x} \cdot a = \overline{a^* \cdot x}$$

を満たすように作る. よって P の複素共役は C^*-環の $*$ 写像から自然につくられ, それは open string の向き付けと対応している.

$(\mathcal{A}, \hat{\mathcal{A}})$-同値両側加群 P があると　(それは逆向きの $\overline{P}$ があるので) さまざまな同型対応が作れる.

[7] $\langle\ ,\ \rangle_{\mathcal{A}}$ が $\mathcal{A}$ 上 dense とは, 任意の $a \in \mathcal{A}$ の任意に小さい ϵ 近傍をとっても $\langle b, b \rangle_{\mathcal{A}}$ が その中に値をとるような $b \in \mathcal{A}$ が必ず存在するということである.

1. $\mathcal{A}$-右加群 $E \longrightarrow \hat{\mathcal{A}}$-右加群$\hat{E}$ は同型　(左加群に関しても同様) . 実際, 写像を

$$E \longrightarrow \hat{E} = E \otimes_{\mathcal{A}} P \tag{4.2.1}$$

によって作ることができ, その逆も $\overline{P}$ により作れる. ここで, $\otimes_{\mathcal{A}}$ とは $a \in \mathcal{A}$, $\xi \in E$, $x \in P$ として $\xi \cdot a \otimes x = \xi \otimes a \cdot x$ を満たす縮約である.
2. $\mathrm{E}nd_{\mathcal{A}}E \longrightarrow \mathrm{E}nd_{\hat{\mathcal{A}}}\hat{E}$ は同型. 実際, $\mathrm{E}nd_{\mathcal{A}}E \ni \alpha :\ E \longrightarrow E$ より, $\alpha \otimes \mathbf{1} :\ E \otimes_{\mathcal{A}} P \longrightarrow E \otimes_{\mathcal{A}} P$ となる $\alpha \otimes \mathbf{1} \in \mathrm{E}nd_{\hat{\mathcal{A}}}\hat{E}$ が作れる. 同様に $\mathrm{E}nd_{\hat{\mathcal{A}}}E \longrightarrow \mathrm{E}nd_{\mathcal{A}}\hat{E}$ も作れる.
以上より, $(E_{\mathcal{A}}, \mathrm{E}nd_{\mathcal{A}}E)$ と $(\hat{E}_{\hat{\mathcal{A}}}, \mathrm{E}nd_{\hat{\mathcal{A}}}\hat{E})$ の間の圏同値が言える.
3. $\mathcal{A}$ の Tr があると, $\hat{\mathcal{A}}$ の Tr が作れる. これは $x, y \in P$ として $\mathrm{Tr}_{\hat{\mathcal{A}}}\langle x, y\rangle_{\hat{\mathcal{A}}} = \mathrm{Tr}_{\mathcal{A}}\langle y, x\rangle_{\mathcal{A}}$ と作れる.
4. P 上の接続を固定すると, E 上の接続から $\hat{E}$ 上の接続も作れる. これは [4.4] で使う前に説明する.

これらの議論はすべて P を弦, E をその境界の D-brane の状態と解釈し直して想像するとよい.
以上数学的な定義とその弦理論における対応物を説明した. それ以上の物理的解釈は [4.5] にまわして, まず森田同値と T-duality group の関係について見る.

4.3 T-Duality → 森田同値

T-duality で移り合う状態は森田同値であることを示す. やることは, T-duality group $SO(d,d\,|\mathbb{Z})$ の生成元を見つけて, それらが生成する群が実際に $SO(d,d\,|\mathbb{Z})$ と一致することを示した後, 生成元それぞれについて, それによって移り合う Θ で parametrize される 2 つの代数が森田同値であることを示すことである [17].

$SO(d,d\,|\mathbb{Z})$ の生成元として, 次の 3 つの $2d \times 2d$ 行列を選ぶ.

$$\rho(R) = \begin{pmatrix} R & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & R^{t-1} \end{pmatrix}, \qquad R \in SL(d|\mathbb{Z}) \tag{4.3.1}$$

$$\nu(N) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & N^{ij} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \qquad N^{ji} = -N^{ij} \quad \in \mathbb{Z}, \qquad i,j = 1,...,d \tag{4.3.2}$$

$$\sigma_k = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{k\times k} & & \mathbf{1}_{k\times k} & \\ & \mathbf{1}_{q\times q} & & \mathbf{0}_{q\times q} \\ \mathbf{1}_{k\times k} & & \mathbf{0}_{k\times k} & \\ & \mathbf{0}_{q\times q} & & \mathbf{1}_{q\times q} \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{l} k+q=d \\ k \text{ は } n \text{ 以下の偶数} \end{array} \tag{4.3.3}$$

この $\rho(R)$, $\nu(N)$, σ_2 で, $SO(d,d\,|\mathbb{Z})$ を生成することができる.
よって, $\rho(R)$, $\nu(N)$, σ_2 のそれぞれについて, それによって移った先の代数 $T^d_{\hat{\Theta}}$ をみて, それがもともとの代数 T^d_{Θ} と森田同値であることを示す.

T^d_Θ の代数関係は,

$$U_iU_j = e^{2\pi i\Theta_{ij}}U_jU_i \tag{4.3.4}$$

である. U_i で張られる代数は U_i の多項式を上の関係式で割ったものとして定義できる. universal enveloping algebra と同じようなものである. (最も, 積は Lie bracket ではないが.) 運動量はトーラスを T^d_0 と思った時の接ベクトルに値をとるが, 量子化されている. その運動量格子上の点 $b, b' \in \mathbb{Z}^d$ に対し, U_b, $U_{b'}$ を考える. 格子の基底を e_i , 周期 2π のトーラス T^d_0 上の座標を x_i として, $*$ 積の表現では単純に,

$$\begin{array}{ccc} e_i & \longrightarrow & U_i = e^{ix^i} \\ b = b_ie^i & \longrightarrow & U_b = e^{ib_ix^i} \end{array} \quad , \qquad * = \exp \pi i\Theta^{ij}\overleftarrow{\partial_i}\overrightarrow{\partial_j}$$

であった. U_b と $U_{b'}$ の代数関係は

$$U_bU_{b'} = e^{\pi ib^t\cdot\Theta b'}U_{b+b'} = e^{2\pi ib^t\cdot\Theta b'}U_{b'}U_b \tag{4.3.5}$$

と定義できる. これを $SO(d,d|\mathbb{Z})$ の作用で変換した時, Θ だけでなく運動量 b も変換されることに注意する (§4.1 参照]) . 巻き付き数を a_i, $g \in SO(d,d,|\mathbb{Z})$ として,

$$g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Theta \longrightarrow \widehat{\Theta} &= (A\Theta + B)(C\Theta + D)^{-1} \\ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \widehat{a} \\ \widehat{b} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} D & C \\ B & A \end{pmatrix}^{t,-1} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4.3.6}$$

であった.

$\rho(R)$, $\nu(N)$ について, それが代数関係式 (4.3.5) を森田同値なものに移すことは簡単に分かる. それらは代数関係式 (4.3.5) を変えないので移す前と後は同型となる. 実際,

- $\rho(R)$ (4.3.6) より, 運動量 b と Θ は

  $$\begin{aligned} \Theta \longrightarrow \widehat{\Theta} &= R\Theta R^t \\ b \longrightarrow \widehat{b} &= R^{t^{-1}}b \end{aligned}$$

  と移るので, $b' \cdot \Theta b$ が不変である.

- $\nu(N)$ (4.3.6) より,

  $$\begin{aligned} \Theta \longrightarrow \widehat{\Theta} &= \Theta + N \\ b \longrightarrow \widehat{b} &= b \end{aligned}$$

  となり, $\widehat{b}^t\widehat{\Theta}\widehat{b'} - b^t\Theta b' = b^tNb' \in \mathbb{Z}$ なので, $U_{b'}$ と U_b の交換についての関係式 (4.3.5) を変えない.

以上より, $\rho(R)$, $\nu(N)$ により, T_Θ と $T_{\widehat{\Theta}}$ は同型であることが分かった.

σ_2 によって移された $T_{\widehat{\Theta}}$ $\widehat{\Theta} = \sigma_2(\Theta)$ が T_Θ と森田同値であることを示すのは, 少し大変である. しかし, $\rho(R)$, $\nu(N)$ と違いこれが巻き付き数 a と運動量 b を入れ換える典型的な T-duality であり, T_Θ をそれと可換な $\mathrm{End}_{T_\Theta} E$ $\exists E$ に移す. それを今から見るために, 運動量格子 $\mathbb{Z}^d$ 上の代数 T_Θ からもっとよい性質 (シンプレクティック構造のようなもの. その空間の元に対して, 必ずその dual が存在する) を持つ大きい空間への埋め込み写像 S を作り, その空間の中で森田同値な代数で $T_{\widehat{\Theta}}$ からの埋め込み写像 $\hat{S}$ となるものを見つける.

まず $\sigma_2(\Theta)$ を求めておく. ここで

$$\Theta = \begin{pmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} \end{pmatrix}$$

と行列のサイズ d を $2p$ と $d-2p$ に分けて, $2p \times 2p$ 行列の Θ_{11} は invertible だと仮定する. また

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}, \qquad A := \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{2p} & \\ & \mathbf{1}_{d-2p} \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{2p} & \\ & \mathbf{0}_{d-2p} \end{pmatrix}$$

と表して,

$$A\Theta + B = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{2p} & \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} \end{pmatrix}, \quad C\Theta + D = \begin{pmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} \\ & \mathbf{1}_{d-2p} \end{pmatrix}, \quad (CE+D)^{-1} = \Theta_{11}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{2p} & -\Theta_{12} \\ & \Theta_{11} \end{pmatrix}$$

より,

$$\Theta' = \sigma_2(\Theta) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Theta_{11}^{-1} & -\Theta_{11}^{-1}\Theta_{12} \\ & \mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Theta_{11}^{-1} & -\Theta_{11}^{-1}\Theta_{12} \\ \Theta_{21}\Theta_{11}^{-1} & -\Theta_{21}\Theta_{11}^{-1}\Theta_{12} + \Theta_{22} \end{pmatrix}$$

となる.

次に, $b \in \mathbb{Z}^{2p} \times \mathbb{Z}^{d-2p}$ の $G = M \times \hat{M}$ への埋め込み写像を構成する. ここで $\dim M = p+q$, $2p+q=d$ とし, $\hat{M}$ はその dual space とする. 埋め込み写像 S を

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \\ S_{31} & S_{32} \end{pmatrix}, \qquad S^t J S = -\Theta \tag{4.3.7}$$

となるように作る. ここで,

$$J := \begin{pmatrix} J_0 & \\ & J_1 \end{pmatrix}, \qquad J_0 := \begin{pmatrix} & \mathbf{1}_p \\ -\mathbf{1}_p & \end{pmatrix}, \qquad J_1 := \begin{pmatrix} & \mathbf{1}_q \\ -\mathbf{1}_q & \end{pmatrix}$$

とする. つまりやっていることは, 代数を characterize する $b^t \Theta b'$ を G の中で "symplectic" な内積として表そうとしているわけである. この S は次のようにとれる.

$$\begin{aligned} &S_{11} : S_{11}^t J_0 S_{11} = -\Theta_{11} \text{を満たすもの} \\ &S_{12} = S_{21} = 0\ , \qquad S_{22} = \mathbf{1}_q \\ &S_{32} = \Theta_{12}^t\ , \qquad S_{32} :\ S_{32} + S_{32}^t = \Theta_{22} \text{を満たすもの} \end{aligned} \tag{4.3.8}$$

この埋め込み写像がどのような空間に埋め込まれているかをみる. 一般に Θ の成分は整数ではないので

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}_q \\ S_{31} & S_{32} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \mathbb{Z}^{2p} \\ \mathbb{Z}^q \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \mathbb{R}^{2p} \\ \mathbb{Z}^q \\ \mathbb{R}^q \end{pmatrix}$$

であることはすぐに分かり, 実はこの埋め込み写像についての一般論より $\mathbb{Z}^{2p} \times \mathbb{Z}^q \longrightarrow \mathbb{R}^{2p} \times \mathbb{Z}^q \times T^q =: G$ であることが知られている [18]. これを $G = (\mathbb{R}^p \times \mathbb{Z}^q) \times (\mathbb{R}^p \times T^q) =: M \times \hat{M}$ と定義する. 写像 S が単射であることは, S の中の $\left(\begin{smallmatrix} S_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}_q \end{smallmatrix}\right)$ が invertible であることから分かる.

ここで, $G = M \times \hat{M}$ の中で代数 $\{U_i\}$ と直交する $\mathrm{E}nd_{\{U_i\}}E$, $\exists E$ を探す. $D := Im_S\mathbb{Z}^{2p+q}$ を定義しておいて, 探すものは次で定義される $D^\perp$ である.

$$D^\perp := \{\widehat{b} : \exp(2\pi \widehat{b}_D^t J b_D) = 1 \ , \ \forall b_D \in D\}. \tag{4.3.9}$$

ここで, $b_D = S \cdot b$ とし, この $\exp = 1$ の条件は埋め込む前の空間では $\{U_i\}$ と可換という条件であることに注意する.

これからこの $\widehat{b}_D$ を探す. (4.3.9) より条件は

$$\widehat{b}_D^t J T \cdot b \in \mathbb{Z} \ , \ \forall b \in \mathbb{Z}^d \tag{4.3.10}$$

であるので, $T^t J \widehat{b}_D \in \mathbb{Z}^d$ となる $\widehat{b}_D$ の張る空間を探す. そのために T^t, J の inverse をとりたいわけだが, T は正方行列でないのでその性質を変えないように 1 行加えて正方行列 $\bar{S}$ を作る.

$$\bar{S} := \begin{pmatrix} S_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}_q & \mathbf{0} \\ S_{31} & S_{32} & \mathbf{1}_q \end{pmatrix} \ , \quad \bar{S}^t J = \begin{pmatrix} S_{11}^t & \mathbf{0} & T_{31}^t \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}_q & S_{32}^t \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1}_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1}_q \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}_q & \mathbf{0} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \mathbb{Z}^{2p} \\ \mathbb{Z}^q \\ \mathbb{Z}^q \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} S^t J \cdot \mathbb{Z}^{2p+q+q} \\ -\mathbb{Z}^q \end{pmatrix}$$

よって $S^t J \widehat{b}_D \in \mathbb{Z}^d$ と $\bar{S}^t J \widehat{b}_D \in \mathbb{Z}^{d+q}$ は等価である. $\bar{S}^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} S_{11}^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}_q & \mathbf{0} \\ -S_{31}S_{11}^{-1} & -S_{32} & \mathbf{1}_q \end{smallmatrix}\right)$, $J^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} -J_0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1}_q \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}_q & \mathbf{0} \end{smallmatrix}\right)$ より, $\bar{S}^t J$ の逆行列をとって

$$J^{-1}\bar{S}^{t,-1} = \begin{pmatrix} -J_0 S_{11}^{t,-1} & \mathbf{0} & J_0 S_{11}^{t,-1} S_{31}^t \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{1}_q \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}_q & -S_{32}^t \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} * \\ \mathbb{Z}^q \\ * \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} * \\ * \\ \mathbb{Z}^q \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} * \\ * \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} \mathbb{R}^{2p} \\ \mathbb{Z}^q \\ T^q \end{pmatrix}$$

となり, 今 格子 $\mathbb{Z}^d$ $\mathcal{b} \in \mathbb{Z}^d$ との内積が整数となるもの (4.3.10)) を $\mathbb{Z}^{d+q}$ に広げて $J^{-1}\bar{S}^{t,-1} : \mathbb{Z}^{d+q} \longrightarrow G$ の写像ができたわけだが, その $\mathbb{Z}^2 p \times \mathbb{Z}^q \times \mathbb{Z}^q$ の中央の $\mathbb{Z}^q$ は G の中で $\mathbf{0}$ につぶれることが分かった. よって単射な $\mathbb{Z}^d$ から G への埋め込み写像を $J^{-1}\bar{S}^{t,-1}$ から中央の $\mathbb{Z}^q$ にかかる行を抜き取って

$$\tilde{S} := - \begin{pmatrix} J_0 S_{11}^{t,-1} & -J_0 S_{11}^{t,-1} S_{31}^t \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}_q \\ \mathbf{0} & S_{32}^t \end{pmatrix} : \ \mathbb{Z}^d \longrightarrow G$$

と作ることができる. 以上で (${U_i}$ と直交する) 森田同値な $\widehat{b}_D \in G$ が, $\mathbb{Z}^d$ からの埋め込み写像 $\tilde{S}$ の Image として得られた.

実はこの $\tilde{S}$ が $\sigma_2(\Theta)$ に対応する. (Θ と S が対応していたという意味で.) 実際

$$\begin{aligned}\tilde{S}^t J \tilde{S} &= \begin{pmatrix} -S_{11}^{-1}J_0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ S_{31}S_{11}^{-1}J_0 & \mathbf{1}_q & S_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1}_q \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1}_q & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_0 S_{11}^{t,-1} & -J_0 S_{11}^{t,-1} S_{31}^t \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}_q \\ \mathbf{0} & S_{32}^t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} S_{11}^{-1} J_0 S_{11}^{t,-1} & -T_{11}^{-1} J_0 S_{11}^{t,-1} S_{31}^t \\ -S_{31}S_{11}^{-1}S_{11}^{-1}J_0 S_{11}^{t,-1} & S_{31}S_{11}^{-1}J_0 S_{11}^{t,-1}S_{31}^t - S_{32} + S_{32}^t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \Theta_{11}^{-1} & -\Theta_{11}^{-1}\Theta_{12} \\ \Theta_{21}\Theta_{11}^{-1} & \Theta_{22} - \Theta_{21}\Theta_{11}^{-1}\Theta_{12} \end{pmatrix} = \sigma_{2p}(\Theta) \ . \end{aligned}$$

これで Θ によって characterize された代数と $\sigma_{2p}(\Theta)$ で characterize された代数が森田同値であることが言えた. 森田同値であることは, G の中で代数が直交している (4.3.10) ことで言えている.

Θ の代数と森田同値なのはもちろん $\sigma_{2p}(\Theta)$ だけではない. $\tilde{S}$ が $\sigma_{2p}(\Theta)$ と唯ひとつに対応したのは, 埋め込む空間を $G = M \times \hat{M}$ $M = \mathbb{R}^p \times \mathbb{Z}^q$ にしたこと, さらに $S^t J S = -\Theta$ を満たす S の中で (4.3.8) のものを選んだことによる.

以上で T-duality で結び付くものは森田同値であることが言えた. しかし正確には $\widehat{\Theta} = (A\Theta + B)(C\Theta + D)^{-1}$ の変換は singular である. (例えば $A = D = \mathbf{0}$, $B = C = \mathbf{1}$, $\Theta = \mathbf{0}$. $(C\Theta+D)^{-1}$ が invertible でなければならない.) よって今の議論で完全に証明できるのは,

$$\mathcal{T}_d^0\{\Theta : d \times d \text{ 実反対称行列 } | T(\Theta) \text{ が } \forall T \text{ で定義できるもの } \}$$

となる, Θ のとり得る値の中の部分群についてである. しかし, この $\mathcal{T}_d^0$ の空間は 「かなり大きい」ことが [17] で説明されている. また T-duality で結び付く 2 つの代数についてそれが森田同値であることを言う分には上の議論で問題ない.

4.4 森田同値 → T-Duality

まず森田同値によって 右 $\mathcal{A}$ 加群 E から右 $\hat{\mathcal{A}}$ 加群 $\hat{E}$ を $(\mathcal{A}, \hat{\mathcal{A}})$ 両側加群 P を使って,

$$\hat{E} = E \otimes_{\mathcal{A}} P \tag{4.4.1}$$

とつくる.

BPS 条件により E 上, 接続は定数となっている. それから P 上の接続をうまく定義して, $\hat{E}$ に定数の接続を入れる.

今 E と $\hat{E}$ は接続を通じて関係している. また, 代数的 K 群に値をとる, 加群のある不変量 $\mu(E) \in K(\mathcal{A}), \mu(\hat{E}) \in K(\hat{\mathcal{A}})$ が存在し, $\mu(E)$ と $\mu(\hat{E})$ は Θ, $\widehat{\Theta}$, 上の接続を通じて関係している. ($\mu(E)$ から $\mu(\hat{E})$ への変換が, Θ, $\widehat{\Theta}$, 接続によって与えられている.)

さて, この K 群の元は, リー群 L_Θ の n 回反対称テンソルに dual な n-form で, その基底について整数係数, n が偶数のものに値をとることが知られている. また, 森田同値は K 群の同型を与えるので, 上の $\mu(E)$ から $\mu(\hat{E})$ への変換を (L_Θ の基底, form の基底) の変換に押しつけるとそ

れが (L_Θ, form) の内積を保ち, form の係数を $\mathbb{Z}$ に保つ格子 $\mathbb{Z}^{2d}$ についての自己同型変換となり, この変換は $SO(d,d|\mathbb{Z})$ である.

以上より, $\mu(E)$ の格子 $\mathbb{Z}^{2d}$ から $\mu(\hat{E})$ の格子 $\mathbb{Z}^{2d}$ への Θ, $\widehat{\Theta}$, 接続によって与えられる変自己同型換は, ある $SO(d,d|\mathbb{Z})$ と等しいことが分かったので, それを逆解きし, Θ から $\widehat{\Theta}$ への変換をある $SO(d,d|\mathbb{Z})$ と接続を使って表し, それが T-duality group による $SO(d,d|\mathbb{Z})$ の変換の形になることが計算できる [22].

まず E 上の接続 ∇_X と, それと森田同値な $\hat{E}$ 上の接続 $\hat{\nabla}_X$ の間の関係を導く. これは, [4.2] の最後の議論での $(\mathcal{A}, \hat{\mathcal{A}})$-同値両側加群 P の性質を使う. P の接続を, 左, 右に加群として

$$\nabla^P_X(a\xi) = a\nabla^P_X\xi + (\delta_X a)\xi \ , \quad \nabla^P_X(\xi\hat{a}) = (\nabla^P_X\xi)\hat{a} + \xi\hat{\delta}_X\hat{a} \tag{4.4.2}$$

と定義する. E 上の接続 ∇_X が与えられているとして, これから $\hat{\nabla}_X$ を構成する. (4.2.1) より, この $\hat{\nabla}_X$ を $E \otimes_{\mathcal{A}} P$ 上の operator として

$$\hat{\nabla}_X = \nabla_X \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \nabla^P_X \tag{4.4.3}$$

とつくることができる. これが well-defined であることをいうには, $\xi \cdot a \otimes \eta \sim \xi \otimes a \cdot \eta\xi \in E$, $\eta \in P$, $a \in \mathcal{A}$ と $\hat{\nabla}_X$ の作用が両立することを確認すればよい.

$$\begin{aligned}\hat{\nabla}_X(\xi a \otimes \eta) &= (\nabla_X\xi \cdot a + \xi\delta_X a) \otimes \eta + \xi a \otimes (\nabla^P_X\eta) \\ &= \nabla_X\xi \otimes a\eta + \xi \otimes (\delta_X a)\eta + \xi \otimes a\nabla^P_X\eta = \hat{\nabla}_X(\xi \otimes a\eta)\end{aligned}$$

より well-defined である.

∇_X の曲率 $F_{XY} = [\nabla_X, \nabla_Y]$ に対して, $\hat{\nabla}_X$ の曲率 $F_{\widehat{XY}}$ を計算する.

$$F_{\widehat{XY}} = [\hat{\nabla}_X, \hat{\nabla}_Y] = [\nabla_X, \nabla_Y] \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes [\nabla^P_X, \nabla^P_Y] \ .$$

ここで, 接続に BPS 条件を課す. (もともと BPS 条件を満たすような安定な D-brane を考えている.) その条件は

$$\nabla_X\text{が BPS 条件を満たす} \longleftrightarrow \exists\epsilon, \ \epsilon' : \text{spinor } s.t.\ F_{ij}\Gamma^{\{i,j\}}_{\alpha\beta}\epsilon_\beta + \epsilon'_\alpha \cdot \mathbf{1} = 0 \tag{4.4.4}$$

である. ここで, Γ^i は 10 次元の Clifford 代数 (16 × 16 行列) , $\Gamma^{\{i,j\}} = \frac{1}{2}\{\Gamma^i, \Gamma^j\}$ で, spinor ϵ, ϵ' は 10 次元 Majorana-Weyl spinor を表し $\alpha, \beta = 1, \cdots, 16$ はその足である[8]. $\hat{\nabla}_X$ が ∇_X と同じ supercharge [9] を持つためには, P 上の接続 $[\nabla^P_X, \nabla^P_Y]$ が定数でなければならないことが分かる. よって

$$F^P_{XY} := [\nabla^P_X, \nabla^P_Y] = \sigma_{XY} \cdot \mathbf{1} \ , \quad F_{\widehat{XY}} = F_{XY} + \sigma_{XY} \cdot \mathbf{1} \tag{4.4.5}$$

[8]作用は 10 次元の行列模型を考えている.

[9]supercharge = (ϵ, ϵ') の解の個数 =supersymmetry の数. 10 次元で full には 32 個の supercharge があるが, 平行な同一次元の static な D-brane は, その半分の対称性を壊し, 16 個の supercharge も持つ. その状態は, (4.4.4) で F_{ij} が定数の時に対応する. この 1/2 BPS 状態 (の対称性) についてはよく調べられている [1]etc.. 1/4 BPS 状態については [23] で調べられている.

これによって, 作用の中の F_{ij} も $\hat{\nabla}$ の表示で $F_{\widehat{ij}} = F_{ij} - \sigma_{ij}$ に移るため, 作用の F^2 の項をもともと $(F+\Phi)^2$ に拡張する必要があるのは, [3.4.2] の最後で触れた通りである.

トーラス上の微分の成すリー代数の空間を L_Θ とし, その基底として $e_i = 2\pi\delta_i$ をとる. この $\{e_i\}$ の成す格子を D として, L_Θ に対応するリー群 $\tilde{L}_\Theta = e^{L_\Theta}$ は, $\tilde{L}_\Theta = L_\Theta/D$ と表せる.

また, トーラス上の L_Θ の反対称テンソル場の空間を $\wedge L_\Theta$ と表して, その元

$$\alpha = \sum_k \alpha^{i_1\cdots i_k} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} \in \wedge L_\Theta \tag{4.4.6}$$

について, その中の $\alpha^{i_1\cdots i_k}$ が整数である部分環を $\wedge(D)$ と表す. そして $\wedge L_\Theta$ の dual $\wedge L_\Theta^*$

$$\omega = \sum_k \omega_{j_1\cdots j_k} de^{j_1} \wedge \cdots \wedge de^{j_k} \in \wedge L_\Theta^* \tag{4.4.7}$$

を考え, 同様にその $\omega_{j_1\cdots j_k}$ が整数である部分を $\wedge(D^*)$ と表す. ここで dual basis de^j は $\iota_{e_i} de^j = \delta_i^j$ の内部積で定義されている.

さて, T_Θ 上の K_0 群 $K_0(T_\Theta)$ は $\wedge(D^*)$ の ($k=$) even part と同一視できることが知られている. (K_1 群 $\leftrightarrow$ odd part .) そして, 射影加群 E と対応する $K_0(T_\Theta)$ の元 $\mu(E)$ が存在し, 射影加群 E と対応する $K_0(T_\Theta)$ の部分群を $K_0^+(T_\Theta)$ と書く.

$\mathcal{A}$-射影加群 E の Chern character は多様体上のベクトル束のときと同様に

$$\mathrm{ch}E := \mathrm{Tr}\exp\Big(\frac{F}{2\pi i}\Big) = \sum_{n=0}\frac{1}{n!}\mathrm{Tr}\Big(\frac{F^n}{2\pi i}\Big) \tag{4.4.8}$$

ここで, F は E 上の接続から作った E の曲率である. Tr は $\mathrm{End}_{\mathcal{A}}E$ のトレースで, [4.2] で説明したように $\mathcal{A}$ のトレースから $(\mathcal{A}, \mathrm{End}_{\mathcal{A}}E)$-両側加群を使って定義できる.

$\mathrm{ch}E$ と $\mu(E)$ は

$$\mathrm{ch}(E) = \iota_{e^\Theta}\mu(E) \tag{4.4.9}$$

で関係付けられていることが知られている. ここで, 基底 e_i, de^j を

$$\begin{array}{lll} \wedge L_\Theta^* \ni & F = \frac{1}{2}F_{ij}de^i\wedge de^j & = a^i F_{ij} a^j \\ \wedge L_\Theta \ni & \Theta = \frac{1}{2}\Theta^{ij}\frac{e_i}{2\pi}\frac{e_j}{2\pi} & = \frac{1}{2}b_i\Theta^{ij}b_j \end{array} \tag{4.4.10}$$

と書き直す. これら a^i, b_j は e_i, de^j の間の内部積の定義から

$$[a^i, b_j]_+ = \delta^i_j\ , \quad [a^i, a^j]_+ = [b_i, b_j]_+ = 0 \tag{4.4.11}$$

の反交換関係を満たすし, [4.1] のときの巻き付き数の a^i, 運動量 b_j でもある. ここでの a^i, b_j はそれらの operator 表示だと思って良い.

