研究会「可積分系研究の現状と展望」
講演アブストラクト (増補版) [1]
2001 年 2 月 4 日@京大会館

非可換ゲージ理論におけるソリトン解[2]

(Solitons in Non-Commutative Gauge Theories)

東京大学大学院 理学系研究科 物理学専攻 素粒子論研究室

浜中 真志[3]

概 要

「非可換ゲージ理論」(=NC ゲージ理論) におけるソリトンとは, 非可換空間上のゲージ理論におけるソリトンのことであり, 特にこの講演ではソリトンとして,「非可換ゲージ理論」の BPS 方程式の解 (具体的には, インスタントン, モノポール, 渦) を扱う. 私達は, その BPS 方程式を不変に保つ,「非可換ゲージ理論」特有の変換を見出し, 既知のソリトン解から新しいソリトン解を構成した. この講演では, まず,「非可換ゲージ理論」と既知のソリトン解の構成法 (主に ADHM/Nahm 構成法) について簡単にレヴューする. 次に, 私達の見出した変換を紹介し, 新しい解を構成した後, 可換な場合との比較を念頭に置いて, その解の性質を議論する.

1 Introduction

「非可換ゲージ理論」とはここでは, 非可換空間上の (=Non-Commutative) ゲージ理論のことを指し, 以下 NC ゲージ理論と書く.

非可換空間は座標関数同士の積の非可換性で特徴付けられる：

$$[x^i, x^j] = i\theta^{ij}. \tag{1.1}$$

ここで, θ^{ij} は反対称な実定数であり, 非可換パラメータと呼ばれる[4]. この関係式は, 量子力学の正準交換関係

$$[q, p] = i\hbar \tag{1.2}$$

に類似しており,「空間の不確定性関係」を導く. このことから非可換空間上では, 粒子の位置は完全に決めることができず, ある広がった分布を持つ. その結果, 可換な空間上では存在した場の特異点が, 非

[1] この記事は 2001 年 7 月 31 日に増補され, [http://www2.yukawa.kyoto-u.ac.jp/~hamanaka/] に置かれています. (なお増補前は 6 ページでした.)

[2] この講演は私の研究室の寺嶋靖治さんとの共同研究 [26] に基づく. また関連論文として [30] がある. なお, ここでいう「非可換ゲージ理論」とは, ゲージ群が非可換な (Non-abelian) ゲージ理論という意味ではなく, 非可換空間上の (Non-Commutative) ゲージ理論という意味である.

[3] e-mail address: hamanaka@hep-th.phys.s.u-tokyo.ac.jp; HP address: http://www2.yukawa.kyoto-u.ac.jp/~hamanaka

[4] 非可換パラメータ θ^{ij} は今のところ手で与えるしかない.

可換空間上では解消されるということが起こりうる．分布の広がりの幅は $\sqrt{|\theta^{ij}|}$ に比例し，可換な空間への極限 $\theta^{ij} \to 0$ で特異性が復活する．

NC ゲージ理論においても BPS 方程式を定義することができ，その解を非可換 (BPS) ソリトンと呼ぶ[5]．非可換ソリトンにおいても，特異点解消が一般に起こり，可換な場合には見られない面白い結果を生み出す．例えば，非可換インスタントンでは，(完備化された) インスタントン・モジュライ空間の特異点が一般に解消し [59], [60]，特異でない $U(1)$ インスタントン解を具体的に構成することができる [63], [11][6]．非可換 Dirac モノポールでは，可換な場合には非物理的な対象であった Dirac ストリングが，物理的な対象として解に現れてくる [18][7]．

一方，非可換幾何学と弦理論との間には密接な関係があることが知られていた．特に 1999 年の夏に Seiberg と Witten がこの関係を明確にして以来 [68]，NC ゲージ理論の研究が大きく進展した[8]．NC ゲージ理論を研究することで，弦理論のいくつかの側面を明らかにすることができるようになったのである．

私達はこれらの背景を動機として，非可換ソリトンの厳密解の研究を行った [26]．私達は，非可換 BPS 方程式を不変に保つ，NC ゲージ理論特有の変換を見出し，既知のソリトン解から新しいソリトン解を構成した．また，新しい解の性質について，場の理論および弦理論の立場から物理的解釈を与えた．この講演では場の理論の立場で議論を進める[9]．

2 NC(=Non-Commutative) Gauge Theories

NC ゲージ理論の記述には次の 3 つの方法があり[10]，Weyl 変換および Seiberg-Witten マップによって 1 対 1 に対応づけられる[11]：

$\boxed{\text{(i) スター積を用いる記述}}$　$\left(\xrightarrow{\theta^{ij}\to 0} \boxed{\text{普通の可換空間上の理論}} \right)$

↑

⟨ 非可換側 ⟩　　Weyl 変換

↓

$\boxed{\text{(ii) オペレーター形式の記述}}$

↑

Seiberg-Witten マップ

↓

⟨ 可換側 ⟩　$\boxed{\text{(iii) 背景一様 } B \text{ 場 (＝磁場) 中の DBI 作用による記述}}$

Seiberg と Witten が明らかにしたのは (i) と (iii) の等価性であるが[12]，ここでは触れない．この節では

[5] この講演では，NC ゲージ理論のソリトンについてお話しするが，NC スカラー理論のソリトンについても活発に研究がなされていて面白い結果が次々と出ている (レヴューとして例えば [28], [32], [56] がある)．非可換空間上では Derrick の定理 [9] ([17], [38] にも解説あり) が成り立たないため，様々なソリトンが存在し得るのである．GMS ソリトンと呼ばれるもの [15] はその代表である．

[6] [63] で構成された解は特異ゲージをとった場合の解に相当し，(ごく一部分だけ) 悪い振る舞いをする．そのことを指摘し，至るところ非特異な解を構成したのが [11] である．

[7] 正確には，非物理的な Dirac ストリングが消失し，物理的対象である「D ストリングの影」が解に現れる，というべきであるが，その説明には D ブレーン解釈が必要となるのでこの記事では触れないことにする．([24] の 8 ページ脚注参照)

[8] Seiberg-Witten 理論として有名な，$\mathcal{N}=2$ 超対称ゲージ理論の厳密解の話とは無関係．

[9] [23] では弦理論的考察がより詳しく議論されている．なお，この記事と [23] にタキオン凝縮の議論を盛り込んだ，総まとめ記事を [24] にまとめる予定である．

[10] 記述 (iii) は座標関数同士の非可換性 (1.1) がなく「可換側」と呼ばれる．

[11] この記事では「非可換 Euclid 空間」のみを扱う．なお「曲がった非可換空間」では (i) と (ii) の 1 対 1 対応は一般には成り立たない．「曲がった非可換空間」の解説を含む記事として例えば [74] がある．

[12] 磁場中の荷電粒子の運動で重心座標が非可換に見えるという話は良く知られているが (例えば [61] の 2.1 節)，その弦理論

まずスター積を用いる記述 (i) によって NC ゲージ理論を定義し, それから Weyl 変換という変換を用いてオペレーター形式の記述 (ii) に移る. オペレーター形式の記述で厳密解を求める.

簡単のため, この記事では NC $G = U(1)$ $(3+1)$ 次元[13] Yang-Mills-Higgs 理論を具体例として議論を進める. モノポール[14] は $(3+1)$ 次元時空上の Yang-Mills-Higgs 理論の BPS ソリトンとして現れ, 特に $G = U(1)$ の場合のものを Dirac モノポールという.

作用 I_{YMH} は次の通り：

$$I_{\mathrm{YMH}} = -\frac{1}{4g_{\mathrm{YM}}^2}\int d^4x \ \mathrm{Tr}\left(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + 2D_\mu\Phi D^\mu\Phi\right). \tag{2.1}$$

ここで, Φ はゲージ群 G の随伴表現に属する Higgs 場であり, $d^4x := dx^0dx^1dx^2dx^3$, $F_{\mu\nu} := \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]$, $D_\mu := \partial_\mu + A_\mu$ $(\mu,\nu = 0,1,2,3)$ である. 運動方程式[15], BPS 方程式[16] は次のようになる：

- 運動方程式

$$\begin{aligned}
&[D^\nu, [D_\nu, D_\mu]] + [\Phi, [\Phi, D_\mu]] = 0, \quad &&\left(\Leftrightarrow \quad \frac{\delta I_{\mathrm{YMH}}}{\delta A^\mu} = 0\right)\\
&[D^\mu, [D_\mu, \Phi]] = 0. &&\left(\Leftrightarrow \quad \frac{\delta I_{\mathrm{YMH}}}{\delta \Phi} = 0\right)
\end{aligned} \tag{2.2}$$

- BPS 方程式

$$B_i = \pm[D_i, \Phi]. \tag{2.3}$$

ここで, $B_i := -(i/2)\epsilon_{ijk}F^{jk}$ $(i,j,k = 1,2,3)$ は磁場である. 複号は上段が Self-Dual, 下段が Anti-Self-Dual の場合を表す (以後同様). BPS 方程式はエネルギー E の下限を満たすものとして次のように導かれた：

$$E = \frac{1}{2g_{\mathrm{YM}}^2}\int d^3x \ \mathrm{Tr}\left[\frac{1}{2}F_{ij}F^{ij} + D_i\Phi D^i\Phi\right] = \frac{1}{2g_{\mathrm{YM}}^2}\int d^3x \ \mathrm{Tr}\,[\underbrace{(B_i \mp D_i\Phi)}_{=0 \ \Leftrightarrow \ \mathrm{BPS}}{}^2 \pm \partial_i(\epsilon_{ijk}F^{jk}\Phi)]. \tag{2.4}$$

以後, 非可換座標は x^1, x^2 であるものとする[17]. すなわち

$$[x^1, x^2] = i\theta, \quad (\theta > 0), \quad \text{それ以外の座標同士：} \quad [x^\mu, x^\nu] = 0. \tag{2.5}$$

$\boxed{\text{(i) スター積を用いる記述}}$

スター積は普通の可換な関数 (場) に対して定義される積の一つである[18]：

$$\begin{aligned}
f * g(x) \quad &:= \quad \exp\left(\frac{i}{2}\theta^{ij}\partial_i^{(x')}\partial_j^{(x'')}\right)f(x')g(x'')\Big|_{x'=x''=x}\\
&= \quad f(x)g(x) + \frac{i}{2}\theta^{ij}\partial_i f(x)\partial_j g(x) + \mathcal{O}(\theta^2)
\end{aligned} \tag{2.6}$$

版と解釈することもできる (cf. [28] の 3.1 節).

