

超弦理論の真空構造解明への布石¹

静岡大学大学院理工学研究科
博士前期課程
物理学専攻
4053-1011 真鍋 征秀

¹本修士論文は、2007年2月に静岡大学大学院理工学研究科に提出したものに修正を施したものである。

目次

第 0 節	序論	3
0.1	弦の導入	3
0.2	Brane の導入	3
0.3	5 つの anomaly free な consistent theory と duality	4
0.4	$10 = 4 + 6$ (なぜ Calabi-Yau 多様体か?)	6
0.5	$2D, N = 2$ Non-linear σ -model	7
0.6	本修士論文の構成と Notation	8
第 1 節	Calabi-Yau Geometry I	10
1.1	Heterotic Phenomenology	10
1.1.1	Covariantly Constant Spinor	10
1.1.2	Holonomy 群, Yau の定理, Hodge diamond (一般論)	12
1.1.3	Heterotic Spectrum	13
1.1.4	Yukawa coupling	15
1.1.5	Type II Spectrum	16
1.2	Calabi-Yau 多様体	17
1.2.1	Kähler 構造と複素構造	17
1.2.2	代数幾何による Calabi-Yau 多様体の例	19
1.2.3	Mirror 多様体	22
第 2 節	$D = 2, N = 2$ の理論 (World Sheet Approach)	23
2.1	$N = 2$ SCFT の表現論と Mirror 対称性の発見	23
2.1.1	OPE と Algebra	23
2.1.2	表現論	24
2.1.3	Spectral flow と Mirror 対称性	26
2.2	Landau-Ginzburg model	29
2.2.1	Landau-Ginzburg model の Chiral Ring	29
2.2.2	Landau-Ginzburg model と $N = 2$ Minimal model	29
2.2.3	Calabi-Yau/Landau-Ginzburg Correspondence	31
第 3 節	場の理論の厳密解 (下からの Approach)	33
3.1	Seiberg-Witten Theory	33
3.2	Nekrasov の分配関数 (Instanton Counting)	39
第 4 節	Topological String Theory	42
4.1	Topological σ -model	42
4.1.1	$2D, N = (2, 2)$ σ -model の Topological Twist	42
4.1.2	Topological A-model	43
4.1.3	Topological B-model	46
4.2	位相的弦の導入	47
4.2.1	2次元重力との結合	47
4.2.2	Open Gromov-Witten invariant	49

第 5 節	Calabi-Yau Geometry II (For A-model)	51
5.1	Geometric Engineering	51
5.1.1	K3 曲面	51
5.1.2	Enhanced Gauge Symmetry	51
5.2	Toric Geometry	52
5.2.1	定義 其の 1 (Cone と Fan)	52
5.2.2	定義 其の 2 (Dual description, Web diagram)	56
5.3	Hirzebruch Surface による Geometric Engineering	61
第 6 節	Topological A-model	64
6.1	位相的閉弦 (Gopakumar-Vafa の M 理論解釈)	64
6.2	位相的開弦	67
6.2.1	String Field Theory	68
6.2.2	Chern-Simons Theory	69
6.2.3	Chern-Simons Theory の厳密解	72
第 7 節	All Genus Answer (By A-model)	79
7.1	Geometric Transition	79
7.1.1	Gopakumar-Vafa/Chern-Simons	79
7.1.2	Wilson loop の導入	82
7.1.3	More general situation by Toric variety	83
7.2	Topological Vertex	84
7.3	Nekrasov の分配関数 (Holomorphic Curve Counting)	90
第 8 節	結論	94
付録 A	複素多様体の基礎	95
付録 B	表現論の基礎	97
B.1	Symmetric Polynomials	97
B.2	Character	100
	参考文献	102

第0節 序論

0.1 弦の導入

現在我々の世界を記述する基礎理論は原理的には2つの理論から成っている。1つは物理法則に理論的枠組み(あるいは入れ物としての"場")を提供する相対性理論(とりわけ我々の時空観を形成する共変性が重要),もう1つはその枠組みの中で自然界(あるいは我々の感覚的世界)がいかなる形で表現されるべきかを記述する量子力学(Hilbert空間とその上の作用素環を基礎にして,その spectral 系列が我々の世界を記述するというもの)である。ここで点粒子の概念を導入することによって作用原理の形で結実した理論が場の量子論(QFT)である。さらに作用レベルで gauge 対称性などの縛りを与えることにより,現象論レベルで実験事実と矛盾しない結果が得られている(standard model)。しかし高エネルギー物理における,parameterの微調整問題,観測されている素粒子の mass や世代数の予言能力, gauge 階層性や重力(繰り込みの破綻)の問題など,この理論には不満足な点が多々ある。そこで上の点粒子の概念を1次元的な弦の概念に置き換えることによって作用原理の形で結実する(はずの)理論が弦理論である[1, 2]。この弦が振動して,その mode (spectral 系列)を観測したものを我々の世界だと考える。弦が動くと2次元の面(world sheet)を形成し,その背後では共形場の理論(comformal field theory (CFT), Virasoro algebra)が展開される。さらに弦には開いた弦(開弦)と閉じた弦(閉弦)を考えることができ, Dp-brane(弦理論に存在する $p+1$ 次元の soliton 解)と組み合わせる事で前者は brane 上(boundary)の gauge 理論², 後者は brane 間(bulk)の重力理論となる。さらに以下では特に断りが無い限り理論内部に超対称性(supersymmetry (SUSY))を取り込んだ超弦理論(superstring theory)を考える。

まず world sheet 上に SUSY を導入する。この時 world sheet の reparametrization と local SUSY の gauge 固定に伴った BRST 量子化の議論から,それぞれ bc-ghost(central charge=-26)と $\beta\gamma$ -ghost(central charge=11)が得られる³。故に全体の central charge=-15 を cancel させるためには, world sheet と結合する boson 弦と fermion 弦(X^M と ψ^M , $M=0, \dots, D-1$)の central charge の和が15にならなければいけないので $D=10$ と与えられる⁴。このような10次元を target とするような string は critical string と呼ばれていて,このようにして不定計量 Hilbert 空間に現れる ghost の取り除きから我々の世界の次元が理論的に求められた事は重要である。ただし通常我々の手に負えるのは,摂動的弦理論だけなのだが実際に非摂動的弦の効果を取り入れることによって,弦理論には更なる余剰次元の存在を予言する傍証が存在しているのも事実である(M理論, F理論)。この string の非摂動的定式化(真空構造の理解)が現在の素粒子理論の重要な研究対象となっており,本修士論文では,まず摂動的弦から何が言えるのかを述べた後に弦理論の真空構造の理解を得る為の第1段階としての厳密に解ける toy model(位相的弦)の総合報告を行う。この節では,その準備としての予備知識や notation について述べることにする。

0.2 Brane の導入

まず原始的なレベルにおいて T-dual 変換とは string theory の解 $X^M(z, \bar{z}) = X^M(z) + X^M(\bar{z})$ を $X'^M(z, \bar{z}) = X^M(z) - X^M(\bar{z})$ に置き換える事によって定義されている。これによって理論は何の変更も受けないのだが,ただ1つ M 次元方向を compact 化したとすると,その半径 R が α'/R へと変更⁵される事

²開弦の両端には gauge の自由度があり,同じ brane 上に開弦の両端が存在する時に massless の spectrum が得られるので,開弦の向きを考える事によって brane 1枚に対しては $U(1)$ gauge 理論, N 枚の重なった brane に対しては $U(N)$ gauge 理論が得られる。

³Conformal dimension($\lambda, 1-\lambda$)の ghost 系(F, G)において,その OPE は $F(z)G(\omega) \sim \frac{1}{z-\omega}$ で与えられ, energy-momentum tensor は $T = -\lambda F \cdot \partial G - (\lambda-1)\partial F \cdot G$ と与えられる。故にこの系の central charge は $c = \mp 2(6\lambda^2 - 6\lambda + 1)$ (ただし, (F, G)が Grassman の時には (-) 符号を取る)で与えられる。今の場合 bc-ghost (Grassmann) は $\lambda=2$ で, $\beta\gamma$ -ghost は $\lambda=\frac{3}{2}$ である。

⁴ X^M から与えられる central charge= D 。 ψ^M から与えられる central charge= $D/2$ 。また直ぐに分かるように SUSY がなければ $D=26$ になり, $N=2$ の SUSY があれば ghost の central charge は $c = -26 + 11 + 11 = -4$ となるので $D=2$ が得られる。

⁵ここで α' は歴史的な理由から Regge slope と呼ばれており (mass dimension=-2), これを用いて string tension $\tau_F \doteq \frac{1}{2\pi\alpha'}$ が定義される。この parameter は mass dimension を持つために free parameter では無く, string theory には free parameter は存在しない。この事は, quark-lepton 3世代の standard model の parameter が18個(ただし1個は Higgs の mass parameter)もある事と比較して, string theory を考える大きな利点である。

が分かる. ここで開弦を考えて $\{X^{p+1}, \dots, X^8, X^9\}$ の compact 化を行い T -dual 変換をして dual な座標系 $\{X'^{p+1}, \dots, X'^8, X'^9\}$ に移ると, この $9-p$ 個の座標についての string boundary condition が Neumann 型から Dirichlet 型に変換される⁶. 故にこの開弦の端は $p+1$ 次元の超平面に束縛され⁷, これを Dp -brane という. Dp -brane は Type II string と相互作用して, その effective action は, NS-NS sector では Dirac-Born-Infeld action (T_p : Dp -brane tension, $m, n : 0, 1, \dots, p$)⁸:

$$S = -T_p \int d^{p+1}\xi e^{-\phi} \left[-\det \left(\tilde{G}_{mn} + \tilde{B}_{mn} + 2\pi\alpha' F_{mn} \right) \right]^{1/2} \quad (0.1)$$

によって, R-R sector では Chern-Siomns-like action (μ_p は $p+1$ form charge)⁹:

$$S = i\mu_p \int_{p+1} \exp(2\pi\alpha' F_2 + B_2) \wedge \sum_q C_q \quad (0.2)$$

によって記述される. ここで ϕ は dilaton と呼ばれる scalar field であるが effective theory の partition function に対して $e^{-\langle\phi\rangle\chi(E)}$ の寄与を与える為に¹⁰, これを用いて string coupling $g_s \doteq e^{\langle\phi\rangle}$ が定義されている. さらに string の相互作用を考えると genus 1 個につき g_s^2 の寄与を, boundary 1 個につき g_s の寄与が得られるので,

$$\text{closed string coupling } g_{cl} \doteq g_s, \quad \text{open string coupling } g_{op} \doteq g_s^{1/2} \quad (0.3)$$

が定義できる. これらを用いる事によって Polchinski は, brane 間の 1-loop amplitude の計算から

$$T_p = \frac{1}{\alpha'^{\frac{p+1}{2}} g_s}, \quad \mu_p = (2\pi)^{\frac{7-2p}{2}} \alpha'^{\frac{3-p}{2}} \quad (0.4)$$

を得た. ところで brane を用いる事によって gauge 理論を得る為の方法としては, 上で述べたものとは異なった方法も知られている. 詳細については第 5 節で geometric engineering として述べるが, ここでは Calabi-Yau compact 化に伴った cycle への brane の巻きつけを考える事になる. ここで, Hetero 弦理論には brane が存在しないことに注意しておく.

0.3 5 つの anomaly free な consistent theory と duality

String theory から得られる物理学の基礎理論は摂動論的レヴェル (10 次元) で 5 つ存在する事が分かっている. 以下ではそれらの massless spectrum を list する.

Type II(I) action

$$S = \frac{1}{4\pi} \int d^2z \left(\frac{2}{\alpha'} \partial X^M \bar{\partial} X_M + \psi^M \partial \psi_M + \tilde{\psi}^M \partial \tilde{\psi}_M \right). \quad (0.5)$$

- Type IIA ($N = 2$, closed string, vector theory)

spectrum: $(8_v(\text{NS}) \oplus 8_s(\text{R})) \otimes (8_v(\text{NS}) \oplus 8_c(\text{R}))$ によって

boson ; NS-NS $\rightarrow 1(\phi) \oplus 28(B_{MN}) \oplus 35(G_{MN})$, R-R $\rightarrow 8_v(C_M) \oplus 56(C_{LMN})$

fermion ; NS-R $\rightarrow 8_s(\lambda^\alpha) \oplus 56_s(\psi_M^\alpha) \oplus 8_c(\lambda^{\dot{\alpha}}) \oplus 56_c(\psi_M^{\dot{\alpha}})$

相互作用できる D-brane : 0, 2, 4, 6, 8-brane, 低エネルギー理論は IIA 型超重力理論¹¹

⁶ $\partial_z \doteq \frac{1}{2}(\partial_1 - i\partial_2), \partial_{\bar{z}} \doteq \frac{1}{2}(\partial_1 + i\partial_2), \sigma_1 \doteq \sigma, \sigma_2 \doteq i\tau$ によって $0 = \partial_1 X^M = -i\partial_2 X'^M$ から分かる.

⁷ この為に, Type II の理論において world sheet 上の supercharge $Q_\alpha, \tilde{Q}_\alpha$ が独立には保存せず, その和のみが保存する事になる. 故に brane の存在は超対称性を半分に破る ($N = 2 \rightarrow N = 1$) ので D-brane は BPS state を形成する. ただしこの boundary が特別な条件 (special Lagrangian submanifold) を満たす時 SUSY は破れない. 開弦の理論において topological twist を定義するためには, この条件は必要十分条件となる. (5.2.2 節 Fact 5.4 参照)

⁸ $\tilde{G}_{mn}(\xi) \doteq \frac{\partial X^M}{\partial \xi^m} \frac{\partial X^N}{\partial \xi^n} G_{MN}(X(\xi))$: induced metric, $\tilde{B}_{mn}(\xi) \doteq \frac{\partial X^M}{\partial \xi^m} \frac{\partial X^N}{\partial \xi^n} B_{MN}(X(\xi))$: induced B-field

⁹ ただし exp のべき展開によって全体が $(p+1)$ -form になる所だけを拾う.

¹⁰ $\chi(E)$: 2次元曲面 E (g : genus, b : boundary) の Euler 数 ($= 2 - 2g - b$) (cf. Gauss-Bonnet の定理)

¹¹ 11D $N = 2$ 超重力理論からの reduction theory であり, この事が M (11D) 理論の idea を生み出す.

