弦理論から見た Hawking 輻射

栗田泰生

京都大学人間・環境学研究科
修士課程二年

2001 年 1 月

目次

1 Introduction **4**

2 Hawking radiation **6**
2.1 Hawking radiation in Schwarzschild Black Hole 6

3 D1/D5-System **11**
3.1 The D-brane calculation 11
3.1.1 Closed string emissions from near BPS D_1-brane 11
3.1.2 Initial excitation states of D_1-brane 13
3.1.3 Hawking radiation of D_1/D_5 configuration 16
3.2 Classical Calculation 18
3.2.1 Outer region ($r \gg r_i$) 20
3.2.2 near horizon region($r \ll r_i$) 21
3.2.3 matching the solutions 22
3.2.4 The absorption cross section 23
3.2.5 The classical result of energy decay rates 24
3.3 Discussion 25

4 D3-System **28**
4.1 Classical culclation 28
4.2 Field theory approach 30
4.3 Discussion 34

5 Discussion **36**

6 Acknowledgments **36**

7 References **37**

A 付録 Bogoliubov transformation **39**

B 付録 式 (17) の証明 **43**

1 Introduction

Black Holes は様々な興味から研究されているが、 Black Holes 自身の最大の問題は、“蒸発?” ということである。すなわち、 2 章で説明するように Black Holes は物質に関しての量子論を考慮すると熱的なオブジェクトとなり、黒体輻射 (Hawking 輻射) する。したがって輻射に伴ってエネルギーを失い、いつかは消えてなくなる、というものである。

これはどういうことだろうか? 宇宙に存在すると考えられる Black Holes は、星が重力崩壊してできるものである。星の状態は観測で知ることができて、純粋状態である。しかし、 Black Holes から出てくる輻射は、 horizon の外側に出たものしか見えないので混合状態であり、蒸発の最終段階、つまり horizon がなくなるとき、残されるのは輻射だけで、混合状態となる。これは純粋状態が混合状態になったと言える。しかしながら、これは量子論のユニタリー性と矛盾する。

この問題の解答は知られていない。そもそも今の所、蒸発の最終段階まで記述できる理論、もしくは、 picture は知られていない。したがって、蒸発するとはどういうことなのか、わかっていないのが現状である。

ところで、これまで述べてきたことは重力に関して古典論、つまり一般相対論の枠組で考えられたことである。しかしながら、 Black Holes の蒸発という理論のユニタリー性の問題を考える時、重力に関しても量子論で考えるという発想は自然である。

現在知られている重力の量子論として最も有力な理論は超弦理論であるが、この超弦理論によるアプローチで、 Black Hole の熱力学に関して一つの理解があった。それは超弦理論における D-brane を Black Hole に遷移させ、その D-brane 上の微視的状態を足し上げることで、 Black Holes の熱力学的エントロピーを導くことができたのである。これは、エントロピーに統計力学的意味を与えたことになり、 Black Holes を熱力学系として理解することに大きな裏付けを与えたことになる。

これから次に考えられることは、 Hawking 輻射は超弦理論に於いてどのように記述されるのか? という問題である。これは Black Holes の蒸発に関して、超弦理論のユニタリー性を用いて議論しようとした時、自然な発想である。この問題はエントロピーの議論の後精力的に研究され、低エネルギーでは、それまで知られていた Hawking 輻射の結果と超弦理論による記述が完全に一致した。ここでも、 Black Holes は D-brane として記述される。 D-brane の励起状態は D-brane に両端がくっついた open strings で表せられるが、二つの open string が衝突して massless の closed string が D-brane から飛び出す。この衝突に関してアンサンブル平均を取り、熱輻射として解釈したものが、超弦理論における Hawking 輻射である。ここで衝突のプロセスはユニタリーであり、このような描像で蒸発を記述したい。しかし現在のところ、 extremal Black Hole、つまり Hawking 輻射せずしたがって蒸発しない Black Holes において、 extremal 極限の近くでのみこのアプローチが有効で、蒸発の最終段階を記述するには至っていない。ではあるが将来的に、超弦理論を用いて重力の量子効果まで含めた Black Hole の蒸発を議論するには、欠かせないプロセスである。

この修士論文では、超弦理論からみた Hawking 輻射に関して review する。まず 2 章では、良く知られた Hawking 輻射について review する。 3 章では、 D_1/D_5 system という

D-brane 描像で Hawking 輻射を紹介し、準古典的計算と低エネルギーで完全に一致することを見る。 4 章では、 D_3 system での extremal Black Hole を考える。 extremal なので、 Hawking 輻射はしないが、この場合吸収断面積をエネルギーに関して一つ高次まで求めることができ、準古典的方法と D-brane 描像 (ここでは CFT) の二つのアプローチで結果を比較する。

2 Hawking radiation

ここでは Black Holes の Hawking 輻射について review する [1]。したがってこの章では、重力場に関しては一般相対論、物質場については場の量子論の枠組で話しをする。

宇宙の中には、星が重力崩壊して Black Hole になる過程があると考えられている。このような重力崩壊を伴う時空は定常的ではなく、時間的 Killing ベクトルが存在しない。したがって、物質場を量子化した真空は一意的ではなく、星の重力崩壊の場合には未来的無限遠 (以下、$\Im^+$) と過去的無限遠 (以下、$\Im^-$) で異なると考えられる。このような異なる真空の間の変換は、Bogoliubov 変換として知られるが、これによると、片方の真空は、もう一方の真空から見ると励起状態に見える。このことから、以下で求めるように、重力崩壊していく星の表面 (または Black Hole) は、黒体輻射しているように見える。これが Hawking 輻射と呼ばれるものである。

2.1 Hawking radiation in Schwarzschild Black Hole

ここでは簡単のため星の球対称重力崩壊を考えよう。星の重力崩壊が始まる前、星は自己の Schwarzschild 半径よりも大きく、外部時空は Schwarzschid 時空で表わせられるが、重力崩壊が始まると定常時空ではなくなる。さらに星の重力崩壊が進んで、星が自己の Schwarzschild 半径よりも小さくなると、event horizon が現れて Black hole となる。Black Hole が形成された後の時空は再び Schwarzschild 時空である。Hawking 輻射をもとめるために、重力崩壊前後で異なる二つの真空の間の Bogoliubov 変換を求めよう。

以下では、4 次元の Schwarzschild 時空を考える。つまり計量は、

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}} + r^2 d\Omega_2^2 \tag{1}$$

である。亀の子座標 $r_* := r + 2M \ln \left|\frac{r-2M}{2M}\right|$ として、これを外向き・内向き null 座標 $(u, v) := (t - r_*, t + r_*)$ を用いて表すと、

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) du dv + r^2 d\Omega_2^2 \tag{2}$$

となる。さらに Kruskal 座標 $(U, V) := (-e^{-\kappa u}, e^{\kappa v})$ で書くと、

$$ds^2 = -\frac{32M^3}{r} e^{-\frac{2M}{r}} dU dV + r^2 d\Omega_2^2 \tag{3}$$

である。但、$\kappa := \frac{1}{4M}$ は表面重力と呼ばれる量で、event horizon $r = 2M$ の静止系における重力を無限遠方に静止している観測者が測った量である。ここでは、観測者は十分遠方 $(r \to \infty)$ の漸近的 Minkowski 空間に静止しているとしよう。

次に massless scalar 場の量子論を考える。scalar 場の運動方程式は

$$D_\mu \partial^\mu \phi = 0 \tag{4}$$

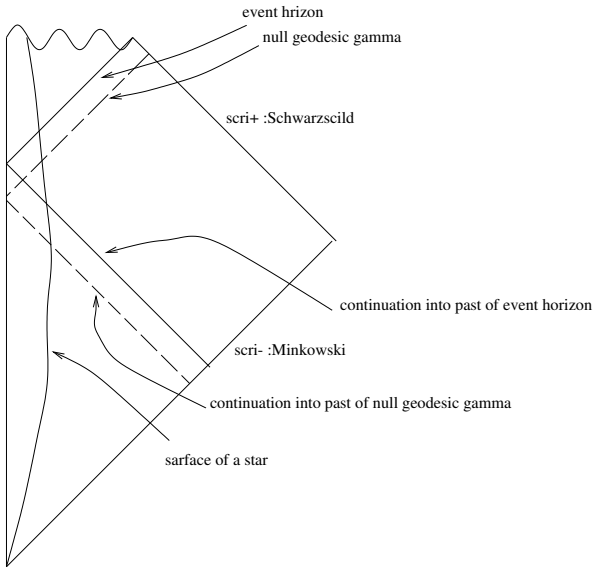

図 1: 星の重力崩壊と Black Hole 形成の Penrose 図

であり、この方程式の規格化された解 $\phi_\omega(\omega$ はエネルギー$)$ は、無限遠の漸近的 Minkowski 領域では u, v を用いて、

$$\phi_\omega(u) = \frac{e^{-i\omega u}}{\sqrt{2\omega\Omega_2 r^2}} Z_2 \tag{5}$$

$$\tilde{\phi}_\omega(v) = \frac{e^{-i\omega v}}{\sqrt{2\omega\Omega_2 r^2}} Z_2 \tag{6}$$

である。但、 Z_2 は 2 次元球面調和関数であり、角変数は煩わしいので明記しなかった。Ω_2 は 2 次元球面の体積である。

$\Im^+$ では、正振動数解は ϕ_ω であるから、運動方程式の解空間の複素基底を $\{\phi_\omega\}$ にとることができ、解は完全系 $\{\phi_\omega\}$ で展開される。つまり、

$$\phi = \sum_\omega \left(a_\omega \phi_\omega + a^*_\omega \phi^*_\omega\right) \tag{7}$$

一方、 $\Im^-$ では、正振動数解は $\tilde{\phi}_\omega$ であり、ここでの解空間の複素基底を $\{\tilde{\phi}_\omega\}$ にとることができ、解は完全系 $\{\ \tilde{\phi}_\omega\ \}$ で展開される。

$$\phi = \sum_\omega \left(\tilde{a}_\omega \tilde{\phi}_\omega + \tilde{a}^*_\omega \tilde{\phi}^*_\omega\right) \tag{8}$$

これから、通常の正準量子化手続きで $\Im^+$ では、

$$\phi = \sum_\omega \left(a_\omega \phi_\omega + a^\dagger_\omega \phi^*_\omega\right) \tag{9}$$

ここで、 $a_\omega, a^\dagger_\omega$ は、それぞれ $\Im^+$ での規格化された消滅、生成演算子となる。

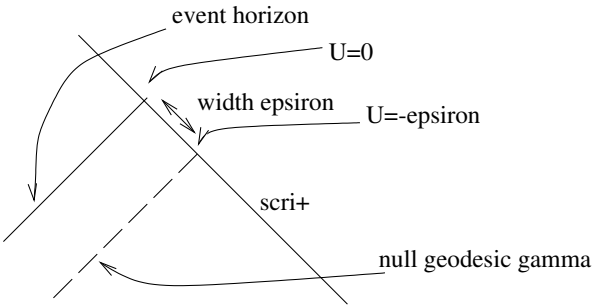

図 2: $\Im+$ と event horizon の交点近くの様子

同様に、 $\Im^-$ では、

$$\phi = \sum_{\omega} \left(\tilde{a}_{\omega} \tilde{\phi}_{\omega} + \tilde{a}^{\dagger}_{\omega} \tilde{\phi}^{*}_{\omega} \right) \tag{10}$$

で、 $\tilde{a}_{\omega}, \tilde{a}^{\dagger}_{\omega}$ は、それぞれ $\Im^-$ での規格化された消滅、生成演算子となる。

物質場の真空は $\Im^+$ では、

$$a_{\omega}|0\rangle = 0 \quad \forall\ \omega$$

$\Im^-$ では、

$$\tilde{a}_{\omega}|\tilde{0}\rangle = 0 \quad \forall\ \omega$$

で定義される。この二つの生成消滅演算子達の間の一次変換は Bogoliubov 変換で与えられる。

さて、この Bogoliubov 変換を求めるために、 $\Im^+$ から $\Im^-$ へ場を引き戻すことを考える。星の表面から event horizin すれすれを通って $\Im^+$ へと到達する進行波、

$$\phi_{\omega} = \frac{e^{-i\omega u}}{\sqrt{2\omega\Omega_2 r^2}} Z_2 \tag{11}$$

を考えよう。さらに幾何光学近似をとり、これを null 測地線 γ に沿って $\Im^-$ まで引き戻す。 (図 1 参照。)

$\Im^+$ 上で event horizon とテスト粒子の null 測地線 γ の間の affine 距離を $\epsilon(>0)$ とする。 $\Im^+$ 上の affine パラメーターは Kruskal 座標 U で与えられて、 event horizon と $\Im^+$ の交点を $U=0$ とすると、 null 測地線 γ は $U=-\epsilon$ となる。 (図 2 参照。) この ϵ を用いてテスト粒子を表すと、

$$\phi_{\omega} = \frac{e^{i\frac{\omega}{\kappa}\ln(\epsilon)}}{\sqrt{2\omega\Omega_2 r^2}} Z_2 \tag{12}$$