[13] $(3+1)$ 次元とは空間 3 次元 (座標：x^1, x^2, x^3), 時間 1 次元 (座標：x^0) という意味である.

[14] この記事で扱うモノポールは全て BPS モノポールなので, "BPS" は一切省略している.

[15] 作用の停留点を与える場の配位の満たす方程式, すなわち $\delta I/\delta\mathcal{O} = 0$ ($\mathcal{O}$ はラグランジアンに含まれる場) のことであり, 古典的運動を記述する. 運動方程式の解には不安定な (non-BPS な) 解も含まれる.

[16] エネルギーの極小を与える静的な場の配位の満たす方程式のことであり, 静止した安定な系を記述する. BPS 方程式の解は常に運動方程式の解になる. なお, BPS は Bogomol'nyi, Prasad, Sommerfield の 3 人の頭文字をとったもの.

[17] 時間座標を非可換にすると因果律やユニタリティが破れるという議論があり, 普通は空間座標のみを非可換にする. (時間座標を非可換にする NCOS 理論, OM 理論と呼ばれるものも存在し, 解説として [47], [73] がある.) また非可換パラメータの表す行列は反対称であり, そのランクは偶数であるから, このように非可換性を導入するしかない.

[18] 正確にはスター積はもっと一般的に定義されるものであるが, ここでは「非可換 Euclid 空間」のみを扱うので, このような具体的表式 (Moyal 積と呼ばれる) で表した.

スター積は次の重要な性質を持つ：

- 結合則が成り立つ：$f*(g*h)=(f*g)*h$
- 座標関数同士の非可換性 (1.1) を再現：$[x^i,x^j]_* := x^i*x^j - x^j*x^i = i\theta^{ij}$
- $\theta^{ij}\to 0$ で普通の積に戻る.

NC ゲージ理論は, 普通の可換空間上のゲージ理論に現れる場同士の積を全てスター積に置き換えることで得られる. したがって, NC $G=U(1)$ Yang-Mills-Higgs 理論の作用, 運動方程式, および BPS 方程式はそれぞれ, 式 (2.1), (2.2), (2.3) において場同士の積が全てスター積に置き換わったものに等しい. 作用に無限個の微分が入っているが[19], 場は普通の可換な関数なので, 運動方程式, BPS 方程式を導出するには, 可換な場合と同じ手順を踏めばよいのである. なおゲージ群は普通 $U(N)$ で考える[20].

$\boxed{\text{(ii) オペレーター形式の記述}}$

今度は, 座標の非可換性 (1.1) から出発して NC ゲージ理論を定義する. 新しい変数を $\hat{a}:=(1/\sqrt{2\theta})\hat{z}$, $\hat{a}^\dagger := (1/\sqrt{2\theta})\hat{\bar{z}}$ (ただし $\hat{z}:=\hat{x}^1+i\hat{x}^2$) として定義すると, $[\hat{x}^1,\hat{x}^2]=i\theta$ より,

$$[\hat{a},\hat{a}^\dagger]=1 \tag{2.7}$$

が分かる. これより, $\hat{a}^\dagger,\hat{a}$ はそれぞれ調和振動子の生成, 消滅演算子と解釈できる. これらが作用する Fock 空間を $\mathcal{H}$ と書くと, $\mathcal{H}=\oplus_{n=0}^{\infty}\mathbf{C}|n\rangle$ である. ここで, $|n\rangle := \left\{(\hat{a}^\dagger)^n/\sqrt{n!}\right\}|0\rangle$, $(n=0,1,\ldots)$ は占有数表示の基底であり, $\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle = n|n\rangle, \hat{a}|0\rangle=0$ を満たす.

場 $\hat{f}$ は $\hat{x}$ の関数であるから, Fock 空間 $\mathcal{H}$ に作用する演算子となり, 占有数表示で以下のように表される：

$$\hat{f}(\hat{x}^1,\hat{x}^2,x^3)=\sum_{m,n=0}^{\infty} f_{mn}(x^3)|m\rangle\langle n|. \tag{2.8}$$

特に場が x^3 軸対称な場合 (すなわち $(\hat{x}^1)^2+(\hat{x}^2)^2\sim\hat{a}^\dagger\hat{a}$ と可換な場合),

$$\hat{f}(n,x^3)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x^3)|n\rangle\langle n|. \tag{2.9}$$

のように対角行列となることが分かる[21].

<u>(i) と (ii) の等価性[22]</u>

(i) と (ii) は (「非可換 Euclid 空間」では) 等価な記述であり, Weyl 変換という変換によって対応づけられる. (i) の記述における場 $f(x^1,x^2)$ は, 次式で定義される Weyl 変換によって, (ii) の記述における場 $\hat{f}(\hat{x}^1,\hat{x}^2)$ にうつされる (簡単のため x^3 依存性は考えない)：

$$\hat{f}(\hat{x}^1,\hat{x}^2) \;\; := \;\; \frac{1}{(2\pi)^2}\int dk_1dk_2\;\widetilde{f}(k_1,k_2)e^{-i(k_1\hat{x}^1+k_2\hat{x}^2)}. \tag{2.10}$$

[19] このため非可換空間上の場の理論は, 一般に非局所性を持ち, またパリティを破るが (非可換パラメータ θ^{ij} の存在があらわにローレンツ対称性を破っていることからも分かる), 一様磁場中の物理系と等価であり, 意味のない理論というわけではない. むしろ一様磁場中の物理の解明に役立つものと期待している. 実際, 非可換の手法を用いた量子ホール効果へのアプローチは昔から盛んであり (例えば [5], [42]), 特に Susskind の論文 [69] 以後, NC Chern-Simons 理論の分数量子ホール効果への応用が盛んである (例えば [6], [39], [40], [67]). なおこのような場の理論的側面の総合報告として [10] がある.

[20] 積がスター積なので $g_1,g_2\in G$ であったとしても, $g_1*g_2\in G$ とは限らない. 例えば $G=SU(N)$ だと行列式が 1 という条件からはみ出してしまう.

[21] $|m\rangle\langle n|$ を Weyl 変換で記述 (ii) にうつして考えても理解できる (次ページ表参照).

[22] 詳しくは [28] などを参照.

ただし，

$$\widetilde{f}(k_1,k_2) \quad := \quad \int dx^1dx^2\ f(x^1,x^2)e^{i(k_1x^1+k_2x^2)}. \tag{2.11}$$

場 $f(x^1,x^2)$ を一度 Fourier 変換したものを, そのまま逆 Fourier 変換する際, exp の肩の座標 x^1,x^2 をオペレーター $\hat{x}^1,\hat{x}^2$ に置き換えて変換したようなものである：

$$\begin{array}{ccc} & & f(x^1,x^2) \\ & \swarrow & | \\ \widetilde{f}(k_1,k_2) & & \text{Weyl 変換} \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \hat{f}(\hat{x}^1,\hat{x}^2). \end{array}$$

Weyl 変換はスター積を行列の積にうつす：

$$\widehat{f*g} = \hat{f}\cdot\hat{g}. \tag{2.12}$$

Weyl 変換の逆変換は直接には

$$f(x^1,x^2) = \int dk_2\ e^{-ik_2x^2}\left\langle x^1+\frac{k_2}{2}\middle|\hat{f}(\hat{x}^1,\hat{x}^2)\middle|x^1-\frac{k_2}{2}\right\rangle \tag{2.13}$$

と書ける. Weyl 変換により, 場や掛け算だけでなく, 微分, 積分も 1 対 1 に対応し, (i) と (ii) の記述は等価になる. 対応関係は以下の通り：