- Type IIB ($N = 2$, closed string, chiral theory)

spectrum: $(8_v(\text{NS}) \oplus 8_s(\text{R})) \otimes (8_v(\text{NS}) \oplus 8_s(\text{R}))$ によって

boson ; NS-NS $\rightarrow 1(\phi) \oplus 28(B_{MN}) \oplus 35(G_{MN})$, R-R $\rightarrow 1(C) \oplus 28(C_{MN}) \oplus 35_+(C_{KLMN}^{(+)})$

fermion ; NS-R $\rightarrow 8_c(\lambda^{\dot{\alpha}}) \oplus 56_s(\psi_M^{\dot{\alpha}}) \oplus 8_c(\lambda^{\dot{\alpha}}) \oplus 56_s(\psi_M^{\dot{\alpha}})$

相互作用できる D-brane : $-1, 1, 3, 5, 7, 9$ -brane, 低エネルギー理論は IIB 型超重力理論

- Type I ($N = 1$, open-closed string, chiral theory)

Type IIB の理論に world sheet parity (\mathbb{Z}_2) の対称性を課す事により, 超対称性が $N = 1$ に落ちて開弦が定義できて弦に向きが無くなる. 向きの無い開弦の両端に貼り付ける事のできる gauge 群 (Chan-Paton factor) は $SO(N)$ か $Sp(N)$ に制限されるのだが gauge と gravity の anomaly 相殺の制限 ($\dim G = 496$) から可能な gauge 群は $SO(32)$ だけとなる.

spectrum: IIB の閉弦において world sheet parity (\mathbb{Z}_2) 不変な spectrum として NS-NS sector から $1 \oplus 35$, R-R sector から 28^{12} , NS-R から $8_c \oplus 56_s$ が残る. これと上述の Chan-Paton factor を持った開弦の spectrum を合わせて

boson ; $\phi, C_{MN}, G_{MN}, A_M^a$ ($a = 1 \cdots 496$)

fermion ; $\lambda^{\dot{\alpha}}, \psi_M^{\dot{\alpha}}, \chi^{\dot{\alpha}a}$

相互作用できる D-brane : $-1, 1, 3, 5, 7, 9$ -brane, 低エネルギー理論は $D = 10, N = 1$ 超重力理論と $N = 1$ SuperYM 理論

純粋な超弦から得られるのは上の 3 つだけだが, boson 弦理論と貼り合わせる事により以下のような Hetero 弦理論が定義できる¹³.

Heterotic action

$$S = \frac{1}{4\pi} \int d^2z \left(\frac{2}{\alpha'} \partial X^M \bar{\partial} X_M + \lambda^A \bar{\partial} \lambda^A + \tilde{\psi}^M \partial \tilde{\psi}_M \right). \quad (0.6)$$

以下, 結果だけ述べる. $SO(32)$ と $E_8 \otimes E_8$ の違いは λ^A をそのまま用いるか, 半分に分けて spectrum を考えるかの違いである.

- Hetero $SO(32)$ ($N = 1$, closed string, chiral theory)
- Hetero $E_8 \otimes E_8$ ($N = 1$, closed string, chiral theory)

これらの基本的な massless spectrum は Type I とほとんど同じである (実際には boson の spectrum で C_{MN} と B_{MN} の違いがあり, 以下の S -dual 変換によりこの 2 つが入れ替わる) が, Hetero 弦理論には D-brane 及び開弦が存在しない事や, Type I 弦には向きが無いが Hetero 弦には向きがついている事などの違いがある.

◇ Fundamental Duality

以下 5 つの弦理論の間の 10 次元レヴェルでよく知られている duality について結果だけまとめておく. ただしこれらの関係は massless spectrum の対応や低エネルギー有効理論における対応といった部分的な(弱い)対応関係であるために, 全体像はいまだに理解できていないわけではない. それを踏まえた上で次のような対応関係が得られている.

Hetero $E_8 \otimes E_8$	\xleftrightarrow{S}	I'	$\xleftrightarrow{\mathbb{Z}_2}$	IIA	\xleftrightarrow{S}	M ?
$\uparrow T$		$\uparrow T$		$\uparrow T$		
Hetero $SO(32)$	\xleftrightarrow{S}	I	$\xleftrightarrow{\mathbb{Z}_2}$	IIB	\xleftrightarrow{S}	IIB'

ここで T と書いたのは T -duality のことで, S と書いたのは S -duality のことである¹⁴. また I' などと書いたのは duality を記述するための中間状態として便宜上導入したものである. この中で IIB 理論は S -dual の下で self-dual 構造を持っていることは著しい特徴であり, それに対して IIA 理論の強結合理論 (dilaton coupling

¹²10 次元の spin の統計性から.

¹³Left-sector に boson 弦, right-sector に超弦を用いる. このとき left-sector の余剰 16 次元の 16 個の boson 弦を, それと等価な 32 個の Majorana-Weyl fermion λ^A ($A = 1, \dots, 32$) で置き換える. また注意として GSO 射影と質量釣り合いの条件によって質量 spectrum を調整しなければならない.

¹⁴ T は Torus または Target の T , S は Strong-weak または $SL(2, \mathbb{Z})$ の S をそれぞれ表している.

が大きくなる)として11次元理論であるM理論が定義されている(11次元方向の半径は、 $R = g_s^{2/3} \sqrt{\alpha'}$ で与えられる)。ところでType IIA, IIBをCalabi-Yau space (6D)上にcompact化すると、以下で述べるmirror対称性はT-dualityに他ならない事が分かる [3]。

0.4 10 = 4 + 6 (なぜ Calabi-Yau 多様体か?)

摂動論レベルのstring theoryは10次元でconsistentに定義されたわけだが、我々が知っている世界は4次元である。(4次元の理論は、その他の次元の理論と比較しても豊かな構造を持っており時空の安定性の側面からも4次元の世界は必然の結果だと考えられる¹⁵。)そこで残りの6次元のcompact化を行ってこの6次元は我々の認識できるサイズをはるかに超えて小さなスケールだと考える¹⁶(Kaluza-Kleinの思想)。この理論の出発点となるのはCandelasたちの1985年の仕事である[4]。考える弦はHetero型として、まずは次のもっともらしい仮定をおく。

- (i) $X^{10} = \mathcal{M}^{1,3} \times M^6$ (M^6 : compact化された空間)とした時、 $\mathcal{M}^{1,3}$ はmaximally symmetric spacetime (i.e. 一様かつ等方)¹⁷であるべし。
- (ii) (i)のcompact化によって $\mathcal{M}^{1,3}$ はunbroken $N = 1$ SUSYを持つべし。
- (iii) 当然ながら以上のcompact化によって現れるgauge階層性やfermionのspectrumなどはstandard modelを導かなければならない¹⁸。

詳細は第1節で述べるが、Hetero型理論の低エネルギー有効理論である $10D$, $N = 1$ の超重力理論のbackground SUSYに対する仮定(ii)からback groundのtopologyが強力な制限を受ける。特にB-場を0にすることによってback ground topologyはcovariantly constant spinor $\nabla_i \eta = 0$ ($i = 1, \dots, 6$: M^6 の添え字)の存在が必要条件として証明される。そのことから M^6 はRicci-flat kähler多様体となる事が証明され、この多様体のことをCalabi-Yau多様体という。ところでcovariantly constant spinorの話が出て来たついでに、これが存在する(もちろんRicci-flat)多様体についてはSUSY以前の段階で、以下のような結果がよく引用される¹⁹[6]。(Berger's table)

実次元	Holonomy 群	Geometry	#(C.C.S)
$4k$	$SU(2k)$	Calabi-Yau	(2, 0)
$4k + 2$	$SU(2k + 1)$	Calabi-Yau	(1, 1)
$4k$	$Sp(k)$	HyperKähler	$(k + 1, 0)$
7	G_2	Exceptional	1
8	$Spin(7)$	Exceptional	(1, 0)

ここでmirror多様体について一般的に述べておく[7]。複素次元 m のCalabi-Yau多様体 M に対して、cohomology群の間に次のような同相関係を満たすCalabi-Yau多様体 \widetilde{M} の事を M のmirror多様体という²⁰;

$$H^q(M, \Omega^p(M)) \simeq H^q(\widetilde{M}, \Omega^{m-p}(\widetilde{M})).$$

¹⁵第4.2.1節で述べるがtopological string theoryにおけるtarget Calabi-Yau多様体の次元に関して、ある理由から複素3次元はcritical dimensionと呼ばれている。

¹⁶D-brane解が認識されるようになってから、ここで述べる事とは別のシナリオであるbrane worldのideaが提示されているが、これらの話は両立可能なシナリオであり以下ではとりあえず素朴な形で、なぜ物理学者がCalabi-Yau多様体を考えるのかを述べる。

¹⁷この時 $\mathcal{M}^{1,3}$ のRiemann curvatureは、この空間のmetric $g_{\mu\nu}$ ($\mu, \nu : 0, \dots, 3$)を用いて $R_{\mu\nu\rho\sigma} = \kappa(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho})$ ($\kappa > 0$: de Sitter, $\kappa < 0$: anti-de Sitter, $\kappa = 0$: flat Minkowski)と書ける。

¹⁸ただし、以下の節ではこの仮定は考えない。理由は摂動レベルの弦理論では真空が縮退してしまっており、現時点で我々の世界を記述する理論を一意的(そもそも一意的に理論が決まることなど、この先も不可能だと思われるが)に得ることが不可能だからである。

¹⁹#(C.C.S)はcovariantly constant spinorをWeyl分解した時の(left, right) chiral spinorの数の事。この表で唯一の奇数次元の多様体として G_2 多様体が現れている事は、8元体との関連[5]やM理論への応用とともに興味深い理論がある。またholonomy群については1.1.2節で述べる。

²⁰これをmirror多様体であることの必要条件だとして、物理的にはCFT((C, A)環と(C, C)環)の分配関数のレベルで一致することが要請されるのが普通である(第1, 第2節参照)。

ここで $\Omega^p(M)$ は M 上の holomorphic p -form の germ の層を表している. この関係を Hodge 数によって表すと

$$b^{p,q}(M) = b^{m-p,q}(\widetilde{M})$$

となる. ただし, あらゆる Calabi-Yau 多様体に対してその mirror 多様体が存在するわけではない. 本修士論文で述べるのは $m = 3$ についてであって, 更なる詳細については第 1 節で述べる.

0.5 $2D, N = 2$ Non-linear σ -model

次に world sheet の立場から, 弦の有効理論 (non-linear σ -model) により上述の仮定 (i) と (ii) を実現させる事を考える. まず次の事が知られている [2].

Fact 0.1

4D で $N = 1$ SUSY が存在 \Rightarrow world sheet 上で $N = 2$ SUSY が存在.

4D で $N = 2$ SUSY が存在 \Rightarrow world sheet 上で $N = (2, 2)$ SUSY が存在. (0.7)

事実 4D で $N = 1$ ($N = 2$) SUSY を与える弦理論の world sheet 上では, $(2, 0)$ ($(2, 2)$) の SUSY 代数を構成できる事が知られている. 従って, compact 化された空間 M^6 を記述する world sheet 上の弦の有効理論として $N = (2, 2)$ の non-linear σ -model を考える. 以下では一般の次元でこの model を定義する. この model は world sheet Σ_g から実 $2m$ 次元 Kähler 多様体 M への map $\phi: \Sigma_g \rightarrow M$ として以下のように定義される²¹.

$$\mathcal{L} = 2t \int_{\Sigma_g} d^2z \left(\frac{1}{2} G_{ij} \partial_z x^i \partial_{\bar{z}} x^j + i G_{I\bar{J}} \psi_-^I D_z \psi_-^{\bar{J}} + i G_{\bar{I}J} \psi_+^{\bar{I}} D_{\bar{z}} \psi_+^J + R_{I\bar{I}J\bar{J}} \psi_+^I \psi_+^{\bar{I}} \psi_-^J \psi_-^{\bar{J}} \right), \quad (0.8)$$

($i, j = 1 \cdots 2m, \quad I, J = 1 \cdots m, \quad \bar{I}, \bar{J} = 1 \cdots m$). ここで G_{ij} は多様体 M の metric で, t は coupling parameter であり, D は pullback derivative で target space M の vector V^i に対して $D_\alpha V^i \doteq \partial_\alpha V^i + \partial_\alpha x^j \Gamma_{jk}^i V^k$, ($\alpha = z, \bar{z}$) である. また fermion については,

Spin	Field	Bundle
Left	ψ_+^I	$K^{1/2} \otimes \phi^*(T_M^{1,0})$
	$\psi_+^{\bar{I}}$	$K^{1/2} \otimes \phi^*(T_M^{0,1})$
Right	$\psi_-^{\bar{I}}$	$\bar{K}^{1/2} \otimes \phi^*(T_M^{1,0})$
	ψ_-^I	$\bar{K}^{1/2} \otimes \phi^*(T_M^{0,1})$

ここで, K と $K^{1/2}$ はそれぞれ Σ_g 上の canonical bundle と spin bundle で, T_M を M 上の tangent bundle とすると $T_M = T_M^{1,0} + T_M^{0,1}$ である. Fermion の共変微分は,

$$D_z \psi_-^I = \partial_z \psi_-^I + \partial_z x^J \Gamma_{JK}^I \psi_-^K - \frac{i}{2} \omega_z \psi_-^I, \quad D_{\bar{z}} \psi_+^I = \partial_{\bar{z}} \psi_+^I + \partial_{\bar{z}} x^J \Gamma_{JK}^I \psi_+^K + \frac{i}{2} \omega_{\bar{z}} \psi_+^I$$

与えられる. ここで ω_α は spin connection で, action (0.8) では効かない.

Action (0.8) は以下の SUSY 変換の下で不変である. ($\epsilon_-, \tilde{\epsilon}_- : K^{-1/2}$ の無限小の holomorphic section, $\epsilon_+, \tilde{\epsilon}_+ : \bar{K}^{-1/2}$ の無限小の anti-holomorphic section)

$$\begin{aligned} \delta x^I &= i\epsilon_- \psi_+^I + i\epsilon_+ \psi_-^I, & \delta x^{\bar{I}} &= i\tilde{\epsilon}_- \psi_+^{\bar{I}} + i\tilde{\epsilon}_+ \psi_-^{\bar{I}}, \\ \delta \psi_+^I &= -\tilde{\epsilon}_- \partial_z x^I - i\epsilon_+ \psi_-^J \Gamma_{JK}^I \psi_+^K, & \delta \psi_+^{\bar{I}} &= -\epsilon_- \partial_z x^{\bar{I}} - i\tilde{\epsilon}_+ \psi_-^J \Gamma_{J\bar{K}}^{\bar{I}} \psi_+^{\bar{K}}, \\ \delta \psi_-^I &= -\tilde{\epsilon}_+ \partial_{\bar{z}} x^I - i\epsilon_- \psi_+^J \Gamma_{JK}^I \psi_-^K, & \delta \psi_-^{\bar{I}} &= -\epsilon_+ \partial_{\bar{z}} x^{\bar{I}} - i\tilde{\epsilon}_- \psi_+^J \Gamma_{J\bar{K}}^{\bar{I}} \psi_-^{\bar{K}}. \end{aligned} \quad (0.9)$$

ところでこの model の β 関数は M の Ricci tensor (first Chern class) に比例するために次が成り立つ.

$$M : \text{Calabi-Yau 多様体} \xleftrightarrow{\text{iff}} (0.8) \text{ は } N = (2, 2) \text{ SCFT の model.} \quad (0.10)$$

²¹この model を定義するためには, 少なくとも target space に Kähler 構造が必要である事が知られている [8].