以上のことを使って Θ とそれと森田同値な $\widehat{\Theta}$ の間に関係を付け, それが $SO(d,d\,|\mathbb{Z})$ による変換であることを証明したい. 図式的に書くと

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{ch}(\hat{E}) & \xrightarrow{V_3\circ V_2} & \mathrm{ch}(E) \\ {\scriptstyle V_1}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle V_4} \\ \mu(\hat{E}) & & \mu(E) \end{array} \tag{4.4.12}$$

で K_0 群の元 $\mu(E)$ と, それと森田同値な K_0 群の元 $\mu(\hat{E})$ が結びついている.

$$\mu(E) = V_4 V_3 V_2 V_1 \mu(\hat{E}) \tag{4.4.13}$$

ここで矢印は写像 $V_1, \cdots, V_4$ の向きを表し, T_Θ の基底 (a, b) に対して $T_{\widehat{\Theta}}$ の基底を (a', b') と表して

$$\begin{aligned} V_1 &= \exp\left(\frac{1}{2} b_i \widehat{\Theta}^{ij} b_j\right) & V_3 f(a') &= f(Ra') \\ V_2 &= \exp\left(-\frac{1}{2} a'^i \Phi_{ij} a'^j\right) & V_4 &= \exp\left(-\frac{1}{2} b_i \Theta^{ij} b_j\right) \end{aligned} \tag{4.4.14}$$

と表される. (4.4.12) を説明すると, まず縦の矢印は (4.4.9) でつながる関係を表し, (4.4.11) の作用素表示により (4.4.9) の $\mu(E)$ から $ch(E)$ への写像の逆写像も (4.4.14) の V_4 のように e の肩の符号をかえるだけで得られる. (つまり (4.4.9) は同型写像である.) 横の矢印の V_2 と V_3 合成について, V_2 は森田同値で移りあう接続の間の関係式 (4.4.5) であり, 今 $\hat{F}_{ij} = F_{ij} + \mathbf{1} \cdot \psi_{ij}$ とした. しかし E と $\hat{E}$ の (form の) 基底 a と a' は一般には一致していないので a' を $a = Ra'$ に座標変換しなければならない. それが V_3 である.

この V_1 から V_4 の operator がそれぞれ (a, b) を通り抜ける時 (a, b) がどのように変換するかを見る. それらはすべて線形変換を引き起こす. つまり $V_1, \cdots, v_4$ をまとめて V と表して

$$V \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} V^{-1} = \tilde{V} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \ , \qquad \tilde{V} \in Mat(2d)$$

となる $\tilde{V}$ を求める. この $\tilde{V}_1$ から $\tilde{V}_4$ はすべて $SO(d, d|\mathbb{Z})$ の元になる.

- まず V_1 について,

  $$V_1 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} V_1^{-1} = \left([V_1, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}] + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} V_1 \right) V_1^{-1} = \begin{pmatrix} [V_1, a] \\ 0 \end{pmatrix} V_1^{-1} + \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

  ここで $[\exp\left(\frac{1}{2} b_k \widehat{\Theta}^{kj} b_j\right), a^i] = -\widehat{\Theta}^{ij} b_j$ より $[V_1, a^i] = -\widehat{\Theta}^{ij} b_j \cdot \exp\left(\frac{1}{2} b_k \widehat{\Theta}^{kj} b_j\right) = -\widehat{\Theta}^{ij} b_j V_1$ なので

  $$V_1 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} V_1^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & -\widehat{\Theta} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \qquad \tilde{V}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & -\widehat{\Theta} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

  である.

- V_2 同様にして (V_1 で $a \leftrightarrow b$)

  $$V_2 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} V_2^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \Phi & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \qquad \tilde{V}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \Phi & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

- V_4

  $$V_4 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} V_4^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \Theta \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \qquad \tilde{V}_4 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \Theta \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

- V_3　　a' を $a = Ra'$ に変換したとき変換された (a, b) がまた反交換関係 $(4.4.11)$ を満たしていなければならない. よって b' が $b = R_b b'$ で変換するとして $\delta^i_j = [R_{ik}a'^k, R^{jl}_b b'_l] = R_{ik}R^{jk}_b$ より, $R_b = R^{t,-1}$.

$$V_3 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} V_3^{-1} = \begin{pmatrix} R & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & R^{t,-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \qquad \tilde{V}_3 = \begin{pmatrix} R & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & R^{t,-1} \end{pmatrix}$$

V_1 から V_4 が順々に $\mu(\hat{E})$ に作用していく時, それらは常に (a, b)　(又は (a', b')) に引っかかって $\tilde{V}$ を出していく. よってこの作用を (a, b) の変換に押しつけると

$$V_4V_3V_2V_1\mu(\hat{E})[\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}] = \mu(E)[\tilde{V}_1\tilde{V}_2\tilde{V}_3\tilde{V}_4 \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}]$$

となる. ($\tilde{V}$ の順番に注意.) この $\tilde{V}_1\tilde{V}_2\tilde{V}_3\tilde{V}_4$ が格子 (a', b') の自己同型群 $SO(d, d|\mathbb{Z})$ となる条件から Θ と $\widehat{\Theta}$ の関係が決まりそれが T-duality の変換 $(4.1.28)$ になっていることが証明できる. これからそれを計算する. まず

$$\begin{aligned} \tilde{V}_1\tilde{V}_2\tilde{V}_3\tilde{V}_4 &= \begin{pmatrix} \mathbf{1} & -\widehat{\Theta} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \Theta \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & R^{t,-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \Theta \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} R - \widehat{\Theta}\Phi R & R\Theta - \widehat{\Theta}(\Phi R\Theta + R^{t,-1}) \\ \Phi R & \Phi R\Theta + R^{t,-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in SO(d, d|\mathbb{Z}) \end{aligned}$$

この 4 つ (のうちの 3 つ) の条件式から, Φ, R を消去していく.

$$C = \Phi R \tag{4.4.15}$$

より

$$A \quad = R - \widehat{\Theta}\Phi R \quad = R - \widehat{\Theta}C \tag{4.4.16}$$

$$D \quad = \Phi R\Theta + R^{t,-1} \quad = C\Theta + R^{t,-1} \tag{4.4.17}$$

この 2 式より R を消去したものは $SO(d, d|\mathbb{Z})$ の条件 $(4.1.17)$ を使って

$$B = R\Theta - \widehat{\Theta}(\Phi R\Theta + R^{t,-1}) = (A + \widehat{\Theta}C)\Theta - D \tag{4.4.18}$$

と等しくなることが分かる. 二つ目の等号は, $(4.4.16)(4.4.17)$ を代入して R を消去したものである. この $(4.4.18)$ を $\widehat{\Theta}$ について解くと

$$\widehat{\Theta} = (-A\Theta + B)(C\Theta - D)^{-1}$$

となり, この $\begin{pmatrix} -A & B \\ C & -D \end{pmatrix}$ も $SO(d, d|\mathbb{Z})$ の元であることは容易に分かる.

以上で森田同値な代数は T-duality で移り合うことが証明できた.

	代数	弦理論
$\mathcal{A}=\{U_i\}$	非可換トーラス	open string vertex operator の OPE の成す代数
P	$(\mathcal{A},\hat{\mathcal{A}})$-同値両側加群	open string
E	$\mathcal{A}$-加群	D-brane の状態
b_i	$\in L_{\mathbb{Z}} \subset L$: $\mathbb{Z}^d$ lattice	量子化された運動量
a^i	$\in L^*_{\mathbb{Z}} \subset L$: dual lattice	$\Theta=0$ での (ベクトル束の) サイクル
$\Theta=\Theta^{ij}b_ib_j$	$\in \wedge^2 L$	D-brane 上の非可換性
$\mu=\omega^{i_1\cdots i_n}a_{i_1}\cdots a_{i_n}$	$\in \wedge^n L^*_{\mathbb{Z}}$: K_0-群	$\Theta=0$ での Chern character
$ch(F)=\mathrm{Tr}\, e^{\frac{F_{ij}a^ia^j}{2\pi i}}$	Chern character	$\Theta\neq 0$ での Chern character

4.5 open string と森田同値

4 章で今まで出てきたものをまとめた.
非可換トーラスについて今までの話をまとめると,

- 2 章: コンパクト化の条件 (2.2.19) は非可換トーラス $\mathcal{A}$ とその上のゲージ場 $End_{\mathcal{A}}E$ の間の森田同値を導いた.
- [3.5.3][4.1]: closed string の表示の理論に働く T-duality group と open string の表示の理論の Θ に働く $SO(d,d\,|\mathbb{Z})$ は, その 2 つの表示の間の写像 (Fourier 変換 [3.5.2], あるいは OPE に注目 [3.2]) について可換.
- 4 章: Θ に働く $SO(d,d;\mathbb{Z})$ と森田同値は等価.
- これらを合わせて: T-duality $\simeq$ 森田同値.

であった.

$\mathcal{A}$ と $\hat{\mathcal{A}}$ が森田同値とは, $(\mathcal{A},\hat{\mathcal{A}})$-同値両側加群が存在することであったので, T-duality を open string の作用として解釈することができる. 正確には T-duality で移り合う D-brane の状態の間には open string を作ることができる, ということである.

まず world sheet を (τ,σ) , $-\infty<\tau<\infty, 0\leq\sigma\leq\pi$ とする open string を考える (図 4.1(a)). その弦を $(\mathcal{A},\hat{\mathcal{A}})$-同値両側加群 P と解釈する. 左側の境界の open string vertex operator の OPE の代数を $\mathcal{A}$ とし, 同様に右側を $\hat{\mathcal{A}}$ とする. P は $\mathcal{A}$ にとって左 $\mathcal{A}$-加群, $\hat{\mathcal{A}}$ にとって右 $\hat{\mathcal{A}}$-加群である. $a^1,a^2\in\mathcal{A}$, $\hat{a}^3,\hat{a}^4\in\hat{\mathcal{A}}$ が図の順番で挿入されているとすると時間 τ の小さい順に P に作用していくので

$$a^1a^2P\hat{a}^3\hat{a}^4 \tag{4.5.1}$$

となる. これは open string に (B 場により) 自然に向きづけが入っている結果とも解釈できる. B 場は角度を感じる. それは propagator を作る時に (3.2.7)(3.2.12) で説明した通りであり, 5 章のグラフの定義 (5.2.16)(5.3.2), 6 章の propagator ϕ^h (6.2.10) はまさにそうである. propagator は角度を拾い, 距離によらない. これは 3 章では (3.2.14) の極限をとったことに対応し, (5 章),

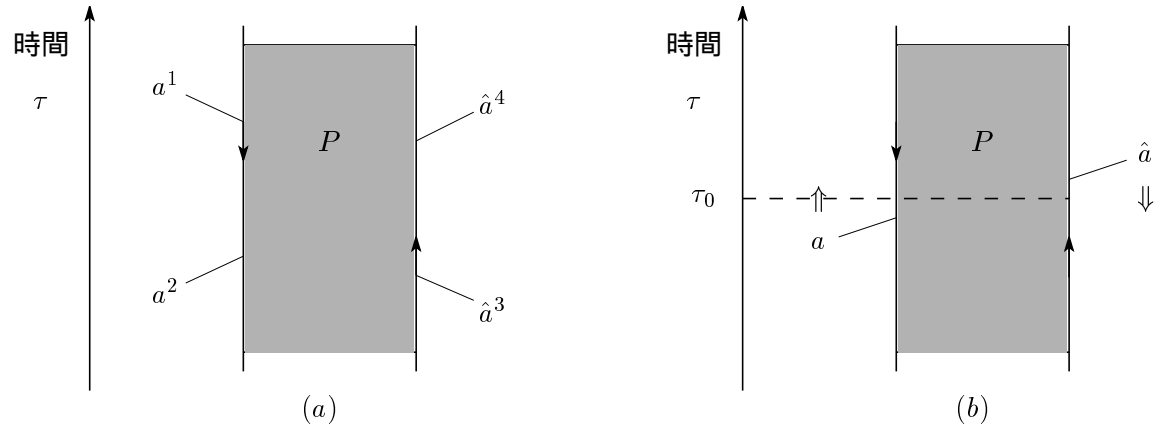

図 4.1: (a) $(\mathcal{A}, \hat{\mathcal{A}})$-同値両側加群としての open string. 境界の矢印は open string に入る自然な向きづけを表す. (b) $\mathcal{A}$ と $\hat{\mathcal{A}}$ の P への作用は可換. 森田同値を表す.

6 章ではもともと理論が topological である. (6 章で扱う模型は弦の作用から (3.2.14) の $\alpha' \to 0$ 極限をとったものとも言える.)

この $\alpha' \to 0$ 極限で弦の境界での OPE は関数の積と解釈できる. 弦の境界は空間的には 1 点であり, $a^1(\tau), a^2(\tau') \in \mathcal{A}$ とするとその積は時間 $(\tau - \tau')$ によらない. ただし, その順序, つまり $(\tau - \tau')$ が正か負か, には依存し, その順序が積の順序になった.

このときさらに $a(\tau) \in \mathcal{A}$, $\hat{a}(\tau') \in \hat{\mathcal{A}}$ の P への作用は可換である (図 4.1(b)).

$$\big(a(\tau)P\big)\hat{a}(\tau') = a(\tau')\big(P\hat{a}(\tau)\big) \ , \quad \tau < \tau_0 < \tau \ .$$

これが森田同値である. vertex の挿入の数が多いと一般にはその位置によるのでこれも $\alpha' \to 0$ の極限をとったことによる帰結である.

(4.5.1) についてもう一度考える. P に作用する $\mathcal{A}, \hat{\mathcal{A}}$ について, その $\mathcal{A}, \hat{\mathcal{A}}$ 自身の代数について考える. その左 $\mathcal{A}$-加群と右 $\hat{\mathcal{A}}$-加群の違いから, τ の順序により掛けていくとき $\mathcal{A}$ は左に掛けていき, $\hat{\mathcal{A}}$ は右に掛けていく. よってその代数の非可換性 Θ を考える時, 境界が同じ状態でも $\mathcal{A}$ と $\hat{\mathcal{A}}$ で $\Theta \leftrightarrow -\Theta$ の違いが出る. それが [2.4] で始めに $\mathcal{A}_{-\Theta}$ から $\mathcal{A}_\Theta$ に移った理由であり, (4.3.7) でもそうだった.

次に $\mathcal{A}$-加群 (右加群で考える) E と, $(\mathcal{A}, \hat{\mathcal{A}})$-同値両側加群 P があるとする. E は $E \otimes_{\mathcal{A}} P$ により $\hat{\mathcal{A}}$-右加群に移った. これは open string の一端の OPE の代数が $\mathcal{A}$ だったのが, もう一端では $\hat{\mathcal{A}}$ の OPE を持つことを意味する.

行列模型の場合, トーラス $\mathcal{A}_\Theta$ 上の場は ある加群 E が存在して $\mathrm{E}nd_{\mathcal{A}_\Theta}E$ に値をとった. つまり E は $(\mathcal{A}_\Theta, \mathrm{E}nd_{\mathcal{A}_\Theta}E)$-同値両側加群である. これは open string の一端が $\mathcal{A}_\Theta$ に属していて, もう一端がゲージ場 A と ([3.3.2] でやったように) 結合しているものと解釈できる. そしてさらに $(\mathrm{E}nd_{\mathcal{A}_\Theta}E, \hat{\mathcal{A}})$-同値両側加群があればさらに (closed string の表示で) T-duality group で移り合える別の D-brane の状態になるし, $(\mathcal{A}_\Theta, \hat{\mathcal{A}})$-同値両側加群があれば非可換トーラスの方が別の非可換トーラスに移る.

まとめると, closed string の表示で, T-duality group で移り合う D-brane の状態の間には open string がつながることができ, その open string の一端の代数に注目するとある非可換トーラスが

でき, もう一端の代数に注目すると別の G, Θ の非可換トーラスに移る. そしてその 2 つの非可換トーラスは $SO(d, d\ |\mathbb{Z})\ \sim$ 森田同値で関係している. ここで代数に注目するとは, 行列模型の立場で言えば行列の間の代数であり, 3 章の立場だと open string vertex operator の代数である.

第5章　変形量子化

ここで非可換幾何の直接的な弦理論との関係からひとまず離れて変形量子化の問題, つまり一般の多様体について, canonical に $*$ 積が入るかという問題について考える. [5.1] では変形量子化の問題の動機について説明する. 変形量子化はまず多様体がシンプレクティックな時についてできることが示された. さらに一般の Poisson 多様体の時にもできることができることが, Kontsevich によって示され, その $*$ 積の公式も与えられた [25]. [5.2] ではその証明を紹介する. この証明には, 2 つの代数の空間の間のホモトピー変形理論を使う. その代数のうちの片方が $*$ 積を与えるものであり, 弦理論では open string の量子化と関係する. そしてもう一方の代数が closed string に対応していて, ある種の duality のようにも思える. [5.3] では Kontsevich によって与えられたその公式を紹介する. B 場による非可換化は $B(X)$ が座標 X によっている時も含めてすべてその公式で与えられる. 簡単な例としてこの公式から Moyal 積を導いた.

5.1　変形量子化の動機

変形量子化の定義は 2.3 の通りである. もう一度まとめておく.

定義 5.1.1 (変形量子化) $*$ 積 $B : C(X) \otimes C(X) \to C(X)$ とは,
$B(f,g) = f \cdot g + \sum_{n=1}^{\infty} \hbar^n B_i(f,g), \quad f,g \in C(X)$, B_i はそれぞれ bidifferential operator で,

(i) $\hbar B_1(f,g) = i\hbar\{f,g\}$,
(ii) $B(B(f,g),h) = B(f,B(g,h)), \quad f,g,h \in C(X)$.

を満たすものである.

今までやっていた $\mathbb{R}^n$ やトーラスの場合は, もちろんそれは Moyal 積になる.

代数を結合的 (ii) に制限することは自然である. 物理でも非結合的代数はまずお目にかからない. ではなぜ (i) の条件のものを考えるかについてまず説明する. (ii) の条件から $B(f,g)$ を $\hbar$ で展開して,

$$\sum_{i+j=m} B_i(B_j(f,g),h) = \sum_{k+l=m} B_k(f,B_l(g,h)). \tag{5.1.1}$$

ここで, $m,i,j,k,l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $B_0(f,g) = f \cdot g$ とする. また, 3.4 の 「場の再定義」のところで触れた代数のゲージ変換を定義する.

定義 5.1.2 (代数のゲージ変換 T)

$$\begin{aligned} T &: C(X) \longrightarrow C(X) \\ T &= \mathrm{Id} + \sum_{n=1}^{\infty} \hbar^n T_n \\ T(f *_\theta g) &= T(f) *_{\theta'} T(g) \end{aligned} \tag{5.1.2}$$

ここで $*_\theta$ と $*_{\theta'}$ はそれぞれ T で移す前と移した後の $*$ 積で, T_n はそれぞれ微分作用素とする. これは二つの同型な代数 ($\hookleftarrow$ 理論) を同一視するための条件である. (5.1.1) の条件を, $m = 0, 1, 2$ で見てみる.

- $m = 0$ のとき $((f \cdot g) \cdot h) = (f \cdot (g \cdot h))$ より, もともとの関数環 $C(X)$ の結合則 (自明な条件) が出る. (以下, 積の $\cdot$ を省略する.)
- $m = 1$ のとき

  $$fB_1(g,h) - B_1(fg,h) + B_1(f,gh) - B_1(f,g)h = 0$$

  であり, B_1 を対称部分 B_1^+ と反対称部分 B_1^- に分け, 上の式を f と h に関して対称な部分と反対称な部分に分けると,

  $$\begin{aligned} A^+(f,g,h) := fB_1^-(g,h) - B_1^-(fg,h) + B_1^-(f,gh) - B_1^-(f,g)h = 0 \qquad &: f \leftrightarrow h \quad \text{対称} \\ fB_1^+(g,h) - B_1^+(fg,h) + B_1^+(f,gh) - B_1^+(f,g)h = 0 \qquad &: f \leftrightarrow h \quad \text{反対称} \end{aligned} \tag{5.1.3}$$

  となり, B_1^+, B_1^- はそれぞれあとで定義する Hochschild complex の 2-cocycle となっている.

  B_1^- について, $A^+(f,g,h) + A^+(g,h,f) - A^+(h,f,g) = 0$ より,

  $$B_1^-(f,gh) = gB_1^-(f,h) + B_1^-(f,g)h$$

  となり, B_1^- は derivation となる.

  また, 代数のゲージ変換 (5.1.2) より, T で移した後の $*'$ 積 を B' で表して,

  $$T(B(f,g)) = B'((T(f),T(g))$$

  を両辺 $\hbar$ で展開すると leading の項は $fg = fg$ で消えて, $\hbar$ について一次の項から

  $$B_1'(f,g) - B_1(f,g) = -fT_1(g) + T_1(fg) - T_1(f)g \tag{5.1.4}$$

  となる. $B_1' - B_1$ は f, g について対称であり, (あとで定義する) Hochschild complex の 2-coboundary である. B_1^+ について, Hochschild complex の対称な 2-cocycle は 2-coboundary と一致していてゲージ変換で消すことができる.

  まとめると, B_1 は ゲージ変換 T_1 により反対称とできる. その B_1^- は derivative の性質を持っている. B_1^- は B_1 の 2-cocycle を 2-coboundary T_1 で割った Hochschild complex のコホモロジーに値をとる.

- $m=2$ のとき (5.1.1) は

$$fB_2(g,h)-B_2(fg,h)+B_2(f,gh)-B_2(f,g)h=B_1^-(B_1^-(f,g),h)+B_1^-(B_1^-(g,h),f)$$

となる. $m=1$ の結果からゲージ変換により B_1 の対称部分を落としてある. B_2 を対称部分 B_2^+ と反対称部分 B_2^- に分け, 上の式を f と h に関して対称な部分と反対称な部分に分けると,

$$\begin{aligned} fB_2^-(g,h)-B_2^-(fg,h)+B_2^-(f,gh)-B_2^-(f,g)h=0 \qquad &: f\leftrightarrow h \quad \text{対称} \\ fB_2^+(g,h)-B_2^+(fg,h)+B_2^+(f,gh)-B_2^+(f,g)h & \\ =B_1^-(B_1^-(f,g),h)+B_1^-(B_1^-(g,h),f) \qquad &: f\leftrightarrow h \quad \text{反対称} \end{aligned}$$

となり, $f\leftrightarrow h$ 反対称の式について f, g, h をサイクリックに回した三つの式を足し合わせると, 左辺は cancel してヤコビ恒等式

$$B_1^-(B_1^-(f,g),h)+B_1^-(B_1^-(g,h),f)+B_1^-(B_1^-(h,f),g)=0$$

が出る.

以上より, B_1 のゲージ同値類は Poisson 代数で代表されることが分かった. Poisson 代数の正確な定義をまとめておく.

定義 5.1.3 (Poisson 代数) $\{\quad,\quad\}\quad : C(X)\otimes C(X)\longrightarrow C(X)$ が与えられていて, $f,g,h\ \in C(X)$ で

1. $\{g,f\}=-\{f,g\}$ ： 反対称性
2. $\{f+h,g\}=\{f,g\}+\{h,g\}, \qquad \{\lambda f,g\}=\lambda\{f,g\} \quad \lambda\in\mathbb{C}$ ： 双線形性
3. $\{f,gh\}=g\{f,h\}+\{f,g\}h$ ： derivative
4. $\{\{f,g\},h\}+\{\{g,h\},f\}+\{\{h,f\},g\}=0$:ヤコビ律

を満たすものを Poisson 代数という.

双線形性は, B_1 の定義より自動的に満たされている.

また, Poisson 代数を

$$\{f,g\}(x)=\sum_{i,j=1}^{d}\alpha^{ij}\partial_i f(x)\partial_j g(x), \qquad \alpha^{ji}=-\alpha^{ij}$$

で与えると,

$$\begin{aligned} \{\{f,g\},h\}(x)&=\sum_{i,j,k,l=1}^{d}\alpha^{lk}\partial_l(\alpha^{ij}(x)\partial_i f(x)\partial_j g(x))\partial_k h(x) \\ &=\alpha^{lk}\partial_l\alpha^{ij}(x)\partial_i f(x)\partial_j g(x)\partial_k h(x) \\ &\quad+\alpha^{lk}(x)\alpha^{ij}[(\partial_i\partial_l f(x))\partial_j g(x)+\partial_i f(x)(\partial_l\partial_j g(x))]\partial_k h(x) \end{aligned}$$

より, これを f, g, h について cyclic に回した 3 式を足し合わせると, 上の第 2 項は cancel して, 第 1 項 の $\partial_i f(x)\partial_j g(x)\partial_k h(x)$ の係数より, ヤコビ律は

$$\alpha^{kl}\partial_l\alpha^{ij} + \alpha^{il}\partial_l\alpha^{jk} + \alpha^{jl}\partial_l\alpha^{ki} = 0 \tag{5.1.5}$$

と表される.

5.2 代数の変形理論

上で定義された変形量子化の存在の証明のために, その $*$ 積を 1-complex とする Hochschild complex ($\mathfrak{g}_2$ とする) を, 別の (もう少し見やすい構造を持つ別の複体 ($\mathfrak{g}_1$ とする) からの写像としてつくる. 二つの代数の複体は共に differential graded Lie algebra の構造 (coboundary operator d, リー積 [,] を持つ. 下で定義する.) を持ち, 二つの複体は, それぞれそのコホモロジーをとったものの間に (線形な) 同型写像をもっていることが知られている. ($\mathfrak{g}_1$ は coboundary operator が $d = 0$ で定義されているので, 複体とそのコホモロジーをとったものは一致している.) [5.2.1] ではこのような differential graded Lie algebra の構造について説明する.

[5.2.2] ではその differential graded Lie algebra の Maurer-Cartan 方程式 $d\gamma + \frac{1}{2}[\gamma,\gamma] = 0,\ \gamma \in \mathfrak{g}$ の解を考える. それを 1-complex に関して考えると, $\mathfrak{g}_1 \ni \alpha^{ij}\partial_i \wedge \partial_j$ はヤコビ律を満たすもの (よって Poisson bracket), $\mathfrak{g}_2 \ni B(\ ,\ )$ は B が associativity を満たすもの, となる.

よってこの Maurer-Cartan 方程式を保つ $\mathfrak{g}_1$ から $\mathfrak{g}_2$ への写像を作りたい. 上で言ったコホモロジーの間の線形写像は Maurer-Cartan 方程式を保たず, 非線形写像 ($\varphi : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2 = \varphi(\mathfrak{g}_1)$ とする) に拡張して考えなければならない. これを $\hbar$ の摂動展開として作る. つまり, $\alpha[[\hbar]] = \alpha_1\hbar + \alpha_2\hbar^2 + \cdots \in \mathfrak{g}_1$ として, $\varphi(\alpha) = B_1\hbar + B_2\hbar^2 + \cdots$ で, B_i がそれぞれ α で展開すると α の一次だけでなく, 2 次, 3 次, , , でできているいうことである. ($\hbar$ の 0 次はないのは, そういう定義にしたからである.)

そのような理論の枠組として L_∞-写像というものがある. 代数の複体に作用する coboundary operator d も拡張して Q という作用素にし, 上の differential graded Lie algebra を L_∞-代数の枠組に当てはめて考える. これらについて [5.2.3] で説明する. この理論の中で Maurer-Cartan 方程式は自然に表され, L_∞-写像が存在すれば, その写像は Maurer-Cartan 方程式を保つことが分かる.

[5.2.4] ではその L_∞-写像の存在の証明について, その方針を紹介する. これらの手法は弦理論と非常に関係が深いように見える.

5.2.1 differential graded Lie algebra

differential graded Lie algebra とは普通の Lie algebra の構造に文字通り微分作用と, grading が加わったものであり, grading に関して代数の複体ができる.

定義 5.2.1 (differential graded Lie algebra)

$$\mathfrak{g} = \oplus_{k\in\mathbb{Z}}\mathfrak{g}^k[-k] \qquad \mathfrak{g}^k \ \ grade\ \text{つきベクトル空間} \qquad \text{として}$$
$$[\quad,\quad] : \mathfrak{g}^k \otimes \mathfrak{g}^l \longrightarrow \mathfrak{g}^{k+l}$$
$$d : \mathfrak{g}^k \longrightarrow \mathfrak{g}^{k+1}$$

の構造を持っていて,

$$\begin{aligned}
&\bullet\ d\cdot d = 0\\
&\bullet\ d[\gamma_1,\gamma_2] = [d\gamma_1,\gamma_2] + (-1)^{\bar{\gamma}_1}[\gamma_1, d\gamma_2]\\
&\bullet\ [\gamma_2,\gamma_1] = (-1)^{\bar{\gamma}_1\cdot\bar{\gamma}_2}[\gamma_1,\gamma_2]\\
&\bullet\ [\gamma_1,[\gamma_2,\gamma_3]] + (-1)^{\bar{\gamma}_3\cdot(\bar{\gamma}_1+\bar{\gamma}_2)}[\gamma_3,[\gamma_1,\gamma_2]] + (-1)^{\bar{\gamma}_1\cdot(\bar{\gamma}_2+\bar{\gamma}_3)}[\gamma_2,[\gamma_3,\gamma_1]] = 0
\end{aligned} \tag{5.2.1}$$

を満たすものである. ここで, γ_i は, $\bar{\gamma}_i \in \mathbb{Z}$ で, $\gamma_i \in \mathfrak{g}^{\bar{\gamma}_i}$ であるものとする.

符号の問題は d を外微分作用素, grading を form の degree と思えば consistent である.

$[-k]$ の意味の説明をする. あとで重要になる. ある $\mathrm{grad} = k_1$ のベクトル空間から $\mathrm{grad} = k_2$ を差し引く作用を $[k_2]$ と書くことにする.

$$\mathfrak{g}^{k_1} = \mathfrak{g}^{k_1-k_2}[k_2] \tag{5.2.2}$$

よってこの作用で grad の数と [ ] の中の数の和は一定である.