である。今 ϵ は微小なので、この関数は激しく振動し、幾何光学近似が正当化される。

次に event horizon を形式的に $\Im^-$ まで延長する。 γ は event horizon から affine 距離 ϵ の null 測地線で特徴づけらているので、延長された event horizon からの affine 距離で決まる。ここで、延長された event horizon と γ は内向きの null 測地線である。 $\Im^-$ 上での affine パラメーターは Minkowski 時空の null 座標 v で与えられ、 event horizon と $\Im^-$

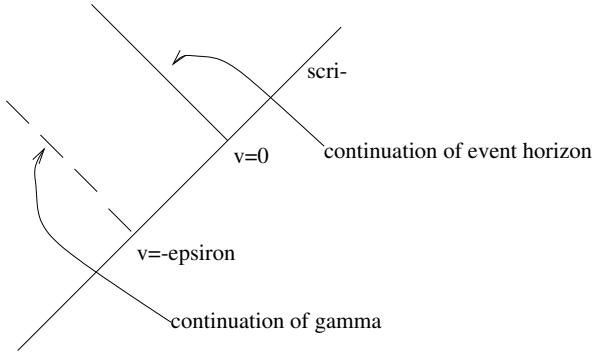

図 3: $\Im-$ と event horizon の接続との交点近くの様子。

の交点を $v = 0$ とすると、γ と $\Im^-$ の交点は、$v = -\epsilon$ である。(図 3 参照。) したがって、$\Im^-$ 上でのテスト粒子は、

$$\phi_\omega = \frac{e^{i\frac{\omega}{\kappa}\ln(-v)}}{\sqrt{2\omega\Omega_2 r^2}} Z_2 \tag{13}$$

但、これは $v < 0$ の場合である。$v > 0$ から入射した粒子は、event horizon を通過して、$r = 0$ の特異点に突っ込み、$\Im^+$ に到達しない。(図 1 参照。) したがって、$\Im^-$ 上のテスト粒子 $\phi_\omega(v)$ は、

$$\phi_\omega(v) = \begin{cases} 0 & \text{for } v \geq 0 \\ \frac{e^{i\frac{\omega}{\kappa}\ln(-v)}}{\sqrt{2\omega\Omega_2 r^2}} Z_2 & \text{for } v < 0 \end{cases} \tag{14}$$

となる。この関数のフーリエ変換をとると、

$$\begin{aligned} \Phi_\omega(\omega') &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega' v}\phi_\omega(v)dv & (15)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\omega\Omega_2 r^2}} Z_2 \int_{-\infty}^{0} \exp\left[i\omega' v + i\frac{\omega}{\kappa}\ln(-v)\right] dv & (16) \end{aligned}$$

となる。このフーリエ係数関数については付録 B より、

$$\Phi_\omega(-\omega') = -e^{-\frac{\pi\omega}{\kappa}}\Phi_\omega(\omega') \quad \text{for } \omega' > 0 \tag{17}$$

の関係式が導かれる。

これらから ϕ_ω を $\tilde{\phi_\omega}$ で展開することができて、

$$\begin{aligned} \phi_\omega(v) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{2\pi}\Phi_\omega(\omega')\exp\left[-i\omega' v\right] & (18)\\ &= \frac{\sqrt{2\omega\Omega_2 r^2}}{2\pi Z_2}\int_0^{\infty} d\omega'\left[\Phi_\omega(\omega')\tilde{\phi}_{\omega'}(v) - e^{-\frac{\pi\omega}{\kappa}}\Phi_\omega(\omega')\tilde{\phi}^*_{\omega'}(v)\right] & (19)\\ &=: \int_0^{\infty} d\omega'\left[A_{\omega\omega'}\tilde{\phi}_{\omega'}(v) + B_{\omega\omega'}\tilde{\phi}^*_{\omega'}(v)\right] & (20) \end{aligned}$$

である。これは、 $\{\phi_\omega\}$ と $\{\tilde{\phi}_\omega\}$ の間の Bogoliubov 変換である。今 Bogoliubov 係数を $A_{\omega\omega'}, B_{\omega\omega'}$ としたがこれは、

$$A_{\omega\omega'} := \frac{\sqrt{2\omega\Omega_2 r^2}}{2\pi Z_2}\Phi_\omega(\omega') \tag{21}$$

$$B_{\omega\omega'} := -e^{-\frac{\pi\omega}{\kappa}}\frac{\sqrt{2\omega\Omega_2 r^2}}{2\pi Z_2}\Phi_\omega(\omega') \tag{22}$$

である。したがって、

$$B_{\omega\omega'} = -e^{\frac{\pi\omega}{\kappa}}A_{\omega\omega'} \tag{23}$$

であることがわかる。これから、 Bogoliubov 係数の関係式より、

$$\delta(\omega-\omega') = \left(AA^\dagger - BB^\dagger\right)_{\omega\omega'} \tag{24}$$

$$= \left[e^{\frac{\pi(\omega+\omega')}{\kappa}} - 1\right]\left(BB^\dagger\right)_{\omega\omega'} \tag{25}$$

である。

さて、 $\Im^+$ からみた $\Im^-$ の真空状態の粒子数を求めてみよう。そのために必要なのは、 Bogoliubov 係数 B の逆数 B' であるが、これは付録の式 (232) より、

$$B' = -B^T$$

である。したがって求める粒子数は、付録 A の式 (252) と全く同様に、

$$\langle\tilde{0}|a_\omega a^\dagger_{\omega'}|\tilde{0}\rangle = \left(BB^\dagger\right)^*_{\omega\omega'} \tag{26}$$

$$= \frac{1}{e^{2\pi\omega/\kappa-1}}\delta(\omega-\omega') \tag{27}$$

で与えられる。これは、温度 $T_H := \frac{\kappa}{2\pi}$ の黒体輻射であり、 Black Hole の表面から輻射されていると解釈できる。 T_H は Hawking 温度と呼ばれる。これが Hawking 輻射である。

このように Black Holes は黒体輻射しており、最終的には蒸発すると考えられる。ところが今の計算方法では、 Black Holes の質量 M は一定であるとしており、蒸発の最終段階には適切ではない。したがって、蒸発を考えるような場合には別のアプローチが必要になる。

3 D1/D5-System

超弦理論には D-brane と呼ばれるオブジェクトがある。 D-brane とは、超弦理論に現れる Ramond-Ramond 場の電荷の源となる soliton 解である。このような soliton 解も自らの schwarzscild 半径が string length よりも小さい場合には、計量や horizon という概念はなくなるが、超弦理論に於ける Black Hole として振舞うと考えられる。ここではそのような Black Hole 例として、 D1/D5-System を紹介する [2][3]。

D1/D5-System は、 D1-brane、 D5-brane とそれらの上に励起される open strings から構成される。具体的に 10 次元時空の空間的座標を $x^i, (i = 1, 2, \ldots .9)$ としよう。その中の 5,6,7,8,9 方向に D5-brane があり、さらに 9 方向に D1-brane が伸びているとする。それぞれの D-brane は 1,2,3,4 方向の原点に位置している。また、 9 方向については半径 R の S_1 コンパクト化、 5,6,7,8 方向は体積 $\tilde{V}_4$ の T_4 コンパクト化する。 D1-brane は S_1 に Q_1 回、 D5-brane は $T_4 \times S_1$ に Q_5 回それぞれ巻き付いている。 9 方向の S_1 コンパクト化に伴う Kaluza-Klein 運動量を $\frac{N}{R}$ とする。これは、 D-brane 上に励起された open string の 9 方向の全運動量を表している。特に extremal Black Holes は、 D-brane の BPS 状態に対応していると考えられていて、 D1-brane に (片方または両方の) 端点を持つ open string は、すべて massless で 9 方向の同じ向きに走ることが知られている。

以下では、この Black Hole の extremal 極限近くでの低エネルギー Hawking 輻射を、対応する超重力理論の古典解と、 D-brane 描像によるアプローチの両方で計算して比較する [4]。

3.1 The D-brane calculation

まず D-brane 描像で Hawking 輻射を記述しよう。

3.1.1 Closed string emissions from near BPS D_1-brane

この節では、わずかに BPS 状態からずれた D1/D5-system を考える。この system の励起は D-brane 上の massless open strings で表せるが、 BPS 状態では、 D_1-brane 上の open strings は同一方向に走る。今の場合わずかに BPS 状態からずれているので、 D_1-brane 上の open strings は、両方向から走ってくる。したがってそれらの open strings の衝突を考えることができる。二つの open strings は衝突した結果、 massless closed string となって D1/D5-brane から飛び出す。このようなプロセスが Hawking 輻射である。

低エネルギーの D_1-brane の有効作用として Dirac-Born-Infeld 作用を用いる。

$$S_{DBI} = -T \int d^2\xi \; e^{-\phi(X)} \sqrt{-det\,[G_{mn} + B_{mn} + F_{mn}]} \tag{28}$$

ここで、 G_{mn}, B_{mn} は

$$G_{mn} := G_{\mu\nu}(X)\partial_m X^\mu \partial_n X^\nu, \quad B_{mn} := B_{\mu\nu}(X)\partial_m X^\mu \partial_n X^\nu \tag{29}$$

であり、 $G_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}$ はそれぞれ、 Back ground 計量、 NS-NS 2form である。また (ξ^0, ξ^1) は D_1-brane の world sheet 座標、 T は $T^D = e^{-\frac{\phi}{2}} T$、 (但、 T^D は D_1-brane の張力) で関係づけられる量である。

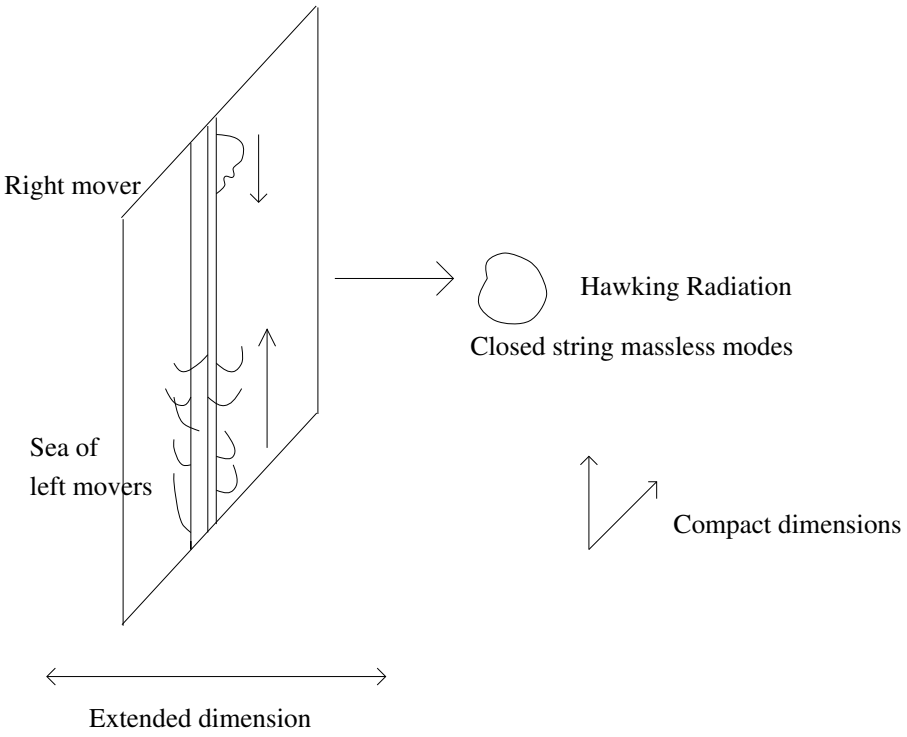

図 4: D1/D5-system での Hawking 輻射

D_1-brane world sheet の gauge として、 static gauge をとる。すなわち、

$$X^0 = \xi^0, \quad X^9 = \xi^1 \tag{30}$$

この gauge は D_1-brane が 9 方向に伸びて動かないことを表す。この時、 D_1-brane の低エネルギー励起である massless open string は、 D_5-brane 方向に励起するので、

$$X^i(X^0, X^9), \quad (i = 5, 6, 7, 8)$$

で表される。以下、 Einstein frame で考える。つまり、 $G^E_{\mu\nu} = e^{-\frac{\phi}{2}} G_{\mu\nu}$ として、

$$S^{(E)}_{DBI} = -T \int d^2\xi e^{-\frac{\phi}{2}} \sqrt{\left[-det(G^{(E)}_{mn} + \cdots)\right]} \tag{31}$$

ここで、次のように計量を平坦な空間のまわりで展開する。

$$G^{(E)}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + 2\kappa_{10} h_{\mu\nu} \tag{32}$$