0.6 本修士論文の構成と Notation

以下では本修士論文の構成について述べておく。この修士論文は大きく分けて2つの部分からなる。前半部分は第1節から第3節であって現在の弦理論の土壌となっている部分の総合報告であり、後半部分は第4節から第7節までで位相的弦理論の総合報告を行う。(ここでは、主に [9, 10, 11] を参考にした。) まず第1節では0.4節で述べた事をより詳しく紹介して、その目的は compact 化された空間 (内部空間) としての6次元の幾何学を弦理論の立場から捉える事である。続いて第2節では2次元 SCFT の立場から Calabi-Yau 多様体を捉える事が目的となっている (0.5節)。特に2次元の world sheet から target 空間への map によって異次元の幾何学が結びつく様子について述べる。第3節は弦理論とは独立に場の理論 (4次元の gauge 理論) だけで論ぜられる部分であり、所謂 Seiberg-Witten の理論と Nekrasov の分配関数 (厳密解) について紹介する。これらの理論は弦理論を用いた、より明晰な説明があって (Seiberg-Witten curve の出处など)、その一端を示すのが第7節の目的である。続く第4節では0.5節の non-linear σ -model に topological twist と呼ばれる操作を行って理論の位相化を実行して、位相的弦理論の定義を自然な方法で行う。残りの3つの節は A-model についての解説が全てである。特に第5, 第6節は第7節の準備に当てる。第5節では geometric engineering と呼ばれている概念が K3 曲面なる複素2次元 Calabi-Yau 多様体から得られる事を説明した後、それを代数幾何学的に実現する為の toric 多様体について述べる。そして第6節では、位相的閉弦の厳密解が Gopakumar-Vafa による M 理論解釈 (BPS state の数え上げ) から得られる事と、位相的開弦の厳密解が3次元 Chern-Simons 理論から得られる事について述べる。最後に第7節では第6節で述べた2つの厳密解が和の取り方により実は同じものになるという幾何学的転移現象について説明した後、任意の local toric Calabi-Yau 多様体上の厳密解が組み合わせ論的 (Feynman diagram 的) に導出される事を述べる。そして、これと geometric engineering を用いる事によって、第3節で述べた $N = 2$ SYM 理論の厳密解が得られる事を直接的に計算して示す (pure $SU(2)$ について)。付録として A では (第1節への手引きとして) 複素多様体について、B では (第6,7節への手引きとして) 表現論について基本的な事をまとめておいた。また本修士論文の中で proposition に対して証明 (及び例証) を述べているが、それらの中には数学的な証明ではないものも含まれている事に注意しておく。本修士論文の各節の間の関係はおよそ以下の図1のようになっている。

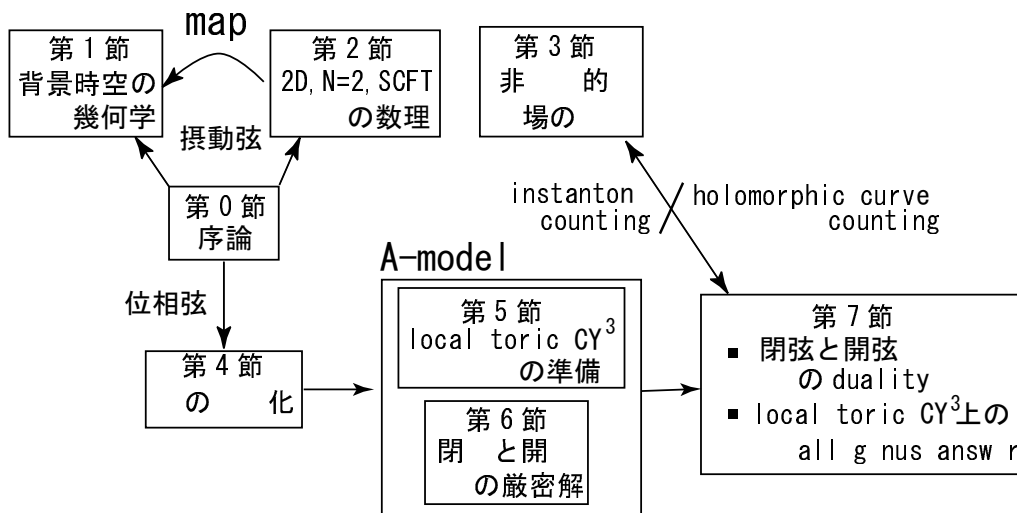


図 1: 本修士論文の構成

最後に本修士論文 (特に第 3 節まで) で用いる基本的な notation 等についてまとめておく.

- まずは添え字について. ((\dots) 内はその次元の metric を表す. Minkowski metric $\eta_{MN} = (-1, 1, \dots, 1)$.)
 $2D(h_{\alpha\beta})$: α, β, \dots ($= 0, 1 = \tau, \sigma = 1, 2 = z, \bar{z}$, (0.2 節の脚注 5 も参照))
 $10D(g_{MN})$: M, N, \dots ($= 0, \dots, 9$), $4D(g_{\mu\nu})$: μ, ν, \dots ($= 0, \dots, 3$)
 実 compact 空間 (G_{ij}): i, j, \dots ($= 1, \dots, 2m, m \in \mathbb{N}$)
 複素 compact 空間 ($G_{I\bar{J}}$): $I, J, \bar{I}, \bar{J}, \dots$ ($= 1, \dots, m$)
 Dp-brane(\tilde{G}_{mn}): m, n, \dots ($= 0, \dots, p$), internal(群 G): a, b, \dots ($= 1, \dots, \dim G$)
 spinor 空間: $2D$ と同じようにギリシャ文字を使う. (混同して使うことは無い.)

- Dirac 代数は Majorana 表現を取る. (ここでは $m = 3$ を考えて Nieuwenhuizen[12] の notation に従う. 特に第 1 節.)

$$\{\Gamma^M, \Gamma^N\} = 2g^{MN}, (\Gamma^M (M = 1, \dots, 9) : \text{real, hermitian}, \Gamma^0 : \text{real, anti-hermitian})$$

ここで Γ^M を γ^μ, γ^i の tensor product で表現する.

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu \otimes 1, \quad \Gamma^i = \gamma_5 \otimes \gamma^i, \quad (\gamma_5 \doteq \gamma^5 \doteq i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \frac{i}{4!}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^{\mu\nu\rho\sigma})$$

そうすると, γ^μ : real, anti-hermitian (for $\mu = 0$), hermitian (for $\mu = 1, 2, 3$)

$$\gamma^i : \text{imaginary, hermitian, } (\gamma_5 \text{ と同じ})$$

その他, $\gamma^{ij} \doteq \frac{1}{2}\gamma^{[i}\gamma^{j]}$, $\gamma^{ijk} \doteq \frac{1}{3!}\gamma^{[i}\gamma^{j}\gamma^{k]}$ 等を定義

多様体 M^6 上の spinor の chiral 演算子: $\gamma \doteq \frac{i}{6!}G^{1/2}\epsilon_{ijklmn}\gamma^{ijklmn}$

$$\gamma^5 : \text{imaginary, hermitian, } (\gamma^5)^2 = 1, \{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0$$

$$\gamma : \text{imaginary, hermitian, } (\gamma)^2 = 1, \{\gamma^i, \gamma\} = 0$$

- Covariant derivative など

for scalar: $\nabla_M \phi = \partial_M \phi$

for spinor: $\nabla_M \psi = (\partial_M + \frac{1}{4}\omega_M^{AB}\Gamma_{AB})\psi$, (A, B : local Lorentz の添え字, ω_M^{AB} : spin connection)

for vector: $\nabla_M V^N = \partial_M V^N + \Gamma_{MK}^N V^K$, (Γ_{MK}^N : Levi-Civita connection ($\Gamma_{MK}^N = \Gamma_{KM}^N$))

$$\Gamma_{LM}^K = \frac{1}{2}g^{KN}(\partial_L g_{NM} + \partial_M g_{NL} - \partial_N g_{LM}), \quad R_{NKL}^M = (\partial_{[K}\Gamma_{L]}^M + \Gamma_{[K}\Gamma_{L]}^M)$$

- M^{2m} が Kähler 多様体の時

non-zero connection; $\Gamma_{JK}^I = G^{I\bar{L}}\partial_J G_{K\bar{L}}$, ($\Gamma_{\bar{J}\bar{K}}^{\bar{I}} = G^{\bar{I}L}\partial_{\bar{J}} G_{\bar{K}L}$)

non-zero curvature; $R_{LI\bar{J}}^K = -\partial_{\bar{J}}(G^{K\bar{K}}\partial_I G_{J\bar{K}})$, $R_{I\bar{I}} = -\partial_I \partial_{\bar{I}} \ln \det G$

- 第 3 節では Wess-Bagger の notation に従う. (4 次元の理論)

Pauli matrix: $\sigma^0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\sigma^4 \doteq -i\sigma^0$

Weyl 表現: $\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma^\mu \\ i\bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}$, $\bar{\sigma}^\mu = (-1, -\sigma^i)$ など. (後は Wess-Bagger の教科書 [13] を参照.)

第1節 Calabi-Yau Geometry I

この節では、特に6次元 (back ground) の真空解 (古典解) としての Calabi-Yau 多様体について、基本的なレベル (序論として) の議論を行う [4].

1.1 Heterotic Phenomenology

1.1.1 Covariantly Constant Spinor

当面は Hetero 型の理論を考える。まず第0.4節で述べた仮定 (i),(ii) を満足するような background の古典解を、その低エネルギー有効理論である $10D$, $N = 1$ の超重力理論と SuperYM 理論の結合系を用いて探究する。Background の古典解が仮定 (ii) を満足するような unbroken SUSY を持つ為の必要十分条件は次のようになる。 $|\Omega\rangle$: SUSY vacuum $\overset{\text{iff}}{\Leftrightarrow} Q|\Omega\rangle = \bar{Q}|\Omega\rangle = 0$ (Q : supercharge) より, U_B : bosonic field operator $\rightarrow \langle\Omega|[Q, U_B]|\Omega\rangle = 0$ で $[Q, U_B]$ は fermionic field operator となり, それが真空期待値を持たないことから自明。一方 U_F : fermionic field operator $\rightarrow \langle\Omega|\{Q, U_F\}|\Omega\rangle = 0$ で $\{Q, U_F\}$ は bosonic field operator δU_F となり, classical limit で $\delta U_F=0$ の条件が得られる。 ($U_F = \psi_\mu, \psi_i, \lambda, \chi^\alpha$)

$$\delta\psi_\mu = \nabla_\mu\epsilon + \frac{\sqrt{2}}{32}e^{2\phi}(\gamma_\mu\gamma_5 \otimes H)\epsilon = 0, \quad (1.1)$$

$$\delta\psi_i = \nabla_i\epsilon + \frac{\sqrt{2}}{32}e^{2\phi}(\gamma_i H - 12H_i)\epsilon = 0, \quad (1.2)$$

$$\delta\lambda = \sqrt{2}(\gamma^i\nabla_i\phi)\epsilon + \frac{1}{8}e^{2\phi}H\epsilon = 0, \quad (1.3)$$

$$\delta\chi^\alpha = -\frac{1}{4}e^\phi F_{ij}^a \gamma^{ij}\epsilon = 0, \quad (\epsilon \text{ は無限小 fermionic field parameter}). \quad (1.4)$$

ここで H_{ijk} は, $SO(32)$ gauge 不変な B_{ij} の field strength で, $H \doteq H_{ijk}\gamma^{ijk}$, $H_i \doteq H_{ijk}\gamma^{jk}$ であり¹, Chapline-Manton によって $H = dB - \omega_{3Y}$ ($\omega_{3Y} \doteq \text{tr}(A \wedge F - \frac{1}{3}A \wedge A \wedge A)$: YM Chern-Simon 3-form² (tr は $SO(32)$ の vector 表現について取る)) と得られている。しかし, Hetero 弦の低エネルギー有効理論では local Lorentz 不変性の要請から $H = dB + \omega_{3L} - \omega_{3Y}$ ($\omega_{3L} \doteq \text{tr}(A \wedge R - \frac{1}{3}A \wedge A \wedge A)$: Lorentz Chern-Simon 3-form³ (tr は $O(1,9)$ の vector 表現について取る)) と修正されねばならない。この時

$$dH = \text{tr}R \wedge R - \text{tr}F \wedge F, \quad \text{tr}F \wedge F = \frac{1}{30}\text{Tr}F \wedge F \quad (1.5)$$

となる。第2式で Tr は $SO(32)$ の adjoint 表現について取っている⁴。Hetero 弦の低エネルギー有効理論では, anomaly free な gauge 群として $E_8 \times E_8$ も可能であるが, これに関しても全く同じ関係式が得られる。

ここで話を元に戻して (1.1) ~ (1.4) を考える。以下 ϕ, H は M^6 の座標にしか依存せず, M^6 を境界の無い compact 多様体であると仮定する。

(1.1); ∇_ν を作用させて tetrad posturate ($\nabla_\mu\gamma_\nu = 0$) を用いると $0 = \nabla_\mu\nabla_\nu\epsilon + \frac{\sqrt{2}}{32}e^{2\phi}(\gamma_\nu\gamma_5 \otimes H)\nabla_\mu\epsilon = \nabla_\mu\nabla_\nu\epsilon + \frac{e^{4\phi}}{2(16)^2}(\gamma_\nu\gamma_\mu \otimes H^2)\epsilon$. 故に $\frac{1}{4}R_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^{\rho\sigma}\epsilon = [\nabla_\mu, \nabla_\nu]\epsilon = \frac{e^{4\phi}}{(16)^2}(\gamma_{\mu\nu} \otimes H^2)\epsilon$ となる。 $\mathcal{M}^{1,3}$ を maximally symmetric spacetime と仮定したので $R_{\mu\nu\rho\sigma} = \kappa(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho})$ を用いることによって, $\frac{1}{2}\kappa\gamma_{\mu\nu}\epsilon = \frac{e^{4\phi}}{(16)^2}(\gamma_{\mu\nu} \otimes H^2)\epsilon$. ここで $\mu \neq \nu$ に対して $\gamma_{\mu\nu}$ は非退化なので,

$$H^2\epsilon = (16)^2 e^{-4\phi} \frac{1}{2}\kappa\epsilon \quad (1.6)$$

¹ $H^\dagger = H_{ijk}(\gamma^{ijk})^\dagger = H_{ijk}\gamma^{kji} = -H$, $H_i^\dagger = H_{ijk}(\gamma^{jk})^\dagger = H_{ijk}\gamma^{kj} = -H_i$ より H, H_i は anti-hermitian.

² $\text{tr}F \wedge F = d\omega_{3Y}$.

³ $\text{tr}R \wedge R = d\omega_{3L}$.

⁴ $SO(N)$ の generator は vector 表現で $T_{ab} (= -T_{ba})$ とすると, adjoint 表現では $T_{ab,cd} \doteq \frac{1}{2}(T_{ac}\delta_{bd} - T_{bc}\delta_{ad} - T_{ad}\delta_{bc} + T_{bd}\delta_{ac})$ で与えられる。これらを用いると $\text{Tr}F \wedge F = (N-2)\text{tr}F \wedge F$ が得られる。

を得る. しかるに H は anti-hermitian なので固有値は必ず純虚数であり, 故に H^2 の固有値は 0 以下となる.

$$\therefore \kappa \leq 0. \quad (1.7)$$

(1.3); 2乗の作用および (1.6) を用いることによって,

$$\frac{\sqrt{2}}{8} e^{2\phi} \{\gamma^i \nabla_i \phi, H\} \epsilon = -2(\nabla_i \phi \nabla^i \phi + \kappa) \epsilon. \quad (1.8)$$

ここで, (1.8) の左辺は anti-hermitian なので固有値は純虚数. 一方右辺は実固有値となっているので,

$$\nabla_i \phi \nabla^i \phi = -\kappa \geq 0. \quad (1.9)$$

ところで ϕ は M^6 の関数であり M^6 を境界の無い compact な多様体であると考えているので, ϕ は M^6 のどこかで必ず最大値, 最小値を取る. 故に (1.9) において右辺が定数である事から

$$\partial_i \phi = 0, \quad \kappa = 0 \quad (1.10)$$

を得て, $\mathcal{M}^{1,3}$ は flat Minkowski 空間となる事が分かる. 故に (1.3) より次を得る.

$$H \epsilon = 0. \quad (1.11)$$

(1.2); (1.11) より

$$\tilde{\nabla}_i \epsilon \doteq \nabla_i \epsilon - \beta H_i \epsilon = 0, \quad (\beta \doteq \frac{3}{8} \sqrt{2} e^{2\phi}). \quad (1.12)$$

ここで $\tilde{\nabla}_i$ は torsion 入りの共変微分を与えている.