ここではもともとの (grading 0 の) ベクトル空間から $\mathrm{grad} = k$ のベクトル空間を作るために grad を $-k$ 消す操作として使った.

ここで考える 2 つの代数 (の複体) を定義する.

定義 5.2.2 (Hochschild complex) Hochschild p-complex とは,
$C : C(X)\otimes C(X)\otimes\cdots\otimes C(X) \longrightarrow C(X)$ であり,

$$\begin{aligned}
(dC)(f_0,f_1,\cdots,f_p) = {}& f_0C(f_1,\cdots,f_p)\\
&- \sum_{r=0}^{p-1}(-1)^r C(f_0,\cdots,f_rf_{r+1},\cdots,f_p)\\
&+ (-1)^{p+1}C(f_0,\cdots,f_{p-1})f_p
\end{aligned}$$

で与えられる coboundary operator d を持つものである.

$p = 1, 2$ に対してそれぞれ,

$$\begin{aligned}
(dC)(f_0,f_1) &= f_0C(f_1) - C(f_0f_1) + C(f_0)f_1\\
(dC)(f_0,f_1,f_2) &= f_0C(f_1,f_2) - C(f_0f_1,f_2) + C(f_0,f_1f_2) - C(f_0,f_1)f_2
\end{aligned}$$

となり, (5.1.4)(5.1.3) がそれぞれ 2-coboundary , 2-cocycle になっていることが分かる.

この complex は, さらに積を定義して上で定義した differential graded Lie algebra に埋め込むことができる.

定義 5.2.3 ($\mathfrak{g}_2 = D_{poly}(X)$)　　Hochschild complex を $\mathfrak{g}_2$ とする.

$$\mathfrak{g}_2 = \oplus_{k\in\mathbb{Z}}\mathfrak{g}_2^k[-k], \qquad \mathfrak{g}_2^k := \begin{cases} Hom(C(X)^{\otimes(k+1)}, C(X)) & k \geq -1 \\ 0 & k \leq -2 \end{cases}$$

ここで, $[-k]$ はもともと (grading 0 の) ベクトル空間である $Hom(C(X)^{\otimes(k+1)}, C(X))$ を grading k にずらしたことを意味している. grading k はこれから定義する積が differential graded Lie algebra の積 $[\ ,\ ]$ の定義 $\mathfrak{g}^k \otimes \mathfrak{g}^l \longrightarrow \mathfrak{g}^{k+l}$ を満たすように $\mathfrak{g}_2^k$ の定義で調節してある. coboundary operator と積を次で定義する.　(coboundary operator は (定義 5.2.2) のものと同じである.)

$$\begin{aligned}
(dC)(f_0 \otimes \cdots f_{k+1}) &= f_0 \cdot C(f_1 \otimes \cdots f_{k+1}) \\
&\quad - \sum_{r=0}^{k} C(f_0 \otimes \cdots \otimes (f_r \cdot f_{r+1}) \otimes \cdots f_{k+1}) \\
&\quad + (-1)^k C(f_0 \otimes \cdots \otimes f_k) \cdot f_{k+1}, \qquad C \in \mathfrak{g}_2^k \\
[C_1,C_2] &= C_1 \circ C_2 - (-1)^{k_1 k_2} C_2 \circ C_1 \qquad C_i \in \mathfrak{g}_2^{k_i} \\
&\quad (C_1 \circ C_2)(f_0 \otimes \cdots \otimes f_{k_1+k_2}) \\
&\quad := \sum_{r=0}^{k_1} (-1)^{rk_2} C_1(f_0 \otimes \cdots \otimes f_{r-1} \otimes (C_2(f_r \otimes \cdots \otimes f_{r+k_2})) \otimes f_{r+k_2+1} \otimes \cdots \otimes f_{k_1+k_2})
\end{aligned}$$

Hochschild complex としてここで polydifferential operator を考える. つまり,

$$\mathfrak{g}_2^k \ni C : f_0 \otimes \cdots \otimes f_k \longmapsto \sum_{(I_0,\cdots,I_k)} C^{I_0,\cdots,I_k}(x) \cdot \partial_{I_0}(f_0) \cdots \partial_{I_k}(f_k) \qquad C^{I_0,\cdots,I_k}(x) \in C(X)$$

I_r はそれぞれ multi index である.　座標を $x^i \quad i = 1, ..., d$, $I_r = (i_r^0, \cdots, i_r^d)$ として, $\partial_{I_r} = (\partial_1)^{i_r^1} \cdots (\partial_d)^{i_r^d}$ である. この $\mathfrak{g}_2$ を $D_{poly}(X)$ と呼ぶことにする.

この $D_{poly}(X)$ をこれから定義する $\mathfrak{g}_1 = T_{poly}(X)$ からの写像として捉える.

定義 5.2.4 ($\mathfrak{g}_1 = T_{poly}(X)$)

$$\mathfrak{g}_1 = \oplus_{k\in\mathbb{Z}}\mathfrak{g}_1^k[-k], \qquad \mathfrak{g}_1^k := \begin{cases} \Gamma(X, \wedge^{k+1} TX) & k \geq -1 \\ 0 & k \leq -2 \end{cases}$$

この $T_{poly}(X)$ の元を polyvector field と呼ぶ. coboundary operator d とリー積の定義は次の通りである.

$d = 0$　　(つまり complex とそのコホモロジーをとったものが一致している.)

$$
\begin{aligned}
&[\xi_0 \wedge \cdots \wedge \xi_{k_1}, \eta_0 \wedge \cdots \wedge \eta_{k_2}] \\
&\quad = \sum_{i=0}^{k_1}\sum_{j=0}^{k_2}(-1)^{i+k_1+k_2}[\xi_i, \eta_j] \wedge \xi_0 \wedge \cdots \check{\xi}_i \cdots \wedge \xi_{k_1} \wedge \eta_0 \wedge \cdots \eta_j \cdots \wedge \eta_{k_2} \\
&\qquad k_1, k_2 \geq 0 \qquad \xi_i, \eta_j \in \Gamma(X, TX) \\
&[\xi_0 \wedge \cdots \wedge \xi_{k_1}, h] \\
&\quad = \sum_{i=0}^{k}(\xi_i h) \cdot \xi_0 \wedge \cdots \check{\xi}_i \cdots \wedge \xi_k \\
&\qquad h \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \qquad \xi_i \in \Gamma(X, TX)
\end{aligned}
$$

この積の定義が well-defined であることを見る. $h\xi_0 \wedge \cdots \wedge \xi_{k_1}$ は h がどの ξ_i にかかっていると思っても良い. しかし

$$
\begin{aligned}
&[\xi_0 \wedge \cdots \wedge (h\xi_r) \wedge \cdots \wedge \xi_{k_1}, \eta_0 \wedge \cdots \wedge \eta_{k_2}] \\
&\quad = h \cdot [\xi_0 \wedge \cdots \wedge \xi_{k_1}, \eta_0 \wedge \cdots \wedge \eta_{k_2}] \\
&\quad + \sum_{j=0}^{k_2}(-1)^{r+j+k_1}\{(-\eta_j h) \cdot \xi_r\}\xi_0 \wedge \cdots \check{\xi}_r \cdots \wedge \xi_{k_1} \wedge \eta_0 \wedge \cdots \check{\eta}_j \cdots \wedge \eta_{k_2} \\
&\quad = h \cdot [\xi_0 \wedge \cdots \wedge \xi_{k_1}, \eta_0 \wedge \cdots \wedge \eta_{k_2}] \\
&\quad + \sum_{j=0}^{k_2}(-1)^{j+k_1+1}(\eta_j h) \cdot \xi_0 \wedge \cdots \wedge \xi_{k_1} \wedge \eta_0 \wedge \cdots \check{\eta}_j \cdots \wedge \eta_{k_2}
\end{aligned}
$$

より, 積は r によらないので well-defined であることが分かる. 同様に

$$
\begin{aligned}
&[\xi_0 \wedge \cdots \wedge \xi_{k_1}, \eta_0 \wedge \cdots \wedge (h\eta_r) \wedge \cdots \wedge \eta_{k_2}] \\
&\quad = h \cdot [\xi_0 \wedge \cdots \wedge \xi_{k_1}, \eta_0 \wedge \cdots \wedge \eta_{k_2}] + \sum_{i=0}^{k_1}(-1)^i(\xi_i h) \cdot \xi_0 \wedge \cdots \check{\xi}_i \cdots \wedge \eta_{k_2}.
\end{aligned}
$$

また, 2 つの polyvector field を $\alpha = \alpha^{i_0 \cdots i_k}\xi_{i_0} \wedge \cdots \wedge \xi_{i_k}$, $\beta = \beta^{j_0 \cdots j_l}\eta_{j_0} \wedge \cdots \wedge \eta_{j_l}$ と表すと, 上の計算を使って

$$
\begin{aligned}
&[\alpha, \beta] = \alpha^{i_0 \cdots i_k}\beta^{j_0 \cdots j_l}[\xi_{i_0} \wedge \cdots \wedge \xi_{i_k}, \eta_0 \wedge \cdots \wedge \eta_{j_l}] \\
&\quad + \sum_{s=0}^{k}(-1)^s\alpha^{i_0 \cdots i_k}(\xi_{i_s}\beta^{j_0 \cdots j_l})\xi_{i_0} \wedge \cdots \check{\xi}_{i_s} \cdots \wedge \eta_{j_l} - \sum_{t=0}^{l}(-1)^{t+k}\beta^{j_0 \cdots j_l}(\eta_{j_t}\alpha^{i_0 \cdots i_k})\xi_{i_0} \wedge \cdots \check{\xi}_{i_s} \cdots \wedge \eta_{j_l}
\end{aligned}
$$

となる. $X = \mathbb{R}^d$ の時 (又は local な表示で表す時) は, $\xi_i = \partial_i$ ととれて, 右辺の第 1 項目はなくなる.

また local な表示でこの ∂_i を反交換な変数 η と置き換えて polyvector field を $(x^1, \cdots, x^d|\eta_1, \cdots \eta_d)$ の関数と思うとその積は

$$
\begin{aligned}
&[\gamma_1(x,\eta), \gamma_2(x,\eta)] = \gamma_1 \bullet \gamma_2 - (-1)^{k_1 k_2}\gamma_2 \bullet \gamma_1 \qquad \gamma_i \in \mathfrak{g}_1^{k_i} \\
&\gamma_1 \bullet \gamma_2 := \sum_{i=1}^{d}\frac{\partial \gamma_1}{\partial \eta_i}\frac{\partial \gamma_2}{\partial x^i}
\end{aligned} \tag{5.2.3}
$$

と表すこともできる. これは 6 章で使う Batalin-Vilkovski antibracket と対応している. そのとき x, η 自体が 2 次元の world sheet D 上の場に昇格していて, つまり 次元 d は $d \times \infty$, 微分は D 上の場の汎関数微分, $\sum_{i=1}^{d}$ は $\sum_{i=1}^{d} \cdot \int_D$ になっている.

さてこの $\mathfrak{g}_1 = T_{poly}(X)$ から $\mathfrak{g}_2 = D_{poly}(X)$ への "classical" な写像 $\mathcal{U}_1$ を自然に定義することができる.

定義 5.2.5 ((擬同型写像) $\mathcal{U}_1$)

$$\begin{aligned} &\mathcal{U}_1 : T_{poly}(X) \longrightarrow D_{poly}(X) \\ &\xi_0 \wedge \cdots \wedge \xi_k \longmapsto \left(f_0 \otimes \cdots \otimes f_k \mapsto \frac{1}{(k+1)!} \sum_{\sigma \in \Sigma_{k+1}} sgn(\sigma) \prod_{i=0}^{k} \xi_{\sigma_i}(f_i) \right) \qquad k \geq 0 \\ &h \longmapsto (\mathbf{1} \mapsto h) \qquad\qquad h \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \end{aligned}$$

$\alpha = \frac{1}{(k+1)!} \alpha^{i_0 \cdots i_k} \partial_{i_0} \wedge \cdots \wedge \partial_{i_k}$ と表すと $\mathcal{U}_1$ は

$$\alpha^{i_0 \cdots i_k} \partial_{i_0} \wedge \cdots \wedge \partial_{i_k} \longmapsto \left(f_0 \otimes \cdots \otimes f_k \mapsto \frac{1}{(k+1)!} \alpha^{i_0 \cdots i_k} \partial_{i_0} f_0 \cdots \partial_{i_k} f_k \right)$$

となる.

この写像 $\mathcal{U}_1$ は, $T_{poly}(X)$ と 「$D_{poly}(X)$ のコホモロジーをとったもの」の間の同型写像となっていることが知られている. そのような写像を 擬同型写像 と呼ぶ. その証明として示さなければならないことは,

$$\begin{array}{ccc} T_{poly}(X)^k & \xrightarrow{\mathcal{U}_1} & D_{poly}(X)^k \\ {\scriptstyle d_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d_2} \\ T_{poly}(X)^{k+1} & \xrightarrow[\mathcal{U}_1]{} & D_{poly}(X)^{k+1} \end{array}$$

(♠) $\mathcal{U}_1$ が $T_{poly}(X)$ と $D_{poly}(X)$ の cohomology の間の写像になっていること, つまり D_{poly}^k の T_{poly}^k からの Image が D_{poly}^k の cocycle に入っていること, (♣) さらにその写像が $T_{poly}(X)^k$ (自分自身が cohomonogy) と $D_{poly}(X)^k$ の cohomology(=cocycle/coboundary) との間の同型写像となっていること, である. (♣) の証明は長いので省略する. (♠) を示すには, $\xi_0 \wedge \cdots \wedge \xi_k \in T_{poly}(X)^k$ を $\mathcal{U}_1$ で移した $\left(f_0 \otimes \cdots \otimes f_k \mapsto \frac{1}{(k+1)!} \sum_{\sigma \in \Sigma_{k+1}} sgn(\sigma) \prod_{i=0}^{k} \xi_{\sigma_i}(f_i) \right) \in D_{poly}(X)^k$ が d_2 の作用

で消えれば良いわけだが１つ１つについて,

$$
\begin{aligned}
dC_\sigma(f_0\otimes\cdots\otimes f_{k+1}) &= f_0C_\sigma(f_1\otimes\cdots f_{k+1})\\
&\quad -\sum_{r=0}^{k} C_\sigma(f_0\otimes\cdots\otimes(f_r\cdot f_{r+1})\otimes\cdots f_{k+1}) + (-1)^k C_\sigma(f_0\otimes\cdots\otimes f_k)\cdot f_{k+1})\\
&= f_0\cdot\xi_{\sigma_0}f_1\cdots\xi_{\sigma_k}f_{k+1} - \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\xi_{\sigma_0 f_0}\cdots\xi_{\sigma_i}(f_if_{i+1})\cdot\xi_{\sigma_{i+1}}f_{i+2}\cdots\xi_{\sigma_k}f_{k+1}\\
&\qquad +(-1)^k\xi_{\sigma_0}f_0\cdots\xi_{\sigma_k}f_k\cdot f_{k+1}\\
&= \begin{matrix}[f_0] & \big(+[f_1] & +[f_2]\big) & \cdots & \cdots & [f_{k+1}]\\ \big(-[f_0] & -[f_1]\big) & \cdots & \cdots & & -[f_{k+1}]\end{matrix} = 0\\
[f_i] &:= \xi_0f_0\cdots\xi_{i-1}f_{i-1}\cdot f_i\cdot\xi_if_{i+1}\cdots\xi_kf_{k+1}
\end{aligned}
$$

となっていることが分かる.

5.2.2 Maurer-Cartan 方程式

さてここで differential graded Lie algebra の中の Maurer-Cartan 方程式 $d\gamma+\frac{1}{2}[\gamma,\gamma]=0$ を満たす部分空間を考える. $T^1_{poly}(X)$ に関してその部分空間は, $\alpha=\alpha^{ij}\partial_i\wedge\partial_j\in T^1_{poly}(X)$ がヤコビ律 (5.1.5) を満たすことと同値になる. よって, $D^1_{poly}(X)$ に関してその部分空間が $*$ 積の associativity の条件と同値になり, この Maurer-Cartan 方程式 を保つ $T^1_{poly}(X)$ から $D^1_{poly}(X)$ への (適当な同値類で割った) 同型写像があれば, [5.1] で言ったように $\hbar$ の 1 次の項が Poisson bracket となる $*$ 積がその Poisson bracket を決めるごとに一意に決まることになる. しかしその同型写像が上で与えた $\mathcal{U}_1$ であれば話は早いが, 実際にはそう簡単には行かず, そのような同型写像を作るために [5.2.3] の長い議論を要する.

まず Maurer-Cartan 方程式の解空間 ($/\sim$) の定義をする.

定義 5.2.6 ($\mathcal{MC}(\mathfrak{g})$, $Def_{\mathfrak{g}}[[\hbar]]$)

$$\mathcal{MC}(\mathfrak{g}) := \Big\{\gamma\in\mathfrak{g}^1 \mid d\gamma+\frac{1}{2}[\gamma,\gamma]=0\Big\}/\Gamma^0$$

ここで Γ^0 は $\mathfrak{g}$ に自然に作用する群であり, 微小変換で表すと,

$$\mathfrak{g}^0\ni\lambda\longmapsto\big(\delta\gamma=d\lambda+[\lambda,\gamma]\big)$$

である. これを "Classical" な解空間と思う. さらに, これを "Quantum" に deform した空間を定義する.

$$Def_{\mathfrak{g}}[[\hbar]] := \mathcal{MC}(\mathfrak{g}[[\hbar]])$$

これらの意味を説明する. まず, "Classical" な $\mathcal{MC}(\mathfrak{g})$ が, $T_{poly}(X)$, $D_{poly}(X)$ の何に対応しているかを見る.

- $\mathcal{MC}(\mathfrak{g}_1)$　　Maurer-Cartan 方程式 は $d=0$ なので $[\alpha,\alpha]=0$ $\alpha\in\mathfrak{g}_1^1$ となる. grading は 1 なので, 同じもの同士の交換関係も恒等的には 0 にならないことに注意する. local な表示でこれを計算すると,

$$\begin{aligned}0=[\alpha^{ij}\partial_i\wedge\partial_j,\alpha^{kl}\partial_k\wedge\partial_l]&=2\alpha^{ij}\partial_i\alpha^{kl}\cdot\partial_j\wedge\partial_k\wedge\partial_l-(-1)2\alpha^{kl}\partial_k\alpha^{ij}\cdot\partial_i\wedge\partial_j\wedge\partial_l\\&=-4\alpha^{kl}\partial_l\alpha^{ij}\cdot\partial_i\wedge\partial_j\wedge\partial_k\end{aligned}$$

  より, ヤコビ律 (5.1.5) が出る. よって $T^1_{poly}(X)$ において 「Maurer-Cartan eq $\longleftrightarrow$ ヤコビ律」.

- $\mathcal{MC}(\mathfrak{g}_2)$

$$d\tilde{\alpha}(f_0\otimes f_1\otimes f_2)+\frac{1}{2}[\tilde{\alpha},\tilde{\alpha}](f_0\otimes f_1\otimes f_2)=0\ ,\ \tilde{\alpha}\in\mathfrak{g}_2^1. \tag{5.2.4}$$

  Hochschild complex の定義より $\frac{1}{2}[\tilde{\alpha},\tilde{\alpha}]=\tilde{\alpha}\circ\tilde{\alpha}$ は

$$\tilde{\alpha}\circ\tilde{\alpha}(f_0\otimes f_1\otimes f_2)=\tilde{\alpha}(\tilde{\alpha}(f_0,f_1),f_2)-\tilde{\alpha}(f_0,\tilde{\alpha}(f_1,f_2))$$

  であるので, $D^1_{poly}(X)$ において "Classical" には, 「Maurer-Cartan eq $\longleftrightarrow$ (Hochsclild cocycle $\leftrightarrow$ associativity)」 となっている.

次にこれらを "Quantum" に deform する.

- $Def_{\mathfrak{g}_1}[[\hbar]]$　　α を $\alpha=\alpha_1\hbar+\alpha_2\hbar^2+\cdots$ とする. $\hbar$ の 0 次の項を入れないことに注意する. もちろん α をこのように定義しなおしても, 上の "Classical" な時と出てくる条件は変わらない. しかし, $D^1_{poly}(X)$ に関してはもう少し新しいことが出てくる.

- $Def_{\mathfrak{g}_2}[[\hbar]]$　　$C\ \in\mathfrak{g}_2^1$ を deform する時, $*$ 積の定義より C の $\hbar$ に関する 0 次の項は, Id であった. よって, $C=\mathrm{Id}-\tilde{\alpha}$, $\tilde{\alpha}=\tilde{\alpha}_1\hbar+\tilde{\alpha}_2\hbar^2+\cdots\in\mathfrak{g}_2^1[[\hbar]]$ と定義する. このとき associativity の条件 $C(C(f_0\otimes f_1)\otimes f_2)-C(f_0,C(f_1,f_2))=0$ を $\tilde{\alpha}$ について書き直すと

$$\begin{aligned}&(\mathrm{Id}-\tilde{\alpha})(f_0f_1+\tilde{\alpha}(f_0,f_1),f_2)-(\mathrm{Id}-\tilde{\alpha})(f_0,f_1f_2+\tilde{\alpha}(f_1,f_2))\\&\quad=f_0\tilde{\alpha}(f_1,f_2)-\tilde{\alpha}(f_0f_1,f_2)+\tilde{\alpha}(f_0,f_1f_2)-\tilde{\alpha}(f_0,f_1)f_2\\&\qquad+\tilde{\alpha}(\tilde{\alpha}(f_0,f_1),f_2)-\tilde{\alpha}(f_0,\tilde{\alpha}(f_1,f_2))\end{aligned}$$

  となり, 上の Maurer-Cartan eq(5.2.4) の左辺と一致する. よって $Def_{\mathfrak{g}_2}[[\hbar]]$ において 「Maurer-Cartan eq $\longleftrightarrow$ associativity」 となることが分かった.

さらに (5.2.6) のゲージ変換が何に対応するかも見ておく.

- $\Gamma_2^0\curvearrowright\mathfrak{g}_2$　　$\lambda\in\mathfrak{g}_2^0$ について Γ_2^0 の微小変換は

$$(d\lambda+[\lambda,\tilde{\alpha}])(f,g)=d\lambda(f,g)+[\lambda,\tilde{\alpha}](f,g)$$

であり, これを Hochschild complex のゲージ変換と比べてみる. $T := \mathrm{Id} + \lambda$, $C = \mathrm{Id} - \tilde{\alpha}$, また (微小) ゲージ変換されたものを $'$ をつけて表して λ の 1 次まで ($\hbar$ は all order) 展開すると,

$$\begin{aligned} 0 &= T(C(f,g)) - C'(T(f),T(g)) \\ &= \Big((\mathrm{Id}+\lambda)(fg - \tilde{\alpha}(f,g))\Big) - \Big((f+\lambda(f))(g+\lambda(g)) - \tilde{\alpha}'(f+\lambda(f), g+\lambda(g))\Big) \\ &= (\tilde{\alpha}' - \tilde{\alpha})(f,g) - (d\lambda + [\lambda, \tilde{\alpha}])(f,g) \end{aligned}$$

となる. ここで Hochschild complex の定義より $(\lambda \circ \tilde{\alpha})(f,g) = \lambda(\tilde{\alpha}(f,g))$, $(\tilde{\alpha} \circ \lambda)(f,g) = \tilde{\alpha}(\lambda(f), g) + \tilde{\alpha}(f, \lambda(g))$ を使った. よって 「$\mathbb{T}_2^0 \longleftrightarrow$ Hochschild complex のゲージ変換」であることが分かった.

よってこの "Quantum" な Maurer-Cartan eq を保つ写像をみつければよい. 上の $\mathcal{U}_1$ は d と交換した. しかしこれは Lie bracket $[\quad,\quad]$ を保たないことが分かる. $\xi \in \mathfrak{g}_1^k, \eta \in \mathfrak{g}_1^l$ を先に積をとって $\mathcal{U}_1$ で送ったものはもちろん $f_0, \cdots, f_{k+l}$ に関して反対称となる ($\mathcal{U}_1([\xi,\eta])(f_0,\cdot\cdot,f_j,\cdot\cdot,f_i,\cdot\cdot,f_{k+l}) = -\mathcal{U}_1([\xi,\eta])(f_0,\cdot\cdot,f_i,\cdot\cdot,f_j,\cdot\cdot,f_{k+l})$) が, ξ, η を $\mathcal{U}_1$ で送ってから $D_{poly}(X)$ として積をとったものは, そうならず, かなり「汚い」形になる.

ここで $T_{poly}(X)$ から $D_{poly}(X)$ への写像を $[[\hbar]]$ で perturb して, $\mathfrak{g}_1$ に関して線形なもの ($\mathcal{U}_1$ など) から非線形なもの ($\mathfrak{g}_2[[\hbar]] = \mathfrak{g}_1(\hbar) + \mathcal{U}(\mathfrak{g}_1)(\hbar^2) + \cdots$) に拡張する. 以下先に定義を述べるが, それらを使う理由はその定義が 「Maurer-Cartan eq と非線形写像が可換」であるということを含んでいるからである.

5.2.3 L_∞-代数としての differential graded Lie algebra

まず, 下で定義する L_∞-代数の differential Q と非線形同型写像 (L_∞-写像) を作るための理論の枠組を説明する. これらは余代数の言葉で書かれている. 余代数とは, 代数の dual である. つまり V をベクトル空間として, ある代数 $C(V^*)$ に積 $\cdot : C(V^*) \otimes C(V^*) \to C(V^*)$ が与えられている時, その dual $C(V)$ に余積 $\triangle : C(V) \to C(V) \otimes C(V)$ が与えられる. 弦理論的には, 積を 2 つの (open) string が 1 つの string になる 3 点 vertex と解釈すると, その時間を逆に見たものが余積である.

これにより, 代数 $C(V^*)$ の積 $\cdot$ が結合的 (associative), 可換, などの性質を持つと, それに対応して余積 $\triangle$ は余結合的, 余可換となり, さらに代数 $C(V^*)$ に derivative d が存在するとそれに対応して代数 $C(V^*)$ に余微分 (coderivative) Q が入る.

ここで余結合的, 余可換で, 余微分を持つ余代数を考える. $v \in C(V)$, またこの余代数 $v_i \in C(V)$ の grading を k_i' と定義して

$$\begin{aligned} \text{余結合的} &\iff (\triangle \otimes \mathbf{1})\triangle = (\mathbf{1} \otimes \triangle)\triangle \\ \text{余可換} &\iff v_1 \otimes v_2 = (-1)^{k_1' k_2'} v_2 \otimes v_1 \end{aligned}$$

であり, この性質を持つ余積は

$$\triangle(v_1 \cdots v_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}} \sum_{k=0}^{n} \epsilon(\sigma) \frac{1}{k!(n-k)!} (v_{\sigma(1)} \cdots v_{\sigma(k)}) \otimes (v_{\sigma(k+1)} \cdots v_{\sigma(n)}) \tag{5.2.5}$$

と決まる. また余微分は $Q = (Q_0) + Q_1 + Q_2 + \cdots$ として, 多重線形写像 $\mathfrak{l}_k : V^{\otimes k} \longrightarrow V$ を拡張して

$$Q_k(v_1 \cdots v_n) = \frac{1}{k!(n-k)!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}} \epsilon(\sigma) \mathfrak{l}_k(v_{\sigma(1)} \cdots v_{\sigma(k)}) \otimes v_{\sigma(k+1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)} \ , \quad v_i \in V$$

と決まる. ここで $\epsilon(\sigma)$ は $v_1 \cdots v_n$ を $v_{\sigma(1)} \cdots v_{\sigma(n)}$ と入れかえるときに v_i の grading によって出る符号とする.

定義 5.2.7 (L_∞-代数) V を graded vector space として, (V, Q) が L_∞-代数であるとは, V とその grade つき余代数 $C(V)$ の上の grad $= 1$ の codifferential Q の組のことを言う. ここで, codifferential とは $Q \circ Q = 0$ を満たすもののことをいう.

$Q_0 = 0$ のときを 強 L_∞-代数 (強ホモトピー代数), $Q_0 \neq 0$ のときを弱 L_∞-代数 (弱ホモトピー代数) と呼ぶ.

L_∞-代数は, その特別な場合として differential graded Lie algebra を含んでいる. しかし L_∞-代数は grade つき対称多項式の空間と言え, differential graded Lie algebra は逆に Lie-積により grade つき反可換な代数なので, それをうまく L_∞-代数として表すために grading を $V = \mathfrak{g}[1]$ とずらす. そして $\mathfrak{l}_0 = 0, \mathfrak{l}_1 = d, \mathfrak{l}_2(\gamma_1, \gamma_2) = (-1)^{(\bar{\gamma}_1+1)}[\gamma_1, \gamma_2]$ とすることによって, L_∞-代数は differential graded Lie algebra になる. ただし $\bar{\gamma}_1$ は differential graded Lie algebra での grading である.

Lie 括弧の反可換性は定義より $\mathfrak{l}_2$ の可換性と等価. L_∞-代数の条件である $Q^2 = 0$ を $Q = (Q_0) + Q_1 + Q_2$ とばらして

$$0 = Q^2 = Q_1^2 + (Q_1 Q_2 + Q_2 Q_1) + (Q_1 0 + Q_2^2 + 0 Q_1) \tag{5.2.6}$$

とし, $Q^2 : V^{\otimes k} \longrightarrow V$ となるような k を選んでそれに作用させることによって (5.2.6) の右辺の第 1 項から $d^2 = 0$, 第 2 項からライプニッツ則, 第 3 項からヤコビ律が出る.