(但、 $\kappa^2_{10} = 8\pi G_{10}$ で、 κ_{10} は 10 次元重力結合定数。) また、 $X^i(\xi)$ もゼロのまわりで展開すると、 DBI 作用は

$$S^{(E)}_{DBI} = \int d^2\xi \left[\frac{1}{2}(\delta_{ij} + 2\kappa_{10} h_{ij}) \partial_\alpha (\sqrt{T^D} X^i) \partial^\alpha (\sqrt{T^D} X^j) + (\text{定数項または高次の項})\right] \tag{33}$$

となる。これから open string の運動項と、 graviton と open string の相互作用項が読みとれる。以下では、 open string の衝突によって生成される closed string は、 graviton h_{67} であるとして話しを進める。

open string の運動項から、

$$\tilde{X}^i := \sqrt{T^D} X^i$$

が規格化された運動項を与えることがわかる。また、 graviton の規格化については、 type IIB の低エネルギー作用

$$S = \frac{1}{2\kappa^2}\int d^{10}x\sqrt{-detG^{(E)}_{\mu\nu}}\left[R^E - \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi) + \cdots\right] \tag{34}$$

$$= \int d^{10}x\left[-\frac{1}{2}\partial_\mu h_{ij}\partial^\mu h_{ij} + \cdots\right] \tag{35}$$

より、添字 ij の対称性に注意すると、規格化された graviton $\tilde{h}_{67}$ は

$$\tilde{h}_{67} = \sqrt{2}h_{67}$$

となる。したがって、 $\tilde{h}_{67}$ と open string の相互作用項は、 ij の和に注意して、

$$S_{int} = \sqrt{2}\kappa_{10}\tilde{h}_{67}\partial_\alpha\tilde{X}^6\partial^\alpha\tilde{X}^7 \tag{36}$$

である。

さて、二つの open string の衝突を考えよう。 open string の運動量を $(p_0, p_9), (q_0, q_9)$ とすると、 graviton $\tilde{h}_{67}$ が生成される tree level の振幅 $\mathcal{A}_\mathcal{D}$ は、

$$\mathcal{A}_\mathcal{D} = \sqrt{2}\kappa_{10} p\cdot q \tag{37}$$

である。今、 open string は massless で、 D1/D5-brane から放射される graviton $\tilde{h}_{67}$ は、D1/D5-brane に垂直に放射されるとすると (s 波に対応する)、 D_1-brane 方向の運動量保存から

$$p\cdot q = -p_0q_0 + p_9q_9 = 2|p_9|^2 \tag{38}$$

である。

3.1.2 Initial excitation states of D_1-brane

前節では、一対の open string の衝突を考えた。しかし、実際には複数の衝突が起こっているはずである。したがって、 D-brane(Black Hole) の decay を記述するには、どれだけの衝突が起こるのか、つまり始状態を決めて始状態について足し上げなければならない。ここでは、 D_1-brane 上の massless open string の熱統計力学を用いて始状態の足し上げを決める。

D_1-brane 上の open string の全エネルギーを E、全運動量を P(もちろん 9 方向)、エネルギー準位を e_r、運動量準位を p_r、状態 (e_r, p_r) の占有数を n_r とする。この時、大分配関数は、

$$Z = e^h = \sum_{states}\exp\left[-\beta\sum_r n_r e_r - \alpha\sum_r n_r p_r\right] \tag{39}$$

ここで α, β は

$$E = -\frac{\partial h}{\partial \beta}, \quad P = -\frac{\partial h}{\partial \alpha} \tag{40}$$

から決まるパラメーターである。。占有数の平均は、

$$\langle n_r \rangle = \rho(e_r, p_r) = \frac{1}{e^{\beta e_r + \alpha p_r} \pm 1} \tag{41}$$

(但、 + は fermion、 - は boson) で与えられる。エントロピー S は、 $T_1 := \frac{1}{\beta}, T_2 := \frac{1}{\alpha}$ とすると、

$$S = h + T_1 \frac{\partial h}{\partial T_1} + T_2 \frac{\partial h}{\partial T_2} = h + \beta E + \alpha P \tag{42}$$

である。

今、 D_1-brane は 9 方向の S_1 に Q_1 回巻き付いているので、 D_1-brane の長さを L とすると、 $L = 2\pi R Q_1$ である。 open string は、 D_1-brane の長さ L の空間を動くので、エネルギー、運動量準位は

$$e_r = \frac{2\pi r}{L}, \quad (r = 1, 2, \cdots) \tag{43}$$

$$p_r = \frac{2\pi r}{L}, \quad (r \in \mathbb{Z}) \tag{44}$$

である。

さて、分配関数を計算しよう。今考えている粒子状態は massless なので、 $(e_r, p_r) = (e_r, e_r)$ または、 $(e_r, p_r) = (e_r, -e_r)$ の場合を考えれば良くて、一つの boson の時、

$$Z_B = \prod_{r=1}^{\infty} \left[1 - e^{-(\alpha+\beta)e_r}\right]^{-1} \cdot \left[1 - e^{-(\beta-\alpha)e_r}\right]^{-1} \tag{45}$$

一つの fermion の時、

$$Z_F = \prod_{r=1}^{\infty} \left[1 + e^{-(\alpha+\beta)e_r}\right] \cdot \left[1 + e^{-(\beta-\alpha)e_r}\right] \tag{46}$$

である。したがって、 f 種類の boson と fermion がある時の分配関数は

$$Z = Z_B^f Z_F^f = \prod_{r=1}^{\infty} \left[\frac{1 + e^{-(\alpha+\beta)e_r}}{1 - e^{-(\alpha+\beta)e_r}}\right]^f \cdot \left[\frac{1 + e^{-(\beta-\alpha)e_r}}{1 - e^{-(\beta-\alpha)e_r}}\right]^f \tag{47}$$

であり、 L は十分大きいとして

$$\begin{aligned} h &= \log Z & (48)\\ &= f\left[\sum_{r=1}^{\infty}\left(\ln(1 + e^{-(\alpha+\beta)\frac{2\pi r}{L}}) - \ln(1 - e^{-(\alpha+\beta)\frac{2\pi r}{L}})\right)\right] \\ &\quad + f\left[\sum_{r=1}^{\infty}\left(\ln(1 + e^{-(\beta-\alpha)\frac{2\pi r}{L}}) - \ln(1 - e^{-(\beta-\alpha)2\pi r} L)\right)\right] \\ &\simeq \frac{fL}{2\pi(\alpha+\beta)} \int_0^{\infty} dx \ln\left(\frac{1 + e^{-x}}{1 - e^{-x}}\right) + \frac{fL}{2\pi(\beta-\alpha)} \int_0^{\infty} dx \ln\left(\frac{1 + e^{-x}}{1 - e^{-x}}\right) & (49) \end{aligned}$$

ここで積分は、

$$\int_0^\infty dx \ln\left(\frac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}}\right) = \frac{\pi^2}{4} \tag{50}$$

より、

$$h \simeq \frac{f\pi L}{8}\left[\frac{1}{\alpha+\beta}+\frac{1}{\beta-\alpha}\right] \tag{51}$$

と求まる。これから、

$$P = -\frac{\partial h}{\partial \alpha} = \frac{f\pi L}{8}\left[\frac{1}{(\alpha+\beta)^2}-\frac{1}{(\beta-\alpha)^2}\right] \tag{52}$$

$$E = -\frac{\partial h}{\partial \beta} = \frac{f\pi L}{8}\left[\frac{1}{(\alpha+\beta)^2}+\frac{1}{(\beta-\alpha)^2}\right] \tag{53}$$

$$S = h+\alpha P+\beta E = \frac{f\pi L}{4}\left[\frac{1}{\alpha+\beta}+\frac{1}{\beta-\alpha}\right] \tag{54}$$

となる。以下では、$(e_r = p_r)$ を left moving、$(e_r = -p_r)$ を right moving と呼ぶことにする。 left moving と right moving はそれぞれ独立に分配関数を計算できて、それぞれの分布関数を ρ_L, ρ_R、とすると、

$$\rho_L = \frac{1}{e^{(\alpha+\beta)e_r}\pm 1} \tag{55}$$

$$\rho_R = \frac{1}{e^{(\beta-\alpha)e_r}\pm 1} \tag{56}$$

である。これらから、それぞれの有効温度を見ることができて、(今、 Boltzmann 定数を 1 としている。)

$$T_L = \frac{1}{\alpha+\beta}, \quad T_R = \frac{1}{\beta-\alpha} \tag{57}$$

である。また、エネルギーやエントロピーについても

$$E_L = \frac{f\pi L}{8}\frac{1}{(\alpha+\beta)^2}, \quad E_R = \frac{f\pi L}{8}\frac{1}{(\beta-\alpha)^2} \tag{58}$$

$$S_L = \frac{f\pi L}{4}\frac{1}{\alpha+\beta}, \quad S_R = \frac{f\pi L}{4}\frac{1}{\beta-\alpha} \tag{59}$$

となることが分配関数の計算からわかる。したがって、

$$T_L = \sqrt{\frac{8E_L}{f\pi L}}, \quad T_R = \sqrt{\frac{8E_R}{f\pi L}} \tag{60}$$

である。これらを用いると、 extremal 極限は right moving の open string がない極限で表せて、$E_R \to 0$ または、$T_R \to 0$ である。最後に、エントロピーで有効温度を表すと、

$$T_L = \frac{4S_L}{f\pi L}, \quad T_R = \frac{4S_R}{f\pi L} \tag{61}$$

となる。

3.1.3 Hawking radiation of D_1/D_5 configuration

ここでは、 D_1/D_5 Black Hole からの Hawking 輻射を計算する。簡単のため、 $Q_5 = 1$ とする。

まず、二つの open string $\tilde{X}^6, \tilde{X}^7$ (それぞれ運動量 $(p_0, p_9), (q_0, q_9)$) の衝突から、 graviton $\tilde{h}_{67}$(運動量は (k_0, k_9, k_i)、但$k_9 = 0$) が散乱される場合の S- 行列は、

$$
\begin{aligned}
S_{fi} &= -i < k_0, k_9, k_i | \mathcal{A}_{\mathcal{D}} | p_0, q_0; p_9, q_9 > && (62)\\
&= -i \int d^2\xi \frac{e^{-ik\xi}}{\sqrt{2k_0 V_9}} \mathcal{A}_{\mathcal{D}} \frac{e^{ip\xi}}{\sqrt{2p_0 L}} \frac{e^{iq\xi}}{\sqrt{2q_0 L}} && (63)\\
&= -i(2\pi)^2 \delta(p_0 + q_0 - k_0)\delta(p_9 + q_9) \frac{\mathcal{A}_{\mathcal{D}}}{\sqrt{(2p_0 L)(2q_0 L)(2k_0 V_9)}} && (64)
\end{aligned}
$$

である。ここで、波動関数は、 open string に関しては 9 方向の体積 L のなかで 1 個、 graviton(closed string) については全空間体積 V_9 に 1 個と規格化している。今、 9 方向は半径 R の S_1 コンパクト化、 5,6,7.8 方向は体積 $\tilde{V_4}$ の T^4 コンパクト化されているので、

$$
V_9 = (2\pi R) V_4 \tilde{V_4}
$$

である。ここで、 1,2,3,4 方向の体積を V_4 とした。

これから、単位時間当たり二つの open string(運動量 p, q) から $k \sim k + dk$ の運動量を持つ graviton への崩壊確率は、 graviton は 5,6,7,8,9 方向に運動量を持たないとすると、

$$
\begin{aligned}
\Gamma(p, q; k) &= \frac{1}{T} |S_{fi}|^2 \frac{V_4 (d^4 k)}{(2\pi)^4} && (65)\\
&= \frac{1}{T} (2\pi)^4 |\delta^{(2)}(p + q - k)|^2 \frac{|\mathcal{A}_{\mathcal{D}}|^2}{(2p_0 L)(2q_0 L)(2k_0 V_9)} \frac{V_4 d^4 k}{(2\pi)^4} && (66)\\
&= \frac{(2\pi)^2 \kappa_5^2}{4L} \delta^{(2)}(p + q - k) \frac{|p \cdot q|^2}{p_0 q_0 k_0 V_4} \frac{V_4 d^4 k}{(2\pi)^4} && (67)
\end{aligned}
$$

但、

$$
|\delta^{(2)}(p + q - k)|^2 = \frac{TL}{(2\pi)^2} \delta^{(2)}(p + q - k) \qquad (68)
$$

であることを用いた。また、 $\kappa_5 := \frac{\kappa_{10}}{\sqrt{2\pi R \tilde{V_4}}}$ で、これは 5 次元重力結合定数である。

全崩壊率 $\Gamma(k)$ は、これを始状態について足しあげたものなので、前節で求めた分布関数を用いて、

$$
\begin{aligned}
\Gamma(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{L dp_9}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{L dq_9}{2\pi} \Gamma(p, q; k) \rho(p_0, p_9) \rho(q_0, q_9) && (69)\\
&= \frac{\kappa_5^2 L d^4 k}{(2\pi)^4 k_0} \left(\frac{k_0}{2}\right)^2 \rho_L \left(\frac{k_0}{2}\right) \rho_R \left(\frac{k_0}{2}\right) && (70)
\end{aligned}
$$