10次元 spinor の分解

ここで compact 多様体 M^6 の topology を議論するために 10次元 spinor の分解を考える. 以上で扱った ϵ は Majorana-Weyl a -number spinor であり, この spinor は $4D$ a -number Weyl spinor ξ と $6D$ c -number Weyl spinor η を用いて $16 = (2, 4) \oplus (2', \bar{4})$ と分解出来る. (0.4 節の Berger's table も参照.)

$$\epsilon_{\alpha\Lambda} = \xi_\alpha \eta_\Lambda \in (2, 4).$$

以下では, このように 4次元 chiral 分解された 6次元の c -number spinor を考える.

M^6 の topology

まず (1.12) より $\nabla_i(\eta^\dagger \eta) = 0$ となるので, η の規格化を考慮して $\eta^\dagger \eta = 1$ とする事が出来る. ここで,

$$J_i^j \doteq -i \eta^\dagger \gamma_i^j \gamma \eta \quad (1.13)$$

を定義すると, これは $J_i^j J_j^k = -\delta_i^k$ を満たす⁵ので, この J は複素構造を与えている. またこの時 metric G_{ij} は hermitian metric となる ($J_i^k J_j^l G_{kl} = G_{ij}$). さらに (1.13) は複素構造を定義する. それには Nijenhuis tensor $N_{ij}^k = J_i^l \nabla_{[l} J_j^k] - J_j^l \nabla_{[l} J_i^k] = 0$ が必要十分条件で, これを示せばよい. (1.12) を使って $\nabla_i J_{kl}$ を計算すると,

$$\nabla_i J_{kl} = -4\beta H_{j[i} J_{l]}^j \quad (1.14)$$

⁵(略証): まず Firtz 変換を用いて, $J_i^j J_j^k = -(\eta^\dagger \gamma_i^j \gamma \eta)(\eta^\dagger \gamma_j^k \gamma \eta) = -\frac{1}{4} \sum_A (\eta^\dagger \gamma_i^j \gamma \gamma_A \gamma_j^k \gamma \eta)(\eta^\dagger \gamma^A \eta)$ に注意する. (係数 $1/4$ は 4次元の spinor 空間から出ている. $16 = (2, 4) \oplus (2', \bar{4})$ ここで $\gamma^A = I, \gamma^i, i\gamma^{ij}, i\gamma^{ijk}, \gamma^{ijkl}, \gamma^{ijklm}, i\gamma^{ijklmn}$ である ($(\gamma^A)^2 = 1$)). そこで, c -number spinor η と $(\gamma^i)^T = -\gamma^i$ に注意すると, A の和で残るのは $\gamma^A = I, i\gamma^{ijk}, \gamma^{ijkl}$ だけとなる. さらに, $J_i^j J_j^k = -\frac{1}{4} \{(\eta^\dagger \gamma_i^j \gamma_j^k \eta)(\eta^\dagger \eta) + (\eta^\dagger \gamma_i^j \gamma^{lmn} \gamma_j^k \eta)(\eta^\dagger \gamma_{lmn} \eta) - (\eta^\dagger \gamma_i^j \gamma^{lm} \gamma_j^k \eta)(\eta^\dagger \gamma_{lm} \eta)\}$ と変形しておく. 一方で Firtz 変換を用いて, $J_i^j J_j^k = -\frac{1}{4} \sum_B (\eta^\dagger \gamma_i^j \gamma_B \gamma_j^k \eta)(\eta^\dagger \gamma^B \eta)$ のように展開する事もできて, 上と同様に考えると B の和で残るのは $\gamma^B = \gamma, i\gamma^{ijk}, i\gamma^{ij}$ だけとなる. そこで, これを上で変形した形と比較する事によって, $\gamma^A = i\gamma^{ijk}$ の和も消える事が分かる. 後は, 残った $\gamma^A = I, \gamma^{ijkl}$ を具体的に評価すれば良い.

となって、これを用いることにより $N_{ij}^k \propto \eta^\dagger \{H, \gamma_{ij}^k\} \eta$ が示されるので (1.11) によって Nijenhuis tensor が 0. 故に M^6 はエルミート計量を持つ複素多様体となる. さらに (1.11) を用いると, $0 = \eta^\dagger H \gamma^i \gamma \eta = 6\eta^\dagger H^i \gamma \eta$ が示される. これと (1.14) を用いると $\nabla^k J_k^l = -4\beta H_{jk}^{[k} J^{l]j} = 4i\beta \eta^\dagger H^l \gamma \eta = 0$, すなわち

$$\nabla^k J_k^l = 0 \quad (1.15)$$

が示されて、このような多様体を semi-Kähler 多様体という.

以下では簡単の為, $H = 0$ とした古典解を議論する. 実際には $H \neq 0$ の議論も行われているが, それらの議論の出発点も全て以下の古典解が基本となっている ([14, 15] など).

まず (1.12) より M^6 上に covariantly constant spinor が存在する.

$$\nabla_i \eta = 0. \quad (1.16)$$

この事と (1.13) より $\nabla_i J_j^k = 0$ となるので, M^6 は Kähler 多様体である. さらに (1.16) から $R_{ijkl} \gamma^{kl} \eta = 0$ が分かる. これに γ^j を作用させると $R_{ij} \gamma^j \eta = 0$ を得て, さらに $\eta^\dagger \gamma^k$ を作用させると

$$R_{ij} = 0 \quad (1.17)$$

を得る. このように covariantly constant spinor の存在から M^6 が Calabi-Yau 多様体であることが言える. ここまでの議論は (1.5) を除けば, Hetero 型に限らず Type II の弦でもできる事に注意しておく.

1.1.2 Holonomy 群, Yau の定理, Hodge diamond (一般論)

以下 Calabi-Yau 多様体について考える時, その多様体は常に既約かつ単連結であると仮定する.

◦ 実 $2m$ 次元の単連結 compact 多様体 K から出発する. この時多様体上の vector を可縮な loop に沿って一周した時, その vector のずれを生成する群⁶を holonomy 群と言ひ, 一般的にこれは $O(2m)$ に含まれて, さらに多様体に向き付けがあれば $SO(2m)$ に簡約化される. ここで, この多様体上に複素構造が定義されていて, かつ複素構造が平行移動で不変な ($\nabla_i J = 0$) Kähler 多様体の場合, この holonomy 群は $U(m)$ へと簡約化される⁷. 逆にこのような holonomy 群に含まれる多様体は Kähler 多様体となる. さらに Ricci flat な多様体, 即ち $K = CY^m$ (Calabi-Yau m -fold) の場合, その holonomy 群は spin connection の $U(1)$ 部分が消えてしまう為に holonomy 群は $SU(m)$ に簡約化される. 逆に holonomy 群が $SU(m)$ に含まれるような多様体は CY^m となる. ところで Yau の定理から, CY^m には Ricci flat な metric が常に存在する事が分かる.

◦ そこで Yau の定理について述べる [16, 17]. 複素 m 次元 compact Kähler 多様体 K を考える. この時多様体上の metric $G_{I\bar{I}}$ を用いて Ricci tensor $R_{I\bar{I}} = -\partial_I \partial_{\bar{I}} \ln \det G$ が定義される. これを用いて Ricci form $Ric(\omega) = iR_{I\bar{I}} dz^I \wedge d\bar{z}^{\bar{I}}$ (ω : Kähler form) が定義できて, これは cohomology 同値なものを同一視すれば $2\pi C_1(K)$ (first Chern class) に他ならない. この時, 次の事が Calabi により予想され Yau によって示された.

Fact 1.1 (Yau の定理)

K : compact Kähler 多様体 $C_1(K) \leq 0 \Rightarrow$ Kähler form の cohomology class を固定すると
Kähler-Einstein metric が唯 1 つ存在.

ここで metric G が Kähler-Einstein metric であるとは, $Ric(\omega) = c\omega$ なる c (const) が存在するような metric の事である. ($c > 0, c = 0, c < 0$ はそれぞれ正曲率, Ricci flat, 負曲率に対応する.) この定理から CY^3 には Ricci flat な Kähler-Einstein metric が, cohomology 同値を除いて一意的に存在する事が言える.

◦ ここで Calabi-Yau 多様体の定義に関して次の事実は有用である.

⁶この群は Wilson Loop $U = P \exp \int_\gamma \omega dx$, (P : 順序積, γ : loop, ω : spin connection) によって表現できる.

⁷ K 上の 1-form $A^1(K) \ni \omega = a_i dx^i = a_I dz^I + a_{\bar{I}} d\bar{z}^{\bar{I}}$, すなわち a_i が holomorphic, anti-holomorphic な成分に分離.

と簡単化する. (1.19), (1.20) を満足して, CY^3 の Ricci flat 条件と矛盾しない background gauge field A は, gauge 群の部分群 $SU(3)$ を多様体上の $SU(3)$ spin connection ω と同一視して,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix}, \quad (\omega : \text{spin connection}) \quad (1.21)$$

で与えると良い事が分かる. この時 Hetero 弦の gauge 対称性 $SO(32)$ または $E_8 \otimes E_8$ は, 次のような部分群の対称性に破れる.

$SO(32)$ の場合; この時, 極大部分群 $SU(3) \otimes SO(26) \otimes U(1)$ のように破れるが, 現象論的に扱いにくいので, 以下で考える群は全て $E_8 \otimes E_8$ とする.

$E_8 \otimes E_8$ の場合; ここでは片方の E_8 だけに注目する. その極大部分群は $SU(3) \otimes E_6 (\subset E_8)$ で, E_8 の adjoint 表現は $248 = (8, 1) \oplus (3, 27) \oplus (\bar{3}, \bar{27}) \oplus (1, 78)$ と既約分解される. ここで $SU(3)$ の 2 次の Casimir を考えると⁸, その値は表現 $(8, 1)$ と $(3, 27), (\bar{3}, \bar{27})$ でそれぞれ $3 \oplus \bar{3}$ 表現の 3 倍と 27 倍になっているので, 上で与えた解は確かに (1.20) を満たしていることが分かる.

† Generation Counting

超弦理論から massless の 10 次元 Dirac 方程式は, $\Gamma^M D_M \psi = \gamma^\mu D_\mu \psi + \gamma^i D_i \psi = 0$ である. よって ψ が $\mathcal{M}^{1,3}$ 上で massless である為には $\gamma^i D_i \psi = 0$ でなければならない. 即ち, M^6 上の Dirac 方程式の 0-mode の数が $4D$ での massless fermion の数になる. また, ψ は 16 次元の Weyl fermion なので $\gamma_5 \psi = \gamma \psi$ となって, $4D$ と $6D$ の fermion の chirality は一致する. よって, $\mathcal{M}^{1,3}$ 上の chirality が left と right の massless fermion の数 n^L, n^R は M^6 上のそれらと一致する. 故に世代数 $|n^L - n^R|$ は, M^6 上の Dirac 方程式の 0-mode の数によって, 即ち Dirac index を計算する事によって得られる. 具体的には $M^6 = CY^3$ の時, E_8 の adjoint 表現の fermion ψ は部分群 $SU(3) \otimes E_6$ の表現 $(8, 1) \oplus (3, 27) \oplus (\bar{3}, \bar{27}) \oplus (1, 78)$ に分解し, chiral fermion は $(3, 27) \oplus (\bar{3}, \bar{27})$ 表現で現れる. そこで $(3, 27)$ 表現の chiral fermion の 0-mode の数は, CY^3 上における $SU(3)$ の 3 表現の Dirac index として与えられる. 即ち $index D_3 = n_{27}^L - n_{27}^R$.

そこで, これを求める為に CY^3 上の spin complex ($SO(6) \simeq SU(4)$) を考える. まず, その上の Dirac operator D_4 とその adjoint D_4^\dagger から指数 $index D_4 \doteq dim(Ker D_4) - dim(Ker D_4^\dagger)$ が定義できる. これを $SU(3)$ で分解して $(4 \oplus \bar{4} = (1 \oplus 3) \oplus (1 \oplus \bar{3}))$, 指数定理を用いると $\chi(CY^3) = index D_4 - index D_4^\dagger = (index D_3 + index D_1) - (index D_{\bar{3}} + index D_{\bar{1}}) = 2index D_3$ となるので上述と合わせて,

$$|n_{27}^L - n_{27}^R| = \frac{1}{2} |\chi(CY^3)| = |b^{1,1}(CY^3) - b^{2,1}(CY^3)| \quad (1.22)$$

が得られる. 故に世代数が CY^3 の topology から決まる事が分かる.

† Heterotic Spectrum [2]

$4D$ における massless 粒子の数は以下のようにして CY^3 の Hodge number から決まってくる. (10 次元の Heterotic spectrum から出発する.)

G_{MN}, B_{MN}, ϕ ; 弱い重力場展開 $G_{MN} = g_{MN}^0 + h_{MN}$ ($|h| \ll 1$: fluctuation) を考える. $\phi_{MN} \doteq h_{MN} - \frac{1}{2} h g_{MN}^0$ ($h \doteq h_M^M$) として既約条件 $\partial_M \phi^{MN} = 0$ (添え字の上げ下げは g_{MN}^0 で行う) を課す. そうすると Einstein 方程式は $\square h_{MN} = \square_4 h_{MN} + \Delta_6 h_{MN} = 0$ となる. 故に $4D$ の massless particle が,

$$\square_4 h_{MN} = 0, \quad \Delta_6 h_{MN} = 0$$

によって与えられるので Kähler metric に関して $\Delta_6 h_{MN} = 0$ (調和関数) を満たす h_{MN} の数を考えることによって $4D$ の massless scalar の数が分かる. このような量は Hodge 数から以下のようにして分かる. h_{IJ} については (1,2)-form $\omega_{I\bar{J}\bar{K}}$ を用いると $h_{IJ} = \omega_{I\bar{K}\bar{L}} \epsilon_{JM\bar{N}} G^{M\bar{K}} G^{N\bar{L}}$ (ϵ : holomorphic 3-form). 故に $\Delta_6 h_{IJ} = 0$ と $\Delta_6 \omega_{I\bar{K}\bar{L}} = 0$ の解の数は等しい. $h_{\bar{I}\bar{J}}$ も同様にして,

$$\Delta_6 h_{IJ} = 0 \text{ の解の数} = b^{2,1} = \Delta_6 h_{\bar{I}\bar{J}} = 0 \text{ の解の数.}$$

⁸ T を $SU(N_c)$ の generator とすると 2 次の Casimir C は次で与えられる; $Tr T^a T^b = C \delta^{ab}$. (adjoint 表現では $C = N_c$, 基本表現では $C = 1/2$.)