	(i) スター積を用いる記述	(ii) オペレーター形式の記述
場	普通の関数 $f(x^1,x^2)$	無限次元正方行列 $\hat{f}(\hat{x}^1,\hat{x}^2) = \sum_{m,n=0}^{\infty} f_{mn}\lvert m\rangle\langle n\rvert$
積 $(\widehat{f*g}=\hat{f}\hat{g})$	スター積 結合則：$f*(g*h)=(f*g)*h$	行列の積 結合則：$\hat{f}(\hat{g}\hat{h})=(\hat{f}\hat{g})\hat{h}$ (自明)
非可換性	$[x^i,x^j]_* := x^i*x^j - x^j*x^i = i\theta^{ij}$	$[\hat{x}^i,\hat{x}^j]=i\theta^{ij}$
微分	$\partial_i f$ 特に $\partial_i x^j = \delta_i^{\ j}$	$\partial_i\hat{f} := [\underbrace{-i(\theta^{-1})_{ij}\hat{x}^j}_{=:\,\hat{\partial}_i},\hat{f}]$ 特に $\partial_i\hat{x}^j = -i(\theta^{-1})_{ik}[\hat{x}^k,\hat{x}^j]=\delta_i^{\ j}$
積分	$\int dx^1dx^2\ f(x^1,x^2)$	$2\pi\theta\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}\hat{f}(\hat{x}^1,\hat{x}^2)$
曲率	$F_{ij}=\partial_iA_j-\partial_jA_i+[A_i,A_j]_*$	$\hat{F}_{ij}=\partial_i\hat{A}_j-\partial_j\hat{A}_i+[\hat{A}_i,\hat{A}_j]$ $=[\hat{D}_i,\hat{D}_j]-i(\theta^{-1})_{ij}$ (ただし $\hat{D}_i:=\hat{\partial}_i+\hat{A}_i$)
(ii) の行列要素 | $\left(\begin{array}{c}x^1\text{-}x^2\text{平面}\\ \text{で回転対称}\end{array}\right)$ ↓	$\sqrt{\frac{n!}{m!}}\left(2r^2/\theta\right)^{\frac{m-n}{2}}e^{i(m-n)\varphi}\times$ $2(-1)^nL_n^{m-n}(2r^2/\theta)e^{-\frac{r^2}{\theta}}$ | $\left(\begin{array}{c}\varphi\text{ に依らない}\\ \Leftrightarrow m=n\end{array}\right)$ ↓	$\lvert n\rangle\langle m\rvert$ | $\left(\begin{array}{c}(\hat{x}^1)^2+(\hat{x}^2)^2\sim\hat{a}^\dagger\hat{a}\text{ と可換}\\ \Leftrightarrow m=n\end{array}\right)$ ↓
ある射影	$2(-1)^nL_n(2r^2/\theta)e^{-\frac{r^2}{\theta}}$	$\lvert n\rangle\langle n\rvert$

ここで, (r,φ) は極座標, $L_n^\alpha(x)$ は次式で定義される Laguerre 多項式である：

$$L_n^\alpha(x) := \frac{x^{-\alpha}e^x}{n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n (e^{-x}x^{n+\alpha}). \tag{2.14}$$

(特に $L_n(x) := L_n^0(x)$.) 注意すべきことは, オペレーター形式の曲率の式で, $[\hat{D}_i,\hat{D}_j]$ とくくったため, $[\hat{\partial}_i,\hat{\partial}_j](= i(\theta^{-1})_{ij})$ を相殺するための定数項 $-i(\theta^{-1})_{ij}$ が現れたことである.

これによりオペレーター形式の記述での BPS 方程式 (2.3) は

$$\begin{aligned}(\hat{B}_3 =)\quad 2[\hat{D}_z,\hat{D}_z^\dagger]+\frac{1}{\theta} &= \pm[\hat{D}_3,\hat{\Phi}],\\ (\hat{B}_z =)\qquad [\hat{D}_3,\hat{D}_z] &= \pm[\hat{D}_z,\hat{\Phi}]\end{aligned} \tag{2.15}$$

と表される. ただし, $\hat{D}_z := (1/2)(\hat{D}_1 - i\hat{D}_2)$, $\hat{B}_z := (1/2)(\hat{B}_1 - i\hat{B}_2)$ のように 1,2 成分を複素に組んだ. $\hat{B}_3$ に定数項が含まれているのは, 上述の通りである.

以後, 解の構成の議論は全てオペレーター形式の記述で行い, 解の性質を調べる際には, スター積を用いる記述に戻ることにする. この節では Fock 空間に作用する演算子にはハットを付けたが, 以後省略する.

3 ADHM/Nahm Construction of Exact BPS Solitons

ADHM/Nahm 構成法とは, 任意のインスタントン解/モノポール解の構成法の一つであり, Nahm 変換と呼ばれる双対変換のある種の極限として解釈できる. 非可換インスタントン, モノポール解もこの方法で構成することができ, 既知の厳密解は主にこの方法で求められた (付録 A 参照). ここでは可換空間上の ADHM/Nahm 構成法の背景を簡単に紹介する.

背景となる Nahm 変換の話から始める. Nahm 変換とは, 4 次元トーラス T^4 上の $G = U(N)$, k インスタントン解と, その双対 (4 次元) トーラス $\widetilde{T}^4$ 上の $G = U(k)$, N インスタントン解とを 1 対 1 に対応させる変換のことである. 双対トーラスはトーラスの半径を全て逆数にしたトーラスである. ゲージ群のランクとインスタントン数が入れ替わるのが興味深く, k 個の D0 ブレーンと N 枚の D4 ブレーンの束縛状態の T 双対変換として解釈できる.

双対トーラス $\widetilde{T}^4$ 上のインスタントン解 $\widetilde{A}_\mu$ からトーラス T^4 上のインスタントン解 A_μ を構成する手順は以下の通り. ($T^4, \widetilde{T}^4$ の座標をそれぞれ x^μ, ξ_μ と表す.)：

- 手順 1：双対トーラス上の自己双対方程式

  $$\widetilde{F}_{12} = \pm\widetilde{F}_{34},\ \widetilde{F}_{13} = \pm\widetilde{F}_{42},\ \widetilde{F}_{14} = \pm\widetilde{F}_{23}, \tag{3.1}$$

  $$\text{ただし}\quad \widetilde{F}_{\mu\nu} := \tilde{\partial}_\mu\widetilde{A}_\nu - \tilde{\partial}_\nu\widetilde{A}_\mu + [\widetilde{A}_\mu,\widetilde{A}_\nu], \tag{3.2}$$

  を解く. 解 $\widetilde{A}_\mu$ は双対トーラス上のインスタントンであり, $k\times k$ 行列である.

- 手順 2：双対トーラス上のインスタントン $\widetilde{A}_\mu$ を背景とする (双対) 零質量 Dirac 方程式[23]

  $$e_\mu^\dagger \otimes \left(\frac{\partial}{\partial\xi_\mu} + x^\mu - \widetilde{A}^\mu\right)\widetilde{\psi} = 0 \tag{3.3}$$

  を解く. (ただし e_μ は四元数代数の生成子 $(i,j,k,1)$ の 2 次元表現行列であり, 例えば $e_\mu = (-i\sigma_i, 1)$ と具体的に表される.) 指数定理より, (双対) 零質量 Dirac 方程式の規格化可能解が独立に N 個存在することが言える. これを列に N 個並べた行列を $\widetilde{\psi}$ と書いている.

[23] より正確には Weyl 方程式.

- 手順3：v からトーラス上のゲージ場を

$$A_\mu = \int_{\widetilde{T}^4} d^4\xi \ \widetilde{\psi}^\dagger \partial_\mu \widetilde{\psi} \tag{3.4}$$

として構成すると, これがトーラス上のインスタントンとなっていることが分かる. (スピナーの足についても縮約を取っている.) 実際にこれが自己双対方程式

$$F_{12} = \pm F_{34},\ F_{13} = \pm F_{42},\ F_{14} = \pm F_{23},$$

を満たすことはすぐに言える. $\widetilde{\psi}$ が N 列の行列であったことから, ゲージ場のサイズが $N \times N$ となった.

トーラス上のインスタントン解から双対トーラス上のインスタントン解を構成する手順は全く同様であり, トーラス T^4 上の $G = U(N)$, k インスタントン解と, その双対トーラス $\widetilde{T}^4$ 上の $G = U(k)$, N インスタントン解との 1 対 1 対応を厳密に証明することができる. Dirac 方程式のゼロモードを経由して解くあたりにとても深いものを感じる.

次にこの系の特殊な場合を考え, ADHM/Nahm 構成法を導く[24] ：

- トーラスの半径を 4 つとも全て無限大にする ⇒ ADHM 構成法

  このとき双対トーラスの半径は 4 つとも全てゼロになる. したがって双対トーラスは 1 点につぶれてしまい, 無限に近い 2 点上の差を読み取る操作である微分は意味を持たなくなる. その結果, 双対トーラス上の自己双対方程式および (双対) 零質量 Dirac 方程式の中の微分は全て落ち, それらは行列の方程式になる. これにより, 行列の方程式を解くことで $\mathbf{R}^4$(＝半径無限大のトーラス) 上のインスタントンが得られる. これが ADHM 構成法である.

- トーラスの半径を 3 つだけ無限大, 残り 1 つをゼロにする ⇒ Nahm 構成法

  このとき双対トーラスの半径は, 3 つはゼロ, 1 つは無限大になる. したがって双対トーラスは直線になり, 双対トーラス上の自己双対方程式および (双対) 零質量 Dirac 方程式の中の 3 つの方向の微分は落ち, 1 つの方向の微分だけが残る. その結果, 常微分方程式を解くことで $\mathbf{R}^3$ 上のインスタントン (＝ BPS モノポール) が得られる. これが Nahm 構成法である.

もともとの状況は全く双対的であったが, 半径というパラメータのある特別な極限で双対性が非自明となり, 片側の記述が易しくなったのである. その結果, 偏微分方程式を解くという難しい問題が行列方程式を解くといった易しい問題に置き換わったというわけである. $k = 1$ の場合は, 手順 1 の双対トーラス上の自己双対方程式の解としては基本的に自明解を持ってくればよい. 本質的に計算が必要なのは, 手順 2, 3 である. しかし可換な場合はこれも易しい計算で済むことが多い.

まず ADHM/Nahm 方程式の観察から, モジュライ空間について少しコメントする. 簡単のため Anti-Self-Dual インスタントン/モノポールを生み出す場合を考える.