となる。

今、始状態はわずかに extremal からずれているので、

$$E_L = E_{ext} + \Delta E, \quad E_R = \Delta E$$

但、$\Delta E \ll E_{ext}$ である。この時、

$$\frac{p_0}{T_L} \sim \sqrt{\frac{p_0\langle r\rangle}{E_L}} < \sqrt{\frac{E_R}{E_L}} \ll 1 \tag{71}$$

ここで、$\langle r\rangle$ は open string の平均的エネルギー準位であり、 right moving の open string の数 n_r は統計をとれる程度に大きいので、$\langle r\rangle < n_r$ とした。これから、 open string state が bosonic な時、

$$\rho_L(p_0) = \frac{1}{e^{\frac{p_0}{T_L}} - 1} \tag{72}$$

$$\approx \frac{T_L}{p_0} = \frac{4S_L}{p_0 L\pi f} \tag{73}$$

fermionic な時、

$$\rho_L(p_0) \sim \frac{1}{2} \ll \frac{T_L}{p_0} \tag{74}$$

である。これから fermion 状態は、 boson に対してほとんど寄与しないことがわかる。

ところで、今、 D_1-brane 上の open string は D_5-brane に埋め込まれていて、 5,6,7,8 方向に励起するので、 X^5, X^6, X^7, X^8 が 4 種類の boson に対応する。また今、超対称性がある場合を考えているので、 fermion も同数あり、 $f = 4$ である。さらに、 extremal 極限の近くなので $E_L \simeq \frac{N}{R}$ である。これから $L = 2\pi R Q_1$ に注意して、

$$T_L L = \sqrt{\frac{8E_L L}{f\pi}} = 2\sqrt{NQ_1} \tag{75}$$

extremal 極限でのエントロピーを S_{ext} とすると、

$$S_{ext} \simeq S_L \tag{76}$$

$$= 2\pi\sqrt{NQ_1} = \frac{A_H}{4G_5} \tag{77}$$

ここで A_H は次の 3.2 節で求める horizon の面積 (式 122) であり、この式は Beckenstein-Hawking の公式と一致する。したがって、

$$\rho_L(p_0) \simeq \frac{T_L}{p_0} = \frac{A_H}{4\pi G_5 L p_0} \tag{78}$$

で、

$$\Gamma(k) \simeq \frac{A_H d^4k}{16\pi^4}\rho_R(\frac{k_0}{2}) \tag{79}$$

これらから、最終的に Black Hole の decay rate、つまり Hawking 輻射は、

$$d^4k = 2\pi^2(k_0)^3 dk_0$$

より、

$$\frac{dE}{dt}(k) = k_0\Gamma(k) = \frac{A_H}{8\pi^2}\frac{(k_0)^4 dk_0}{e^{k_0/2T_R} - 1} \tag{80}$$

と求まる。この式はエネルギー k_0 の粒子の温度 $2T_R$ の黒体輻射を意味している。

3.2 Classical Calculation

次に準古典的方法で、 D1/D5 system に対応する超重力理論の古典解としての Black Hole の Hawking 輻射を求める。観測者は無限遠方にいるとする。 Hawking 輻射を計算するために、まず吸収断面積を求める。

この D1/D5 system の BPS 状態に対応する 5 次元 N=8 超重力理論の古典解は、

$$ds^2 = -f(r)^{-\frac{2}{3}}dt^2 + f(r)^{\frac{1}{3}}dr^2 + f(r)^{\frac{1}{3}}r^2 d\Omega_3^2 \tag{81}$$

であり、 extremal Black Hole である。但、

$$f(r) = (1 + \frac{r_1^2}{r^2})(1 + \frac{r_5^2}{r^2})(1 + \frac{r_n^2}{r^2}) \tag{82}$$

但し、 $r_i^2 = c_i Q_i, (i = 1, 5, n)$ で、 $(Q_n = N)$

$$c_1 = \frac{4G_5 R}{\pi\alpha' g}, \quad c_5 = g\alpha', \quad c_n = \frac{4G_5}{\pi R} \tag{83}$$

ここで、 g は弦結合定数、 $G_5 = \frac{G_{10}}{2\pi R\tilde{V}_4}$ は 5 次元 Newton 定数、 G_{10} は 10 次元 Newton 定数、 α' は Regge slope である。この解の亀の子座標は、

$$r^* = \int dr f(r)^{\frac{1}{2}} \tag{84}$$

である。

今、 D-brane 描像と比較するために、低エネルギーの場合を考える。この時、 Hawking 輻射は extremal 極限と低エネルギー極限の順番に依らないことが知られているので [4]、 [5]、ここでは、 extremal 極限を先にとることにする。したがって、計量は式 (81) を用いる。ここで、低エネルギーとは、 Black Hole の典型的 mass scale ${r_i}^{-1}$ よりも輻射のエネルギー ω が十分小さい場合を意味する。つまり、

$$r_i\omega \ll 1$$

である。

今、テスト粒子として最小結合した massless scalar 粒子を考え、この粒子 (エネルギー、ω) を打ち込むことを考えよう。 scalar 場の波動関数を

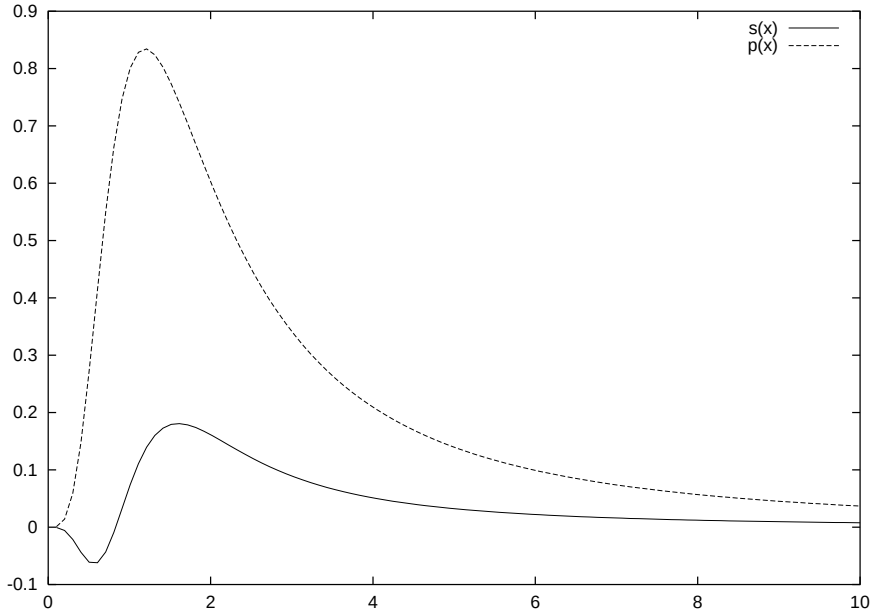

図 5: s 波 $(l=0)$ と p 波 $(l=1)$ のポテンシャルのグラフ

$$\phi(r,t) = R(r)\exp(-i\omega t)Z(\theta_1,\theta_2,\theta_3) \tag{85}$$

とすると、運動方程式は、

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu[\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu]\phi = 0 \tag{86}$$

$$\Longrightarrow \quad \left[\frac{d^2}{dr^2} + \omega^2 f(r) - \frac{3}{4r^2} - \frac{l(l+2)}{r^2}\right]\psi(r) = 0 \tag{87}$$

但、

$$\psi(r) = r^{\frac{3}{2}}R(r)$$

である。

このように、 scalar 場は horizon の外側にポテンシャルを持つ。このポテンシャルを亀の子座標で書くと、 $\psi(r) = f^{-\frac{1}{4}}\tilde{\psi}(r_*)$ として、

$$\left[\frac{d^2}{dr_*^2} - V(r_*)\right]\tilde{\psi}(r_*) \;=\; 0 \tag{88}$$

$$V(r_*) \;=\; \frac{1}{4}f''f^{-1} - \frac{3}{16}f^{-2}f'^2 + \frac{3}{4}f^{-1}\frac{1}{r^2} + \frac{l(l+2)}{fr^2} - \omega^2 \tag{89}$$

である。

Black Holes の horizon から出る輻射は黒体輻射であるが、このポテンシャルのため、$r \to \infty$ ではポテンシャルを透過した波のみが観測される。また、$l = 1$(p 波) と $l = 0$(s 波) のグラフ (3.2) より、低エネルギーでは、s 波のみ透過すると考えて良い。($l \geq 2$ の場合はポテンシャルの山が $l = 1$ の場合より高くなり、ますます透過しない。) したがって $l = 0$ とする。さらに、$r_* \to \pm\infty$ でポテンシャルの値は一致する。したがって、horizon($r_* \to -\infty$) から出た粒子の透過率と $r* \to \infty$ から打ち込んだ粒子の吸収率は等しい。従って、今、簡単のため吸収断面積を求めることにする。

以下、この方程式をポテンシャルの外側と内側で解き、解を合わせる。

3.2.1 Outer region ($r \gg r_i$)

この領域では、

$$f(r) \simeq 1 + \frac{s}{r^2} \qquad (s := r_1^2 + r_5^2 + r_n^2) \tag{90}$$

なので、$\rho := \omega r$ とすると、運動方程式は

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} + \left(1 + \frac{s\omega^2 - \frac{3}{4}}{\rho^2}\right)\right]\psi = 0 \tag{91}$$

となる。この方程式の解は Bessel 関数を用いて、

$$\psi(\rho) = \alpha F(\rho) + \beta G(\rho) \tag{92}$$

但、

$$F(\rho) := \sqrt{\frac{\pi}{2}}\rho^{\frac{1}{2}} J_{(1-s\omega^2)^{\frac{1}{2}}} \tag{93}$$

$$G(\rho) := \sqrt{\frac{\pi}{2}}\rho^{\frac{1}{2}} J_{-(1-s\omega^2)^{\frac{1}{2}}} \tag{94}$$

である。$\rho \gg 1$ のところでは、

$$\begin{aligned} F(\rho) &= \cos\left(\rho - \tfrac{\pi}{2}(1 - s\omega^2)^{\frac{1}{2}} - \tfrac{\pi}{4}\right) \\ G(\rho) &= \cos\left(\rho + \tfrac{\pi}{2}(1 - s\omega^2)^{\frac{1}{2}} - \tfrac{\pi}{4}\right) \end{aligned} \tag{95}$$

となり $\rho' := \rho - \frac{\pi}{4}$ とすると、低エネルギーでは、

$$\rho' - \frac{\pi}{2}(1 - s\omega^2)^{\frac{1}{2}} \approx \rho' - \frac{\pi}{2}(1 - \frac{1}{2}s\omega^2)$$

とできて、

$$\psi \approx e^{i\rho'}\left[\frac{i}{2}(-\alpha e^{\frac{i\pi}{4s\omega^2}} + \beta e^{\frac{-i\pi}{4s\omega^2}})\right] + e^{-i\rho'}\left[\frac{i}{2}(\alpha e^{\frac{-i\pi}{4s\omega^2}} - \beta e^{\frac{i\pi}{4s\omega^2}})\right] \tag{96}$$

したがって、平面波の反射系数 $\mathcal{R}$ は、

$$\mathcal{R} = \frac{-\alpha e^{\frac{i\pi}{4s\omega^2}} + \beta e^{\frac{-i\pi}{4s\omega^2}}}{\alpha e^{\frac{-i\pi}{4s\omega^2}} - \beta e^{\frac{i\pi}{4s\omega^2}}} = -e^{i\frac{\pi}{2}s\omega^2}\frac{1 - \frac{\beta}{\alpha}e^{-i\frac{\pi}{2}s\omega^2}}{1 - \frac{\beta}{\alpha}e^{i\frac{\pi}{2}s\omega^2}} \tag{97}$$

で、吸収率は、

$$|\mathcal{A}|^2 = 1 - |\mathcal{R}|^2 \tag{98}$$

である。 α, β は「horizon では入射波のみ」という境界条件から決まる。
$\rho \ll 1 \Leftrightarrow \omega r \ll 1$ で、 Bessel 関数の振舞いは、

$$J_{(1-s\omega^2)^{\frac{1}{2}}}(\rho) \sim \frac{1}{2}\rho \tag{99}$$

$$J_{-(1-s\omega^2)^{\frac{1}{2}}}(\rho) \sim \frac{s\omega}{r} \tag{100}$$

であるから、この領域での波動関数は、

$$\psi = r^{\frac{3}{2}}R \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}}\omega^{\frac{3}{2}}r^{\frac{3}{2}}\left[\frac{1}{2}\alpha + \frac{\beta s}{r^2}\right] \tag{101}$$

$$\Rightarrow \quad R \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}}\omega^{\frac{3}{2}}\left[\frac{1}{2}\alpha + \frac{\beta s}{r^2}\right] \tag{102}$$