* これは $4D$, $N = 1$ における $b^{2,1}$ 個の chiral multiplet を与える.

$h_{I\bar{J}}, B_{I\bar{J}}$ について見ると, $\Delta_6 h_{I\bar{J}} = 0$ の数 = $\Delta_6 B_{I\bar{J}} = 0$ の数 = $b^{1,1}$ から,

* これは $4D$, $N = 1$ における $b^{1,1}$ 個の chiral multiplet を与える.

* $h_{\mu i}, B_{\mu i}$ は $(1,0)$ -form または $(0,1)$ -form で, $b^{1,0} = 0$ より massless vector にならない.

* $B_{IJ}, B_{\bar{I}\bar{J}}$ は $(2,0), (0,2)$ -form で, $b^{2,0} = 0$ より massless scalar にならない.

* $\phi, B_{\mu\nu} \leftrightarrow a$ (axion)⁹ は, $b^{0,0} = 1$ で 1 個の chiral multiplet が得られる.

Gauge 場 $A_{M,a}$; 次に解 (1.21) の量子論的 fluctuation を考える. ここでは E_8 の片方だけを考慮して, その極大部分群 $SU(3) \otimes E_6$ で分解すると $248 = (8, 1) \oplus (3, 27) \oplus (\bar{3}, \bar{27}) \oplus (1, 78)$ となる. それぞれの表現の添え字を $X, I_x r, \bar{I}_x \bar{r}, Y$ とする. ここで $4D$ で得られる massless particle を考える. (以下では, $A_{I,a}$ について議論するが $A_{\bar{I},a}$ についても同様で, これらは複素対をなす.)

* $A_{I,X}$ は $(1,0)$ -form で, $b^{1,0} = 0$ より massless scalar にならない.

* $A_{I,I_x r}$ については h_{IJ} の時と同様にして, $A_{I,I_x r} = \omega_{I\bar{K}\bar{L}_x \bar{r}} \epsilon_{I_x r M N} G^{M\bar{K}} G^{N\bar{L}_x \bar{r}}$ と書けるので, これは E_6 の 27 表現で $b^{2,1}$ 個の chiral superfield を与える.

* $A_{I,\bar{I}_x \bar{r}}$ は $(1,1)$ -form で, E_6 の $\bar{27}$ 表現で $b^{1,1}$ 個の chiral superfield を与える.

* $A_{\mu,Y}$ は E_6 の adjoint gauge boson を与える.

* $A_{I,Y}, A_{\mu,X}, A_{\mu,I_x r}, A_{\mu,\bar{I}_x \bar{r}}$ については Hodge 数から求めることはできない.

Fermion; Fermion の zero mode の数は SUSY から決まる. 例として $\psi_I = h_{IK} \gamma^K \eta$, $\psi_{\bar{I}} = h_{\bar{I}\bar{K}} \gamma^{\bar{K}} \bar{\eta}$ (η : covariantly constant spinor) など.

1.1.4 Yukawa coupling

ここでは現象論を考える上で (そして Calabi-Yau 多様体の数理論を考えると) 重要になってくる Yukawa coupling について述べる [18, 1]. $4D$ における通常の場の理論では, Yukawa term は以下で与えられる.

$$\mathcal{L}_{Yukawa} = g_{(A)(B)(C)} \phi_{(A)}(x) \bar{\chi}_{(B)}(x) \chi_{(C)}(x). \quad (1.23)$$

ここで, $g_{(A)(B)(C)}$ の事を Yukawa coupling といい $(A), (B), (C)$ は世代を表す添え字である. (ϕ は scalar, χ は Weyl spinor.)

以下では, これを 10 次元 gauge E_8 相互作用項 $\mathcal{L}_{gauge} = \bar{\chi} \Gamma^M A_M \chi = \bar{\chi} \Gamma^M A_M^a \tau^a \chi$, (τ^a : E_8 の adjoint 表現の generator) の M^6 への compact 化によって導く. M^6 における gauge coupling が, $\mathcal{M}^{1,3}$ での Yukawa coupling になるので, この部分に着目すれば良い. 即ち $\mathcal{L}_{Yukawa} = \bar{\chi} \Gamma^i A_i^a \tau^a \chi$. ここで, 10 次元 spinor χ は $SO(1,3) \otimes SO(6) (\simeq SU(4))$ で $16 = (2, 4) \oplus (2', \bar{4})$ に分解するが, M^6 の CY^3 上への compact 化によって spin connection の $U(1)$ 部分が消えている為, それぞれの表現はさらに $SU(3) \otimes U(1)$ で分解される ($(2, 4) = (2, 3) \oplus (2, 1)$, $(2', \bar{4}) = (2', \bar{3}) \oplus (2', 1)$). 以下, 表現 $(2, 3)$ に着目すると Yukawa term で χ については $3 \otimes 3$ となっているので, これが singlet を形成する為には gauge field A_i の添え字 i は 3 表現部分となる. また, $SU(3)$ holonomy 群を E_8 に埋め込んだので E_8 adjoint 表現は $SU(3) \otimes E_6$ で分解されて $(8, 1) \oplus (3, 27) \oplus (\bar{3}, \bar{27}) \oplus (1, 78)$ となっており, その添え字を $a = (\alpha, r)$ と書くと

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Yukawa} &= (\Gamma^I)^{JK} A_I^{(\alpha,r)}(x,y) \bar{\chi}_J^{(\beta,s)}(x,y) \chi_K^{(\gamma,t)}(x,y) f_{\alpha r, \beta s, \gamma t}, \\ &(x \in \mathcal{M}^{1,3}, y \in CY^3, f_{\alpha r, \beta s, \gamma t} : E_8 \text{ の structure constant}). \end{aligned}$$

この時 E_6 の添え字 r, s, t は singlet を形成しなければならない. そのような量が得られる 3 重の tensor 積は $1^3, 27^3, \bar{27}^3, 1 \cdot 27 \cdot \bar{27}$ の 4 つしか無い. そこで d^{rst} を singlet への projection とすると $f_{\alpha r, \beta s, \gamma t} = d_{rst} \epsilon_{\alpha \beta \gamma}$ と分離出来て, ここから (1.23) における Yukawa coupling が得られる. 以下 $1^3, 1 \cdot 27 \cdot \bar{27}$ については CY^3 の

⁹ d 次元で p -form field A の dual field を考える. 即ち, dA : $(p+1)$ -form field strength の Hodge dual によって $\rightarrow dA^*$: $(d-p-1)$ -form field strength より A の dual field A^* は $(d-p-2)$ -form となる. massless theory の little group $SO(d-2)$ では, これらの field は同じ粒子状態を与える. 特に $d=4$ を考えると, 2-form field と 0-form field (スカラー) が同じ粒子状態を与える.

cohomology から得られないので 27^3 , $\overline{27}^3$ について述べる. 1.1.3 節で論じたように CY^3 上の chiral fermion と gauge field の 0-mode は, (2,3) 表現の調和関数 $\omega_{A,I}^\alpha(y)$ (A :以下で述べる non-trivial base) として現れる. そこで次のように 10 次元の spinor χ と gauge field A を 4 次元部分と 6 次元部分に分解する.

$$\chi_I^a(x, y) = \chi_A^r(x) \omega_{A,I}^\alpha(y), \quad A_I^a(x, y) = \phi_A^r(x) \omega_{A,I}^\alpha(y).$$

ここで, $\chi_A^r(x)$ は 4D Weyl spinor で $\phi_A^r(x)$ は 4D scalar である. \mathcal{L}_{Yukawa} の 27^3 , $\overline{27}^3$ 部分について CY^3 上で積分して $(\Gamma^I)^{JK} = \epsilon^{IJK}$ に注意すると, 結局次が得られる.

$$g^{rst} \doteq \phi_A^r(x) \bar{\chi}_B^s(x) \chi_C^t(x) \int_{CY^3} d^6 y \epsilon^{IJK} \omega_{A,I}^\alpha(y) \omega_{B,J}^\beta(y) \omega_{C,K}^\gamma(y) \epsilon_{\alpha\beta\gamma}. \quad (1.24)$$

$\overline{27}^3$; この時 $\alpha = \bar{I}_x$ であって, ω_{I^x} は (1,1)-form となるので Yukawa coupling は次で与えられる. ((1,1)-Yukawa coupling)

$$g_{ABC}(\overline{27}^3) = \int_{CY^3} \omega_A \wedge \omega_B \wedge \omega_C = \sharp(N_A, N_B, N_C), \quad (A, B, C = 1, \dots, b^{1,1}). \quad (1.25)$$

これは $\omega \rightarrow \omega + d\alpha$ の下で不変になっているので位相不変量を与え, intersection number と呼ばれている. それは Poincaré dual によって 4-cycle N に関する不変量に変換することによって, 右辺のように 3 つの 4-cycle の交点数を与えることができるからである. ところで量子効果を考慮すると Kähler 構造の変形に伴う instanton 効果による補正を加える必要がある (c.f. Nekrasov の計算). これについては, 4.1.2 節の topological A-model の相関関数 (Gromov-Witten invariant) のところで再び述べる.

27^3 ; この時 $\alpha = I_x$ であって¹⁰, Yukawa coupling は次の形で与えられる. ((2,1)-Yukawa coupling)

$$g_{ABC}(27^3) = \int_{CY^3} \Omega_{I_x J_x K_x} \omega_A^{I_x} \wedge \omega_B^{J_x} \wedge \omega_C^{K_x} \wedge \Omega \quad (\Omega^{IJK} = \epsilon^{IJK}, A, B, C = 1, \dots, b^{2,1}). \quad (1.26)$$

これは $\omega \rightarrow \omega + \bar{D}\alpha$ (\bar{D} : CY^3 上の共変微分) の下で不変になっており ($\because \bar{D}\omega = \bar{D}\Omega = 0$) 準位相不変量を与える (位相不変にはなっておらず複素構造の変形に依存している) が¹¹, (1,1)-Yukawa coupling の場合と違って量子論的な繰り込みを受けないことが知られている¹². この量は classical differential form の周期計算に帰着できて (c.f. Seiberg-Witten theory), それが厳密解を与える. これはちょうど topological B-model の計算 (4.1.3 節参照) に対応しており mirror 多様体へ map することによって (1,1)-Yukawa coupling に対する instanton 補正を厳密に求めることができる.

1.1.5 Type II Spectrum

1.1.3 節との関連で, Type IIA,B 理論を CY^3 に compact 化した時の spectrum について述べる [2]. これらの理論はもともと 10 次元で $N = 2$ の SUSY を持っていたので, CY^3 に compact 化すると 4 次元で $N = 2$ の SUSY を持つ理論になる. 4 次元, $N = 2$ の gauge 理論の spectrum には, vector multiplet と hyper multiplet が存在する (3.1 節参照). 以上を踏まえた上で spectrum を考える. (以下 boson の spectrum にだけ注目する.)

† Type IIA 理論

Boson は NS-NS (G_{MN}, ϕ, B_{MN}) と R-R (C_M, C_{LMN}) から成る. これを $M^{1,3} \times CY^3$ 上で分解する. CY^3 上の (1,1)-form は, $G_{I\bar{J}}, B_{I\bar{J}}, C_{\mu I\bar{J}}$ で与えられる. これらは 4D で, 2 つの real scalar と 1 つの $U(1)$ -vector とみなせるので, 次が得られる.

$$b^{1,1} \text{個の } U(1) \text{ vector multiplet.}$$

¹⁰ ω_{I^x} は Heterotic spectrum のところでやったようにして holomorphic 3-form を用いて, (2,1)-form に書き換える事ができる事に注意しておく.

¹¹ここで, ω_{I^x} は $T^{1,0}$ に値を取る (0,1)-form ω^{I^x} となっているので, (1.25) と違って (1.26) の不変性の為には共変微分を考えなければならない.

¹²1.2.1 節で述べるように, Kähler moduli は string scale に依存する ((1.28) 参照). 一方で complex moduli はこのような scale には依存しない.

一方 (2,1)-form を考えると, $G_{IJ}, G_{\bar{I}\bar{J}}$ と, $C_{IJ\bar{K}}, C_{\bar{I}\bar{J}K}$ で与えられて, これらは $4D$ では 2 つの complex scalar 対を構成する. また (0,0), (3,0)-form である $\phi, B_{\mu\nu}(\leftrightarrow a), C_{IJK}, C_{\bar{I}\bar{J}\bar{K}}$ も $4D$ では, 2 つの complex scalar 対を構成して, 次が得られる.

$$b^{2,1} + 1 \text{ 個の hyper multiplet.}$$

† Type IIB 理論

Boson は NS-NS (G_{MN}, ϕ, B_{MN}) と R-R (C, C_{MN}, C_{KLMN}) から成る. (ただし C_{KLMN} は self dual 条件を満たす.) (2,1)-form は, $G_{IJ}, G_{\bar{I}\bar{J}}, C_{\mu I\bar{J}\bar{K}}$ (self-duality から $C_{\mu\bar{I}\bar{J}K}$ は考えなくて良い) で与えられる. これらは $4D$ で, 2 つの real scalar と 1 つの $U(1)$ -vector とみなせるので, 次が得られる.

$$b^{2,1} \text{ 個の } U(1) \text{ vector multiplet.}$$

(1,1)-form は, $G_{I\bar{J}}, B_{I\bar{J}}, C_{I\bar{J}}, C_{\mu\nu I\bar{J}}$ ((2,2)-form である $C_{IJ\bar{K}\bar{L}}$ も, Hodge diamond によって (1,1)-form の粒子状態として勘定されるべきだが, 脚注 9 によりこれは $C_{\mu\nu I\bar{J}}$ と同じ粒子状態を与えるので考える必要はない.) で与えられる. これらは $4D$ では 2 つの complex scalar 対を構成する. また (0,0), (3,0)-form である $\phi, B_{\mu\nu}(\leftrightarrow a), C, C_{\mu\nu}(\leftrightarrow c)$ も $4D$ では, 2 つの complex scalar 対を構成して, 次が得られる.

$$b^{1,1} + 1 \text{ 個の hyper multiplet.}$$

これらの事から $4D$ の vector と hyper multiplet の数を見ると, A と B の理論で Hodge 数 $b^{1,1}, b^{2,1}$ が入れ替わっている事が分かる. これは Calabi-Yau 多様体の mirror 対称性そのものである¹³. 一方で A と B の理論は T -duality で結びついているのであったから, CY^3 の mirror 対称性 (Hodge 数の入れ替え) と CY^3 の T -duality (scale R と $1/R$ の入れ替え) には密接な関係がある事が分かる [3].

1.2 Calabi-Yau 多様体

1.2.1 Kähler 構造と複素構造

1.1.2 節から, CY^3 には 2 つの nontrivial な cohomology が存在する事が分かった. ここでは m 次元 Calabi-Yau 多様体についての考察からこれらの正体を述べる [1].