可換空間上の ADHM 方程式は正確には次のようになる：

$$\begin{aligned} (\mu_R :=) \qquad & [B_1, B_1^\dagger] + [B_2, B_2^\dagger] + II^\dagger - J^\dagger J \ (\equiv -[z_1, \bar{z}_1] - [z_2, \bar{z}_2]) = 0, \\ (\mu_C :=) \qquad & [B_1, B_2] + IJ = 0. \end{aligned} \tag{3.5}$$

[24] 少しずれる部分もあるが, それはここでの議論が非常にナイーブなものだからである .

ここで, B_1, B_2 は $k\times k$ 行列, $I, J^\dagger$ は $k\times N$ 行列である[25]．非可換空間上では, (3.5) の第 1 式の括弧内の部分がノンゼロとなり, ADHM 方程式は

$$
\begin{aligned}
(\mu_R :=) &\qquad [B_1, B_1^\dagger] + [B_2, B_2^\dagger] + II^\dagger - J^\dagger J = -2(\theta^{12} + \theta^{34}) =: \zeta, \\
(\mu_C :=) &\qquad [B_1, B_2] + IJ = 0.
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

のように少し修正される[26]．(3.6) の第 1 式の右辺の定数 ζ がノンゼロであれば[27]，(完備化された) インスタントン・モジュライ空間の特異点が解消することが知られている [59], [60]. したがって解消された特異点の部分に対応する, 可換空間にはないインスタントン解が存在することになる. これが $U(1)$ インスタントンであり[28], 実際に非可換 $\mathbf{R}^4$ 上で非特異な解として構成された [63], [11].

一方, 可換空間上の Nahm 方程式は $G = U(1), U(2)$ の場合, 次式のようになる[29]：

$$
\frac{dT_i}{d\xi} - \frac{i}{2}\epsilon_{ijk}[T_j, T_k] \ (\equiv -\frac{1}{2}[z, \bar{z}]\delta_{i3}) = 0 \tag{3.7}
$$

(T_i は $\widetilde{A}_i$ に相当する.) 非可換空間上ではインスタントンの時と同様に

$$
\frac{dT_i}{d\xi} - \frac{i}{2}\epsilon_{ijk}[T_j, T_k] = -\theta\delta_{i3} \tag{3.8}
$$

と少し修正される. これも非可換空間上の Bogomol'nyi 方程式 (2.15)

$$
[\Phi, D_i] - \frac{i}{2}\epsilon_{ijk}[D_j, D_k] = \frac{1}{\theta}\delta_{i3} \tag{3.9}
$$

と見比べれば双対関係が顕著である. いまここで $T_i' := T_i + \delta_{i3}\theta\xi$ と定義すると, T_i' が満たす微分方程式は, 可換空間上の Nahm 方程式 (3.7) と全く同じになる. したがって, $G = U(1), U(2)$ 非可換モノポールのモジュライ空間は可換な場合と変わらない [18].

次に簡単な具体解を少し紹介する.

可換空間上の $G = SU(2)$ (ASD) 1 インスタントン解 (BPST 解) は ADHM 構成法により次のように求められる (ADHM 方程式 (3.5) の解としては $B_{0,1} = 0,\ I = (\rho, 0), J = (0, \rho)^t$ (ほぼ自明解) を取ればよい.[30])：

$$
\begin{aligned}
A_\mu &= \frac{2x^\nu}{|x|^2 + \rho^2}\eta^-_{\nu\mu}, && (3.10) \\
F_{\mu\nu} &= \frac{4\rho^2}{(|x|^2 + \rho^2)^2}\eta^-_{\mu\nu}. && (3.11)
\end{aligned}
$$

ここで $\eta^-_{\mu\nu} = \eta^{-i}_{\mu\nu}\otimes\sigma_i$ は $\eta^-_{\mu\nu} := -(i/2)(e_\mu e_\nu^\dagger - e_\nu e_\mu^\dagger)$ で定義される Anti-Self-Dual テンソルであり, $\eta^{-i}_{\mu\nu}$ は't Hooft のイェータ・シンボルと呼ばれる. したがってこの解は Anti-Self-Dual である. ρ はインスタ

---

[25] B_1, B_2 はそれぞれ $\widetilde{A}_1 + i\widetilde{A}_2, \widetilde{A}_3 + i\widetilde{A}_4$ に相当する. I, J は零質量 Dirac 方程式のゼロモード ψ の無限遠の振る舞いに現れ, 上記のようなナイーブな議論からは出てこない.

[26] 非可換空間上での (4 次元) 自己双対方程式 (5.1) と見比べれば, 修正された部分が ADHM 方程式 ($\simeq 0$ 次元自己双対方程式) と (4 次元) 自己双対方程式とで美しく対応していることが良く分かる. ADHM 構成法の背後にある双対性は Fourier 変換的なものであり, このように (微分)$\leftrightarrow$(掛け算) のような双対構造が至るところに現れる. なお今, 非可換性は (空間) 4 次元方向全てに導入している. (12 ページ脚注参照.)

[27] 非可換パラメータ θ の自己双対性がゲージ場の自己双対性とちょうど一致する場合は $\zeta = 0$ となる. この特殊な状況に対応する非可換インスタントン解については 5 節で少し議論する.

[28] 4 ページで, NC ゲージ理論ではゲージ群が $SU(N)$ では駄目で普通 $U(N)$ とする, とコメントしたが, その $U(N)$ ($\simeq SU(N)\times U(1)$) の $U(1)$ パートがまさに非可換空間特有の重要な役割を果たすのである.

[29] さらに境界条件が必要である.

[30] $B_{0,1}$ は (対角化された場合の対角成分が) インスタントンの位置を表すので, $B_{0,1} = 0$ というのはインスタントンを原点に置いたことに相当する.

ントンのサイズ (半値幅) を与えるモジュライ・パラメータである. したがって ADHM データ I, J はインスタントンのサイズの情報を含んでいる. 今このサイズ ρ をゼロにもっていくと, 曲率 $F_{\mu\nu}$ はデルタ関数型の分布になり, インスタントンの仲間からはみ出してしまう. この $\rho = 0$ に対応するモジュライ空間の「端点」をスモール・インスタントン特異点と呼ぶ. このように可換空間上ではスモール・インスタントン特異点が存在し, ADHM データ $I = 0, J = 0$ で特徴付けられる.

非可換空間上の $G = U(2)$ (ASD) 1 インスタントン解 (非可換 BPST 解) も ADHM 構成法により同様に求められる. これを与える非可換 ADHM 方程式 (3.6) の解としては $B_{0,1} = 0,\ I = (\sqrt{\rho^2 + \zeta}, 0), J = (0, \rho)^t$ (ほぼ自明解) を取ればよい. ($\zeta > 0$ とした.) 可換空間の場合と比べると I の値が少し異なるため, さっきと同様に ρ をゼロにもっていっても I はゼロにならず, サイズ有限の非特異なインスタントンが生き残る. これが実は $U(1)$ インスタントンであり, スモール・インスタントン特異点が解消されたことによって生じた新しいインスタントン解に相当する. $U(1)$ インスタントンは位置を表すモジュライ・パラメータしか持たず, 広がりのサイズは一定 (大体 $\sqrt{\zeta}$ ぐらい) である.

可換空間上の 1-Dirac モノポール解は Nahm 構成法により次のように求められる (Nahm 方程式 (3.7) の解としては $T_i = 0$ (自明解) を取ればよい. $k = 1$ の場合はこれで境界条件も満たされる.)：

$$\Phi = -\frac{1}{2r},\ A_r = A_\vartheta = 0,\ A_\phi = \frac{1}{2r}\frac{1 + \cos\vartheta}{\sin\vartheta}. \tag{3.12}$$

ただし (r, ϑ, ϕ) は普通の極座標である. ゲージ場は $\vartheta = 0$ で発散しており, それから計算される磁場も $\vartheta = 0$, すなわち x^3 軸の正の部分にデルタ関数型の特異性を持つことが分かる. この x^3 軸の正の部分に沿ったストリング状の特異点の集まりを Dirac ストリングと呼ぶ. Dirac ストリングは無限小の幅を持ったソレノイドと解釈でき, ゲージ変換でその方向が変わる非物理的対象である[31]. x^3 軸の正の部分以外では磁場は

$$B_i = -\partial_i \Phi = -\frac{x^i}{2r^3} \tag{3.13}$$

と計算され, 放射状の分布をしている.

非可換 1-Dirac モノポールの厳密解は [18] で Nahm 構成法により求められた (非可換 Nahm 方程式 (3.8) の解としては $T_i = -\delta_{i3}\theta\xi$ (自明解) を取ればよい.)：

$$\begin{aligned} \Phi &= \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n |n\rangle\langle n| = \pm\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\xi_n^2 - \xi_{n-1}^2\right)|n\rangle\langle n| + \left(\xi_0^2 + \frac{x^3}{\theta}\right)|0\rangle\langle 0|\right\}, \\ A_z &= \frac{1}{\sqrt{2\theta}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{\xi_n}{\xi_{n+1}}\right)a^\dagger|n\rangle\langle n|, \quad A_3 = 0. \end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\text{ここで} \qquad \zeta_n := \int_0^\infty dp\ p^n e^{-\theta p^2 + 2px^3}, \quad \xi_n := \sqrt{\frac{n\zeta_{n-1}}{2\theta\zeta_n}}. \tag{3.15}$$

これは至るところ非特異な解である. 無限遠の振る舞い ($r_n + x^3 \to \infty,\ r_n := \sqrt{(x^3)^2 + 2\theta n}$) は次のようになる[32]：

$$\Phi_n \sim \begin{cases} \pm\dfrac{x^3}{\theta} & :\ n = 0,\ x^3 \to +\infty \\ \pm\dfrac{1}{2r_n} = \pm\dfrac{1}{2\sqrt{(x^3)^2 + 2\theta n}} & :\text{それ以外} \end{cases} \tag{3.16}$$

$$(B_3)_n \sim \begin{cases} \dfrac{1}{\theta} & :n = 0,\ x^3 \to +\infty \\ -\dfrac{x^3}{2(r_n)^3} & :\text{それ以外} \end{cases} \tag{3.17}$$

[31] モノポールに関する詳しいレヴューとして例えば [17], [27] がある.
[32] 鞍点法で ζ_n の積分を処理した.