である。

3.2.2 near horizon region($r \ll r_i$)

ここでは、 horizon に近いところの解を調べる。今 $r \ll r_i$ なので

$$f(r) \approx P\frac{1+\mu r^2}{r^6} \tag{103}$$

但、

$$P := r_1 r_5 r_n, \quad \mu := \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_5} + \frac{1}{r_n} \tag{104}$$

であるから、運動方程式は、

$$\frac{1}{r^3}\frac{d}{dr}r^3\frac{dR}{dr} + \frac{\omega^3 P}{r^6}(1+\mu r^2)R = 0 \tag{105}$$

である。ここで、

$$u := \frac{1}{2r^2}, \quad \rho := u\omega\sqrt{P}, \quad \eta := \frac{1}{4}\mu\omega\sqrt{P} \tag{106}$$

とすると、方程式は

$$\frac{d^2R}{d\rho^2} + (1 - \frac{2\eta}{\rho})R = 0 \tag{107}$$

となる。ところで、 $\rho' := -\rho,\ \eta' := -\eta$ とすると、 $\rho' > 0,\ -\infty < \eta' < 0$ となり、方程式は、

$$\frac{d^2R'}{d\rho'^2} + (1 - \frac{2\eta'}{\rho'})R' = 0 \tag{108}$$

但、

$$R'(\rho') = R(\rho) \tag{109}$$

となる。したがって、R' は Coulomb Wave 関数で書ける [6]。Horizin の近く $(\rho' \to \infty)$ では、この方程式の二つの独立解として、

$$F_0 = \sin\left[\frac{\pi}{4} + \rho' + \eta' \log|\frac{\eta'}{2\rho'}|\right] = \sin\left[\frac{\pi}{4} - \rho - \eta \log|\frac{\eta}{2\rho}|\right] \tag{110}$$

$$G_0 = \cos\left[\frac{\pi}{4} + \rho' + \eta' \log|\frac{\eta'}{2\rho'}|\right] = \cos\left[\frac{\pi}{4} - \rho - \eta \log|\frac{\eta}{2\rho}|\right] \tag{111}$$

がある。したがって、$x := \frac{\pi}{4} - \rho - \eta \log|\frac{\eta}{2\rho}|$ とすると、horaizon の近くでは、

$$R = c_1 \sin x + c_2 \cos x \tag{112}$$

となる。今境界条件として、「$r \to 0$ $(x \to \infty)$ で入射波」とすると、

$$c_1 = i, \quad c_2 = 1 \tag{113}$$

と系数が決まり、

$$R = G_0 + iF_0 \tag{114}$$

と求まる。この解の $|\rho| \ll 1$ での振舞いは、

$$R \sim \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(1+i) + (1-i)\rho\right] \tag{115}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(1+i) - (1-i)\frac{\omega\sqrt{P}}{2r^2}\right] \tag{116}$$

である。

3.2.3 matching the solutions

ここで求めた二つの解を合わせよう。解の振舞い (102) の有効な領域は

$$r \ll \frac{1}{\omega} \tag{117}$$

一方、解の振舞い (116) の有効な領域は、

$$r \gg \omega^{\frac{1}{2}} P^{\frac{1}{4}} \tag{118}$$

であるから、今の低エネルギー極限で、二つの領域は

$$(\omega^2 r_i)^{\frac{3}{2}} \ll r \ll 1 \tag{119}$$

の重なりを持つ。したがって、解を合わせて、

$$\alpha = \frac{2(1+i)}{\omega^{\frac{3}{2}}\sqrt{\pi}}, \quad \beta = -\frac{(1-i)\sqrt{P}}{2\sqrt{\pi}s\omega^{\frac{1}{2}}} \tag{120}$$

と α, β は決まる。したがってこの時、平面波の吸収率は

$$|\mathcal{A}|^2 = \frac{1}{2}\pi\omega^3\sqrt{P} \tag{121}$$

となる。ところで、この Black Hole の horizon 面積 A_H は、

$$A_H = \lim_{r\to 0}\left(2\pi^2(f^{\frac{1}{3}}r^2)^{\frac{3}{2}}\right) = 2\pi^2\sqrt{P} \tag{122}$$

なので、 horizon 面積を用いて吸収率を表すと、

$$|\mathcal{A}|^2 = \frac{\omega^3}{4\pi}A_H \tag{123}$$

である。

3.2.4 The absorption cross section

さて、平面波の吸収率を計算したので、球対称波の吸収断面積を求めよう。まず、平面波を d 次元球面調和関数で展開する。

$$e^{i\omega z} = K\frac{e^{-i\omega r}}{r^{\frac{d}{2}}}Z_{0\cdots 0} + (\text{入射 S 波以外の寄与}) \tag{124}$$

となる。ここで、 $Z_{0\cdots 0} = \frac{1}{\sqrt{\Omega_d}}$、但、 Ω_d は d 次元球面 S^d の体積であり、 $Z_{0\cdots 0}$ は、 d 次元球面調和関数の d 次元球対称なものである。系数 K を求める。一般に n 次元空間で次の展開が知られている [7]。

$$e^{ir\cos\theta} = 2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma(\frac{n}{2}-1)\sum_{l=0}^{\infty} i^l P_l(\cos\theta)(l+\frac{n}{2}-1)\frac{J_{l+\frac{n}{2}-1}(r)}{r^{\frac{n}{2}-1}} \tag{125}$$

この式で $r\to\infty,\ n = d+1$ として、

$$e^{ir\cos\theta} = -\left[\frac{2^d\pi^d}{\Omega_d^d}e^{i\frac{d\pi}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}\frac{e^{-ir}}{r^{\frac{d}{2}}}Z_{0\cdots 0} - \left[\frac{2^d\pi^d}{\Omega_d^d}e^{i\frac{d\pi}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}\frac{e^{ir}}{\frac{d}{2}}Z_{0\cdots 0} + \sum_{l=1}^{\infty}(l\geq 1\text{の項}) \tag{126}$$

これから、 $z = r\cos\theta$ として $r\to\infty$ で、

$$e^{i\omega z} \sim -\left[\frac{2^d\pi^d}{\Omega_d^d}e^{i\frac{d\pi}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}\frac{e^{-i\omega r}}{r^{\frac{d}{2}}}Z_{0\cdots 0} + (\text{入射 S 波以外の寄与}) \tag{127}$$

したがって、

$$|K|^2 = \frac{(2\pi)^d}{\omega^d\Omega_d} \tag{128}$$

と求まる。今、 d=3 なので、

$$|K|^2 = \frac{4\pi}{\omega^3} \tag{129}$$

である。

これから、 S 波の数密度を求めことができる。入射平面波の数密度を n とすると、波動関数は、

$$\sqrt{n}e^{i\omega z} = \sqrt{n}K\frac{e^{-ir}}{r^{\frac{3}{2}}}Z_{000} + (\text{入射 S 波以外の寄与}) \tag{130}$$

で、入射 S 波の数密度は $|\sqrt{n}K|^2 = n|K|^2$ となる。

次に吸収断面積を求めよう。入射 currentJ_z は、光速を 1 として、

$$J_z = n \cdot 1 \tag{131}$$

であり、単位時間当たりの吸収 event の数 N は、 S 波のみ吸収されるので

$$N = |A|^2 n|K|^2 \tag{132}$$

したがって、吸収断面積 σ は、

$$\sigma = \frac{N}{J_z} = |K|^2|A|^2 \tag{133}$$

$$= \frac{4\pi}{\omega^3}|A|^2 = A_H \tag{134}$$

となり吸収断面積は Horizon 面積に一致する。これは剛体球について成立する事実であり、 Black Holes で一般的に成立すると考えられる。

3.2.5 The classical result of energy decay rates

Extremal Black Hole では、 $T_H = 0$ で、 Hawking 輻射は無い。今わずかに extremal 極限からずれた場合を考えよう。つまり Hawking 温度 $T_H \simeq 0$ で、わずかに Hawking 輻射して extremal 状態に近付く場合である。この時、前節で求めた Black Hole の吸収断面積に対する補正は無視してよい。

エネルギーが $(\omega, \omega+d\omega)$ の Hawking 輻射の分布関数は、 2 章で計算したように Planck 分布で与えられ、単位時間当たりに Black Holes から放射されるエネルギーは

$$\frac{d\omega}{2\pi}\frac{\omega}{e^{\beta_H\omega} - 1}$$

である。ここで、 $\beta_H = \frac{1}{T_H}$ で T_H は Hawking 温度である。しかし、実際はポテンシャル障壁があるために、低エネルギーではポテンシャルを透過して $r \to \infty$ まで届くのは S 波で、そのエネルギー分布は、ポテンシャルによる吸収率をかけたもの、

$$\frac{d\omega}{2\pi}\frac{\omega|A|^2}{e^{\beta_H\omega} - 1} \tag{135}$$

となる。したがって、この Black Hole のエネルギー減少率は

$$\frac{dE}{dt} = \frac{A_H}{8\pi^2}\frac{\omega^4 d\omega}{e^{\beta_H \omega} - 1} \tag{136}$$

となる。このように Black Holes から十分離れた観測者から見た Hawking 輻射は黒体輻射ではない。この黒体輻射からのずれを表す吸収断面積を灰体因子 (grey body factor) という。

3.3 Discussion

これまで、 D-brane 描像による方法と、準古典的方法の二つのアプローチで Hawking 輻射を計算した。まず、この二つの結果が一致することを見よう。ここでは簡単のため $\alpha' = 1$ とする。そのために non-extremal な場合の古典解を書くと、

$$ds^2 = -\lambda^{-\frac{2}{3}} h dt^2 + \lambda^{\frac{1}{3}} h^{-1} dr^2 + \lambda^{\frac{1}{3}} r^2 d\Omega_3^2 \tag{137}$$

ここで $\alpha, \gamma, \sigma, r_0$ をパラメーターとして、

$$\lambda = (1 + \frac{r_1^2}{r^2})(1 + \frac{r_5^2}{r^2})(1 + \frac{r_n^2}{r^2}) \tag{138}$$

$$h = 1 - \frac{r_0^2}{r^2} \tag{139}$$

$$r_1^2 = r_0^2 \sinh^2 \alpha, \quad r_5^2 = r_0^2 \sinh^2 \gamma, \quad r_n^2 = r_0^2 \sinh^2 \sigma \tag{140}$$

である。さらに 3 つの電荷は、

$$Q_1 = \frac{V r_0^2}{2g} \sinh 2\alpha \tag{141}$$

$$Q_5 = \frac{r_0^2}{2g} \sinh 2\gamma \tag{142}$$

$$N = \frac{R^2 V r_0^2}{2g^2} \sinh 2\sigma \tag{143}$$

となる。但し V は、 5,6,7,8 方向の T^4 コンパクト化の半径を R_5, R_6, R_7, R_8 として、 $V = R_5 R_6 R_7 R_8$ である。

これから Hawking 温度 T_H は

$$T_H = \frac{1}{2\pi r_0 \cosh\alpha \cosh\gamma \cosh\sigma} \tag{144}$$

と計算できる。

ところでここでのパラメーター $\alpha, \gamma, \sigma, r_0$ を用いると、 extremal 極限は

$$r_0 \to 0, \quad \alpha, \gamma, \sigma \to \infty \tag{145}$$

$$Q_1, Q_5, Q_n : fixed \tag{146}$$

となる。この extremal 状態の近く (near extremal) では、 Black Hole の ADM エネルギー M は、

$$M = \frac{Q_5 RV}{g} + \frac{Q_1}{g} + \frac{RVr_0^2}{2g^2}\cosh 2\sigma \tag{147}$$

である。 left moving open string の運動量 N_L と right moving open string の運動量 N_R については、この M と式 (143) から、 (Q_1, Q_5 の入ってる項は D-brane からの寄与であることに注意して、)

$$N_L - N_R = N = \frac{R^2 V r_0^2}{2g^2}\cosh 2\sigma \tag{148}$$

$$\frac{N_L + N_R}{R} = M - \frac{Q_5 RV}{g} - \frac{Q_1}{g} = \frac{RVr_0^2 \cosh 2\sigma}{2g} \tag{149}$$

という関係式が得られる。したがって、

$$N_R = \frac{R^2 V r_0^2}{4g} e^{-2\sigma} \tag{150}$$

と求まる。ところで弦理論を用いた Black Hole エントロピーの議論から S_R についても、

$$S_R = \frac{2\pi}{Q_5}\sqrt{Q_1 Q_5 N_R} \tag{151}$$

であることが知られている。(実は、エントロピー極大となる状態は、 open string の端点が一つは D_1-brane、もう一つは D_5-brane に付いている状態で、 D_1-brane 上のみを考えたエントロピー S_R を求めるには全縮重度を Q_5 で割る必要がある。) このことと式 (61) を用いると温度 $2T_R$ は、 $f = 4, L = 2\pi R Q_1$ であることに注意して、

$$2T_R = \frac{2S_R}{\pi L} = \frac{2}{\pi R}\sqrt{\frac{N_R}{Q_1 Q_5}} \tag{152}$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{r_0 e^{-\sigma}}{r_1 r_5} \tag{153}$$