さらに 2 つの余代数 $C(V_1)$, $C(V_2)$ の間の余準同型写像 φ を考える.

$$\varphi \text{ が余準同型} \Longleftrightarrow \triangle(\varphi) = (\varphi \otimes \varphi)\triangle$$

であり, この時, $\varphi_n : V_1^{\otimes n} \to V_2$ を決めると $\varphi : (v_1 \cdots v_n) \mapsto \varphi_n(v_1 \cdots v_n) + \cdots$, $\varphi_n(v_1 \cdots v_n) \in V_2$, $\cdots \in \oplus_{l \geq 2} V_2^{\otimes l}$ となる φ は

$$\varphi = \varphi^1 + \frac{1}{2}\varphi^2 + \frac{1}{3!}\varphi^3 + \cdots \ , \qquad \varphi^l \ : \ C(V_1) \longrightarrow V_2^{\otimes l}$$

$$\varphi^l(v_1 \cdots v_n) = \sum_{\substack{n_1, \cdots, n_l \geq 1 \\ n_1 + \cdots + n_l = n}} \frac{1}{n_1! \cdots n_l!} \epsilon(\sigma) \varphi_{n_1}(v_{\sigma(1)} \cdots v_{\sigma(n_1)}) \otimes \cdots \otimes \varphi_{n_l}(v_{\sigma(n-n_l+1)} \cdots v_{\sigma(n)}) \tag{5.2.7}$$

と唯一つに決まる.

ここで φ_n の写像と V_1, V_2 の grading の関係について見る. 写像は L_∞ での grading を保つ. $v_i \in V_1$ の grading を k_i', $\tilde{v} \in V_2$ の grading を m' として

$$\begin{array}{rccc} \varphi_n \ : & V_1 \otimes \cdots \otimes V_1 & \longrightarrow & V_2 \\ & v_1^{k_1'} \otimes \cdots \otimes v_n^{k_n'} & \mapsto & \tilde{v}^{m'} \end{array}$$

よって $k_1' + \cdots k_n' = m'$.

今考えたいのは $V_1 = T_{poly}[1]$ から $D_{poly}[1]$ への余準同型写像 （L_∞-写像）なのでこの時上の関係が何を意味しているかを考える. $v_i = \gamma_i[1]$ とすると γ_i の differential graded Lie algebra での grading は $k_i' + 1$ であり, これは $(k_i' + 1) + 1$ 個のベクトル場で表されていた. このベクトル場の数を $k_i := k_i' + 2$ と表し, 同様に $\tilde{v}$ が作用する関数 $C(X)$ の数を $m := m' + 2$ と表すことにする. すると上の関係式は

$$k_1 + \cdots + k_n = 2n + m - 2 \tag{5.2.8}$$

となる. 言い換えると $v_1^{k_1'}, \cdots, v_n^{k_n'}$ （φ_n を作用させる元）を指定すると $V_2 = D_{poly}[1]$ の grading が決まるということである. [5.2.4] で実際に L_∞-写像を構成する時にこの条件が自然に組み込まれていることを見る.

また, v_i はそれぞれ $v_i = \gamma_i[1] = \mathcal{O}(\hbar)$ であったので φ_n は $D^1_{poly}(X)$ に $\mathcal{O}(\hbar^n)$ を送る写像であることに注意する.

定義 5.2.8 (L_∞-写像) (V_1, Q) から (V_2, Q) への余準同型写像で, さらに φ が Q と可換, つまり $\varphi Q = Q\varphi$ の時[1] , φ を L_∞-写像と言う.

φ, Q は共に $C(V) = \oplus_{n\geq 1} V^{\otimes n}$ に関して多重線形なので $\varphi Q - Q\varphi = 0$ を示すときこれをある $v_1 \cdots v_n \in V^{\otimes n}$ に作用させた形で条件を考えればよい. また φ は $\{\varphi_1, \varphi_2, \cdots\}$ で決められるので, $(\varphi Q - Q\varphi) : V_1^{\otimes n} \longrightarrow \oplus_{m\geq 1} V_2^{\otimes m}$ の中の V_2 に移される部分について考えれば十分である.

具体的に V_1, V_2 が共に $Q_0 = Q_3 = Q_4 + \cdots = 0$ の場合 (V_1, V_2 が differential graded Lie algebra を表している場合) にこの条件を書き下すと次のようになる.

$$\begin{aligned} &\mathfrak{l}_1\varphi_n(v_1 \cdots v_n) + \frac{1}{2} \sum_{k,l\geq 1, k+l=n} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \frac{1}{k!l!}\epsilon(\sigma)\mathfrak{l}_2(\varphi_k(v_{\sigma(1)} \cdot\cdot v_{\sigma(k)}), \varphi_l(v_{\sigma(k+1)} \cdot\cdot v_{\sigma(k+l=n)})) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \epsilon(i)\varphi_n(v_1 \cdots \mathfrak{l}_1(v_i) \cdots v_n) + \frac{1}{2}\sum_{i,j} \epsilon(i,j)\varphi_{n-1}(\mathfrak{l}_2(v_i, v_j)v_1 \cdot\cdot \check{v}_i \cdot\cdot \check{v}_j \cdot\cdot v_n) \end{aligned} \tag{5.2.9}$$

ここで $\epsilon(\sigma)$ は $v_1 \cdots v_n$ を $v_{\sigma(1)} \cdots v_{\sigma(n)}$ と入れかえるときに v_i の grading によって出る符号であり, $\epsilon(i)$ は $v_1 \cdots v_n$ から v_i を一番前に持ってくる時出す符号, $\epsilon(i,j)$ も同様に v_i, v_j を前に出す時に出る符号である. (5.2.9) を説明すると,

$$\begin{array}{ccc} v_1 \cdots v_n \in V_1 & \xrightarrow{\varphi} & \langle A \rangle \\ {\scriptstyle Q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Q} \\ \langle B \rangle & \xrightarrow[\varphi]{} & (\varphi Q - Q\varphi)(v_1 \cdots v_n) \in V_2 \end{array} \tag{5.2.10}$$

で $\langle A \rangle$ を通ったものが (5.2.9) の左辺であり $\langle B \rangle$ を通ったものが右辺にあたる. （左辺の $\frac{1}{2}$ は (5.2.7) の定義からきたもので 右辺の $\frac{1}{2}$ は Q_2 の定義からきたものである. ）今 $Q = Q_1 + Q_2$ なので $Q\varphi$ の $v_1 \cdots v_n$ を V_2 に移す部分を見るには $\varphi = \varphi^1 + \varphi^2$ までを考えればよい. これから左

[1] 左辺の Q は $C(V_1)$ に作用するもの, 右辺の Q は $C(V_2)$ に作用するものであり, 両者は異なる.

辺が得られる. 右辺は Q の作用で $Q_1 : V_1^{\otimes n} \longrightarrow V_1^{\otimes n}, Q_2 : V_1^{\otimes n} \longrightarrow V_1^{\otimes (n-1)}$ なのでその V_1 のテンソル積の次数に合わせて φ^1 を作用させればよい.

このあと考える $V_1 = T_{poly}[1]$ のときは $\mathfrak{l}_1 = 0$ なので右辺第 1 項は消える.

V_2 の grading を確認する. v_i の L_∞-grading を k_i' として

V_2	L_∞-grading	作用する関数 $C(X)$ の数
$\mathfrak{l}_1\varphi_n(v_1 \cdots v_n)$	$k_1' + \cdots + k_n' + 1$	$k_1 + \cdots + k_n - 2n + 3$
$\varphi_k(v_{\sigma(1)} \cdots v_{\sigma(k)})$	$k'_{\sigma(1)} + \cdots + k'_{\sigma(k)}$	$k_{\sigma(1)} + \cdots + k_{\sigma(k)} - 2k + 2$
$\varphi_l(v_{\sigma(k+1)} \cdots v_{\sigma(n)})$	$k'_{\sigma(k+1)} + \cdots + k'_{\sigma(n)}$	$k_{\sigma(k+1)} + \cdots + k_{\sigma(n)} - 2l + 2$
$\mathfrak{l}_2(\varphi_k(v_{\sigma(1)} \cdots v_{\sigma(k)}), \varphi_l(v_{\sigma(k+1)} \cdots v_{\sigma(n)}))$	$k_1' + \cdots + k_n' + 1$	$k_1 + \cdots + k_n - 2n + 3$
$\varphi_n(v_1 \cdots \mathfrak{l}_1(v_i) \cdots v_n)$	$k_1' + \cdots + k_n' + 1$	$k_1 + \cdots + k_n - 2n + 3$
$\varphi_{n-1}(\mathfrak{l}_2(v_i, v_j)v_1 \cdots \check{v}_i \cdots \check{v}_j \cdots v_n)$	$k_1' + \cdots + k_n' + 1$	$k_1 + \cdots + k_n - 2n + 3$

(5.2.11)

L_∞ の言葉では $\mathfrak{l}_i$ はすべて grading を 1 上げることに注意する. 上の表で (5.2.9) の両辺はすべて $m = k_1 + \cdots + k_n - 2n + 3$ 個の関数 $C(X)$ を作用させればよいことが確認できた.

定理 5.2.1 (formality) $(T_{poly}(X)[1], Q)$ から $(D_{poly}(X)[1], Q)$ への余準同型写像 φ で $\varphi_1 = \mathcal{U}_1$ とする L_∞-写像が存在する.

この L_∞-写像を $\mathcal{U}$ とする. また $\mathcal{U}_1$ が $T_{poly}(X)$ から $D_{poly}(X)$ の間のホモロジーの同型を導いていた (5.2.5). よってこのような L_∞-写像をホモトピー同値写像という.

この定理が Poisson manifold 上の変形量子化の存在を示す山場である. [26] の段階でそれが予想され formality conjecture と呼ばれていた. この証明については [5.2.4] でその概略を説明する.

[L_∞-代数と Maurer-Cartan 方程式]

Maurer-Cartan 方程式は L_∞-代数の言葉で自然に表すことができる. まず $\alpha \in V$ の exponential 写像を

$$e^\alpha = 1 + \alpha + \frac{1}{2!}\alpha \otimes \alpha + \frac{1}{3!}\alpha \otimes \alpha \otimes \alpha + \cdots \tag{5.2.12}$$

と定義する. これの Q の作用での Kernel が Maurer-Cartan 方程式を満たす解空間となる. 実際 $\alpha \in \mathfrak{g}^1 = V^0$ について

$$\mathfrak{l}_*(e^\alpha) := \mathfrak{l}_0(1) + \mathfrak{l}_1(\alpha) + \frac{1}{2!}\mathfrak{l}_2(\alpha \otimes \alpha) + \frac{1}{3!}\mathfrak{l}_3(\alpha \otimes \alpha \otimes \alpha) + \cdots$$

を定義すると, $\mathfrak{l}_k e^\alpha = \mathfrak{l}_k(\alpha \cdots \alpha)e^\alpha$ であることから $Qe^\alpha = \mathfrak{l}_*(e^\alpha) \cdot e^\alpha$ となる. よって $Qe^\alpha = 0$ と $\mathfrak{l}_*(e^\alpha) = 0$ は等価である. $\mathfrak{l}_*(e^\alpha) = 0$ を L_∞-代数の Maurer-Cartan 方程式と呼ぶ. differential graded Lie algebra の時は $\mathfrak{l}_0 = \mathfrak{l}_3 = \mathfrak{l}_4 = \cdots = 0$ であり, 前に定義した Maurer-Cartan 方程式と一致することが分かる.

これで Poisson manifold 上の変形量子化の存在を証明する準備が整った. それは (5.2.1) の L_∞-写像の存在の一部として証明できる. differential graded Lie algebra を わざわざ L_∞ に焼き直した理由も分かる.

定理 5.2.2 多様体 X 上の Poisson structure を与えると, それを $\hbar$ の 1 次に持つ accosiative な積 $f * g = f * g + \hbar\{f, g\} + \mathcal{O}(\hbar^2)$ が常に存在する.

証明　associative な積を与える $\tilde{\alpha} \in D^1_{poly}(X)$ を

$$\tilde{\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathcal{U}_n(\alpha \cdots \alpha) \tag{5.2.13}$$

で与える. $\mathcal{U}_n$ は (定義 5.2.1) の L_∞-写像である. $\alpha \in T^1_{poly}(X)$ として [5.2.2] より

- α が Poisson bracket $\longleftrightarrow$ Maurer-Cartan eq $[\alpha, \alpha] = 0$
- $\mathrm{Id} + \tilde{\alpha}$ が associative な積 $\longleftrightarrow$ Maurer-Cartan eq $d\tilde{\alpha} + \frac{1}{2}[\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}] = 0$

であり, Maurer-Cartan eq はどちらも $Q \cdot e^{\alpha} = 0$ で表すことができることが上の議論で分かった. よって (5.2.1) の L_∞-写像が $T_{poly}(X)$ の Maurer-Cartan eq を $D_{poly}(X)$ の Maurer-Cartan eq に移すことを言えばよい. 言い換えると示すべきことは　「$Qe^{\alpha} = 0$ なら $Qe^{\tilde{\alpha}} = 0$」.

$\mathcal{U}$ が α をどのように移すかを見る. (5.2.7) より余準同型写像 $\mathcal{U}$ は一般に

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}^l(e^{\alpha}) &= \sum_n \frac{1}{n!} \mathcal{U}^l(\alpha \cdots \alpha) \\
&= \sum_{\substack{n_1, \cdots, n_l \geq 1 \\ n_1 + \cdots + n_l = n}} \frac{1}{n_1! \cdots n_l!} \mathcal{U}_{n_1}(\alpha \cdots \alpha) \otimes \cdots \otimes \mathcal{U}_{n_l}(\alpha \cdots \alpha) \\
&= \tilde{\alpha} \otimes \cdots \otimes \tilde{\alpha} \quad (l \text{ 個})
\end{aligned}$$

の性質を持つ. $\frac{1}{n!}$ は α の入れ換え $\sigma \in \mathfrak{S}$ と打ち消しあった. よって

$$\mathcal{U}(e^{\alpha}) = e^{\tilde{\alpha}} \quad (-1) \tag{5.2.14}$$

であることが分かる. つまり　「$\mathcal{U}$ は exponential 写像を保つ」[2]. これを使って

$$Q(e^{\tilde{\alpha}}) = Q\mathcal{U}(e^{\alpha}) = \mathcal{U}Q(e^{\alpha}) = 0$$

より, $\mathcal{U}$ によって Maurer-Cartan eq が保たれることが分かった. よって (定理 5.2.2) が示された.

5.2.4　コンパクト化と $X = \mathbb{R}^d$ での L_∞-写像の存在

M が一般の Poisson 多様体で,　(L_∞-代数としての) T_{poly} と D_{poly} の間に L_∞-写像が存在することが証明できる [25]. つまり, Formality が成り立っている.

ここでは $M = \mathbb{R}^d$ のときについて, その証明の概略を説明する. M が一般の場合もその方針は同様である.

証明の方針は, まず余準同型写像 $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \cdots\}$ をここで定義し, それが L_∞-写像となるための条件 (5.2.9) を満たしていることを見る.　(天下り的な議論であるが, なぜこのような余準同型写像を考え付いたのか ?という疑問には 6 章で答えていることになる.)

[2] (-1) は実際に出るがこの式の使い道にとっては関係ない. またあとで $\mathcal{U}$ を拡張して $\mathcal{U} + \mathcal{U}_0$ とすることもできることを説明するが, その $\mathcal{U}_0$ を入れると (-1) なしに (5.2.14) が成り立つ.

定義 5.2.9 (余準同型写像 $\mathcal{U}$)　(非線形な) 余準同型写像 $\mathcal{U}=\{\mathcal{U}_1,\mathcal{U}_2,\cdots\}$: $C(T_{poly}(\mathbb{R}^d)[1])\to C(D_{poly}(\mathbb{R}^d)[1])$ を 1 つ, 以下で定義する. 多重線形写像 $\mathcal{U}_n$: $\otimes^n T_{poly}(\mathbb{R}^d)[1]\to D_{poly}(\mathbb{R}^d)[1]$ を

$$\mathcal{U}_n=\sum_{m\geq 0}\sum_{\Gamma\in G_{n,m}} W_\Gamma\times\mathcal{U}_\Gamma \tag{5.2.15}$$

とし, $\Gamma\in G_{n,m}$, W_Γ , $\mathcal{U}_\Gamma$ を次のように定義する.

- $\Gamma\in G_{n,m}$

  1)　上半平面 H の内部に n 個, その境界上に m 個の vertex がある. それらの座標をそれぞれ $p_1,\cdots,p_n$ $(p_i\in\mathbb{C}\ ,\ \mathrm{Im}p_i>0)$,　$q_1,\cdots,q_m$, $(q_j\in\mathbb{R})$ とし, n 個の vertex の種類を C-型　($\leftrightarrow$ closed string) , m 個の vertex を O-型　($\leftrightarrow$ open string) と呼ぶ.

  2)　p_i にある C-型 vertex からは k_i 本の矢印が出ていてその終点をそれぞれ $v_1(i),\cdots,v_{k_i}(i)$ とし, 矢印自体を $e_i^a=(i,v_a(i))$,$(\ a=1,\cdots,k_i)$ と表す. それらはすべて C-型, 又は O-型 vertex にたどり着く. ただし, 矢印は自分自身には戻らないとし, また同じ p_i から出る矢印は同じ終点にはいかないとする[3] . つまり, $v_a(i)\in\{p_1,\cdot\cdot,\check{p}_i,\cdot\cdot,p_n,q_1,\cdots,q_m\}$, $a\neq b$ で $v_a(i)\neq v_b(i)$.

  このような $p_1,\cdots,p_n,q_1,\cdots,q_m$ と適当な数の矢印でできるグラフ全体を $G_{n,m}$ とし, その部分集合でそれぞれの C-型 vertex から出る矢印の数 k_i を固定したものを $G_{k_1,\cdots,k_n;m}$ と書く.

- $\mathcal{U}_\Gamma$　グラフ Γ について, p_i にある C-型 vertex を $\alpha_i^{i_1,\cdots,i_{k_i}}$ と思い, q_j にある O-型 vertex を $f_j(x)\in C(X)$ と思う. そして矢印 $e_i^a=(i,v_a(i))$ を $v_a(i)$ に作用する微分 ∂_{i_a} と解釈する. ここで $i_a=1,\cdots,d$ $(X=\mathbb{R}^d)$. その微分を $e_i^a\leftrightarrow\overset{\frown}{\partial}_{i_a}^{v_a(i)}$ と表すことにする. これにより, $\mathcal{U}_\Gamma$ で $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ を D_{poly}^m に移しそれに $(f_1,\cdots,f_m)$ を作用させたものを

$$\mathcal{U}_\Gamma(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)(f_1,\cdots,f_m)=\prod_{i=1}^n\Big(\sum_{i_1,\cdots,i_{k_i}=1}^d\alpha_i^{i_1,\cdots,i_{k_i}}\overset{\frown}{\partial}_{i_1}^{v_1(i)}\cdots\overset{\frown}{\partial}_{i_{k_i}}^{v_{k_i}(i)}\Big)\cdot f_1\cdots f_m$$

$$=\sum_{j_1,\cdots,j_{k_i}=1,(j=1,\cdot\cdot,n)}^d\Big(\prod_{i=1}^n\Big(\prod_{j_a,v_a(j)=i}\partial_{j_a}\Big)\alpha_i^{i_1,\cdots,i_{k_i}}\Big)\cdot\Big(\prod_{j_a,v_a(j)=1}\partial_{j_a}\Big)f_1\cdots\Big(\prod_{j_a,v_a(j)=m}\partial_{j_a}\Big)f_m$$

  で定義する.

- W_Γ

  1)　H 上の C-型, O-型 vertex の configuration space を $Conf_{n,m}$ とする.

$$Conf_{n,m}=\{p_1,\cdots,p_n;q_1,\cdots,q_m\mid p_i\neq p_j,q_i\neq q_j(i\neq j)\}\ ,\quad \dim Conf_{n,m}=2n+m$$

[3] この条件は $\mathcal{U}_\Gamma$ の定義のところで p_i にある vertex を $\alpha_i^{i_1\cdots,i_{k_i}}$ と同一視することから α_i の $i_1\cdots,i_{k_i}$ に関する反対称性から自然に排除されている.

H の境界と無限遠[4] を固定する自己同型変換を $\mathfrak{G}:\{z\mapsto cz+d \mid z\in H, c\in\mathbb{R}_{>0}, d\in\mathbb{R}\}$ [5]として, で割ったものを $C_{n,m}:=Conf_{n,m}/\mathfrak{G}$ とする. $\dim C_{n,m}=2n+m-2$. これは条件 (5.2.8) と対応していることを W_Γ を定義したあと説明する.

さらにそれはコンパクト化でき (その証明に関する議論は省略する), それを $\bar{C}_{n,m}$ とし, その $q_1<q_2<\cdots,<q_m$ の連結成分を $\bar{C}^+_{n,m}$ とする.

2) 向き付けられた線 (矢印) e^a_i を H 上の測地線で書く. 2 点 i, $v_a(i)$ を結ぶ測地線は, i, $v_a(i)$ を通り H の境界で垂直に交わる円の弧である. ここで複素座標 $z,w,\infty\in H$ に対して時計周りの角度 $\angle zw\infty=:\phi^h(w,z)$ を定義する (図 5.1(a)).

$$\phi^h(w,z)=Arg((z-w)/(z-\bar{w}))=\frac{1}{2i}\ln\Big(\frac{(z-w)(\bar{z}-w)}{(\bar{z}-\bar{w})(z-\bar{w})}\Big)\ . \tag{5.2.16}$$

これで W_Γ が定義できる.

$$W_\Gamma=\frac{1}{(2\pi)^{2n+m-2}k_1!\cdots k_n!}\int_{\bar{C}^+_{n,m}}\wedge_{i=1}^n\Big(\wedge_{a=1}^{k_i}d\phi^h(u_i,u_{v_a(i)})\Big) \tag{5.2.17}$$

で定義される. ここで $d\phi^h(w,z)=d_w\phi^h(z,w)+d_z\phi^h(z,w)$ である.

上で注意したようにこの定義から $d\phi^h$ の数 ($=k_1+\cdots+k_n$) と $\dim C_{n,m}=2n+m-2$ が一致していないと積分が 0 になることが分かる. よって $k_1+\cdots+k_n=2n+m-2$ (5.2.8) であり L_∞ での写像の grading を保つように作られている. 弦理論的にはこの条件は ghost の数に関係している. 実際 L_∞-grading は [6.1] の BV-形式の (total) ghost 数 gh と一致する.

$\mathcal{U}_1$ が (定義 5.2.5) と一致することはすぐ分かる. $n=1$ で $k_1=m$ であり, その時グラフは $\{v_1,\cdots,v_n\}\to\{1,\cdots,m\}$ の $m!$ 通りある. その内の 1 つの $v_a=a$ で与えられるグラフ $\Gamma_{v_a=a}$ についてまず考える (図 5.1(b)). この時, $\mathcal{U}_{\Gamma_{v_a=a}}(\alpha)(f_1,\cdots,f_m)=\alpha^{i_1\cdots i_m}\partial_{i_1}f_1\cdots\partial_{i_m}f_m$ であり, また C-型 vertex の H 上の座標を u とし, $f_r,(r=1,\cdots,m)$ の境界 $\mathbb{R}$ 上の座標を q_r とすると, $0<\phi^h(u,v_1)<\cdots<\phi^h(u,v_m)<2\pi$ なので

$$W_{\Gamma_{v_a=a}}=\frac{1}{(2\pi)^m m!}\frac{(2\pi)^m}{m!}=\frac{1}{m!}\frac{1}{m!}\ .$$

同様にその他の $\{v_a\}$ で与えられるグラフ Γ_{v_a} について考えると,

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_{\Gamma_{v_a}}(\alpha)(f_1,\cdots,f_m)&=\alpha^{i_1\cdots i_m}\partial_{i_1}f_{v_1}\cdots\partial_{i_m}f_{v_m}\\ W_{\Gamma_{v_a}}&=\frac{1}{(2\pi)^m m!}\int d\phi^h(u,v_1)\wedge\cdots\wedge\phi^h(u,v_m)\end{aligned}$$

[4]下の 2) の ϕ^h の定義で分かるように, H 上 (とその境界) には p_i,q_j だけでなくもともと暗に無限遠も考えられている.

[5]H を弦の world sheet と思うと, まず P^1 を保つ共形変換は $\{z\mapsto\frac{az+b}{cz+d}\}\in SL(2,\mathbb{C})$ で, open string の時 world sheet は境界を持つので H になりその境界を保つ変換は $\{z\mapsto\frac{az+b}{cz+d}\}\in SL(2,\mathbb{R})\subset SL(2,\mathbb{R})$ となりさらに無限遠を保つ変換は $\infty\mapsto\frac{a\infty+b}{c\infty+d}$ より $c=0, a\neq 0$, $(ad=1)$ となるので $\{z\mapsto a^2z+ab\}$ であり上の形になる. (c,d はここのものとは異なる.)

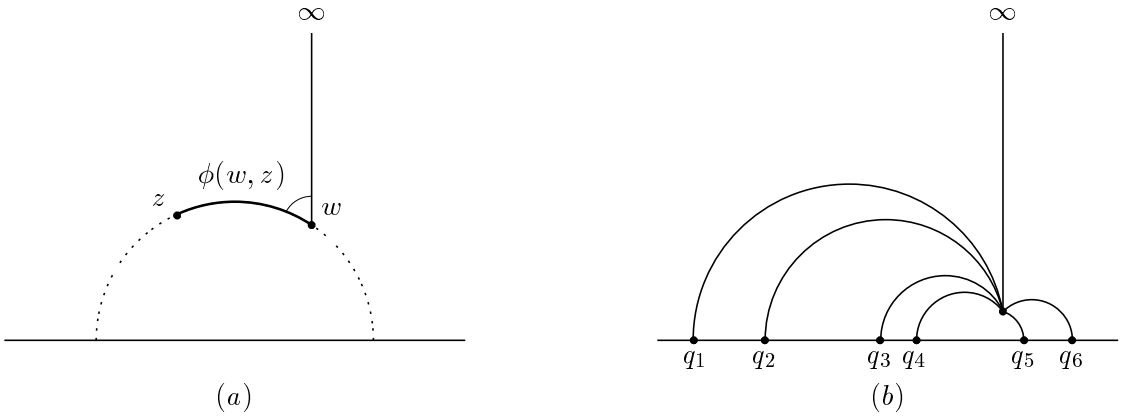

図 5.1: (a) ϕ^h の定義. (b) $\mathcal{U}_1$ に対応するグラフ. 矢印を ϕ^h の定義で考えた測地線で表した.

であり, それぞれの $v_1, \cdots, v_m$ を $1, \cdots, m$ と並べかえると出る符号は打ち消し合い, グラフ $\Gamma_{v_a=a}$ の時と一致する. よって $\mathcal{U}_1(\alpha)(f_1, \cdots, f_m)$ は $m! \times W_{\Gamma_{v_a=a}} \times \mathcal{U}_{\Gamma_{v_a}}(\alpha)(f_1, \cdots, f_m) = \frac{1}{m!}\alpha^{i_1 \cdots i_m}\partial_{i_1} f_1 \cdots \partial_{i_m} f_m$ となり, (定義 5.2.5) と一致した.

変形量子化の時, つまり $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 2$ の時はこの条件は $m = 2$ で任意の n について成り立つことが分かる.

定理 5.2.3 今定義した $\mathcal{U}$ は L_∞-写像である.

[証明の概略]
以下この節の最後まで, (5.2.3) の証明方法について説明する.
$\mathcal{U}$ が L_∞-写像であるための条件は (5.2.9) である. $v_i = \alpha_i$ として, それを (定義 5.2.3) の積 $\circ$, (5.2.3) で定義した積 $\bullet$ を使って次のように書き直すことができる.

$$\sum_{i \neq j} \pm \left(\mathcal{U}_{n-1}((\alpha_i \bullet \alpha_j)\alpha_1 \cdots \check{\alpha}_i \cdots \check{\alpha}_j \cdots \alpha_n)\right)(f_1 \otimes \cdots \otimes f_m)$$
$$- \sum_{k,l \geq 0,\ k+l=n} \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \pm \left(\mathcal{U}_k(\alpha_{\sigma(1)} \ldots \alpha_{\sigma(k)}) \circ \mathcal{U}_l(\alpha_{\sigma(k+1)} \ldots \alpha_{\sigma(n)})\right)(f_1 \otimes \cdots \otimes f_m) = 0 \tag{5.2.18}$$

符号については省略する. この左辺第 1 項を (T), 第 2 項を (D) と表すことにする. (5.2.9) の左辺第 1 項は $l_1 = 0$ より無く, 左辺第 2 項が (T) になる. (5.2.9) の右辺が (D) にまとめられている. ここで (5.2.9) の右辺第 1 項が (D) の $k = 0$ 又は $l = 0$ の場合に対応している. その時の $\mathcal{U}_0$ はまだ定義していなかった. それを今から定義する.

定義 5.2.10 ($\mathcal{U}_0$)

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{U}_0 \ : \ \otimes^0 T_{poly}(\mathbb{R}^d)[1] \sim & \mathbb{R} & \longrightarrow & D^0_{poly}(\mathbb{R}^d)[1] \\ & 1 & \mapsto & \Big(m_A \ : \ f \otimes g \mapsto f \cdot g\Big) \end{array}$$

$\mathcal{U}_0$ の性質と意味を説明する.

