

修士論文

M2-膜と7-膜

岸本 功

1998年2月2日

概要

7-brane background での M理論による BPS (p, q) -string の記述の仕方を考える。¹ 7-brane, (p, q) -string はもともと type IIB 理論で生じるものである. type IIB 理論を M理論と関係付けるためには M理論の 11 次元時空を 少なくとも局所的に 9 次元時空 $\times T^2$ にしなければならない. type IIB 理論の SUSY を半分たもつ 7-brane 解は M理論 の立場からみると 11 次元時空のうち torus T^2 を含む空間 4 次元分の metric が hyperkähler metric になっているものである. 一方, type IIB 理論の (p, q) -string は M理論 の立場からみると M2-brane が torus T^2 の (p, q) -cycle に巻き付いたものである. さらに SUSY をたもつ BPS state であるためには M2-brane は 11 次元時空に holomorphic に埋め込まれていなければならない. この論文では hyperkähler metric の complex structure をうまく選ぶことによって, 7-brane background で BPS (p, q) -string を表す M2-brane を記述できることを示した. また, これに関連した 7-brane, (p, q) -string についての最近の話題もいくつか紹介する.

¹ これは笹倉氏との共同研究 [1] に基づいています.

目次

第 1 章	はじめに	3
第 2 章	M2-brane の supersymmetric な configuration	5
2.1	M2-brane (supermembrane)	5
2.2	supersymmetric configuration	6
2.2.1	holomorphic な埋め込み	6
2.2.2	unbroken SUSY の数	9
第 3 章	M理論からみた type IIB 理論の 7-brane と (p, q) -string	12
3.1	7-brane 解	12
3.1.1	7-brane 解の構成	12
3.1.2	$\frac{1}{2}$ SUSY	13
3.2	7-brane の M理論 による記述	15
3.2.1	type IIB 理論の 7-brane から M理論での ‘7-brane’ へ	15
3.2.2	別の complex structure	15
3.2.3	7-brane 解の具体的な形	17
3.3	7-brane background での BPS (p, q) -string の M理論による記述	19
3.3.1	(p, q) -string と M2-brane	20
3.3.2	$SL(2, \mathbb{Z})$ 変換性	22
3.3.3	type IIB decompactification limit	24
第 4 章	type IIB 理論の 7-brane と F 理論	26
4.1	weak coupling limit	26
4.1.1	type IIB 理論の \mathbb{Z}_2 symmetry と orientifold	26
4.1.2	F 理論 on CY_{n+1}	27
4.1.3	weak coupling limit	28
4.2	constant coupling	32

4.2.1	constant coupling	32
4.2.2	orbifold limit と gauge enhancement	33
第 5 章	3-string junction	41
5.1	3-string junction in flat background	41
5.1.1	‘string network’	41
5.1.2	‘pants diagram’	46
5.2	3-string junction in 7-brane background	49
5.2.1	type IIB 理論の描像	49
5.2.2	M理論の描像	54
第 6 章	まとめ	58
付録 A		60
A.1	定義, 公式, convention, notation 等	60
A.1.1	form, 擬 Riemann 多様体 等	60
A.1.2	Γ 行列について	62
A.1.3	complex structure	63
A.1.4	Kähler, hyperkähler, K3, Calabi-Yau	64
A.1.5	j, η 関数	66
A.1.6	singular fiber の分類	67
A.1.7	反対称テンソル場の convention について	69
A.2	11D SUGRA, 10D IIA IIB SUGRA, 9D SUGRA の間の関係	70
A.2.1	11D SUGRA から 10D type IIA SUGRA へ	70
A.2.2	10D type IIA SUGRA から 9D SUGRA へ	71
A.2.3	10D type IIB SUGRA	73
A.2.4	10D type IIB SUGRA から 9D SUGRA へ	74
A.2.5	T-duality 変換	76

第1章 はじめに

近年の‘ストリング理論’において brane (膜) の理論はいろいろな方面から注目されてきている. ‘ストリング理論’の間の duality を調べる上で brane は重要な役割を果たしてきた. brane の理論は, M理論により超弦理論を統一的に扱えるという考え方の証拠の1つにもなっている. さらに D0-brane や D(-1)-brane を基本的なものとして M理論や超弦理論の非摂動的定義を与えようとする試み (Matrix theory [2], IKKT model [3] 等) が 1996 年の終りごろからなされてきている. また, 1997 年は 4次元の 超対称 Yang-Mills 理論 (SYM), 超対称 QCD (SQCD) を M理論の M5-brane 上の場の理論としてとらえ, SYM, SQCD の Seiberg-Witten 理論で知られている curve を M5-brane の configuration とみなし, SQCD の duality をより幾何学的に解釈しようという試み (‘MQCD’) がいろいろなされた ([4],[5] 等). また, 4次元だけでなく 3次元, 5次元, 6次元の gauge 理論を brane 上の場の理論として理解しようということもいろいろなされてきた ([6],[7],[8] 等). さらに, bulk と decouple した brane 上の ‘ストリング理論’ (iia,iib,(e),(o),i,h_a,h_b,m,f -theory 等と呼ばれる.) も考えられている ([9],[10],[11] 等).

‘MQCD’において, 適当な M5-brane の configuration でよく記述されている gauge 群は $SU(N)$, $SO(N)$, $Sp(N)$ つまり 古典群と (その直積) であり, 例外群 E_6, E_7, E_8, G_2, F_4 を同様に M5-brane の configuration として考えるのは困難である. しかし, [33] は type IIB 理論の 7-brane background で (p, q) -string と ‘3-string junction’ を考えることにより, 7-brane 上の 8次元の理論で E_6, E_7, E_8 の gauge symmetry が enhance されることを直観的に説明できる可能性を示唆した. そこでは 7-brane どうしが近づく極限で (p, q) -string あるいは ‘3-string junction’ が massless になり, ‘gauge boson’ として振る舞うと考える. すると, これを M理論で見れば M2-brane が ‘7-brane’ の間をとんで, ‘7-brane’ どうしが近づく極限で E_6, E_7, E_8 の gauge symmetry が enhance されると思われる. この gauge symmetry は M5-brane 上のものでないので ‘MQCD’ とは違うが, このアプローチが正しいとすれば ‘MQCD’ で例外群を実現するための手掛りになるかもしれない. この論文ではその準備という意味もあって 7-brane background での BPS (p, q) -string の記述の仕方を議論する (第3章), [1]. 実際, うまく complex structure を選ぶことによって 7-brane background での BPS (p, q) -string を表す M2-brane を記述できることを示した. しかし [33] が type IIB

理論の描像で仮定していたことをM理論でみることによって‘証明’するには至らなかった(第5章).

この論文の構成を述べる. 第2章では第3章のための準備としてSUSYをたもつためにはM2-braneをholomorphicに埋めこまねばならないことを示す.¹ この結果は非常に有効である. 一旦, 適当なcomplex structureを選んでしまえば後はSUSYをたもつM2-braneを表すのに適当なholomorphicな関係式を与えればよいことになるからである. 第3章では, 7-brane backgroundでのBPS(p, q)-stringを表すM2-braneを記述できる適当なcomplex structureを選ぶ. ここでは7-brane backgroundをM理論でみると4次元分のmetricがhyperkählerになっていることが効いてくる. hyperkählerだとcomplex structureを選ぶ自由度があるからである. ところでtype IIB理論の7-braneはもともとF理論で議論されたものだった. それを第4章で紹介する. F理論の描像では7-brane上のgauge symmetryがelliptic fibrationのsingular fiberの型として理解される.² しかしこれは直観的ではない. これを直観的に理解しようとしたのが[33]である. 第5章では[33]およびそれに関連した‘3-string junction’を紹介し, それらのM理論での描像を考える. ‘3-string junction’はもともと[40]で考えられたもののようであるが最近それが(少なくとも漸近的に)BPS stateであることが示された[28],[29]. これは今後いろいろ応用されるかもしれない.³ 付録ではこの論文で用いるconvention, notation等と第3章で用いるSUGRAの間の関係を述べた. 特に断わらない限りこの論文では一貫して付録のconvention, notationに従っている.

¹ ‘MQCD’の場合はSUSYをたもつためにM5-braneの2次元分をholomorphicに埋めこまねばならない.

² 第4章で紹介したのはF理論を用いたアプローチのごく1部にすぎない. gauge symmetryとelliptic fibrationのsingular fiberの型の関係は代数幾何を用いて徹底的に調べられているようである([12]等).

³ ‘3-string junction’は5次元のゲージ理論を論じている[7]でも出てくる. ここでは‘3-string junction’は(p, q) 5-braneからなるwebにくっつくものである. また‘3-string junction’が3つのD3-braneにくっつく状況を考えて, 4次元N=4SU(3)SYMに応用するということも考えられている[13].

第2章 M2-brane の supersymmetric な configuration

ここでは, M理論 (11D SUGRA) のある supersymmetric な background で M2-brane (supermembrane) が supersymmetry を残すように埋め込む条件について考える [16],[30].

2.1 M2-brane (supermembrane)

supermembrane action を考えよう. それは背景時空が 11D SUGRA になっているとき

$$S_{M2} = T_{M2} \int d^3\sigma \left(-\frac{1}{2} \sqrt{-h} h^{ij} E_i^a E_j^b \eta_{ab} + \frac{1}{2} \sqrt{-h} + \frac{1}{3!} \epsilon^{ijk} E_i^A E_j^B E_k^C A_{CBA} \right) \quad (2.1.1)$$

で与えられる [14],[15]. ここで $T_{M2} = (2\pi)^{-2} l_p^{-3}$ は M2-brane tension, σ^i ($i = 1, 2, 3$) は supermembrane の world volume の座標, h_{ij} は supermembrane の world volume の metric (補助場), $E_i^A = \partial_i Z^M E_M^A$ で $Z^M = (X^\mu, \Theta^\alpha)$ ($\mu = 0, \dots, 10, \alpha = 1, \dots, 32$) は (super) spacetime への supermembrane のうめこみを指定する world volume 上の場, E_M^A は (super) spacetime の supervielbein, A_{CBA} は (super) spacetime の (super) 3-form 場.

この supermembrane action は local な fermionic な変換である κ -変換:

$$\begin{aligned} \delta_\kappa Z^M E_M^a &= 0, & \delta_\kappa Z^M E_M^\alpha &= (1 + \Gamma)^\alpha_\beta \kappa^\beta; \\ \Gamma &= \frac{-1}{3! \sqrt{-h}} \epsilon^{ijk} E_i^a E_j^b E_k^c \Gamma_{abc} \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

に対する不変性をもつ [14]. ここで $\kappa = \kappa(\sigma)$ は任意の 11D Majorana spinor.

(2.1.1) の h_{ij} に対する運動方程式は:

$$h_{ij} = E_i^a E_j^b \eta_{ab} \quad (2.1.3)$$

となり, h_{ij} が on-shell で induced metric を表すことがわかる. これを使うと $\Gamma^2 = 1$ となるので,

$$\begin{aligned} P_\pm &:= \frac{1}{2}(1 \pm \Gamma); \\ P_\pm^2 &= P_\pm, \quad P_+ P_- = 0, \quad P_+ + P_- = 1 \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

となり, $P_{\pm} = P_{\pm}(\sigma)$ は projection operator になることに注意しておこう. このため κ -変換 (2.1.2) により $\Theta(\sigma)$ の on-shell の自由度をちょうど半分にすることができ, supersymmetric になれるのである.¹

次に global SUSY 変換を

$$\delta_{\epsilon}\Theta = \epsilon, \quad \delta_{\epsilon}X^{\mu} = i\bar{\epsilon}\Gamma^{\mu}\Theta \quad (2.1.5)$$

で定義する. ここで ϵ は σ^i によらない 11D Majorana spinor で 11D SUGRA の covariantly constant spinor . 11D spacetime が flat: $E_M^A = \begin{pmatrix} \delta_{\mu}^a & -i(\Gamma^a)_{\beta\gamma}\theta^{\gamma} \\ 0 & \delta_{\beta}^{\alpha} \end{pmatrix}$ の場合はこの global SUSY 変換 に対して supermembrane action (2.1.1) は 不変である.

2.2 supersymmetric configuration

2.2.1 holomorphic な埋め込み

以下では 11D SUGRA の bosonic な background で $\Theta = 0$ 場合を考える. このとき (2.1.3),(2.1.2) は

$$\begin{aligned} h_{ij} &= \partial_i X^{\mu} \partial_j X^{\nu} g_{\mu\nu}; \\ \delta_{\kappa}\Theta &= 2P_{+}\kappa, \quad \delta_{\kappa}X^{\mu} = 0; \\ \Gamma &= \frac{-1}{3!\sqrt{-h}} \epsilon^{ijk} \partial_i X^{\mu} \partial_j X^{\nu} \partial_k X^{\rho} \Gamma_{\mu\nu\rho} \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

となる.

$X^{\mu}(\sigma)$, $\Theta = 0$ が supersymmetric な configuration になる条件を求めよう. global SUSY 変換 (2.1.5) のもとで $\delta_{\epsilon}X^{\mu} = 0$ であるが $\delta_{\epsilon}\Theta = \epsilon$ により $\Theta \neq 0$ になってしまう. しかし supermembrane には κ -symmetry があるので, さらに κ -変換 をすることによって $\Theta = 0$ にすることができれば, それは supersymmetric な configuration である. つまり, 考えている supersymmetric な背景時空に存在しているある covariantly constant spinor ϵ に対し, ある spinor $\kappa(\sigma)$ が存在して

$$\delta_{\epsilon}\Theta + \delta_{\kappa}\Theta = \epsilon + 2P_{+}(\sigma)\kappa(\sigma) = 0 \quad (2.2.2)$$

¹ X^{μ} の on-shell の自由度は (worldvolume general covariance から 3 個減るので) 実 $11 - 3 = 8$ 個, Θ の on-shell の自由度は運動方程式で半分, κ -symmetry で半分になるので実 $32 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 8$ 個となる. これは直観的な議論であり supersymmetric であることを示すには 11D SUGRA との consistency などさらに詳しい解析が必要である [15],[14].

が成り立つようにできればよい。 P_+ は (2.1.4) をみたく projection operator になっていることから、この条件は $P_-(\sigma)\epsilon = 0$ つまり、

$$\left(1 + \frac{1}{3!\sqrt{-h}}\epsilon^{ijk}\partial_i X^\mu\partial_j X^\nu\partial_k X^\rho\Gamma_{\mu\nu\rho}\right)\epsilon = 0 \quad (2.2.3)$$

になる。これをみたくような membrane の configuration $X^\mu(\sigma)$ は ϵ で生成される SUSY 変換 に対する対称性をもつ。

簡単のため、11D 背景時空は $\mathcal{M}_{11} = \mathbb{R} \times \mathcal{M}_{10}$ (\mathbb{R} は時間方向) になっているとしよう。そして、membrane は static gauge : $X^0(\sigma) = \sigma^0$ をとることにする。このとき (2.2.3) は

$$\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{-h}}\epsilon^{ij}\partial_i X^\mu\partial_j X^\nu\Gamma_{\mu\nu}\Gamma_0\right)\epsilon = 0 \quad (2.2.4)$$

となる。また \mathcal{M}_{10} は Kähler 多様体 であるとする。この Kähler metric を用いると Γ 行列 は次のようになる：

$$\{\Gamma_I, \Gamma_{\bar{J}}\} = 2g_{I\bar{J}}, \quad \{\Gamma_I, \Gamma_J\} = 0, \quad \Gamma_{\bar{I}} = (\Gamma_I)^\dagger, \quad I, J = 1, \dots, 5. \quad (2.2.5)$$

したがって、 Γ_I を消滅演算子、 $\Gamma_{\bar{I}}$ を生成演算子 とみなし、

$$\Gamma_I|\Omega\rangle = 0, \quad I = 1, \dots, 5 \quad (2.2.6)$$

をみたく ‘Fock vacuum’ $|\Omega\rangle$ を用いて Clifford 代数の 複素 $2^5 = 32$ 次元表現をつくる ことができる。supersymmetric な 11D 背景時空として \mathcal{M}_{10} が Ricci-flat Kähler 多様体 になっているとしたとき、この $SO(10)$ の複素 32 次元 spinor 表現において Fock vacuum $|\Omega\rangle$ は covariantly constant spinor ϵ' になっている [41]。² ここで $\epsilon' := |\Omega\rangle$ は Majorana spinor ではなく 複素 spinor であることに注意しよう。また、completely filled state $|\bar{\Omega}\rangle = \Gamma_{\bar{1}}\Gamma_{\bar{2}}\Gamma_{\bar{3}}\Gamma_{\bar{4}}\Gamma_{\bar{5}}|\Omega\rangle$, $(\Gamma_{\bar{I}}|\bar{\Omega}\rangle = 0, \quad \bar{I} = \bar{1}, \dots, \bar{5})$ によってあらわされる spinor $\bar{\epsilon}'$ ($:= |\bar{\Omega}\rangle$) も covariantly constant spinor である。

$P_-(\sigma)\epsilon' = 0$ (つまり (2.2.4) で ϵ のかわりに ϵ' としたもの)³ の条件を調べよう。まず、(2.2.4) は membrane の各点ごとに local に成り立つ式であることに注意して、ある点において考える。まず spacetime の座標変換からその点で $g_{I\bar{J}} = \frac{1}{2}\delta_{IJ}$ にできる。この座標 (z^k, \bar{z}^k) で $z^k = x^k + iy^k$ とかくと (2.2.5) より $\{\Gamma_{x^k}, \Gamma_{y^l}\} = 0$, $\{\Gamma_{x^k}, \Gamma_{x^l}\} = 2\delta_{kl}$ なので、(2.2.6): $\Gamma_{z^i}\epsilon' = 0$ は $\Gamma_{x^k}\Gamma_{y^k}\epsilon' = i\epsilon'$ になる。よって、 $\Gamma_{x^1}\Gamma_{y^1}\Gamma_{x^2}\Gamma_{y^2}\Gamma_{x^3}\Gamma_{y^3}\Gamma_{x^4}\Gamma_{y^4}\Gamma_{x^5}\Gamma_{y^5}\epsilon' = i\epsilon'$ とな

² 一般に Kähler 多様体のときは holonomy が $U(5)$ (§A.1.4) なので diagonal な $U(1)$ で $|\Omega\rangle$ が変換される可能性があるが、Ricci-flat Kähler 多様体のときは holonomy が $SU(5)$ (§A.1.4) なので $U(1)$ charge はゼロである。

³ ここでは ϵ を Majorana spinor, ϵ' を complex spinor として使い分けている。

り, $\Gamma_0\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3\Gamma_4\Gamma_5\Gamma_6\Gamma_7\Gamma_8\Gamma_9\Gamma_{10} = +1$ の convention をとっている (A.1.23) ので $\Gamma_0\epsilon' = -i\epsilon'$ が成り立ち $P_-(\sigma)\epsilon' = 0$ は

$$\left(1 - i\frac{1}{2\sqrt{-h}}\epsilon^{ij}\partial_i X^\mu\partial_j X^\nu\Gamma_{\mu\nu}\right)\epsilon' = 0 \quad (2.2.7)$$

となる. ϵ' , $\Gamma_{\bar{z}^i\bar{z}^j}\epsilon'$ は独立なのでそれぞれの係数をみてこの条件は

$$\frac{1}{2}\epsilon^{ij}\partial_i X^{\bar{z}^k}\partial_j X^{\bar{z}^l} = 0; \quad \frac{1}{2}i\epsilon^{ij}\partial_i X^{z^k}\partial_j X^{\bar{z}^k} = \sqrt{-h}. \quad (2.2.8)$$

となる. ここで, static gauge をとっていることと 11D 背景時空は $\mathcal{M}_{11} = \mathbb{R} \times \mathcal{M}_{10}$ であることに注意すれば, h_{ij} の運動方程式⁴ から $h_{00} = -1$, $h_{0i} = h_{i0} = 0$ になる. さらに残りの membrane の worldvolume の 2次元分は worldvolume の座標変換から少なくとも局所的には $h_{ij} = g(\sigma^1, \sigma^2)\delta_{ij}$ とすることができる. このときの worldvolume の 2次元分の complex structure を $u = \sigma^1 + i\sigma^2$ ととることにする. 結局, (2.2.8) と h_{ij} の運動方程式から

$$\begin{aligned} \partial_{[1}X^{\bar{z}^k}\partial_{2]}X^{\bar{z}^l} &= 0, \quad i\partial_{[1}X^{z^k}\partial_{2]}X^{\bar{z}^k} = 2h_{11}; \\ h_{11} = h_{22} &= \partial_1X^{z^k}\partial_1X^{\bar{z}^k} = \partial_2X^{z^k}\partial_2X^{\bar{z}^k}, \quad 0 = h_{12} = \frac{1}{2}\partial_{(1}X^{z^k}\partial_{2)}X^{\bar{z}^k}. \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

が条件式になる. まず, 第 2,3,4 式 から $\partial_1X^{z^k}\partial_1X^{\bar{z}^k} = i\partial_1X^{z^k}\partial_2X^{\bar{z}^k}$, したがって

$\partial_1X^{z^k}\partial_1X^{\bar{z}^k}\partial_2X^{\bar{z}^l} = i\partial_2X^{\bar{z}^l}\partial_1X^{z^k}\partial_2X^{\bar{z}^k}$. ここで 第 1 式 を使うと

$\partial_1X^{\bar{z}^l}\partial_1X^{z^k}\partial_2X^{\bar{z}^k} = i\partial_2X^{\bar{z}^l}\partial_1X^{z^k}\partial_2X^{\bar{z}^k}$. 第 2 式より $\text{Im}(\partial_1X^{z^k}\partial_2X^{\bar{z}^k}) \neq 0$ ⁵ とすると $\partial_1X^{z^k}\partial_2X^{\bar{z}^k}$ で割ることができて,

$$(\partial_1 - i\partial_2)X^{\bar{z}^k} = 0 \quad \text{i.e.,} \quad \partial_u X^{\bar{z}^k} = 0. \quad (2.2.10)$$

逆にこのとき (2.2.9) をみたら.

つまり $X^{\bar{z}^k}$ は anti-holomorphic, したがって X^{z^k} は holomorphic: $X^{z^k} = X^{z^k}(u)$ でなければならない. 逆に X^{z^k} は \mathcal{M}_{10} の complex structure $\{z^k\}$ に対し holomorphic: $X^{z^k} = X^{z^k}(u)$ ならば, それは covariantly constant spinor: ϵ' の超対称性を保つ configuration になっている. また, もうひとつの covariantly constant spinor: $\bar{\epsilon}'$ を保つ configuration は同様にして $\Gamma_0\bar{\epsilon}' = +i\bar{\epsilon}'$ より, anti-holomorphic: $X^{z^k} = X^{z^k}(\bar{u})$ である. $\Gamma_0\epsilon' = -i\epsilon'$ なら holomorphic の方, $\Gamma_0\bar{\epsilon}' = +i\bar{\epsilon}'$ なら anti-holomorphic の方, というのは 超対称性を保つ membrane configuration が背景時空の向きと関連していることをあらわしている.⁶

⁴ (2.2.1) の第 1 式のこと.

⁵ これは $h \neq 0$ つまり membrane がつぶれていないという条件.

⁶ (§2.2.2) では holomorphic の方を ϵ' , anti-holomorphic の方を $\bar{\epsilon}'$ と表記する.

2.2.2 unbroken SUSY の数

次に、いくつかの例で破れずに残る SUSY の数を調べよう。

$\{z^k\}$ ($k = 1, \dots, 5$) に対し $\epsilon' = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_5)$ を

$$\begin{aligned}\Gamma_{z^k}\epsilon' &= 0, \quad \epsilon_k = +; \\ \Gamma_{\bar{z}^k}\epsilon' &= 0, \quad \epsilon_k = -\end{aligned}\tag{2.2.11}$$

をみたく複素 spinor であるとする。このとき $\epsilon' = (+, +, +, +, +)$ は $(z^1, z^2, z^3, z^4, z^5)$ という complex structure に対する ‘Fock vacuum’. $\epsilon' = (+, -, -, +, +)$ は $(z^1, \bar{z}^2, \bar{z}^3, z^4, z^5)$ という complex structure に対する ‘Fock vacuum’, etc. また membrane configuration は $X^z(u) = \text{const.}$ のときのみ z と \bar{z} の両方に対して holomorphic であることに注意しよう。また、 $\epsilon = \frac{1}{2}(\epsilon' - \Gamma_0 C \epsilon'^*)$ とおくと ϵ は Majorana spinor になるが、 $P_\pm(\Gamma_0 C) = (\Gamma_0 C)P_\pm^*$ が成り立つので $P_-(\sigma)\epsilon' = 0$ を満たせば $P_-(\sigma)\epsilon = P_-\frac{1}{2}(\epsilon' - \Gamma_0 C \epsilon'^*) = \frac{1}{2}(P_-\epsilon' - \Gamma_0 C(P_-\epsilon')^*) = 0$ となる。したがって Majorana 条件 (A.1.29) をさらに課することができる。

(1) flat background $\mathcal{M}_{10} = \mathbb{R}^{10}$ の場合.

$z^1 = x^1 + ix^2, z^2 = x^3 + ix^4, z^3 = x^5 + ix^6, z^4 = x^7 + ix^8, z^5 = x^9 + ix^{10}$ ととれて、covariantly constant spinor は $\epsilon' = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_5)$, $\epsilon_k = \pm$ ($k = 1, \dots, 5$) つまり、 $2^5 = 32$ 個ある。11D N=1 SUGRA を考えているので Majorana 条件をつけて実 32 個の SUSY がある。

(1.1) $X^{z^1}, X^{z^2}, X^{z^3}, X^{z^4}: \text{const.}$ $X^{z^5} = X^{z^5}(u)$ ($X^{z^5} = X^{z^5}(\bar{u})$) の membrane configuration の場合.

残る SUSY は $\epsilon' = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4, +)$, ($\bar{\epsilon}' = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4, -)$), $\epsilon_k = \pm$ ($k = 1, 2, 3, 4$), $\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 \epsilon_4 = +$ の方向。最後の拘束条件は $\Gamma_0 \epsilon' = -i \bar{\epsilon}'$ ($\Gamma_0 \bar{\epsilon}' = +i \epsilon'$) からくる。holomorphic と anti-holomorphic あわせ、さらに Majorana 条件をつけて実 $2^{4-1} \cdot 2 = 16$ 個。つまり、 $\frac{1}{2}$ SUSY がのこる。このとき $\Gamma_{z^5} \epsilon' = \frac{1}{2}(\Gamma_9 \epsilon' + i \Gamma_{10} \epsilon') = 0$, ($\Gamma_{z^5} \bar{\epsilon}' = \frac{1}{2}(\Gamma_9 \bar{\epsilon}' - i \Gamma_{10} \bar{\epsilon}') = 0$), $\Gamma_0 \epsilon' = -i \bar{\epsilon}'$, $\Gamma_0 \bar{\epsilon}' = +i \epsilon'$ なので、Majorana spinor に projection して ($\epsilon = \frac{1}{2}(\epsilon' - \Gamma_0 C \epsilon'^*)$) $\Gamma_0 \Gamma_9 \Gamma_{10} \epsilon = \epsilon$ を満たす ϵ の方向が SUSY を残す Killing spinor.

(1.2) $X^{z^1}, X^{z^2}, X^{z^3}: \text{const.}$ $X^{z^4} = X^{z^4}(u)$, $X^{z^5} = X^{z^5}(u)$, ($X^{z^4} = X^{z^4}(\bar{u})$, $X^{z^5} = X^{z^5}(\bar{u})$) の membrane configuration の場合.

残る SUSY は $\epsilon' = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, +, +)$, ($\bar{\epsilon}' = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, -, -)$), $\epsilon_k = \pm$ ($k = 1, 2, 3$), $\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 = +(-)$ の方向。上と同様に実 $2^{3-1} \cdot 2 = 8$ 個。つまり、 $\frac{1}{4}$ SUSY がのこる。このとき $\Gamma_0 \Gamma_7 \Gamma_8 \epsilon = \epsilon$, $\Gamma_0 \Gamma_9 \Gamma_{10} \epsilon = \epsilon$ を満たす ϵ の方向が SUSY を残す Killing spinor.

(1.3) X^{z^1}, X^{z^2} : const. $X^{z^3} = X^{z^3}(u), X^{z^4} = X^{z^4}(u), X^{z^5} = X^{z^5}(u), (X^{z^3} = X^{z^3}(\bar{u}), X^{z^4} = X^{z^4}(\bar{u}), X^{z^5} = X^{z^5}(\bar{u}))$ の membrane configuration の場合.

残る SUSY は $\epsilon' = (\epsilon_1, \epsilon_2, +, +, +), (\bar{\epsilon}' = (\epsilon_1, \epsilon_2, -, -, -)), \epsilon_k = \pm (k = 1, 2), \epsilon_1 \epsilon_2 = +$ の方向で, 実 $2^{2-1} \cdot 2 = 4$ 個. つまり, $\frac{1}{8}$ SUSY がのこる. このとき $\Gamma_0 \Gamma_5 \Gamma_6 \epsilon = \epsilon, \Gamma_0 \Gamma_7 \Gamma_8 \epsilon = \epsilon, \Gamma_0 \Gamma_9 \Gamma_{10} \epsilon = \epsilon$ を満たす ϵ の方向が SUSY を残す Killing spinor.

(1.4) X^{z^1} : const. $X^{z^2} = X^{z^2}(u), X^{z^3} = X^{z^3}(u), X^{z^4} = X^{z^4}(u), X^{z^5} = X^{z^5}(u), (X^{z^2} = X^{z^2}(\bar{u}), X^{z^3} = X^{z^3}(\bar{u}), X^{z^4} = X^{z^4}(\bar{u}), X^{z^5} = X^{z^5}(\bar{u}))$ の membrane configuration の場合.

残る SUSY は $\epsilon' = (\epsilon_1, +, +, +, +), (\bar{\epsilon}' = (\epsilon_1, -, -, -, -)), \epsilon_1 = +(-)$ の方向で, 実 $2^{1-1} \cdot 2 = 2$ 個. つまり, $\frac{1}{16}$ SUSY がのこる. このとき $\Gamma_0 \Gamma_3 \Gamma_4 \epsilon = \epsilon, \Gamma_0 \Gamma_5 \Gamma_6 \epsilon = \epsilon, \Gamma_0 \Gamma_7 \Gamma_8 \epsilon = \epsilon, \Gamma_0 \Gamma_9 \Gamma_{10} \epsilon = \epsilon$ を満たす ϵ の方向が SUSY を残す Killing spinor.

(1.5) $X^{z^1} = X^{z^1}(u), X^{z^2} = X^{z^2}(u), X^{z^3} = X^{z^3}(u), X^{z^4} = X^{z^4}(u), X^{z^5} = X^{z^5}(u), (X^{z^1} = X^{z^1}(\bar{u}), X^{z^2} = X^{z^2}(\bar{u}), X^{z^3} = X^{z^3}(\bar{u}), X^{z^4} = X^{z^4}(\bar{u}), X^{z^5} = X^{z^5}(\bar{u}))$ の membrane configuration の場合.

残る SUSY は $\epsilon' = (+, +, +, +, +), (\bar{\epsilon}' = (-, -, -, -, -))$ の方向で, 実 2 個. つまり, $\frac{1}{16}$ SUSY がのこる. このとき 上と同様に $\Gamma_0 \Gamma_1 \Gamma_2 \epsilon = \epsilon, \Gamma_0 \Gamma_3 \Gamma_4 \epsilon = \epsilon, \Gamma_0 \Gamma_5 \Gamma_6 \epsilon = \epsilon, \Gamma_0 \Gamma_7 \Gamma_8 \epsilon = \epsilon, \Gamma_0 \Gamma_9 \Gamma_{10} \epsilon = \epsilon$ を満たす ϵ の方向が SUSY を残す Killing spinor.