Kähler 構造:

1.1.3 節の Heterotic spectrum の議論と同じように, 複素構造を保った metric $G_{I\bar{J}}$ の fluctuation $\delta G_{I\bar{J}}$ を考える¹⁴. ただし Ricci flat 条件を破ってはならないものとする, 1.1.3 節でやったものと全く同じ計算によって $\delta G_{I\bar{J}}$ は調和関数でなければならない事が分かる. 故に, この Kähler 構造の変形の自由度の数は $b^{1,1}$ 個となる事が分かる.

複素構造:

次に複素構造 J の変形 $J_i^j \rightarrow J_i^j + \tau_i^j$ を考える. この時, 複素構造が存在しなければならないので, 条件 (I) $J_k^i J_j^k = -\delta_j^i$ と条件 (II) Nijenhuis tensor $N_{ij}^k = 0$ が要請される. 変形前に, 多様体上には複素構造が存在するので計算には $J_{\bar{I}}^I = i\delta_{\bar{I}}^I, J_{\bar{I}}^{\bar{I}} = -i\delta_{\bar{I}}^{\bar{I}}$ を用いると良い. すると (I) から $\tau_{\bar{I}}^I = \tau_{\bar{I}}^{\bar{I}} = 0$ となり, τ^I を $T^{1,0}$ に値を取る (0,1)-form と考えると, (II) より $\bar{\partial}\tau^I = 0$ が成り立つ. また, 座標系の無限少変換 $z^I \rightarrow \tilde{z}^I = z^I + \epsilon v^I(z, \bar{z})$ の下で¹⁵複素構造は変化しないので (これは patch の変換とは無関係), $\tau^I \rightarrow \tau^I + \epsilon \bar{\partial}v^I$ は自明な変換とみなされる. まとめて $\tau^I \in H_{\bar{0}}^1(CY^m, T^{1,0})$ となる事が言える. さらに CY^m 上の holomorphic m -form Ω を用いて, contraction $\tau_{I_1, \dots, I_{m-1}, \bar{I}} \doteq \Omega_{I_1, \dots, I_{m-1}, J} \tau_{\bar{I}}^J$ を行う事により, 複素構造の変形の自由度の数は $b^{m-1,1}$ 個となる事が分かる.

¹³ この事を象徴的に述べると, 0.4 節で述べた CY^3 の mirror 多様体 \widetilde{CY}^3 を考えた時,

CY^3 上に compact 化された IIA 理論 = \widetilde{CY}^3 上に compact 化された IIB 理論 となる.

¹⁴ 一方で $G_{IJ}, G_{\bar{I}\bar{J}}$ を変形させる事が, 以下の複素構造の変形となる.

¹⁵ この時 $J_j^i \rightarrow \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^I} \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^J} J_k^i$ と変換する.

CY^3 に戻って考えると $b^{1,1}$ と $b^{2,1}$ はそれぞれ Kähler 構造と複素構造に関係している事が分かった。

さらに $M = CY^3$ の Kähler 構造と複素構造の moduli 空間について述べておく [19].

Kähler moduli;

まず, 反対称 tensor の B -場を導入して complexified Kähler form $\omega \doteq J + iB = \omega^A e_A$ を定義する. ここで, e_A ($A = 1, \dots, b^{1,1}$) は $H^{1,1}(M)$ の cohomology base で, ω^A は Kähler form の変形 parameter である. これを座標とする moduli 空間を考える. ここで天下りの的ではあるが, この Kähler moduli 空間には $H^{1,1}(M) \ni \rho, \sigma$ の内積が次の形で入っている.

$$G(\rho, \sigma) \doteq -3 \left(\frac{\kappa(\rho, \sigma, J)}{\kappa(J, J, J)} - \frac{3 \kappa(\rho, J, J) \kappa(\sigma, J, J)}{2 \kappa^2(J, J, J)} \right), \quad \kappa \doteq \int_M \rho \wedge \sigma \wedge \tau. \quad (1.27)$$

ここで κ は 1.1.4 節で述べた intersection number である. (1.27) を用いる事によって, Kähler moduli 空間の metric が次のように定義できる.

$$G_{A\bar{B}} \doteq \frac{1}{2} G(e_A, e_B) = -\frac{\partial}{\partial \omega^A} \frac{\partial}{\partial \bar{\omega}^B} \ln \kappa(J, J, J). \quad (1.28)$$

ここで, $e_A = 2\partial J / \partial \omega^A = 2\partial J / \partial \bar{\omega}^A$ である事を用いた. 故に Kähler moduli 空間は Kähler 多様体であって, かつその Kähler potential は多様体 M の volume form $\kappa(J, J, J)$ から与えられる事が分かり, その為 Kähler moduli は Kähler 構造に依存する. この事と string theory の無次元の展開 parameter α'/r^2 とから, Kähler moduli が string scale α' に依存する事が分かる.

Complex moduli;

3.1 節で述べる Seiberg-Witten theory の議論の背後には, 本質的に $N = 1$ vector multiplet のなす special geometry の構造が存在している. そして以下で述べる complex moduli 空間の構造は, special geometry と呼ばれているものである. まず $H^{2,1}(M)$ の元 χ_r を, 複素構造の変形 parameter ψ^r ($r = 1, \dots, b^{2,1}$) を導入して以下のように与える.

$$\chi_r \doteq \frac{1}{2} \chi_{rI\bar{J}\bar{K}} dx^I \wedge dx^J \wedge d\bar{x}^{\bar{K}}, \quad \chi_{rI\bar{J}\bar{K}} \doteq -\frac{1}{2} \Omega_{I\bar{J}}^{\bar{L}} \frac{\partial G_{\bar{L}\bar{K}}}{\partial \psi^r}. \quad (1.29)$$

この変形 parameter ψ^r を座標とする complex moduli 空間の metric は $G_{r\bar{s}} = -(\int_M \chi_r \wedge \bar{\chi}_s) / (\int_M \Omega \wedge \bar{\Omega})$ となる事が知られている. ここで Ω は holomorphic 3-form であるが, これの ψ^r による変化を考える. それに伴って CY^3 の座標は, $x^i \rightarrow y^i(x, \psi)$ のように変換される. Ω を一般的な形 $\Omega = \frac{1}{3!} f(y) \epsilon_{IJK} dy^I \wedge dy^J \wedge dy^K$ で定義して, これを ψ^r で微分すると $\partial \Omega / \partial \psi^r = \frac{1}{3!} (\partial f(y) / \partial \psi^r) \epsilon_{IJK} dy^I \wedge dy^J \wedge dy^K + \frac{1}{2} f(y) \epsilon_{IJK} dy^I \wedge dy^J \wedge (\partial dy^K / \partial \psi^r)$ となる. 特に第 2 項は vector の変形なので (1,0)-form と (0,1)-form の混ざったものになる. もう少し正確に評価すると, この (0,1)-form の部分は (1.29) で定義した形になることが分かるので結局次が成り立つ.

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \psi^r} = K_r \Omega + \chi_r, \quad \left(\frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial \bar{\psi}^s} = \bar{K}_s \bar{\Omega} + \bar{\chi}_s \right). \quad (1.30)$$

これを用いると直ちに分かるように, 上に書いた complex moduli の metric は次のようになる¹⁶.

$$G_{r\bar{s}} = -\frac{\partial}{\partial \psi^r} \frac{\partial}{\partial \bar{\psi}^s} \ln \left(i \int_M \Omega \wedge \bar{\Omega} \right). \quad (1.31)$$

ここで周期行列の理論を展開する [20]. まず $H_3(M, \mathbb{Z})$ の symplectic base A^r, B_r ($r = 0, 1, \dots, b_{2,1}$) とそれらの dual base α_r, β^r を考える. 常に次のような base が取れる¹⁷.

$$\int_{A^s} \alpha_r = \int_M \alpha_r \wedge \beta^s = \delta_r^s, \quad \int_{B_r} \beta^s = \int_M \beta^s \wedge \alpha_r = -\delta_r^s. \quad (1.32)$$

¹⁶故に complex moduli 空間も Kähler 多様体となる.

¹⁷任意に 2 つの異なる symplectic base を取る. この 2 つの base は, symplectic 群

$Sp(b_{2,1} + 1, \mathbb{Z}) = \{M \in GL(2b_{2,1} + 2, \mathbb{Z}) | M^t J M = J\}$ によって移り変わる. ここで $J = \begin{pmatrix} 0 & I_{b_{2,1}+1} \\ -I_{b_{2,1}+1} & 0 \end{pmatrix}$ である.

今, 次のようにして (3,0)-form Ω の周期積分を定義する.

$$\psi^r \doteq \int_{A^r} \Omega, \quad \mathcal{F}_r \doteq \int_{B_r} \Omega. \quad (1.33)$$

この時, 局所的に complex moduli 空間は座標 ψ^r によって parametrize できる事が知られており, 一般的に全ての ψ^r が 0 になる事は有り得ない事も示されるので, これを複素射影空間 $\mathbb{P}^{b_{2,1}}$ の座標として考える事ができる. Dual base (1.32) を用いると, (1.33) より Ω は $\Omega = \psi^r \alpha_r - \mathcal{F}_r(\psi) \beta^r$ と展開できる. ここで (1.30) が成り立つので, $\int_M \Omega \wedge \partial \Omega / \partial \psi^r = 0$. これに上述の Ω の展開式を代入すると, (1.32)(1.33) を使って $\mathcal{F}_r(\psi) - \psi^s \partial \mathcal{F}_s / \partial \psi^r = 0$ が得られる. これから $2\mathcal{F}_r = \partial(\psi^s \mathcal{F}_s) / \partial \psi^r$ が得られるので, 次のような \mathcal{F}_r の prepotential と呼ばれる量 \mathcal{F} が定義される.

$$\mathcal{F} \doteq \frac{1}{2} \psi^r \mathcal{F}_r \longrightarrow \mathcal{F}_r = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \psi^r}, \quad \mathcal{F}(\lambda \psi) = \lambda^2 \mathcal{F}(\psi), \quad (\lambda \neq 0). \quad (1.34)$$

この prepotential を用いる事により, (2,1)-Yukawa coupling (1.26) は, $\partial_r \partial_s \mathcal{F}_t = \partial_r \partial_s \partial_t \mathcal{F}$ に注意して次のように書ける. ((1.30) の上の議論を繰り返すと良い.)

$$g_{rst}(27^3) \propto \int_M \frac{\partial^3 \Omega}{\partial \psi^r \partial \psi^s \partial \psi^t} \wedge \Omega = -\frac{\partial^3 \mathcal{F}}{\partial \psi^r \partial \psi^s \partial \psi^t}. \quad (1.35)$$

実は Kähler moduli 空間でも prepotential が定義できて, (1,1)-Yukawa coupling に対して (1.35) と同じ形を得る事ができる. そこで, これらに対応させる map が mirror 写像と言われるものとなる. また, (1.31) の Kähler potential は prepotential を使って簡単に書き換える事ができる.

$$i \int_M \Omega \wedge \bar{\Omega} = -2 \text{Im}(\mathcal{F}_r \bar{\psi}^r). \quad (1.36)$$

以上のような構造は, 第 3.1 節の Seiberg-Witten theory の厳密解の構成にとって本質的である.

1.2.2 代数幾何による Calabi-Yau 多様体の例

ここでは射影空間 $\mathbb{P}^n \ni (z^0 : z^1 : \dots : z^n)$ の¹⁸複素部分多様体 (Kähler 多様体の複素部分多様体は Kähler 多様体になる事に注意) として代数的に CY^3 の構成を行う [21, 22].

まず \mathbb{P}^n 上で d_1, \dots, d_k 次の斉次多項式 $f_1(z), \dots, f_k(z)$ の共通零点として, projective algebraic variety $M \doteq Y_{(n; d_1, \dots, d_k)}$ を定義する. 今 Jacobian $(\frac{\partial f_i}{\partial z^j})$ の階数を, M の任意の点で r とすると, これは non-singular な次元 $d = n - r$ の多様体を定義する (以下 $r = k$ の場合を考える). ここで Calabi-Yau 多様体を定義するために, M の total Chern class $C(M)$ について議論する. まず \mathbb{P}^n の total Chern class を考えると, 完全系列 $0 \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow H^{\oplus(n+1)} \rightarrow T(\mathbb{P}^n) \rightarrow 0$ (H : hyperplane line bundle) を得る. この時 C^∞ 分解 $H^{\oplus(n+1)} = T(\mathbb{P}^n) \oplus \mathbb{C}$ が得られ, Whitney の和公式 $C(E \oplus F) = C(E) \wedge C(F)$ を用いると $C(T(\mathbb{P}^n)) = C(H)^{n+1} = (1 + J)^{n+1}$ (J : \mathbb{P}^n での積分が 1 に規格化された \mathbb{P}^n の Kähler form) となる事が分かる. さらに m 次斉次多項式から得られる normal bundle N が $H^{\oplus m}$ によって与えられるので $C(N) = 1 + mJ$ となる. よって再び Whitney の和公式を用いる事により, M の total Chern class は次のようになる.

$$C(M) = \frac{(1 + J)^{n+1}}{(1 + d_1 J) \cdots (1 + d_k J)}. \quad (1.37)$$

故に first Chern class $C_1(M) = [(n + 1) - \sum_{i=1}^k d_i] J$ を得る. この事から, 3次元の projective variety $Y_{(k+3; d_1, \dots, d_k)}$ の first Chern class が消えて CY^3 になる為の条件として次が得られる.

$$\sum_{i=1}^k d_i = k + 4. \quad (1.38)$$

¹⁸これは Fubini-Study metric

$$ds^2 = 2 \sum \frac{\partial^2 \ln(1 + \sum |z^I|^2)}{\partial z^J \partial \bar{z}^K} dz^J d\bar{z}^K$$

を持つ Kähler 多様体である.

\mathbb{P}^n 上で 1 次の斉次多項式を 0 とする事によって得られる部分空間は, 単に \mathbb{P}^{n-1} となって trivial なので, $d_i \geq 2$ を考えると (1.38) より $k = 1 \Rightarrow d_1 = 5 \rightarrow Y_{(4;5)}$, $k = 2 \Rightarrow d_1 + d_2 = 6 = 2 + 4 = 3 + 3 \rightarrow Y_{(5;2,4)}$, $Y_{(5;3,3)}$, $k = 3 \Rightarrow d_1 + d_2 + d_3 = 7 = 2 + 2 + 3 \rightarrow Y_{(6;2,2,3)}$, $k = 4 \Rightarrow d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 8 = 2 + 2 + 2 + 2 \rightarrow Y_{(7;2,2,2,2)}$ の 5 つの代数的 Calabi-Yau 3fold が得られる. そこでこれらの多様体の位相的性質を議論する. まずこれらの多様体は non-singular なものを考える限りは連結なので $b^{0,0} = 1$ であり, 単連結性は仮定するので $b^{0,1} = 0$ となる. また \mathbb{P}^n の Kähler form は unique に決まっているので (Fubini-Study), $b^{1,1} = 1$ となる. 後は (I) Euler 数 χ または (II) Hodge 数 $b^{2,1}$ が求まれば ((1.22) を参照), これらの多様体の位相構造のうち基本的な部分は理解できる. どちらも直接求める事ができて, 以下では quintic Calabi-Yau 多様体 $M = Y_{(4;5)}$ について考える.