- (5.2.18) の $(k,l)=(0,n),(n,0)$ の時についてまず

$$\frac{1}{n!0!}\epsilon(\sigma)\mathcal{U}_n(\alpha_{\sigma(1)}\dots\alpha_{\sigma(n)}) = \mathcal{U}_n(\alpha_1\dots\alpha_n)$$

であり, (5.2.11) より $\mathcal{U}(\alpha_1\cdots\alpha_n)$ は $k_1+\cdots+k_n-2n+2=m-1$ 個の関数に作用する $D_{poly}(\mathbb{R}^d)$ の元なので, differential graded Lie algebra としての grade は $m-2$ である. (同様に m_A の grade は 1.) これより $(k,l)=(0,n)$ の項は

$$\begin{aligned}&(m_A\circ\mathcal{U}_n(\cdots))(f_1\otimes\cdots\otimes f_m)\\ &\qquad=\mathcal{U}_n(\cdots)(f_1\otimes\cdots\otimes f_{m-1})f_m-(-1)^{m-1}f_1\mathcal{U}_n(\cdots)(f_2\otimes\cdots\otimes f_m)\ ,\end{aligned}$$

また $(k,l)=(n,0)$ の項は

$$\begin{aligned}&(\mathcal{U}_n(\cdots)\circ m_A)(f_1\otimes\cdots\otimes f_m)\\ &\qquad=\mathcal{U}_n(\cdots)(f_1f_2\otimes\cdots\otimes f_m)-\mathcal{U}_n(\cdots)(f_1\otimes f_2f_3\otimes\cdots\otimes f_m)+\cdots\end{aligned}$$

となり, 相対的な符号を合わせるとこの 2 つの和は確かに $(\mathfrak{l}_1\mathcal{U}_n(\cdots))(f_1\otimes\cdots\otimes f_m)$ に一致する.

- $\mathcal{U}+\mathcal{U}_0$ は L_∞-写像にはならない. 余準同型写像の性質より V_1 から V_2 への L_∞-写像は V_1,V_2 の 0 次が共に 0 である余代数の間の写像であったが, $\mathcal{U}_0$ は $0\in T_{poly}(\mathbb{R}^d)[1]$ を $m_A\in D_{poly}(\mathbb{R}^d)[1]$ に写す. しかしここで必要なのは余準同型写像が Q-同変 ($Q\mathcal{U}=\mathcal{U}Q$) であるという性質なので $\mathcal{U}+\mathcal{U}_0$ と拡張して問題ない,

- $\mathcal{U}_0$ を加えることにより (5.2.14) は定数の部分も込めて $(\mathcal{U}+\mathcal{U}_0)e^\alpha=e^{\tilde{\alpha}}$ が成り立つ. 実際 $\mathcal{U}_0$ が $1\in T_{poly}(\mathbb{R}^d)[1]$ を $1\in D_{poly}(\mathbb{R}^d)[1]$ に写す.

- $n=0$ で (5.2.8), (5.2.17) より $m=2$ 以外は $W_\Gamma=0$ である. この矢印の数 n が 0 のグラフを Γ_0 として, $\mathcal{U}_0$ の定義より $W_{\Gamma_0}=1$ とすれば変形量子化の $\hbar$ の 0 次の項 (m_A) が定義できる.

さて, (5.2.18 式) $(T)+(D)=0$ を示す idea を説明する. まずその左辺 $(T)+(D)$ の各項について

- vertex α_i の数は n 個
- かかる関数 $f\in C(X)$ の数は $m=k_1+\cdots+k_n-2n+3$ 個

であることから, $(T)+(D)$ は $\mathcal{U}_\Gamma$, $\Gamma\in G_{k_1,\cdots k_n;m}$ の線形結合で表される. それぞれの定数係数を c_Γ として

$$(T)+(D)=\sum_{\Gamma\in G_{k_1,\cdots,k_n;m}}c_\Gamma\cdot\mathcal{U}_\Gamma(\alpha_1\cdots\alpha_n)(f_1\otimes\cdots\otimes f_m)\ . \tag{5.2.19}$$

よって示すべきことはそれぞれのグラフ Γ について $c_\Gamma=0$ である.

一方それぞれのグラフ $\Gamma\in G_{k_1,\cdots k_n;m}$ について今

$\circ$ $k_1+\cdots+k_n = \dim C_{n,m} - 1 = \dim \partial C_{n,m}$

より, $\bar{C}_{n,m}$ の境界上での $\wedge_{i=1}^{n}\left(\wedge_{a=1}^{k_i} d\phi^h(u_i, u_{v_a(i)})\right)$ の積分を考える. Stokes の定理よりその積分は 0 である.

$$\int\limits_{\partial \bar{C}_{n,m}} \bigwedge d\phi^h_\Gamma = \int\limits_{\bar{C}_{n,m}} d\left(\bigwedge d\phi^h_\Gamma\right) = 0\ , \quad \bigwedge d\phi^h_\Gamma := \wedge_{i=1}^{n}\left(\wedge_{a=1}^{k_i} d\phi^h(u_i, u_{v_a(i)})\right)\ .$$

よってこの積分と c_Γ が等しければそれぞれの Γ について $(T)+(D)=0$ であることが言える. つまり示すべきことは $c_\Gamma = \frac{1}{(2\pi)^{2n+m-3}} \int\limits_{\partial \bar{C}_{n,m}} \bigwedge d\phi^h_\Gamma$, 又は両辺に $\mathcal{U}_\Gamma$ を掛けた形で

$$\big((T)+(D)\big)\big|_\Gamma = \mathcal{U}_\Gamma \frac{1}{(2\pi)^{2n+m-3}} \int\limits_{\partial \bar{C}_{n,m}} \bigwedge d\phi^h_\Gamma\ , \quad \Gamma \in G_{k_1,\cdots k_n;m} \tag{5.2.20}$$

となった. (係数に $\frac{1}{(2\pi)^{k_1+\cdots+k_n}} = \frac{1}{(2\pi)^{2n+m-3}}$ がつくことも後で見る.)

以下 (5.2.20) が成り立つことを見る. まず (5.2.18) を (5.2.19) の形に書き直す. (5.2.18) より

$$\begin{aligned} &\pm \sum_{i\neq j} \sum_{\Gamma_{n-1}} \left(W_{\Gamma_{n-1}} \mathcal{U}_{\Gamma_{n-1}}((\alpha_i \bullet \alpha_j)\alpha_1 \cdots \check{\alpha}_i \cdots \check{\alpha}_j \cdots \alpha_n)\right)(f_1 \otimes \cdots \otimes f_m) \\ &- \sum_{k,l\geq 0,\ k+l=n} \frac{\pm 1}{k!l!} \sum_{\sigma\in\Sigma_n} \sum_{\Gamma_k \Gamma_l} W_{\Gamma_k} W_{\Gamma_l} \\ &\qquad \left(\mathcal{U}_{\Gamma_k}(\alpha_{\sigma(1)} \ldots \alpha_{\sigma(k)}) \circ \mathcal{U}_{\Gamma_l}(\alpha_{\sigma(k+1)} \ldots \alpha_{\sigma(n)})\right)(f_1 \otimes \cdots \otimes f_m) = 0 \end{aligned} \tag{5.2.21}$$

であり, この $W_{\Gamma_{n-1}}, W_{\Gamma_k} W_{\Gamma_l}$ の和が c_Γ になることが分かる. これから $\mathcal{U}_{\Gamma_{n-1}}, \mathcal{U}_{\Gamma_k} \circ \mathcal{U}_{\Gamma_l}$ を $\mathcal{U}_{\Gamma_n}$ の線形結合に分けることを考える.

(T): i, j を固定し, すべての Γ_{n-1} について $\left(\mathcal{U}_{\Gamma_{n-1}}((\alpha_i \bullet \alpha_j)\alpha_1 \cdots \check{\alpha}_i \cdots \check{\alpha}_j \cdots \alpha_n)\right)(f_1 \otimes \cdots \otimes f_m)$ を考える. これらは $\mathcal{U}_{\Gamma_n}$ にとって, α_i と α_j の間には i から j への 1 本の矢印のみが存在するすべてのグラフとなる.
これらの係数は $(\pm) W_{\Gamma_{n-1}}$ である.
(D): (5.2.21) の 2, 3 行目について, $\{\sigma(1), \cdots, \sigma(k)\}, \{\sigma(k+1), \cdots, \sigma(n)\}$ をそれぞれの $\{\ \}$ の中で入れ換えて 1 つ固定した順 (例えば $\sigma(1) < \cdots < \sigma(k), \sigma(k+1) < \cdots < \sigma(n)$) に固定する. $\epsilon(\sigma)$ によりそれらはすべて同じ符号を出し, $\frac{1}{k!l!}$ と打ち消し合う. この集合 $\{\sigma(1), \cdots, \sigma(k)\}, \{\sigma(k+1), \cdots, \sigma(n)\}$ を固定した, すべての Γ_k, Γ_l についての $\left(\mathcal{U}_{\Gamma_k}(\alpha_{\sigma(1)} \ldots \alpha_{\sigma(k)}) \circ \mathcal{U}_{\Gamma_l}(\alpha_{\sigma(k+1)} \ldots \alpha_{\sigma(n)})\right)(f_1 \otimes \cdots \otimes f_m)$ について考える.

$$k_{\sigma(k+1)} + \cdots + k_{\sigma(n)} - 2l + 2 =: m_2$$

と定義すると, $1 \leq r \leq n - m_2 + 1$ として $\mathcal{U}_{\Gamma_l}$ は m_2 個の関数 $f_r, \cdots, f_{r+m_2-1}$ に作用していて, さらにその上に $\mathcal{U}_{\Gamma_k}$ が
$f_1, \cdots, f_{r-1}, (\mathcal{U}_{\Gamma_l}(\cdots))(f_r \otimes \cdots \otimes f_{r+m_2-1}), f_{r+m_2}, \cdots, f_m$ に作用している. その中の $\left(\mathcal{U}_{\Gamma_l}(\alpha_{\sigma(k+1)} \ldots \alpha_{\sigma(n)})\right)(f_r \otimes \cdots \otimes f_{r+m_2-1})$ に作用する多重微分について, その微分の 1 つ

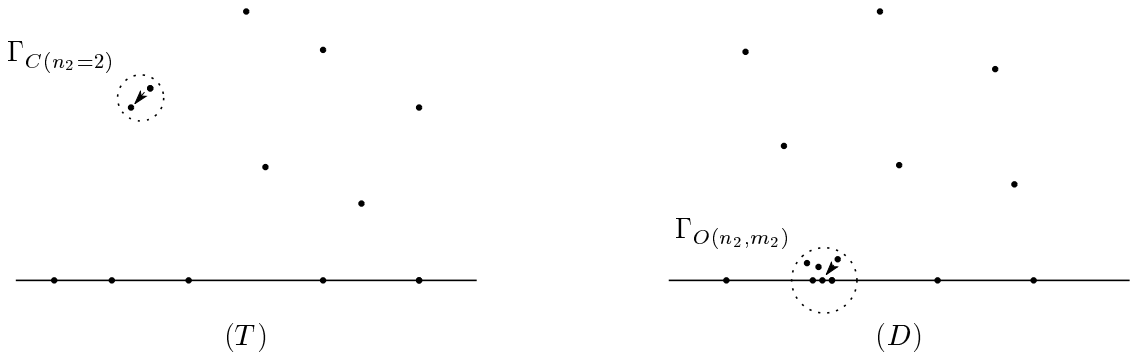

図 5.2: (T) これが $(5.2.18)$ の (T) を表す. (D) 同様にこの極限が $\bar{C}_{n,m}$ の表面項の (D) の部分を与える.

1 つは Leibniz 則により $\alpha_{\sigma(k+1)}, \cdots, \alpha_{\sigma(n)}, f_r, \cdots, f_{r+m_2-1}$ 1 つ 1 つにかかる矢印に分解できる. つまり, この Leibniz 則の性質により $\mathcal{U}_{\Gamma_k}$ の多重微分の $\mathcal{U}_l$ への作用は, Γ_l に外から矢印が来る全通りのグラフに分かれる. さらに Γ_k, Γ_l についてすべて考えているので, これらは $\mathcal{U}_{\Gamma_n}$ にとって, 集合 $\{\sigma(k+1), \cdots, \sigma(n)\}$ から集合 $\{\sigma(1), \cdots, \sigma(k)\}$ へは矢印がないすべてのグラフとなる.
それらの係数は $W_{\Gamma_k} \cdot W_{\Gamma_l}$ である.

以上より今度は 1 つの $\Gamma_n \in G_{k_1,\cdots,k_n;m}$ を固定して考える. $(T) + (D)|_{\Gamma_n}$ には Γ_n の中の 2 つの C-型 vertex α_i, α_j の間が 1 本の矢印 $i \to j$ であるごとに (T) から $W_{\Gamma_{n-1}}\mathcal{U}_{\Gamma_n}$ という項があり, Γ_n の $n = n_1 + n_2$ 個の C-型 vertex, $m = m_1 + m_2$ 個の O-型 vertex を 2 つの集合 $(n_1, m_1), (n_2, m_2)$ に分けた時 (n_2, m_2) から (n_1, m_1) への矢印がないごとに (D) から $W_{\Gamma_k} \cdot W_{\Gamma_l}\mathcal{U}_{\Gamma_n}$ という項がある. よって $(T) + (D)|_{\Gamma_n}$ はこれらの線形結合で表され,

$$c_{\Gamma_n} = \sum_{(i,j)\in T(\Gamma_n)} \sum_{\Gamma_{n-1}} \pm W_{\Gamma_{n-1}} + \sum_{((n_1,m_1),(n_2,m_2))\in D(\Gamma_n)} \sum_{\{\Gamma_k,\Gamma_l\}} \pm W_{\Gamma_k} \cdot W_{\Gamma_l} \tag{5.2.22}$$

となる. ここで $T(\Gamma_n)$ はグラフ Γ_n について α_i と α_j の間に i から j への 1 本の矢印のみが存在するものについての組 (i,j) の集合を表し, $D(\Gamma_n)$ は $(n_2, m_2) = \{\sigma(k+1), \cdots, \sigma(n)\}$ から $(n_1, m_1) = \{\sigma(1), \cdots, \sigma(k)\}$ に矢印がないものについての組 $((n_1, m_1), (n_2, m_2))$ の集合とする.
一方今度は $\frac{1}{(2\pi)^{2n+m-3}} \int\limits_{\partial \bar{C}_{n,m}} \bigwedge d\phi^h_\Gamma$ について考える. C, O-型 vertex の configuration の境界として, (i) 上半平面 H の内部, あるいは (ii) その境界 $\mathbb{R}$ の 1 点に何個かの vertex が集まった極限を考える. この時 (i) が (T), (ii) が (D) に対応することを見る. まずこれらの configuration の次元 $(\geq \bigwedge d\phi^h_\Gamma$ の自由度 $)$ が $2n + m - 3$ であることを確認する. $n_1 + n_2 = n, m_1 + m_2 = m$ として

(i) 上半平面 H の内部の点 p_∞ に n_2 個の C-型 vertex が集まっている Γ_n の configuration を考える. 積分の messure は $d\phi^h$ のみにより, scale によらないので, これは u_∞ の周りの n_2 個の C-型 vertex による (複素平面上の) グラフ $(\mathfrak{C}_{C(n_2)}$ とする $)$ と, それを 1 つの C-型 vertex と見た全体のグラフ $(\mathfrak{C}_{O(n_1+1,m)}$ とする $)$ の直積と見ることができる.
$\Gamma_{O(n_1+1,m)} \in G_{n_1+1,m}$ なので, (定義 5.2.9) の通りその configuration space には 2 次元の自己同型群 $\mathfrak{G}$ が働くが, $\Gamma_{C(n_2)}$ の configuration space には 3 次元の自己同型群が働く.

よって自己同型群で割った configuration space の次元は

$$\Gamma_{C(n_2)}:\ 2n_2-3\ ,\qquad \Gamma_{O(n_1+1,m)}:\ 2(n_1+1)+m-2 \tag{5.2.23}$$

となり, 合計して $2n+m-3$ に一致する.

(ii) 境界 $\mathbb{R}$ の 1 点 q_∞ に n_2 個の C-型 vertex, m_2 個の O-型 vertex が集まっている Γ_n の configuration を考える. これは q_∞ の周りの vertex のグラフ $\Gamma_{O(n_2,m_2)}$ と, それを 1 つの O-型 vertex と見た全体のグラフ $\Gamma_{O(n_1,m_1+1)}$ の直積と見ることができる. (i) と同様 configuration space を自己同型群で割ったものの次元は

$$\Gamma_{O(n_2,m_2)}:\ 2n_2+m_2-2\ ,\qquad \Gamma_{O(n_1,m_1+1)}:\ 2n_1+(m_1+1)-2 \tag{5.2.24}$$

となり, これも合計して $2n+m-3$ に一致する.

このような次元の数え方から, 2 点, 3 点, ... に vertex が集まる場合は次元が $2n+m-3$ からさらに下がり $\partial\bar{C}_{n,m}$ 上での積分に寄与しないことが分かる. よって積分に寄与する可能性のある configuration は (i),(ii) の場合に限る. $\partial\bar{C}_{n,m}$ の中で (i) の状態に対応する部分を最後にこの (i),(ii) の場合

$$0=\int\limits_{\partial\bar{C}_{n,m}}\bigwedge d\phi^h_\Gamma=\sum_{C-C}\int\limits_{\partial_{C-C}\bar{C}_{n,m}}\bigwedge d\phi^h_\Gamma+\sum_{O-C}\int\limits_{\partial_{O-C}\bar{C}_{n,m}}\bigwedge d\phi^h_\Gamma$$

最後にこの (i),(ii) の場合の中で積分に non-zero な値として寄与する部分が $(T),(D)$ に対応することを見る.

(i) $n_2=2$ の時, α_i,α_j が p_∞ に集中している場合を (5.2.22) の $(i,j)\in T(\Gamma)$ に対応させることを考える. configuration $\bar{C}_{n,m}$ の境界で, この α_i,α_j が p_∞ に集中している部分を $\partial_{(i,j)}\bar{C}_{n,m}$ と表すことにして, Γ_n を固定した時どんな (i,j) で積分

$$\frac{1}{(2\pi)^{2n+m-3}}\int\limits_{\partial_{(i,j)}\bar{C}_{n,m}}\bigwedge d\phi^h_\Gamma$$

が non-zero になるかを調べる. (5.2.23) より $\Gamma_{C(2)}\times\Gamma_{O(n-1,m)}$ の自由度は $(1)+(2n+m-4)$ なので, α_i と α_j の間には矢印が 1 本でないと積分が 0 になる. よって $\partial_{(i,j)}\bar{C}_{n,m}$ と $(i,j)\in T(\Gamma_n)$ がグラフとして $1:1$ 対応することが分かった. (今 Γ_n を固定しているので $\partial_{(i,j)}\bar{C}_{n,m}$ は矢印が出ている方を i, 終点を j と決めれば良い.)
さらに $\mathcal{U}_{\Gamma_n}$ の係数の一致を見る. i から j への矢印に対応する $d\phi^h(p_i,p_j)\ ,\ p_i,p_j\to p_\infty$ に関する積分を行なうと, $d\phi^h(p_i,p_j)$ は p_j が p_i の周りを回る自由度から 2π を出し, $p_i,p_j\to p_\infty$ よりその他の $d\phi^h$ はこの自由度によらないし, $d\phi^h(p_i,p_j)$ も $i\neq k,\ j\neq k$ の $p_k,(1\le k\le n)$ や $q_l,(1\le l\le m)$ によらない. (つまり $\Gamma_{C(2)}\times\Gamma_{O(n-1,m)}$ と直積の形で書けている.) よって

$$\begin{aligned}\frac{1}{(2\pi)^{2n+m-3}}\int\limits_{\partial_{(i,j)}\bar{C}_{n,m}}\bigwedge d\phi^h_\Gamma&=\pm\frac{2\pi}{(2\pi)^{2n+m-3}}\int\limits_{\partial\bar{C}_{n,m}|_{p_i=p_j=p_\infty}}\bigwedge^{\otimes(2n+m-4)}d\phi^h\\&=\pm W_{\Gamma_{n-1}}\end{aligned}$$

となり, (i) の $n_2 = 2$ の場合と (T) が係数も込めて一致することが分かった.

$n_2 \geq 3$ の時は積分が 0 となることが示されている [25]. その証明は少し長いので省略する.

(ii) $\alpha_{\sigma(n_1+1)}, \cdots, \alpha_{\sigma(n)}$ が q_∞ に集中している場合を (5.2.22) の $\sigma(n_1) \in D(\Gamma_n)$ に対応させることを考える. configuration $\bar{C}_{n,m}$ の境界で, この $\alpha_{\sigma(n_1+1)}, \cdots, \alpha_{\sigma(n)}$ が q_∞ に集中している部分を $\partial_{\sigma(n_1)}\bar{C}_{n,m}$ と表して, Γ_n を固定した時どんな $\sigma(n_1)$ で積分

$$\frac{1}{(2\pi)^{2n+m-3}} \int\limits_{\partial_{\sigma(n_1)}\bar{C}_{n,m}} \bigwedge d\phi_\Gamma^h$$

が non-zero になるかを調べる. (5.2.24),(5.2.11) より $\Gamma_{C(n_2,m_2)} \times \Gamma_{O(n_1,m_1+1)}$ の自由度は $(k_{\sigma(n_1+1)} + \cdots + k_{\sigma(n)}) + (k_{\sigma(1)} + \cdots + k_{\sigma(n_1)} - 1)$ なので,
また $\{\sigma(n_1+1), \cdots, \sigma(n)\}$ から外に矢印が出ると, それに対応する $\phi(q_\infty, *)$ は常に 0 となる (上半平面上の測地線は常にその境界で垂直) ので $d\phi(q_\infty, *) = 0$ となり積分は 0 になる.
よって $\partial_{\sigma(n_1)}\bar{C}_{n,m}$ と $\sigma(n_1) \in D(\Gamma_n)$ がグラフとして $1:1$ 対応することが分かった.
さらに $\mathcal{U}_{\Gamma_n}$ の係数の一致を見る. $\Gamma_{C(n_2,m_2)}$ の部分を先に積分することにより

$$\begin{aligned}\frac{1}{(2\pi)^{k_{\sigma(1)}+\cdots+k_{\sigma(n)}}} \int\limits_{\partial_{\sigma(n_1)}\bar{C}_{n,m}} \bigwedge d\phi_\Gamma^h &= \pm W_{\Gamma_{n_1}} \frac{1}{(2\pi)^{k_{\sigma(1)}+\cdots+k_{\sigma(n_1)}}} \int\limits_{\bar{C}_{n_1,m_1+1}} \bigwedge^{\otimes(k_{\sigma(1)}+\cdots+\sigma(n_1))} d\phi^h \\ &= \pm W_{\Gamma_{n_1}} W_{\Gamma_{n_2}}\end{aligned}$$

となり, (ii) で $\{\sigma(n_1+1), \cdots, \sigma(n)\}$ から外に矢印が出ない時と (D) が係数も込めて一致することが分かった.

以上で $c_\Gamma = \frac{1}{(2\pi)^{2n+m-3}} \int\limits_{\partial\bar{C}_{n,m}} \bigwedge d\phi_\Gamma^h$ であることが言えたので (5.2.18) の左辺 $(T)+(D)$ はそれぞれの Γ_n に関して 0 となることが分かり, (定義 5.2.9) の $\mathcal{U}$ が L_∞-写像であることが分かった.

L_∞-写像の存在は open string の OPE と closed string の OPE の代数の空間がホモトピー同値であるといっているように思える.

5.3 Kontsevich の変形量子化公式

一般の Poisson 多様体上での変形量子化公式が $\hbar$ の摂動展開として Kontsevich によって与えられた. ここではまずその公式の定義を与え, そのあと Poisson 構造 α が定数の時その公式が Moyal 積を与えることを確認する.

[5.2.3] では $T_{poly}(X)$ から $D_{poly}(X)$ への L_∞-写像が存在する時, Poisson 構造 α を 1 つ与えるとそれに対応する $*$ 積が (少なくとも) 1 つ存在することを示した. そして [5.2.4] では $T_{poly}(X)$ から $D_{poly}(X)$ への余準同型写像を 1 つ定義して, それが L_∞-写像であることを (多様体が $\mathbb{R}^d$ のときについて) 示した. よってこれらより変形量子化公式は既に定義できている. (定義 5.2.9) の (5.2.15) の $\mathcal{U}_n$ を使って (5.2.13) の $\tilde{\alpha}$ で与えられる. しかしここでは [5.2] と独立に読めるように

始めからそれを定義する.

変形量子化公式は, 次で与えられている.

$$f * g = fg + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\Gamma \in G_n} w_\Gamma B_{\Gamma,\alpha}(f,g) \tag{5.3.1}$$

$B_{\Gamma,\alpha}$, w_Γ は $\Gamma \in G_n$ を定義して次のように与えられる.

まず $\Gamma \in G_n$ を定義する. 上半平面 H の内部に n 個の vertex $i = 1, \cdots, n$, 境界に 2 点 L, R (外線) をとる. n 個の vertex からはそれぞれ 2 つの矢印 $a = 1, 2$ が出て, それらはすべて vertex $\{1, \cdots, n\}$ か外線 $\{L, R\}$ にたどりつく. i 番目の vertex の行き先を $v_a(i)$ と表して, その 2 つを結ぶ向き付けられた線 (矢印) を $e_i^a = (i, v_a(i))$ と表す. そしてこのような上半平面 H 上の $\{1, \cdots, n, L, R\}$ が与えられた時, e_i^a でつないでできるグラフの集合を G_n とし, その元 ($v_a(i)$) を決めて固定したもの) を Γ と呼ぶ. つまり

$$G_n \ni \Gamma = \{v_1(1), v_2(1) \cdots, v_1(n), v_2(n)\} \ : \ \{1_1, 1_2 \cdots, n_1, n_2\} \longrightarrow \{1, \cdots, n, L, R\} \ .$$

さてこれにより $B_{\Gamma,\alpha}$, w_Γ を定義する. まず vertex i を $\alpha^{i_1 i_2}$ と思い, L 上には f, R 上には g があるとして, 矢印 $e_i^a = (i, v_a(i))$ を $v_a(i)$ に作用する微分 ∂_{i_a} と解釈する. ($i_a = 1, \cdots, d.$) その微分を $e_i^a \leftrightarrow \overset{\frown}{\partial}_{i_a}^{v_a(i)}$ と表すことにする. これにより $B_{\Gamma,\alpha}$ を決める.

$$\begin{aligned} B_{\Gamma,\alpha}(f,g) &= \prod_{i=1}^{n} \Big(\sum_{i_1,i_2=1}^{d} \alpha^{i_1 i_2} \overset{\frown}{\partial}_{i_1}^{v_1(i)} \overset{\frown}{\partial}_{i_2}^{v_2(i)} \Big) \cdot f \cdot g \\ &= \sum_{j_1,j_2=1,(j=1,\cdot,n)}^{d} \Big(\prod_{i=1}^{n} \big(\prod_{j_a, v_a(j)=i} \partial_{j_a} \big) \alpha^{i_1 i_2} \Big) \cdot \big(\prod_{j_a, v_a(j)=L} \partial_{j_a} \big) f \cdot \big(\prod_{j_a, v_a(j)=R} \partial_{j_a} \big) g \ . \end{aligned}$$

ここで vertex i, f, g の上半平面 H 上の複素座標をそれぞれ u_i, 0, 1 とし, 向き付けられた線 e_i^a を H 上の測地線で書く. (2 点 i, $v_a(i)$ を結ぶ測地線は, i, $v_a(i)$ を通り H の境界で垂直に交わる円の弧である.) ここで $z, w, \infty \in H$ に対して時計周りの角度 $\angle zw\infty =: \phi^h(w,z)$ を定義する.

$$\phi^h(w,z) = Arg((z-w)/(z-\bar{w})) = \frac{1}{2i} \ln \Big(\frac{(z-w)(\bar{z}-w)}{(\bar{z}-\bar{w})(z-\bar{w})} \Big) \ . \tag{5.3.2}$$

また, H 上の n 個の vertex の configuration space (実 $2n$ 次元) を $C_n(H) = \{u \in H^n, u_i \neq u_j (i \neq j)\}$ として, グラフの weight w_Γ は

$$w_\Gamma = \frac{1}{(2\pi)^{2n} n!} \int_{C_n(H)} \wedge_{i=1}^{n} d\phi^h(u_i, u_{v_1(i)}) \wedge d\phi^h(u_i, u_{v_2(i)})$$

で定義される. ここで $d\phi^h(w,z) = d_w \phi^h(z,w) + d_z \phi^h(z,w)$ である.

以上で変形量子化公式が定義できた. 注意として 1 つ, G_n の元として, ある e_i^a による微分として自分自身に作用するもの (つまり $v_a(i) = i$) は考えない. 実際そのようなものについて, e_i^a は測地線なので長さ 0 となり, $\phi^h(u_i, u_i)$ が定義できない. よってそれぞれ $v_a(i) \neq i$ であり, i_1 から

$\{1,\cdots,n,L,R\}$ に $n+1$ 通り, i_2 から $\{1,\cdots,n,L,R\}\backslash\{v_1(i)\}$ に n 通りで, $i=1,\cdots,n$ より $\sharp G_n=(n(n+1))^n$　(有限個) である.

$n=1$ で Poisson bracket を与えることは (5.2.4) の最後で $\mathcal{U}_1$ が (定義 5.2.5) のものと一致することを確かめたので十分である.