特に (1.4) と (1.5) の場合の残る SUSY が同じであることに注意しよう. 実際, $\Gamma_0 \Gamma_3 \Gamma_4 \epsilon = \epsilon, \Gamma_0 \Gamma_5 \Gamma_6 \epsilon = \epsilon, \Gamma_0 \Gamma_7 \Gamma_8 \epsilon = \epsilon, \Gamma_0 \Gamma_9 \Gamma_{10} \epsilon = \epsilon$ を満たせば $\Gamma_0 \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 \Gamma_4 \Gamma_5 \Gamma_6 \Gamma_7 \Gamma_8 \Gamma_9 \Gamma_{10} = 1$ より $\Gamma_0 \Gamma_1 \Gamma_2 \epsilon = \epsilon$ も満たしている.

(2) $\mathcal{M}_{10} = \mathbb{R}^6 \times \text{K3}$ (hyperkähler) の場合.

\mathbb{R}^6 の座標から $z^1 = x^1 + ix^2, z^2 = x^3 + ix^4, z^3 = x^5 + ix^6$, と複素座標を定め, K3 (hyperkähler) の複素座標を z^4, z^5 とする. covariantly constant spinor は $\epsilon' = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, +, +), (\bar{\epsilon}' = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, -, -)) \epsilon_k = \pm (k = 1, 2, 3)$ つまり, $2^3 \cdot 2 = 16$ 個ある. 11D N=1 SUGRA を考えているので Majorana 条件をつけて 実 16 個の SUSY がある.

(2.1) $X^{z^1}, X^{z^2}, X^{z^3}, X^{z^4}$: const. $X^{z^5} = X^{z^5}(u) (X^{z^5} = X^{z^5}(\bar{u}))$ の membrane configuration の場合.

残る SUSY は $\epsilon' = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, +, +), (\bar{\epsilon}' = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, -, -)), \epsilon_k = \pm (k = 1, 2, 3), \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 = +(-)$ の方向. 実 $2^{3-1} \cdot 2 = 8$ 個. このとき $\Gamma_0 \Gamma_7 \Gamma_8 \epsilon = \epsilon, \Gamma_0 \Gamma_9 \Gamma_{10} \epsilon = \epsilon$ を満たす ϵ の方向が SUSY を残す Killing spinor.

(2.2) $X^{z^1}, X^{z^2}, X^{z^3}$: const. $X^{z^4} = X^{z^4}(u), X^{z^5} = X^{z^5}(u), (X^{z^4} = X^{z^4}(\bar{u}), X^{z^5} = X^{z^5}(\bar{u}))$ の membrane configuration の場合.

残る SUSY は $\epsilon' = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, +, +)$, ($\bar{\epsilon}' = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, -, -)$), $\epsilon_k = \pm$ ($k = 1, 2, 3$), $\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 = +(-)$ の方向 . 実 $2^{3-1} \cdot 2 = 8$ 個 . このとき $\Gamma_0 \Gamma_7 \Gamma_8 \epsilon = \epsilon$, $\Gamma_0 \Gamma_9 \Gamma_{10} \epsilon = \epsilon$ を満たす ϵ の方向が SUSY を残す Killing spinor.

以下, flat background の場合と同様. (2.1) と (2.2) の場合で残る SUSY が同じになっていることに注意しよう. これは K3 (hyperkähler) により, もともと $\frac{1}{2}$ SUSY になっているため, (2.1) は (2.2) の特別な場合とみなせるからである.

(3) $\mathcal{M}_{10} = \mathbb{R}^4 \times \text{CY}_3$ の場合.

\mathbb{R}^6 の座標から $z^1 = x^1 + ix^2$, $z^2 = x^3 + ix^4$, と複素座標を定め, K3 の複素座標を z^3, z^4, z^5 とする. covariantly constant spinor は $\epsilon' = (\epsilon_1, \epsilon_2, +, +, +)$, ($\bar{\epsilon}' = (\epsilon_1, \epsilon_2, -, -, -)$) $\epsilon_k = \pm$ ($k = 1, 2$) つまり, $2^2 \cdot 2 = 8$ 個ある. 11D N=1 SUGRA を考えているので Majorana 条件をつけて 実 8 個 の SUSY がある.

(3.1) $X^{z^1}, X^{z^2}, X^{z^3}, X^{z^4}$: const. $X^{z^5} = X^{z^5}(u)$ ($X^{z^5} = X^{z^5}(\bar{u})$) の membrane configuration の場合.

(3.2) $X^{z^1}, X^{z^2}, X^{z^3}$: const. $X^{z^4} = X^{z^4}(u)$, $X^{z^5} = X^{z^5}(u)$, ($X^{z^4} = X^{z^4}(\bar{u})$, $X^{z^5} = X^{z^5}(\bar{u})$) の membrane configuration の場合.

(3.3) X^{z^1}, X^{z^2} : const. $X^{z^3} = X^{z^3}(u)$, $X^{z^4} = X^{z^4}(u)$, $X^{z^5} = X^{z^5}(u)$, ($X^{z^3} = X^{z^3}(\bar{u})$, $X^{z^4} = X^{z^4}(\bar{u})$, $X^{z^5} = X^{z^5}(\bar{u})$) の membrane configuration の場合.

ともに残る SUSY は $\epsilon' = (\epsilon_1, \epsilon_2, +, +, +)$, ($\bar{\epsilon}' = (\epsilon_1, \epsilon_2, -, -, -)$), $\epsilon_k = \pm$ ($k = 1, 2$), $\epsilon_1 \epsilon_2 = +$ の方向 で, 実 $2^{2-1} \cdot 2 = 4$ 個 . このとき $\Gamma_0 \Gamma_5 \Gamma_6 \epsilon = \epsilon$, $\Gamma_0 \Gamma_7 \Gamma_8 \epsilon = \epsilon$, $\Gamma_0 \Gamma_9 \Gamma_{10} \epsilon = \epsilon$ を満たす ϵ の方向が SUSY を残す Killing spinor. これは CY_3 により, もともと $\frac{1}{4}$ SUSY になっているため, (3.1),(3.2) は (3.3) の特別な場合とみなせるからである.

以下, flat background の場合と同様.

第3章 M理論からみた type IIB 理論の 7-brane と (p, q) -string

3.1 7-brane 解

ここでは SUSY を半分残す 7-brane 解を構成する [18].

3.1.1 7-brane 解の構成

type IIB SUGRA で (Einstein) metric $g_{\mu\nu}$, dilaton φ , axion χ だけを考えよう. つまり 2-form 場, (self-dual) 4-form 場, fermion がない場合を考える. このとき type IIB SUGRA の action (A.2.15) のうち:

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^{10}x \sqrt{-g} \left(R - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial_\mu \lambda \partial_\nu \bar{\lambda}}{\lambda^2} \right), \quad \lambda = \chi + ie^{-\varphi} = \lambda_1 + i\lambda_2 \quad (3.1.1)$$

で記述される.

この action から求まる運動方程式は:

$$\begin{aligned} -\partial_\nu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\mu \lambda) + 2\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \frac{\partial_\mu \lambda \partial_\nu \lambda}{\lambda - \bar{\lambda}} &= 0; \\ R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \frac{\partial_\mu \lambda \partial_\nu \bar{\lambda} + \partial_\nu \lambda \partial_\mu \bar{\lambda}}{(\lambda - \bar{\lambda})^2} - g_{\mu\nu} \frac{\partial_\sigma \lambda \partial^\sigma \bar{\lambda}}{(\lambda - \bar{\lambda})^2} &= 0. \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

次にこの運動方程式の 7-brane 解, つまり 1+7 次元分ひろがった解を求めるために次のような ansatz を置く:

$$\begin{aligned} ds_{\text{IIB(E)}}^2 &= e^{-\frac{1}{2}\varphi} ds_{\text{IIB(str)}}^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + \dots + (dx^7)^2 + e^\Phi dzd\bar{z}; \\ \lambda &= \lambda(z, \bar{z}); \quad \Phi = \Phi(z, \bar{z}), \quad z = x^8 + ix^9. \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

ここで 7-brane は x^0, \dots, x^7 方向にひろがっているとした.

この ansatz のもとで 運動方程式 は:

$$\partial \bar{\partial} \lambda - 2 \frac{\partial \lambda \bar{\partial} \lambda}{\lambda - \bar{\lambda}} = 0;$$

$$\begin{aligned}
-\partial\bar{\partial}\Phi + \frac{\partial\lambda\bar{\partial}\bar{\lambda} + \bar{\partial}\lambda\partial\bar{\lambda}}{(\lambda - \bar{\lambda})^2} &= 0; \\
\partial\lambda\bar{\partial}\bar{\lambda} &= 0.
\end{aligned}
\tag{3.1.4}$$

となる.

$\bar{\partial}\lambda = 0$ i.e., $\lambda = \lambda(z)$: holomorphic とすると 第 1,3 式の解になっている. このとき 第 2 式は

$$\partial\bar{\partial}\Phi = \frac{\partial\lambda\bar{\partial}\bar{\lambda}}{(\lambda - \bar{\lambda})^2} = \partial\bar{\partial}\log\lambda_2.
\tag{3.1.5}$$

となるので Φ は次のように求まる.

$$\Phi = \log\lambda_2 + F(z) + \bar{F}(\bar{z}) = -\varphi + F + \bar{F}
\tag{3.1.6}$$

ここで $F(z)$ は ある holomorphic function (あとでこの形を決める (§3.2.3)).

まとめると type IIB 理論の 7-brane 解は:

$$\begin{aligned}
ds_{\text{IIB(str)}}^2 &= e^{\frac{1}{2}\varphi}(-(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + \dots + (dx^7)^2) + e^{-\frac{1}{2}\varphi + F + \bar{F}} dzd\bar{z}; \\
\lambda &= \lambda(z) (= \chi + ie^{-\varphi} = \lambda_1 + i\lambda_2)
\end{aligned}
\tag{3.1.7}$$

となる.

3.1.2 $\frac{1}{2}$ SUSY

このとき SUSY が半分のこることを示そう [18].

type IIB SUGRA の SUSY 変換は metric と λ 以外がゼロのとき Einstein metric で

$$\begin{aligned}
\delta_\varepsilon\tilde{\lambda} &= i\Gamma^\mu\varepsilon^*P_\mu \\
\delta_\varepsilon\psi_\mu &= D_\mu\varepsilon
\end{aligned}
\tag{3.1.8}$$

のようになる [34]. ここで $\tilde{\lambda}$ は dilatino, ψ_μ は gravitino, ε は 10D Weyl spinor (したがって complex spinor). そして,

$$\begin{aligned}
P_\mu &= \frac{1}{\lambda - \lambda^*} \frac{\lambda^* - i}{\lambda + i} \partial_\mu\lambda \\
D_\mu\varepsilon &= (\partial_\mu + \frac{1}{4}\hat{\omega}_\mu^{ab}\Gamma_{ab} - \frac{1}{2}iQ_\mu)\varepsilon \\
Q_\mu &= \frac{1}{2} \frac{-i}{\lambda - \lambda^*} \left(\frac{\lambda - i}{\lambda^* - i} \partial_\mu\lambda^* + \frac{\lambda^* + i}{\lambda + i} \partial_\mu\lambda \right)
\end{aligned}
\tag{3.1.9}$$

である. 今の場合のように gravitino がゼロのとき $\hat{\omega}_\mu^{ab} = \omega_\mu^{ab}$ つまり 普通の spin connection (A.1.14) になる.

(3.1.7) から λ が holomorphic であることを使うと

$$\delta_\varepsilon \tilde{\lambda} = i(\Gamma^8 + i\Gamma^9)\varepsilon^* \partial \lambda \quad (3.1.10)$$

よって $(\Gamma^8 - i\Gamma^9)\varepsilon = 0$ を満たせば $\delta_\varepsilon \tilde{\lambda} = 0$ となる。(ただしここで Γ 行列は実行列にとっている。そして、ここでの Majorana 条件は $\varepsilon = \varepsilon^*$ である。実際、(A.1.26) のようにとればそうなっている。)

(3.1.3) から Einstein metric での vielbein は $e_\mu^a = \begin{pmatrix} 1_8 & 0 \\ 0 & e^{\frac{1}{2}\Phi} \cdot 1_2 \end{pmatrix}$ ととることができ、さらに $\varepsilon = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$ ($\varepsilon_1, \varepsilon_2$: real(Majorana) spinor) とおくと $\delta_\varepsilon \tilde{\lambda} = 0$ の条件は (λ が定数でないとき)

$$\Gamma_8 \Gamma_9 \varepsilon_1 = \varepsilon_2, \quad \Gamma_8 \Gamma_9 \varepsilon_2 = -\varepsilon_1 \quad (3.1.11)$$

となる。

また spin connection ω_μ^{ab} のゼロでない成分は

$$\omega_8^{ab} = \frac{1}{2} \delta_8^{[a} \delta_9^{b]} \partial_9 \Phi, \quad \omega_9^{ab} = -\frac{1}{2} \delta_8^{[a} \delta_9^{b]} \partial_8 \Phi \quad (3.1.12)$$

となり (3.1.6) より λ の holomorphy を使うと

$$\omega_\mu^{ab} = \frac{i}{2} \delta_8^{[a} \delta_9^{b]} \left(\frac{1}{\lambda - \lambda^*} \partial_\mu (\lambda + \lambda^*) + \partial_\mu (F - \bar{F}) \right) \quad (3.1.13)$$

となる。さらに (3.1.11) を満たす ε に対して

$$\begin{aligned} D_\mu \varepsilon &= (\partial_\mu + iA_\mu) \varepsilon, \\ A_\mu &= \frac{1}{4i} \left(\frac{1}{\lambda - \lambda^*} \partial_\mu (\lambda + \lambda^*) + \partial_\mu (F - \bar{F}) - \frac{1}{\lambda - \lambda^*} \left(\frac{\lambda - i}{\lambda^* - i} \partial_\mu \lambda^* + \frac{\lambda^* + i}{\lambda + i} \partial_\mu \lambda \right) \right) \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

が成り立つので¹

$$\begin{aligned} \varepsilon &= f(z, \bar{z}) \varepsilon_0, \quad \varepsilon_0 = \varepsilon_{01} + i\varepsilon_{02}, \\ \Gamma_8 \Gamma_9 \varepsilon_{01} &= \varepsilon_{02}, \quad \Gamma_8 \Gamma_9 \varepsilon_{02} = -\varepsilon_{01}, \\ f(z, \bar{z}) &= \exp(-i \int A_\mu dx^\mu) \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

を満たす ε に対して、 $\delta_\varepsilon \tilde{\lambda} = 0$, $\delta_\varepsilon \psi_\mu = 0$ となり SUSY を保つ。

このとき 残る SUSY の数は 実 16 個、つまり $\frac{1}{2}$ SUSY になっている。

¹ weak coupling limit: $\lambda \rightarrow i\infty$ では A_μ のなかの λ を含む項は打ち消しあう。

3.2 7-brane の M理論 による記述

(§3.1) で構成した 7-brane 解 を M理論 でみよう [1].

3.2.1 type IIB 理論の 7-brane から M理論での ‘7-brane’ へ

この type IIB 理論の 7-brane 解 を x^7 方向に S^1 compact 化する (“半径” R_B (dimensionless): $x^7 = l_s R_B \underline{x}^7, \underline{x}^7 \sim \underline{x}^7 + 2\pi$).

$$\begin{aligned} ds_{\text{IIB(str)}}^2 &= e^{\frac{1}{2}\varphi} (-(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + \dots + (dx^6)^2 + l_s^2 R_B^2 (d\underline{x}^7)^2) + e^{-\frac{1}{2}\varphi + F + \bar{F}} dz d\bar{z}, \\ \lambda &= \lambda(z) (= \chi + ie^{-\varphi} = \lambda_1 + i\lambda_2). \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

x^7 方向に T-dual 変換し (A.2.31), type IIA 6-brane にすると:

$$\begin{aligned} ds_{\text{IIA(str)}}^2 &= e^{\frac{1}{2}\varphi} (-(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + \dots + (dx^6)^2) + e^{-\frac{1}{2}\varphi} l_s^2 R_B^{-2} (d\underline{x}^7)^2 + e^{-\frac{1}{2}\varphi + F + \bar{F}} dz d\bar{z}, \\ \phi &= \frac{3}{4}\varphi - \log R_B, \\ C_1 &= \chi d\underline{x}^7. \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

さらにこれを 11D SUGRA に変換すると (A.2.2) (11D 方向を x^{10} とする. $x^{10} \sim x^{10} + 2\pi$):

$$\begin{aligned} ds_{\text{11D}}^2 &= R_B^{\frac{2}{3}} (-(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + \dots + (dx^6)^2 + ds_4^2), \\ ds_4^2 &= e^{-\varphi + F + \bar{F}} dz d\bar{z} + e^\varphi l_p^2 R_B^{-2} |dx^{10} + \lambda d\underline{x}^7|^2. \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

これは M理論を T^2 compact 化したことになっている (このとき torus の面積は: $A_M = (2\pi)^2 l_p^2 R_B^{-\frac{4}{3}}$). $z = x^8 + ix^9, v = x^{10} + \lambda \underline{x}^7$ という complex structure を選ぶと,

$$ds_4^2 = e^{-\varphi + F + \bar{F}} dz d\bar{z} + e^\varphi l_p^2 R_B^{-2} |dv - \frac{v - \bar{v}}{\lambda - \bar{\lambda}} \partial \lambda dz|^2. \quad (3.2.4)$$

3.2.2 別の complex structure

以下, $l_s = l_p = 1$ とする.

ds_4^2 の Kähler form は:

$$K = \frac{i}{2} \left(e^{-\varphi + F + \bar{F}} dz \wedge d\bar{z} + e^\varphi R_B^{-2} (dv - \frac{v - \bar{v}}{\lambda - \bar{\lambda}} \partial \lambda dz) \wedge \overline{(dv - \frac{v - \bar{v}}{\lambda - \bar{\lambda}} \partial \lambda dz)} \right) \quad (3.2.5)$$

であり $dK = 0$ を満たすので ds_4^2 は Kähler metric になっている. また (A.1.35) より $R_{\bar{j}k} = -\partial_{\bar{j}} \partial_k \log \det g$. を計算すると ゼロ になっているのでこれは Ricci-flat Kähler になっ

ている。したがって, $SU(2)$ holonomy をもつ。これは $\frac{1}{2}$ SUSY をたもつことから期待されることである。

一方, 複素 2 次元 Ricci-flat Kähler 多様体にはいたるところでゼロでない holomorphic 2-form が存在する (§A.1.4)。今の場合それは

$$\Omega = R_B^{-1} e^{F+i\theta} dz \wedge dv \quad (3.2.6)$$

である [17].²

ここで, $2K \wedge K = \Omega \wedge \bar{\Omega} = \text{volume form}$ となるように規格化した。また θ はある実数定数である。つまり Ω には phase factor の不定性があることに注意しよう。

実 4 次元 (複素 2 次元) では Ricci-flat Kähler 多様体は hyperkähler 多様体なので別の complex structure を選ぶこともできる (§A.1.4)。上で得た (v, z) による complex structure を用いて holomorphic に埋め込むという方法では (p, q) -string をあらかず M2-brane を記述できない。それは後でみるようにこの M2-brane を記述するためには x^{10} と \underline{x}^7 が別の複素座標で表されていないからである。そこで,

$$X = f(z, \bar{z}) + iR_B^{-1} x^{10}, \quad Y = g(z, \bar{z}) + iR_B^{-1} \underline{x}^7 \quad (3.2.7)$$

というかたちの座標変換を求めよう。さらにこれがよい複素座標であるためにはこの複素座標に関して Ricci-flat Kähler になっていなければならない。したがって (3.2.7) のかたちで $K' = \text{Re}(\Omega)$ を Kähler form とする³ という条件を課してもとめると,

$$dX = \text{Im}(\lambda e^{F+i\theta} dz) + iR_B^{-1} dx^{10}, \quad dY = -\text{Im}(e^{F+i\theta} dz) + iR_B^{-1} d\underline{x}^7. \quad (3.2.8)$$

となり, このとき metric は:

$$ds_4^2 = \lambda_2^{-1} (|dX|^2 + |\lambda|^2 |dY|^2 + \lambda_1 (dX d\bar{Y} + dY d\bar{X})). \quad (3.2.9)$$

と表される。そしてこの metric は Kähler, Ricci-flat であることが確かめられるので hyperkähler metric になっている。つまり (3.2.8) の座標変換でうまく別の complex structure を選ぶことができた。

x^{10}, \underline{x}^7 が 2π 周期をもつことを考慮して, さらに holomorphic 変換: $s = \exp R_B X, t = \exp R_B Y$ をすると,

$$ds_4^2 = \frac{1}{R_B^2 \lambda_2} \left(\frac{|ds|^2}{|s|^2} + |\lambda|^2 \frac{|dt|^2}{|t|^2} + \lambda_1 \left(\frac{ds d\bar{t}}{s\bar{t}} + \frac{dt d\bar{s}}{t\bar{s}} \right) \right) \quad (3.2.10)$$

となる。⁴

² 後でみるように e^F の具体的なかたち (3.2.16) をみると e^F と $dz \wedge dv$ の $SL(2, \mathbb{Z})$ 変換性がほとんど打ち消しあって up to phase factor で Ω が不変であることがわかる。

³ Ω は holomorphic 2-form だったので $d\Omega = 0$ である。よって $dK' = 0$ である。

⁴ この s, t は flat background のときはよい座標になっているが, 後でみるように $SL(2, \mathbb{Z})$ 変換を考慮したときこのままでは正確な書き方ではない。 (§3.3.2) を参照のこと。

3.2.3 7-brane 解の具体的な形

type IIB 7-brane 解の $\lambda(z)$ のかたちは, λ が $SL(2, \mathbb{Z})$ 変換で同一視される⁵ ことを考えて次のようにきめる [17],[18].

$$j(\lambda(z)) = \frac{P(z)}{Q(z)} \quad (3.2.11)$$

ここで $P(z), Q(z)$ は互いに素な z の多項式. $j(\lambda(z))$ は (§A.1.5) で定義されている.

このとき一般に $\max(\deg(P(z)), \deg(Q(z))) = N$ 個 D7-brane がある. それをみるために D7-brane⁶ は axion χ の magnetic charge Q_7 をもつことに注意しよう. それは

$$Q_7 = \int_{\text{D7-brane を囲む path}} d\chi \quad (3.2.12)$$

で求められる. 今の場合 χ は z のみによるので (3.2.11) で決まる $\lambda(z)$ の特異点が D7-brane でありその z 座標が D7-brane の位置を表すと考えられる. (3.2.11) では up to $SL(2, \mathbb{Z})$ ⁷ で $\lambda(z)$ の z 依存性が決まっていた. (§A.1.5) の $j(\tau)$ の性質をみると \log 特異性をもつところが D7-brane だと解釈できる.⁸ したがって (§A.1.5) より, (3.2.11) の右辺 $\rightarrow \infty$ のところが D7-brane である. $z \sim$ D7-brane の位置 での漸近形は, $j(\lambda(z)) \sim 2^3 e^{-2\pi i \lambda(z)}$ なので Q_7 は

$$Q_7 = \oint_{\text{D7-brane を囲む path}} d\lambda = \oint_{j \sim \infty} \frac{-1}{2\pi i} d \log j(\lambda(z)) = \oint_{P/Q \sim \infty} \frac{-1}{2\pi i} d \log \frac{P(z)}{Q(z)} \quad (3.2.13)$$

と表せる.

1. $\deg(P(z)) \leq \deg(Q(z))$ のとき

$j \rightarrow \infty$ となるのは $Q(z)$ の零点. したがって (3.2.13) より z が有限のところに $\deg(Q(z))$ 個の D7-brane がある. また $z \rightarrow \infty$ で $j \rightarrow$ 定数. つまり無限遠で λ は定数となる.

2. $\deg(P(z)) > \deg(Q(z))$ のとき

z が有限のところで $j \rightarrow \infty$ となるのは $Q(z)$ の零点. (3.2.13) より z が有限のところに $\deg(Q(z))$ 個の D7-brane がある. また $z \rightarrow \infty$ で $j \rightarrow \infty$, よって (3.2.13) より無限遠に $\deg(P(z)) - \deg(Q(z))$ 個の D7-brane がある.

⁵ type IIB string 理論には $SL(2, \mathbb{Z})$ symmetry があると考えられている. その低エネルギー有効理論である type IIB SUGRA には実際 $SL(2, \mathbb{R})$ symmetry があつた (§A.2.3). charge の量子化を考えると $SL(2, \mathbb{Z})$ になる. F 理論を考えると $\lambda(z)$ は torus の moduli τ と同一視されるものである. そして, torus の moduli τ は $\tau \mapsto \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$. において $\tau' \sim \tau$ で同一視される (第 4 章). 今の場合の M 理論の描像では F 理論を $S^1(\times T^2)$ compact 化したものになっているのでこの $\lambda(z)$ は x^{10}, \underline{x}^7 方向にのびた torus の moduli と同一視される. 実際 M 理論の metric (3.2.3) をみればそうになっていた.

⁶ 7-brane はそれがつくる monodromy によって $[p, q]$ 7-brane と区別してよばれたりする. ここではそれら RR-charge Q_7 を持つものを総称して D7-brane とよんでいる.

⁷ より精確には (3.2.11) だけで決まるのは up to $PSL(2, \mathbb{Z})$ である.

⁸ $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3$ 特異性をもつところは 'orbifold' singularity である. これについては (§4.2) を参照のこと.

つまり, 一般に $\max(\deg(P(z)), \deg(Q(z))) = N$ 個 D7-brane がある.

以下では $\deg(P(z)) \leq \deg(Q(z))$ とする.⁹

$\{z_i\}, i = 1, \dots, N$ に 7-brane があるとき,

$$Q(z) = \prod_{i=1}^N (z - z_i). \quad (3.2.14)$$

とかけて, このとき $z \rightarrow z_i$ で $j(\lambda) \rightarrow \infty$ であり, $\text{Im}(\lambda) \rightarrow \infty$ となっている. 漸近形は, (3.2.13) より

$$\lambda(z) \sim \frac{1}{2\pi i} \log(z - z_i), \quad z \sim z_i. \quad (3.2.15)$$

この形から, metric (3.2.4) が $SL(2, \mathbb{Z})$ 不変で regular であるためには [17],

$$e^{F(z)} dz = \eta(\lambda)^2 \prod_{i=1}^N (z - z_i)^{-\frac{1}{12}} dz. \quad (3.2.16)$$

実際, $SL(2, \mathbb{Z})$ 変換 (§A.2.3):

$$\lambda \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \lambda := \frac{a\lambda + b}{c\lambda + d}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}). \quad (3.2.17)$$

のもとで (§A.1.5) より

$$\left| \eta\left(\frac{a\lambda + b}{c\lambda + d}\right) \right|^4 = |c\lambda + d|^2 |\eta(\lambda)|^4. \quad (3.2.18)$$

またこの $SL(2, \mathbb{Z})$ 変換のもとで

$$e^{-\varphi} (= \text{Im } \lambda) \mapsto \frac{1}{|c\lambda + d|^2} e^{-\varphi} \quad (3.2.19)$$

と変換されるので, metric (3.2.4) の第 1 項 $e^{-\varphi} |e^{F(z)} dz|^2$ は $SL(2, \mathbb{Z})$ 不変. このとき torus 上の座標 $v = x^{10} + \lambda \underline{x}^7$ も変換される:

$$(d\underline{x}^7, dx^{10}) \mapsto (d\underline{x}^7, dx^{10}) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \quad (3.2.20)$$

これから, metric (3.2.4) の第 2 項も $SL(2, \mathbb{Z})$ 不変であることがわかる. また, 7-brane のある場所 $\{z_i\}$ の近くでは (3.2.15), (A.1.5) より

$$\eta(\lambda(z))^2 \sim \text{const.} (z - z_i)^{\frac{1}{12}} \quad (3.2.21)$$

なので (3.2.16) のように $(z - z_i)^{-\frac{1}{12}}$ をかけておけば metric (3.2.4) は regular になる.

⁹ $\deg(P(z)) > \deg(Q(z))$ のときは z -plane に ∞ を付け加えてリーマン球とし $SL(2, \mathbb{C})$ 変換をして D7-brane をすべて有限のところにもってきておく.

ここでこの metric の $z \sim \infty$ での振る舞いを調べておこう [17]. $z \sim \infty$ では前に注意したように λ は定数になるので metric (3.2.4) の第 1 項のみに注目することにする. これは (3.1.3),(3.1.6) より 10 次元 type IIB 7-brane 解の transverse 方向 (x^8, x^9 方向) の Einstein metric になっている:

$$ds_{\text{trans}}^2 = e^{-\varphi} |\eta(\lambda(z)) \prod_{i=1}^N (z - z_i)^{-\frac{1}{12}} dz|^2. \quad (3.2.22)$$

$z \sim \infty$ では

$$ds_{\text{trans}}^2 \sim \text{const.} |z^{-\frac{N}{12}} dz|^2 = \text{const.}' |d\tilde{z}|^2 \quad (3.2.23)$$

ここで $\tilde{z} = z^{1-\frac{N}{12}}$ ($N < 0$) とおいた. つまり transverse 方向 (x^8, x^9 方向) は漸近的に flat で欠損角 $N\frac{2\pi}{12}$ を持つことがわかる. $N = 12$ の場合は $z \sim \infty$ で $\tilde{z} = \log z$ とおいて

$$ds_{\text{trans}}^2 \sim \text{const.} |z^{-1} dz|^2 = \text{const.}' |d\tilde{z}|^2 \quad (3.2.24)$$

となり漸近的にシリンダー的になる. $N < 12$ のときは $\tilde{z} = z^{1-\frac{N}{12}}$ で (3.2.23) となるが欠損角が 2π を越えてしまい ‘compact’ になるが実は compactなのは $N = 24$ だけが許される. $N = 24$ のときは $\tilde{z} = z^{-1}$ となり, x^{10}, x^7 方向もあわせると局所的に $S^2 \times T^2$ となる. これは K3 になっている.¹⁰ いずれにせよ ‘欠損角 δ ’ は 7-brane の数 N により $\delta = N\frac{2\pi}{12}$ と表されることに注意しよう.¹¹

また (3.2.8) の座標変換は

$$\begin{aligned} dX &= \text{Im} \left(e^{i\theta} \lambda(z) \eta(\lambda(z))^2 \prod_{i=1}^N (z - z_i)^{-\frac{1}{12}} dz \right) + iR_B^{-1} dx^{10}, \\ dY &= -\text{Im} \left(e^{i\theta} \eta(\lambda(z))^2 \prod_{i=1}^N (z - z_i)^{-\frac{1}{12}} dz \right) + iR_B^{-1} dx^7 \end{aligned} \quad (3.2.25)$$

となる.

3.3 7-brane background での BPS (p, q)-string の M 理論による記述

(§3.2) の background で BPS (p, q)-string (M2-brane) を考えよう [1].

¹⁰ (§4.2) ではこの場合を考える.

¹¹ このとき (3.1.1),(3.1.3) より 単位 worldvolume 当たりの 7-brane(s) のエネルギー \mathcal{E} は $\mathcal{E} = \frac{1}{2\kappa^2} \frac{i}{2} \int dz d\bar{z} \frac{\partial \lambda \bar{\partial} \bar{\lambda}}{\lambda^2} = \frac{2}{\kappa^2} \delta$ と表される. N に比例するのはこの積分が z -plane が fundamental region 何枚でおおわれているかということに帰着するからである.