これから分かるように, Higgs 場および磁場はともに $n = 0,\ x^3 \to \infty$, すなわち x^3 軸の正の部分で特別な振る舞いをする[33]．x^3 軸の正の部分の一様な磁場 $(B_3(x^3 \to +\infty))_0|0\rangle\langle 0|$ は, Weyl 変換でスター積を用いる記述に戻ると, ちょうど Gauss 型の分布 $(2/\theta)\exp\{-((x^1)^2+(x^2)^2)/\theta\}$ になり, その幅は大体 $\sqrt{\theta}$ である. したがって可換空間上への極限 $\theta \to 0$ で, これはちょうどデルタ関数型の分布になり, もとの特異な Dirac ストリングが再現される. 以上のことから, x^3 軸の正の部分の磁束は Dirac ストリングが非可換性のために膨らんだため, その内部の磁場が現れたものであり, 解 (3.14) は Dirac ストリング付きの Dirac モノポールの非可換版である[34], と解釈するのが妥当であるように思えるが実は正確でない. これについては D ブレーンで解釈すると明解かつ正確に理解される. (興味のある方は [23] の 2.3 節を御覧ください.)

ここでは詳細については全て省略したが, ADHM/Nahm 構成法は非可換空間上にも正しく拡張でき[35], 上記以外のさまざまな厳密解が手順通りに構成できる. D ブレーン解釈も非常に興味深く, D ブレーン力学の解明に今後も役立つものと期待している[36].

4 BPS-Soliton Generating Transformation

この節では, 非可換 BPS 方程式を不変に保つ変換を見出し, 既知のソリトン解から新しいソリトン解を構成する.

まず次の変換を考える：

$$\begin{aligned} \Phi &\to S\Phi S^\dagger, \\ D_i &\to S D_i S^\dagger. \end{aligned} \tag{4.1}$$

ただし, S は $S^\dagger S = 1$ を満たす演算子である. S が有限サイズの行列であれば, 自動的に $SS^\dagger = 1$ は満たされ, S はユニタリー演算子, 変換 (4.1) はゲージ変換となる. ところが今, S は無限サイズの行列であるため, $SS^\dagger$ は射影演算子になることしか言えない $((SS^\dagger)(SS^\dagger) = SS^\dagger)$.

変換 (4.1) は一般に運動方程式 ($\Leftrightarrow \delta I/\delta\mathcal{O} = 0$) を不変に保つ [29]:

$$\frac{\delta I}{\delta \mathcal{O}} \to S\frac{\delta I}{\delta \mathcal{O}}S^\dagger, \tag{4.2}$$

ここで $\mathcal{O}$ は作用に含まれる場である. 実際, 例えば運動方程式 (2.2) の 2 番目の方の左辺は

$$\begin{aligned} [D^\mu, [D_\mu, \Phi]] &\to [SD^\mu S^\dagger, [SD_\mu S^\dagger, S\Phi S^\dagger]] \\ &= S[D^\mu, [D_\mu, \Phi]]S^\dagger \end{aligned} \tag{4.3}$$

と共変的に変換する. ($S^\dagger S = 1$ だけが必要であることに注意.)

S の典型例は次のシフト演算子 S_N である：

$$S_N := \sum_{n=0}^{\infty} |n+N\rangle\langle n|, \quad S_N^\dagger = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n+N|. \tag{4.4}$$

[33] 今 n を大体 1-2 平面上の原点からの距離の 2 乗と思っている $((x^1)^2+(x^2)^2 \sim 2\theta n)$.
[34] x^3 軸の正の部分の磁束は原点に流入する磁束の総量に等しく, 十分大きい 2 次元球面で囲って磁場を表面積分するとゼロになる. すなわち磁荷がゼロとなりモノポールとは言えないわけであるが, 可換な場合に Dirac ストリングを取り除いて扱うのと同様に, この磁束を除いて表面積分すると -1 という望ましい値が得られる [18].
[35] レヴューとして例えば [13], [21], [51], [62] がある.
[36] 興味のある方は, 是非 [21] を御覧ください. 参考文献もそこにあります.

これらは

$$S_N^\dagger S_N = 1, \quad S_N S_N^\dagger = 1 - P_N \tag{4.5}$$

を満たす．ここで，

$$P_N := \sum_{m=0}^{N-1} |m\rangle\langle m| \tag{4.6}$$

は, Fock 空間 $\mathcal{H}$ の N 次元部分空間 $\mathcal{H}_N = \oplus_{m=0}^{N-1}\mathbf{C}|m\rangle$ への射影演算子であり, $S_N S_N^\dagger$ は, $\mathcal{H}$ に対する $\mathcal{H}_N$ の補空間への射影演算子となる．以後 S として S_N を用いる．

変換 (4.1) は一般に BPS 方程式を不変に保たない．実際, 例えば BPS 方程式 (2.15) の一番目の方の左辺は

$$\begin{aligned} 2[D_z, D_z^\dagger] + \frac{1}{\theta} &\rightarrow 2[S_N D_z S_N^\dagger, S_N D_z^\dagger S_N^\dagger] + \frac{1}{\theta} \\ &= S_N(2[D_z, D_z^\dagger])S_N^\dagger + \frac{1}{\theta} \\ &= S_N \left\{ 2[D_z, D_z^\dagger] + \frac{1}{\theta} \right\} S_N^\dagger + \frac{1}{\theta} P_N \end{aligned} \tag{4.7}$$

と変換し, 余分な項が現れる．これは, BPS 方程式が運動方程式と違って, 定数項 (例えば曲率の式に現れた $-i(\theta^{-1})_{ij}$ など) を含んでおり, 式全体が共変的に変換しないためである．($S_N S_N^\dagger$ が射影演算子であることにも注意.)

私達は, 変換 (4.1) を修正することで, BPS 方程式を不変に保つ変換を見出した．

NC $G = U(1)$ $(3+1)$ 次元 Yang-Mills-Higgs 理論に対する結果は次の通り：

$$\begin{aligned} \Phi &\rightarrow S_N \Phi S_N^\dagger \pm \frac{x^3}{\theta} P_N + \sum_{m=0}^{N-1} \lambda_m^{(4)} |m\rangle\langle m|, \\ D_3 &\rightarrow \partial_3 + S_N A_3 S_N^\dagger + \sum_{m=0}^{N-1} \lambda_m^{(3)} |m\rangle\langle m|, \\ D_z &\rightarrow S_N D_z S_N^\dagger + \sum_{m=0}^{N-1} \lambda_m^{(z)} |m\rangle\langle m|. \end{aligned} \tag{4.8}$$

ここで, $\lambda_m^{(z)} := (1/2)(\lambda_m^{(1)} - i\lambda_m^{(2)})$ であり, $\lambda_m^{(1)},\ \lambda_m^{(2)},\ \lambda_m^{(3)},\ \lambda_m^{(4)}$ は任意の実パラメータである．

具体例で解の性質を調べる．例えば, 非可換 1-Dirac モノポール解 (3.14) を変換すると, 次の新しいソリトン解が得られる：

$$\begin{aligned} \Phi^{\text{new}} &= \pm \left\{ \sum_{n=N+1}^{\infty} (\xi_{n-N}^2 - \xi_{n-N-1}^2)|n\rangle\langle n| + \left(\xi_0^2 + \frac{x^3}{\theta}\right)|N\rangle\langle N| + \sum_{m=0}^{N-1}\left(\frac{x^3}{\theta} - \lambda_m^{(4)}\right)|m\rangle\langle m| \right\}, \\ A_3^{\text{new}} &= \sum_{m=0}^{N-1} \lambda_m^{(3)} |m\rangle\langle m|, \\ D_z^{\text{new}} &= \frac{1}{\sqrt{2\theta}} \sum_{n=N}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1-N}{n+1}} \frac{\xi_{n-N}}{\xi_{n+1-N}} a^\dagger |n\rangle\langle n| + \sum_{m=0}^{N-1} \lambda_m^{(z)} |m\rangle\langle m|. \end{aligned} \tag{4.9}$$

これは, 非可換 Dirac モノポール 1 個とフラクソン N 個の複合系を表す[37]．N フラクソン解は真空解 $\Phi = 0,\ A = 0$ を (4.8) で変換することで得られ,

$$\Phi^{\text{fluxon}} = \pm \sum_{m=0}^{N-1} \left(\frac{x^3}{\theta} - \lambda_m^{(4)}\right)|m\rangle\langle m|,$$

[37] D-brane 解釈については [21], [23] にある．

$$
\begin{aligned}
D_z^{\mathrm{fluxon}} &= S_N \hat{\partial}_z S_N^\dagger + \sum_{m=0}^{N-1} \lambda_m^{(z)} |m\rangle\langle m|, \quad A_3^{\mathrm{fluxon}} = \sum_{m=0}^{N-1} \lambda_m^{(3)} |m\rangle\langle m|, \\
B_3^{\mathrm{fluxon}} &= \frac{1}{\theta} P_N, \quad B_1^{\mathrm{fluxon}} = B_2^{\mathrm{fluxon}} = 0.
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

で与えられる [66], [19]. フラクソンは, 非可換空間特有のソリトンであり, 非可換 Dirac モノポールに現れた x^3 軸の正の部分の磁束が無限にのびているものと解釈できる. すなわちモノポールというよりはむしろ渦に近く, 単位長さあたりの質量は $2\pi/g_{\mathrm{YM}}^2\theta$ である[38] . したがって変換 (4.8) は, BPS 方程式を (よって運動方程式も) 不変に保ちながら, エネルギーを変えてしまっているように見える. これは変換 (4.8) が実は作用も変えてしまっているためであり, その原因は作用の中の曲率の式に定数項が含まれていることである. ((4.7) と同様の議論.) 変換 (4.8) は見掛け上はほとんどゲージ変換であるが, 実際は, あるソリトン (フラクソン) 数のセクターの真空を, N 個ソリトン数の多いセクターの真空に移すという変換になっている.