[Moyal 積]

α が x によらない定数の時, この公式が実際 Moyal product を与えることを見る. $\alpha=\mathrm{const}$ のとき α は微分　($\leftrightarrow e_i^a$) がかかると消えるので, $B_{\Gamma,\alpha}(f,g)$ が生き残る Γ はそれぞれの vertex i からでる e_i^a が $v_1(i)=L$, $v_2(i)=R$ となるもの　($\mathfrak{G}_n$ とする) とその L, R を逆にしたもののみである. 逆にしたものについては 2 倍すればよいので, G_n のグラフからの寄与は

$$2^n\times w_{\Gamma_n}\cdot B_{\Gamma_n,\alpha}(f,g)=2^n\times w_{\Gamma_n}\Big(f(\overleftarrow{\partial_i}\alpha^{ij}\overrightarrow{\partial_j})^n g\Big)$$

であり, w_{Γ_n} は vertex i の H 上の座標 u_i と $d\phi^h(u_i,0)\wedge d\phi^h(u_i,1)$ が対応していてそれぞれの i で独立に $0<\phi^h(u_i,0)<\phi^h(u_i,1)<2\pi$ なので

$$w_{\Gamma_n}=\frac{1}{(2\pi)^{2n}n!}\cdot\Big(\frac{(2\pi)^2}{2}\Big)^n=\frac{1}{2^n n!}$$

である. よってこれらを (5.3.1) に代入して

$$f*g=fg+\sum_{n=1}^{\infty}2^n\times\frac{1}{2^n n!}\Big(f(\overleftarrow{\partial_i}\alpha^{ij}\overrightarrow{\partial_j})^n g\Big)=f\cdot e^{\alpha^{ij}\overleftarrow{\partial_i}\overrightarrow{\partial_j}}\cdot g$$

となり, Moyal 積が導かれた.

その他の例としては, 群多様体の場合がある. つまり $\alpha^{ij}(x)$ が x の 1 次の時である. 一般にはやはり複雑であるが, $*$ 積が常に存在するということが重要である.

第6章　経路積分と変形量子化

この Kontsevich によって（$\hbar$ のオーダーごとに）得られた $*$ 積を実際に, ある種の topological open string の 2 点関数の経路積分による摂動展開によって求められることが, Cattaneo, Felder によって説明された [29]. 結果を先にいうと, $*$ 積は

$$f * g(x) = \int_{X(\infty)=x} f(X(1))g(X(0))e^{\frac{i}{\hbar}S[X,\eta]}\mathcal{D}X\mathcal{D}\eta \tag{6.0.1}$$

と表せる. 作用は,

$$S[X,\eta] = \int_D \eta_i(u) \wedge dX^i(u) + \frac{1}{2}\alpha^{ij}(X(u))\eta_i(u) \wedge \eta_j(u) \tag{6.0.2}$$

という, 2 次元 Disk D から M へ X を写像として埋め込む非線形 σ 模型である (図 3.4 参照). u は D の座標で, $u \in \partial D$ の n 点は, $n \leq 3$ のとき共形対称性より固定できる. それが上の $u = 0, 1, \infty$ である. よって, f, g は $X = x$ の周りを揺らぐある種の open string の open string vertex operator で座標を見た関数と言え, その関数の積は $*$ 積になるということである.

η は D 上 1-form だが, 運動項を持たないので補助場と見なせ, α が invertible とすると η を D で積分できて, 作用は

$$S[X] = \int_D \frac{1}{2}B_{ij}(X(u))dX^i \wedge dX^j, \qquad B = \alpha^{-1} \tag{6.0.3}$$

となり, 3, 4 章の議論と対応がつく.

Kontsevich の変形量子化公式 [5.3] のグラフ Γ と作用 (6.0.2) を見比べると, 第 2 項目が vertex に対応していることが分かる. vertex の α^{ij} から出る 2 本の矢印の始点が η_i で, 第 1 項目の propagator が η_i と X^i をつなぐ「矢印」に対応しその propagator でどこかの X^i と contract することが微分になる.

作用 (6.0.2) を摂動展開するために Gauge fixing をすることを考える. (6.0.2) の運動方程式は,

$$\begin{aligned}
[\eta \to \eta + \delta\eta] \longrightarrow \delta_\eta S &= \int_D \delta\eta_i \wedge (dX^i + \alpha^{ij}(X)\eta_j) = 0 \\
&\longrightarrow dX^i + \alpha^{ij}(X)\eta_j = 0 \\
[X \to X + \delta X] \longrightarrow \delta_X S &= -\int_{\partial D} \eta_i \delta X^i + \int_D \delta X^i (d\eta_i + \frac{1}{2}\partial_i\alpha^{jk}(X)\eta_j \wedge \eta_k) = 0 \\
&\longrightarrow d\eta_i + \frac{1}{2}\partial_i\alpha^{jk}(X)\eta_j \wedge \eta_k = 0
\end{aligned} \tag{6.0.4}$$

となる. また $\delta_X S = 0$ が成り立つために, η_i の境界条件は $\eta_i(u)(v_{\|\partial D}) = 0$ となる. ここで v は disk D 上の接ベクトル場とし, $v_{\|\partial D}$ は D の境界 ∂D 上の ∂D に関する接ベクトル場とする.

作用は次の微小変換によって不変である.

$$\begin{aligned}\delta_\beta X^i &= \alpha^{ij}(X)\beta_j \\ \delta_\beta \eta_i &= -d\beta_i - \partial_i \alpha^{jk}(X)\eta_j \beta_k\end{aligned} \tag{6.0.5}$$

ここで, $\beta \in \Gamma(X^*(T^*M))$ とし, $\beta(u \in \partial D) = 0$ とする. この微小変換はその交換関係が閉じない. つまり gauge slice が積分可能でない. 実際,

$$\{\beta, \beta'\}_i = -\partial_i \alpha^{jk}(X)\beta_j \beta'_k$$

と定義して, ヤコビ律 (5.1.5) を使うと

$$\begin{aligned}[\delta_\beta, \delta_{\beta'}]X^i &= \delta_{\{\beta,\beta'\}}X^i \\ [\delta_\beta, \delta_{\beta'}]\eta_i &= \delta_{\{\beta,\beta'\}} - \partial_i \partial_k \alpha^{rs}(X)\beta_r \beta'_s (dX^k + \alpha^{kj}(X)\eta_j)\end{aligned} \tag{6.0.6}$$

X についての ゲージ変換は閉じているが, $(6.0.4)\eta$ の gauge slice は on shell 上 ($\leftrightarrow$ 運動方程式を満たす場の空間上) でしか閉じない. よって場の空間を gauge slice で割って物理的な状態を定義する普通の Faddeev Popov gauge fixing はできない. (量子化が目的なので off shell で定義できていないと意味がない.) よってこれを BRST 形式で表そうとしてみる. つまり, ゲージ変換の β を反交換な ghost 場に拡張して, 物理的な場の空間は BRST operator δ_0 のコホモロジーとして定義したい. ghost 数で grading を $gh(X^i) = gh(\eta_i) = 0, \quad gh(\beta) = 1$ とつけて, grading をひとつ増やす BRST 変換を

$$\begin{aligned}\delta_0 X^i &= \alpha^{ij}(X)\beta_j \\ \delta_0 \eta_i &= -d\beta_i - \partial_i \alpha^{kl}(X)\eta_k \beta_l \\ \delta_0 \beta_i &= \frac{1}{2}\partial_i \alpha^{jk}(X)\beta_j \beta_k\end{aligned} \tag{6.0.7}$$

で定義する. これで定義された BRST の sequence が complex になるためには $\delta_0 \circ \delta_0 = 0$ でなければならない. (逆にそうなっていれば BRST 形式 で量子化できる.) しかしこれも実は on shell でしか成り立たない.

$$\begin{aligned}\delta_0^2 X^i &= \delta_0^2 \beta_i = 0 \\ \delta_0^2 \eta_i &= -\frac{1}{2}\partial_i \partial_k \alpha^{kl}\beta_r \beta_s (dX^k + \alpha^{kj}(X)\eta_j)\end{aligned} \tag{6.0.8}$$

この場合もやはり η に対して on shell でしか成り立たない[1] . よって, さらに強力な Batalin-Vilkovisky 形式に移って考える. [6.1] で一般的に Batalin-Vilkovisky 形式について説明し, [6.2] でそれを使って作用 (6.0.2) を量子化し, Kontsevich の変形量子化公式を導く.

6.1 Batalin-Vilkovisky 形式

Batalin-Vilkovisky 形式は, 一般的にゲージ理論をゲージ固定して摂動展開できるようにする系統的な方法を与えたものである [32]. 作用が local , その場がそれぞれ無限回微分可能など, 普通物理で考えたいような作用は原理的にはすべてその方法で量子化できる.

[1] α^{rs} が X の 1 次以下の時は off-shell でも閉じていることが分かる. X の 0 次のときが Moyal 積, 1 次の時が群多様体上の CBF 公式だった. [5.3 参照].

[6.1.1] ではゲージ理論をゲージ固定する時の作用の性質による分類を紹介し, それらの系統的なゲージ固定の仕方について説明する.

6.1.1 場の Configuration Space とゲージ軌道

まず始めに作用 S_0 が与えられていて, それが n 個の場 ϕ^α , $\alpha = 1, \cdots, n$ から成っているとする. ϕ^α はそれぞれ無限回微分可能であるとする. ϕ^α とその微分が適当にかかったものの多項式を $C(\phi)$ と表す. また, 作用の運動方程式 $\delta S_0/\delta\phi^\alpha = 0$ の古典解を ϕ_0^α と表し, 少なくとも 1 つは ϕ_0^α があるとする.

定義 6.1.1 (Noether current) S_0 を不変にする微小変換で, on-shell で消えないもの, つまり Neother current という. 式で書くと

$$\frac{\delta S_0}{\delta\phi^\alpha} R^\alpha_{\alpha_1} = 0 \ , \quad R^\alpha_{\alpha_1}|_{\phi^\alpha=\phi_0^\alpha} \neq 0$$

となる R_{α_1} を Neother current という.

Neother current の数を $1 \leq \alpha_1 \leq m$ とする. もちろん $m < n$. 今やりたいことは古典解 ϕ_0^α の周りの Gaussian 積分であり, **Hessian** $K(\phi^\alpha, \phi^\beta) := \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\phi^\alpha} S_0 \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\phi^\beta}$ が on-shell ϕ_0 上非退化, つまり Hessian のランクが $\mathrm{rank}K(\phi^\alpha, \phi^\beta) = n$ であればそれはできる. しかし $m > 0$ では退化していてこのままでは積分が発散して定義できない. よってここで ghost 場を導入する. ghost 場を含めた場の集合を $\Phi := \{\Phi^a\} \supset \{\phi^\alpha\}$, $\sharp\Phi = N$ とし, さらにそれぞれの Φ^a と対になる N 個の antifield (antighost) Φ^*_a を導入する. この全体の場の集合を $\psi := \{\Phi^a, \Phi^*_a\}$, $\sharp\psi = 2N$ と表すことにする.

そして古典的作用 S_0 に Φ, Φ^* を加えていき, ゲージ不変で $\Phi^* = 0$ に制限すると S_0 に戻るような作用 S に変形する. ghost 場は必要とされる最小の種類だけ導入する (定義 6.1.5 の下, 参照.). Φ, Φ^* はそれぞれ ghost 数を持っていて, 作用が $\mathrm{gh}S = 0$ となるためには antifield Φ^* も作用に加える必要がある.

作用 S の作り方は以上である. 言葉の定義とゲージ変換の作り方の簡単な説明を説明してから, もう一度やるべきことをまとめる.

定義 6.1.2 (Hessian)

$$K(\psi^a, \psi^b) := \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\psi^a} S \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi^b}$$

を S の Hessian と呼ぶ.

定義 6.1.3 (マスター方程式) 非退化で grading を 1 増やす双線形写像

$$(A, B) := \frac{A\overleftarrow{\delta}}{\delta\Phi^a}\frac{\overrightarrow{\delta}B}{\delta\Phi^*_a} - \frac{A\overleftarrow{\delta}}{\delta\Phi^*_a}\frac{\overrightarrow{\delta}B}{\delta\Phi^a} \ , \quad A, B \ \in C(\psi)$$

を定義して,

$$(S, S) = 0$$

を (古典的な) マスター方程式という.

詳しくは [6.1.3] で説明するが, 一般に S を保つ grading (ghost 数) を持ったベクトル場 (Noether curent) δ は Poisson bracket との類推で $\delta A = (S, A)$, $A \in C(\Psi)$ と書けるが, 実際にそれが differential である, つまり $\delta \circ \delta = 0$ であるためには $(S, S) = 0$ でなければならない. 逆にそれが成り立つということは作用が δ で不変であることを意味する. つまり

$$(S, S) = 0 \Longleftrightarrow \delta \circ \delta = 0 \ , \ \delta S = 0 \ .$$

定義 6.1.4 (proper) $\frac{\delta S}{\delta \psi^A} = 0$ の解を ϕ_0 として,
マスター方程式の解 S が proper $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{rank} K(\psi^a, \psi^b)|_{\psi_0} = N$.

さてやるべきことをまとめると

1. 最小の ghost 場の組 Φ を決め, S_0 に $C(\psi)$ を加えていき,
2. $S|_{\Phi^* = 0} = S_0$ であり,
3. S が proper になるような
4. マスター方程式 $(S, S) = 0$ の解を探す

ということである.

[1. Φ の決定]
ここで最小の ghost 場の組を決める方法を説明する. 必要な ghost 場の数はゲージ理論の「種類」によって決まっている.

定義 6.1.5 (既約な理論, first class, second class, $\cdots$) 理論の Noether current を $R^\alpha_{\alpha_1}(\phi)$, $\alpha = 1, \cdots, n$, $\alpha_1 = 1, \cdots, m_1 < n$ として, m_1 個の Noether current が on shell で線形独立な時, その理論を既約な理論という. つまり

$$\text{理論が既約である} \Longleftrightarrow \mathrm{rank} R^\alpha_{\alpha_1}|_{\phi_0} = m_0 \ .$$

また m_1 個の Noether current が線形従属な時, 理論は可約であるといい, 次の zero 固有値固有ベクトル $Z^{\alpha_1}_{\alpha_2}$ を定義する.

$$R^\alpha_{\alpha_1} Z^{\alpha_1}_{\alpha_2}|_{\phi_0} \ , \quad \alpha_2 = 1, \cdots, m_2 < m_1 \ .$$

m_2 個の zero 固有値固有ベクトル $Z^{\alpha_1}_{\alpha_2}(\phi)$ が on shell で線形独立な時, first class の理論という. つまり

$$\text{理論が first class} \Longleftrightarrow \mathrm{rank} Z^{\alpha_1}_{\alpha_2}|_{\phi_0} = m_2 \ .$$

同様にして $R^\alpha_{\alpha_1}, Z^{\alpha_1}_{\alpha_2}, \cdots, Z^{\alpha_k}_{\alpha_{k+1}}(\phi)$ が線形従属な時, M_{k+1} 個の zero 固有値固有ベクトル $Z^{\alpha_k}_{\alpha_{k+1}}$ が on shell で線形独立なら理論は k-th class の理論であるという. $\alpha_i = 1, \cdots, m_i$ として

$$k\text{-th class の理論} \Longleftrightarrow \begin{array}{c} \mathrm{rank} R^\alpha_{\alpha_1}|_{\phi_0} < m_1, \\ \mathrm{rank} Z^{\alpha_i}_{\alpha_{i+1}}|_{\phi_0} < m_{i+1}, \quad i+1 \leq k \\ \mathrm{rank} Z^{\alpha_k}_{\alpha_{k+1}}|_{\phi_0} = m_{k+1}. \end{array}$$

k-th class の理論について

$$\mathrm{rank}K(\phi^\alpha,\phi^\beta)_{\phi_0}=n-m_1+m_2-m_3+\cdots+(-1)^{k+1}m_{k+1}$$

となる.

この k-th class の理論は Hamiltonian 形式での拘束系のゲージ理論についてのものと対応している [33].

ghost 場はこの k-th class の理論に対して次のように導入する. まず Noether current $R^\alpha_{\alpha_1}$ に対してその数だけ ghost 場 Φ^{α_1} を入れる. ここで ghost 場に対して正の ghost 数 pgh という grading を定義する. そして $\mathrm{pgh}(\Phi^{\alpha_1})=1$ とする. 理論が既約 $(k=0)$ の時はこの $\Phi=\{\phi^\alpha,\Phi^{\alpha_1}\}$ が最小の組である. 理論が可約の時, それぞれの zero 固有値固有ベクトル $Z^{\alpha_i}_{\alpha_{i+1}}|_{\phi_0}$ に対して ghost 場 $\Phi^{\alpha_{i+1}}$, $\mathrm{pgh}(\Phi^{\alpha_{i+1}})=i+1$ を入れていく. そして k-th class の理論において最小の ghost 場の組は $\Phi:=\{\phi^\alpha,\Phi^{\alpha_1},\cdots,\Phi^{\alpha_{k+1}}\}$ となる.

これら Φ に対し, それぞれ antighost (antifield) Φ^* を加える. antighost に対し antighost 数 antigh を定義する. field ϕ^α に対応する antifield ϕ^*_α , $\mathrm{antigh}(\phi^*_\alpha)=1$ とする. さらに可約な理論の Φ^{α_i} , $\mathrm{gh}(\Phi^{\alpha_i})=i$ に対し antighost $\Phi^*_{\alpha_i}$, $\mathrm{antigh}(\Phi^*_{\alpha_i})=i+1$ を導入する.

これで導入するすべての場がそろった. (ただしゲージ固定のためにはまた場を加える.) Faddeev Popov ghost と同じように外線として antifield, ghost, antighost は出てこない.

[2. 解 S の境界条件 $S|_{\Phi^*=0}=S_0$]

そのような S を探すのは S_0 から $\mathrm{antigh}(S_i)=i+1$ となる S_i を $i=1,2,\cdots$ と順に加えていけばよい. S_i , $i\geq 1$ には必ず 1 つ以上の antighost を含むので $S_i|_{\Phi^*=0}=0$ である.

[3. 解 S の境界条件 "proper"]

[6.1.3] で説明する理由により, $R^\alpha_{\alpha_1}, Z^{\alpha_1}_{\alpha_2}, Z^{\alpha_2}_{\alpha_3},\cdots$ は作用 S の Hessian $K(\Phi^a,\Phi^b)$ に含まれなければならない.

ここで正の ghost 数 と antighost 数の差によって total ghost 数 gh を定義する.

定義 6.1.6 (total ghost 数 gh)

$$(\mathrm{pgh}(\Phi^{\alpha_i}),\mathrm{antigh}(\Phi^{\alpha_i}))=(i,0)\ ,\quad (\mathrm{pgh}(\Phi^*_{\alpha_i}),\mathrm{antigh}(\Phi^*_{\alpha_i}))=(0,i+1)$$

に対して, total ghost 数 gh を次で定義する.

$$\begin{aligned}\mathrm{gh}(\Phi^{\alpha_i})&:=\mathrm{pgh}(\Phi^{\alpha_i})-\mathrm{antigh}(\Phi^{\alpha_i})=i\\ \mathrm{gh}(\Phi^*_{\alpha_i})&:=\mathrm{pgh}(\Phi^*_{\alpha_i})-\mathrm{antigh}(\Phi^*_{\alpha_i})=-(i+1)\ .\end{aligned}$$

作用 S は total ghost 数 が zero のものする. (よって $\delta=(S,\ )$ の変換は total ghost 数を 1 増やす.) その条件のもとで R,Z を Hessian $K(\Phi^a,\Phi^b)$ に含むように $S_1,S_2,\cdots$ を加えていくと (図 6.1) のようになる. antighost 数 antigh を i 増やす変換を s_i と定義して $\delta=s_{-1}+s_0+s_1+\cdots$ と分けるとこれにより s_{-1} , s_0 が決まった. s_{-1} , s_0 は他に S_i を加えていっても補正を受けない. また上の作り方から s_{-1} の複体についてそのコホモロジーは $\mathrm{antigh}(C(\psi))>0$ で消えていて, $\mathrm{antigh}=0$ のコホモロジーは $C(\phi_0)$ (もともとの物理量) となっている. つまり s_{-1},s_0 の double

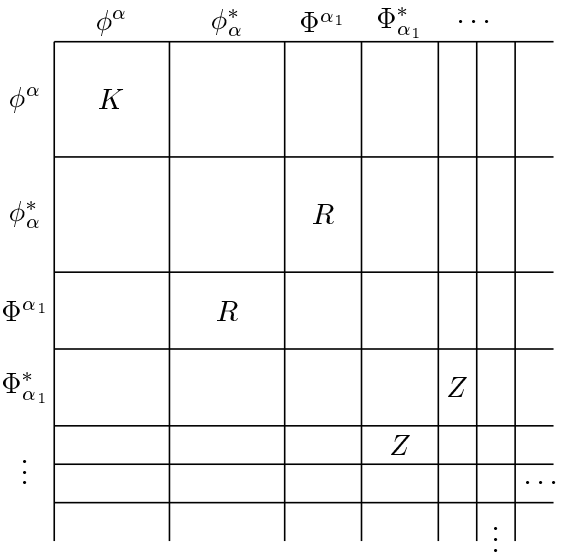

図 6.1: Hessian $K(\Phi^a, \Phi^b)$ の図. 作用 S の total ghost 数が 0 なのでこのように決まる. 空欄の部分は 0. また $R, Z, \cdots$ の添字は対応する ψ のものとなっている.

complex は, s_0 の複体についての resolution となっている. このとき s_{-1}, s_0 から δ は必ず作れ, そうしてできた δ による複体のコホモロジーと, $C(\phi_0)$ の空間に作用する s_0 (もともとのゲージ変換) による複体の BRST コホモロジーは一致することが示せる. [33] これは純粋にホモロジーの理論で, $s_1, s_2, \cdots$ と摂動的に作るので, ホモロジー的摂動理論という.

さらにこの δ は L_∞-代数の Q と対応している [31][35][27][34].

6.1.2 経路積分による量子論とゲージ固定

まず $V(\psi) \in C(\psi)$ の messure $\mathcal{D}\Phi$ での積分を定義したい.

定義 6.1.7 (Schwinger-Dyson operator) grading を 1 増やす線形写像

$$\triangle := \sum_a (-1)^a \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta \Phi^a} \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta \Phi^*_a}$$

を定義して, 1 つ目の条件としてある種の Schwinger-Dyson 方程式 (場の空間の Stokes の定理) より

$$\int \mathcal{D}\Phi \triangle V(\psi) = 0 \tag{6.1.1}$$

を要求する. messure は N 個の field (又は ghost) のみを考え, antifield については積分しないので, antifield を含む $V(\psi)$ の積分をどのように定義するかが問題になる. $V(\psi)$ を antifield の巾

で展開して

$$V(\psi) = V_0(\Phi) + \Phi^*_a V^a(\Phi) + \Phi^*_b \Phi^*_a V^{ab} + \cdots$$

と表した時, 単純には積分は antifield を含む項を 0 とすることが考えられる.

$$\int \mathcal{D}\Phi (V_0(\Phi) + \Phi^*_a V^a(\Phi) + \Phi^*_b \Phi^*_a V^{ab} + \cdots) = \int \mathcal{D}\Phi V_0(\Phi) = \int \mathcal{D}\big(V(\psi)|_{\Phi^*=0}\big)$$

右辺よりこれは $C(\psi)$ の空間から $\Phi^* = 0$ の部分多様体をとってゲージ固定したことに対応する. しかしこうすると今考えたいゲージ理論について

$$\int \mathcal{D}\Phi e^{\frac{i}{\hbar}S}$$

は ghost 場の方向について発散し, 積分が定義できない.

よって antifield Φ^* を Φ の関数として $\Phi^*_a = \Omega_a(\Phi)$, $\Omega_a \in C(\psi)$ という部分多様体をとることを考える. そして積分

$$\int \mathcal{D}\Phi V := \int \mathcal{D}\Phi V(\psi)|_{\Phi^*=\Omega} \tag{6.1.2}$$

を定義したとき, それが (6.1.1) を満たすための必要十分条件は Ω が

$$\Phi^*_a = \Omega(\Phi) = \frac{\overrightarrow{\delta}\Psi}{\delta\Phi^a}\ , \quad \exists\Psi \tag{6.1.3}$$

と書けることである. つまり Ω はある Ψ の場の空間での gradient flow で書ける. この Ψ を ゲージ固定 **fermion** という. $\mathrm{gh}(\Phi^a) + \mathrm{gh}(\Phi^*_a) = -1$ であったので, $\mathrm{gh}(\Psi) = -1$ である.

また (6.1.2) が well-defined であるためには, その積分の値がゲージ固定によってはならない. それを見るには $\Psi \to \Psi + \chi$ として (6.1.2) を antifield に関して変分すればよい. 部分積分と Stokes の定理により

$$\int \mathcal{D}V \text{ が } \Psi \text{ によらない} \Longleftrightarrow \triangle V = 0 \tag{6.1.4}$$

となる. $V(\psi) = V_0(\Phi)$ の時は $\triangle V = 0$ は自明に成り立っている. (6.1.4) よりゲージ固定した $\int \mathcal{D}$ での積分は $\triangle$ で作られる複体のコホモロジー $H(\triangle)$ をとる操作となっている.

[量子マスター方程式]

経路積分する時, $\triangle$ は経路積分の messure を保たないので古典的作用 S は量子論的には補正をうける. 量子論的作用を $W = S + \hbar W_1 + \hbar^2 W_2 + \cdots$ とする.

まず重み $e^{\frac{i}{\hbar}W}$ の経路積分 (6.1.2) がゲージ固定によらないことを要求する. (6.1.4) より

$$\triangle e^{\frac{i}{\hbar}W} = 0$$

が必要十分である. (定義 6.1.8) の $\triangle$ の性質を使うと

$$-i\hbar\triangle W + \frac{1}{2}(W, W) = 0 \tag{6.1.5}$$

となる. これを量子マスター方程式という. $W = S + \hbar W_1 + \hbar^2 W_2 + \cdots$ と展開して代入することにより, $\hbar^n$ の係数ごとに見て,

$$\begin{array}{ll} n=0 & (S,S)=0 \\ n=1 & (W_1,S)+i\hbar S=0 \\ n=2 & (W_2,S)+i\hbar W_1+\frac{1}{2}(W_1,W_1)=0 \\ \cdots & \cdots \quad \cdots \end{array}$$

となり, S は古典的マスター方程式の解として決まっていて, W_n を低次の項から順に決めていく. [2]

次に物理的観測量を $\mathcal{O}$ として, この重み $e^{\frac{i}{\hbar}W}$ での経路積分がまたゲージ固定によらないことを要請する.

$$\triangle\big(\mathcal{O}e^{\frac{i}{\hbar}W}\big) = 0 \ .$$

同様に (定義 6.1.8) の $\triangle$ の性質を使って

$$-i\hbar\triangle\mathcal{O} + (W,\mathcal{O}) = 0 \tag{6.1.6}$$

となる. つまり $\mathcal{O}$ が物理的観測量であるための必要十分条件は (6.1.6) であることが分かった.

6.1.3 Batalin-Vilkovisky bracket と マスター方程式

BV-bracket は次数付きの Poisson bracket のようなもので, シンプレクティック幾何との対応で BV-bracket とマスター方程式を自然に導くことができる. 右側に対応するシンプレクティック幾何の言葉を書く. 対応の notation を整理する.

$$(\Phi^a, \Phi^*_a) \longleftrightarrow (q,p)$$

field Φ^a , antifield Φ^*_a の両方の場合を一般的に ψ^a と表して, 場の空間上のベクトル場は

$$\psi^a \frac{\delta}{\delta\psi^a} \longleftrightarrow X$$

ゲージ変換は S を保つベクトル場なので一般に

$$\delta\Phi^a \cdot \frac{\delta S}{\delta\Phi^a} = 0$$

を満たす $\delta\Phi^a$ である. このようなベクトル場の任意の汎関数への作用はシンプレクティック幾何におけるハミルトニアン H を保つハミルトニアンベクトル場との対応で

$$\delta\psi^a \cdot \frac{\delta A}{\delta\psi^a} = (S,A) \longleftrightarrow Xf = \{H,f\} \tag{6.1.7}$$

[2] W_n の決定は一般には任意性が残り, unitarity を課すなど付加的な条件が必要となる. この messure の定義が唯一 BV 形式で決められない可能性のあるところである.

と表せる. ここで, (,) は 次数付きの Poisson bracket である. [3] Poisson bracket を

$$(A,B) := \frac{A\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi^a}(\omega^{-1})^{\alpha\beta}\frac{\overrightarrow{\delta}B}{\delta\psi^\beta}$$

と表すと, (6.1.7) の場の空間のベクトル場は

$$\delta\psi^a = \frac{S\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi^\beta}(\omega^{-1})^{\beta\alpha} \tag{6.1.8}$$

と表すことができ, 場の空間のラグランジアン部分多様体の近傍で正規直交基底をとると,

$$(\omega^{-1})^{\alpha\beta} = \zeta^{\alpha\beta}\ , \quad \zeta := \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \tag{6.1.9}$$

とできる. その基底を (Φ^a, Φ^*_a) とするとこの次数付きの Poisson bracket は

$$(A,B) := \frac{A\overleftarrow{\delta}}{\delta\Phi^a}\frac{\overrightarrow{\delta}B}{\delta\Phi^*_a} - \frac{A\overleftarrow{\delta}}{\delta\Phi^*_a}\frac{\overrightarrow{\delta}B}{\delta\Phi^a} \tag{6.1.10}$$

となる. この無限次元[4] の場の空間上の正規直交基底での Poisson bracket を Batalin-Vilkovisky antibracket (以下 BV-bracket) と言う. この形より δ が grading を 1 上げる operator となるために,

$$gh(\Phi^a) + gh(\Phi^*_a) = -1$$

である必要がある. またそれぞれ grading を持っているので, 微分の向きなどを変えてはならない. この向きのついた汎関数微分の正確な定義は後でする.