となる。これから extremal 極限の近くでは、

$$2T_R \to \frac{4}{\pi r_0 e^{\alpha} e^{\gamma} e^{\sigma}} \tag{154}$$

である。一方、 Hawking 温度についても

$$T_H \to \frac{4}{\pi r_0 e^{\alpha} e^{\gamma} e^{\sigma}} \tag{155}$$

となり、 extremal 極限の近くでは二つの温度は一致する。したがって、この時

$$T_H = 2T_R \tag{156}$$

であり、 D-brane 描像を用いて計算した Hawking 輻射の式 (80) は、

$$\frac{dE}{dt}(k) = k_0\Gamma(k) = \frac{A_H}{8\pi^2}\frac{(k_0)^4 dk_0}{e^{k_0/T_H} - 1} \tag{157}$$

となり、準古典的方法で計算した式 (136) と一致する。したがって、二つのアプローチで計算された Hawking 輻射は、係数まで含めて完全に一致することがわかった。

ところでこの章で紹介した二つのアプローチは、実はことなるパラメーター領域で有効である。この論文では古典解の導出等について詳しく述べなかったので、細かいことは述べないが、結果だけをまとめることにすると [8]、超重力理論の古典解による記述が有効なのは、 string の摂動論 (g 展開) の最低次、かつ古典解が string の長さ $l_s = \sqrt{\alpha'}$ よりも大きい場合である。これらの条件は、 $\tilde{V}_4 \sim \alpha'^2 = 1$ とすると、

$$r_i \gg 1$$

より、

$$gQ_1 \gg 1, \quad gQ_5 \gg 1, \quad g^2N \gg 1 \tag{158}$$

である。

一方、 D-brane による記述が有効なのは、 D-brane 上の open string の場の理論の tree 近似が良い場合であるが、この摂動論が良いのは、 open string と D-brane の結合定数が小さい場合、つまり、

$$gQ_1 \ll 1, \quad gQ_5 \ll 1, \quad g^2N \ll 1 \tag{159}$$

であると考えられる。

このように、この二つのアプローチの有効なパラメーター領域は異なる。しかし今、 extremal(BPS) 状態の近くを考えており、 Black Hole の質量 (エネルギー) は同じである。また、この場合エントロピー (D-brane の縮重度) も異なるパラメーター領域で変わらず、 Black Hole の Hawking 温度もほとんどゼロではあるが同じである。したがって、熱輻射である Hawking 輻射は一致すると期待できる。驚くべきことは、吸収断面積まで含めて完全に一致したということであろう。

このことから、 extremal 状態に近い場合の Hawking 輻射に関して、 Black Hole が string の長さ l_s よりも小さい時、ここで述べた D-brane による記述は良いと考えられる。

4 D3-System

ここでは、 N 枚の D3-brane が重なった system を考える。これは BPS 状態であるから、対応する Black Hole は extremal Black Hole で Hawking 輻射しない。したがってここでは、吸収断面積を求める [9][10]。

D_1/D_5system と同様に Classical な計算から入る。ここでも、低エネルギー極限で計算するが、エネルギーに関して一つ高次の寄与まで計算する。

4.1 Classical culclation

この system に対応する Type IIB 超重力理論の古典 3-brane 解は、

$$ds^2 = A(r)^{-\frac{1}{2}} dx_{||}^2 + A(r)^{\frac{1}{2}} \left(dr^2 + r^2 d\Omega_5^2 \right) \tag{160}$$

但し、

$$A(r) := 1 + \frac{R^4}{r^4}, \quad R^4 := \frac{\kappa_{10} N}{2\pi^{\frac{5}{2}}} \tag{161}$$

$$dx_{||} := -dt^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \tag{162}$$

である。

ここで 3-brane は、 1,2,3 方向にある。吸収断面積を求めるために 3-brane に打ち込むテスト粒子は、最小結合した massless scalar 場で、 3-brane に垂直に打ち込むとする (s 波に対応する)。また、低エネルギー極限を考えるので、 S 波のみ吸収される。

低エネルギー条件は、 scalar 場のエネルギー ω が Black Hole の典型的スケール $\frac{1}{R}$ よりも十分小さい、つまり

$$\omega R \ll 1$$

である。

S 波の運動方程式は、 $\rho := \omega r$ として、

$$\left[\rho^{-5} \frac{d}{d\rho} \rho^5 \frac{d}{d\rho} + 1 + \frac{(\omega R)^4}{\rho^4} \right] \phi(\rho) = 0 \tag{163}$$

である。

また、 $y := \frac{(\omega R)^2}{\rho}$、 $\phi =: y^4 \psi$ とすると、

$$\left[\frac{1}{y^5} \partial_y y^5 \partial_y + 1 + \frac{(\omega R)^4}{y^4} \right] \psi = 0 \tag{164}$$

となり、これは運動方程式 (163) と全く同じ方程式となる。 (163) はポテンシャルの外領域 II($\rho \to \infty$) で扱いやすく、 (164) 式は内領域 I($y \to \infty$) で扱いやすい。

次に関数 $\phi(\rho)$ を $(\omega R)^4$ で展開する。つまり、

$$\phi(\rho) = \phi_0(\rho) + (\omega R)^4 \phi_1(\rho) + \cdots \tag{165}$$

これから、$(\omega R)^4$ のオーダーまでの方程式は、

$$\left[\frac{1}{\rho^5}\partial_\rho\rho^5\partial_\rho+1\right]\phi_0 = 0 \tag{166}$$

$$\left[\frac{1}{\rho^5}\partial_\rho\rho^5\partial_\rho+1\right]\phi_1 = -\frac{1}{\rho^4}\phi_0 \tag{167}$$

である。

ϕ_0 の独立解は Bessel 関数で、$\frac{J_2}{\rho^2}$ と $\frac{N_2}{\rho^2}$ である。また、ϕ_1 の一般解は、

$$\phi_1(\rho) = -\frac{\pi}{2\rho^2}\int^\rho \frac{d\sigma}{\sigma}\phi_0(\sigma)\left(J_2(\sigma)N_2(\rho)-N_2(\sigma)J_2(\rho)\right) \tag{168}$$

である。同次方程式の一般解を加える自由度は、積分の下端の自由度で与えられる。この自由度は境界条件より決まる。今、境界条件は、

(1)　$\rho\to 0(y\to\infty)$ で入射波。

(2)　内側解 ϕ^I と外側解 ϕ^{II} を match させる。[1]

である。(1) より、内側解 ϕ^I は、

$$\phi^I = y^4\left(\psi_0+(\omega R)^4\psi_1\right) \tag{169}$$

$$= y^2H_2^{(1)}(y)-(\omega R)^4\frac{\pi y^2}{2}\int_\infty^y\frac{dx}{x^3}H_2^{(1)}(x)\left(J_2(x)N_2(y)-N_2(x)J_2(y)\right) \tag{170}$$

と求まる。外側解 ϕ^{II} は、$y^4\psi_0$ と (ωR) のゼロ次で合わせて、

$$\frac{\phi^{II}}{A} = \phi_0+(\omega R)^4\phi_1 \tag{171}$$

$$= \frac{J_2(\rho)}{\rho^2}-(\omega R)^4\frac{\pi}{2\rho^2}\left[\int^\rho\frac{d\sigma}{\sigma^3}J_2(\sigma)J_2(\sigma)N_2(\rho)-\int^\rho\frac{d\sigma}{\sigma^3}J_2(\sigma)N_2(\sigma)J_2(\rho)\right] \tag{172}$$

ここで、A は規格化のため導入した。

この二つの解を match させる。解を展開すると、

$$\phi^I = -\frac{4i}{\pi}\left[1+\frac{y^2}{4}-\frac{(\omega R)^4}{12y^2}\left(1-\frac{1}{2}y^2\ln y\right)\right]+\cdots \tag{173}$$

$$= -\frac{4i}{\pi}\left[1+(\omega R)^2\left(\frac{1}{4z^2}-\frac{z^2}{12}\right)+(\omega R)^4\left(-\frac{1}{24}\ln z+\frac{1}{24}\ln\omega R\right)\right]+\cdots \tag{174}$$

$$\tag{175}$$

$$\frac{\phi^{II}}{A} = \frac{1}{8}\left(1-\frac{\rho^2}{12}\right)+\frac{(\omega R)^4}{32\rho^2}\left(1-\frac{1}{6}\rho^2\ln\rho\right)+\cdots \tag{176}$$

$$= \frac{1}{8}\left[1+(\omega R)^2\left(\frac{1}{4z^2}-\frac{z^2}{12}\right)+(\omega R)^4\left(-\frac{1}{24}\ln z-\frac{1}{24}\ln\omega R\right)\right]+\cdots \tag{177}$$

[1]実は今、ϕ^I と ϕ^{II} の matching region はないが、運動方程式 (163) について、厳密解が求まっており、解が match することが保証されている [11]。

但、 $z := \frac{r}{R}$ である。

$$\rho = y \Leftrightarrow \quad z = 1$$

で、

$$z \sim \mathcal{O}(1) \quad \Rightarrow \quad \rho \ll 1, \quad y \ll 1$$

したがって、 $z \sim \mathcal{O}(1)$ で上の展開は有効である。ここで、

$$A = -\frac{32i}{\pi}\left[1 + \frac{(\omega R)^4}{12}\ln \omega R - \mathcal{O}(\omega R)\right] \tag{178}$$

とすると、二つの解は $(\omega R)^4 \ln \omega R$ のオーダーまで一致する。

この解から吸収断面積を求めよう。平面波の振舞いを見やすくするために、 $\varphi := \rho^2 \phi$ とすると、

$$\varphi^I \sim (\omega R)^4 \frac{1}{\sqrt{y}} e^{iy} \quad (y \to \infty) \tag{179}$$

$$\varphi^{II} \sim \frac{A}{2}\frac{1}{\sqrt{\rho}} e^{-i\rho} + h.c \quad (\rho \to \infty) \tag{180}$$

より、 $(\rho \to \infty)$ より打ち込んだ時の透過係数 $\mathcal{P}$ は、

$$\mathcal{P} = \frac{4(\omega R)^8}{|A|^2} \tag{181}$$

である。今入射波 scalar 場の空間次元は 6 次元なので、 (128) 式から、吸収断面積 σ は、

$$\sigma = \frac{32\pi^2}{\omega^5}\mathcal{P} \tag{182}$$

$$= \frac{\pi^4}{8}\omega^3 R^8 \left(1 - \frac{(\omega R)^4}{6}\ln \omega R + \mathcal{O}((\omega R)^4)\right) \tag{183}$$

と求まる。ところで、 $R^4 = \frac{\kappa_{10} N}{2\pi^{\frac{5}{2}}}$ だったので、

$$\sigma = \frac{\kappa_{10}^2 N^2 \omega^3}{32\pi}\left(1 - \frac{(\omega R)^4}{6}\ln \omega R + \mathcal{O}((\omega R)^4)\right) \tag{184}$$

である。

4.2 Field theory approach

次に D_3-brane 上の場の理論を用いて、吸収断面積の計算をする。簡単のため、一枚の D_3-brane の場合に話しを限る。

D_3-brane の DBI 作用は、

$$S_{DBI} = -T_3 \int d^4x e^{-\phi}\left[-det\left(G_{\mu\nu} + B_{\mu\nu} + 2\pi\alpha' F_{\mu\nu}\right)\right]^{\frac{1}{2}} \tag{185}$$

添字は $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ の値をとる。

ここでは、 D_3-brane に打ち込むテスト粒子を dilaton ϕ とする。 D_3-brane の場合、 Einstein frame で DBI 作用を書くと、 brane 上の open string や graviton は、 dilaton と結合しない。つまり、

$$S_{DBI} = -T_3 \int d^4x \sqrt{-det\left(G^E_{\mu\nu} + \frac{e^{-\frac{\phi}{2}}}{\sqrt{T_3}} F_{\mu\nu}\right)}$$

ここで、 $B_{\mu\nu}$ も dilaton と couple しないので、ゼロとした。したがって、 dilaton と結合するのは、 D_3-brane 上のゲージ場だけである。以下、簡単のため、

$$G^E_{\mu\nu} = diag(-1, 1, 1, 1)$$

とする。 DBI 作用は、

$$S_{DBI} = -\int d^4x \left[T_3 - \frac{1}{4} e^{-\phi} F^2 - \frac{1}{8} \frac{e^{-2\phi}}{T_3} \left(F^4 - \frac{1}{2}(F^2)^2\right)\right] \tag{186}$$

となる。但、

$$F^n := F_{\mu_1}{}^{\mu_2} F_{\mu_2}{}^{\mu_3} \cdots F_{\mu_n}{}^{\mu_1}$$

とした。以下では、

$$\mathcal{O}_4 := F^2, \quad \mathcal{O}_8 := F^4 - \frac{1}{2}(F^2)^2 \tag{187}$$