最後に新しい解に含まれていた任意パラメータ $\lambda_m^{(*)}$ の物理的意味についてコメントする. 行列模型[39] による解釈によれば $\lambda_m^{(*)}$ は実は N 個のフラクソンの位置を表すということが分かる [23]. このことはフラクソン解を実際に (厳密な) Seiberg-Witten マップ [64] により (2 ページ表参照) 可換側にうつしてやると明確に分かる [37]. あるいはフラクソン解を Nahm 構成することでも理解される [25]. ところが (4.10) を見れば分かるように, 磁場には $\lambda_m^{(*)}$ の情報が入ってこない ($S_N^\dagger|m\rangle = 0$ より). これは非可換空間には局所的な観測可能量が存在せず, フラクソンから生じる磁場の位置というものは非可換側では意味をなさないためである.

5 Conclusion and Discussion

インスタントン, 渦についても同様の議論ができる. この場合, 変換式は (4.1) のまま修正する必要がないが[40] , 非可換パラメータに制約をつけなければならない：

- インスタントンの場合：

  インスタントンとは 4(+0) 次元 (Euclid) 空間上の Yang-Mills 理論の BPS ソリトンである. BPS 方程式は以下の通り[41] ：

$$
\begin{aligned}
(F_{z_1\bar{z}_1} \mp F_{z_2\bar{z}_2} =) \qquad & -[D_{z_1}, D_{z_1}^\dagger] \pm [D_{z_2}, D_{z_2}^\dagger] - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\theta^{12}} \mp \frac{1}{\theta^{34}}\right) = 0, \\
(F_{z_1 z_2} =) \qquad & [D_{z_1}, D_{z_2}] = 0.
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

  複号は上段が Self-Dual 方程式, 下段が Anti-Self-Dual 方程式を表す.

  この方程式の定数項の部分 $(1/2)(1/\theta^{12} \mp 1/\theta^{34})$ が消える場合のみ, すなわち非可換パラメータの自己双対性がゲージ場の自己双対性と一致するときに限り, 変換 (4.1) は BPS 方程式 (5.1) を不変に保つことが分かる. このとき, (完備化された) インスタントン・モジュライ空間は可換な場合と

[38] フラクソンと超伝導の渦糸との関連は, ほとんど議論されていないと思われる.

[39] レヴューとして例えば [50] がある.

[40] 渦の記述に必要な, ゲージ群の基本表現に属する Higgs 場 ϕ に対しては $\phi \to S\phi$ と変換する. (ϕ にはモジュライの項は加えてはならない.)

[41] この理論には時間座標 x^0 がなく, 非可換性は 4 次元方向全てに導入している. ここでは反対称行列である非可換パラメータを標準形にとり, θ^{12}, θ^{34} をノンゼロ, 他の成分を全てゼロとしている. この場合, 非可換座標が作用する Fock 空間は $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ のように単調和振動子の Fock 空間のテンソル積となる. したがって場は $\hat{A}(\hat{x}^\mu) = \sum_{m_1,m_2,n_1,n_2=0}^{\infty} |m_1\rangle\langle n_1| \otimes |m_2\rangle\langle n_2| = \sum_{m_1,m_2,n_1,n_2=0}^{\infty} |m_1,m_2\rangle\langle n_1,n_2|$ のように表される.

変わらず特異なままである．(非可換空間上の ADHM 方程式 (3.6) 参照.) それにも関わらず, 変換後の解は常に非特異であり NC ゲージ理論の特色が現れている．

具体的既知解としては, 非可換パラメータの自己双対性がゲージ場の自己双対性とちょうど逆の場合の解 (例えば [63], [11]) ではなく, 非可換パラメータの自己双対性がゲージ場の自己双対性と一致する場合の解 (例えば [14]) あるいは真空解を持ってくる必要がある．変換後の解は, 変換前の非可換 BPS インスタントンとフラクソンに対応する非可換空間特有のインスタントン (localized instanton) の (BPS) 複合系となる．

- 渦の場合：

  渦とは, (2 + 1) 次元時空上の Yang-Mills-Higgs 理論の BPS ソリトンのことである．(ここでは Abelian-Higgs 模型を扱う.) BPS 方程式は以下の通り：

$$\text{(Self-Dual)} \quad : \quad 2[D_z, D_z^\dagger] + \frac{1}{\theta} = v^2 - \phi\phi^\dagger, \quad [\hat{\partial}_{\bar{z}}, \phi] - A_z^\dagger \phi = 0, \tag{5.2}$$

$$\text{(Anti-Self-Dual)} \quad : \quad 2[D_z, D_z^\dagger] + \frac{1}{\theta} = -v^2 + \phi\phi^\dagger, \quad [\hat{\partial}_z, \phi] + A_z \phi = 0. \tag{5.3}$$

  ここで, ϕ はゲージ群の基本表現に属する Higgs 場, $v(>0)$ は Higgs 場の真空期待値である．また $\theta > 0$ である．渦の大きさは大体 $1/v$ である．

  この方程式の定数項の部分 $1/\theta \mp v^2$ が消える場合のみ, すなわち Self-Dual 方程式において, 非可換パラメータのスケールと渦の大きさのスケールが一致するときに限り, 変換 (4.1) は Self-Dual BPS 方程式 (5.2) を不変に保つことが分かる．(Anti-Self-Dual BPS 方程式 (5.3) の方は定数項が消えないため不適.)

  具体的既知解としては, 今のところ真空解を持ってくるしかない[42]．変換後の解は, ある個数の非可換空間特有の渦 (localized vortex) の BPS 解となる．これはモジュライ・パラメータが入っている分だけ, [2] の解の一般化になっている．

いずれの場合も, 私達の変換によって, 変換前の非可換 BPS ソリトンと NC ゲージ理論特有のソリトンの (BPS) 複合系が得られる．そのための条件として非可換パラメータとゲージ場の自己双対性が密接に関わってくる．またモノポールのときと同じく, 変換によって, BPS 方程式, 運動方程式は不変に保たれるが, エネルギー, 作用は変わってしまう．これはやはり, 曲率の式に定数項が含まれていることによる．

Relation to Integrable Systems

非可換 1-Dirac モノポールの解 (3.14) は可積分系の視点からも興味深い形をしている, すなわち Yang 形式 (例えば [55] など参照) で書くことができる [18]：

$$\Phi = \xi^{-1}\partial_3\xi, \ A_z = \xi^{-1}[\hat{\partial}_z, \xi], \tag{5.4}$$

$$\text{ただし} \quad \xi := \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n(x_3)|n\rangle\langle n|. \tag{5.5}$$

このことは非可換空間上でも可積分系の議論をするのが見通し良いことを示唆している．実際例えば非可換 Bogomol'nyi 方程式 (2.15) は 1 次元半無限戸田格子 (例えば [71] 参照) の式に書き換えられる [18]：

$$\frac{d^2 q_n}{dt^2} + e^{q_{n-1}-q_n} - e^{q_n - q_{n+1}} = 0, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{5.6}$$

[42] [44] の解を持ってくることは出来ない．(これは Anti-Self-Dual 方程式の解.)

$$
\text{ただし}\quad q_n(t) := \begin{cases} \log\left[\dfrac{e^{\frac{t^2}{2}}}{n!}\xi_n^2\left(\dfrac{t}{2}\right)\right], & t := 2x_3 \quad n \geq 0 \\ -\infty & \qquad\qquad n = -1. \end{cases} \tag{5.7}
$$

Yang 行列 ξ の中の ξ_n は (3.15) で定義されているものである. 離散的構造が現れたのが興味深い.

非可換空間上の可積分系の研究は可換空間上の可積分系の「θ 変形」の研究であるとも言える. NC ゲージ理論の可積分系の研究は他に, [46], [70] などいくつかあるが, まだ始まったばかりであり今後の研究が待たれる. 文献 [55] の「θ 変形」の研究を体系的に仕上げるというのも一つの方向であろう.

Acknowledgements

この記事の増補版は, 2001 年 7 月 31 日に完成しました. 増補にあたり, 下記の研究会やセミナーにおける私の発表についての質疑応答や議論がとても参考になりました. 世話人の方々, 聴講者の方々など関係者全員に, この場をお借りして感謝を申し上げたいと思います. また, [26] の共同研究者でもある寺嶋靖治さんからは非可換幾何学のアイデアや現状について非常に多くのことを学ぶことができ, 理解が深まりました. その一部はこの記事に反映されていることと思います. この記事が, 数学・物理学の発展, あるいは数理科学の学問交流に何らかの形で少しでも役に立てばとても幸いです.