この基底により (6.1.7), 又は (6.1.8) は

$$\delta\Phi^a = -\frac{S\overleftarrow{\delta}}{\delta\Phi^*_a}\ , \qquad \delta\Phi^*_a = \frac{S\overleftarrow{\delta}}{\delta\Phi^a} \tag{6.1.11}$$

となる.

ここで (,) , $\triangle$ の持つ性質をまとめる.

定義 6.1.8 (Gerstenhaber 代数, Batalin-Vilkovisky 代数) 次数つき可換, associative な代数 $C(X) \in A, B, C$ で,

- $(A,B) = -(-1)^{(\mathrm{gh}(A)+1)(\mathrm{gh}(B)+1)}(B,A)$
- $(-1)^{(\mathrm{gh}(A)+1)(\mathrm{gh}(C)+1)}(A,(B,C)) + \mathrm{cyclic} = 0$
- $(A,BC) = (A,B)C + (-1)^{(\mathrm{gh}(A)-1)\mathrm{gh}(B)}B(A,C)$

[3] 正確にはそのように表せるためには $\frac{\delta S}{\delta\psi}$ が正則という条件がいる.

[4] よって正確には u を底空間の座標として, $(A,B) := \int du \frac{A\overleftarrow{\delta}}{\delta\Phi^a(u)}\frac{\overrightarrow{\delta}B}{\delta\Phi^*_a(u)} - \frac{A\overleftarrow{\delta}}{\delta\Phi^*_a(u)}\frac{\overrightarrow{\delta}B}{\delta\Phi^a(u)}$ と, 無限の u でも和 (積分) がとられている.

の 3 つの条件を満たすを満たす degree 1 の bracket $(\quad,\quad) : C(X)\otimes C(X)\to C(X)$ を持つものを **Gerstenhaber** 代数という.

またそれに加えて,

- $\triangle^2 = 0$
- $\triangle(AB) = \triangle(A)B + (-1)^{\mathrm{gh}(A)}(A,B) + (-1)^{\mathrm{gh}(A)}A\triangle(B)$

を満たす degree 1 の operator $\triangle : C(X)\to C(X)$ を持つとき, $C(X)$ を **Batalin-Vilkovisky** 代数 (以下 BV-代数と呼ぶ) という.

今までの (定義 6.1.3) の $(\ ,\ )$, (定義 6.1.7) の $\triangle$ はこれを満たす. また, 5 章の differential Lie graded algebra, L_∞-代数とも関係がある. BV-bracket と $\triangle$ はさらに

$$\triangle(A,B) = \triangle(A)B + (-1)^{\mathrm{gh}(A+1)}A\triangle(B) \tag{6.1.12}$$

を満たす. よって $d = i\hbar\triangle\ ,\ [\ ,\ ] = (\ ,\ )$ として BV-代数は grading を L_∞ grading で表した differential Lie graded algebra の構造を持っている. これは [6.1.1] の最後で触れた古典的な $(S,\ )$ と L_∞-代数の Q の間の関係とは異なる. BV-代数はこのような 2 つの L_∞-代数との対応を持っていると思われる [35].

S を保つベクトル場 $\delta A = (S,A)$ が $\delta\circ\delta = 0$ となる条件を見つける. $(\ ,\ )$ が grading のない時の Poisson bracket ならばこれは自明だが, grading つきの代数においては自明ではない. (定義 6.1.8) のヤコビ律より

$$\delta\circ\delta A = (S,(S,A)) = 0 \Longleftrightarrow ((S,S),A) = 0 \tag{6.1.13}$$

が任意の A について成り立たなければならないので, (定義 6.1.3) のマスター方程式 $(S,S) = 0$ が必要十分である. またこれは δ が S を保つことも保証する.

次に S の Hessian と Noether current の関係をみる. 特に Noether current が S_0 から ghost や antifield を加えて変形させた S の Hessian に含まれることと, その Hessian のランクは高々 N であることを見る.

マスター方程式を任意の ψ^c で微分すると

$$0 = (S,S)\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi^c} = \Big(\frac{S\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi^a}\zeta^{ab}\frac{\overrightarrow{\delta}S}{\delta\psi^b}\Big)\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi^c} = 2\frac{S\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi^a}\zeta^{ab}\Big(\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\psi^b}S\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi^c}\Big)$$

となり

$$\frac{S\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi^a}\mathcal{R}^a_c = 0\ ,\quad \mathcal{R}^a_c := \zeta^{ab}\Big(\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\psi^b}S\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi^c}\Big) = \zeta^{ab}K(\psi^a,\psi^b) \tag{6.1.14}$$

となる. ζ は非退化なのでここで定義した $\mathcal{R}^a_c$ は S の Hessian $K(\psi^b,\psi^c)$ と等価であり, 上の恒等式の形より拡張された場の空間 $C(\psi)$ の作用 S にとって Neother current である. よって $R^\alpha_{\alpha_1}, Z^{\alpha_1}_{\alpha_2}, Z^{\alpha_2}_{\alpha_3},\cdots$ は $K(\psi^a,\psi^b)$ に含まれる必要があった.

さらに on shell 上で (6.1.14) を微分して

$$-\zeta^{bd}\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\psi^d}\Big(\frac{S\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi^a}\mathcal{R}^a_c\Big)\Big|_{\psi=\psi_0}=\mathcal{R}^b_a\mathcal{R}^a_c\big|_{\psi=\psi_0}=0$$

となるので $\mathcal{R}$ は Σ 上 nilpotent であり, ランクは N 以下であることが分かる. よってこの $C(\psi)$ の空間の部分多様体をとって経路積分 (Gaussian 積分) できるのは Hessian K の非退化な (高々) N 種類の場についてである. つまり部分多様体は場に関して高々 N 次元であることが分かる. そしてそれが N に等しいように (proper) S を作る.

さてここでマスター方程式の解を探す. S をまず antighost 数で分ける.

$$S=\sum_{k=0}^{\infty}S_k$$

また BV-bracket $(\ ,\ )$ は field (ghost) と antifield (antighost) の微分の pair で書かれているのでそれを ghost 数でラベルして分ける.

$$(\ ,\ )=\sum_{m=0}^{\infty}(\ ,\ )_m$$

$(A,B)_k$ は $A,B\in C(\psi)$ の antighost 数の和を $k+1$ 下げる. マスター方程式の antighost 数 n の部分を考えると

$$0=\sum_{k+l-m-1=n}(S_k,S_l)_m=\sum_{k+l=n+1}(S_k,S_l)_0+\cdots+\sum_{k+l=2n-1}(S_k,S_l)_{n-2}$$

ただし $k,l\geq m$ である. n の低次の項から書き下すと

$$\begin{array}{ll}
n=0 & (S_0,S_1)_0+(S_1,S_0)_0=0\\
n=1 & \begin{array}{c}(S_0,S_2)_0+(S_1,S_1)_0+(S_2,S_0)_0\\+(S_1,S_2)_1+(S_2,S_1)_1\end{array}=0\\
n=2 & \begin{array}{c}(S_0,S_3)_0+(S_1,S_2)_0+(S_2,S_1)_0+(S_3,S_0)_0\\+(S_1,S_3)_1+(S_2,S_2)_1+(S_3,S_1)_1\\+(S_2,S_3)_2+(S_3,S_2)_2\end{array}=0\\
\cdots & \cdots\quad\cdots
\end{array}\tag{6.1.15}$$

となる. $n=-1$ の式は $(S_n,S_n)_n=0$ が自明に成り立つので消える. また $(S_k,S_l)_m=(S_l,S_k)_m$ であり, $(\ ,\ )_m=\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\Phi^{\alpha m}}\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\Phi^*_{\alpha m}}-\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\Phi^*_{\alpha m}}\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\Phi^{\alpha m}}$ と表すと上のそれぞれの条件式の右端, 左端の項については $(S_k,S_l)_k=\frac{S_k\overleftarrow{\delta}}{\delta\Phi^{\alpha_k}}\frac{\delta S_l}{\delta\Phi^*_{\alpha_k}}$, 中央の項は $(S_k,S_k)_m=\frac{S_k\overleftarrow{\delta}}{\delta\Phi^{\alpha m}}\frac{\overrightarrow{\delta}S_k}{\delta\Phi^*_{\alpha m}}$ となるので実際に計算する項はそれほど多くはならない.

さらに S を antifield の巾として

$$S=\sum_{p;a_1,\cdots,a_p}\Phi^*_{a_p}\cdots\Phi^*_{a_1}S^{a_1\cdots a_p}(\Phi)$$

と展開し, $n=0,1,2$ について求めると

$$\begin{aligned} n=0 \quad & \tfrac{S_0\overleftarrow{\delta}}{\delta\phi^\alpha}\tfrac{\overrightarrow{\delta}S_1}{\delta\phi^*_\alpha}=0 \\ n=1 \quad & \tfrac{S_1^\alpha\overleftarrow{\delta}}{\delta\phi^\beta}S^\beta+\tfrac{S_1^\alpha\overleftarrow{\delta}}{\delta\Phi^{\beta_1}}S_2^{\beta_1}+2S_2^{\alpha\beta}\tfrac{\overrightarrow{\delta}S_0}{\delta\phi^\beta}=0 \\ n=2 \quad & \tfrac{S_2^{\alpha_1}\overleftarrow{\delta}}{\delta\phi^\beta}S_1^\beta+\tfrac{S_2^{\alpha_1}\overleftarrow{\delta}}{\delta\Phi^{\beta_1}}S_2^{\beta_1}+2S^{\alpha_1\beta}\tfrac{\overrightarrow{\delta}S_0}{\delta\phi^\beta}=0 \end{aligned} \tag{6.1.16}$$

となる[5]. ここで $\mathrm{antigh}(\Phi^*_{\alpha_m})=m+1$ である.

- $n=0$ の式はもともとの場の空間 $C(\phi)$ での Noether current の定義式である. $S_1=\phi^*_\alpha R^\alpha_{\alpha_1}\Phi^{\alpha_1}$ であった.
- $n=1$ は $C(\phi)$ (の接空間) に作用するゲージ代数の恒等式である. S_1 を代入し, $\Phi^{\alpha_1}\Phi^{\beta_1}$ の係数を読みとると

$$\frac{R^\alpha_{\alpha_1}\Phi^{\alpha_1}\overleftarrow{\delta}}{\delta\phi^\beta}R^\beta_{\gamma_1}\Phi^{\gamma_1}+R^\alpha_{\beta_1}S_2^{\beta_1}+2S_2^{\alpha\beta}\frac{S_0\overleftarrow{\delta}}{\delta\phi^\beta}=0 \tag{6.1.17}$$

  となり, $S_2^{\alpha\beta}=0$ の時はゲージ代数は閉じていて, S_1^α はその構造関数 (定数の時は構造定数) である. $S_2^{\alpha\beta}\neq 0$ の時このゲージ代数を開いたゲージ代数という. その閉じた代数との差の部分は運動方程式に比例する項となり, それがまさに (6.0.6), 又は (6.0.8) である. つまりこの $n=1$ についての条件式は変形した作用について (さらに $n>2$ でも恒等式を満たせば) $C(\phi)$ 上開いた代数も $C(\psi)$ 上で閉じることを意味する.
- $n=2$ の 1 つ目の式はヤコビ律に対応する. 第 3 項目が $S_3^{\alpha_1\beta}=0$ の時はいつもの (次数つきの) ヤコビ律である. $S_3^{\alpha_1\beta}\neq 0$ の時は (定義 5.2.7) の L_∞-代数での $Q_3\neq 0$ の場合に up to homotopy でヤコビ律が成り立っていたことと対応する.

これ以上大きい n では今まで知っている恒等式は出てこない. 知っている恒等式とは, 常に場 ϕ に作用するゲージ代数についてであったので, ghost, antighost の増えたところでそのような恒等式がもう現れないのは当然である.

以下 [6.2] で計算するため BV-bracket を正確に定義する. 底空間を $D\ni u$ とし, 微分形式の内積を

$$\langle\alpha,\beta\rangle_u\,dv(u)=\alpha\wedge *\beta \tag{6.1.18}$$

で定義して, 汎関数左微分, 右微分を

$$\frac{d}{dt}A(\psi+t\rho)\Big|_{t=0}=\int_D\langle\rho^a(u),\frac{\overrightarrow{\delta}A}{\delta\psi^a(u)}\rangle_u dv(u)=\int_D\langle\frac{A\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi^a(u)},\rho^a\rangle_u dv(u) \tag{6.1.19}$$

で定義する. 要するに, form については後ろに $dv(u)$ でまとめておくと考えて, $\frac{\overrightarrow{\delta}A}{\delta\psi^a(u)}$ は A の中の $\psi^a(u)$ で微分されるものを符号を出しながら一番左まで持ってきて, それを微分して消し, 最後

[5] $n=2$ はもう 1 つ条件式がでる. 上のものが $\Phi^*_{\alpha_2}$ の係数をとったもので, もう 1 つ $\Phi^*_{\alpha_1}\Phi^*_{\beta_1}$ の項が存在する.

に ρ^a, つまり ψ^a と同じ form の基底をひっつけて戻したもので, $\frac{A\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi^a(u)}$ はその逆である. これらを使って BV-bracket を

$$(A,B)=\sum_a\int_D\left(\langle\frac{A\overleftarrow{\delta}}{\delta\Phi^a(u)},\frac{\overrightarrow{\delta}B}{\delta\Phi^*_a(u)}\rangle-\langle\frac{A\overleftarrow{\delta}}{\delta\Phi^*_a(u)},\frac{\overrightarrow{\delta}B}{\delta\Phi^a(u)}\rangle\right)dv(u) \tag{6.1.20}$$

で定義する. この bracket により $A,B\in C(X)$ は Gerstenhaber 代数となる.

さらに,

$$\triangle A=\int_D dv(u)\sum_a(-1)^{\mathrm{gh}(a)}\frac{\vec{\delta}^2A}{\delta\Phi^a(u)\delta\Phi^*_a(u)}$$

を定義すると, これは BV-代数となる. ただし同じ場を 2 回汎関数微分しているので $A\in C(X)$ が local な場の底空間上の積分の時 (作用 S など), $\triangle A$ は発散していて, 正則化[6] しないと well-defined でない. よって $\triangle$ は量子論の operator と言える. BV-bracket はこのままでも well-defined である.

これらを, 場を微分形式のまま扱いやすいように定義し直す. 作用 (6.0.2) の量子化はすべて form のまま計算を行なう. まず antifield を

$$\Phi^*_a=*\Phi^+_a$$

で定義しなおす. ここで $*$ は D 上の metric を決めた時の Hodge である. どちらの定義でも, 場を form の基底とその係数 ($\leftrightarrow$ 場の自由度) に分けた時, field と antifield の場の自由度は一致していることは見てわかる. この書き換えは (6.1.18) の左辺を右辺に書き換えることに対応する. ここで汎関数微分として新しく

$$\left.\frac{d}{dt}A(\psi+t\rho)\right|_{t=0}=\int_D\rho^a\wedge\frac{\overrightarrow{\partial}A}{\partial\psi^a}=\int_D\frac{A\overleftarrow{\partial}}{\partial\psi^a}\wedge\rho^a \tag{6.1.21}$$

を定義する. この意味もだいたい (6.1.20) と同じだが, 今度は微分されるものを form ごと一番左あるいは右に移動させて ghost 数 gh と form の degree deg に関して独立に符号を出す. (6.1.18)(6.1.21) より, (6.1.20) は次のように書き換えることができる.

$$(A,B)=\sum_a\int_D\left(\frac{A\overleftarrow{\partial}}{\partial\Phi^a}\wedge\frac{\overrightarrow{\partial}B}{\partial\Phi^+_a}-(-1)^{\deg\Phi_a}\frac{A\overleftarrow{\partial}}{\partial\Phi^+_a}\wedge\frac{\overrightarrow{\partial}B}{\partial\Phi^a}\right).$$

ここで D は 2 次元とした. 一般の次元では符号が異なる. この表示により, BV-bracket は 底空間 D の metric によらない.

この BV-bracket により, 作用 S を不変に保つ変換 $\delta=(S,\ \ )$ (6.1.11) は

$$\delta\Phi^a=(-1)^{\mathrm{gh}(\Phi^a)}\frac{\overrightarrow{\partial}S_{BV}}{\partial\Phi^+_a},\qquad\delta\Phi^+_a=(-1)^{\mathrm{gh}(\Phi^a)+\deg(\Phi^a)}\frac{\overrightarrow{\partial}S_{BV}}{\partial\Phi^a} \tag{6.1.22}$$

となる.

[6] 例えば D 上 compact support を持つ関数 $f(u)$ を使って $\triangle$ を $\triangle A=\int_D dv(u)\int_D dv(v)f(u-v)\sum_a(-1)^{\mathrm{gh}(a)}\frac{\vec{\delta}^2A}{\delta\Phi^a(u)\delta\Phi^*_a(v)}$, BV-bracket を $\triangle(AB)$ により定義するなど. $f(u-v)=\delta(u-v)$ で元の定義に戻る.

6.2 BV-形式による量子化と変形量子化公式

6.2.1 マスター方程式による作用の決定

さて上の BV-形式を使って作用 (6.0.2) を量子化する. まず field , antifield を ghost 数 gh (縦) と form の degree deg (横) に関する表にする.

$$\begin{array}{cccc} & 0 & 1 & 2 \\ -2 & & & \beta^{+i} \\ -1 & & \eta^{+i} & X_i^+ \\ 0 & X^i & \eta_i & \\ 1 & \beta_i & & \end{array} \tag{6.2.1}$$

一般的には, 量子マスター方程式は $\hbar$ による方程式であったが, この模型についてはある種の topological な理論になっていて, 理論が $\hbar$ によらない. よって $\triangle$ の正則化は tadpole に関してのみでよく, 理論は繰り込みを受けず, マスター方程式は独立に

$$\triangle S_{BV} = 0 \qquad (S_{BV}, S_{BV}) = 0 \tag{6.2.2}$$

となることが分かる.

今から antifield を加えて作用を変形させる. BRST 変換 (6.0.7) は on-shell に制限すると $\delta_0^2 = 0$ であった. (6.1.22) の $\delta\Phi^a = (-1)^{\mathrm{gh}(\Phi^a)} \frac{\overrightarrow{\partial} S_{BV}}{\partial \Phi_a^+}$ よりまず作用 S_{BV}^0 をそれが BRST 変換 (6.0.7) を再現するようにつくる. それは

$$S_{BV}^0 = S + \int_D (X_i^+ \delta_0 X^i + \eta^{+i} \wedge \delta_0 \eta_i) - \int_D \beta^{+i} \delta_0 \beta_i \tag{6.2.3}$$

とすればよい. [6.1.3] の議論と対応させるとこれは

$$\begin{aligned} S_{BV}^0 &= S + \int_D S_1 + \int_D S_2' \\ &= S + \int_D \phi_\alpha^* R_{\alpha_1}^\alpha \Phi^{\alpha_1} + \int_D \Phi_{\alpha_1}^* S_2^{\alpha_1} \end{aligned}$$

であり, [7] (6.1.17) の開いたゲージ代数の恒等式と (6.0.8) と見比べると,

- $\phi^\alpha \Leftrightarrow X^i$ の時は構造関数 ($\times\beta^2$) を $S_2^{\alpha_1} \Leftrightarrow \delta_0\beta_i$ として $S_2^{\alpha\beta} = 0$ でよい.
- $\phi^\alpha \Leftrightarrow \eta_i$ の時はさらに $2S_2^{\alpha\beta} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\partial_i\partial_k\alpha^{rs}(X)\beta_r\beta_s$ として $n=1$ での恒等式が成り立つことが分かる.

このようにマスター方程式が $n=1$ まで成り立つようにすると S_2 まで決まり,

$$\begin{aligned} S_{BV} &= S_{BV}^0 - \frac{1}{4}\int_D \eta^{+i} \wedge \eta^{+j} \partial_i\partial_j \alpha^{kl}(X)\beta_k\beta_l \\ &= \int_D \eta_i \wedge dX^i + \frac{1}{2}\alpha^{ij}(X)\eta_i \wedge \eta_j + X_i^+ \alpha^{ij}(X)\beta_j - \eta^{+i} \wedge (d\beta_i + \partial_i \alpha^{kl}(X)\eta_k\beta_l) \\ &\quad -\frac{1}{2}\beta^{+i}\partial_i\alpha^{jk}(X)\beta_j\beta_k - \frac{1}{4}\eta^{+i} \wedge \eta^{+j}\partial_i\partial_j\alpha^{kl}(X)\beta_k\beta_l, \end{aligned}$$

[7] [6.1.3] と今の作用については添字の上下は異なるがそれは定義によるだけなので気にしない.

となる. 実はこの S_2 までで $(S,S)=0$ は成り立っている. $n=2,3,\cdots$ に関してもマスター方程式が成り立つことを示せばよいのだが, この作用は superfield 形式できれいにまとめることができ, そこで $(S,S)=0$ も示す.

あと, 適当に正則化することにより $\triangle S_{BV}=0$ となることを見る. S_{BV} の中で field と antifield の組を持つ項についてのみ考えればよく,

$$\begin{aligned}\triangle S_{BV} &= \triangle\int_D X_i^+\alpha^{ij}(X)\beta_j-\eta^{+i}\wedge\partial_i\alpha^{kl}(X)\eta_k\beta_l-\frac{1}{2}\beta^{+i}\partial_i\alpha^{jk}(X)\beta_j\beta_k\\ &= (1-2+1)C\int_D\partial_i\alpha^{ij}(X)\beta_j dv\\ &= 0.\end{aligned}$$

となる.

6.2.2 Superfield 形式

以上の計算は, field と antifield を superfield に組むことによってきれいにまとまる. superfield は total degree = gh + deg の揃ったもの同士を組む. つまり (6.2.1) の図の右上がりの線上の 3 つの場を multiplet に組んで 2 つの superfield ができる. superfield 同士の演算が well-defined になるためにはその統計性が 1 つの superfield の中でそろっていなければならない. それは disk 上の form du_1, du_2 を, gh = 1 の supermanifold 上の座標 θ^1,θ^2 に読みかえることによってできる.

$$\begin{array}{ccc}\Omega(D) & \simeq & C^\infty(\Pi T^*D)\\ \omega=\frac{1}{p!}\omega_{i_1\cdots i_p}du^{i_1}\wedge\cdots\wedge du^{i_p} & \longleftrightarrow & \tilde{\omega}=\frac{1}{p!}\tilde{\omega}_{i_1\cdots i_p}\theta^{i_1}\cdots\theta^{i_p}\\ d=du^i\frac{\partial}{\partial u^i} & \longleftrightarrow & D=\theta^i\frac{\partial}{\partial u^i}\\ \int_D\omega\quad(\deg(\omega)=dimD=d) & \longleftrightarrow & \int du^d d\theta^d\tilde{\omega}\end{array}\tag{6.2.4}$$

supermanifold の座標は一般に $(u^1,\cdots,u^d,\theta^1,\cdots,\theta^d)$ である. supermanifold 上の場 $\phi(u,\theta)$ は θ が反可換なので, θ について Taylor 展開すると θ^d までで止まる. その係数が u に関する場となっている. 今 $d=2$ なので $\phi(u,\theta)$ は

$$\phi(u,\theta)=\phi^{(0)}(u)+\theta^\mu\phi^{(1)}_\mu(u)+\theta^\mu\theta^\nu\frac{1}{2}\phi^{(2)}_{\mu\nu}$$

と書ける. 上の自然な同一視から, もとの微分形式による表示との対応はもとの スカラー場を $\phi^{(0)}$ に持ってきて, あと $\phi^{(1)}=\phi^{(1)}_\mu du^\mu$, $\phi^{(2)}=\frac{1}{2}\phi^{(2)}_{\mu\nu}du^\mu\wedge du^\nu$ である.

これらの形式により今 field と antifield が 2 つの superfield にまとまる. total degree = 0 の場は

$$\tilde{X}^i=X^i+\theta^\mu\eta^{+i}_\mu-\frac{1}{2}\theta^\mu\theta^\nu\beta^{+i}_{\mu\nu},$$

total degree = 1 の場は

$$\tilde{\eta}_i=\beta_i+\theta^\mu\eta_{i,\mu}+\frac{1}{2}\theta^\mu\theta^\nu X^+_{i,\mu\nu}.$$

とまとまる.

(6.2.1) で作った $\delta = (S_{BV},\ )$ は superfield formalism では上の対応表の $D = \theta^\mu \partial/\partial u^\mu$ を使って次のように表せる.

$$\begin{aligned} \delta\tilde{X}^i &= D\tilde{X}^i + \alpha^{ij}(\tilde{X})\tilde{\eta}_j, \\ \delta\tilde{\eta}_i &= D\tilde{\eta}_i + \frac{1}{2}\,\partial_i\alpha^{jk}(\tilde{X})\tilde{\eta}_j\tilde{\eta}_k. \end{aligned} \tag{6.2.5}$$

$\delta^2 = 0$ であることは, D と δ の反交換性と Jacobi 律を使って簡単に分かる. それぞれの components field の変換は (6.2.5) の右辺を θ^μ で Taylor 展開して $\delta\phi = \delta\phi^{(0)} - \theta^\mu\delta\phi^{(1)}_\mu + \frac{1}{2}\theta^\mu\theta^\nu\delta\phi^{(2)}_{\mu\nu}$ と係数を比べることにより, $\tilde{X}^i$ について

$$\begin{aligned} \delta X^i &= \alpha^{ij}(X)\beta_j, \\ \delta\eta^{+i} &= -dX^i - \alpha^{ij}(X)\eta_j - \partial_k\alpha^{ij}(X)\eta^{+k}\beta_j, \\ \delta\beta^{+i} &= -d\eta^{+i} - \alpha^{ij}(X)X^+_j + \frac{1}{2}\,\partial_k\partial_l\alpha^{ij}(X)\eta^{+k}\wedge\eta^{+l}\beta_j \\ &\quad +\partial_k\alpha^{ij}(X)\eta^{+k}\wedge\eta_j + \partial_k\alpha^{ij}(X)\beta^{+k}\beta_j. \end{aligned}$$

$\tilde{\eta}^i$ について

$$\begin{aligned} \delta\beta_i &= \frac{1}{2}\,\partial_i\alpha^{kl}(X)\beta_k\beta_l, \\ \delta\eta_i &= -d\beta_i - \partial_i\alpha^{kl}(X)\eta_k\beta_l - \frac{1}{2}\,\partial_i\partial_j\alpha^{kl}(X)\eta^{+j}\beta_k\beta_l, \\ \delta X^+_i &= d\eta_i + \partial_i\alpha^{kl}(X)X^+_k\beta_l - \partial_i\partial_j\alpha^{kl}(X)\eta^{+j}\wedge\eta_k\beta_l + \frac{1}{2}\,\partial_i\alpha^{kl}(X)\eta_k\wedge\eta_l \\ &\quad -\frac{1}{4}\,\partial_i\partial_j\partial_p\alpha^{kl}(X)\eta^{+j}\wedge\eta^{+p}\beta_k\beta_l - \frac{1}{2}\,\partial_i\partial_j\alpha^{kl}(X)\beta^{+j}\beta_k\beta_l. \end{aligned}$$

となる. 符号について, 特に 2-form の場について $\frac{1}{2}\theta^\mu\theta^\nu\delta\phi^{(2)}_{\mu\nu}$ から $\frac{1}{2}\delta\phi^{(2)}_{\mu\nu}du^\mu\wedge du^\nu =: \delta\phi^{(2)}$ を読みとる時に, superfield の時は前に $\theta^\mu\theta^\nu$ を持ってきてその係数の $\delta\phi^{(2)}_{\mu\nu}$ が form の係数の $\delta\phi^{(2)}_{\mu\nu}$ であることに注意する.

BV-作用 S_{BV} は次のように書くことができる.

$$S_{BV} = \int_D\int d^2\theta L\ , \qquad L = \tilde{\eta}_i D\tilde{X}^i + \frac{1}{2}\,\alpha^{ij}(\tilde{X})\tilde{\eta}_i\tilde{\eta}_j.$$

なんと (6.2.4) の対応で S_{BV} を書き換えたものは, もともとの作用 S_0 (6.0.2) で 場 X^i, η^i に $\tilde{}$ をつけただけの形になっている !

これは BRST closed, つまり $\delta S_{BV} = (S_{BV}, S_{BV}) = 0$ である. 実際 (ヤコビ律, $D^2 = 0$ を使って)

$$\delta L = (\delta\tilde{\eta}_i)D\tilde{X}^i + \tilde{\eta}_i(D\delta\tilde{X}^i) + \delta\tilde{X}^k\frac{1}{2}\partial_k\alpha^{ij}(\tilde{X})\tilde{\eta}_i\tilde{\eta}_j + \alpha^{ij}(\tilde{X})(\delta\tilde{\eta}_i)\tilde{\eta}_j = D(\tilde{\eta}_i D\tilde{X}^i)$$

より,

$$\delta S_{BV} = \int d^2u d^2\theta D(\tilde{\eta}_i D\tilde{X}^i) = \int d^2u d^2\theta D(\beta_i DX^i) = \int d^2u\epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu(\beta_i\partial_\nu X^i)$$

となり, $(\beta_i \partial_\nu X^i)$ の表面項は $\beta|_{u\in\partial D} = 0$ より消える.