(I) まず Euler 数について Gauss-Bonnet の定理の拡張として $\chi(M) = \int_M C_3(M)$ が成り立ち, この積分を計算する為に M の全空間 \mathbb{P}^4 への lifting を考える. 即ち M 上の積分を \mathbb{P}^4 上の積分に置き換えて, 積分領域の制限を与えるデルタ関数的な form として M の normal bundle の first Chern class を挿入すれば良い. 具体的には (1.37) を用いて $C_3(M) = -40J^3$, $C_1(N(M)) = 5J$ なので $\chi(M) = -40 \int_M J^3 = -40 \int_{\mathbb{P}^4} J^3 \wedge 5J = -200$ となり世代数 100, $b^{2,1} = 101$ が得られる.

(II) 次に $b^{2,1}$ を直接, 複素構造の変形から導出する [1]. 一般に 5 次の斉次多項式は

$\sum_{a+b+c+d+e=5} N_{abcde} (z^0)^a (z^1)^b (z^2)^c (z^3)^d (z^4)^e$ で表されるので, その係数 N_{abcde} に対応する変形の自由度がある. これを勘定すると ${}_5H_5 = {}_9C_5 = 126$ となって座標の取り方の自由度 (5 変数の線形変換の自由度 $5 \times 5 = 25$) を引くと, 複素構造の変形の自由度 101 が得られる. ただし, この方法ではもっと複雑な多様体に対する自由度の counting が複雑すぎて計算できない事を注意しておく. (それに, 一般的にはこのような counting で記述できないような複素構造の変形の自由度もあり得る事が知られている.)

このようにして, $\chi(Y_{(4;5)}) = -200$, $\chi(Y_{(5;2,4)}) = -176$, $\chi(Y_{(5;3,3)}) = -144$, $\chi(Y_{(6;2,2,3)}) = -144$, $\chi(Y_{(7;2,2,2,2)}) = -128$ が得られる. (以下の Proposition 1.1 を使うとすぐに求まる.)

次に別の例として complete intersection Calabi-Yau 多様体 (CICY) について述べる [23]. この多様体は複数個の射影空間の直積空間上で代数多項式によって定義され, 上で得た多様体の一般化となっている. まず F 個の直積射影空間 $X = \otimes_{a=1}^F \mathbb{P}^{n_a}$ ($n_a \geq 2$) を考えて, X 上で斉次多項式 $f_i(z)$, $i = 1, \dots, k$ の共通零点として代数多様体を定義する. ここで $f_i(z)$ の次数は, それぞれの \mathbb{P}^{n_a} の座標 z_a^A , $A = 0, 1, \dots, n_a$ について $\deg_a(f_i)$ とする. 簡単な為に Jacobian の rank を k とすると, この non-singular な多様体の次元は

$$d = \sum_{a=1}^F n_a - k \quad (1.39)$$

となる. ここで nowhere vanishing holomorphic d -form を以下のように定義する (Calabi-Yau の構成). まず始めに $(k+d)$ -form を $\mu \doteq \prod_{a=1}^F \mu_a$, $\mu_a \doteq \epsilon_{A_0 \dots A_{n_a}} z_a^{A_0} dz_a^{A_1} \wedge \dots \wedge dz_a^{A_{n_a}}$ で定義して, d -form $\Omega \doteq \int_{\Gamma} \frac{\mu}{f_1 \dots f_k}$ を構成する. ここで $\Gamma \doteq \gamma_1 \otimes \gamma_2 \otimes \dots \otimes \gamma_k$ で, γ_i は f_i^{-1} の極を周る 1-cycle である. この Ω は, scale 変換 $z_a^A \rightarrow \lambda_a z_a^A$ で不変ならば nowhere vanishing holomorphic d -form を与える. 故に

$$\sum_{i=1}^k \deg_a(f_i) = n_a + 1, \quad \sum_{a=1}^F \deg_a(f_i) \geq 2. \quad (1.40)$$

ただし 2 番目の不等式は trivial な多項式を除く為に付け加えた. よって (1.39) (1.40) より $k + d + F = \sum_{a=1}^F (n_a + 1) = \sum_{i=1}^k \sum_{a=1}^F \deg_a(f_i) \geq 2k$ を得て, $F + d \geq k$. これを使って, $F = 2F - F \leq \sum_{a=1}^F n_a - F = d + k - F \leq 2d$. 故に $F \leq 2d$ の制限が得られる (ただし, \mathbb{P}^1 の個数に制限は無い). 今は $d = 3$ を考えたいので結局 $F \leq 6$ となる. ここで特に $F = 1$ の場合に注目すると, (1.39), (1.40) から Calabi-Yau 条件 (1.38) が得られることに注意しておく.

この場合についても Euler 数の計算をするために, 上の (I) でやった議論の一般化を行う.

Proposition 1.1 (複素 3 次元 CICY の Euler 数)

上のように定義された複素 3 次元の CICY M の Euler 数は以下で与えられる.

$$\chi(M) = \frac{1}{3} \int_X ch_3(TM) \wedge \prod_{i=1}^k C_1(N_i). \quad (1.41)$$

ここで $ch_3(TM) = \sum_{a=1}^F (n_a + 1) J_a^3 - \sum_{i=1}^k C_1(N_i)^3$, $C_1(N_i) = \sum_{a=1}^F deg_a(f_i) J_a$: 多項式 f_i に対応する normal bundle の first Chern class ($J_a: \mathbb{P}^{n_a}$ での積分が 1 に規格化された \mathbb{P}^{n_a} の Kähler form) である.

Proof. まず上 (I) でやったように M の Euler 数は, Euler class $C_3(M)$ の $X (= \otimes_a \mathbb{P}^{n_a})$ への引き戻しとして計算される. $\chi(M) = \int_X C_3(M) \wedge \prod_{i=1}^k C_1(N_i)$. ここで $C_1(N_i)$ については, この節 (1.2.2 節) でやった議論から上で定義した値になる事が分かるので, 問題は $C_3(M)$ の値である. これを求める為に, 一般論として bundle E 上で Chern character $ch(E)$ と total Chern class $C(E)$ を考える;

$$ch(E) \doteq tre^J = \sum_l \frac{tr J^l}{l!} \doteq \sum_l \frac{ch_l(E)}{l!},$$

$$C(E) \doteq \det(1 + J) \doteq \sum_n C_n(E).$$

ここで, J は E 上の curvature 2-form である. 対角化 $J = diag(\lambda_1, \dots)$ を考える事により, Chern character $ch_l(E)$ と Chern class $C_n(E)$ の間の関係式を得る. 即ち, $C(X) = \det(1 + J) = 1 + \sum_m \lambda_m + \sum_{m>n} \lambda_m \lambda_n + \sum_{m>n>r} \lambda_m \lambda_n \lambda_r + \dots$ によって, 今必要な関係式として $ch_3(E) = \sum_m \lambda_m^3 = C_1(E)^3 - 3C_1(E)C_2(E) + 3C_3(E)$ を得る. ここで $E = TM$ とすると, $C_1(TM) = 0$ より $C_3(TM) = \frac{1}{3} ch_3(TM)$ を得る. $ch_3(TM)$ は, bundle の直和空間に関する公式 $ch(E \oplus F) = ch(E) + ch(F)$ を用いて, 次のように計算できる. まずこれを全空間 $X = \otimes_{a=1}^F \mathbb{P}^{n_a}$ に対して適用すると¹⁹ $ch(TX) = \sum_{a=1}^F [(n_a + 1)e^{J_a} - 1]$. よって $TX = TM \oplus N$ より $ch(TM) = ch(TX) - ch(N) = \sum_{a=1}^F [(n_a + 1)e^{J_a} - 1] - \sum_{i=1}^k e^{C_1(N_i)}$ となるので²⁰, これを展開すれば (1.41) で定義された $ch_3(TM)$ が得られる. ■

• この定理から複素 3 次元 CICY の Euler 数は 0 以下である事が分かる. ((1.40) を用いると ch_3 からは常に 0 以下の係数が出てくる.)

例を 1 つだけ上げておく (Tian-Yau space). これは $\mathbb{P}^3 \otimes \mathbb{P}^3$ 上に定義される 3 次元多様体で, (1.39) より 3 つの斉次多項式が必要となる. (1.40) よりこの 3 つの多項式の次数の和は, $\mathbb{P}^3 \otimes \mathbb{P}^3$ のそれぞれの座標に

ついて 4 でなければならない. 例として次のような多様体を考える.
$$\left[\begin{array}{c|ccc} & f_1 & f_2 & f_3 \\ \hline \mathbb{P}^3 & 1 & 3 & 0 \\ \mathbb{P}^3 & 1 & 0 & 3 \end{array} \right]$$

この表は f_1, f_2, f_3 がそれぞれ \mathbb{P}^3 の座標については 1 次, 3 次, 0 次, もう一方の \mathbb{P}^3 の座標については 1 次, 0 次, 3 次の斉次多項式であることを表す. これに (1.41) を用いると Tian-Yau space の Euler 数は -18 となる事が分かる. その他の例については [23] を参照.

ここで任意の compact 多様体 M に自由に作用する離散群 $G (\leftrightarrow M \ni z, G \ni g \neq I \Rightarrow g(z) \neq z)$ が存在すると, 商空間 $K \doteq M/G$ は多様体となって Euler 数は $\chi(K) = \chi(M)/n(G)$ ($n(G)$: 群 G の位数) で与えられる²¹. 故に Tian-Yau space に対して自由な離散群 \mathbb{Z}_3 で割り込むことによって, その空間の Euler 数は -6 となり 3 世代の model が得られる. ここで離散群での割り込みを実行したのだが, 一般的にはこれによってもともと単連結であった多様体が単連結でなくなる. この為に Heterotic compact 化では topological な効果が加わって (c.f. Aharonov-Bohm 効果), gauge 対称性 E_6 ((1.19) の解) の破れが起こる事に注意しておく.

¹⁹ \mathbb{P}^n についてこの節の始めに述べたように $H^{\oplus(n+1)} = T(\mathbb{P}^n) \oplus \mathbb{C}$ が成り立つことに注意.

²⁰ Normal bundle N に関して, Chern class の 2 次以降が消えているので $ch_k(N) = C_1(N)^k$ が成り立っている事に注意.

²¹ Gauss-Bonnet の定理を用いて Euler 数を積分形で考えた時, 自由に作用する離散群で割り込む効果は積分領域の同一視として達成される. 同一視される積分領域の数は群の位数の数だけ存在する.

1.2.3 Mirror 多様体

以上のようにして基本的な代数多様体から Calabi-Yau 多様体の例が, かなり多く得られたのだが残念ながらこのままだと mirror 対称性の具体例を与えるものが得られない. 歴史的にはまず, B.Greene と M.Plesser によって quintic $CY^3 = Y_{(4;5)}$ の \mathbb{Z}_5 軌道体化から mirror 多様体の family が構成された. 結果だけ引用すると次のようになる [24, 25];

$\mathbb{Z}_5 : z^I \mapsto (\alpha^r)^{N_I} z^I, (z^I = 0, \dots, 4), \alpha^5 = 1, r \equiv 0, 1, 2, 3, 4 \pmod{5}$ による quintic CY^3 の割り込みを行う.

群 $(N_0, N_1, N_2, N_3, N_4)$	$b^{2,1}$	$b^{1,1}$
	101	1
$\mathbb{Z}_5; (0, 0, 0, 1, 4)$	49	5
$\mathbb{Z}_5; (0, 1, 2, 3, 4)$ (I)	21	1
$\mathbb{Z}_5^2; (0, 1, 1, 4, 4) \times (0, 1, 2, 3, 4)$	21	17
$\mathbb{Z}_5; (0, 1, 1, 4, 4)$ (II)	17	21
$\mathbb{Z}_5^2; (0, 1, 3, 1, 0) \times (0, 1, 1, 0, 3)$	1	21
$\mathbb{Z}_5^2; (0, 1, 4, 0, 0) \times (0, 3, 0, 1, 1)$	5	49
$\mathbb{Z}_5^3; (0, 1, 2, 3, 4) \times (0, 1, 1, 4, 4) \times (0, 0, 0, 1, 4)$	1	101

この表から中間線を境にして, 上下の多様体の Hodge 数が入れ替わっている事が分かる. これだけでは良く分からないので具体的に (I),(II) について述べる. 基準となる多様体としては複素構造の変形の自由度を除いて, Fermat 多様体 $M (\sum_{i=0}^4 (z^i)^5 = 0)$ を考えると良い.

(I); これは M に自由に作用しているので, Euler 数は $\chi = -200/5 = -40$ で $b^{1,1}$ の数は original な Kähler form だけ 1 つなので $b^{2,1} = 21$ を得る.

(II); この場合は固定点集合が 2 つ存在しており (\mathbb{P}^1 における 5 次斉次式 $(z^1)^5 + (z^2)^5 = 0, (z^3)^5 + (z^4)^5 = 0$), この固定点の数は固定点集合の Euler 数から計算できて $\chi = 2 \int_{\mathbb{P}^1} 5J = 10$ 個²²となっており, まずはこれらの固定点を除いて \mathbb{Z}_5 で割る事にする. そうすると non-compact 多様体が出来上がって, first Chern 類を 0 に保ったまま compact にするために適切な line bundle (5 次の Hopf bundle: $C_1 = 0, \chi = 5$) を用いて, それぞれの固定点で blow up を実行する. よってこの多様体の Euler 数は $\chi = (-200 - 10)/5 + 5 \cdot 10 = 8$. この blow up を 1 点で実行するたびに Kähler form の変形の自由度が 2 (複素次元 1) ずつ増加する事が知られているので, $b^{1,1} = 1 + 2 \cdot 10 = 21$. 従って $b^{2,1} = 17$ が得られる.

同様にして (ただし, その他については固定曲線が現れるので Hodge 数の counting に注意する必要がある), 上のような表を得る事が出来る. さらに詳しくは [26] を参照.

²²直ぐに分かるが, この 10 個の固定点は $(0, 1, -\alpha^r, 0, 0), (0, 0, 0, 1, -\alpha^r)$ の 10 個である.

第2節 $D = 2, N = 2$ の理論 (World Sheet Approach)

この節の目的は, world sheet の理論から Calabi-Yau 多様体についての理解を得る事である [27, 25].