とする。また、規格化された dilaton $\tilde{\phi}$ は、 (34) 式より、

$$\tilde{\phi} = \frac{1}{\sqrt{2}\kappa} \phi$$

である。すると、相互作用項は、

$$S_{int} := \int d^4x \ \phi(-\frac{1}{4}) \left(\mathcal{O}_4 + \frac{1}{T_3}\mathcal{O}_8 + \cdots\right) \tag{188}$$

$$=: \int d^4x \ \tilde{\phi}\tilde{\mathcal{O}}_\phi \tag{189}$$

つまり、

$$\tilde{\mathcal{O}}_\phi = \sqrt{2}\kappa(-\frac{1}{4}) \left(\mathcal{O}_4 + \frac{1}{T_3}\mathcal{O}_8 + \cdots\right)$$

である。

さて、吸収断面積 σ は、光学定理を用いると、

$$\sigma = \frac{1}{2i\omega} Disc\mathcal{M} \tag{190}$$

と書ける [12]。但、 $\mathcal{M}$ は不変行列要素である。今、始状態を $|i\rangle$、終状態を $|f\rangle$ とすると、 S- 行列 S_{fi} は、

$$S_{fi} = -i\langle f|TS_{int}|i\rangle$$

であり、終状態の運動量 p_f で積分すると、

$$\int \frac{d^3p_f}{(2\pi)^3} S_{fi} = -i \int \frac{d^3p_f}{(2\pi)^3} \langle f|T \int d^4x \tilde{\phi}\tilde{\mathcal{O}}_\phi|i\rangle \tag{191}$$

$$= -i \int d^4x \langle 0|T\tilde{\mathcal{O}}_\phi(x)\tilde{\mathcal{O}}_\phi(0)|0\rangle e^{-ip_i x}(2\pi)^4\delta^{(4)}(P_f - P_i) \tag{192}$$

ここで、

$$\tilde{\phi}|i\rangle = e^{-ip_i x}|0\rangle \tag{193}$$

$$\tilde{\mathcal{O}}_\phi|f\rangle = e^{-ip_f x}\tilde{\mathcal{O}}_\phi(x)\tilde{\mathcal{O}}_\phi(0)|0\rangle \tag{194}$$

であることを用いた。したがって、

$$\mathcal{M}(p) = \int d^4x e^{-ip_f x}\langle 0|T\tilde{\mathcal{O}}_\phi(x)\tilde{\mathcal{O}}_\phi(0)|0\rangle \tag{195}$$

$$= \int d^4x e^{ipx}\langle \tilde{\mathcal{O}}_\phi(x)\tilde{\mathcal{O}}_\phi(0)\rangle \tag{196}$$

である。

今、 Euclidean 経路積分を用いて 2 点関数を書くと、 2 次のオーダー (T_3^{-1}) まで考えて、

$$\begin{aligned}
&\langle \mathcal{O}_\phi(x)\mathcal{O}_\phi(0)\rangle_{DBI} \\
&= \int \mathcal{D}A_\mu \exp\left(-\int d^4y[\frac{1}{4}\mathcal{O}_4 + \frac{1}{8T_3}\mathcal{O}_8]\right)\mathcal{O}_\phi(x)\mathcal{O}_\phi(0) \\
&= \int \mathcal{D}A_\mu \exp\left(-\int d^4y\frac{1}{4}\mathcal{O}_4\right)\mathcal{O}_\phi(x)\mathcal{O}_\phi(0)\left(1 - \frac{1}{8T_3}\int d^4z\mathcal{O}_8\right) \\
&= \langle \mathcal{O}_\phi(x)\mathcal{O}_\phi(0)\left(1 - \frac{1}{8T_3}\int d^4z\mathcal{O}_\phi\right)\rangle_{CFT} \\
&= \frac{1}{16}\left[\langle \mathcal{O}_4(x)\mathcal{O}_4(0)\rangle_{CFT} - \frac{1}{8T_3}\int d^4z\langle \mathcal{O}_4(x)\mathcal{O}_8(z)\mathcal{O}_4(0)\rangle_{CFT}\right]
\end{aligned} \tag{197}$$

但、

$$\langle X\rangle_{CFT} := \int \mathcal{D}A_\mu e^{-\frac{1}{4}\int d^4y\mathcal{O}_4}X$$

としたが、 free gauge theory には理論のスケールを決めるパラメーターがなく、 CFT であることからこのような添字をつけた。また、

$$\langle \mathcal{O}_4\mathcal{O}_8\rangle_{CFT} = 0$$

であることを用いた。というのは、この二つの operator で contruction しても、次元の違う operator なので、必ず normal ordering された operator が残り、真空期待値がゼロとなるからである。

以下では、

$$\langle A_\mu(x)A_{\nu(0)}\rangle = \frac{\delta_{\mu\nu}}{4\pi^2x^2} \tag{198}$$

より、 2 点関数 (197) を求める。まず、

$$\langle F_{\mu\nu}(x)F_{\alpha\beta}(0)\rangle = \frac{1}{2\pi^2 x^4}\left(\delta^{[\mu}_{[\alpha}\delta^{\nu]}_{\beta]} - \frac{4}{x^2}\delta^{[\mu}_{[\alpha}x_{\beta]}x^{\nu]}\right) \tag{199}$$

但、

$$\delta_{[\alpha}\delta_{\beta]} := \delta_\alpha\delta_\beta - \delta_\beta\delta_\alpha$$

これより、

$$\Pi_0(x) := \langle : \frac{1}{4}F^2(x) :: \frac{1}{4}F^2(0) : \rangle = \frac{3}{\pi^4}\frac{1}{x^8} \tag{200}$$

ここで、

$$\left(\delta^{[a}_{[\alpha}\delta^{b]}_{\beta]} - \frac{4}{x^2}\delta^{[a}_{[\alpha}x_{\beta]}x^{b]}\right)\left(\delta^{[\beta}_{[c}\delta^{d]}_{\alpha]} - \frac{4}{x^2}\delta^{[\beta}_{[c}x_{d]}x^{\alpha]]}\right) = 8\left(\delta^a_d\delta^b_c - \delta^a_c\delta^b_d\right)$$

に注意すると計算が簡単である。

同様に、

$$\langle : F^2(x) :: F^4(z) :: F^2(0) : \rangle = \frac{8\cdot 16\cdot 21}{\pi^8 z^8(x-z)^8} \tag{201}$$

$$\langle : F^2(x) :: \left(F^2\right)^2(z) :: F^2(0) : \rangle = \frac{16\cdot 8\cdot 48}{\pi^8 z^8(x-z)^8} \tag{202}$$

である。これから、

$$\Pi_1(x) := -\int d^4z \langle : \frac{1}{4}F^2(x) :: \frac{1}{8T_3}\left(F^4 - \frac{1}{2}(F^2)^2\right) :: \frac{1}{4}F^2(0) : \rangle \tag{203}$$

$$= \frac{3}{\pi^8 T_3}\int d^4z \frac{1}{z^8(x-z)^8} \tag{204}$$

したがって、運動量空間でみて、

$$\Pi_0(p) := \int d^4x \Pi_0(x)e^{-ipx} = -\frac{12}{\pi^2}p^4\int_{p\epsilon}^\infty dt\frac{J_1(t)}{t^6} \tag{205}$$

積分は、

$$\begin{aligned}&\int_a^\infty dt\frac{J_1(t)}{t^6}\\ &= \frac{1}{36864}\Big[a^6{}_2F_3(1,1;2,4,5;-\frac{a^2}{4}) - 16(-288+72a^2-10a^4+6a^4\gamma\\ &\quad -3a^4\ln 4)\Big] - \frac{1}{12\cdot 64}\ln a^2\end{aligned} \tag{206}$$

となる。ここで、 $\ln a^2$ 以外の項は、 $a \to 0$ で消える項、又はスケールに依存した発散項、もしくは定数項である。スケールに依存した発散項と定数項は、 CFT では作用に相殺項をいれることで取り除くので今は無視する。したがって、

$$\Pi_0(p) = -\frac{p^4}{64\pi^2}\ln(\frac{p^2}{\Lambda}) \tag{207}$$

$$\Pi_1(p) = \frac{1}{12288\pi^4 T_3} p^8 \left[\ln(\frac{p^2}{\Lambda})\right]^2 \tag{208}$$

これから、

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{2i\omega} Disc\left[\int d^4x e^{ipx} \langle \tilde{\mathcal{O}}_\phi(x) \tilde{\mathcal{O}}_\phi(0)\rangle\right] && (209)\\ &= \frac{2\kappa^2}{2i\omega} Disc\left[\Pi_0 + \Pi_1\right]\Big|_{\substack{p_0=\omega \\ p_i=0}} && (210)\end{aligned}$$

ここで dilaton は brane に垂直に入射するので、 $p_i = 0$ とした。 $s := -p^2$ とすると、 Π_0, Π_1 は

$$\begin{aligned} \Pi_0 &= -\frac{s^2}{64\pi^2} \ln\left(-\frac{s}{\Lambda^2}\right) && (211)\\ \Pi_1 &= \frac{s^4}{12288\pi^4 T_3} \left[\ln\left(-\frac{s}{\Lambda^2}\right)\right]^2 && (212)\end{aligned}$$

となり、対数関数は s の正の実軸上に cut が入っているので、

$$\begin{aligned} Disc\ \ln\left(-\frac{s}{\Lambda^2}\right) &= \lim_{\epsilon\to 0}\left[\Pi_0(s+i\epsilon) - \Pi_0(s-i\epsilon)\right] && (213)\\ &= -2\pi i && (214)\\ Disc\ \left[\ln\left(-\frac{s}{\Lambda^2}\right)\right]^2 &= -4\pi i \ln\left(-\frac{s}{\Lambda^2}\right) - 4\pi^2 && (215)\end{aligned}$$

したがって、

$$\sigma = \frac{\kappa^2\omega^3}{32\pi}\left(1 - \frac{1}{24}(\omega R)^4 \ln\frac{\omega}{\Lambda} + \mathcal{O}(\omega^4\kappa^4)\right) \tag{216}$$

と求まる。

今は $N = 1$ の場合を考えていたので、これは Classical な計算結果 (184) と最低次で一致する。また、次のオーダーは係数が異なるものの次数は一致する。

4.3 Discussion

ここでも、 D1/D5-system の場合同様に、二つのアプローチの有効なパラメーター領域は異なる。超重力理論の古典解が有効なのは、 Black Hole の典型的スケール R が string 長さ l_s よりも大きく、さらに Planck 長さ l_p よりも大きい場合である。この条件は、

$$N \gg 1, \quad gN \gg 1 \tag{217}$$

である。一方 D-brane アプローチは、 D1/D5 の場合と同様に、

$$gN \ll 1 \tag{218}$$

の時有効となる。したがって、簡単のため $N = 1$ として計算したことが正当化される。

今の場合も、 extremal(BPS) 状態を考えたので、このような異なるパラメーター領域でもエネルギーの最低次では一致したと考えられる。ところが、次のオーダーでは、係数が異なった。このずれが何を意味するのか、今のところ明確な理解は無いが、 string 理論特有の性質からくるものであれば、重力の量子効果まで含めた Black Hole の記述に関して、手がかりとなるかも知れないという期待もある。

またここでは詳しく述べなかったが、 S 波のみならず、すべての角運動量の波に関して、計算することができ、その場合係数まで含めて吸収断面積が一致したという研究もある [13]。

5 Discussion

この論文で review したことをまとめる。

Black Hole の Hawking 輻射に関して、低エネルギーかつ extremal(BPS) という条件つきではあるが、超弦理論の D-brane による記述を与えた。しかも、 D-brane による記述が良い場合と準古典的な場合とで係数まで含めて完全に一致した。 extremal(BPS) 状態の近くのみ考えているので、一致するという結果は、期待どおりであるといえる。このことから言えることは、弦理論を用いて Hawking 輻射を記述できる、ということである。もちろん、最終目標である蒸発のプロセスを記述するには程遠いと思われるが、重力の量子効果まで含めた弦理論による記述に、道が開けたと言ってよい。

D1/D5-system の場合の Hawking 輻射の計算で、 open string についてアンサンブル平均を取った。 Hawking 輻射の微視的プロセスである closed string の放射は、場の理論のプロセスであるからユニタリーである。ところが、熱輻射という混合状態を生み出すためにアンサンブル平均を取ったのである。このことは、技術的には曲がった時空の場の理論に於いて、異なる真空を選ぶことに対応して、弦理論において open string のアンサンブル平均を取ったと考えられる。

今後の研究で、弦理論を用いたアプローチから、 Black Hole についてより深い理解が得られ、量子論の危機ともいえる Black Hole の蒸発に関して、研究が進むことを期待したい。

6 Acknowledgments

この修士論文を書くにあたり大変丁寧に指導して下さった早田次郎先生に深く感謝致します。またゼミで適切な質問・コメントを頂いた阪上雅昭先生に深く感謝致します。また、日頃暖かく見守ってくれる研究室の方々に深く感謝致します。