3.3.1 (p, q) -string と M2-brane

type IIB の (p, q) -string¹² は M理論 の 描像 では torus の (p, q) -cycle¹³ にまきついた M2-brane である [37].¹⁴ よってそれは

$$qdx^{10} - pdx^7 = 0 \quad (3.3.1)$$

であらわされる. ところでこれが BPS state つまり supersymmetric な configuration になるためには第 2 章でみたように M2-brane が holomorphic に埋め込まれていなければならない. それは今の場合 background の複素座標 X, Y (3.2.25) に対し X と Y の間に holomorphic に一つ関係をつけることによって実現できる. 今すでに X, Y の虚部に (3.3.1) という関係がついてしまっているので実部に対しても:

$$R_B \operatorname{Im} \left(e^{i\theta} h_{p,q}(z) dz \right) = 0, \quad h_{p,q}(z) = (p + q\lambda) \eta(\lambda(z))^2 \prod_{i=1}^N (z - z_i)^{-\frac{1}{12}} \quad (3.3.2)$$

という関係がついていなければならない. 複素座標 X, Y で書けば

$$R_B(qdX - pdY) = 0 \quad (3.3.3)$$

つまり 7-brane background での BPS (p, q) -string は M理論では (3.3.1) と (3.3.2), あるいは (3.3.3) によって記述される.¹⁵

(3.3.2) は type IIB 理論の描像で (3.2.22) に string tension の重みをかけた “metric” [19],[33],[32]:

$$ds_{p,q}^2 = (l_s^2 T_{(p,q)} ds_{\text{trans}})^2 = (2\pi)^{-2} |h_{p,q} dz|^2 \quad (3.3.4)$$

の geodesic を与えている.¹⁶ 実際, $d\tilde{z} = (2\pi)^{-1} h_{p,q}(z) dz$ とすると, $ds_{p,q}^2 = d\tilde{z} d\bar{\tilde{z}}$: flat なので, (3.3.2) は $\operatorname{Im}(e^{i\theta} d\tilde{z}) = 0$: 直線 i.e., geodesic となる. したがって (3.3.2) は type IIB 理論の描像と consistent になっている.

¹² (p, q) -string は NSNS 2-form charge = p , RR 2-form charge = q をもつ string である. これは F-string p 個, D-string q 個の bound state だと考えられている.

¹³ ここでいう (p, q) -cycle とは x^{10} に p だけ進んだとき x^7 に q だけ進むような torus にまきついた loop のことである.

¹⁴ これは (p, q) -string tension の公式: $T_{(p,q)} = (2\pi)^{-1} l_s^{-2} \sqrt{(p + q\chi)^2 + q^2 e^{-2\varphi}}$ (string metric で) と M2-brane を (p, q) -cycle に巻き付けてびんと伸ばしたとき (このとき M2-brane は最小面積 (BPS state) になる) の ‘string’ tension の形: $T_{M2(p,q)} = \sqrt{(p + q\lambda_1)^2 + q^2 \lambda_2^2} (2\pi l_p) T_{M2}$ が一致することからわかる.

¹⁵ ここで微分の形で書いたのはあとで議論するように (3.3.2) global には $SL(2, \mathbb{Z})$ 変換をうけるからである. また, R_B をわざわざつけておいたのはあとで type IIB の decompactification limit を議論するためである.

¹⁶ type IIB 理論の描像では (3.3.4) の geodesic として 7-brane background での BPS (p, q) -string が記述されていた [19],[33],[32].

Kähler form を (p, q) -cycle にまきついた M2-brane (3.3.3) 上に引き戻すと,

$$K'|_{p,q} = l_p^2 \frac{1}{\lambda_2} |p + q\lambda|^2 \frac{1}{p^2} \frac{i}{2} dX \wedge d\bar{X} = l_p^2 \frac{1}{\lambda_2} |p + q\lambda|^2 \frac{1}{q^2} \frac{i}{2} dY \wedge d\bar{Y} \quad (3.3.5)$$

ここで l_p を復活させた. $(2\pi)^{-2} l_p^{-3} \cdot \int K'|_{p,q}$ が (p, q) -cycle にまきついた M2-brane の energy をあたえる.¹⁷

$z = 0$ に D7-brane がある background で (p, q) -string が $z = 0$ をとおる場合を考えよう.
 $z \sim 0$ での漸近形は,

$$\lambda(z) \sim \frac{1}{2\pi i} \log z \quad (3.3.6)$$

より,

$$R_B \text{Im}(e^{i\theta} h_{p,q}(z) dz) \sim R_B \text{Im}\left(e^{i\theta} \left(p + \frac{q}{2\pi i} \log z\right) \prod_{z_i \neq 0} (-z_i)^{-\frac{1}{12}} dz\right) \quad (3.3.7)$$

なので, z -plane 上 $z = 0$ から $z \sim 0$ まで積分して,¹⁸

$$\text{Im}\left(e^{i\theta'} \left(\frac{q}{2\pi i} z \log z + \left(p - \frac{q}{2\pi i}\right) z\right)\right) = 0 \quad (3.3.8)$$

であらわされる.¹⁹ (3.3.5),(3.3.8) より $z = 0$ から $|z| = r$ までの (p, q) -cycle にまきついた M2-brane の energy を計算すると:

$$\begin{aligned} &\sim -(2\pi)^{-2} l_p^{-1} r \log r, \quad q \neq 0; \\ &\sim (2\pi)^{-1} l_p^{-1} r, \quad q = 0 \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

となる. 特に $q \neq 0$ のときのほうが $q = 0$ よりも $\sim -\log r \gg 1$ だけ energy cost が大きくなることに注意しよう. これは $q \neq 0$ のときのほうが D7-brane に ‘くっつきにくい’ ことを表している. type IIB 理論では D7-brane つまり $[1,0]$ 7-brane には F-string つまり $(1,0)$ -string はくっつくが (p, q) -string ($q \neq 0$) はくっつかない, としている. type IIB 理論では $[1,0]$ 7-brane は $(1,0)$ -string がくっつく ‘膜’ である. 今の M理論の描像では上の結果からは (p, q) -string ($q \neq 0$) は ‘くっつきにくい’ が有限 energy でくっつけるように思える. しかし今の M理論の描像では 7-brane は ‘膜’ というよりも 11 次元時空の曲がりである. そう思うと M2-brane は ‘7-brane’ 上にあっても端をもてない.²⁰ ところが $[1,0]$ 7-brane 上

¹⁷ M2-brane tension は $T_{M2} = (2\pi)^{-2} l_p^{-3}$ だった.

¹⁸ 今 D7-brane つまり $[1,0]$ 7-brane を考えているので $z = 0$ から積分した. つまり $z = 0$ を $[1,0]$ 7-brane とする $SL(2, \mathbb{Z})$ convention をとりそれを基準にして (p, q) -string をみている. これに関する事情については (§3.3.2) を参照のこと.

¹⁹ $q \neq 0$ と $q = 0$ では z -plane 上 $z = 0$ でほとんど直交する方向に M2-brane がのびていることに注意しよう.

²⁰ M5-brane 上では M2-brane は端をもつことができた. それは M5-brane worldvolume 上に (anti-self-dual) 2-form が存在できたからである [27].

で torus の moduli λ は $\rightarrow i\infty$ になっているつまり torus の x^{10} 方向はつぶれてしまっている. $(1, 0)$ -string を表す M2-brane はこのつぶれる方向の cycle にまきついているので $[1, 0]$ 7-brane 上で端をもたずに ‘くつつく’ ことができる. しかし (p, q) -string ($q \neq 0$) を表す M2-brane はつぶれない方向の cycle にまきついているので端をもたずに ‘くつつく’ ことができない. にもかかわらず, $[1, 0]$ 7-brane 上つまり $z = 0$ を通っているので, くつつかずに通り過ぎているという感じである.

3.3.2 $SL(2, \mathbb{Z})$ 変換性

j は τ の fundamental region から \mathbb{C} への 1 対 1 写像なので (3.2.11) によって決まる $\lambda(z)$ を z の連続関数にするためには $\max(\deg(P(z)), \deg(Q(z)))$ まい fundamental region ($\cong (\mathbb{C}$ の上半面)/ $SL(2, \mathbb{Z})$) をはりあわせなければならない. はりあわせたとき隣あった fundamental region は一般に \mathbb{C} の上半面でみて別の fundamental region である. したがって常に 1 つの fundamental region で考えようとすると $\lambda(z)$ は $SL(2, \mathbb{Z})$ 変換をうけることになる (図 3.1). さらに fundamental region には, $i\infty$ に \log 特異性, i に \mathbb{Z}_2 特異性, $e^{\frac{2\pi i}{3}}$ に \mathbb{Z}_3 特異性がある (§A.1.5). $i\infty$ の \log 特異性が 7-brane によるものである [18]. 結局, はりあわせたのち z -plane 上に $SL(2, \mathbb{Z})$ 変換を与える cut が入っていることになる.²¹

$SL(2, \mathbb{Z})$ を生成する

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.3.10)$$

に対し, T の cut を横切るとき e^F (3.2.16) は η と $(z - z_i)^{-\frac{1}{12}}$ の phase がうちけしあって不変. しかし, S の cut を横切るときには, e^F (3.2.16) は λ の変換以外に余分な phase factor $-i$ ($= e^{-\frac{\pi i}{2}}$) がかかる.

T に conjugate な monodromy:

$$M_{p,q} = g_{p,q} T g_{p,q}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 + pq & p^2 \\ -q^2 & 1 - pq \end{pmatrix}, \quad g_{p,q} = \begin{pmatrix} p & r \\ -q & -s \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}) \quad (3.3.11)$$

をもつ \log 特異性をもつ点が $[p, q]$ 7-brane である [33].²² ²³ したがって, fundamental

²¹ このように cut のある z -plane (背景時空) になるのは 7-brane があるためである. これは局所的なものとして扱えた Dp -brane ($p < 7$) のときとは異なる性質である. $D7$ -brane の場合は transverse 方向が 2 次元しかないということが効いてくるためである.

²² $M_{p,q} = M_{-p,-q}$ に注意しよう. また $\begin{pmatrix} p \\ -q \end{pmatrix}$ が $M_{p,q}$ の唯一の固有ベクトルでありその固有値は 1 である. これは, $\pm(p, q)$ -string が $[p, q]$ 7-brane にくつつくことができることに対応している.

²³ $[p, q]$ 7-brane のまわりをまわるだけなら変換 T をひきおこすだけであるが monodromy を考えるときに

region をはりあわせるときうまく $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3$ 特異性をなくすようにできれば (図 3.2), ²⁴ cut は T に conjugate な変換をひきおこすものだけにできる. この T に conjugate な変換 $M_{p,q}$ をひきおこす cut を横切ると e^F (3.2.16) の λ の変換以外の余分な phase factor は cancel して (3.2.25) は (3.2.20) と同じ線形な変換:

$$(dY, dX) \mapsto (dY, dX)M_{p,q}^{-1} \quad (3.3.12)$$

を受ける.

$\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3$ 特異性が残る場合, そのままでは $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3$ 特異性がつくる cut を横切るとき (3.2.25) は (3.2.20) と同じ線形な変換を受けない. つまり non-holomorphic な変換を受ける. ところが holomorphic 2-form Ω (3.2.6) を定義するとき θ の不定性があったので,

$$T : \theta \mapsto \theta' = \theta, \quad S : \theta \mapsto \theta' = \theta + \frac{\pi}{2} \quad (3.3.13)$$

のように変換させると (3.2.25) は $SL(2, \mathbb{Z})$ 変換のもとで

$$(dY, dX) \mapsto (dY', dX') = (dY, dX) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \quad (3.3.14)$$

のように線形な holomorphic 変換をうける.

つまり cut を横切るとき (3.3.13) の変換をしてやることにより, もとの (X, Y) 座標に対し up to holomorphic 変換 (3.3.14) で座標系を張ることができる. $(v, z) \mapsto (X, Y)$ の座標変換を (3.2.25) かつ (3.3.13) で定義すれば, complex structure もうまく定義できたことになる. そしてこの座標変換を定義するときには z -plane 上にある基点を定めてその基点から z -plane 上ある path にそって (3.2.25) を積分することにより (X, Y) が決まる. そして積分路が z -plane 上の cut を横切るときには (3.3.14) の変換を施すというふうにする. そうすると z -plane 上でもとに戻ってきたとき (X, Y) が違う場合がある. つまり $(v, z) \mapsto (X, Y)$ の座標変換には z -plane 上の path dependence がある. これは z -plane 上に cut が入ったことから予期されることである.

さて (p, q) -string を表す M2-brane の式 (3.3.3) を思い出すと M2-brane が cut を横切るとき (3.3.14) からその charge が

$$\begin{pmatrix} p \\ -q \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} p' \\ -q' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ -q \end{pmatrix} \quad (3.3.15)$$

は z -plane 上にある基点を定め, それを始点と終点とする loop にそって $[p, q]$ 7-brane のまわりをまわらなければならない. そのとき cut を横切ると一般に monodromy は T に conjugate なものになる.

²⁴ そのためには少なくとも fundamental region を 2 と 3 の最小公倍数の 6 枚はりあわせなければならない.

のように変換されるはずであることがわかる.

type IIB 理論の描像で 7-brane background での type IIB の (p, q) -string は 7-brane が つくる cut を横切るとき (3.3.15) と同じ変換を受ける [19],[33],[32] ので, ここで M理論の 描像から得られた変換則 (3.3.15) は type IIB の (p, q) -string の描像と consistent である.

3.3.3 type IIB decompactification limit

上で得られた結果はもともと type IIB の x^7 方向を ‘半径’ R_B に S^1 compact 化して得られたものだった. したがって type IIB の decompactification limit は $R_B \rightarrow \infty$ である.²⁵

(p, q) -string を表す M2-brane を座標変換の定義の積分路の基点 $z_0 = 0$ の近くで考えよう. (3.3.2) より

$$\int_0^z R_B \operatorname{Im} \left(e^{i\theta} h_{p,q}(z) dz \right) = c. \quad (3.3.16)$$

c は有限の定数で固定しておく. (今, 1つの M2-brane を考えているので)

$R_B \rightarrow \infty$ を考えたいので積分変数の変換: $\tilde{z} = R_B z$ を行うと

$$\int_0^{\tilde{z}} \operatorname{Im} \left(e^{i\theta} h_{p,q}(\tilde{z}/R_B) d\tilde{z} \right) = c. \quad (3.3.17)$$

また (3.2.11) は \tilde{z} が有界で $z = 0$ に 7-brane がないとすれば

$$j(\lambda) = \frac{P(\tilde{z}/R_B)}{Q(\tilde{z}/R_B)} \rightarrow \text{const.}, \quad (R_B \rightarrow \infty). \quad (3.3.18)$$

よって今考えている極限で $\lambda \sim \lambda_0 = \text{定数}$ とみなせる. このとき (3.3.17) は

$$\operatorname{Im} \left(e^{i\theta} \eta(\lambda_0)^2 \prod_{i=1}^N (-z_i)^{-\frac{1}{12}} (p + q\lambda_0) \tilde{z} \right) \sim c. \quad (3.3.19)$$

これは \tilde{z} -plane 上で直線を表す. とくにその傾きが (p, q) -charge で決まっていることに注意しよう. またもともと任意に選べた θ を変えることによりこの直線は \tilde{z} -plane 上で回転する.

$z = 0$ に 7-brane があるとすれば (つまり 7-brane の近くでは) 一般には $\lambda \sim \lambda_0 = \text{定数}$ とみなせないので, (3.3.16) を $R_B \rightarrow \infty$ できちんと評価しなければならない.

²⁵ このとき torus の面積 A_M は (§3.2.1) より $A_M = (2\pi)^2 l_p^2 R_B^{-\frac{4}{3}} \rightarrow 0$ である.

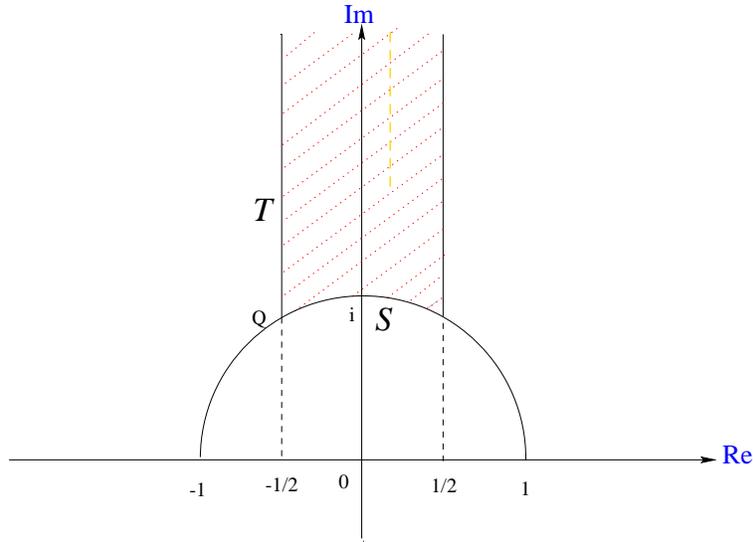


図 3.1: fundamental region (図 A.1) の境界を連続的に横切るとき T, S の変換をすることにより fundamental region 内に戻すことが出来る. (図中の Q は $e^{\frac{2\pi i}{3}}$.)

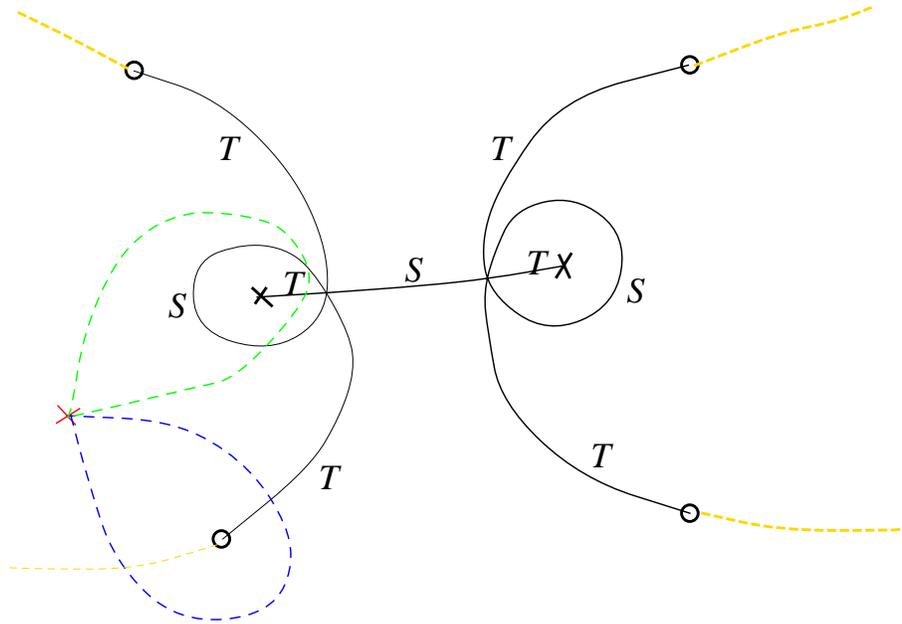


図 3.2: 図 3.1 の fundamental region を 6 枚はりあわせて, $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3$ 特異性をなくしたもの [42]. \circ は monodromy T をもつ D7-brane を表す. \times は T に conjugate な monodromy をもつ 7-brane を表す. そして up to $P = -1$ で, non-trivial な monodromy をもつ特異点はこの 6 点のみになる. 後でみるように (§4.1.3) \times の 2 つはくっついた極限で O7-plane になる.

第4章 type IIB 理論の 7-brane と F 理論

D7-brane 解は type IIB 理論 に現れたものだった. type IIB string 理論 には $SL(2, \mathbb{Z})$ 対称性があると思われている. 一方 torus T^2 の moduli τ は $SL(2, \mathbb{Z})$ 変換で同一視されるものである. すると 10 次元の type IIB string 理論には torus がのっているような気もしてくる. それで type IIB 理論に torus をつけくわえて 12 次元の理論 として統一的に考えようとするのが F 理論 である [20]. 第 3 章では type IIB 理論の 7-brane を M 理論 でみたが, そのとき type IIB 理論を一度 S^1 compact 化して M 理論を T^2 compact 化しなければならなかった. (これは M 理論 と type IIB 理論 を関係付けるとき いつも必要なことである.) しかし F 理論を考えれば 10 次元の type IIB 理論 から出発できてより自然である. この章では type IIB 理論 の 7-brane と F 理論 に関する話題を紹介する.¹

4.1 weak coupling limit

ここでは F 理論 on CY_{n+1} がある極限で type IIB orientifold on CY_n になることをみる [22]. その際, D7-brane と O7-plane がでてくる.

4.1.1 type IIB 理論の \mathbb{Z}_2 symmetry と orientifold

type IIB string 理論には $(-)^{F_L}$, Ω の \mathbb{Z}_2 symmetry がある. F_L は left moving の spacetime fermion number, Ω は world sheet parity. これらの \mathbb{Z}_2 のもとで type IIB SUGRA にでてくる boson 場 は次のような変換を受ける:

$$\begin{aligned} (-)^{F_L} &: (\chi, B_2^{(2)}, C_4^+) \mapsto (-\chi, -B_2^{(2)}, -C_4^+); \\ \Omega &: (\chi, B_2^{(1)}, C_4^+) \mapsto (-\chi, -B_2^{(1)}, -C_4^+). \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

¹ F 理論の入門的な review には [25] がある.

またこれを続けて作用させると

$$(-)^{F_L} \cdot \Omega : (B_2^{(1)}, B_2^{(2)}) \mapsto (-B_2^{(1)}, -B_2^{(2)}) \quad (4.1.2)$$

となり, これは type IIB の $SL(2, \mathbb{Z})$ 変換 (A.2.17) で $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ を作用させたものに等しいことに注意しておこう.

type IIB 理論を次の σ という \mathbb{Z}_2 symmetry をもつ $CY_n : \mathcal{M}_n$ に compact 化することを考える.

$\sigma : \mathcal{M}_n$ 上の holomorphic n -form の符号を変える.

さらに \mathcal{M}_n は σ の fixed point の $\text{codim}_{\mathbb{C}} = 1$ であるとする. このとき type IIB on $\mathcal{M}_n \times \mathbb{R}^{9-2n,1}$ を考えたときもともとある対称性 $(-)^{F_L} \cdot \Omega$ と \mathcal{M}_n の対称性 σ で割ることができて

$$\text{type IIB on } \mathcal{M}_n \times \mathbb{R}^{9-2n,1} / (-)^{F_L} \cdot \Omega \cdot \sigma \quad (4.1.3)$$

という orientifold ² を考えることができる. 今 \mathbb{Z}_2 で割ったので SUSY は半分になっている. このとき

$$\mathcal{M}_n \times \mathbb{R}^{9-2n,1} \text{ の } \sigma \text{ の fixed point} = \text{O7-plane}$$

である. また O7-plane は RR-charge -4 をもつ. ³ (今の場合 χ の magnetic charge.) よって今の O7-plane は monodromy $-T^{-4}$ をもつ. ($-$ は $P = (-)^{F_L} \cdot \Omega$ からくる.)

4.1.2 F 理論 on CY_{n+1}

elliptically fibered ⁴ $CY_{n+1} : \mathcal{M}_{n+1}$ (base \mathcal{B}_n) を考える. $\vec{u} : \mathcal{B}_n$ の座標 とする. このとき

$$\begin{aligned} \text{F on } \mathcal{M}_{n+1} \times \mathbb{R}^{9-2n,1} &= \text{type IIB on } \mathcal{B}_n \times \mathbb{R}^{9-2n,1} \\ \tau(\vec{u}) &= \lambda(\vec{u}) \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

となる. (これは F 理論の ‘定義’ のようなものである.)

以下では Weierstrass form の elliptic fibration を考える:

$$\mathcal{M}_{n+1} : y^2 = x^3 + f(\vec{u})x + g(\vec{u}) \quad (4.1.5)$$

² Ω を含む群でわる orbifold を orientifold という.

³ 一般に O_p -plane は RR-charge $\mp 2^{p-5}$ をもつ. $-$ は $SO(m)$ を enhance する方, $+$ は $Sp(\frac{m}{2})$ を enhance する方である. [43],[44]

⁴ elliptically fibered というのは fiber が torus であるということ.

ここで $f(\vec{u}), g(\vec{u}), x, y$ はそれぞれ $L^{\otimes 4}, L^{\otimes 6}, L^{\otimes 2}, L^{\otimes 3}$ の section とする. (L は \mathcal{B}_n 上のある line bundle.) \vec{u} を一つ決めると一般に torus が一つ決まる. この torus の moduli を $\tau(\vec{u})$ とする. τ は

$$j(\tau) = 4 \frac{(24f)^3}{4f^3 + 27g^2} = 4 \frac{(24f)^3}{\Delta} \quad (4.1.6)$$

をみます.⁵ これは j -不変量 とよばれるものである. ここで Δ は判別式:

$$\Delta = 4f^3 + 27g^2 \quad (4.1.7)$$

で, 特に (4.1.5) で定まる fiber は $\Delta = 0$ のところでのみ特異になる.

$\Delta(\vec{u}) = 0$ となる \mathcal{B}_n の点の集合は \mathcal{B}_n の $\text{codim}_{\mathbb{C}} = 1$ である. つまり全空間では 7 次元分のひろがりをもつ. したがって, これは type IIB の 7-brane と解釈できる. 実際, (3.2.11) と同様に (4.1.6) から一般に T に conjugate な monodromy をもつ.⁶

4.1.3 weak coupling limit

まず, weak coupling limit をとるのに便利な parametrization をする:

$$\begin{aligned} f &= -3h^2 + c\eta, \\ g &= -2h^3 + ch\eta + c^2\psi. \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

ここで h, η, ψ はそれぞれ $L^{\otimes 2}, L^{\otimes 4}, L^{\otimes 6}$ の section とする. また c は定数. この parametrization はどんな f, g に対してもとれるが一意的ではない.

このとき, 判別式 Δ は:

$$\Delta = c^2(\eta^2(4c\eta - 9h^2) + 54h(c\eta - 2h^2)\psi + 27c^2\psi^2) \quad (4.1.9)$$

そして $\lambda(\vec{u})$ は (4.1.4), (4.1.6) より

$$j(\lambda(\vec{u})) = 4 \frac{(24(c\eta(\vec{u}) - 3h(\vec{u})^2))^3}{\Delta(\vec{u})} \quad (4.1.10)$$

で up to $SL(2, \mathbb{Z})$ で $\lambda(\vec{u})$ が決まる.

ここで $c \sim 0$ ($c \neq 0$), $|c\eta| \ll |h|^2$, $|c^2\psi| \ll |h|^3$ となる時 (つまり (4.1.8) でほとんど第 1 項のかたちに parametrize される場合), weak coupling limit とよぶことにする [22]. このとき

$$\Delta(\vec{u}) \simeq (-9c^2)h(\vec{u})^2(\eta(\vec{u})^2 + 12h(\vec{u})\psi(\vec{u})) \quad (4.1.11)$$

⁵ 左辺の j は (A.1.38) で定義されるもの.

⁶ 今の場合, \mathcal{B}_n で $\Delta(\vec{u}) = 0$ に直交する実 2 次元の面を考えそこで $\Delta(\vec{u}) = 0$ の点 (7-brane の位置) のまわりをまわる path を考えて monodromy を定義する.

となり, また $|h(\vec{u})| \sim |c|^{\frac{1}{2}}$ となる領域 (図 4.1 の斜線部分) を除いて

$$j(\lambda(\vec{u})) \simeq 12 \cdot 24^3 \frac{h(\vec{u})^4}{c^2(\eta(\vec{u})^2 + 12h(\vec{u})\psi(\vec{u}))} \quad (4.1.12)$$

なので $j(\lambda(\vec{u})) \sim \infty$ したがって (up to $SL(2, \mathbb{Z})$ で) $\lambda(\vec{u}) \sim i\infty$ (§A.1.5) となってこれは type IIB の weak coupling limit を表す. 以下ではこの weak coupling limit で考える.

$h(\vec{u}) = 0$ となる B_n の点の集合は $\text{codim}_{\mathbb{C}} = 1$ なので $h \neq 0$ の領域は連結している. そこで $|h(\vec{u})| \gg |c|^{\frac{1}{2}}$ となる領域で $\lambda(\vec{u}) \sim i\infty$ となる $SL(2, \mathbb{Z})$ convention をとることにし, この領域に monodromy の基点をとることにする (図 4.1). すると $|h(\vec{u})| \sim |c|^{\frac{1}{2}}$ となる領域を通らない contour では $j(\lambda(\vec{u}))$ はつねに大なので monodromy は $\pm T^n$ になる (§A.1.5).

fiber が特異になるところを調べよう. それは $\Delta = 0$ となるところなので $\eta(\vec{u})^2 + 12h(\vec{u})\psi(\vec{u}) = 0$ と $h(\vec{u}) = 0$ となる B_n の点の集合である.

1. $\eta(\vec{u})^2 + 12h(\vec{u})\psi(\vec{u}) = 0$ となる B_n の点の集合

$\eta(\vec{u})^2 + 12h(\vec{u})\psi(\vec{u}) \sim 0$ では $|h(\vec{u})| \gg |c|^{\frac{1}{2}}$ なので一般に (つまり 1 位の零点のとき) monodromy は T になる. したがってこれは D7-brane を表す (§3.2.3).

2. $h(\vec{u}) = 0$ となる B_n の点の集合

$h(\vec{u}) = 0$ となる点のちかくでは (4.1.10) より $j \sim \text{const.} \frac{1}{h(\vec{u})^2}$ となり j^{-1} は一般に 2 位の零点をもつ. 実際は厳密に 2 位の零点ではなくすこし split している.⁷ それぞれの点のまわりの monodromy は T に conjugate なものである. つまりそれぞれの点は $[p, q]$ 7-brane, $[r, s]$ 7-brane をあらわす. この ‘2つ’ の点のまわりの monodromy を調べよう. まずこの ‘2つ’ の点のまわりをまわる contour を変形して $|h(\vec{u})| \sim |c|^{\frac{1}{2}}$ となるところを通らないようにする. このとき (4.1.12) より $j \sim \text{const.} h^4$ なので monodromy は $\pm T^{-4}$ になる (§A.1.5).⁸ また (§3.2.3) よりこの ‘2つ’ の点があくつく極限では $Q_7 = -4$ つまり O7-plane と同じ charge をもつものになる. また $M_{p,q} \cdot M_{r,s} = \pm T^{-4}$ を満たさなければならない.⁹ この一般解は

$$M_{p,q} = \begin{pmatrix} 1-p & p^2 \\ -1 & 1+p \end{pmatrix}, \quad M_{r,s} = \begin{pmatrix} -1-p & (p+2)^2 \\ -1 & 3+p \end{pmatrix} \quad (4.1.13)$$

であり, このとき $M_{p,q} \cdot M_{r,s} = -T^{-4}$ となる. そして $M_{p,q} \cdot M_{r,s} = +T^{-4}$ の方は解をもたない. したがって ‘2つ’ の点のまわりの monodromy $-T^{-4}$ は T^{-4} の部分 (つま

⁷ ある $h(\vec{u})$ の零点のちかくにある 2 つの (4.1.9) の零点.

⁸ (4.1.6) だけからは monodromy は up to $PSL(2, \mathbb{Z})$ しか決まらない. τ は $P = -1$ の monodromy 変換で不変なためである. したがって一般に \pm の不定性がある. しかし今の Weierstrass form のとき 1 位の零点の場合は一般に Kodaira 分類 から ($-T$ ではなく) T に conjugate な monodromy をもつことが知られている (§A.1.6).

⁹ $M_{p,q}$ は (3.3.11) で定義されている.

り RR-charge $Q_7 = -4$ の部分) だけでなく $P = -1$ の部分 (つまり $(-)^{F_L} \cdot \Omega$ の部分) も含めて (§4.1.1) の O7-plane の monodromy と一致する. つまり $[\pm p, \pm 1]$ 7-brane と $\pm[\pm(p+2), \pm 1]$ 7-brane が $h(\vec{u}) = 0$ となる点のちかくにあってそれがくつつく極限で O7-plane になるということである.