この superfield formalism により, Kontsevich の変形量子化公式の形との対応がまた見えるようになった. 以後, ゲージ固定して Feynman rule で摂動計算をするときも, できるだけ super 化した形を保つようにする.

6.2.3 ゲージ固定

もともとこの作用 (6.0.2) の第 1 項から η は Disk D 上の 1-form の (2 次元の場の理論としての) ゲージ場 である. よってこれを Lorentz gauge $d*\eta_i = 0$ によりゲージ固定することを考える. [6.1.2] より

新しく $2d$ 個の場とその antifield を加える.

- (λ, λ^+): λ Lagrange 乗数
- (γ, γ^+): γ は β と組んで Faddeev-Popov ghost となる.

ゲージ固定をするため Lagrange 乗数を使って作用に $\int_D \lambda d*\eta_i$ という項を加えたい (この式より $\mathrm{gh}(\lambda) = 0$) ので, S_{BV} に

$$S' = -\int_D \lambda^i \gamma_i^+ \tag{6.2.6}$$

という項を加え, $\gamma_i^+ = d*\eta_i = \frac{\overrightarrow{\partial}\Psi}{\partial\gamma^i}$ とするためにゲージ fermion は

$$\Psi = \int_D \gamma^i (d*\eta_i) = -\int_D d\gamma^i * \eta_i \tag{6.2.7}$$

と決まる. (6.2.6) より $\mathrm{gh}(\gamma^+) = 0$. $\lambda^{(+)}, \gamma^{(+)}$ の境界条件は propagator を作る時の自由度の関係から決める. 境界条件と ghost 数を今まで出てきたすべての場に関して (表 6.1) にまとめた.

S' を新しく加えた作用がマスター方程式を満たすためには

$$(S_{BV} + S', S_{BV} + S') = (S_{BV}, S_{BV}) + 2(S_{BV}, S') + (S', S') = (S', S') = 0$$

より S' の中でゲージ変換が閉じていればよい. よって

$$\delta\lambda = \delta\gamma^+ = 0, \qquad \delta\lambda^+ = -\gamma^+, \qquad \delta\gamma = \lambda\ .$$

$S_{BV} + S'$ が依然 proper(定義 6.1.4) であることは簡単に分かる. $S_{BV} + S'$ の Hessian は S_{BV} の Hessian と S' の Hessian の直和であり, S' は明らかに proper である.

さて Ψ により antifield の部分多様体への制限が決まった.

$$\begin{aligned} &X^+ = \beta^+ = \lambda^+ = 0 \\ &\gamma_i^+ = d*\eta_i + \text{表面項} \quad (\text{具体的に決める必要はない}) \\ &\eta^{+i} = *d\gamma^i\ . \end{aligned}$$

そしてゲージ固定された作用は以下のようになる.

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{gf}} := (S_{BV} + S')|_{\Phi^* = \partial\Psi} \quad = \quad & \int_D \eta_i \wedge dX^i + \frac{1}{2}\alpha^{ij}(X)\eta_i \wedge \eta_j - *d\gamma^i \wedge (d\beta_i + \partial_i \alpha^{kl}(X)\eta_k \beta_l) \\ & -\frac{1}{4} *d\gamma^i \wedge *d\gamma^j \partial_i \partial_j \alpha^{kl}(X)\beta_k \beta_l - \lambda^i d*\eta_i. \end{aligned}$$

6.2.4 Feynman 則 と摂動展開

これからこのゲージ固定された作用 $S_{\rm gf}$ の Feynman rule を導き, $\hbar$ による摂動展開をする. propagator を作る時に境界条件を使うので, いままで出てきた場について (表 6.1) にまとめた.

場	gh	deg	total deg	境界条件 $(u \in \partial D)$
$X^i = x^i + \xi^i \in X^*(TM)$	0	0	0	$\xi^i(\infty) = x^i$
$\eta^{+i} \in X^*(TM) \otimes TD$	-1	1	0	$\eta^{+i}(u)(v_{\perp \partial D}) = 0$
$\beta^{+i} \in X^*(TM) \otimes \wedge^2 T^*D$	-2	2	0	$\beta^{+i}(u) = 0$
$\beta_i \in X^*(T^*M)$	1	0	1	$\beta_i(u) = 0$
$\eta_i \in X^*(T^*M) \otimes T^*D$	0	1	1	$\eta_i(u)(v_{\parallel \partial D}) = 0$
$X_i^+ \in X^*(T^*M) \otimes \wedge^2 T^*D$	-1	2	1	
$\lambda^i \in X^*(TM)$	0	0	0	$\lambda_i(u) = 0$
$\gamma^i \in X^*(\Pi TM)$	-1	0	-1	$\gamma^i(u) = \text{const}$
$\gamma_i^+ \in X^*(\Pi T^*M)$	0	2	2	
$\lambda_i^+ \in X^*(T^*M)$	-1	2	1	

表 6.1: 導入したすべての場.

まず propagator (Green 関数) を作る. 運動方程式作用素を K として, 場 ϕ^α に関する線形な運動方程式 (作用の相互作用項を無視し, 2 次の場による運動項のみに対する運動方程式) は必要なら部分積分を使って $K\phi^\beta = 0 \quad K : \phi^\beta \to \phi^\alpha$ と書ける. つまり運動方程式を満たす空間は, $KerK$. Green 関数は $K^{-1} : \phi^\alpha \to \phi^\beta$ であるので, K の逆があることを見るには 場の自由度の対応をきっちり見なければならない. よってひとまず superfield formalism から component field にばらす.

$S_{\rm gf}$ の運動項は

$$\begin{aligned} S^0_{\rm gf} &= \int_D \eta_i \wedge d\xi^i - *d\gamma^i \wedge d\beta_i - \lambda^i d*\eta_i \\ &= \int_D \eta_i \wedge (d\xi^i + *d\lambda^i) + \beta_i d*d\gamma^i \ . \end{aligned} \tag{6.2.8}$$

よって運動方程式作用素は

$$\begin{array}{rccc} d \oplus *d : & \Omega^0(D) \oplus \Omega^0_0(D) & \to & \Omega^1(D) \\ & \xi^i \oplus \lambda^i & \mapsto & \eta_i \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} d*d : & \Omega^0(D) & \to & \Omega^2(D) \\ & \gamma^i & \mapsto & \beta_i \end{array} \tag{6.2.9}$$

となる. ここで D 上の p-forms の空間 $\Omega^p(D)$ に対して $\Omega^p_0(D)$ の下つきの 0 は Direchlet 境界条件を表すことにする. これらの作用素は全射であるが, $\Omega^p(D)$ だと $\mathbb{R}$ がその Kernel になっている. その自由度を境界条件で固定しているので K^{-1} を作ることができる. Disk は共形変換により上半平面 H_+ で考えればよく, [3.2] の時と同様, H の座標を $z = u^1 + iu^2$, 境界を $u^2 = 0$ とする.

notation を少し整理する. [3.2] の (3.2.4) との対応は, $\tau \leftrightarrow u^1$, $\sigma \leftrightarrow u^2$ で, z は同じものである. 今 Euclidean なので Hodge 作用素 $*$ は

$$*du^1 = du^2 \quad *du^2 = -du^1 \longrightarrow *dz = -idz \quad *d\bar{z} = id\bar{z}$$

また, 外微分作用素と (form つきの) デルタ関数を

$$d = du^1\frac{\partial}{\partial u^1} + du^2\frac{\partial}{\partial u^2} = dz\frac{\partial}{\partial z} + d\bar{z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}} (=: d_z)$$
$$\delta_z(w) := \delta(w-z)du^1_w \wedge du^2_w \qquad \int \delta_z(w) = 1$$

とする. これらの定義により例えば $d*d = du^1 \wedge du^2\partial^2$ となる.

$\langle \gamma^k(w)\beta_j(z)\rangle$ については求める Green 関数 $(d*d)^{-1}$ は

$$d_w * d_w \langle \gamma^k(w)\beta_j(z)\rangle = i\hbar\delta^k_j\delta_z(w)$$

の解である. $\beta_j(z)$, $\gamma^i(w)$ の境界条件は z, w について共に Dirichlet だったので, これは (3.2.7) で $a = a' = 0$ の時にほかならない. よって Dirichlet 境界条件の

$$\psi(z,w) = \ln\left|\frac{z-w}{z-\bar{w}}\right|.$$

を定義してこれで表すことができる.

$\langle \xi^k(w)\eta_j(z)\rangle$, $\langle \lambda^k(w)\eta_j(z)\rangle$ について Green 関数 $(d \oplus *d)^{-1}$ は共に z について Neumann, w について Dirichlet である.

今, Kontsevich の変形量子化公式のときに使った角度関数 (5.2.16), (5.2.16)

$$\phi^h(z,w) = \frac{1}{2i}\ln\frac{(z-w)(z-\bar{w})}{(\bar{z}-\bar{w})(\bar{z}-w)} \tag{6.2.10}$$

(これは z, w について Neumann) を定義すると, $d_w * d_w\psi(z,w) = d_w * d_w\phi(z,w) = 2\pi\delta_z(w)$ などを使って 3 つの propagator は

$$\langle \gamma^k(w)\beta_j(z)\rangle = \frac{i\hbar}{2\pi}\delta^k_j\psi(z,w), \qquad \langle \xi^k(w)\eta_j(z)\rangle = \frac{i\hbar}{2\pi}\delta^k_j d_z\phi^h(z,w),$$

$$\langle \lambda^k(w)\eta_j(z)\rangle = \frac{i\hbar}{2\pi}\delta^k_j * d_z\psi(z,w).$$

となる. さらに $*d_w\psi(z,w) = d_w\phi^h(z,w)$ であることから $\langle *d\gamma^k(w)\beta_j(z)\rangle = \delta^k_j\frac{i\hbar}{2\pi}d_w\phi^h(z,w)$ であり, これより λ^k の入ってない残りの 2 つの propagator をまとめて *superpropagator* を作ることができる.

$$\langle \xi^k(w)\eta_j(z)\rangle + \langle *d\gamma^k(w)\beta_j(z)\rangle = \frac{i\hbar}{2\pi}\delta^k_j d\phi^h(z,w)\ . \tag{6.2.11}$$

ここで $d = d_z + d_w$. λ^k は物理的な状態に現れないので (外線にはないし, 残りの相互作用項にも含まれていない), 使わないのでほっておく. つまり λ は Green 関数 K^-1 を作る時の自由度

を合わせるためだけに使われた. 名前の通り (6.2.11) を superfield $\tilde{\xi}^i = \tilde{X}^i - x^i$, $\tilde{\eta}^i$ を使って表すことができる. submanifold を $X^+ = \beta^+(= \lambda^+) = 0$, $\eta^+ = *d\gamma$, $(\gamma^+ = *d\eta)$ ととったので, 今 $\tilde{\eta}_j(z,\theta_z) = \beta_j(z) + \theta_z^\mu \eta_{j,\mu}(z)$, $\tilde{\xi}^k(w,\theta_w) = \xi^k(w) + \theta_w^\mu * d\gamma_\mu^k(w)$ であり, superpropagator は次のようにまとまる.

$$\langle \tilde{\xi}^k(w,\theta_w)\tilde{\eta}_j(z,\theta)\rangle = \frac{i\hbar}{2\pi}\delta_j^k D\phi^h(z,w) \tag{6.2.12}$$

ここで, $D = \theta^\mu \frac{\partial}{\partial u_z^\mu} + \theta_w^\mu \frac{\partial}{\partial u_w^\mu}$ である. 左辺は (6.2.11) の左辺の 2 項以外に $\langle \xi^k(w)\beta_j(z)\rangle$, $\theta_w^\mu\theta^\nu * d\gamma_\mu^k(w)\eta_{j,\nu}(w)\rangle$ を含むはずだが, 作用の運動項 (6.2.8) にそのような組合せの propagator がないので消える.

相互作用項についての Feynman rule は簡単である. 相互作用項は

$$S_{\rm gf}^1 = \int_D \int d\theta^2 \frac{1}{2}\alpha^{ij}(\tilde{X})\tilde{\eta}^i\tilde{\eta}^j$$

で, 上と同様 antifield を submanifold に制限したものであり, これを $\tilde{X} = x$ の周りで Taylor 展開して

$$S_{\rm gf}^1 = \frac{1}{2}\int_D \int d^2\theta \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\partial_{j_1}\cdots\partial_{j_k}\alpha^{ij}(x)\tilde{\xi}^{j_1}\cdots\tilde{\xi}^{j_k}\tilde{\eta}_i\tilde{\eta}_j. \tag{6.2.13}$$

となる.

Feynman rule が揃ったので, これで摂動展開できる. $S_{\rm gf} = S_{\rm gf}^0 + S_{\rm gf}^1$ で, 観測量を $\mathcal{O}$ としてその期待値は

$$\int e^{\frac{i}{\hbar}S_{\rm gf}}\mathcal{O} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{\hbar^n n!}\int e^{\frac{i}{\hbar}S_{\rm gf}^0}(S_{\rm gf}^1)^n\mathcal{O}$$

を適当に normalize したものである. ここで, 積分は $\int := \int \mathcal{D}X\mathcal{D}\eta\mathcal{D}\beta\mathcal{D}\gamma\mathcal{D}\lambda$ とすべての field についてとっているものを省略して表す. 今観測量として, 正しい ghost 数の

$$\mathcal{O} = f(\tilde{X}(1))g(\tilde{X}(0))\delta_x(X(\infty)) \tag{6.2.14}$$

を考えたい. ここで, $f, g \in C^\infty(M)$. $f(\tilde{X}(1))$, $g(\tilde{X}(0))$ も $\tilde{X} = x$ の周りで Taylor 展開して, $\tilde{\xi}$, $\tilde{\eta}$ の巾展開で表され, vertex の数 $(= S_{\rm gf}^1$ の数 $)$ に応じて propagator で Wick の定理を使って全通りのグラフを計算すれば良い. そしてその結果一つ一つのグラフは Kontsevich の公式の $\Gamma \in G_n$ に対応し, グラフの値は $w_\Gamma B_{\Gamma,\alpha}$ となる.

それを確認する前に, normalization と $\delta_x(X(\infty))$ の定義を説明する. normalization は これが $\alpha = 0$ で, または $n = 0$ でただの関数としての積 $f(x)g(x)$ を与えるように決めなければならない. よって

$$\int \exp(\frac{i}{\hbar}S_{\rm gf}^0)\delta_x(X(\infty)) = 1\ .$$

$\delta_x(X(\infty))$ の定義は,

$$\delta_x(X(t)) = \prod_{i=1}^{d}\delta(X^i(t) - x^i)\gamma^i(t)$$

とする. これによって, X の zero mode を固定し, また (表 6.1) より γ も zero mode が残っていた (境界で定数) ので入れておかないといけない. しかしこれらのことは以下摂動展開する時には特に関係ない.

[ゲージ固定した作用の摂動展開]

これらの Feynman rule を使った摂動展開は superpropagator を使った Wick の定理によりきれいに計算できる. そのコツは,

- vertex の数 n を決めると $\tilde{\eta}$ の数が $2n$ に決まる. $\tilde{\eta}$ と $\tilde{\xi}$ の数は等しくないと積分は 0 になるので $\tilde{\eta}$ の数 (= 微分の数) が $2n$ と決まる.
- $\tilde{\eta}$ は反可換なので, 順番を変えず, $\tilde{\eta}$ のところに $\tilde{\xi}$ を持ってきて pair をとる.

$$\begin{aligned}&\int e^{\frac{i}{\hbar}S^0_{\mathrm{gf}}}\tilde{\xi}^{k_1}(w_1,\zeta_1)\cdots\tilde{\xi}^{k_{2n}}(w_{2n},\zeta_N)\tilde{\eta}_{j_1}(z_1,\theta_1)\cdots\tilde{\eta}_{j_{2n}}(z_{2n},\theta_{2n})\delta_x(X(\infty))\\ &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{2n}}\langle\tilde{\xi}^{k_{\sigma(1)}}(w_{\sigma(1)},\zeta_{\sigma(1)})\tilde{\eta}_{j_1}(z_1,\theta_1)\rangle\cdots\langle\tilde{\xi}^{k_{\sigma(2n)}}(w_{\sigma(2n)},\zeta_{\sigma(2n)})\tilde{\eta}_{j_{2n}}(z_{2n},\theta_{2n})\rangle\ .\end{aligned}$$

こうして, vertex が n 個の時についてそれぞれ計算する. $(\frac{i}{\hbar}S^1_{\mathrm{gf}})^n$ より $2n$ 個の $\tilde{\eta}$ を順番に並べ, $f,g,\alpha_j^{j_1j_2}$, $j=1,\cdots,n$ から合わせて $2n$ 個の $\tilde{\xi}$ を出す組合せを全通り考えそれぞれ $\int e^{\frac{i}{\hbar}S^0_{\mathrm{gf}}}\delta_x(X(\infty))$ で平均をとる.

すると f,g 又は $\alpha_j^{j_1j_2}$ についてそれらを $x+\tilde{\xi}$ の周りで Taylor 展開して $\tilde{\xi}$ を m 個出したものは $\frac{1}{m!}\tilde{\xi}^{i_1}\cdots\tilde{\xi}^{i_m}\partial_{i_1}\cdots\partial_{i_m}\cdot*$ となり, $\frac{1}{m!}$ はある Feynman グラフと $\tilde{\xi}^i$ を入れ換えただけの $m!$ 通りの (Kontsevich の公式の意味で) 等価なグラフの存在により打ち消し合い, 微分 $\partial_{i_1}\cdots\partial_{i_m}$ のみが残る. つまり $x^i+\tilde{\xi}^i$ の関数と $\tilde{\eta}_i$ の contract は微分 $\overset{\frown}{\partial}{}^{v_a(i)}_{i_a}$ である. (これが分かればいちいち $\tilde{\xi}$ の巾で展開しなくても計算できる.)

これで出てくるグラフがだいたい Kontsevich の公式に一致していることが分かる. 正確には微分 $\overset{\frown}{\partial}{}^{v_a(i)}_{i_a}$ の自分自身に作用する (同じ S^1_{gf} の $\tilde{\eta}$ が α に作用している) 部分を含むグラフを除けば完全に一致する. そのようなグラフは Kontsevich の公式では定義で禁止されていたが, この経路積分の摂動計算では禁止されていない. そしてそのグラフは発散している. よって本当はそのようなグラフを繰り込まなければならないのだが, これは tadepole の発散なので (point splitting によりそれに対応する counter term を作用に加えて) 簡単に繰り込むことができる [29]. ここではその繰り込みもしたとする.

こうして積分の外に合計 $2n$ 回微分された $f(x),g(x),\alpha_j^{j_1j_2}(x)$ がそれぞれ (5.3.1) の $B_{\Gamma,\alpha}(f,g)$ を与えることが分かった.

残った積分は (5.3.1) の w_Γ を与える. それをこれから説明する. 係数の $B_{\Gamma,\alpha(f,g)}$ により, グラフが $\Gamma=\{v_1(1)v_2(1)\cdots,v_1(n)v_2(n)\}$ であるとして, 残った積分は

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n!}\left(\frac{i}{\hbar}\right)^n\frac{1}{2^n}\int e^{\frac{i}{\hbar}S^0_{\mathrm{gf}}}\delta_x(X(\infty))\int d^2u_1d^2\theta_{u_1}\cdots d^2u_nd^2\theta_{u_n}\\ &\cdot\prod_{j=1}^n\langle\tilde{\xi}^{k_{v_1(j)}}(w_{v_1(j)},\theta_{v_1(j)})\tilde{\eta}_{j_1}(z_j,\theta_j)\rangle\langle\tilde{\xi}^{k_{v_2(j)}}(w_{v_2(j)},\theta_{v_2(j)})\tilde{\eta}_{j_2}(z_j,\theta_j)\rangle\end{aligned}$$

である. (6.2.12) より $\langle \tilde{\xi}^{k_{v_a(j)}}(w_{v_a(j)}, \theta_{v_a(j)}) \tilde{\eta}_{j_a}(z_j, \theta_j) \rangle = \frac{i\hbar}{2\pi} \delta_{j_a}^{k_{v_a(j)}} D\phi^h(z_j, w_{v_a(j)})$ であり, (6.2.4) の対応より, D の中の $\theta^\mu \frac{\partial}{\partial u^\mu}$ を $d = du^\mu \frac{\partial}{\partial u^\mu}$ に, また $\int d^2u d^2\theta$ を $\int_D$ に書き直す. (実際に $D\phi^h$ の積をばらしてそれぞれについて適当な符号を出しながら $\theta_1^{\mu_1} \frac{\partial}{\partial u^{\mu_1}} \theta_1^{\nu_1} \frac{\partial}{\partial u^{\nu_1}} \cdots \theta_n^{\mu_n} \frac{\partial}{\partial u^{\mu_n}} \theta_n^{\nu_n} \frac{\partial}{\partial u^{\nu_n}}$ と並びかえそれを $\int d^2u_1 d^2\theta_1 \cdots d^2u_n d^2\theta_n$ で積分し, $du_1^{\mu_1} \wedge du_1^{\nu_1} \wedge \cdots \wedge du_n^{\mu_n} \wedge du_n^{\nu_n}$ となったものをもとの順番に戻すと符号も打ち消し合って元に戻り, 上の置換えをしたことになっていることが分かる.) よって上の式は

$$\frac{1}{n!} \left(\frac{i}{\hbar}\right)^n \frac{1}{2^n} \left(\frac{i\hbar}{2\pi}\right)^{2n} \int \wedge_{j=1}^n d\phi^h(u_j, u_{v_1(j)}) \wedge d\phi^h(u_j, u_{v_2(j)}) = (-1)^n \left(\frac{i\hbar}{2}\right)^n w_\Gamma$$

となる. Kontsevich の $\hbar'$ はここでの $\left(\frac{i\hbar}{2}\right)^n$ であり, $(-1)^n$ は作用の α の符号を変えるか f と g の位置 L, R を入れ換えることで吸収できるので, これで (6.0.2) の経路積分での摂動展開が (5.3.1) を導くことが証明できた.

Acknowledgments

この修士 2 年間, 駒場, 本郷の先生方や仲間にはゼミなどで大変お世話になりました. また, この論文を書くにあたって特に阪大の大川さん, 名大の粟田先生, 土屋先生, 本郷の川野さん, 寺嶋さん, 東大数理の寺嶋さんにお世話になりました. そして, 指導教官の加藤晃史先生には質問しにいった時の丁寧な解説だけでなく, さまざまな機会を与えて下さったことに心から感謝しています.

関連図書

[1] A. Connes, M. R. Douglas and A. Schwarz "Noncommutative Geometry and Matrix Theory: Compactification on Tori. " J.High Energy Phys.9802(1998)003, hep-th/9711162

[2] T. Banks, W. Fischler, S. H. Shenker and L. Susskind "M Theory As A Matrix Model: A Conjecture." Phys.Rev. **D55**(1997) 5112, hep-th/9610043

[3] W. Taylor, "D-brane field theory on compact spaces." Phys.Lett.**B394**(1997)283, hep-th/9611042

[4] W. Taylor, "Lectures on D-branes, Gauge Theory and M(atrices)." hep-th/9801182

[5] Kawano, T. and Okuyama, K., "Matrix Theory on Noncommutative Torus." hep-th/9803044

[6] N. Ishibashi, H. Kawai, Y. Kitazawa and A. Tsuchiya "A Large-N Reduced Model as Superstring." Nucl.Phys. **B498**(1997) 467, hep-th/9612115

[7] A. Connes, "Noncommutative Geometry." Academic Press (1994)

[8] B. Morariu and B. Zumino, "Super Yang-Mills on the Noncommutative Torus", hep-th/9807198

[9] D. Brace, B. Morariu and B. Zumino, "Dualities of the Matrix Model from T-Duality of the Type II String", hep-th/9810099; "T-Duality and Ramond-Ramond Backgrounds in the Matrix Model", hep-th/9811213

[10] P.-M. Ho, "Twisted Bundle On Quantum Torus and BPS States in Matrix Theory", Phys. Lett. **B434** (1998) 41, hep-th/9803166

[11] V.Schomerus, "D-Branes And Deformation Quantization." JHEP **9906:030**(1999), hep-th/9903205

[12] N. Seiberg, E. Witten, "String Theory and Noncommutative Geometry." hep-th/9908142

[13] C. G. Callan, C. Lovelace, C. R. Nappi, S. A. Yost, "String Loop Corrections To Beta Functions." Nucl. Phys.**B288** (1987) 525; A. Abouelsaood, C. G. Callan, C. R. Nappi and S. A. Yost, "Open Strings In Background Gauge Fields," Nucl. Phys. **B280** (1987) 599

[14] Y. Okawa, "Derivative corrections to Dirac-Born-Infeld Lagrangian and non-commutative gauge theory," hep-th/9909132

[15] M. R. Douglas, C. Hull, "D-Branes And The Noncommutative Torus." JHEP **9802:008**(1998), hep-th/9711165

[16] Y.-K. E. Cheung and M. Krogh, "Noncommutative Geometry from 0-branes in a Background B-field", Nucl. Phys. **B528** (1998) 185, hep-th/9803031

[17] Rieffel, A. Schwarz, "Morita Equivalence of Multidimensional Noncommutative Tori." math.QA/9803057

[18] Rieffel, M. A., "Projective modules over higher-dimensional non-commutative tori." Canadian J. Math. 40 (1988), 257–338

[19] A. Giveon, M. Porrati and E. Rabinovici, "Target Space Duality in String Theory" Phys.Rept. 244 (1994) 77-202, hep-th/9401139

[20] A. Sen, "D0 Branes on T^n and Matrix Theory", Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1998) 51, hep-th/9709220.

[21] N. Seiberg, "Why is the Matrix Model Correct?", Phys. Rev. Lett. **79** (1997) 3577, hep-th/9710009.

[22] A. Schwarz, "Morita Equivalence And Duality." Nucl.Phys. **B534**(1998) 720, hep-th/9805034

[23] A. Konechny, A. Schwarz, "1/4 BPS States on Noncommutative Tori," hep-th/9907008

[24] F. Bayen, M. Flato, C. Frønsdal, A. Lichnerowicz, D. Sternheimer, " Deformation theory and quantization. I. Deformations of symplectic structures." Ann. Physics**111**(1978), no. 1, 61 - 110

[25] M. Kontsevich "Deformation Quantization Of Poisson Manifolds. " math.QA/9709040

[26] M. Kontsevich, " Formality Conjecture." D. Sternheimer et al. (eds.)

[27] T. Lada and J. Stasheff, "Introduction to sh Lie algebras for physicists", Internat. J. Theoret. Phys. 32 (1993), no. 7, 1087–1103

[28] 深谷 賢治, "シンプレクティック幾何学", 岩波講座 現在数学の展開

[29] Alberto S. Cattaneo, Giovanni Felder "A Path Integral Approach To The Kontsevich Quantization Formula." math.QA/9902090

[30] N. Ikeda, "Two-dimensional gravity and nonlinear gauge theory", Ann. Phys. 235, (1994) 435–464

[31] M. Alexandrov, M. Kontsevich, A. Schwarz, O. Zaboronsky, "The Geometry of the Master Equation and Topological Quantum Field Theory. " Intern.Jour.of Mod.Phys.,**12** (1997), no. 7, 1405 - 1429, hep-th/9502010.

[32] I. Batalin and G. Vilkovisky, "Gauge algebra and quantization", Phys. Lett. 102 B (1981), 27; "Quantization of gauge theories with linearly dependent generators", Phys. Rev. D29 (1983), 2567

[33] M. Henneaux and C. Teitelboim, "Quantization Of Gauge Systems", Princeton University Press, 1992

[34] B. Zwiebach, "Closed String Field Theory: Quntum Action And The B-V Master Equation'," Nucl.Phys.B390:33-152,1993 hep-th/9206084

[35] Jim. Stasheff, "The (secret?) homological algebra of the Batalin-Vilkovisky approach", Proceedings of the Conference Secondary Calculus and Cohomological Physics, Moscow, August 24–31,1997; "Deformation Theory and the Batalin-Vilkovisky Master Equation", Proceedings of the Conference on Deformation Theory, etc. Ascona, Switzerland, June 1996,

[36] E. Witten, "Bound States of Strings and P-Brane." Nucl.Phys.**B460**(1996) 335, hep-th/9510135

[37] J. Polchinski, " Dirichlet-Branes and Ramond-Ramond Charges" Phys.Rev.Lett. 75 (1995) 4724-4727 hep-th/9510017

[38] M. R. Douglas, D. Kabat, P. Pouliot and S. H. Shenker, "D-branes and Short Distances in String Theory." Nucl. Phys. **B485** (1997) 85, hep-th/9608024.

[39] T.Yoneya, "Duality and Indeterminacy Principle in String Theory" in *Wandering in the Fields* (K. Kawarabayashi and A. Ukawa, eds., World Scientific,1987); for more recent discussion, see: M. Li and T. Yoneya Phys.Rev.Lett. 78 (1997) 1219, hep-th/9611072; A. Jevicki and T. Yoneya, Nucl.Phys.**B535**(1998) 335, hep-th/9805069.

[40] G. 't Hooft "A planar diagram theory for strong interactions." Nucl. Phys. **B72** (1974) 461

[41] H.Kajiura, A.Kato and S. Ogusi, "Comments on large N Matrix Model", Prog. Theor. Phys.Vol.103, No1, January 2000, Hep-th/9903233