7 References

参考文献

[1] P.K.Townsend
"Black Holes " [gr-qc/9707012]

[2] Curtis G.Callan,Jr. and Juan M.Maldacena
"D-Brane Approach to Black Hole Quantum Mechanics" [hep-th/9602043]

[3] Juan Martin Maldacena
"Black Holes in String Theory" [hep-th/9607235]

[4] Sumit R.Das,Samir D.Mathur
"Comparing decay rates for black holes and D-branes "
Nuclear Physics B 478 (1996) 561-576

[5] Avinash Dhar,Gautam Mandal and Spenta R,Wadia
"Absorption vs Decay of Black holes in string theory and T-symmetry"
Phys.Lett.B388(1996)51-59)

[6] M.Abramowitz and I.Stegun
"Handbook of Matheatical Functions" Dover 04-486-61272-4

[7] Steven S.Gubser
"Dynamicsof D-brane Black Holes" [hep-th/9908004]

[8] Juan Malddacena and Andrew Strominger
"Black Hole Greybody Factors and D-Brane Spectroscopy"
Phys.Rev.D55(1997)861-870

[9] Steven S.Gupser,Akiazu Hashimoto,Igor R.Klebanov,Michael Krasnitz
"Scalar absorption and the breaking of the world-volume conformalinvariance"
Nuclear Physics B 526 (1998)393-414

[10] Igor R.Klebanov
"World-volume approach to absorption by non-dilatonic branes"
Nuclear Physics B496(1997)231-242

[11] Steven S.Gubser and Akikazu Hashimoto
"Exact absorption probabilities for the D3-brane"
[hep-th/9805140]

[12] Steven S.Gubser and Igor R.Klebanov
"Absorption by Branes and Schwinger Terms in the World Volume Theory"
Phys.Lett.B413(1997)41-48

[13] Igor Klebanov,Wshington Taylor IV,Mark Van Raamsdonk
"Absorption of dilaton partioal waves by D3-branes"
Nuclear Physics B 560 (1999)207-229

[14] N.D.Birrell and P.C.W.Davies
"Quantum fields in curved space"
Cambridge University Press 1982

A 付録 Bogoliubov transformation

ここでは、曲がった時空上の場の理論に於ける Bogoliubov 変換について 2 章で必要なことをまとめる [1]。ここでは実 scalar 場に話しを限る。また、考える時空は globally hyperbolic、つまり、 Cauchy 面 Σ が存在しているとする。

実 scalar 場の作用は、

$$S = -\frac{1}{2}\int d^{n+1}x\sqrt{-g}\left[\partial^\mu\Phi\partial_\mu\Phi + m^2\Phi^2\right] \tag{219}$$

である。これから実 scalar 場の運動方程式は

$$\left(D^\mu\partial_\mu - m^2\right)\Phi = 0 \tag{220}$$

である。考えている時空の計量 $g_{\mu\nu}$ についてこの方程式が解けた、つまり、解空間がある複素基底関数系 $\{\psi_i\}$ で張られたとしよう。この複素基底の内積は通常、

$$(\psi_i, \psi_j) = i\int_\Sigma dS_\mu\left(\psi_i^*\partial^\mu\psi_j - \psi_j\partial^\mu\psi_i^*\right) \tag{221}$$

で定義される。ここで Σ は Cauchy 面であるが、今複素基底が運動方程式の解であることから、内積は Cauchy 面のとり方によらない。 sS_μ は Σ の面素えある。さらに、 $\{\psi_i\}$ をうまく選ぶと、この内積に関して、

$$\left(\begin{array}{lll} (\psi_i,\psi_j) &=& \delta_{ij} \\ (\psi_i^*,\psi_j) &=& 0 \end{array}\right.\qquad\left.\begin{array}{lll} \left(\psi_i,\psi_j^*\right) &=& 0 \\ \left(\psi_i^*,\psi_j^*\right) &=& -\delta_{ij} \end{array}\right) \tag{222}$$

とできる。

この複素基底を用いると、運動方程式を満たす実 scalar 場は、

$$\Phi(x) = \sum\left[a_i\psi_i(x) + a_i^*\psi_i^*(x)\right] \tag{223}$$

と表せる。これを正準量子化して、

$$\Phi(x) = \sum\left[a_i\psi_i(x) + a_i^\dagger\psi_i^*(x)\right] \tag{224}$$

ここで、 $a_i, a_i^\dagger$ は生成消滅演算子であり、次の交換関係を満たす。

$$[a_i, a_j] = 0, \quad \left[a_i^\dagger, a_j^\dagger\right] = 0, \quad \left[a_i, a_j^\dagger\right] = \delta_{ij} \tag{225}$$

これから Hilbert 空間の真空 $|0\rangle$ は、

$$a_i|0\rangle = 0 \quad \forall i \tag{226}$$

$$\langle 0|0\rangle = 1 \tag{227}$$

で定義されるが、これは式 (222) を満たす運動方程式の解空間の複素基底によって異なる。

次に複素基底として、$\{\psi_i'\}$ を考えてみよう。

$$\psi_i' = \sum_j \left(A_{ij}\psi_j + B_{ij}\psi_j^* \right) \tag{228}$$

この基底が式 (222) と同じ内積関係式を持つための条件より、

$$\begin{aligned} AA^\dagger - BB^\dagger &= \mathbf{1} && (229)\\ AB^{\mathsf{T}} - BA^{\mathsf{T}} &= 0 && (230) \end{aligned}$$

が得られる。式 (228) の逆変換は、

$$\psi_j = \sum_k A'_{jk}\psi'_k + B'_{jk}\psi'^*_k \tag{231}$$

但、A'_{jk}, B'_{jk} は、

$$A' = A^\dagger, \quad B' = -B^{\mathsf{T}} \tag{232}$$

である。このことは、

$$\begin{aligned} \psi' &= A\left(A'\psi' + B'\psi'^*\right) + B\left(A'^*\psi'^* + B'^*\psi'\right) && (233)\\ &= \left(AA' + BB'^*\right)\psi' + \left(AB' + BA'^*\right)\psi'^* && (234)\\ &= \left(AA^\dagger - BB^\dagger\right)\psi' - \left(AB^{\mathsf{T}} - BA^{\mathsf{T}}\right)\psi' && (235)\\ &= \psi' && (236) \end{aligned}$$

より確かめられる。この A', B' についても式 $(229),\ (230)$ と同じ関係式を満たさなければならない。つまり、

$$\begin{aligned} A'A'^\dagger - B'B'^\dagger &= \mathbf{1} && (237)\\ A'B'^{\mathsf{T}} - B'A'^{\mathsf{T}} &= 0 && (238) \end{aligned}$$

これは A, B の関係式に直すと、

$$\begin{aligned} A^\dagger A - B^{\mathsf{T}}B^* &= \mathbf{1} && (239)\\ A^\dagger B - B^{\mathsf{T}}A^* &= 0 && (240) \end{aligned}$$

である。この二つの条件は、基底の変換が可逆であるということから来ていて、式 (229),(230) とは独立である。

曲がった時空の場の量子論を考える時に、定常時空、つまり時空に時間的 Killing ベクトル k^μ がある場合には、基底としては、通常

$$k^\mu \partial_\mu u_i = -i\omega_i u_i, \quad \omega_i \geq 0 \tag{241}$$

を満たす $\{u_i\}$ をとる。しかしながら、一般の時空では、基底のとり方に基準はない。

ところで今、時空の中の異なる二つの漸近的領域 M_-, M_+ で、時間的 Killing ベクトルが存在しているとしよう。 M_- と M_+ はことなるので、当然 Killing ベクトルも一般には異なる。 M_- での複素基底を $\{u_i\}$、 M_+ での複素基底を $\{\psi_i\}$ としよう。それぞれの基底はそれぞれの領域での運動方程式の解であるが、全時空における運動方程式の解ではない。さて、運動方程式の実解 $\Phi(x)$ は、領域 M_- では、

$$\Phi(x) = \sum_i \left[a'_i u_i(x) + a'^{\dagger}_i u^*_i(x) \right] \tag{242}$$

と展開できる。一方、領域 M_+ では、

$$\Phi(x) = \sum_i \left[a_i \psi_i(x) + a^{\dagger}_i \psi^*_i(x) \right] \tag{243}$$

と展開できる。

ところで内積は Cauchy 面に依らないので、内積 (222) は、 $\{u_i\}$、 $\{\psi_i\}$ の両方で成立する。したがって、この二つの基底の変換は、

$$\psi_i = \sum_j \left(A_{ij} u_j + B_{ij} u^*_j \right) \tag{244}$$

と書けて、 A, B は、式 (229),(230) を満たすものである。したがって、領域 M_+ での実解 $\Phi(x)$ は、基底を変換して $\{u_i\}$ で展開すると、

$$\begin{aligned}
\Phi(x) &= \sum_i \left(a_i \psi_i + a^{\dagger}_i \psi^*_i \right) && (245) \\
&= \sum_i \left[a_i \sum_j \left(A_{ij} u_j + B_{ij} u^*_j \right) + a^{\dagger}_i \sum_j \left(A^*_{ij} u^*_j + B^*_{ij} u_j \right) \right] && (246) \\
&= \sum_i \left[a'_i u_i(x) + a'^{\dagger}_i u^*_i(x) \right] && (247)
\end{aligned}$$

とできる。ここで、

$$a'_j = \sum_i \left(a_i A_{ij} + a^{\dagger}_i B^*_{ij} \right) \tag{248}$$

とした。これが Bogoliubov 変換であり、 A, B は Bogoliubov 係数と呼ばれるものである。

最後に、 M_+ で定義された真空 $|0\rangle$ での M_- における粒子数演算子 $N'_i = a'^{\dagger}_i a'_i$ の期待値を求めてみよう。すると、

$$\begin{aligned}
\langle N'_i \rangle &:= \langle 0 | N'_i | 0 \rangle = \langle 0 | a'^{\dagger}_i a'_i | 0 \rangle && (249) \\
&= \sum_{j,k} \langle 0 | \left(a_k B_{ki} \right) \left(a^{\dagger}_j B^*_{ji} \right) | 0 \rangle && (250) \\
&= \sum_{j,k} \underbrace{\langle 0 | a_k a^{\dagger}_j | 0 \rangle}_{\delta_{kj}} B_{ki} B^{\dagger}_{ij} && (251) \\
&= \left(B^{\dagger} B \right)_{ii} && (252)
\end{aligned}$$

となる。このように M_- からみると M_+ での真空状態は、 B がゼロでない限り励起状態にみえる。 B がゼロの場合の Bogoliubov 変換は、 $AA^\dagger = A^\dagger A = 1$ のユニタリー変換で、真空は両者同じものとなり、このような粒子生成は起こらないことがわかる。

このように時空が定常的でない場合には、平坦な時空の場の量子論では起こり得ないことが起こるのである。

B　付録 式 (17) の証明

ここでは、 A を適当な係数として、関数

$$\Phi_\omega(\omega') = A\int_{-\infty}^{0} \exp\left[i\omega' v + i\frac{\omega}{\kappa}\ln(-v)\right] dv \tag{253}$$

について、次の関係式が成立することを証明する [1]。

$$\Phi_\omega(-\omega') = -e^{-\frac{\pi\omega}{\kappa}}\Phi_\omega(\omega') \quad \text{for } \omega' > 0 \tag{254}$$

以下、証明。

まず、積分を評価するために複素 v 平面を考える。 cut は v の正の実軸上である。 $\omega' > 0$ の時、積分経路を正の虚軸上に回して、 $v = ix$ とすると積分は評価できて、

$$\begin{aligned}
\Phi_{\omega(\omega')} &= -iA\int_0^\infty \exp\left[-\omega' x + \frac{i\omega}{\kappa}\ln\left(xe^{-\frac{i\pi}{2}}\right)\right] dx && (255)\\
&= -\exp\left(\frac{\pi\omega}{2\kappa}\right)\int_0^\infty \exp\left[-\omega' x + \frac{i\omega}{\kappa}\ln(x)\right] dx && (256)
\end{aligned}$$

である。一方、 $\omega' < 0$ の時、積分経路を負の虚軸上に回して、 $v = -ix$ とすると積分は評価できて、

$$\begin{aligned}
\Phi_{\omega(\omega')} &= iA\int_0^\infty \exp\left[\omega' x + \frac{i\omega}{\kappa}\ln\left(xe^{\frac{i\pi}{2}}\right)\right] dx && (257)\\
&= -\exp\left(\frac{-\pi\omega}{2\kappa}\right)\int_0^\infty \exp\left[\omega' x + \frac{i\omega}{\kappa}\ln(x)\right] dx && (258)
\end{aligned}$$

である。したがって、

$$\Phi_\omega(-\omega') = -e^{-\frac{\pi\omega}{\kappa}}\Phi_\omega(\omega') \quad \text{for } \omega' > 0 \tag{259}$$

が成立する。