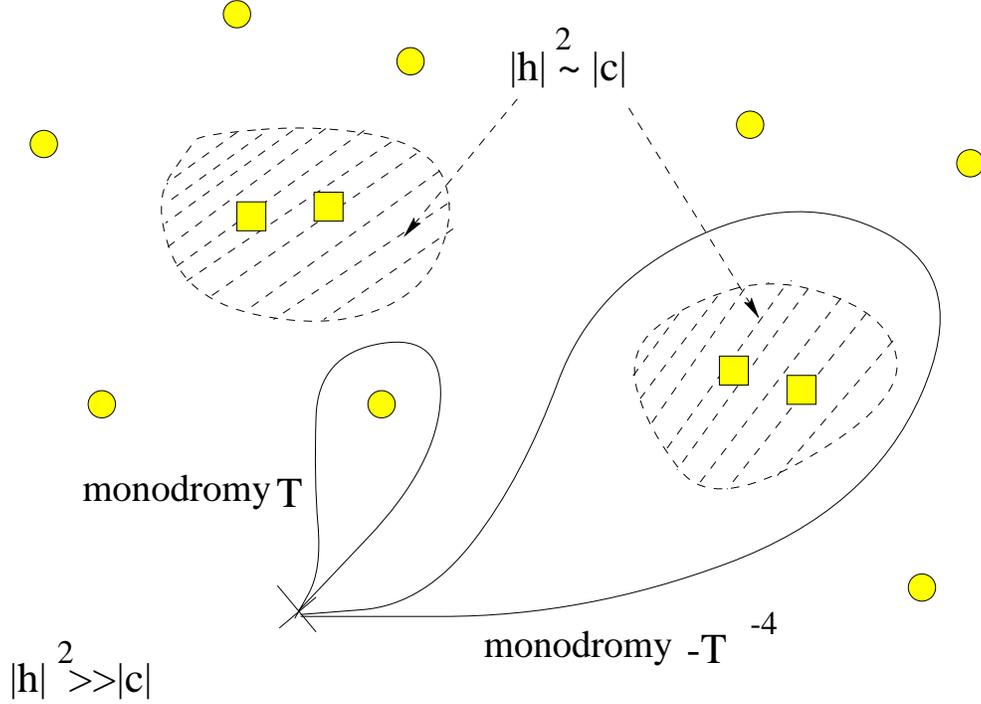


図 4.1: \circ は D7-brane, 四角は 2 つで O7-plane, \times は monodromy の基点を表す. 斜線部分は $|h(\vec{u})| \sim |c|^{\frac{1}{2}}$ となる領域.

以上より weak coupling limit で $\eta(\vec{u})^2 + 12h(\vec{u})\psi(\vec{u}) = 0$ は D7-brane, $h(\vec{u}) = 0$ は O7-plane を表すことがわかった.

次に

$$\mathcal{M}_n : \xi^2 = h(\vec{u}) \quad (4.1.14)$$

を考えよう. ($h(\vec{u})$ は $L^{\otimes 2}$ の section より ξ は L の section.) \mathcal{M}_n には

$$\sigma : \xi \mapsto -\xi \quad (4.1.15)$$

の \mathbb{Z}_2 symmetry がある. σ の fixed point が $\xi = 0$, i.e., $h(\vec{u}) = 0$ で \mathcal{B}_n の $\text{codim}_{\mathbb{C}} = 1$ の点の集合を表す. $h(\vec{u}) \neq 0$ では \mathcal{M}_n 上 σ で移り変わる点 $(\vec{u}, \xi = \sqrt{h(\vec{u})})$ がある. つまり \mathcal{M}_n は $h(\vec{u}) = 0$ で分岐する \mathcal{B}_n の double cover を表している. そして $\mathcal{M}_n/\sigma \simeq \mathcal{B}_n$. した

がって

$$F \text{ on } \mathcal{M}_{n+1} \times \mathbb{R}^{9-2n,1} \xrightarrow{\text{weak coupling}} \text{type IIB on } \mathcal{M}_n \times \mathbb{R}^{9-2n,1} / (-)^{F_L} \cdot \Omega \cdot \sigma \quad (4.1.16)$$

となる.

今まで L はある \mathcal{B}_n 上の line bundle としてきた. しかし \mathcal{M}_{n+1} が CY_{n+1} となる条件つまり first Chern class がゼロとなる条件¹⁰ より L の first Chern class に制限がつく. 実はこの条件と上で決めた \mathcal{M}_n が CY_n となる条件が同じもの, すなわちともに $c_1(\mathcal{B}_n) - c_1(L) = 0$ となる.¹¹ つまり上で示した weak coupling limit は \mathcal{M}_{n+1} と \mathcal{M}_n がともに Calabi-Yau になる条件と consistent になっている.

簡単な例として \mathcal{M}_{n+1} として CP^1 上の elliptic fibration である K3 を考えみよう. まず (4.1.5) より:

$$\mathcal{M}_2 : y^2 = x^3 + f(z)x + g(z) \quad (4.1.17)$$

この場合は \mathcal{M}_2 が Calabi-Yau になる条件から $f(z)$ は 8 次の多項式, $g(z)$ は 12 次の多項式という条件がでてくる. よって $h(z), \eta(z), \psi(z)$ は 4, 8, 12 次の多項式である. $\eta(z)^2 + 12h(z)\psi(z)$ は 16 次の多項式なので D7-brane は 16 個ある.

$$h(z) = \alpha \prod_{i=1}^4 (z - z_i) \quad (4.1.18)$$

(α は定数) と表すと $z = z_i$ ($i = 1, \dots, 4$) に O7-plane がある. そして (4.1.14) は

$$\mathcal{M}_1 : \xi^2 = \alpha \prod_{i=1}^4 (z - z_i) \quad (4.1.19)$$

となる. これは torus T^2 を表す式である. よって (4.1.16) は

$$F \text{ on elliptically fibered K3} \times \mathbb{R}^{7,1} \xrightarrow{\text{weak coupling}} \text{type IIB on } T^2 \times \mathbb{R}^{7,1} / (-)^{F_L} \cdot \Omega \cdot \sigma \quad (4.1.20)$$

となる.

以上 weak coupling limit を議論したが F 理論が有効になるのは非摂動効果を調べるときなので 次節では strong coupling のうちで簡単な constant coupling の場合を議論する.

¹⁰ Kähler 多様体で first Chern class がゼロなら (unique に) Ricci-flat Kähler metric をもつことができる (Yau)[47],[41].

¹¹ \mathcal{M}_{n+1} が CY_{n+1} となる条件は $c_1(\mathcal{B}_n) + c_1(L)(3+2-6) = 0$. ここで 3, 2 は y, x が $L^{\otimes 3}, L^{\otimes 2}$ の section であることからくる. -6 は constraint (4.1.5) が $L^{\otimes 6}$ の section であることからくる. 同様に \mathcal{M}_n が CY_n となる条件は (4.1.14) から $c_1(\mathcal{B}_n) + c_1(L)(1-2) = 0$ となる.[22]

4.2 constant coupling

ここでは $\mathbb{C}P^1$ 上の elliptic fibration である K3 の場合 (4.1.17) だけを考える。¹²

まず moduli の数を調べよう. $f(z)$ は 8 次の多項式, $g(z)$ は 12 次の多項式なので係数のパラメーターの数はそれぞれ 9,13 個ある. ところが $\mathbb{C}P^1$ の $SL(2, \mathbb{C})$ 変換の自由度から 3 個減り, またスケーリング:

$$f \mapsto \alpha'^4 f, g \mapsto \alpha'^6 g, x \mapsto \alpha'^2 x, y \mapsto \alpha'^3 y, \alpha' \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad (4.2.1)$$

で (4.1.17) は不変なのでさらに 1 個減って, 結局 complex structure の変形の自由度は全部で複素 18 個ある. その他に base $\mathbb{C}P^1$ の面積を表すパラメーター (Kähler moduli) が実 1 個ある. (F 理論では fiber の torus の Kähler moduli はダイナミカルではない. また $B_2^{(1)}, B_2^{(2)}$ の compact な方向による moduli は monodromy $SL(2, \mathbb{Z})$ 不変でないためゼロに凍結される.[20])

4.2.1 constant coupling

λ が定数になる場合 (constant coupling) を考える [21],[23].

λ が定数になるためには

$$j(\lambda) = 4 \frac{(24f(z))^3}{4f(z)^3 + 27g(z)^2} \quad (4.2.2)$$

が定数にでなければならない. つまり $f(z)^3/g(z)^2$ が定数であるという条件になる. $f(z)$ は 8 次の多項式, $g(z)$ は 12 次の多項式なので一般に

$$f(z) = \alpha\phi(z)^2, \quad g(z) = \phi(z)^3 \quad (4.2.3)$$

(α は定数, $\phi(z)$ は 4 次の多項式) と表される. さらにスケーリング (4.2.1) の自由度を用いると

$$\phi(z) = \prod_{i=1}^4 (z - z_i) \quad (4.2.4)$$

とできる. そして (4.2.2) は

$$j(\lambda) = 4 \frac{(24\alpha)^3}{4\alpha^3 + 27} \quad (4.2.5)$$

となる. この式をよく眺めてみよう.

¹² $f(z)$ は 8 次の多項式, $g(z)$ は 12 次の多項式なので判別式 Δ は 24 次の多項式. したがって 24 個零点がある. これは今の K3 の場合 24 個 '7-brane' があることに対応する (§3.2.3).

(I) $\alpha \neq \infty, \neq 0$ の場合.

これは λ が fundamental region の generic な位置にある場合である. moduli パラメータは α と 非調和比 $\frac{(z_1-z_2)(z_3-z_4)}{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}$ の複素 2 個.¹³ 特に $4\alpha^3 + 27 \rightarrow 0$ で $j \rightarrow \infty$ であるがこれは (§4.1.3) で $c, \eta, \psi \rightarrow 0$ とした場合にあたる.

(II) $\alpha = \infty$ の場合.

$j = 24^3$ なので $\lambda = i$ となる. これは $g(z) = 0$ としたことに相当する. そして一旦 $g(z) = 0$ としてしまうと $f(z)$ は任意の 8 次の多項式で $j = 24^3$ となる. したがって moduli パラメータの数は $9 - 3 - 1 = 5$,¹⁴ つまり複素 5 個.

(III) $\alpha = 0$ の場合.

$j = 0$ なので $\lambda = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ となる. これは $f(z) = 0$ としたことに相当する. そして一旦 $f(z) = 0$ としてしまうと $g(z)$ は任意の 12 次の多項式で $j = 0$ となる. したがって moduli パラメータの数は $13 - 3 - 1 = 9$, つまり複素 9 個.

の 3 つの branch があることがわかる.¹⁵

ここで少し注意を述べておこう. 今調べている constant coupling の場合 (I)(II)(III) は後でみるようにいくつかの ‘7-brane’ が重なっていてその ‘7-brane’ がある位置でも j , したがって λ は有限な定数 (‘strong coupling’) である. これは ‘7-brane’ がある位置で $\lambda \rightarrow i\infty$ となっていた (§3.2.3) の一般論と異なる. しかし ‘7-brane’ がある位置では判別式 $\Delta = 0$ なので fiber は特異になっている. (というより一般に判別式 $\Delta = 0$ となる位置を ‘7-brane’ がある位置であると解釈する.) 実際 後でみるように その ‘7-brane’ がある位置のまわりの monodromy は non-trivial になっている.

4.2.2 orbifold limit と gauge enhancement

ここで (§4.2.1) の branch (I),(II),(III) について \mathbb{Z}_n orbifold limit と gauge enhancement を調べる.

\mathbb{C}/\mathbb{Z}_n の欠損角は $(1 - \frac{1}{n})2\pi$ であり, 一方 (3.2.22) より 7-brane 1 つ があることによる欠損角は $\frac{1}{12}2\pi$ であることに注意しておこう.

また singular fiber の A-D-E 型 に対応した A-D-E 群 の gauge symmetry が enhance されると考えられている [35],[24].

¹³ z_1, z_2, z_3, z_4 のうち 3 つは $SL(2, \mathbb{C})$ で固定される. 非調和比は $SL(2, \mathbb{Z})$ 変換で不変なものである.

¹⁴ $SL(2, \mathbb{C})$ 変換で 3 個, スケーリングで 1 個減る.

¹⁵ いずれの branch でも, もちろん その他に base CP^1 の Kähler moduli が実 1 個ある.

branch(I)

(§4.2.1) の branch(I) を調べよう [21]. (4.1.7),(4.2.3),(4.2.4) から判別式は

$$\Delta(z) = (4\alpha^3 + 27) \prod_{i=1}^4 (z - z_i)^6 \quad (4.2.6)$$

となるのでこれは ‘7-brane’ が各 z_i に 6 つずつ重なっている. ‘7-brane’ がある位置 z_i で fiber は特異になっているはずなのでそれを調べよう. $z \sim z_i$ では (4.2.4) は $\phi(z) \sim c'(z - z_i)$ (c' は定数.) なので (4.1.17) は

$$y^2 = x^3 + \alpha c'^2 (z - z_i)^2 x + c'^3 (z - z_i)^3 \quad (4.2.7)$$

となる. ここで

$$\tilde{y} = c'^{-\frac{3}{2}} (z - z_i)^{-\frac{3}{2}} y, \quad \tilde{x} = c'^{-1} (z - z_i)^{-1} x \quad (4.2.8)$$

とおくと

$$\tilde{y}^2 = \tilde{x}^3 + \alpha \tilde{x} + 1 \quad (4.2.9)$$

で z を定数と見なす限り j -不変量は (4.2.5) と同じものを与える. しかし z が z_i のまわりを 1 回まわるとき つまり $(z - z_i) \rightarrow (z - z_i)e^{2\pi i}$ のとき

$$\tilde{x} \rightarrow \tilde{x}, \quad \tilde{y} \rightarrow -\tilde{y} \quad (4.2.10)$$

となりもとに戻らない. 2 回まわるともとに戻る. したがって monodromy は 2 乗すると 1 になる non-trivial なもの, つまり $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ である. この monodromy P は λ に trivial に作用するので λ は fundamental region のどんな値でもよいのである.

一方, base の metric (3.2.22) より z_i で欠損角 $6 \cdot \frac{1}{12} 2\pi = \frac{1}{2} 2\pi$ をもつ orbifold \mathbb{C}/\mathbb{Z}_2 の構造をもつ. base の位相はもともと $\mathbb{C}P^1$ だったので結局 base は今の場合 T^2/\mathbb{Z}_2 となり \mathbb{Z}_2 の fixed point が z_i ($i = 1, 2, 3, 4$) である (図 4.2).

K3 全体で見ると z_i のまわりの monodromy P は fiber にも作用するので今の場合

$$K3 \rightarrow T^4/\mathbb{Z}_2 \quad (4.2.11)$$

という orbifold limit になっていることがわかる.

type IIB 理論の描像では base の \mathbb{Z}_2 の fixed point z_i ($i = 1, 2, 3, 4$) が O7-plane の位置に対応している. しかし今の場合 monodromy は P なので RR-charge がゼロになっている. (§4.1) を思い出すと今の場合, 各 fixed point z_i に重なった 6 個の 7-brane のうち, 4 つが RR-charge +1 をもつ D7-brane であり, 違う $[p, q]$ -charge をもつ残りの 2 つの 7-brane

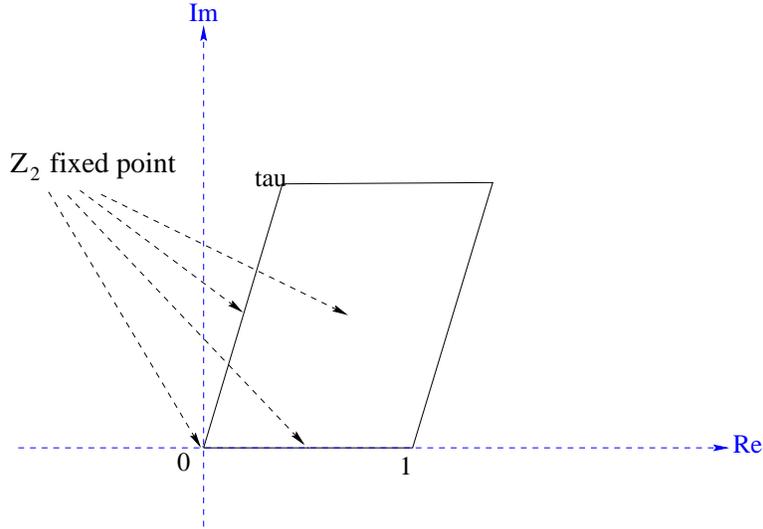


図 4.2: 一般の τ を持つ torus は原点のまわりの π 回転に対して対称性を持つ. その fixed point は 4 つある.

がくっついて RR-charge -4 をもつ O7-plane となっている, と考えられる. このとき z_i では O7-plane に 4 個の D7-brane が重なっているので $SO(8)$ ($= D_4$) の gauge symmetry が enhance していると思われるが, 実際 (4.2.7) は $z = z_i$ で D_4 型の特異性を持っている (§A.1.6) のでそう考えると consistent である.

まとめると branch(I) では $K3 \rightarrow T^4/\mathbb{Z}_2$ となっており, gauge symmetry は $(SO(8))^4$ である.

branch(II)

(§4.2.1) の branch(II) を調べよう [23]. スケーリングして

$$f(z) = \prod_{i=1}^8 (z - z_i) \quad (4.2.12)$$

とかくと (4.1.7) から判別式は

$$\Delta(z) = 4 \prod_{i=1}^8 (z - z_i)^3 \quad (4.2.13)$$

となり各 z_i に 3 つずつ 7-brane が重なっている. よって base の metric (3.2.22) から一般には z_i で欠損角 $3 \cdot \frac{1}{12} 2\pi = \frac{1}{4} 2\pi$ となるがこれは \mathbb{C}/\mathbb{Z}_n に対応していない. $z \sim z_i$ では

$$y^2 = x^3 + c'(z - z_i)x \quad (4.2.14)$$

(c' は定数.) となり A_1 型の特異性をもつ (§A.1.6). したがって gauge symmetry $SU(2)$ をもつと考えられる. monodromy は $S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ であり, 4 乗すると 1 である. 预期されるように $\lambda = i$ には trivial に作用する.

\mathbb{C}/\mathbb{Z}_n に対応するためには z_i のうちいくつかが一貫していなければならない. z_i のうち 2 つが一貫するとき \mathbb{C}/\mathbb{Z}_2 , 3 つが一貫するとき \mathbb{C}/\mathbb{Z}_4 に対応していてそれ以外はない. また z_i が全部で 8 個であることを考えると z_i のすべてが \mathbb{C}/\mathbb{Z}_n に対応するためには (2,2,2,2) あるいは (2,3,3) 個一致しなければならない.

(2,2,2,2) 個一致のときは \mathbb{C}/\mathbb{Z}_2 特異点が 4 つで各 z_i に $2 \cdot 3 = 6$ 個の 7-brane が重なっている場合であり $z \sim z_i$ で

$$y^2 = x^3 + c'(z - z_i)^2 x \quad (4.2.15)$$

(c' は定数.) となり D_4 型の特異性をもつ (§A.1.6). つまり branch(I) に帰着する. つまり branch(II) はここで branch(I) とつながっていることがわかる.

(2,3,3) 個一致のとき, \mathbb{C}/\mathbb{Z}_2 特異点が 1 つ, \mathbb{C}/\mathbb{Z}_4 特異点が 2 つある. これは base が $\tau_b = i$ の T^2 を \mathbb{Z}_4 で割ったものになっていることに対応する. 実際, $\tau_b = i$ の T^2 は \mathbb{Z}_4 の fixed point 2 つと \mathbb{Z}_2 の fixed point 2 つを持つ (図 4.3). そして \mathbb{Z}_4 で割るとき \mathbb{Z}_2 の fixed point 2 つは同一視されるので T^2/\mathbb{Z}_4 では 1 点である. \mathbb{C}/\mathbb{Z}_4 特異点はその点の近くで

$$y^2 = x^3 + c'(z - z_i)^3 x \quad (4.2.16)$$

(c' は定数.) となり fiber は E_7 型の特異性をもつ (§A.1.6). monodromy は $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ であり, 4 乗すると 1 である. 预期されるように $\lambda = i$ には trivial に作用する. \mathbb{C}/\mathbb{Z}_2 特異点は (4.2.2) より fiber は D_4 型の特異性をもち, monodromy は $P = S^2$. よって fiber にも \mathbb{Z}_4 が作用しているので K3 全体では $K3 \rightarrow T^4/\mathbb{Z}_4$ である. また gauge symmetry は $E_7 \times E_7 \times SO(8)$ である. この場合 base の 3 点だけで 7-brane が重なっているので $SL(2, \mathbb{C})$ で固定され complex structure の moduli パラメーターはない.

branch(III)

(§4.2.1) の branch(III) を調べよう [23]. スケーリングして

$$g(z) = \prod_{i=1}^{12} (z - z_i) \quad (4.2.17)$$

とかくと (4.1.7) から判別式は

$$\Delta(z) = 27 \prod_{i=1}^{12} (z - z_i)^2 \quad (4.2.18)$$

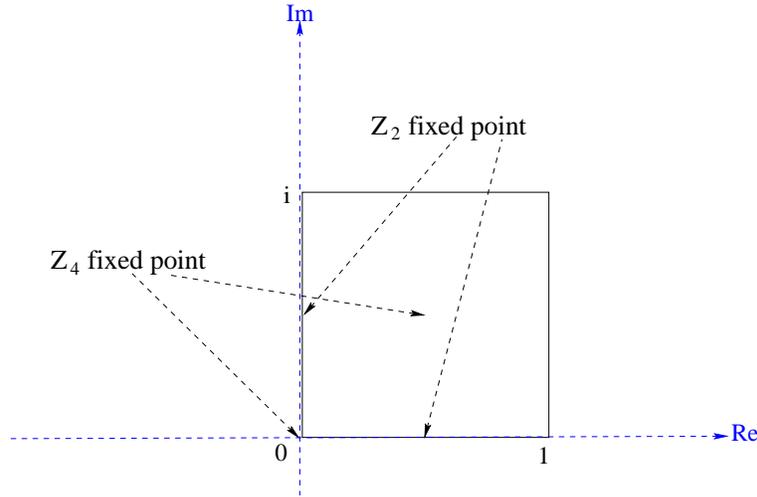


図 4.3: $\tau = i$ の torus は原点のまわりの $\frac{\pi}{2}$ 回転に対して対称性を持つ. その \mathbb{Z}_4 fixed point は 2 つ, \mathbb{Z}_2 fixed point は 2 つある.

となり各 z_i に 2 つずつ 7-brane が重なっている. よって base の metric (3.2.22) から一般には z_i で欠損角 $2 \cdot \frac{1}{12}2\pi = \frac{1}{6}2\pi$ となるがこれは \mathbb{C}/\mathbb{Z}_n に対応していない. $z \sim z_i$ では

$$y^2 = x^3 + c'(z - z_i) \quad (4.2.19)$$

(c' は定数.) となり fiber の II 型の特異性をもつ (§A.1.6). したがって gauge symmetry $U(1)$ をもつと考えられる. monodromy は $(ST)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ であり, 6 乗すると 1 である. 予期されるように $\lambda = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ には trivial に作用する.

\mathbb{C}/\mathbb{Z}_n に対応するためには z_i のうちいくつかが一貫していなければならない. z_i のうち 3 つが一貫するとき \mathbb{C}/\mathbb{Z}_2 , 4 つが一貫するとき \mathbb{C}/\mathbb{Z}_3 , 5 つが一貫するとき \mathbb{C}/\mathbb{Z}_6 に対応していてそれ以外はない. また z_i が全部で 12 個であることを考えると z_i のすべてが \mathbb{C}/\mathbb{Z}_n に対応するためには (3,3,3,3) あるいは (3,4,5) あるいは (4,4,4) 個一貫しなければならない.

(3,3,3,3) 個一致のときは \mathbb{C}/\mathbb{Z}_2 特異点が 4 つで各 z_i に $3 \cdot 2 = 6$ 個の 7-brane が重なっている場合であり $z \sim z_i$ で

$$y^2 = x^3 + c'(z - z_i)^3 \quad (4.2.20)$$

(c' は定数.) となり D_4 型の特異性をもつ (§A.1.6). つまり branch(I) に帰着する. つまり branch(III) はここで branch(I) とつながっていることがわかる.

(3,4,5) 個一致のときは \mathbb{C}/\mathbb{Z}_2 特異点, \mathbb{C}/\mathbb{Z}_3 特異点, \mathbb{C}/\mathbb{Z}_6 特異点が 1 つずつある. これは base が $\tau_b = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ の T^2 を \mathbb{Z}_6 で割ったものになっていることに対応する. 実際, $\tau_b = e^{\frac{2\pi i}{3}}$

の T^2 は \mathbb{Z}_6 の fixed point 1 つ, \mathbb{Z}_3 の fixed point 2 つ, \mathbb{Z}_2 の fixed point 3 つ を持つ (図 4.4). そして \mathbb{Z}_6 で割るとき \mathbb{Z}_3 の fixed point 2 つ, \mathbb{Z}_2 の fixed point 3 つ はそれぞれ同一視されるので T^2/\mathbb{Z}_6 ではそれぞれ 1 点である. \mathbb{C}/\mathbb{Z}_6 特異点はその点の近くで

$$y^2 = x^3 + c'(z - z_i)^5 \quad (4.2.21)$$

(c' は定数.) となり fiber は E_8 型の特異性をもつ (§A.1.6). monodromy は $ST = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ であり, 6 乗すると 1 である. 予期されるように $\lambda = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ には trivial に作用する. \mathbb{C}/\mathbb{Z}_3 特異点はその点の近くで

$$y^2 = x^3 + c'(z - z_i)^4 \quad (4.2.22)$$

(c' は定数.) となり fiber は E_6 型の特異性をもつ (§A.1.6). monodromy は $(ST)^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ である. \mathbb{C}/\mathbb{Z}_2 特異点は (4.2.20) より fiber は D_4 型の特異性をもつ. monodromy は $P = (ST)^3$. よって fiber にも \mathbb{Z}_6 が作用しているので K3 全体では $K3 \rightarrow T^4/\mathbb{Z}_6$ である. また gauge symmetry は $E_8 \times E_6 \times SO(8)$ である. この場合 base の 3 点 だけで 7-brane が重なっているので $SL(2, \mathbb{C})$ で固定され complex structure の moduli パラメータはない.

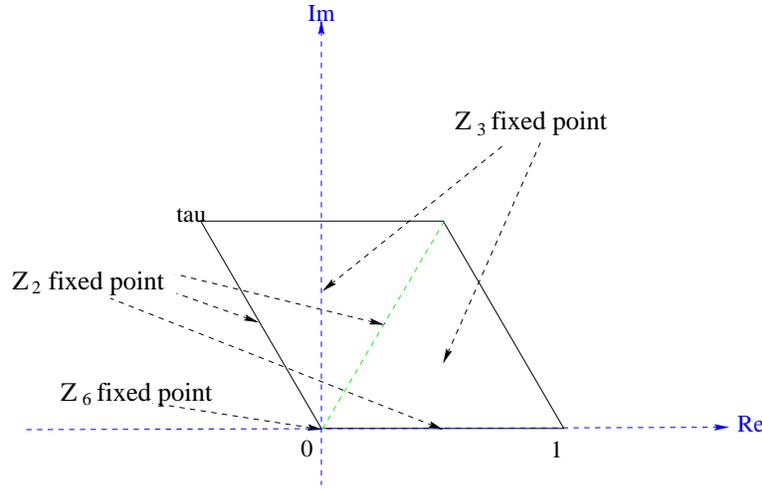


図 4.4: $\tau = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ の torus は原点のまわりの $\frac{\pi}{3}$ 回転に対して対称性を持つ. その \mathbb{Z}_6 fixed point は 1 つ, \mathbb{Z}_3 fixed point は 2 つ, \mathbb{Z}_2 fixed point は 3 つ, ある.

(4,4,4) 個一致のときは \mathbb{C}/\mathbb{Z}_3 特異点が 3 つ ある. これは base が $\tau_b = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ の T^2 を \mathbb{Z}_3 で割ったものになっていることに対応する. 実際, $\tau_b = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ の T^2 は \mathbb{Z}_6 の fixed point 1

つ, \mathbb{Z}_3 の fixed point 2つ, \mathbb{Z}_2 の fixed point 3つ を持つ. そして \mathbb{Z}_3 で割るとき \mathbb{Z}_2 の fixed point 3つは同一視されるので T^2/\mathbb{Z}_3 では \mathbb{Z}_2 の fixed point は1点である. しかし \mathbb{Z}_2 は \mathbb{Z}_3 の部分群ではないので \mathbb{Z}_2 の fixed point は T^2/\mathbb{Z}_3 の特異点ではない. 結局 $\tau_b = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ の T^2 での \mathbb{Z}_6 の fixed point 1つ, \mathbb{Z}_3 の fixed point 2つ が T^2/\mathbb{Z}_3 で \mathbb{C}/\mathbb{Z}_3 特異点 3つ になる. \mathbb{C}/\mathbb{Z}_3 特異点では (4.2.22) より fiber は E_6 型の特異性をもつ. monodromy は $(ST)^2$. よって fiber にも \mathbb{Z}_3 が作用しているので K3 全体では $K3 \rightarrow T^4/\mathbb{Z}_3$ である. また gauge symmetry は $E_6 \times E_6 \times E_6$ である. この場合 base の 3点 だけで 7-brane が重なっている ので $SL(2, \mathbb{C})$ で固定され complex structure の moduli パラメーターはない.

まとめ

branch(I) ではすべての点 (moduli space 上複素 2次元 (+実 1次元) 分) で \mathbb{Z}_2 orbifold になったが, branch(II)(III) では moduli の特別な点 (moduli space 上複素 0次元 (+実 1次元) 分) でしか \mathbb{Z}_n orbifold にならない. また branch(II)(III) とともに branch(I) と moduli space 上複素 1次元分のところでつながっている. (図 4.5)

特に orbifold になる場合, 次のようになる:

branch	K3	λ	base	τ_b	gauge symmetry
(I)	T^4/\mathbb{Z}_2	H^* 内	T^2/\mathbb{Z}_2	H^* 内	$(SO(8))^4$
(III)	T^4/\mathbb{Z}_3	$e^{\frac{2\pi i}{3}}$	T^2/\mathbb{Z}_3	$e^{\frac{2\pi i}{3}}$	$(E_6)^3$
(II)	T^4/\mathbb{Z}_4	i	T^2/\mathbb{Z}_4	i	$E_7 \times E_7 \times SO(8)$
(III)	T^4/\mathbb{Z}_6	$e^{\frac{2\pi i}{3}}$	T^2/\mathbb{Z}_6	$e^{\frac{2\pi i}{3}}$	$E_8 \times E_6 \times SO(8)$

ここで H^* は fundamental region ($\simeq (\mathbb{C}$ の上半面)/ $SL(2, \mathbb{Z})$). τ_b は base の \mathbb{Z}_n で割る 前の T^2 の moduli.