- 2000 年 12 月 11 日, 5th Winter School of APCTP/KIAS and 9th Haengdang Workshop on Strings and Field Theory, @ Hanyang University, Korea [43]
- 2000 年 12 月 20 日, 京大基研研究会「場の量子論の基礎的諸問題と応用」: [22]
- 2001 年 1 月 9 日, Sapporo Winter School in Niseko ’01 @ニセコ憩いの村 (Poster Session)
- 2001 年 1 月 31 日, 日本大学素粒子コロキウム
- 2001 年 2 月 4 日, 研究会「可積分系研究の現状と展望」@京大会館 : [この記事]
- 2001 年 2 月 21 日, 京大基研研究会「ストリング理論と場の理論における非可換幾何」: [23]
- 2001 年 3 月 2 日, 第 59 回 東京大学工学部力学教室インフォーマルセミナー
- 2001 年 3 月 28 日, 日本物理学会 第 56 回年次大会 @中央大学多摩キャンパス
- 2001 年 5 月 30 日, 基礎 G・素粒子共同セミナー @東京都立大学
- 2001 年 6 月 6 日, Komaba Particle Theory Weekly Seminar @東京大学駒場キャンパス
- 2001 年 7 月 17 日, 京大基研研究会「場の量子論 2001」: [24] [44]

この記事の作成は日本育英会および日本証券奨学財団の経済援助のもと行われました.

[43] 発表の transparency と音声ファイルが [http://www.apctp.org/~string/] に置かれていました.
[44] 発表の transparency と音声ファイルが [http://www2.yukawa.kyoto-u.ac.jp/~qft/] に置かれています.

A Known NC BPS Solitons

既知の非可換 BPS ソリトンを以下の表にまとめた.

例	(ii) オペレーター形式の記述	(i) スター積を用いる記述	(iii) 背景一様 B 場中の DBI 作用による記述
インスタントン	• $U(1), U(2)$ ASD 解 (θ：SD) ($k=1,2,\cdots$)： Nekrasov-Schwarz [63]*, 古内 [11]*, $\cdots$ (k：任意)： Lechtenfeld-Popov [52], [52]* • $U(1)$ $k=1$ ASD 解 (θ：任意)：Nekrasov [62] • $U(2)$ $k=1$ SD 解 (θ：SD)：古内 [14]* ◉ SD Localized Instanton 解 (θ：SD, k：任意)： Aganagic et al. [1], 古内 [14]*		• $U(1)$ $k=1$ ASD 解 (B：SD)：寺嶋 S [72] • $U(1)$ $k=1$ ASD 解 (B：任意)：森山 [58] • ⟨ 関連論文 ⟩： Mariño et al. [54], $\cdots$
モノポール	• $U(1)$ $k=1$： Gross-Nekrasov [18]* • $U(2)$ $k=1$： Gross-Nekrasov [20]* ◉ Fluxon 解 (k：任意)： Gross-Nekrasov [19], Polychronakos [66], 浜中 [25]*	• $U(1)$ $k=1$ (θ 1 次)：橋本 K・平山 [35] • $U(2)$ $k=1$ (θ 1 次)：Bak [2]*, 橋本 K・畑・森山 [34] (θ 2 次)：後藤・畑 [16]	• $U(1)$ $k=1$ (Higgs 場)：森山 [57] (Gauge 場)： 橋本 K・平山・森山 [36] • ⟨ 関連論文 ⟩： 橋本 A・橋本 K [33], 橋本 K [31]$\cdots$
渦	• U(1) ASD 解 ($\theta \to \infty$)： Jatkar-Mandal-Wadia [44] ◉ U(1) SD Localized Vortex 解 ($\theta = 1/v^2, k$：任意)：Bak [3] • ⟨ 関連論文 ⟩： Lozano-Moreno-Schaposnik [53], Bak-Lee-Park [4], $\cdots$	?	? ?

引用論文[45] の肩に星印がついているものは, ADHM/Nahm 構成法を用いたものである. また, SD, ASD はそれぞれ Self-Dual, Anti-Self-Dual の略である. “◉” の解は “Solution Generating Technique” で生成される非可換空間特有の BPS ソリトンである[46].

(i) の解は可換空間上の解 ($\theta = 0$ の場合の解) の周りで θ 展開して求められている.

インスタントンに関しては, (i) の解はすぐに求められると思われるが, (i) と (iii) との対応はモノポールほど議論されていない. モノポールに関しては, (i), (iii) の論文は (i) と (iii) との対応についても詳しく議論しているので, (i), (iii) の記述の間の境界線は明確ではない. 渦に関しては, (i) の解は, 可換空間

[45] 敬称は省略させていただきました.

[46] “Small Vortex” 解を除いた “◉” の解と $U(2)$ $k=1$ SD インスタントン解の一部については, 厳密な Seiberg-Witten マップ [64] を用いて (iii) の記述の解が求められている [37].

上の渦の解が知られていないため, 可換空間上の解の周りで θ 展開して求めることはできない. (iii) の解は, 渦の D ブレーンでの記述が知られていないため, 全く議論されていない. (Non-BPS の場合はこの限りでない.)

参考文献

[1] M. Aganagic, R. Gopakumar, S. Minwalla and A. Strominger, "Unstable solitons in noncommutative gauge theory," JHEP **0104** (2001) 001, [hep-th/0009142]. [47]

[2] D. Bak, "Deformed Nahm equation and a noncommutative BPS monopole," Phys. Lett. B **471** (1999) 149, [hep-th/9910135].

[3] D. Bak, "Exact solutions of multi-vortices and false vacuum bubbles in noncommutative Abelian-Higgs theories," Phys. Lett. B **495** (2000) 251, [hep-th/0008204].

[4] D. Bak, S. U., K. Lee and J. Park, "Noncommutative vortex solitons," Phys. Rev. D **63** (2001) 125010, [hep-th/0011099].

[5] J. Bellissard, A. van Elst and H. Schulz-Baldes, "The non-commutative geometry and the quantum Hall effect," [cond-mat/9411052].

[6] O. Bergman, J. H. Brodie and Y. Okawa, "The Stringy Quantum Hall Fluid," JHEP **0111** (2001) 019, [hep-th/0107178].

[7] C. S. Chu, V. V. Khoze and G. Travaglini, "Notes on noncommutative instantons," Nucl. Phys. B **621** (2002) 101, [hep-th/0108007].

[8] D. H. Correa, G. S. Lozano, E. F. Moreno and F. A. Schaposnik, "Comments on the U(2) noncommutative instanton," Phys. Lett. B **515** (2001) 206, [hep-th/0105085].

[9] G. H. Derrick, "Comments on nonlinear wave equations as models for elementary particles," J. Math. Phys. **5** (1964) 1252.

[10] M. R. Douglas and N. A. Nekrasov, "Noncommutative field theory," Rev. Mod. Phys. **73** (2002) 977, [hep-th/0106048].

[11] K. Furuuchi, "Instantons on noncommutative $\mathbf{R}^4$ and projection operators," Prog. Theor. Phys. **103** (2000) 1043, [hep-th/9912047].

[12] K. Furuuchi, "Equivalence of projections as gauge equivalence on noncommutative space," Commun. Math. Phys. **217** (2001) 579, [hep-th/0005199].

[13] K. Furuuchi, "Topological charge of U(1) instantons on noncommutative $\mathbf{R}^4$," [hep-th/0010006].

[14] K. Furuuchi, "Dp-D(p+4) in noncommutative Yang-Mills," JHEP **0103** (2001) 033, [hep-th/0010119].

[47] hep-th/∼とあるのは論文のプレプリント番号であり, [http://xxx.lanl.gov/archive/hep-th] から検索, 入手できる.

[15] R. Gopakumar, S. Minwalla and A. Strominger, "Noncommutative solitons," JHEP **0005** (2000) 020, [hep-th/0003160].

[16] S. Goto and H. Hata, "Noncommutative monopole at the second order in theta," Phys. Rev. D **62** (2000) 085022, [hep-th/0005101].

[17] P. Goddard and D. I. Olive, "Magnetic monopoles in gauge field theories," Rept. Prog. Phys. **41** (1978) 1357.

[18] D. J. Gross and N. A. Nekrasov, "Monopoles and strings in noncommutative gauge theory," JHEP **0007** (2000) 034, [hep-th/0005204].

[19] D. J. Gross and N. A. Nekrasov, "Dynamics of strings in noncommutative gauge theory," JHEP **0010** (2000) 021, [hep-th/0007204].

[20] D. J. Gross and N. A. Nekrasov, "Solitons in noncommutative gauge theory," JHEP **0103** (2001) 044, [hep-th/0010090].

[21] 浜中 真志, 『ADHM/Nahm 構成法とその双対性』, 素粒子論研究 (掲載予定).

[22] 浜中 真志, 『非可換ソリトンの厳密解の構成法』[48] , 素粒子論研究 **103-5** (2001-8) E16-E18, ※ 2000 年 12 月の基研研究会「場の量子論の基礎的諸問題と応用」のプロシーディング.

[23] 浜中 真志, "Exact BPS Solitons in Noncommutative Gauge Theories," 素粒子論研究 **104-3** (2001-12) C87-C102 および文部省特定領域研究 (B)707「超対称性理論」の会議録シリーズ No.8 (2001) 85-100, ※ 2001 年 2 月の基研研究会「ストリング理論と場の理論における非可換幾何」のプロシーディング. [49]

[24] 浜中 真志, "Recent Developments in Non-Commutative Gauge Theory," 素粒子論研究 **104-5** (2002-2) E27-E44, ※ 2001 年 7 月の基研研究会「場の量子論 2001」のプロシーディング.