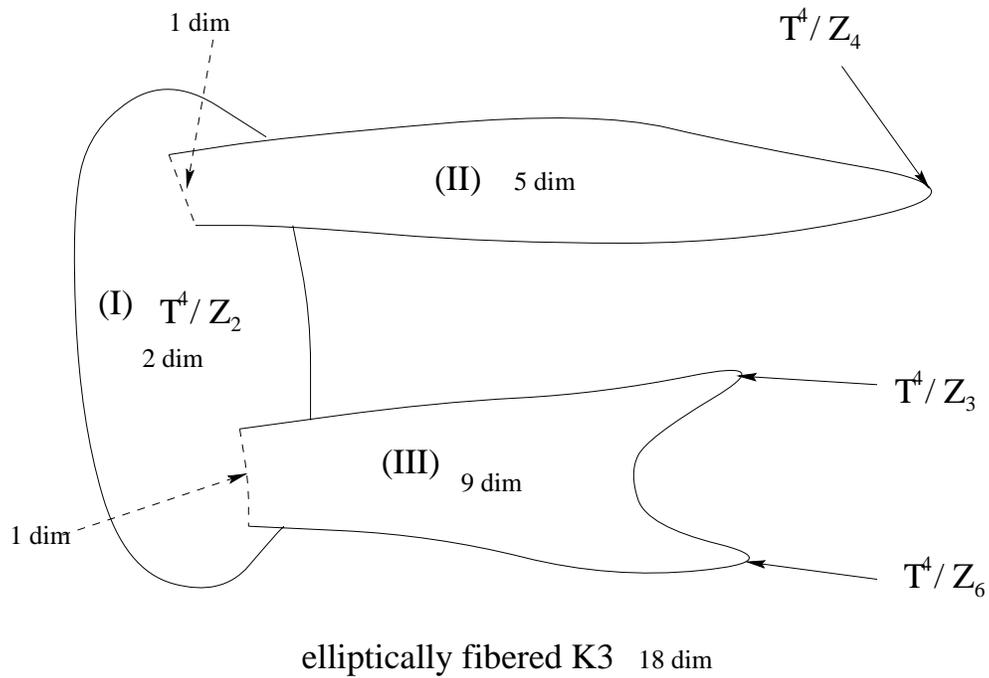


図 4.5: elliptically fibered K3 の moduli space の様子. 図中の次元は複素次元を表す. その他に base の Kähler moduli 実 1 次元分がある. 一般に coupling は定数ではなく, 全体として moduli space は複素 18 次元 (+実 1 次元) 分ある. その中に constant coupling になる部分 (I)(II)(III) がある.

第5章 3-string junction

type IIB string 理論には fundamental string (F-string, NS1-brane, $(1, 0)$ -string) とその端が ‘くつつく’ D-string (D1-brane, $(0, 1)$ -string) の他に $SL(2, \mathbb{Z})$ symmetry から (p, q) -string が存在する.

Dp -brane ($p \neq 1$) は F-string の端が ‘くつつく膜’ である という描像は直観的に理解できるが, D1-brane では ‘くつつく’ 方も 1-brane であり しかも $SL(2, \mathbb{Z})$ symmetry で互いに移り変わるものということを見ると 単に ‘くつつく’ というだけではないような気がしてくる. 直観的に ある頂点から string 状のものが 3 方向にのびたものができるような気がする. それが ‘3-string junction’ などとよばれるものである.

ここでは, この ‘3-string junction’ が BPS state になっていることを示し, それが (§4.2.1) で調べた gauge enhancement の直観的理解 (特に例外群) に応用できそうだということ を述べる. また ‘3-string junction’ を M理論 の立場でみるとなめらかな M2-brane の ‘pants diagram’ になることを示し, 7-brane background ではどうなるかということ を考える.

5.1 3-string junction in flat background

まず flat background で 3-string junction を考えよう [40],[28],[29],[30],[31].

5.1.1 ‘string network’

3-string junction

F-string は B_2^{NS} と couple しているので単に端をもつと charge の保存則が満たされない. しかし Dp -brane の上では端をもつことができる. Dp -brane に F-string の端がくつついたときそれは Dp -brane の worldvolume 上のゲージ場 A_1 に couple することができ charge の保存則を満たすようにできる.¹ F-string の端は Dp -brane の worldvolume 上の A_1 のソースになり, その charge は 端を Dp -brane の worldvolume 上 S^{p-1} で囲むことに

¹ F-string が端をもつとき その端が ゲージ場 A_1 と couple することにより (つまり $\int_{\partial(\text{F-string})} A_1$), B_2^{NS} のゲージ変換に対する不変性が保たれる [26].

より測ることができる [27]. 実際, type IIB SUGRA の action (A.2.18), F-string の action, Dp-brane の action から B_2^{NS} に関する項を抜き出すと²

$$\frac{1}{(2\pi)^5 l_s^4 g_{\text{str}}^2} \int_{\text{bulk}} \frac{1}{2} dB_2^{NS} \wedge *_{(10)} dB_2^{NS} + \int_{\text{F-string}} B_2^{NS} + \frac{-1}{(2\pi)^{p-2} l_s^{p-3} g_{\text{str}}} \int_{\text{Dp-brane}} B_2^{NS} \wedge *_{(p+1)} dA_1 \quad (5.1.1)$$

ここで $g_{\text{str}} = e^\varphi$ は定数とした.³ これから B_2^{NS} に対する運動方程式は:

$$\frac{1}{(2\pi)^5 l_s^4 g_{\text{str}}^2} d *_{(10)} dB_2^{NS} = \delta_8(\text{F}) + \frac{1}{(2\pi)^{p-2} l_s^{p-3} g_{\text{str}}} *_{(p+1)} dA_1 \wedge \delta_{9-p}(\text{Dp}) \quad (5.1.2)$$

となる.⁴ これを Dp-brane 上にある F-string の端を囲む S^8 で積分すると

$$0 = 1 + \frac{1}{(2\pi)^{p-2} l_s^{p-3} g_{\text{str}}} \int_{S^{p-1}} *_{(p+1)} dA_1 \quad (5.1.3)$$

となる. ここで S^{p-1} は worldvolume 上 F-string の端を囲む ‘球面’ である.⁵

ところが F-string の端の 1 つが ‘D-string’ にくっつく状況を見ると ‘D-string’ の worldvolume は空間 1 次元しかないなのでその charge は worldvolume 上不連続になる. つまり worldvolume 上の A_1 の場の強さ: $F_2 = dA_1$ が不連続になる. (5.1.3) より

$$F^{01+} - F^{01-} = -(2\pi)^{-1} l_s^{-2} g_{\text{str}} \quad (5.1.4)$$

となるからである [28]. (F^{01+}, F^{01-} は worldvolume 上の F-string の端をはさむ両側の A_1 の場の強さ.) これは D-string に F-string の端の 1 つがくっつくともはや D-string のままではいられないことを示している. 実際このとき ‘D-string’ の action の中の

$$\frac{-1}{(2\pi)^{-1} l_s^{-2} g_{\text{str}}} \int_{\text{D-string}} B_2^{NS} \wedge *_{(2)} dA_1 = \frac{1}{(2\pi)^{-1} l_s^{-2} g_{\text{str}}} \int_{\text{D-string}} d^2 \sigma F^{01} B_{01}^{NS} \quad (5.1.5)$$

の B_{01}^{NS} ($= B_{\mu\nu}^{NS} \partial_0 X^\mu \partial_1 X^\nu$) の係数が (5.1.4) から worldvolume 上不連続になる. いいかえれば F-string ((1,0)-string) の端が D-string ((0,1)-string) にくっつくとそのくっついた端より先は (1,1)-string になっているということになる. type IIB の $SL(2, \mathbb{Z})$ symmetry を考慮するとくっついた端である ‘頂点’ を中心に考えたほうが自然で, その ‘頂点’ から 3 方向に string 状のものがのびていると考えることにしよう. これが 3-string junction である (図 5.1).

² Dp-brane の action の B_2^{NS} に関する項は Born-Infeld action: $-\frac{1}{(2\pi)^p l_s^{p+1}} \int d^{p+1} \sigma e^{-\varphi} \sqrt{-\det(g_{ij} + 2\pi l_s^2 \mathcal{F}_{ij})}$. ここで $g_{ij} = g_{\mu\nu} \partial_i X^\mu \partial_j X^\nu$ (induced metric) であり, $\mathcal{F}_2 = dA_1 - B_2^{NS}$ (ゲージ不変な組合せ) である [43],[44]. これを 2 次の項まで展開する.

³ 簡単のため $C = 2\pi\chi = 0, C_2 = 0, C_4^+ = 0$ としている. また bosonic part だけを考えている.

⁴ $\delta_8(\text{F})$ ($\delta_{9-p}(\text{Dp})$) は F-string (Dp-brane) の worldvolume のところで値を持つ transverse 8-form ((9-p)-form) delta function を表す.

⁵ F-string が (Dp-brane 上ではなく) 単に端をもつと (5.1.3) の右辺第 2 項がない. よってこの (5.1.3) を満たすことができない. これは charge の保存から単に端をもつことができないためである.

3-string junction から (p_i, q_i) -string ($i=1,2,3$) がのびているとき頂点での charge 保存則は

$$\sum_{i=1}^3 p_i = 0, \quad \sum_{i=1}^3 q_i = 0 \quad (5.1.6)$$

と表される. また 3-string junction が static であるためには 3 つの (p_i, q_i) -string からの tension が釣り合っていないなければならない. (p_i, q_i) -string が頂点からのびている方向の単位ベクトルを \hat{n}_i とすると釣り合いの条件は:

$$\sum_{i=1}^3 T_{(p_i, q_i)} \hat{n}_i = 0, \quad T_{(p, q)} = (2\pi)^{-1} l_s^{-2} \sqrt{(p + q\chi)^2 + q^2 e^{-2\varphi}} \quad (5.1.7)$$

となる. ここで $T_{(p, q)}$ は string metric でみた tension とした.

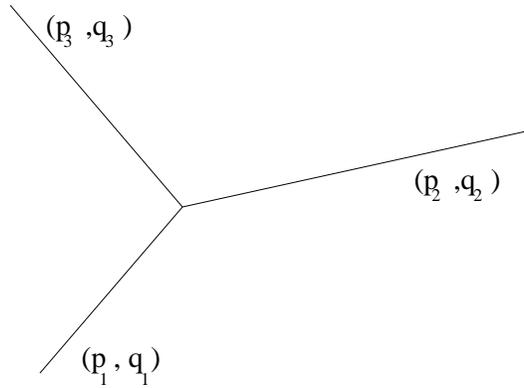


図 5.1: 3-string junction. 頂点から 3 方向に (p_i, q_i) -string ($i=1,2,3$) がのびている.

SUSY

flat background でこの 3-string junction が SUSY をたもつつまり BPS state であることを示そう [29]. (5.1.7) から各 \hat{n}_i は同じ 2 次元平面上にあり, この 2 次元平面を x^8, x^9 方向にとる.

$$p + q\lambda = |p + q\lambda| e^{i\theta(p, q, \lambda)} = 2\pi l_s^2 T_{(p, q)} e^{i\theta(p, q, \lambda)} \quad (5.1.8)$$

とすると (5.1.6) より

$$\sum_{i=1}^3 T_{(p_i, q_i)} e^{i\theta(p_i, q_i, \lambda)} = 0 \quad (5.1.9)$$

を満たすので (5.1.7) のためには

$$\hat{n}_i^9 = \cos \theta(p_i, q_i, \lambda), \quad \hat{n}_i^8 = \sin \theta(p_i, q_i, \lambda) \quad (5.1.10)$$

とすればよいことがわかる。ここで θ を x^9 軸からの角度にとった。 $p + q\lambda$ によって (p_i, q_i) -string が頂点からのびる方向が決まることに注意しよう。

このとき破れずに残っている SUSY を調べよう。そのためにまず (p, q) -string 1 つだけがのびているときの Killing spinor を調べよう。 (p, q) -string が x^1 方向にのびているときの type IIB SUGRA の解は Einstein metric のもとで [37]⁶ :

$$\begin{aligned} ds_{\text{IIB(E)}}^2 &= A_{\mathbf{q}}^{-\frac{3}{4}}(-(dx^0)^2 + (dx^1)^2) + A_{\mathbf{q}}^{\frac{1}{4}}((dx^2)^2 + \cdots + (dx^9)^2), \quad A_{\mathbf{q}} = 1 + \frac{\alpha_{\mathbf{q}}}{3r^6}, \\ \alpha_{\mathbf{q}} &= \Delta_{\mathbf{q}}^{\frac{1}{2}} \cdot 3 \cdot 2^5 \pi^2 l_s^6, \quad \Delta_{\mathbf{q}} = e^{\varphi_0}(p + q\chi_0)^2 + e^{-\varphi_0}q^2, \quad r = \sqrt{(x^2)^2 + \cdots + (x^9)^2}; \\ \lambda &= \frac{p\chi_0 + q|\lambda_0|^2 + ipe^{-\varphi_0}A_{\mathbf{q}}^{\frac{1}{2}}}{p + q\chi_0 - iqe^{-\varphi_0}A_{\mathbf{q}}^{\frac{1}{2}}}; \\ B_{01}^{(1)} &= \Delta_{\mathbf{q}}^{-\frac{1}{2}}A_{\mathbf{q}}^{-1}e^{\varphi_0}(p + q\chi_0), \quad B_{01}^{(2)} = \Delta_{\mathbf{q}}^{-\frac{1}{2}}A_{\mathbf{q}}^{-1}e^{\varphi_0}(p\chi_0 + q|\lambda_0|^2) \end{aligned} \quad (5.1.11)$$

(ここで $\lambda_0, \chi_0, \varphi_0$ はそれぞれ λ, χ, φ の $r \rightarrow \infty$ での値.) となる。これがどの方向の Killing spinor を持つかを調べるためにこの configuration のもとでの dilatino $\tilde{\lambda}$ の SUSY 変換 [34]:

$$\begin{aligned} \delta_{\varepsilon}\tilde{\lambda} &= i\Gamma^{\mu}\varepsilon^*P_{\mu} - \frac{i}{24}\Gamma^{\mu\nu\rho}G_{\mu\nu\rho}\varepsilon, \\ G_3 &= (1 - |B|^2)^{-\frac{1}{2}}(F_3 - BF_3^*), \quad B = -\frac{\lambda - i}{\lambda + i}, \quad F_3 = dB_2^{(1)} + idB_2^{(2)} \end{aligned} \quad (5.1.12)$$

(P_{μ} は (3.1.9) で与えられるもの.) が消える方向の Killing spinor の条件を調べればよい。⁷ $\delta_{\varepsilon}\tilde{\lambda} = 0$ は:

$$e^{i\theta(p,q,\lambda)} \left(\frac{1 + i\lambda^*}{1 - i\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} A_{\mathbf{q}}^{-\frac{3}{4}}\varepsilon^* - \Gamma_0\Gamma_1\varepsilon = 0 \quad (5.1.13)$$

($\theta(p, q, \lambda)$ は (5.1.8) で与えられるもの) となり漸近的に (つまり $r \rightarrow \infty$ で)

$$\tilde{\varepsilon} = e^{i\theta(p,q,\lambda_0)}\Gamma_0\Gamma_1\tilde{\varepsilon}^*, \quad \tilde{\varepsilon} = \left(\frac{1 - i\lambda_0}{1 + i\lambda_0^*} \right)^{\frac{1}{4}} \varepsilon \quad (5.1.14)$$

となる。つまり、この (p, q) -string 解は $\frac{1}{2}$ SUSY を残す BPS state になっている。

ここで $\chi_0 = 0$ または $e^{-\varphi_0} \gg 1$ (weak coupling) のとき $\tilde{\varepsilon}$ と ε は同一視できることに注意しておこう。以下では同一視することにして 10D Weyl spinor (complex spinor) ε を $\varepsilon = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$ ($\varepsilon_1, \varepsilon_2$: real(Majorana) spinor) とおく。⁸

⁶ この論文の convention (§A.2.3) は, [37] で $B_2^{(2)} \rightarrow -B_2^{(2)}$, $q \rightarrow -q$ としたものである。

⁷ (§3.1.2) と同様に gravitino $\delta_{\varepsilon}\psi_{\mu} = 0$ の条件は $\delta_{\varepsilon}\tilde{\lambda} = 0$ の条件で決まる spinor の constant spinor にかかる scalar 関数部分に対する微分方程式を与える。しかし, $r \rightarrow \infty$ ではこの条件は効いてこない, つまり定数倍になる。

⁸ F-string ((1,0)-string), D-string ((0,1)-string) に対する Killing spinor の条件は (§2.2.2) で求めた M2-brane に対する Killing spinor の条件から duality を用いて求めることができる [42]。これは (5.1.14) の特別

これから特に F-string ((1,0)-string) に対する Killing spinor の条件は

$$\Gamma_0 \Gamma_1 \varepsilon_1 = \varepsilon_1, \quad \Gamma_0 \Gamma_1 \varepsilon_2 = -\varepsilon_2 \quad (5.1.15)$$

であり, D-string ((0,1)-string) に対する Killing spinor の条件は

$$\Gamma_0 \Gamma_1 \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \quad (5.1.16)$$

であることがわかる.

次に 3-string junction の場合を考えよう. 上で暗に仮定してきた 3-string junction の configuration はある頂点から 3 方向に (p_i, q_i) -string ($i=1,2,3$) がまっすぐにのびていたものだった. しかし 3-string junction の configuration は type IIB SUGRA の解としてはまだ得られていない. そこで頂点から離れたところだけを考えることにし, 漸近的にそれぞれの場所で (p_i, q_i) -string の 1 つ (近くにあるもの) だけがあるとみなしてよいとしよう. そして λ はある定数だとみなす. そうすると残る SUSY は (5.1.14) と (5.1.7) より

$$\varepsilon = e^{i\theta(p_i, q_i, \lambda)} \Gamma_0 (\Gamma_9 \cos \theta(p_i, q_i, \lambda) + \Gamma_8 \sin \theta(p_i, q_i, \lambda)) \varepsilon^*, \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.1.17)$$

を満たす方向ということになる.

適当に $SL(2, \mathbb{Z})$ 変換を行うことにより (p_i, q_i) -string のどれか 1 つを F-string ((1,0)-string) にしたとすると (5.1.15) (で x^1 方向を x^9 方向によみなおしたもの) が要求され, これを用いてほかの (p_i, q_i) -string に対して (5.1.17) を解くと D-string ((0,1)-string) に対する条件 (5.1.16) (で x^1 方向を x^8 方向によみなおしたもの) が出てくる.

逆に F-string と D-string に対する Killing spinor の条件をあわせたもの:

$$\Gamma_0 \Gamma_9 \varepsilon_1 = \varepsilon_1, \quad \Gamma_0 \Gamma_9 \varepsilon_2 = -\varepsilon_2, \quad \Gamma_0 \Gamma_8 \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \quad (5.1.18)$$

を満たす Killing spinor は (この式は (p_i, q_i) によらないので) (p_i, q_i) -string ($i=1,2,3$) からなる 3-string junction がたもつ SUSY の条件 (5.1.17) を満たすことになる. これから 3-string junction は (上で述べた近似のもとで) $\frac{1}{4}$ SUSY をたもつ BPS state であることがわかる.

‘string network’

上で述べたことから 3-string junction が x^8 - x^9 面内にいくつあってもそれぞれの頂点で charge 保存則 (5.1.6) と 釣合いの条件 (5.1.7) を満たしていればそれは (5.1.18) を満たす方向の SUSY をたもっている. これが ‘string network’ である.

な場合になっている. 実は [34] の SUSY 変換のパラメーター ε を $\tilde{\varepsilon} = \left(\frac{1-i\lambda}{1+i\lambda^*}\right)^{\frac{1}{4}} \varepsilon$ で再定義することにより $\lambda \rightarrow \frac{a\lambda+b}{c\lambda+d}$ の $SL(2, \mathbb{Z})$ 変換のもとで $\tilde{\varepsilon} \rightarrow \left(\frac{c\lambda+d}{c\lambda^*+d}\right)^{-\frac{1}{4}} \tilde{\varepsilon}$ と変換することが知られている [38],[39]. この変換のもとで (5.1.14) の第 1 式は $SL(2, \mathbb{Z})$ 不変である [29].

さらに charge 保存則と釣合いの条件をみたく 3-string junction で張られた ‘string network’ (空間 2 次元面にひろがっている) が 平行にいくつあっても (そしてそれぞれが違った構成になっていても) 上で述べた近似のもとで $\frac{1}{4}$ SUSY をたもつ BPS state であることがわかる (図 5.2).

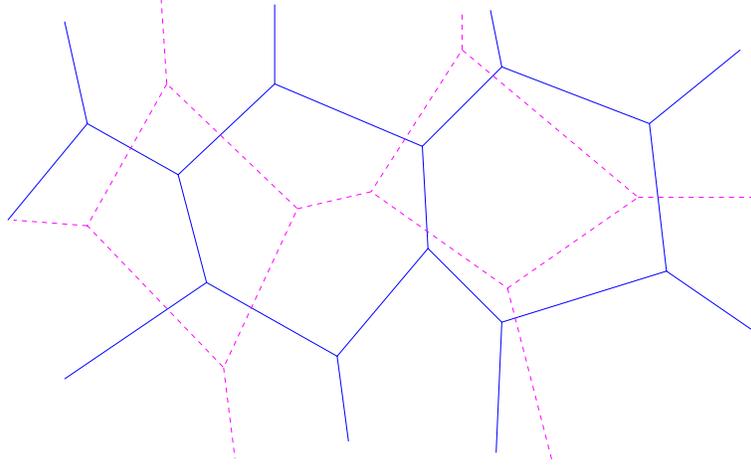


図 5.2: string network. それぞれの 3-string junction では charge の保存則 (5.1.6) と 釣合いの条件 (5.1.7) をみたく. また string network が平行にいくつあっても同じ SUSY をたもつ.

5.1.2 ‘pants diagram’

今度は 3-string junction を M理論の立場でみてみよう. ここでは flat background で考える. type IIB 理論とM理論を関係づけるために M理論を torus に compact 化しておく. つまりM理論を $\mathbb{R}^{8,1} \times T^2$ で考える. T^2 を x^{10} , x^7 方向にとっておく ($x^{10} \sim x^{10} + 2\pi$, $x^7 \sim x^7 + 2\pi$).

まず, type IIB の (p, q) -string は M理論 の 描像 では torus の (p, q) -cycle にまきついた M2-brane であることから (3.3.1) より

$$qx^{10} - px^7 = \text{const.} \quad (5.1.19)$$

で表される. これが BPS state つまり supersymmetric な configuration になるためには第 2 章でみたように M2-brane が holomorphic に埋め込まれていなければならない. 今の場合 (§5.1.1) に対応した状況を考えたいので M2-brane ののびている残りの方向を x^8 - x^9 面内にとる. 今 flat background を考えようとしているがこれは形式的には 7-brane がない場

合と思える, つまり (3.1.6) で特に

$$\Phi = -\varphi + F + \bar{F} = 0, \quad \varphi = \text{const.}, \quad F = \text{const.} \quad (5.1.20)$$

の場合を考えていることになる. $z = x^8 + ix^9$ とし F を実数にとると⁹ $F = \frac{\varphi}{2}$ なので (3.2.8) は

$$X = \text{Im}(\lambda e^{\frac{\varphi}{2} + i\theta} z) + iR_B^{-1}x^{10}, \quad Y = -\text{Im}(e^{\frac{\varphi}{2} + i\theta} z) + iR_B^{-1}\underline{x}^7 \quad (5.1.21)$$

となる. すると holomorphic に埋め込むためには (5.1.19) から

$$R_B(qX - pY) = \text{const.} \quad (5.1.22)$$

でなければならないことがわかる. この実部をみると

$$\text{Im}((p + q\lambda)e^{\frac{\varphi}{2} + i\theta} R_B z) = \text{const.} \quad (5.1.23)$$

となりこれは (§3.3.3) で考えた type IIB decompactification limit にちょうど対応している. また (§5.1.1) に対応した座標の取り方をするには (1,0)-string が x^9 方向にのびていれればいのでこれは $\theta = \frac{\pi}{2}$ ととったものに対応する. また今の場合 flat なので λ は global に定数である. つまり $SL(2, \mathbb{Z})$ 変換を受けるような cut はない. (だから上で (3.2.25) を積分した形で表しておいた.) したがって $x^{10} \sim x^{10} + 2\pi$, $\underline{x}^7 \sim \underline{x}^7 + 2\pi$ を考慮するとさらに holomorphic 変換した

$$s = \exp R_B X, \quad t = \exp R_B Y \quad (5.1.24)$$

という複素座標がよい座標になっている. そして (5.1.22) から (p, q) -string を表す M2-brane は

$$s^q t^{-p} = \text{const.} \quad (5.1.25)$$

で表される.

いったん complex structure を決めてしまうと (§2.2.2) でみたように

$$f(s, t) = 0 \quad (5.1.26)$$

(ここで f は任意の関数.) という holomorphic な関係式を与えると, それは今の場合 $\frac{1}{4}$ SUSY をたもつ ある M2-brane の configuration を表している. あとは 3-string junction に対応する $f(s, t)$ をみつければよい.

$$c_1 s^{-q_1} t^{p_1} + c_2 s^{q_2} t^{-p_2} = 1 \quad (5.1.27)$$

⁹ F の虚部は θ の再定義で吸収できる.

(c_1, c_2 はゼロでない定数.) を考えてみよう [30]. これを書き直すと,

$$s^{q_1 - q_2} t^{-p_1 + p_2} - c_1 s^{-q_2} t^{p_2} - c_2 s^{q_1} t^{-p_1} = 0 \quad (5.1.28)$$

あるいは

$$(s^{q_1} t^{-p_1} - c_1)(s^{-q_2} t^{p_2} - c_2) = c_1 c_2 \quad (5.1.29)$$

となる. 今 $p_1 q_2 - p_2 q_1 < 0$ とする. (こうなっていないときは 1 と 2 のラベルを付け替える.) そして $s = u^a$, $t = u^b$ とおく. このとき (5.1.29) より

$$\begin{aligned} s^{q_1} t^{-p_1} &\sim c_1, \quad a \sim p_1, b \sim q_1, \quad u \rightarrow \infty; \\ s^{q_2} t^{-p_2} &\sim c_2^{-1}, \quad a \sim p_2, b \sim q_2, \quad u \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (5.1.30)$$

となり, また (5.1.28) より

$$s^{-q_1 - q_2} t^{p_1 + p_2} \sim -\frac{c_2}{c_1}, \quad a \sim -p_1 - p_2, b \sim -q_1 - q_2, \quad u \rightarrow 0 \quad (5.1.31)$$

となる. つまりそれぞれの方向の極限をとると (5.1.27) は (5.1.25) よりそれぞれ (p_1, q_1) -string, (p_2, q_2) -string, $(-p_1 - p_2, -q_1 - q_2)$ -string を表す M2-brane の式になっている. これは (5.1.27) が 3-string junction を表す M2-brane の式になっていることを示している.

これからわかるように M理論 で 3-string junction をみるとそれはなめらかな 1 つの complex curve で表され type IIB 理論でみたときの頂点のような特異点はない. M理論 では 3-string junction は M2-brane の ‘pants diagram’ で表されるのである.

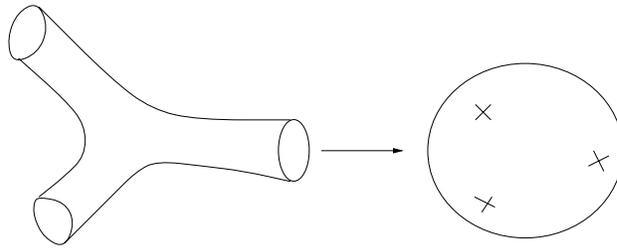


図 5.3: pants diagram. 左の ‘pants diagram’ は 3 つの足が無限にのびていると思うと右の 3 つ穴の開いた球 S^2 に holomorphic に等しくなる [31].

次に ‘pants diagram’ を M2-brane の空間方向の 2 次元分 (その座標を (§2.2.1) と同様に $\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2$ とする) から (s, t) への holomorphic 写像として考えてみよう [31],[42]. そうすると ‘pants diagram’ は 3 つ穴の開いた $S^2 \cong \mathbb{CP}^1$ とみなすことができる. そこで holomorphic 写像:

$$\log s = \sum_{i=1}^3 p_i \log(\sigma - \sigma_i), \quad \log t = \sum_{i=1}^3 q_i \log(\sigma - \sigma_i) \quad (5.1.32)$$

を考えるとこれは (p_i, q_i) -string ($i = 1, 2, 3$) からなる 3-string junction を表す. 実際 σ が σ_i のまわりを 1 回まわると $\log s, \log t$ はそれぞれ $2\pi i p_i, 2\pi i q_i$ だけ増える. これはその近くで M2-brane が (p_i, q_i) -cycle に巻き付いていることを表している. また

$$\sum_{i=1}^3 p_i = \oint \frac{1}{2\pi i} d \log s(\sigma) = 0, \quad \sum_{i=1}^3 q_i = \oint \frac{1}{2\pi i} d \log t(\sigma) = 0 \quad (5.1.33)$$

(積分路は $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ をすべて囲むようにとる) は charge の保存則を表している. また $\sigma_3 = 0$ の場合 (5.1.32) は

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_1 - \sigma_2} s^{\frac{q_1}{p_2 q_1 - p_1 q_2}} t^{\frac{-p_1}{p_2 q_1 - p_1 q_2}} + \frac{-\sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2} s^{\frac{-q_2}{p_2 q_1 - p_1 q_2}} t^{\frac{p_2}{p_2 q_1 - p_1 q_2}} = 1 \quad (5.1.34)$$

となり特に $p_2 q_1 - p_1 q_2 = -1$ のとき (5.1.27) の形になっている.

5.2 3-string junction in 7-brane background

[32] は (§4.2.2) の 7-brane background (で少し deform したものの) のもとで (p, q) -string を考えることにより (§4.2.2) の gauge enhancement を理解できることを示唆した. [33] は 3-string junction を考えることによりそれをより直観的に理解できる可能性を示そうとしている. しかしかなり仮定を置いたものでありまだ数学的にきちんと整理されていない. それは大雑把な議論であるが E_6, E_7, E_8 という例外群の gauge enhancement を直観的に理解できる可能性としては魅力的である. また (§3.3) で求めた複素座標 X, Y を用いればそれを M理論の描像から M2-brane の configuration としてみることができそうである. ここではそのあたりのことを議論する.

5.2.1 type IIB 理論の描像

まず, 7-brane background で 3-string junction があるとき破れずに残る SUSY の数を調べよう. (3.1.11), (5.1.18) より, $\frac{1}{4}$ SUSY が残る. これは 7-brane background で (r, s) -string だけがある場合に破れずに残る SUSY の数と同じであることに注意しよう. (3.1.11) と (5.1.18) の条件は独立ではないからである. これは M理論でみたとき (§2.2.2) の (2) の (2.1) と (2.2) の場合で破れずに残る SUSY はともに 8 個 つまり $\frac{1}{4}$ SUSY だったことに対応している.¹⁰

さて, (§3.3) でみたように $[p, q]$ 7-brane background では $[p, q]$ 7-brane の transverse 方向に $[p, q]$ 7-brane から T に conjugate な $SL(2, \mathbb{Z})$ 変換 $M_{p,q}$ をひきおこす cut が入る.

¹⁰ 7-brane background は hyperkähler だった (§3.2.2).

(r, s) -string がその cut を横切ると $SL(2, \mathbb{Z})$ 変換を受けてその cut より先は (r', s') -string になる:

$$\begin{pmatrix} r' \\ -s' \end{pmatrix} = M_{p,q} \cdot \begin{pmatrix} r \\ -s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ -s \end{pmatrix} + (qr - ps) \begin{pmatrix} p \\ -q \end{pmatrix} \quad (5.2.1)$$

では cut を横切った (r, s) -string ((r', s') -string) を少しずつ動かしてその cut をつくる $[p, q]$ 7-brane を横切ろうとすると何が起ころうか? 直観的に $[p, q]$ 7-brane のところで string がひっかかりそうである. (5.2.1) は引っ張ると $[p, q]$ 7-brane から $\pm(p, q)$ -string が $|qr - ps|$ 個のびてきて 3-string junction が $|qr - ps|$ 個 できることを意味しているとも考えることもできる (図 5.4).¹¹

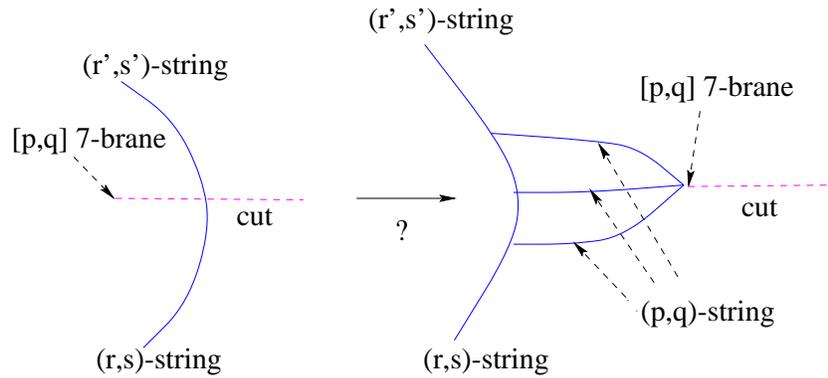


図 5.4: cut を横切る string を動かして $[p, q]$ 7-brane を横切ると $\pm(p, q)$ -string が $|qr - ps|$ 個のびてきて自然に 3-string junction が生じる!?

これは Hanany-Witten 効果の U-duality 版になっていることから予想されることである. 実際 Hanany-Witten [6] の configuration は:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
NS5	○	○	○	○	○	○				
D5	○	○	○					○	○	○
D3	○	○	○				○			

ここでのびている方向を ○ で表した.

Hanany-Witten 効果は NS5-brane と D5-brane の x^6 方向の位置を入れ替えるとその間に D3-brane が生じるというものだった.

x^1, x^2 方向に T-dual をとると

¹¹ $qr - ps = 0$ のときはひっかからずに単に通過すると思われる.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
NS5	○	○	○	○	○	○				
D3	○							○	○	○
D1	○						○			

S-dual をとると

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
D5	○	○	○	○	○	○				
D3	○							○	○	○
F1	○						○			

x^7, x^8 方向に T-dual をとると

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
D7	○	○	○	○	○	○		○	○	
D1	○									○
F1	○						○			

さらに x^6 方向と x^8 方向を入れ替え, $SL(2, \mathbb{Z})$ 変換すれば今考えている configuration に一致する. Hanany-Witten 効果は今の場合 D7-brane と D-string の位置を入れ替えればその間に F-string が生じるということになる. $SL(2, \mathbb{Z})$ 変換すれば上の $[p, q]$ 7-brane と (r, s) -string の関係になる. また Hanany-Witten の s-rule: NS5-brane と D5-brane をつなぐ D3-brane は 1 枚しか許されない (supersymmetric ではない)[6]¹² は今の場合生じる (p, q) -string は 1 つだけということになる. つまり $qr - ps = \pm 1$ のときしかこの過程で 3-string junction は生じないということになる.¹³ F-string ((1,0)-string) が D-string ((0,1)-string) の上にしか端をもてない (つまり, F-string (($\pm 1, 0$)-string) を含む 3-string junction は必ず D-string ((0,1)-string) を含む) ということを仮定すれば この 3-string junction は $qr - ps = \pm 1$ を満たしている. (\pm は string の向きによる.) この 3-string junction に $SL(2, \mathbb{Z})$ 変換: $\begin{pmatrix} p & r \\ -q & -s \end{pmatrix}$ をすることにより, 一般に $\pm(p, q)$ -string と (r, s) -string のなす 3-string junction に対して $qr - ps = \pm 1$ であるということになる.

¹² s-rule は [6] では conjecture に近かったが, T-dual をとった type IIA 理論 あるいは M理論 の言葉で [5] 等で示されている.

¹³ ‘D-string’ と ‘D7-brane’ の場合に単純に s-rule を当てはめていいかどうか疑問である. D-string ((0,1)-string) に D7-brane ([1,0] 7-brane) からのびた F-string ((1,0)-string) がくっつくときについた先からはもはや D-string ではなく (1,1)-string であり, しかも (§5.1.1) でみたように この D-string, (1,1)-string は F-string がくっついた頂点のところで曲がるので Hanany-Witten の configuration と精確には対応していないからである.

[33] は, $qr - ps = \pm 1$ を満たす $\pm(p, q)$ -string と (r, s) -string のなす (残りの1つの string は charge の保存則が成り立つように決める) 3-string junction だけが 7-brane を横切るときに生じると仮定して, (§4.2.2) の $SO(8)$, E_6 , E_7 , E_8 の gauge symmetry が生じると思われる場合を議論している. それを簡単に紹介する.¹⁴

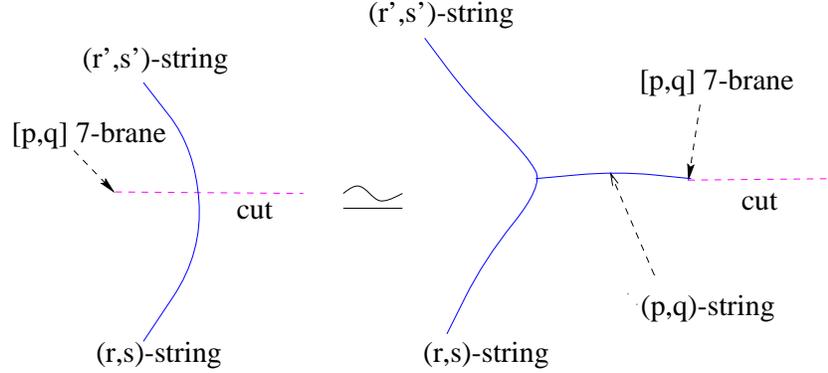


図 5.5: $[p, q]$ 7-brane の作る cut を横切る (r, s) -string ((r', s') -string) は $qr - ps = \pm 1$ を満たすときだけ (r, s) -string, (r', s') -string, (p, q) -string のつくる 3-string junction と同等になる. つまり互いに移り変わる.[33]

(§4.2.2) の D_4 , E_6 , E_7 , E_8 の 特異 fiber が生じるのはそれぞれ 6, 8, 9, 10 個の 7-brane が重なった場合である. z -plane 上のその点の近くの 特異 fiber を表す式を deform することにより 重なった 7-brane は互いに離れていくが そのとき次のような monodromy をもつ 7-brane になる [32],[33]:¹⁵

特異型	[1,0] 7-brane の数	[3,1] 7-brane の数	[1,1] 7-brane の数	全体の monodromy
D_4	4	1	1	$T^4 BC = -1$
E_6	5	1	2	$T^5 BC^2 = (ST)^2$
E_7	6	1	2	$T^6 BC^2 = S$
E_8	7	1	2	$T^6 BC^2 T = ST$

ここで [1,0] 7-brane は monodromy T , [3,1] 7-brane は monodromy $B = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$,

¹⁴ この議論は今のところあまり厳密なものではない. しかし (§4.2.2) での fiber の特異型が gauge symmetry になるということの直観的理解の可能性を与えてくれているように思える.

¹⁵ 原理的には $y^2 = x^3 + f(z)x + g(z)$ の $f(z), g(z)$ を deform して (A.1.47) から計算できる.

[1,1] 7-brane は monodromy $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ を生じる.¹⁶ 全体の monodromy は (§4.2.2) のものと等しい.

つまりいずれの場合も 3 種類の 7-brane にわかれる. いずれの場合も [3,1] 7-brane は 1 つなのでそれにくっつく (3,1)-string から $U(1)$ が生じる. [1,1] 7-brane よりそれにくっつく (1,1)-string から D_4 のときは $U(1)$, E_6, E_7, E_8 のときは $U(2)$ が生じる. [1,0] 7-brane よりそれにくっつく (1,0)-string から D_4, E_6, E_7, E_8 のときそれぞれ $U(4), U(5), U(6), U(7)$ が生じる. これを manifest subgroup とよぼう. この manifest subgroup の表現で, 期待される gauge symmetry を次のように分解できる [33]. ただし, $U(1)$ 部分はあまり考えないことにする.

$$\begin{aligned}
SO(8) &\supset SU(4) \times U(1) \\
\mathbf{28} &\rightarrow \text{adj}_0 + \mathbf{1}_0 + \bar{\mathbf{3}}_{-2} + \bar{\mathbf{3}}_{+2} \\
E_6 &\supset SU(5) \times SU(2) \times U(1) \\
\mathbf{78} &\rightarrow (\text{adj}, \mathbf{1})_0 + (\mathbf{1}, \mathbf{1})_0 + (\mathbf{1}, \text{adj})_0 \\
&\quad + (\bar{\mathbf{3}}, \square)_{-3} + (\bar{\mathbf{3}}, \square)_3 + (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_{-6} + (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_6 \\
E_7 &\supset SU(6) \times SU(2) \times U(1) \\
\mathbf{133} &\rightarrow (\text{adj}, \mathbf{1})_0 + (\mathbf{1}, \mathbf{1})_0 + (\mathbf{1}, \text{adj})_0 \\
&\quad + (\bar{\mathbf{3}}, \square)_{-1} + (\bar{\mathbf{3}}, \square)_1 + (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_{-2} + (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_2 + (\mathbf{1}, \square)_{-3} + (\mathbf{1}, \square)_3 \\
E_8 &\supset SU(7) \times SU(2) \times U(1) \\
\mathbf{248} &\rightarrow (\text{adj}, \mathbf{1})_0 + (\mathbf{1}, \mathbf{1})_0 + (\mathbf{1}, \text{adj})_0 \\
&\quad + (\bar{\mathbf{3}}, \square)_2 + (\bar{\mathbf{3}}, \square)_{-2} + (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_4 + (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_{-4} + (\bar{\mathbf{3}}, \square)_6 + (\bar{\mathbf{3}}, \square)_{-6} + (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_8 + (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_{-8}
\end{aligned} \tag{5.2.2}$$

このうち manifest subgroup の adjoint 表現 はいつものように cut を横切らない string によって表される [26]. 他の反対称表現や基本表現の入ったものは cut を横切る string によって [32], あるいは 3-string junction によって [33] 表されると考えられ, それぞれに対応していると思われる状態を前に述べた選択則 $qr - ps = \pm 1$ にしたがってつくることのできる (図 5.6), [33].¹⁷ 実際 (§5.1) でみたように 3-string junction は少なくとも flat background で漸近的に BPS state になっていたので 7-brane がくっついた極限で何らか

¹⁶ この論文の convention は [33] の $[p, q], (r, s)$ において $q, s \mapsto -q, -r$ としたものである.

¹⁷ 双基本表現, 対称表現に対応している状態は実現できないと思われる [33].

の意味で gauge boson を表すように思える. しかしこれはまだ conjecture の段階であり 詳しい解析, 定式化はなされていない.¹⁸

5.2.2 M理論の描像

7-brane background で cut を横切る (r, s) -string が $[p, q]$ 7-brane を横切るときに 3-string junction が生じる様子を M理論でみるとどうなるだろうか?

原理的には (3.3.3) から $R_B(sdX - rdY) = 0$ で表されているはずである. つまり, z -plane 上 基点 z_0 を定めて,

$$\int_{z_0}^z R_B(sdX - rdY) = c \quad (c \text{ は定数.}) \quad (5.2.3)$$

により (r, s) -string が表されるが, この定数 c を変えることにより (r, s) -string の位置が変わり, ある定数 c で $[p, q]$ 7-brane を横切ると思われる. ここで charge (r, s) は cut を横切ると (5.2.1) にしたがって変換されることに注意しよう. 基点 z_0 から z までの積分路で cut を横切れば

$$\int_{\text{cut}}^z R_B(s'dX' - r'dY') + \int_{z_0}^{\text{cut}} R_B(sdX - rdY) = c \quad (5.2.4)$$

のように表される (3.3.14),(3.3.15).¹⁹

定数 c を連続的に変えていって M2-brane の configuration (特に z 依存性) がどうなるか調べればよいのだが, 座標変換 (3.2.25) が複雑な形をしているのでそれは容易ではない. 以下では speculation 的な議論をする. z -plane 上 $[p, q]$ 7-brane から離れたところを M2-brane が通るとき (cut を横切っているかどうかにかかわらず) M2-brane はシリンダーの形をしている. z を固定すると M2-brane はつぶれていない torus のある 1-cycle に巻き付いているからである.²⁰ 定数 c を連続的に変えていって (r, s) -string を表す M2-brane が $[p, q]$ 7-brane のところに来たとき $[p, q]$ 7-brane からは cut が出ているため, $qr - ps = 0$ のときは単に通過するが, $qr - ps \neq 0$ のときは M2-brane は $[p, q]$ 7-brane のところで ‘ひっかかる’ と思われる. $[p, q]$ 7-brane のところでは torus の (p, q) -cycle がつぶ

¹⁸ (5.2.2) の $SO(8)$ と全く同様の分解が $SO(2m)$ に対して成り立つので $SO(2m) (= D_m)$ への一般化はほぼ自明である. また, $SU(N) (= A_{N-1})$ は普通の D-brane でよく知られたことである [26]. とすると, このアプローチ (もし正しければ) で理解できる gauge 群は少なくとも A-D-E 群 (simply-laced) である. 他の単純群 (non-simply-laced) は同様のアプローチではなかなかうまくできない. 一方, elliptically fibered K3 の singular fiber の分類 (§A.1.6) から A-D-E 型の特異性しかあらわれない. したがってこのアプローチがもし正しければ gauge 群として A-D-E 群 しか現れないと思われる.

¹⁹ この意味で (3.3.3) では微分の形で書いた.

²⁰ cut を横切っても $s'dX' - r'dY' = sdX - rdY$ ((3.3.14),(3.3.15)) より M2-brane は連続的につながってる.

れる。²¹ したがって (p, q) -cycle に巻き付いた M2-brane は ‘ひっかかって’ $[p, q]$ 7-brane のところから (端をもたずに) のびることができる (図 5.7). この状況が type IIB 理論の 図 5.5 に対応すると思われる.

では [33] の選択則 $qr - ps = \pm 1$ (§5.2.1) を今の M 理論でみるとどうなるだろうか? $qr - ps \neq \pm 1, 0$ のとき type IIB 理論では 図 5.4 のように $[p, q]$ 7-brane から複数個 $\pm(p, q)$ -string がのびると単純には考えられるが, それが禁止されるというのが [33] の選択則である.²² M 理論で 図 5.4 に対応するものは シリンダーの形ではなく ‘穴’ のあいた M2-brane (図 5.8) になるがそれが禁止されることになる. つまり定数 c を連続的に変えていって ‘ (r, s) ’-string を表す M2-brane が $[p, q]$ 7-brane のところにきたとき $qr - ps \neq \pm 1, 0$ であっても 図 5.8 のようにはならず 図 5.7 の下の図 のようにしかならないということを [33] の選択則は 知っていると思われる. 図 5.8 と 図 5.7 の下の図 の M2-brane は 位相が違うが 図 5.7 の上の図と下の図 の M2-brane は 位相が同じ (シリンダーの形) なので, [33] の選択則 は M 理論では 定数 c を連続的に変えていくとき 位相が変わらないと言い換えられるのかもしれない.

²¹ 7-brane のところで (up to $SL(2, \mathbb{Z})$ で) $\lambda \rightarrow i\infty$ だった.

²² $qr - ps = 0$ のときはひっかからずに単に通過するとしている.

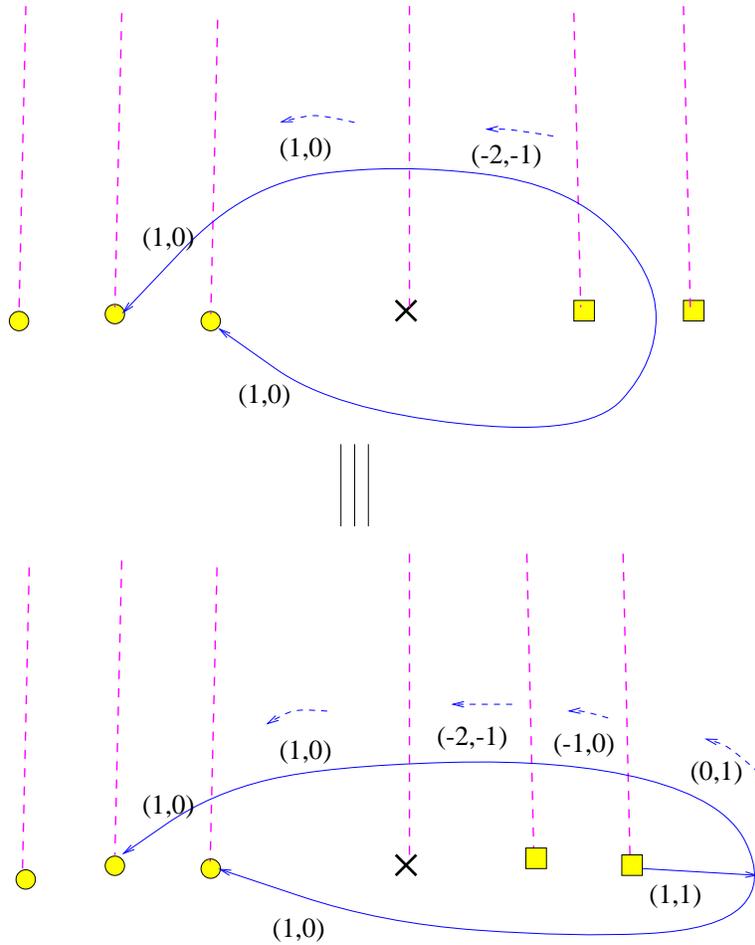


図 5.6: 矢印付きの実線は (反対称, 基本) 表現を表す ‘BPS state’. $(-2, -1)$ 等は string の (r, s) -charge を表す. また \circ は $[1, 0]$ 7-brane, \times は $[3, 1]$ 7-brane, 四角は $[1, 1]$ 7-brane を表す. 点線は 7-brane から生じる cut. この cut を横切ると (p, q) -charge が変わる (5.2.1). 上の図と下の図は 7-brane の位置を動かすことによって互いに移り変わる (図 5.5). 下の図をみると直観的に (反対称, 基本) 表現を表しているように思える. この上下 2 つの図以外にもさらに 7-brane を横切って移り変わる 同じ (反対称, 基本) 表現を表す ‘BPS state’ がある.

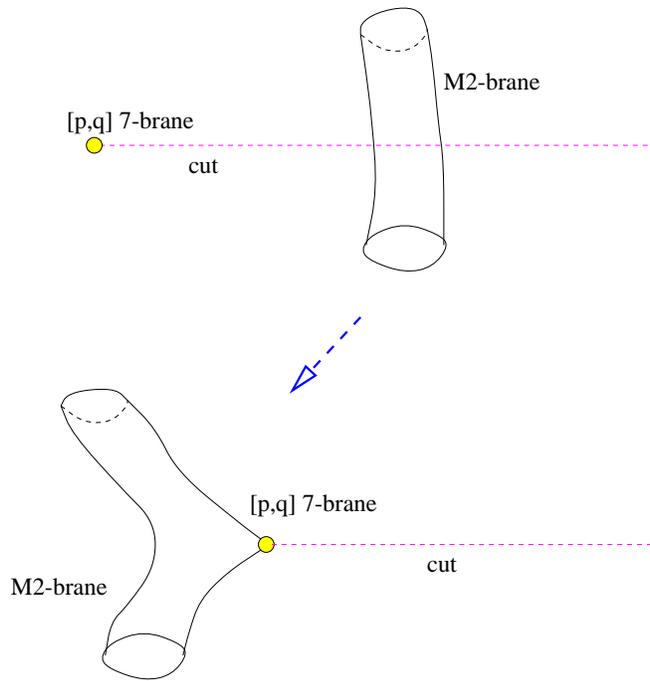


図 5.7: 定数 c を連続的に変えていって (r, s) -string を表す M2-brane が $[p, q]$ 7-brane のところに来ると, 下の図のように M2-brane は $qr - ps \neq 0$ のとき $[p, q]$ 7-brane に ‘ひっかかる’ と考えられる. これが type IIB 理論の 図 5.5 を M理論でみたものに対応していると思われる.

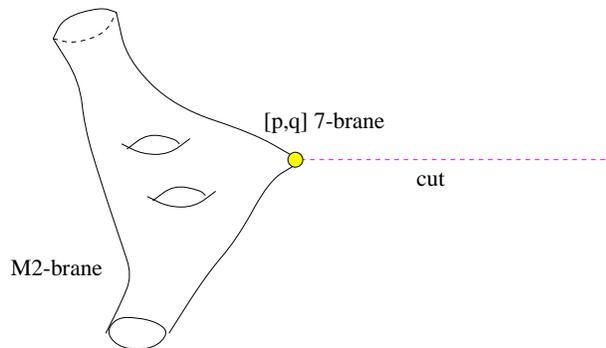


図 5.8: type IIB 理論の 図 5.4 を M理論でみたとき対応する M2-brane の形 ($|qr - ps| = 3$ の場合). [33] の選択則によれば 図 5.7 の上の図から連続変形によってこのような形になることはない!?

第6章 まとめ

type IIB の 7-brane 解は M理論でみると 4次元分が hyperkähler metric になっている。したがって、いろいろな complex structure の選び方がある。一方, type IIB の (p, q) -string は M理論でみると torus の (p, q) -cycle に巻き付いた M2-brane である。それが BPS state であるためには holomorphic に埋め込まれていなければならない(第2章)ので, (p, q) -cycle に巻き付いたことを表すためには, torus の座標が 2つの複素 (holomorphic) 座標で表されていなければならない。実際 (3.2.25) で決まる X, Y を用いて (3.3.3): $R_B(qdX - pdY) = 0$ で BPS (p, q) -string を表す M2-brane を記述できる。その際 7-brane によってできる cut を横切ると (3.3.14) の線形な holomorphic 変換を受けることに注意する必要がある。またこのように線形にできたのは background の hyperkähler の holomorphic 2-form Ω (3.2.6) の選び方に phase factor $e^{i\theta}$ の任意性があったからである。

type IIB の 7-brane は F理論 on elliptically fibered K3 としてみるほうが M理論でみるよりも自然である(第4章)。elliptically fibered K3 の singular fiber の特異型 (A-D-E 型) に対応した gauge symmetry が enhance されると考えられているが, それを直観的に理解しようとする試みがある (§5.2.1), [33]。ここでは特に例外群 E_6, E_7, E_8 を実現するために ‘3-string junction’ (§5.1.1) が必要だった。‘3-string junction’ は flat background では漸近的に BPS state となっていた。それをM理論でみた ‘pants diagram’ (§5.1.2) は flat background では holomorphy によって容易につくることができた。7-brane background で ‘ (r, s) ’-string を表す M2-brane は (5.2.3) で表されるが, その定数 c を連続的に変えていったとき M2-brane が $[p, q]$ 7-brane のところに来たとき $qr - ps \neq 0$ なら ‘ひっかかる’ と思われる (図 5.7)。また [33] の選択則はこの過程で 図 5.8 のようになることを禁止していると解釈できる。7-brane の近くで M2-brane の形がどうなるかということは本当は (5.2.3) をきちんと調べないとわからないが, 表式が複雑なのでこれは困難である。

最後にこの論文で紹介しなかった他の 7-brane 解についてコメントしておく。それは circularly symmetric solution とよばれる T -dual 変換で D8-brane になるものである [39]。

¹ この解は形式的には (3.1.7) の形をしているがそのままでは λ の $SL(2, \mathbb{Z})$ 変換で metric が不変な形になっていない。

¹ この T -dual 変換 は massive IIA SUGRA に関係したもので, (§A.2.5) とは違うものである。

謝辞

この論文の作成のために議論していただき、この論文の草稿を精読していただいた笹倉直樹氏に感謝します。また、様々な示唆や励ましをいただいた素粒子論研究室の方々に感謝します。特に今村洋介氏の [42] およびそれに基づく講義は大いに参考にさせていただきました。

付録 A

A.1 定義，公式，convention，notation 等

ここではこの論文で用いる定義，公式，convention，notation 等をまとめておく。

A.1.1 form, 擬 Riemann 多様体 等

添字の反対称化，対称化 の記号 ($[\]$, $()$) は次のように定める：

$$[\mu_1 \cdots \mu_n] = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign} \sigma \{ \mu_{\sigma(1)} \cdots \mu_{\sigma(n)} \}; \quad (\mu_1 \cdots \mu_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \{ \mu_{\sigma(1)} \cdots \mu_{\sigma(n)} \}. \quad (\text{A.1.1})$$

また 反対称化，対称化 に参加しない添字が途中にある場合は $|\ |$ で囲む。

D 次元時空 (t 個負計量の擬 Riemann 多様体) を考える。一般に n -form, およびその Hodge dual は次のように定める。¹

$$A_n = \frac{1}{n!} A_{\mu_1 \cdots \mu_n} dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_n} \quad (\text{A.1.2})$$

$$*A_n = \frac{1}{(D-n)!} \frac{1}{n!} A_{\mu_1 \cdots \mu_n} \varepsilon^{\mu_1 \cdots \mu_n}_{\nu_1 \cdots \nu_{D-n}} dx^{\nu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\nu_{D-n}} \quad (\text{A.1.3})$$

ここで

$$\varepsilon^{\mu_1 \cdots \mu_D} := \frac{1}{\sqrt{(-)^t g}} \varepsilon^{\mu_1 \cdots \mu_D}; \quad g := \det g_{\mu\nu} \quad (\text{A.1.4})$$

$\varepsilon^{\mu_1 \cdots \mu_D}$ は D 階反対称記号で ± 1 の値をとるもの。 $\varepsilon^{\mu_1 \cdots \mu_D}$ が D 階反対称テンソル。このとき，次の式が成り立つ。

$$*(A_n) = (-1)^{t+n(D-n)} A_n; \quad A_n \wedge *B_n = B_n \wedge *A_n. \quad (\text{A.1.5})$$

さらに，

$$A_n \wedge *A_n = (-1)^t \frac{1}{n!} A_n^2 \sqrt{(-)^t g} d^D x \quad (\text{A.1.6})$$

ここで， $A_n^2 = A^{\mu_1 \cdots \mu_n} A_{\mu_1 \cdots \mu_n}$ とかいた。

¹ form 等の基本的なことがらについては [45] の付録 E の convention にしたがった。

内部積 i_v ($v = v^\mu \partial_\mu$) は次のように定める.

$$i_v A_n = \frac{1}{(n-1)!} v^\mu A_{\mu\mu_1 \dots \mu_{n-1}} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_{n-1}} \quad (\text{A.1.7})$$

このとき, 次の式が成り立つ.

$$i_v(*A_n) = *(A_n \wedge v) \quad (v = g_{\mu\nu} v^\mu dx^\nu). \quad (\text{A.1.8})$$

以下, 符号が $(- + \dots +)$ のものを考える: $\eta_{ab} = \text{diag}(-1, +1, \dots, +1)$, $\epsilon^{01 \dots D-1} = +1$. veilbein e_μ^a と metric とは次の関係がある.

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} e_\mu^a e_\nu^b; \quad \eta^{ab} = g^{\mu\nu} e_\mu^a e_\nu^b \quad (\text{A.1.9})$$

spin connection ω^a_b を使って curvature は次のように定める.

$$d\omega^a_b + \omega^a_c \wedge \omega^c_b = \frac{1}{2} R^a_{bcd} e^c \wedge e^d \quad (e^a = e_\mu^a dx^\mu). \quad (\text{A.1.10})$$

さらに,

$$\text{metricity: } g_{\mu\nu;\rho} = \partial_\rho g_{\mu\nu} - \Gamma_{\rho\mu}^\lambda g_{\lambda\nu} - \Gamma_{\rho\nu}^\lambda g_{\lambda\mu} = 0, \quad \text{no torsion: } T^\mu_{\nu\rho} = \frac{1}{2}(\Gamma_{\nu\rho}^\mu - \Gamma_{\rho\nu}^\mu) = 0. \quad (\text{A.1.11})$$

を要求して, Christoffel symbol :

$$\Gamma_{\nu\rho}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} (\partial_\nu g_{\lambda\rho} + \partial_\rho g_{\lambda\nu} - \partial_\lambda g_{\nu\rho}) \quad (\text{A.1.12})$$

となる. いいかえると,

$$\text{metricity: } \omega_{ab} = -\omega_{ba}, \quad \text{no torsion: } T^a = de^a + \omega^a_b \wedge e^b = 0 \quad (\text{A.1.13})$$

となり, spin connection : $\omega^a_b = \omega_\mu^a{}_b dx^\mu$ は次のようにあらわせる.

$$\omega_\mu^{ab} = \frac{1}{2} e^{\nu[a} (\partial_\mu e_\nu^{b]} - \partial_\nu e_\mu^{b]}) + \frac{1}{2} e^{\rho[a} e^{\lambda|b]} e_\mu^c \partial_\lambda e_{\rho c} \quad (\text{A.1.14})$$

Riemann tensor は:

$$R^\lambda_{\rho\mu\nu} = \partial_{[\mu} \Gamma_{\nu]\rho}^\lambda + \Gamma_{\sigma[\mu}^\lambda \Gamma_{\nu]\rho}^\sigma, \quad R^a_{b\mu\nu} = \partial_{[\mu} \omega_{\nu]}^a{}_b + \omega_{[\mu}^{ac} \omega_{\nu]cb} \quad (\text{A.1.15})$$

となる. または Ricci tensor, scalar curvature は次のように定める.

$$R_{\mu\nu} = e^\rho{}_a e_\mu^b R^a{}_{b\rho\nu}; \quad R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (\text{A.1.16})$$

以下, いろいろな公式をかく.

Weyl 変換: $g'_{\mu\nu} = e^\gamma g_{\mu\nu}$ に対し

$$R(g') = e^{-\gamma} \left(R(g) - (D-1)\nabla^2\gamma - \frac{1}{4}(D-1)(D-2)(\nabla\gamma)^2 \right). \quad (\text{A.1.17})$$

内部方向 $\{i\}$ に dimensional reduction するとき:

$$ds_D^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + G_{ij}(dx^i + A_\mu^i dx^\mu)(dx^j + A_\nu^j dx^\nu). \quad (\text{A.1.18})$$

このとき scalar curvature は次のようになる:

$$R(g^{(D)}) = R(g) - \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu \left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\delta \right) + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}\partial_\mu G_{ij}\partial_\nu G^{ij} - \frac{1}{4}G_{ij}F_{\mu\nu}^i F^{\mu\nu j} \quad (\text{A.1.19})$$

ここで, $\delta = \log \det G_{ij}$, $F_2^i = dA_1^i$.

特に x^{D-1} 方向 (space like direction, Killing vector : $\mathbf{k} = k^\mu\partial_\mu = \partial_{D-1}$) に dimensional reduction するとき:

$$ds_D^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + k^2(dx^{D-1} + A_\mu dx^\mu)^2. \quad (\text{A.1.20})$$

Hodge dual に関して次の関係が成り立つ:²

$$*_{(D)}B_n = (*_{(D-1)}B_n) \wedge k(dx^{D-1} + A_1). \quad (\text{A.1.21})$$

さらに, (A.1.7) を用いると

$$*_{(D)}(B_n \wedge dx^{D-1}) = (-)^{D-n-1}k^{-1}*_{(D-1)}B_n - (*_{(D-1)}(B_n \wedge A_1)) \wedge k(dx^{D-1} + A_1). \quad (\text{A.1.22})$$

ただし, $\epsilon_{(D)}^{01\dots D-2D-1} = \epsilon_{(D-1)}^{01\dots D-2}$ とした.

A.1.2 Γ 行列について

11次元の Γ 行列 Γ_a ($a = 0, 1, \dots, 10$) は Clifford 代数:

$$\{\Gamma_a, \Gamma_b\} = 2\eta_{ab}, \quad \Gamma_a^\dagger = \Gamma_0\Gamma_a\Gamma_0, \quad \Gamma_{10} = \Gamma_0\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3\Gamma_4\Gamma_5\Gamma_6\Gamma_7\Gamma_8\Gamma_9 \quad (\text{A.1.23})$$

を満たすものとする. さらに

$$\Gamma_a^T = -C\Gamma_a C^{-1}, \quad C^T = -C, \quad C^* = C, \quad C^\dagger C = 1 \quad (\text{A.1.24})$$

を満たすようにできて, このとき

$$\Gamma_a^* = (C\Gamma_0)\Gamma_a(C\Gamma_0)^{-1}, \quad C^{-1} = -C \quad (\text{A.1.25})$$

² $*_{(n)}$ は n 次元 metric での Hodge dual を表す.