[25] M. Hamanaka, "ADHM/Nahm construction of localized solitons in noncommutative gauge theories," Phys. Rev. D **65** (2002) 085022, [hep-th/0109070].

[26] M. Hamanaka and S. Terashima, "On exact noncommutative BPS solitons," JHEP **0103** (2001) 034, [hep-th/0010221].

[27] J. A. Harvey, "Magnetic monopoles, duality, and supersymmetry," [hep-th/9603086].

[28] J. A. Harvey, "Komaba lectures on noncommutative solitons and D-branes," [hep-th/0102076].

[29] J. A. Harvey, P. Kraus and F. Larsen, "Exact noncommutative solitons," JHEP **0012** (2000) 024, [hep-th/0010060].

[30] K. Hashimoto, "Fluxons and exact BPS solitons in non-commutative gauge theory," JHEP **0012** (2000) 023, [hep-th/0010251].

[48] [22] はこの記事のダイジェスト版に相当する. なお私が書いた記事については, 私のホームページ [http://www2.yukawa.kyoto-u.ac.jp/~hamanaka] にも置かれております.

[49] [http://www-hep.phys.s.u-tokyo.ac.jp/japanese/tokutei99.html] に掲載中. なお, この研究会はこれまでの発展の総まとめとしての色彩が強く, 各々の記事が非常に充実しております.

[31] K. Hashimoto, "Non-linear / Non-commutative non-Abelian monopoles," Phys. Rev. D **65** (2002) 065014, [hep-th/0107226].

[32] K. Hashimoto, "A review of non-commutative solitons," ([http://hep1.c.u-tokyo.ac.jp/~koji/ schedule.html] の「その他の著作」から入手可能. [50])

[33] A. Hashimoto and K. Hashimoto, "Monopoles and dyons in non-commutative geometry," JHEP **9911** (1999) 005, [hep-th/9909202].

[34] K. Hashimoto, H. Hata and S. Moriyama, "Brane configuration from monopole solution in non-commutative super Yang-Mills theory," JHEP **9912** (1999) 021, [hep-th/9910196].

[35] K. Hashimoto and T. Hirayama, "Branes and BPS configurations of noncommutative / commutative gauge theories," Nucl. Phys. B **587** (2000) 207, [hep-th/0002090].

[36] K. Hashimoto, T. Hirayama and S. Moriyama, "Symmetry origin of nonlinear monopole," JHEP **0011** (2000) 014, [hep-th/0010026].

[37] K. Hashimoto and H. Ooguri, "Seiberg-Witten transforms of noncommutative solitons," Phys. Rev. D **64** (2001) 106005, [hep-th/0105311].

[38] 林 浩一, 『モノポール』, 物理学最前線 **6** (共立出版；1984) 77-125, [ISBN/4-320-03188-1].

[39] S. Hellerman and M. V. Raamsdonk, "Quantum Hall physics equals noncommutative field theory," JHEP **0110** (2001) 039, [hep-th/0103179].

[40] S. Hellerman and L. Susskind, "Realizing the Quantum Hall System in String Theory," [hep-th/0107200].

[41] P. M. Ho, "Twisted bundle on noncommutative space and U(1) instanton," hep-th/0003012.

[42] N. Imai, K. Ishikawa, T. Matsuyama and I. Tanaka, "Field theory in a strong magnetic field and the quantum Hall effect: integer Hall effect," Phys. Rev. B **42** (1990) 10610.

[43] T. Ishikawa, S. I. Kuroki and A. Sako, "Elongated U(1) instantons on noncommutative $\mathbf{R}^4$," JHEP **0112** (2001) 000, [hep-th/0109111].

[44] D. P. Jatkar, G. Mandal and S. R. Wadia, "Nielsen-Olesen vortices in noncommutative Abelian Higgs model," JHEP **0009** (2000) 018, [hep-th/0007078].

[45] H. Kajiura, Y. Matsuo and T. Takayanagi, "Exact tachyon condensation on noncommutative torus," JHEP **06** (2001) 041, [hep-th/0104143].

[46] A. Kapustin, A. Kuznetsov and D. Orlov, "Noncommutative instantons and twistor transform," Commun. Math. Phys. **221** (2001) 385, [hep-th/0002193].

[47] 加藤 光裕, "Noncommutative Geometry and String Theory," 素粒子論研究 **102-3** (2000-12) C6-C18, ※ 2000 年 7 月の基研研究会「場の量子論 2000」のプロシーディング

[50] このページには他にも有用なレヴューや講演記録などがある.

[48] K. Y. Kim, B. H. Lee and H. S. Yang, “Comments on instantons on noncommutative $\mathbf{R}^4$,” hep-th/0003093.

[49] K. Y. Kim, B. H. Lee and H. S. Yang, “Noncommutative instantons on $\mathbf{R}^2_{NC} \times \mathbf{R}^2_{C}$,” Phys. Lett. B **523** (2001) 357, [hep-th/0109121].

[50] A. Konechny and A. Schwarz, “Introduction to M(atrix) theory and noncommutative geometry,” [hep-th/0012145].

[51] A. Konechny and A. Schwarz, “Introduction to M(atrix) theory and noncommutative geometry, part II,” [hep-th/0107251].

[52] O. Lechtenfeld and A. D. Popov, “Noncommutative ’t Hooft instantons,” JHEP **0203** (2002) 040, [hep-th/0109209].

[53] G. S. Lozano, E. F. Moreno and F. A. Schaposnik, “Nielsen-Olesen vortices in noncommutative space,” Phys. Lett. B **504** (2001) 117, [hep-th/0011205].

[54] M. Marino, R. Minasian, G. Moore and A. Strominger, “Nonlinear instantons from supersymmetric p-branes,” JHEP **0001** (2000) 005, [hep-th/9911206].

[55] L. J. Mason and N. M. Woodhouse, *Integrability, self-duality, and twister theory* (Oxford ; 1996) [ISBN/0-19-853498-1].

[56] 松尾 泰, “Geometrical aspects of noncommutative soliton,” 素粒子論研究および文部省特定領域研究 (B)707「超対称性理論」の会議録シリーズ No.8 (掲載予定), ※ 2001 年 2 月の基研研究会「ストリング理論と場の理論における非可換幾何」のプロシーディング[51]

[57] S. Moriyama, “Noncommutative monopole from nonlinear monopole,” Phys. Lett. B **485** (2000) 278, [hep-th/0003231].

[58] S. Moriyama, “Noncommutative / nonlinear BPS equations without zero slope limit,” JHEP**0008** (2000) 014, [hep-th/0006056].

[59] H. Nakajima, “Resolutions of moduli spaces of ideal instantons on $\mathbf{R}^4$,” *Topology, Geometry and Field Theory* (World Scientific ; 1994) 129 [ISBN/981-02-1817-6].

[60] H. Nakajima, *Lectures on Hilbert Schemes of Points on Surfaces* (AMS ; 1999) [ISBN/0-8218-1956-9].

[61] 中島 龍也・青木 秀夫, 『多体電子論 III 分数量子ホール効果』, (東京大学出版会 ; 1999) [ISBN/4-13-060604-2].

[62] N. A. Nekrasov, “Trieste lectures on solitons in noncommutative gauge theories,” [hep-th/0011095].

[63] N. Nekrasov and A. Schwarz, “Instantons on noncommutative $\mathbf{R}^4$, and (2,0) superconformal six dimensional theory,” Commun. Math. Phys. **198** (1998) 689, [hep-th/9802068].

[51] [http://www-hep.phys.s.u-tokyo.ac.jp/japanese/tokutei99.html] にも掲載予定.

[64] Y. Okawa and H. Ooguri, "An exact solution to Seiberg-Witten equation of noncommutative gauge theory," Phys. Rev. D **64** (2001) 046009, [hep-th/0104036].

[65] L. D. Paniak, "Exact Noncommutative KP and KdV Multi-solitons," hep-th/0105185.

[66] A. P. Polychronakos, "Flux tube solutions in noncommutative gauge theories," Phys. Lett. B **495** (2000) 407, [hep-th/0007043].

[67] A. P. Polychronakos, "Quantum Hall states as matrix Chern-Simons theory," JHEP **0104** (2001) 011, [hep-th/0103013].

[68] N. Seiberg and E. Witten, "String theory and noncommutative geometry," JHEP **9909** (1999) 032, [hep-th/9908142].

[69] L. Susskind, "The quantum Hall fluid and non-commutative Chern Simons theory," [hep-th/0101029].

[70] K. Takasaki, "Anti-self-dual Yang-Mills equations on noncommutative spacetime," J. Geom. Phys. **37** (2001) 291, [hep-th/0005194].

[71] 高崎 金久, 『可積分系の世界 戸田格子とその仲間』, (共立出版；2001) [ISBN/4-320-01669-6].

[72] S. Terashima, "U(1) instanton in Born-Infeld action and noncommutative gauge theory," Phys. Lett. B **477** (2000) 292, [hep-th/9911245].

[73] 寺嶋 靖治, "Noncommutative open string (NCOS) and OM theory," 素粒子論研究および文部省特定領域研究 (B)707「超対称性理論」の会議録シリーズ No.8 (掲載予定), ※ 2001 年 2 月の基研研究会「ストリング理論と場の理論における非可換幾何」のプロシーディング[52]

[74] 綿村 哲, 『非可換幾何学と場の理論』, 日本物理学会誌 **55-10** (2000) 756

[52] [http://www-hep.phys.s.u-tokyo.ac.jp/japanese/tokutei99.html] にも掲載予定.