となる. 実際, 例えば

$$\begin{aligned}
\Gamma_0 &= -i\sigma_2 \otimes 1_{16}, \\
\Gamma_i &= \sigma_1 \otimes \gamma_i \quad (i = 1 \cdots 8), \\
\Gamma_9 &= \sigma_3 \otimes 1_{16}, \\
\Gamma_{10} &= \sigma_1 \otimes \gamma_9.
\end{aligned} \tag{A.1.26}$$

ととることができる. ここで

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \sigma_3 \otimes 1_2 \otimes 1_2 \otimes 1_2 \\
\gamma_2 &= \sigma_1 \otimes 1_2 \otimes 1_2 \otimes 1_2 \\
\gamma_3 &= \sigma_2 \otimes \sigma_3 \otimes 1_2 \otimes \sigma_2 \\
\gamma_4 &= \sigma_2 \otimes \sigma_1 \otimes 1_2 \otimes \sigma_2 \\
\gamma_5 &= \sigma_2 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_3 \otimes 1_2 \\
\gamma_6 &= \sigma_2 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_1 \otimes 1_2 \\
\gamma_7 &= \sigma_2 \otimes 1_2 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_3 \\
\gamma_8 &= \sigma_2 \otimes 1_2 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_1 \\
\gamma_9 &= \sigma_2 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_2 \\
\sigma_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{A.1.27}$$

この表示のとき $C = \Gamma_0$ ととれて Γ_0 は 実反対称行列, Γ_a ($a = 1, \dots, 10$) は 実対称行列 になっている.

$SO(10, 1)$ の 32 次元 spinor 表現の 32 成分 spinor θ について

$$\bar{\theta} := \theta^\dagger \Gamma_0 \tag{A.1.28}$$

と定め, Majorana 条件を

$$\theta : \text{Majorana spinor} \Leftrightarrow \bar{\theta} = \theta^T C \quad (\Leftrightarrow \theta = -\Gamma_0 C \theta^*) \tag{A.1.29}$$

で定義する.

A.1.3 complex structure

実 D 次元多様体 \mathcal{M} を考える. D は偶数とする. $p \in \mathcal{M}$ の接ベクトル空間 $T_P(\mathcal{M})$ から $T_P(\mathcal{M})$ への写像 J_p で $J_p^2 = -1$ が成り立つとき p に J_p を対応させる対応 J のこと

を概複素構造 (almost complex structure) といい, J をそなえた多様体を概複素多様体という. J は 1 階共変 1 階反変テンソル場である. つまり $J^\mu{}_\nu$ という添字をもつ. この J に対し Nijenhuis tensor を

$$N^\rho{}_{\mu\nu} = J^\lambda{}_\mu \partial_{[\lambda} J^\rho{}_{\nu]} - J^\lambda{}_\nu \partial_{[\lambda} J^\rho{}_{\mu]} \quad (\text{A.1.30})$$

とするとき恒等的に $N^\rho{}_{\mu\nu} = 0$ ならこの J を complex structure とよび, この概複素多様体は複素多様体である.

$D/2$ 次元複素多様体の局所 (holomorphic) 座標系 $\{z^k\}$ を適当に選べば標準形

$$J^k{}_l = i\delta_l^k, \quad J^{\bar{k}}{}_{\bar{l}} = -i\delta_{\bar{l}}^{\bar{k}}, \quad J^k{}_{\bar{l}} = J^{\bar{k}}{}_l = 0. \quad (\text{A.1.31})$$

にできる. J は covariantly constant $\nabla J = 0$ である. この J の形は holomorphic な座標変換で変わらないことに注意しよう.

また complex structure J の形は non-holomorphic な座標変換では変わってしまうので実 D 次元多様体の局所座標 $\{x^\mu\}$ から $D/2$ 次元複素多様体の局所 (holomorphic) 座標 $\{z^k\}$ を定義するしかたによる.

$D/2$ 次元複素多様体に局所 (holomorphic) 座標系 $\{z^k\}$ を決めたとき (A.1.31) となる J は複素構造 (complex structure) に付属した概複素構造 (almost complex structure) であるという. 局所 (holomorphic) 座標系 $\{z^k\}$ を決めることにより $D/2$ 次元複素多様体に複素構造 (complex structure) が入ったといったりする.

正確な定義, 言葉遣いは適当な数学の本 ([49],[50] 等) を参照のこと.

A.1.4 Kähler, hyperkähler, K3, Calabi-Yau

ここで, Kähler 多様体, hyperkähler 多様体, Calabi-Yau 多様体等の定義とその性質について簡単に述べる.

1. Kähler 多様体

D 次元 Riemann 多様体 \mathcal{M} が $D/2$ 次元複素多様体 のときその複素座標を $\{z^k\}$ ($k = 1, \dots, D/2$) として metric g が

$$ds^2 = g_{i\bar{j}} dz^i d\bar{z}^j \quad (\text{A.1.32})$$

となるとき, $g_{i\bar{j}}$ ($= g_{\bar{j}i} = \bar{g}_{j\bar{i}}$) を hermitian metric という.

hermitian metric $g_{i\bar{j}}$ に対し (1,1)-form K を :

$$K = \frac{i}{2} g_{i\bar{j}} dz^i \wedge d\bar{z}^j \quad (\text{A.1.33})$$

としたときこれが closed form $dK = 0$ になっていればこの \mathcal{M} は Kähler 多様体である。そして $g_{i\bar{j}}$ を Kähler metric, K を Kähler form とよぶ。また, Kähler 多様体は $D/2$ 次元複素多様体なので complex structure J をもつ。 J を $\{z^k\} (k = 1, \dots, D/2)$ に付属したもの (A.1.31) であるとしたとき (A.1.33) は

$$K = \frac{1}{2} g_{k\bar{j}} J^k{}_i dz^i \wedge d\bar{z}^j \quad (\text{A.1.34})$$

ともかける。

Kähler 多様体のときに成り立つ公式をいくつか挙げておく。

$$\begin{aligned} \Gamma_{jk}^i &= g^{i\bar{l}} \partial_j g_{k\bar{l}}, & \Gamma_{\bar{j}\bar{k}}^{\bar{i}} &= g^{\bar{l}i} \partial_{\bar{j}} g_{l\bar{k}}; \\ R^i{}_{j\bar{k}\bar{l}} &= \partial_{\bar{k}} \Gamma_{j\bar{l}}^i, & R^{\bar{i}}{}_{\bar{j}k\bar{l}} &= \partial_k \Gamma_{\bar{j}\bar{l}}^{\bar{i}}; \\ R_{i\bar{j}k\bar{l}} &= R_{k\bar{j}i\bar{l}} = R_{i\bar{l}k\bar{j}}; \\ R_{\bar{j}k} &= R_{k\bar{j}} = -\partial_k \Gamma_{\bar{j}i}^{\bar{i}} = -\partial_{\bar{j}} \partial_k \log \det g. \end{aligned} \quad (\text{A.1.35})$$

他の成分はゼロになる。

2. Ricci-flat Kähler 多様体, Calabi-Yau 多様体

Kähler 多様体 \mathcal{M} が $R_{\bar{j}k} = 0$ のとき \mathcal{M} を Ricci-flat Kähler 多様体 という。 Ricci-flat Kähler 多様体 は $\dim H^{(0,0)} = \dim H^{(D/2,0)} = 1$, $\dim H^{(i,0)} = 0$ ($i = 1, \dots, D/2 - 1$) であることが知られている。よって, 複素 $D/2$ 次元 Ricci-flat Kähler 多様体はいたるところゼロでない holomorphic $D/2$ -form を定数倍を除いて唯 1 つもつことに注意しよう。 compact な Ricci-flat Kähler 多様体 を Calabi-Yau 多様体 という。 複素 $D/2$ 次元 Calabi-Yau 多様体を $CY_{D/2}$ と書くこともある。

3. hyperkähler 多様体

hyperkähler 多様体は, 実 $D (= 4m)$ 次元 Riemann 多様体で次の性質を満たす 3 つの接ベクトル束の自己同型写像 J_1, J_2, J_3 をもつものである:

$$J_i J_j = -\delta_{ij} + \epsilon^{ijk} J_k, \quad \nabla J_i = 0, \quad (i, j, k = 1, 2, 3). \quad (\text{A.1.36})$$

hyperkähler 多様体の実座標を $\{x^\mu\}$ ($\mu = 1, \dots, D (= 4m)$) としたとき

$$K_1 = \frac{1}{8} g_{\rho[\nu} J_{1\mu]}^\rho dx^\mu \wedge dx^\nu, \quad K_2 = \frac{1}{8} g_{\rho[\nu} J_{2\mu]}^\rho dx^\mu \wedge dx^\nu, \quad K_3 = \frac{1}{8} g_{\rho[\nu} J_{3\mu]}^\rho dx^\mu \wedge dx^\nu \quad (\text{A.1.37})$$

により定まる $\vec{\omega} = (K_1, K_2, K_3)$ を hyperkähler form という。 また J_1, J_2, J_3 が co-variantly constant であることから $d\vec{\omega} = 0$ となる。 また $q = a_1 J_1 + a_2 J_2 + a_3 J_3$ (a_i ($i = 1, 2, 3$) は実定数) とおくと $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$ ならば $q^2 = -1$, $\nabla q = 0$ である。つまり, S^2 の分だけ complex structure を選ぶ自由度がある。

4. ホロノミー (holonomy)

D 次元 Riemann 多様体 \mathcal{M} のホロノミー $\mathcal{H}_{\mathcal{M}}$ を Levi-Civita 接続をもつ接ベクトル束のホロノミーとする. ここで Levi-Civita 接続とは (A.1.12) あるいは (A.1.14) で定まる接続のこと. また接続をもつベクトル束 $\pi: E \rightarrow \mathcal{M}$ のホロノミー(群)とは \mathcal{M} のある点 $p (\in \mathcal{M})$ を始点とする閉ループに沿って接続に従ってベクトル束の fiber E_p のベクトルを平行移動させて \mathcal{M} のもとの点 $p (\in \mathcal{M})$ に戻ったとき一般にベクトルは線形変換を受けるが, そのときに生成される一般線形群 $GL(E_p)$ の部分群のことである.

一般の Riemann 多様体 \mathcal{M} なら $\mathcal{H}_{\mathcal{M}}$ は $O(D)$ であるが \mathcal{M} が向き付け可能なら $SO(D)$ である. また

1. $\mathcal{H}_{\mathcal{M}} \subseteq U(D/2)$ でありかつそのときのみ \mathcal{M} は Kähler 多様体.
2. $\mathcal{H}_{\mathcal{M}} \subseteq SU(D/2)$ でありかつそのときのみ \mathcal{M} は Ricci-flat Kähler 多様体.
3. $\mathcal{H}_{\mathcal{M}} \subseteq Sp(D/4)$ でありかつそのときのみ \mathcal{M} は hyperkähler 多様体.

ということが知られている. $SU(D/2) \subset U(D/2)$ なので hyperkähler 多様体は Kähler 多様体である. また $D > 4$ なら $Sp(D/4) \subset SU(D/2)$ なので hyperkähler 多様体はつねに Ricci-flat Kähler 多様体であるが, $D = 4$ なら $Sp(1) = SU(2)$ なので, $D = 4$ のとき Ricci-flat Kähler 多様体は hyperkähler 多様体であることに注意しよう. 複素2次元で $SU(2)$ ホロノミーをもつ compact な Kähler 多様体を K3 とよぶ. (多様体ではなく orbifold³ になっている場合も含めて K3 とよぶこともある.)

ここで述べたことの数学的に厳密な定義などは, 適当な数学の本 ([49],[48],[50] 等) か, [41],[46],[47](およびその references) を参照のこと.

A.1.5 j, η 関数

$$j(\tau) := \frac{(\theta_2(\tau)^8 + \theta_3(\tau)^8 + \theta_4(\tau)^8)^3}{\eta(\tau)^{24}} \quad (\text{A.1.38})$$

ここで⁴

$$\eta(\tau) := e^{\frac{\pi i \tau}{12}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2n\pi i \tau});$$

³ orbifold とはそれぞれの patch が \mathbb{R}^n/G_i に diffeomorphic な開被覆 $\{U_i\}$ をもつ空間である. ここで G_i は discrete な群 (trivial であってもよい).

⁴ $J(\tau) := \frac{1}{24^3} j(\tau)$ は楕円モジュラ関数, $\theta_i(\tau)$ は Jacobi のテータ関数, $\eta(\tau)$ は Dedekind のエータ関数とよばれたりする.

$$\begin{aligned}
\theta_2(\tau) &:= 2e^{\frac{\pi i \tau}{4}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2n\pi i \tau}) \prod_{n=1}^{\infty} (1 + e^{2n\pi i \tau})^2; \\
\theta_3(\tau) &:= \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2n\pi i \tau}) \prod_{n=1}^{\infty} (1 + e^{2(n-\frac{1}{2})\pi i \tau})^2; \\
\theta_4(\tau) &:= \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2n\pi i \tau}) \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2(n-\frac{1}{2})\pi i \tau})^2.
\end{aligned} \tag{A.1.39}$$

このとき

$$\begin{aligned}
j\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) &= j(\tau), \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}); \\
j(i) &= 24^3; \quad j\left(e^{\frac{2\pi i}{3}}\right) = 0; \quad j(i\infty) = \infty.
\end{aligned} \tag{A.1.40}$$

が成り立つ. 特に j は $SL(2, \mathbb{Z})$ 不変性をもつ.

j は fundamental region : $(\mathbb{C}$ の上半面) $/SL(2, \mathbb{Z})$ から \mathbb{C} への 1対1の holomorphic map になっている.

$j(\tau) = z$ としたとき τ を fundamental region に限ると,

$$\begin{aligned}
j(\tau) \sim 2^3 e^{-2\pi i \tau} \quad \text{i.e.,} \quad \tau(z) &\sim \frac{-1}{2\pi i} \log z \quad (z \sim \infty); \\
\tau(z) &\sim i + \text{const.} (z - 24^3)^{\frac{1}{2}} + \dots \quad (z \sim 24^3); \\
\tau(z) &\sim e^{\frac{2\pi i}{3}} + \text{const.} z^{\frac{1}{3}} + \dots \quad (z \sim 0)
\end{aligned} \tag{A.1.41}$$

という漸近形をもつ. つまり fundamental region で $\tau \sim i\infty$ に log 特異性, $\tau \sim i$ に \mathbb{Z}_2 特異性, $\tau \sim e^{\frac{2\pi i}{3}}$ に \mathbb{Z}_3 特異性 があり 他のところは正則になっている (図 A.2).

η 関数の $SL(2, \mathbb{Z})$ 変換性は次のようになる:

$$\begin{aligned}
\eta(\tau + 1) &= e^{\frac{\pi i}{12}} \eta(\tau); \\
\eta(-1/\tau) &= (-i\tau)^{\frac{1}{2}} \eta(\tau); \\
\eta\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) &= \epsilon (c\tau + d)^{\frac{1}{2}} \eta(\tau), \quad \epsilon^{24} = 1, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}).
\end{aligned} \tag{A.1.42}$$

A.1.6 singular fiber の分類

Weierstrass form:

$$y^2 = x^3 + f(z)x + g(z) \tag{A.1.43}$$

の elliptic fibration を考える. $f(z), g(z)$ は z の多項式. 判別式は

$$\Delta = 4f^3 + 27g^2 \tag{A.1.44}$$

となり, $\Delta = 0$ で fiber は特異になる. fiber の torus の moduli を τ とする. τ は

$$j(\tau) = 4 \frac{(24f)^3}{4f^3 + 27g^2} = 4 \frac{(24f)^3}{\Delta} \quad (\text{A.1.45})$$

をみたく.

(A.1.43) は z を 1 つ固定すると torus を表す式が 1 つ定まる. その torus 上には 2 つの独立な 1-cycle (β, α) があるがそれを symplectic 基底にとっておく. つまり $\alpha \cdot \beta = -\beta \cdot \alpha = 1$ (\cdot は交点数を表す.) とする. そのとき

$$\tau = \frac{\oint_{\beta} \omega}{\oint_{\alpha} \omega}, \quad \omega = \frac{dx}{y} \quad (\text{A.1.46})$$

が成り立つ [51]. monodromy は z -plane 上で z がある点のまわりを回ったとき, $(\beta, \alpha) \mapsto (\beta', \alpha')$ が受ける線形変換のことなので

$$\begin{pmatrix} \oint_{\beta'} \omega \\ \oint_{\alpha'} \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \oint_{\beta} \omega \\ \oint_{\alpha} \omega \end{pmatrix} \quad (\text{A.1.47})$$

で計算できる. このとき τ は $SL(2, \mathbb{Z})$ 変換を受けて

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \quad (\text{A.1.48})$$

となる. τ は monodromy $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ で不変であることに注意しよう. これは torus T^2 の \mathbb{Z}_2 不変性に対応している.

singular fiber は次のように分類される (Kodaira)[24],[52]. ただし $\text{ord}(f)$ は零点の位数を表す. $f \equiv 0$ は $\text{ord}(f) = \infty$, $f(0) \neq 0$ は $\text{ord}(f) = 0$. H^* は fundamental region ($\simeq (\mathbb{C}$ の上半面)/ $SL(2, \mathbb{Z})$). τ は monodromy で不変なもの. monodromy は共役類のある基底を定めたときの代表元.

fiber 型	特異型	τ	monodromy	ord(f)	ord(g)	ord(Δ)
I_0	-	H^* 内	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	≥ 0	≥ 0	0
I_0^*	D_4	H^* 内	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	≥ 1	≥ 1	6
I_1	-	∞	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	0	0	1
I_m	A_{m-1}	∞	$\begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	0	0	m
I_m^*	D_{m+4}	∞	$\begin{pmatrix} -1 & -m \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	2	≥ 3	$m+6$
II	-	$e^{\frac{2\pi i}{3}}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	≥ 1	1	2
II^*	E_8	$e^{\frac{2\pi i}{3}}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	≥ 4	5	10
III	A_1	i	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	1	≥ 2	3
III^*	E_7	i	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	3	≥ 5	9
IV	A_2	$e^{\frac{2\pi i}{3}}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$	≥ 2	2	4
IV^*	E_6	$e^{\frac{2\pi i}{3}}$	$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	≥ 3	4	8

A.1.7 反対称テンソル場の convention について

M理論, type IIA string 理論, type IIB string 理論 を考えるとき反対称テンソル場 $A_{\mu_1 \dots \mu_n}$ は (長さ) $^{-n}$ の次元 ((mass) n の次元) を持つものとする. また 反対称テンソル場 $A_{\mu_1 \dots \mu_n}$ を それに couple する brane (M2, M5, NS1, Dp -brane) が charge 1 を持つような規格化 : $S = \dots \cdot 1 \cdot \int_{\text{brane}} A_n \dots$ を「物理的規格化」とよぶことにする. このとき flux quantization : $\oint dA_n = 2\pi m$ ($m \in \mathbb{Z}$) が成り立つ [42]. また反対称テンソル場 A_n の場の強さ F_{n+1} は特に断わらない限り $F_{n+1} = dA_n$ で定義する.



A.2 11D SUGRA, 10D IIA IIB SUGRA, 9D SUGRA の関係

ここでは, (§3.2) で使う T-duality 変換を SUGRA (の bosonic part) で議論する [36]. なお特に断わらない限り (§A.1) の convention に基づいて書いているので他の論文と比較するときは係数, 符号などに注意する必要がある. また「物理的規格化」をした RR 場は記号 C を用いて書いている. また, ここで出てくる係数については [42] を参照のこと.

A.2.1 11D SUGRA から 10D type IIA SUGRA へ

M理論 の低エネルギー有効作用である 11D SUGRA (の bosonic part) の action を考えよう. 11D SUGRA の boson 場は metric $g_{\mu\nu}$, 3-form field A_3 からなる. この action は物理的な規格化のもとで,

$$S_{11D} = \int d^{11}x \sqrt{-g} \frac{1}{2\kappa_{11}^2} R + \int \frac{1}{g_{M2}^2 \cdot 2} dA_3 \wedge *dA_3 + \int \frac{-1}{(2\pi)^{23!}} A_3 \wedge dA_3 \wedge dA_3 \quad (\text{A.2.1})$$

与えられる [42]. 第 3 項は Chern-Simons term である.

ここで $2\kappa_{11}^2 = (2\pi)^8 l_p^9$, $g_{M2}^2 = (2\pi)^4 l_p^3$; l_p は長さの次元をもつ定数.

これを x^{10} 方向に dimensional reduction ($x^{10} \sim x^{10} + 2\pi$) して⁵ 10D type IIA SUGRA action を求めよう [35],[36]. このとき次のような parametrization をする:

$$ds_{11D}^2 = e^{-\frac{2}{3}\phi} g_{\mu\nu}^A dx^\mu dx^\nu + l_p^2 e^{\frac{4}{3}\phi} (dx^{10} + C_\mu dx^\mu)^2; \quad A_3 = C_3 + \frac{1}{2\pi} B_2 \wedge dx^{10}. \quad (\text{A.2.2})$$

逆変換は

$$\begin{aligned} e^\phi &= l_p^{-\frac{3}{2}} g_{1010}^{(11)\frac{3}{4}}; \quad C_{\mu\nu\rho} = A_{\mu\nu\rho}; \quad B_{\mu\nu} = 2\pi A_{\mu\nu 10}; \quad C_\mu = g_{1010}^{(11)-1} g_{\mu 10}^{(11)}; \\ g_{\mu\nu} &= l_p^{-1} g_{1010}^{(11)\frac{1}{2}} g_{\mu\nu}^{(11)} - l_p^{-3} g_{1010}^{(11)\frac{1}{2}} g_{\mu 10}^{(11)} g_{\nu 10}^{(11)}. \end{aligned} \quad (\text{A.2.3})$$

ここで $\mu, \nu = 0, 1, \dots, 9$.

11D 方向 (x^{10} 方向) の半径は 11D metric (M metric) でみると $R_M^{11} = g_{1010}^{(11)\frac{1}{2}} = e^{\frac{2}{3}\phi} l_p$, 10D metric (type IIA string metric) でみると $R_{IIA}^{11} = e^{\frac{1}{3}\phi} R_M^{11} = e^\phi l_s$. ここで $l_s = l_p = \text{const.}$ とした.

⁵ ここでの convention は compact 化していない方向については x^μ に長さの次元を持たせてある. compact 化する方向 (今の場合 x^{10} 方向) についてはその座標 (今の場合 x^{10}) は無次元にしている. そして ds^2 が (長さ)² の次元を持っているとしている. ただし, もちろん $c = \hbar = 1$ である. 以下でも同様の convention を用いている.

(A.1.17),(A.1.19) より

$$\int d^{11}x \sqrt{-g^{(11)}} R(g^{(11)}) = 2\pi l_p \int d^{10}x \sqrt{-g} e^{-2\phi} (R + 4(\nabla\phi)^2) + 2\pi l_p^3 \int \frac{1}{2} dC_1 \wedge *dC_1 \quad (\text{A.2.4})$$

また (A.1.21),(A.1.22) より

$$dA_3 \wedge *(_{(11)}dA_3 = \left(l_p^{-1} e^{-2\phi} \frac{dB_2}{2\pi} \wedge *(_{(10)} \frac{dB_2}{2\pi} + l_p (dC_3 + C_1 \wedge \frac{dB_2}{2\pi}) \wedge *(_{(10)} (dC_3 + C_1 \wedge \frac{dB_2}{2\pi})) \right) \wedge dx^{10} \quad (\text{A.2.5})$$

となることを用いて 10D type IIA SUGRA action の bosonic part が次のように求まる:

$$\begin{aligned} S_{\text{IIA}} &= \int d^{10}x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{(2\pi)^7 l_s^8} e^{-2\phi} (R + 4(\nabla\phi)^2) \right) \\ &+ \int \left(\frac{1}{(2\pi)^5 l_s^4} e^{-2\phi} \frac{1}{2} H_3 \wedge *H_3 + \frac{1}{(2\pi)^7 l_s^6} \frac{1}{2} F_2 \wedge *F_2 + \frac{1}{(2\pi)^3 l_s^2} \frac{1}{2} F'_4 \wedge *F'_4 \right) \\ &+ \int \frac{-1}{(2\pi)^2} \frac{1}{2} F_4 \wedge F_4 \wedge B_2 \end{aligned} \quad (\text{A.2.6})$$

ここで

$$H_3 := dB_2; \quad F_2 := dC_1; \quad F_4 := dC_3; \quad F'_4 := F_4 + \frac{1}{2\pi} C_1 \wedge H_3. \quad (\text{A.2.7})$$

A.2.2 10D type IIA SUGRA から 9D SUGRA へ

10D type IIA SUGRA の action をさらに 9D SUGRA の action に dimensional reduction しよう [36]. Killing vector は $\mathbf{k} = k^\mu \partial_\mu = \partial_9$, $k^\mu k_\mu = k^2$ とし

$$\begin{aligned} ds_{\text{IIA}}^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + l_s^2 k^2 (dx^9 + A_\mu^{(2)} dx^\mu)^2; \\ \hat{B}_2 &= B_2 - B_1 \wedge (dx^9 + \frac{1}{2} A_1^{(2)}); \quad e^{\hat{\phi}} = e^\phi k^{\frac{1}{2}}; \\ \hat{C}_3 &= C_3 + \frac{1}{2\pi} (B_2^{(2)} + \frac{1}{2} B_1 \wedge A_1^{(1)}) \wedge dx^9; \quad \hat{C}_1 = A_1^{(1)} + \ell (dx^9 + A_1^{(2)}) \end{aligned} \quad (\text{A.2.8})$$

と parametrization をする. ここでは 10D の場には hat をつけることにする. 逆変換は

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= \hat{g}_{\mu\nu}^A - \frac{\hat{g}_{\mu 9}^A \hat{g}_{\nu 9}^A}{\hat{g}_{99}^A}; \quad k = l_s^{-1} \hat{g}_{99}^{A\frac{1}{2}}; \quad e^\phi = e^{\hat{\phi}} l_s^{\frac{1}{2}} \hat{g}_{99}^{A-\frac{1}{4}}; \quad A_\mu^{(2)} = \hat{g}_{\mu 9}^A \hat{g}_{99}^{A-1}; \\ \ell &= \hat{C}_9; \quad A_\mu^{(1)} = \hat{C}_\mu - \hat{C}_9 \hat{g}_{\mu 9}^A \hat{g}_{99}^{A-1}; \quad C_{\mu\nu\rho} = \hat{C}_{\mu\nu\rho}; \quad B_\mu = -\hat{B}_{\mu 9}; \\ B_{\mu\nu}^{(1)} &= \hat{B}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \hat{B}_{9[\mu} \hat{g}_{\nu]9}^A \hat{g}_{99}^{A-1}; \quad B_{\mu\nu}^{(2)} = 2\pi \hat{C}_{\mu\nu 9} - \frac{1}{2} \hat{B}_{9[\mu} (\hat{C}_{\nu]} - \hat{g}_{\nu]9}^A \hat{g}_{99}^{A-1} \hat{C}_9). \end{aligned} \quad (\text{A.2.9})$$

(A.2.6) に (A.2.8) を代入して 9D SUGRA action を求めよう.

(A.1.19) を用いると

$$\begin{aligned} \int d^{10}x \sqrt{-\hat{g}} e^{-2\hat{\phi}} \hat{R} &= 2\pi l_s \int d^9x \sqrt{-g} e^{-2\phi} \left(R - 2(\nabla \log k)^2 - 4g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \log k \right) \\ &+ 2\pi l_s^3 \int e^{-2\phi} k^2 \frac{1}{2} dA_1^{(2)} \wedge *dA_1^{(2)} \end{aligned} \quad (\text{A.2.10})$$

また

$$\int d^{10}x \sqrt{-\hat{g}} e^{-2\hat{\phi}} 4(\nabla \hat{\phi})^2 = 2\pi l_s \int d^9x \sqrt{-g} e^{-2\phi} \left(4(\nabla \phi)^2 + (\nabla \log k)^2 + 4g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \log k \right). \quad (\text{A.2.11})$$

(A.1.21),(A.1.22) を用いて

$$\begin{aligned} \int e^{-2\hat{\phi}} \hat{H}_3 \wedge *_{(10)} \hat{H}_3 &= 2\pi l_s \int e^{-2\phi} \left(H_3^{(1)} \wedge *H_3^{(1)} + l_s^{-2} k^{-2} dB_1 \wedge *dB_1 \right) \\ \int d\hat{A}_1 \wedge *_{(10)} d\hat{A}_1 &= 2\pi \int \left(l_s^{-1} k^{-1} d\ell \wedge *d\ell + l_s k (dA_1^{(1)} + \ell dA_1^{(2)}) \wedge *(dA_1^{(1)} + \ell dA_1^{(2)}) \right) \\ \int \hat{F}'_4 \wedge *_{(10)} \hat{F}'_4 &= 2\pi \int \left(l_s k F'_4 \wedge *F'_4 + l_s^{-1} k^{-1} \frac{1}{(2\pi)^2} (H_3^{(2)} - \ell H_3^{(1)}) \wedge *(H_3^{(2)} - \ell H_3^{(1)}) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.2.12})$$

ここで

$$\begin{aligned} H_3^{(i)} &= dB_2^{(i)} + \frac{1}{2} \epsilon^{ij} (dA_1^{(j)} \wedge B_1 + dB_1 \wedge A_1^{(j)}); \quad i, j = 1, 2; \quad \epsilon^{12} = -\epsilon^{21} = +1; \\ F'_4 &= dC_3 + \frac{1}{2\pi} (A_1^{(i)} \wedge dB_2^{(i)} - \frac{1}{2} \epsilon^{ij} B_1 \wedge A_1^{(i)} \wedge dA_1^{(j)}) \end{aligned} \quad (\text{A.2.13})$$

とおいた.

以上より 9D SUGRA action の bosonic part が得られる:

$$\begin{aligned} S_{9D} &= \int d^9x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{(2\pi)^6 l_s^7} e^{-2\phi} (R + 4(\nabla \phi)^2 - (\nabla \log k)^2) \right) \\ &+ \int \left(\frac{1}{(2\pi)^4 l_s^3} e^{-2\phi} \frac{1}{2} H_3^{(1)} \wedge *H_3^{(1)} + \frac{1}{(2\pi)^4 l_s^5} e^{-2\phi} k^{-2} \frac{1}{2} dB_1 \wedge *dB_1 \right. \\ &+ \frac{1}{(2\pi)^6 l_s^5} e^{-2\phi} k^2 \frac{1}{2} dA_1^{(2)} \wedge *dA_1^{(2)} + \frac{1}{(2\pi)^6 l_s^5} k \frac{1}{2} (dA_1^{(1)} + \ell dA_1^{(2)}) \wedge *(dA_1^{(1)} + \ell dA_1^{(2)}) \\ &+ \frac{1}{(2\pi)^6 l_s^7} k^{-1} \frac{1}{2} d\ell \wedge *d\ell + \frac{1}{(2\pi)^2 l_s} k \frac{1}{2} F'_4 \wedge *F'_4 \\ &+ \left. \frac{1}{(2\pi)^4 l_s^3} k^{-1} \frac{1}{2} (H_3^{(2)} - \ell H_3^{(1)}) \wedge *(H_3^{(2)} - \ell H_3^{(1)}) \right) \\ &+ \int \frac{-1}{(2\pi)^2} \left(\frac{1}{2} dC_3 \wedge dC_3 \wedge B_1 \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2} dC_3 \wedge (-\epsilon^{ij} dB_2^{(i)} \wedge B_2^{(j)} + dB_2^{(i)} \wedge A_1^{(i)} \wedge B_1 + \frac{1}{4} \epsilon^{ij} A_1^{(i)} \wedge A_1^{(j)} \wedge dB_1 \wedge B_1) \right). \end{aligned} \quad (\text{A.2.14})$$

A.2.3 10D type IIB SUGRA

10D type IIB SUGRA の bosonic part の action は self dual 4form field C_4^+ の部分を見捨てるようにかける [37].

$$S_{\text{IIB}} = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^{10}x \sqrt{-g} \left(R + \frac{1}{4} \text{tr}(\partial_\mu \mathcal{M} \partial^\mu \mathcal{M}^{-1}) \right) + \frac{l_N^4}{2\kappa^2} \int \frac{1}{2} H_3 \mathcal{M} \wedge *H_3^T. \quad (\text{A.2.15})$$

ここで

$$\mathcal{M} := e^\varphi \begin{pmatrix} |\lambda|^2 & \chi \\ \chi & 1 \end{pmatrix}; \quad H_3 := (dB_2^{(1)}, -dB_2^{(2)}); \quad \lambda := \chi + ie^{-\varphi}. \quad (\text{A.2.16})$$

ただしこれは Einstein metric で書いたもので, $2\kappa^2 = (2\pi)^7 l_N^8$; l_N は長さの次元をもつ定数である. この action は $SL(2, \mathbb{R})$ 変換:

$$\lambda \mapsto \frac{a\lambda + b}{c\lambda + d}; \quad (B_2^{(1)}, -B_2^{(2)}) \mapsto (B_2^{(1)}, -B_2^{(2)})\Lambda^{-1}; \quad \mathcal{M} \mapsto \Lambda \mathcal{M} \Lambda^T; \quad \Lambda = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R}) \quad (\text{A.2.17})$$

のもとで不変である.

Einstein metric と C_4^+ は この $SL(2, \mathbb{R})$ 変換 のもとで不変とする. このとき 10D type IIB SUGRA には $SL(2, \mathbb{R})$ symmetry がある.

Einstein metric を Weyl 変換 ($g_{\mu\nu}^{(\text{E})} = e^{-\frac{1}{2}\varphi} g_{\mu\nu}^{(\text{str})}$) して string metric で書き直すと (A.1.17) を用いて次の action が得られる:

$$\begin{aligned} S_{\text{IIB}}^{\text{str}} &= \frac{1}{(2\pi)^7 l_s^8} \int d^{10}x \sqrt{-g} e^{-2\varphi} \left(R + 4(\nabla\varphi)^2 \right) + \frac{1}{(2\pi)^5 l_s^4} \int \frac{1}{2} e^{-2\varphi} dB_2^{NS} \wedge *dB_2^{NS} \\ &+ \frac{1}{(2\pi)^9 l_s^8} \int \frac{1}{2} dC \wedge *dC + \frac{1}{(2\pi)^5 l_s^4} \int \frac{1}{2} \left(dC_2 - \frac{C}{2\pi} dB_2^{NS} \right) \wedge * \left(dC_2 - \frac{C}{2\pi} dB_2^{NS} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.2.18})$$

ここで物理的な規格化をした場を用いて書いた:

$$C = 2\pi\chi; \quad B_2^{NS} = \frac{1}{2\pi} B_2^{(1)}; \quad C_2 = \frac{1}{2\pi} B_2^{(2)}. \quad (\text{A.2.19})$$

また $l_s = l_N = \text{const.}$ とした.

次に C_4^+ を含む部分を考えよう. C_4^+ は self-dual な場なのでここでは covariant な action を考えるかわりに運動方程式を考える. C_4^+ を含まない 10D type IIB SUGRA の運動方程式 (の bosonic part) は (A.2.18) から求まるので C_4^+ を含む運動方程式だけをみればよい. それは C_4^+ の物理的な規格化のもとで次のようになる [34],[36]:

$$F'_5 = *F'_5;$$

$$\begin{aligned}
& \nabla^\mu \left(\left(\frac{C}{2\pi} \right)^2 + e^{-2\varphi} \right) dB_2^{NS} - \frac{C}{2\pi} dC_2 \Big|_{\mu\nu\rho} = (2\pi)^2 l_s^4 \frac{1}{2} \frac{1}{3!} F'_{\nu\rho\mu_1\mu_2\mu_3} (dC_2)^{\mu_1\mu_2\mu_3} ; \\
& \nabla^\mu \left(dC_2 - \frac{C}{2\pi} dB_2^{NS} \right) \Big|_{\mu\nu\rho} = (2\pi)^2 l_s^4 \frac{1}{2} \frac{1}{3!} F'_{\nu\rho\mu_1\mu_2\mu_3} (dB_2^{NS})^{\mu_1\mu_2\mu_3} ; \\
& R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \\
& = 4(\nabla_\mu \varphi \nabla_\nu \varphi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\nabla \varphi)^2) + e^{2\varphi} (2\pi)^2 \left(-\frac{1}{2} \nabla_\mu C \nabla_\nu C + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} (\nabla C)^2 \right) \\
& + (2\pi)^2 l_s^4 \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{2!} (dB_2^{NS})_{\mu_1\mu_2\mu} (dB_2^{NS})^{\mu_1\mu_2}{}_\nu + \frac{1}{4} \frac{1}{3!} g_{\mu\nu} (dB_2^{NS})^2 \right) \\
& + e^{2\varphi} (2\pi)^2 l_s^4 \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{2!} (dC_2 - \frac{C}{2\pi} dB_2^{NS})_{\mu_1\mu_2\mu} (dC_2 - \frac{C}{2\pi} dB_2^{NS})^{\mu_1\mu_2}{}_\nu + \frac{1}{4} \frac{1}{3!} g_{\mu\nu} (dC_2 - \frac{C}{2\pi} dB_2^{NS})^2 \right) \\
& + e^{2\varphi} \left(-(2\pi)^6 l_s^8 \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{4!} F'_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4\mu} F'^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}{}_\nu \right) . \tag{A.2.20}
\end{aligned}$$

ここで self-dual な 場の強さ F'_5 は次のような $SL(2, \mathbb{R})$ 不変な組合せで定義されるものである:

$$F'_5 = dC_4^+ + \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} (B_2^{NS} \wedge dC_2 - C_2 \wedge dB_2^{NS}) \tag{A.2.21}$$

(A.2.20) の 第 2,3,4 式の F'_5 の前の $\frac{1}{2}$ は F'_5 の self-duality (第 1 式) から生じる.

A.2.4 10D type IIB SUGRA から 9D SUGRA へ

type IIB SUGRA action (A.2.18) を 9D SUGRA action に dimensional reduction しよう [36]. Killing vector は $k' = k'^\mu \partial_\mu = \partial_9$, $k'^\mu k'_\mu = k^{-2}$ とし

$$\begin{aligned}
ds_{\text{IIB}}^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + l_s^2 k^{-2} (dx^9 + 2\pi B_\mu dx^\mu)^2 ; \quad \hat{\chi} = \ell ; \quad e^{\hat{\varphi}} = e^\phi k^{-\frac{1}{2}} ; \\
\frac{1}{2\pi} \hat{B}_2^{(i)} &= B_2^{(i)} + \epsilon^{ij} \left(\frac{1}{2} B_1 \wedge A_1^{(j)} + \frac{1}{2\pi} dx^9 \wedge A_1^{(j)} \right) ; \quad i, j = 1, 2, \quad \epsilon^{12} = -\epsilon^{21} = +1 \tag{A.2.22}
\end{aligned}$$

と parametrization をする. ここでは 10D の場には hat をつけることにする. 逆変換は

$$\begin{aligned}
g_{\mu\nu} &= \hat{g}_{\mu\nu}^B - \frac{\hat{g}_{\mu 9}^B \hat{g}_{\nu 9}^B}{\hat{g}_{99}^B} ; \quad \ell = \hat{\chi} ; \quad k = l_s \hat{g}_{99}^{B-\frac{1}{2}} ; \quad B_\mu = \frac{1}{2\pi} \hat{g}_{\mu 9}^B \hat{g}_{99}^{B-1} ; \\
e^\phi &= e^{\hat{\varphi}} l_s^{\frac{1}{2}} \hat{g}_{99}^{B-\frac{1}{4}} ; \quad A_\mu^{(i)} = -\epsilon^{ij} \hat{B}_{\mu 9}^{(j)} ; \quad B_{\mu\nu}^{(i)} = \frac{1}{2\pi} (\hat{B}_{\mu\nu}^{(i)} - \frac{1}{2} \hat{g}_{99}^{B-1} \hat{g}_{9[\mu}^B \hat{B}_{\nu]9}^{(i)}) . \tag{A.2.23}
\end{aligned}$$

(A.2.18) に (A.2.22) を代入して 9D SUGRA action を求めよう.

(A.1.19) を用いると

$$\begin{aligned}
\int d^{10} x \sqrt{-\hat{g}} e^{-2\hat{\varphi}} \hat{R} &= 2\pi l_s \int d^9 x \sqrt{-g} e^{-2\phi} \left(R - 2(\nabla \log k)^2 + 4g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \log k \right) \\
&+ (2\pi)^3 l_s^3 \int e^{-2\phi} k^{-2} \frac{1}{2} dB_1 \wedge *dB_1 \tag{A.2.24}
\end{aligned}$$

また

$$\int d^{10}x \sqrt{-\hat{g}} e^{-2\hat{\phi}} 4(\nabla\hat{\phi})^2 = 2\pi l_s \int d^9x \sqrt{-g} e^{-2\phi} \left(4(\nabla\phi)^2 + (\nabla \log k)^2 - 4g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \log k \right). \quad (\text{A.2.25})$$

(A.1.21),(A.1.22),(A.2.19) を用いて

$$\begin{aligned} & (2\pi)^2 \int e^{-2\varphi} dB_2^{NS} \wedge *_{(10)} dB_2^{NS} + (2\pi)^2 \int (dC_2 - \frac{C}{2\pi} dB_2^{NS}) \wedge *_{(10)} (dC_2 - \frac{C}{2\pi} dB_2^{NS}) \\ &= 2\pi l_s^{-1} \int \left(k^2 e^{-2\phi} dA_1^{(2)} \wedge *dA_1^{(2)} + k(dA_1^{(1)} + \ell dA_1^{(2)}) \wedge *(dA_1^{(1)} + \ell dA_1^{(2)}) \right) \\ &+ (2\pi)^3 l_s \int \left(e^{-2\phi} H_3'^{(1)} \wedge *H_3'^{(1)} + k^{-1} \frac{1}{2} (H_3'^{(2)} - \ell H_3'^{(1)}) \wedge *(H_3'^{(2)} - \ell H_3'^{(1)}) \right); \\ & \int d\hat{C} \wedge *_{(10)} d\hat{C} = (2\pi)^3 l_s \int dl \wedge *dl. \end{aligned} \quad (\text{A.2.26})$$

ここで

$$H_3^{(i)} = dB_2^{(i)} + \frac{1}{2} \epsilon^{ij} (dA_1^{(j)} \wedge B_1 + dB_1 \wedge A_1^{(j)}); \quad i, j = 1, 2; \quad \epsilon^{12} = -\epsilon^{21} = +1 \quad (\text{A.2.27})$$

とおいた.

以上より (A.2.18) に (A.2.22) を代入した結果は :

$$\begin{aligned} S_{9D}^B &= \int d^9x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{(2\pi)^6 l_s^7} e^{-2\phi} (R + 4(\nabla\phi)^2 - (\nabla \log k)^2) \right) \\ &+ \int \left(\frac{1}{(2\pi)^4 l_s^3} e^{-2\phi} \frac{1}{2} H_3'^{(1)} \wedge *H_3'^{(1)} + \frac{1}{(2\pi)^4 l_s^5} e^{-2\phi} k^{-2} \frac{1}{2} dB_1 \wedge *dB_1 \right. \\ &+ \frac{1}{(2\pi)^6 l_s^5} e^{-2\phi} k^2 \frac{1}{2} dA_1^{(2)} \wedge *dA_1^{(2)} + \frac{1}{(2\pi)^6 l_s^5} k \frac{1}{2} (dA_1^{(1)} + \ell dA_1^{(2)}) \wedge *(dA_1^{(1)} + \ell dA_1^{(2)}) \\ &\left. + \frac{1}{(2\pi)^6 l_s^7} k^{-1} \frac{1}{2} dl \wedge *dl + \frac{1}{(2\pi)^4 l_s^3} k^{-1} \frac{1}{2} (H_3'^{(2)} - \ell H_3'^{(1)}) \wedge *(H_3'^{(2)} - \ell H_3'^{(1)}) \right) \quad (\text{A.2.28}) \end{aligned}$$

これは type IIA action から求めた 9D SUGRA action の bosonic part (A.2.14) と C_3, F_4' を含む項を除いて一致している. これはもともと type IIB action の bosonic part (A.2.18) で \hat{C}_4^+ を無視していることに対応している. 実は \hat{C}_4^+ を含めた type IIB SUGRA の運動方程式を dimensional reduction したものと 9D SUGRA の運動方程式を比べて \hat{C}_4^+ を C_3 を含んだ parametrization を適当にすれば (A.2.22) のもつて type IIB SUGRA の運動方程式を dimensional reduction したものと 9D SUGRA の運動方程式を一致させることができる.

実際 (A.2.20) を dimensional reduction したものと 9D SUGRA action (A.2.14) から求まる運動方程式を比べて次のように \hat{C}_4^+ を parametrize すればよい:

$$\hat{C}_{\mu\nu\rho 9}^+ = \frac{1}{2\pi} C_{\mu\nu\rho} - \frac{1}{4} \frac{1}{(2\pi)^2} (A_{[\mu}^{(i)} B_{\nu\rho]}^{(i)} + \epsilon^{ij} A_{[\mu}^{(i)} A_{\nu]}^{(j)} B_{\rho]}) . \quad (\text{A.2.29})$$

残りの $\hat{C}_{\mu\nu\rho\sigma}^+$ 成分は (A.2.20) の第 1 式の self-duality から指定される.

逆変換は:

$$C_{\mu\nu\rho} = 2\pi\hat{C}_{\mu\nu\rho 9}^+ + \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{2} \epsilon^{ij} \left(-\frac{1}{2} \hat{B}_{9[\mu}^{(i)} \hat{B}_{\nu\rho]}^{(j)} + \hat{B}_{9[\mu}^{(i)} \hat{B}_{|\nu\rho]}^{(j)} \hat{g}_{9]9}^B \hat{g}_{99}^{B-1} \right). \quad (\text{A.2.30})$$

A.2.5 T-duality 変換

1次元分 compact 化すると type IIA SUGRA と type IIB SUGRA は互いに T-duality 変換で移り変わり, 1つの 9D SUGRA で記述されるものになる. (A.2.9),(A.2.23),(A.2.19),(A.2.30) を用いて x^9 方向の T-duality 変換が求まる [36]:

IIB \rightarrow IIA

$$\begin{aligned} g_{99}^A &= g_{99}^{B-1} l_s^4; & g_{\mu 9}^A &= 2\pi l_s^4 g_{99}^{B-1} B_{\mu 9}^{NS}; & g_{\mu\nu}^A &= g_{\mu\nu}^B - g_{99}^{B-1} g_{\mu 9}^B g_{\nu 9}^B + (2\pi)^2 l_s^4 g_{99}^{B-1} B_{\mu 9}^{NS} B_{\nu 9}^{NS}; \\ \phi &= \varphi - \frac{1}{2} \log(g_{99}^B l_s^{-2}); & C_9 &= \frac{1}{2\pi} C; & C_\mu &= -2\pi C_{\mu 9} + C B_{\mu 9}^{NS}; & B_{\mu 9} &= -\frac{1}{2\pi} g_{\mu 9}^B g_{99}^{B-1}; \\ B_{\mu\nu} &= B_{\mu\nu}^{NS} - g_{99}^{B-1} g_{9[\mu}^B B_{\nu]9}^{NS}; & C_{\mu\nu 9} &= \frac{1}{2\pi} (C_{\mu\nu} - g_{99}^{B-1} g_{9[\mu}^B C_{\nu]9}); \\ C_{\mu\nu\rho} &= 2\pi C_{\mu\nu\rho 9}^+ - \frac{1}{4} B_{9[\mu}^{NS} C_{\nu\rho]} + \frac{1}{4} C_{9[\mu} B_{\nu\rho]}^{NS} + B_{9[\mu}^{NS} C_{|\nu\rho]} g_{9]9}^B g_{99}^{B-1}, \end{aligned} \quad (\text{A.2.31})$$

IIA \rightarrow IIB

$$\begin{aligned} g_{99}^B &= g_{99}^{A-1} l_s^4; & g_{\mu 9}^B &= -2\pi l_s^4 g_{99}^{A-1} B_{\mu 9}; & g_{\mu\nu}^B &= g_{\mu\nu}^A - g_{99}^{A-1} g_{\mu 9}^A g_{\nu 9}^A + (2\pi)^2 l_s^4 g_{99}^{A-1} B_{\mu 9} B_{\nu 9}; \\ \varphi &= \phi - \frac{1}{2} \log(g_{99}^A l_s^{-2}); & C &= 2\pi C_9; & B_{\mu 9}^{NS} &= \frac{1}{2\pi} g_{\mu 9}^A g_{99}^{A-1}; & C_{\mu 9} &= \frac{-1}{2\pi} (C_\mu - C_9 g_{\mu 9}^A g_{99}^{A-1}); \\ B_{\mu\nu}^{NS} &= B_{\mu\nu} + g_{99}^{A-1} g_{9[\mu}^A B_{\nu]9}; & C_{\mu\nu} &= 2\pi C_{\mu\nu 9} - B_{9[\mu} (C_{\nu]} - g_{\nu]9}^A g_{99}^{A-1} C_9); \\ C_{\mu\nu\rho 9}^+ &= \frac{1}{2\pi} C_{\mu\nu\rho} - \frac{1}{4} \frac{1}{2\pi} g_{99}^{A-1} g_{9[\mu}^A C_{\nu\rho]9} - \frac{1}{4} \frac{1}{(2\pi)^2} C_{[\mu} B_{\nu\rho]} + \frac{1}{4} \frac{1}{(2\pi)^2} C_9 g_{99}^{A-1} g_{9[\mu}^A B_{\nu\rho]}. \end{aligned} \quad (\text{A.2.32})$$

ここでは hat をはずした.

type IIA での x^9 方向の半径を R^A , type IIB での x^9 方向の半径を R^B とすると上の関係: $g_{99}^A g_{99}^B = l_s^4$ は $R^A R^B = l_s^2$ を表している. また $e^\phi = g_{\text{str}}^A$, $e^\varphi = g_{\text{str}}^B$ とすると上の ϕ と φ の関係は $\frac{g_{\text{str}}^A}{R^A} = \frac{g_{\text{str}}^B}{R^B}$ を表している. さらにこの T-duality 変換によって metric と NSNS 2-form が混ざり合うことがわかる. RR n -form と RR $(n+1)$ -form を dimensional reduction したものはおよそ $C_{\mu_1 \dots \mu_n} \sim 2\pi C_{\mu_1 \dots \mu_n 9}$ の関係になっている. これは場の物理的規格化を採用しているためである.

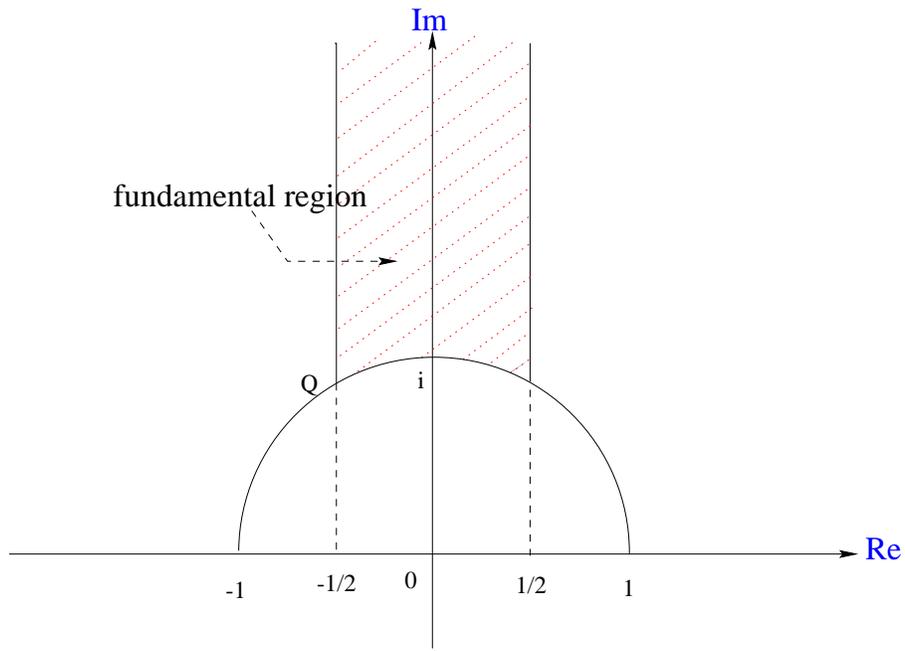


図 A.1: fundamental region. 図中の Q が $e^{\frac{2\pi i}{3}}$.

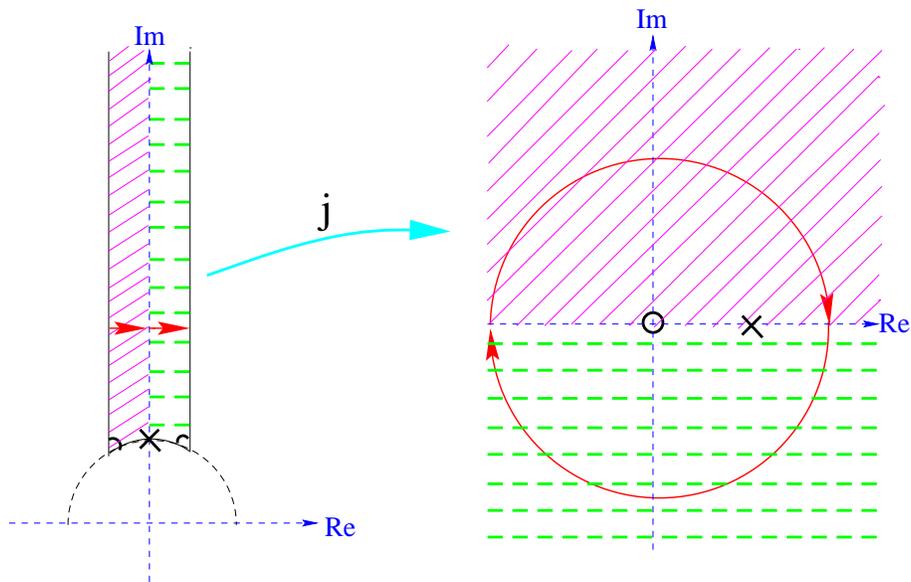


図 A.2: j によって fundamental region は \mathbb{C} にうつる.

関連図書

- [1] I. Kishimoto and N. Sasakura, “*M-theory description of BPS string in 7-brane background*”, Report KUNS-1484,HE(TH)97/20 and [hep-th/9712180](#).
- [2] T. Banks, W. Fischler, S.H. Shenker and L. Susskind, “*M Theory As A Matrix Model: A Conjecture*”, *Phys. Rev.* **D55** (1997) 5112-5128. [hep-th/9610043](#).
- [3] N. Ishibashi, H. Kawai, Y. Kitazawa and A. Tsuchiya, “*A Large-N Reduced Model as Superstring*” *Nucl. Phys.* **B498** (1997) 467-491. [hep-th/9612115](#).
- [4] E. Witten, “*Solutions Of Four-Dimensional Field Theories Via M Theory*”, *Nucl. Phys.* **B500** (1997) 3-42. [hep-th/9703166](#).
- [5] K. Hori, H. Ooguri and Y. Oz, “*Strong Coupling Dynamics of Four-Dimensional N=1 Gauge Theories from M Theory Fivebrane*”, *Adv. in Theor. and Math. Phys.* **1** (1997) 1. [hep-th/9706082](#).
- [6] A. Hanany and E. Witten, “*Type IIB superstrings, BPS monopoles, and three-dimensional gauge dynamics*”, *Nucl. Phys.* **B492** (1997) 152-190. [hep-th/9611230](#).
- [7] O. Aharony, A. Hanany and B. Kol, “*Webs of (p,q) 5-branes, Five Dimensional Field Theories and Grid Diagrams*”, Report IASSNS-HEP-97/113, RU-97-81, SU-ITP-97-40 and [hep-th/9710116](#).
- [8] E. Witten, “*New “Gauge” Theories In Six Dimensions*”, [hep-th/9710065](#).
- [9] N. Seiberg, “*Matrix Description of M-theory on T^5 and T^5/Z_2* ”, *Phys. Lett.* **B408** (1997) 98-104. [hep-th/9705221](#).
- [10] A. Losev, G. Moore and S.L. Shatashvili, “*M&m’s*”, Report YCTP-P13-97 and [hep-th/9707250](#).

- [11] R. Argurio and L. Houart, “*Little Theories in Six and Seven Dimensions*”, Report ULB-TH-97/19 and [hep-th/9710027](#).
- [12] M. Bershadsky, K. Intriligator, S. Kachru, D.R. Morrison, V. Sadov and C. Vafa, “*Geometric Singularities and Enhanced Gauge Symmetries*”, *Nucl. Phys.* **B481** (1996) 215-252. [hep-th/9605200](#).
- [13] O. Bergman, “*Three-Pronged Strings and 1/4 BPS States in N=4 Super-Yang-Mills Theory*”, Report HUTP-97/A104 and [hep-th/9712211](#).
- [14] E. Bergshoeff, E. Sezgin and P.K. Townsend, “*Properties of the Eleven-Dimensional Supermembrane Theory*”, *Ann. Phys.* **185** (1988) 330-368.
- [15] M.J. Duff, “*Supermembranes*”, Report CTP-TAMU-61/96 and [hep-th/9611203](#).
- [16] K. Becker, M. Becker and A. Strominger, “*Fivebranes, Membranes and Non-Perturbative String Theory*”, *Nucl. Phys.* **B456** (1995) 130-152. [hep-th/9507158](#).
- [17] B.R. Greene, A. Shapere, C. Vafa and S.T. Yau, “*Stringy Cosmic Strings And Non-compact Calabi-Yau Manifolds*”, *Nucl. Phys.* **B337** (1990) 1-36.
- [18] G.W. Gibbons, M.B. Green and M.J. Perry, “*Instantons and seven-branes in type IIB superstring theory*”, *Phys. Lett.* **B370** (1996) 37-44. [hep-th/9511080](#).
- [19] A. Sen, “*BPS States on a Three Brane Probe*”, *Phys. Rev.* **D55** (1997) 2501-2503. [hep-th/9608005](#).
- [20] C. Vafa, “*Evidence for F-Theory*”, *Nucl. Phys.* **B469** (1996) 403-418. [hep-th/9602022](#).
- [21] A. Sen, “*F-theory and Orientifolds*”, *Nucl. Phys.* **B475** (1996) 562-578. [hep-th/9605150](#).
- [22] A. Sen, “*Orientifold Limit of F-theory Vacua*”, Report MRI-PHI/97/P970924 and [hep-th/9709159](#).
- [23] K. Dasgupta and S. Mukhi, “*F-Theory at Constant Coupling*”, *Phys. Lett.* **B385** (1996) 125-131. [hep-th/9606044](#).
- [24] D.R. Morrison and C. Vafa, “*Compactifications of F-Theory on Calabi-Yau Threefolds – II*”, *Nucl. Phys.* **B476** (1996) 437-469. [hep-th/9603161](#).

- [25] 国友 浩, “F 理論入門”, 素粒子論研究 **95/3** (1997/6) C6-21.
- [26] E. Witten, “Bound States Of Strings And p -Branes”, *Nucl. Phys.* **B460** (1996) 335-350. hep-th/9510135.
- [27] A. Strominger, “Open P -Branes”, *Phys. Lett.* **B383** (1996) 44-47. hep-th/9512059.
- [28] K. Dasgupta and S. Mukhi, “BPS Nature of 3-String Junctions”, Report TIFR/TH/97-58 and hep-th/9711094.
- [29] A. Sen, “String Network”, Report MRI-PHY/P971131 and hep-th/9711130.
- [30] M. Krogh and S. Lee, “String Network from M -theory”, Report PUPT-1747 and hep-th/9712050.
- [31] Y. Matsuo and K. Okuyama, “BPS Condition of String Junction from M theory”, Report UT-800 and hep-th/9712070.
- [32] A. Johansen, “A Comment on BPS States in F -theory in 8 Dimensions”, *Phys. Lett.* **B395** (1997) 36-41. hep-th/9608186.
- [33] M.R. Gaberdiel and B. Zwiebach, “Exceptional groups from open strings”, Report HUTP-97/A046, MIT-CTP-2670 and hep-th/9709013.
- [34] J.H. Schwarz, “Covariant Field Equations of Chiral $N=2$ $D=10$ Supergravity”, *Nucl. Phys.* **B226** (1983) 269-288.
- [35] E. Witten, “String Theory Dynamics In Various Dimensions”, *Nucl. Phys.* **B443** (1995) 85-126. hep-th/9503124.
- [36] E. Bergshoeff, C.M. Hull and T. Ortin, “Duality in the Type-II Superstring Effective Action”, *Nucl. Phys.* **B451** (1995) 547. hep-th/9504081.
- [37] J.H. Schwarz, “An $SL(2,Z)$ Multiplet of Type IIB Superstrings”, *Phys. Lett.* **B360** (1995) 13, Erratum: **B364** (1995) 252. hep-th/9508143.
- [38] T. Ortin, “ $Sl(2,R)$ -DUALITY COVARIANCE OF KILLING SPINORS IN AXION-DILATON BLACK HOLES”, *Phys. Rev.* **D51** (1995) 790. hep-th/9404035.

- [39] E. Bergshoeff, M.de Roo, N.B. Green, G. Papadopoulos and P.K. Townsend, “Duality of Type II 7-branes and 8-branes”, *Nucl. Phys.* **B470** (1996) 113-135. hep-th/9601150.
- [40] J.H.Schwarz, “Lectures on Superstring and M Theory Dualities”, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **55B** (1997) 1-32. hep-th/9607201.
- [41] M.B. Green, J.H. Schwarz and E. Witten, “*Superstring theory I,II*”, Cambridge University Press (1987).
- [42] Y.Imamura, “*String, M and Matrix Theories*”. To be published in 素粒子論研究.
- [43] J. Polchinski, S. Chaudhuri and C.V. Johnson, “*Notes on D-Branes*”, Report NSF-ITP-96-003 and hep-th/9602052.
- [44] J. Polchinski, “*TASI Lectures on D-Branes*”, Report NSF-ITP-96-145 and hep-th/9611050.
- [45] 九後 汰一郎, “ゲージ場の量子論 I,II”, 培風館 (1989).
- [46] P.S. Aspinwall, “*K3 Surfaces and String Duality*”, Report RU-96-98 and hep-th/9611137.
- [47] B. Greene, “*String Theory on Calabi-Yau Manifolds*”, Report CU-TP-812 and hep-th/9702155.
- [48] 小林 昭七, “*接続の微分幾何とゲージ理論*”, 裳華房 (1989).
- [49] 松島 与三, “*多様体入門*”, 裳華房 (1965).
- [50] 日本数学会 編, “*岩波 数学辞典 第3版*”, 岩波書店 (1985).
- [51] 上野 健爾, “*代数幾何入門*”, 岩波書店 (1995).
- [52] 飯高 茂, 上野 健爾, 浪川 幸彦, “*デカルトの精神と代数幾何*”, 日本評論社 (1993).