2.1 $N = 2$ SCFT の表現論と Mirror 対称性の発見

2.1.1 OPE と Algebra

通常の CFT における energy-momentum tensor $T(z)$ (以下 EM tensor と呼ぶ) は, conformal dimension (以下 Conf.dim と呼ぶ) が 2 で次のような operator product expansion (OPE) の関係式

$$T(z)T(\omega) = \frac{c/2}{(z-\omega)^4} + \frac{2T(\omega)}{(z-\omega)^2} + \frac{\partial_\omega T(\omega)}{z-\omega} + \dots \quad (2.1)$$

を満たす. ここで c は CFT の central charge である. Mode 展開 $T(z) \doteq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{L_n}{z^{n+2}}$ によって, (2.1) と等価な Virasoro 代数

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12}m(m^2-1)\delta_{m+n} \quad (2.2)$$

が得られる. ここで supercurrent $G(z)$ (Conf.dim= $\frac{3}{2}$) を導入して, (2.1) を拡大すると $N = 1$ の SCFT が得られる. 2 つの supercurrent G_1 と G_2 (ともに Conf.dim= $\frac{3}{2}$) を導入すれば $N = 2$ の SCFT が得られる. $N = 1$ との違いは 2 つの supercurrent を入れ替える対称性に付随して, $U(1)$ current $J(z)$ (Conf.dim=1) が存在することである¹. J と $G_{1,2}$ との OPE が対角化されるように $G^\pm \doteq \frac{1}{\sqrt{2}}(G_1 \pm iG_2)$ とすると, 次のような OPE の関係式を満たす.

$$\begin{aligned} T(z)T(\omega) &= \frac{c/2}{(z-\omega)^4} + \frac{2T(\omega)}{(z-\omega)^2} + \frac{\partial_\omega T(\omega)}{z-\omega} + \dots, \\ T(z)G^\pm(\omega) &= \frac{3/2}{(z-\omega)^2}G^\pm + \frac{\partial_\omega G^\pm}{z-\omega} + \dots, \\ T(z)J(\omega) &= \frac{J(\omega)}{(z-\omega)^2} + \frac{\partial_\omega J(\omega)}{z-\omega} + \dots, \\ G^+(z)G^-(\omega) &= \frac{2c/3}{(z-\omega)^3} + \frac{2J(\omega)}{(z-\omega)^2} + \frac{2T(\omega) + \partial_\omega J(\omega)}{z-\omega} + \dots, \\ J(z)G^\pm(\omega) &= \pm \frac{G^\pm(\omega)}{z-\omega} + \dots, \\ J(z)J(\omega) &= \frac{c/3}{(z-\omega)^2} + \dots. \end{aligned} \quad (2.3)$$

ここで mode 展開 $J(z) \doteq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{J_n}{z^{n+1}}$, $G^\pm(z) \doteq \sum_r \frac{G_r^\pm}{z^{r+\frac{3}{2}}}$ (NS-sector では $r \in \mathbb{Z} + 1/2$, R-sector では $r \in \mathbb{Z}$) によって, (2.3) と等価な $N = 2$ の super Virasoro 代数が得られる.

$$\begin{aligned} [L_m, L_n] &= (m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12}m(m^2-1)\delta_{m+n}, \\ [L_m, G_r^\pm] &= \left(\frac{m}{2} - r\right)G_{m+r}^\pm, \quad [L_m, J_n] = -nJ_{m+n}, \\ \{G_r^+, G_s^-\} &= 2L_{r+s} + (r-s)J_{r+s} + \frac{c}{3}\left(r^2 - \frac{1}{4}\right)\delta_{r+s}, \quad ((G_r^+)^\dagger = G_{-r}^-), \\ [J_m, G_r^\pm] &= \pm G_{m+r}^\pm, \quad [J_m, J_n] = \frac{c}{3}m\delta_{m+n}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

¹この $U(1)$ current を用いて EM tensor を $T'(z) = T(z) \mp 1/2\partial_z J(z)$ と定義し直すことで, $N = (2, 2)$ の理論は第 4 節で述べるような topological な理論に変わる. $-$ を取った場合を chiral twist, $+$ を取った場合を anti-chiral twist と言い, それぞれの twist によって新しく得られた理論は A-model, B-model と呼ばれる. この twist で代数の元の Conf.dim が, $h' = h \pm 1/2q$ (h : 元の Conf.dim, q : $U(1)$ charge) と変化するために, 例えば chiral twist を考えると supercurrent G^+ と G^- の Conf.dim がそれぞれ $3/2, 3/2$ から $1, 2$ に変化する. それぞれを z で積分することにより, scalar 的な supercharge (BRST charge Q), vector 的な supercharge b が定義できる. これを用いて導かれる重要な事は, 新しい EM tensor $T'(z)$ が BRST-exact になるということである [28](4.1 節参照).

2.1.2 表現論

以下, Type (2,2) SCFT を取り扱う. $N = 2$ の super Virasoro 代数 $\{L_n, G_r, J_n\}$ が (2.4) で与えられたので, Verma module $|\phi\rangle$ の上にそれらの表現論を構築する.

† NS Verma module V_{NS}

まずは NS sector を考える. $N = 2$ の super Virasoro 代数の primary state $|\phi\rangle \in V_{NS}$ は

$$L_0|\phi\rangle = h|\phi\rangle, \quad J_0|\phi\rangle = q|\phi\rangle, \quad (2.5)$$

$$L_n|\phi\rangle = 0, \quad G_{n-1/2}^\pm|\phi\rangle = 0, \quad J_n|\phi\rangle = 0, \quad (\forall n > 0) \quad (2.6)$$

で定義される. さらに, 次のように chiral 条件を課す事により, primary state を

$$G_{-1/2}^+|\phi\rangle = 0 \quad (\text{chiral state}), \quad (2.7)$$

または

$$G_{-1/2}^-|\phi\rangle = 0 \quad (\text{anti-chiral state}) \quad (2.8)$$

に制限出来る.

$(G_{1/2}^-)^\dagger = G_{-1/2}^+$ である事に着目すると, $\langle NS | \{G_{1/2}^\mp, G_{-1/2}^\pm\} | NS \rangle = \langle NS | (2L_0 \mp J_0) | NS \rangle \geq 0$ ($||NS\rangle|^2 \geq 0$). 故に, Conf.dim = h , charge = q の任意の state $|\phi\rangle \in V_{NS}$ について, $h \geq \pm q/2$ となり次が得られる.

$$h \geq |q|/2 \geq 0. \quad (2.9)$$

Proposition 2.1

$$|\phi\rangle : \text{chiral primary state} \iff h = q/2 (\geq 0) \iff G_{1/2}^-|\phi\rangle = G_{-1/2}^+|\phi\rangle = 0. \quad (2.10)$$

Proof. Chiral primary $\Rightarrow h = q/2$ は明らか.

$$h = q/2 \Leftrightarrow 0 = \langle \phi | \{G_{1/2}^-, G_{-1/2}^+\} | \phi \rangle = |G_{1/2}^-|\phi\rangle|^2 + |G_{-1/2}^+|\phi\rangle|^2 \Leftrightarrow G_{1/2}^-|\phi\rangle = G_{-1/2}^+|\phi\rangle = 0.$$

後は $G_{1/2}^-|\phi\rangle = G_{-1/2}^+|\phi\rangle = 0 \Rightarrow$ chiral primary を示せばよい.

まず $J_0 J_n|\phi\rangle = q J_n|\phi\rangle$, $L_0 J_n|\phi\rangle = (h - n) J_n|\phi\rangle$ より, $J_n|\phi\rangle$ は charge = q , Conf.dim = $h - n$ の state である. そこで (2.9) より, $n > 0$ に対して $q/2 = h > h - n \geq |q|/2$ となるので, (2.6) の 3 番目の式が成り立つ. 故に (2.6) の 3 番目の式と $G_{1/2}^-|\phi\rangle = G_{-1/2}^+|\phi\rangle = 0$ を用いると, $[J_m, G_r^\pm] = \pm G_{m+r}^\pm$ から逐次的に (2.6) の 2 番目の式を示すことができる. また, $r > 0, s > 0$ について (2.4) から $\{G_r^+, G_s^-\} = 2L_{r+s} + (r - s)J_{r+s}$ が成立する. これを使うと, (2.6) の 2 番目と 3 番目が示されているので 1 番目も示す事が出来る. ■

故に chiral primary state で $\{G_r^-, G_{-r}^+\} = 2L_0 - 2rJ_0 + \frac{c}{3}(r^2 - \frac{1}{4})$ の期待値をとると, $(2r - 1)h \leq \frac{c}{24}(2r - 1)(2r + 1)$ が得られ次が分かる.

$$\text{chiral primary} \Rightarrow (q/2 =) h \leq c/6. \quad (2.11)$$

Proposition 2.2 (cf. Hodge decomposition theorem)

Non-degenerate な NS Verma module V_{NS} の任意の元 $|\phi\rangle$, $((\text{Conf.dim}, \text{charge}) = (h, q))$ は

$$|\phi\rangle = |\phi_0\rangle + G_{-1/2}^+|\phi_1\rangle + G_{1/2}^-|\phi_2\rangle, \quad (|\phi_0\rangle : \text{chiral primary state}) \quad (2.12)$$

と分解される.

Proof. まずは, $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle \in V_{NS}$ として内積

$$N(|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle) \doteq |(\phi - G_{-1/2}^+|\psi_1\rangle - G_{1/2}^-|\psi_2\rangle)|^2$$

を考える. $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle$ をそれぞれ $(h-1/2, q-1), (h+1/2, q+1)$ の state に制限して V_{NS} の submodule を考える. そのような submodule は, non-degenerate な V_{NS} では有限の空間で定義されているので, そこに必ず $N(|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle)$ を minimize するような ψ_1, ψ_2 が存在する. それらを ϕ_1, ϕ_2 と置いて,

$$|\phi_0\rangle \doteq |\phi\rangle - G_{-1/2}^+|\phi_1\rangle - G_{1/2}^-|\phi_2\rangle$$

を考える. この $|\phi_0\rangle$ の内積は, $|\phi_0\rangle \rightarrow |\phi_0\rangle + G_{-1/2}^+|\epsilon_1\rangle + G_{1/2}^-|\epsilon_2\rangle$ で不変なので, $\langle\epsilon_1|G_{1/2}^-|\phi_0\rangle + \langle\epsilon_2|G_{-1/2}^+|\phi_0\rangle = 0$. 故に (2.10) によって $|\phi_0\rangle$ が chiral primary state である事が分かる. ■

さらに $|\phi\rangle$ が chiral state ならば, (2.12) を用いる事によって $0 = G_{-1/2}^+|\phi\rangle = G_{-1/2}^+G_{1/2}^-|\phi_2\rangle$. これより $0 = \langle\phi_2|G_{-1/2}^+G_{1/2}^-|\phi_2\rangle = |G_{1/2}^-|\phi_2\rangle|^2$ となるので, (2.12) の分解は次のようになる.

$$|\phi\rangle : \text{chiral} \Rightarrow |\phi\rangle = |\phi_0\rangle + G_{-1/2}^+|\phi_1\rangle. \quad (2.13)$$

† R Verma module V_R

R sector での primary state $|\phi\rangle \in V_R$ は

$$L_0|\phi\rangle = h|\phi\rangle, \quad J_0|\phi\rangle = q|\phi\rangle, \quad (2.14)$$

$$L_n|\phi\rangle = 0, \quad G_n^\pm|\phi\rangle = 0, \quad J_n|\phi\rangle = 0, \quad (\forall n > 0) \quad (2.15)$$

で定義される. NS sector との重要な違いは G_0^\pm の存在で, primary state に次のような条件

$$G_0^\pm|\phi\rangle = 0 \quad (\text{Ramond ground state}) \quad (2.16)$$

を課す事が出来る. (2.4) より, $\{G_n^+, G_n^-\} = 2L_0 \mp 2nJ_0 + \frac{c}{3}(n^2 - \frac{1}{4})$ が成立する. $n=0$ としてこれの期待値を考えると, 任意の Conf.dim = h の state $|\phi\rangle \in V_R$ について

$$h \geq \frac{c}{24} \quad (2.17)$$

が得られる. さらに Ramond ground state を考えると, (2.16) より

$$\text{Ramond ground state} \Leftrightarrow h = \frac{c}{24} \quad (2.18)$$

を得る. また Ramond ground state について, $n \neq 0$ で期待値を取ると次を得る.

$$\text{Ramond ground state} \Leftrightarrow |q| \leq c/6. \quad (2.19)$$

† Chiral Ring

ここでは chiral primary fields の operator algebra を議論する. Chiral primary field $\phi(z)$ は, 真空 $|0\rangle \in V_{NS}$ から chiral primary state $|\phi\rangle \in V_{NS}$ への mapping として $|\phi\rangle \doteq \phi(z)|0\rangle$ で定義される. よって $\phi(z)$ には, $|\phi\rangle$ と同じ Conf.dim = h_ϕ と charge = q_ϕ が付与される. Chiral primary field $\phi(z)$ と $\chi(z)$ の積を OPE を用いて次で定義する.

$$(\phi \cdot \chi)(z) \doteq \lim_{\omega \rightarrow z} \phi(\omega)\chi(z) \approx \lim_{\omega \rightarrow z} (z - \omega)^{h_\phi - h_\chi - h_\chi} \mathcal{O}(\omega). \quad (2.20)$$

OPE から単純に $q_\phi = q_\phi + q_\chi$ なので, (2.9) と (2.10) より $h_\phi \geq \frac{1}{2}(q_\phi + q_\chi) = h_\phi + h_\chi$ である. もし $\mathcal{O}(z)$ が chiral primary field ならば, この不等号が saturate して (2.20) より積は non-singular になる. 一方でもし $\mathcal{O}(z)$ が chiral primary field でなければ積は 0. しかるに (2.11) より, non-degenerate な空間では chiral primary state は有限個なので積 (2.20) によって chiral primary operator の有限環が定義され, これを chiral ring C と呼ぶ. Anti-chiral primary state についても, anti-chiral ring A が同様にして定義される. ここで left-, right-sector を考えると, 次のように実質的には 4 つの環が定義される.

$$(C, C) \quad , \quad (C, A) \quad , \quad (A, C) \quad , \quad (A, A).$$

ただし本質的には, この内の 2 つの環 (C, C) と (C, A) だけを考えるとよい.

2.1.3 Spectral flow と Mirror 対称性

まず supercharge の mode 展開の一般化を行う。

$$G^\pm(z) \doteq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{G_{n \pm a}^\pm}{z^{n \pm a + \frac{3}{2}}}, \quad (\text{複号同順}, a \in [0, 1)).$$

この時 $z = 0$ の周りの $U(1)$ 回転 $z \rightarrow e^{2\pi i} z$ によって, $G^\pm(e^{2\pi i} z) = -e^{\mp 2\pi i a} G^\pm(z)$ となり $a = 0$ (R-sector) の時は半周期的, $a = 1/2$ (NS-sector) の時は周期的になっている。

Proposition 2.3

$a \in [0, 1)$ を任意に選ぶ時, 別の代数構造が与えられるが, それらはすべて isomorphic.

Proof. 以下のように, 生成子 $\mathcal{O} = \{L_n, G_r^\pm, J_n\}$ から新しい生成子 $\mathcal{O}_\eta = \{L'_n, G_{r \pm \eta}^\pm, J'_n\}$ を定義しても, 同じ交換関係 (2.4) を満たす。

$$\eta \doteq a - 1/2, \quad L'_n \doteq L_n + \eta J_n + \frac{c}{6} \eta^2 \delta_n, \quad J'_n \doteq J_n + \frac{c}{3} \eta \delta_n, \quad G_{r \pm \eta}^\pm \doteq G_{r \pm \eta}^\pm. \quad (2.21)$$

故に, この map は isomorphic. ■

この isomorphism の unitary 表現 \mathcal{U}_η を考えて, V_η を \mathcal{U}_η により map された Verma module とすると,

$$\mathcal{U}_\eta : V_{NS} \rightarrow V_\eta, \quad \mathcal{O}_\eta = \mathcal{U}_\eta \mathcal{O} \mathcal{U}_\eta^{-1}.$$

この \mathcal{U}_η を η による spectral flow という。今, $V_\eta \ni |v_\eta\rangle$ について

$$L_0 |v_\eta\rangle = h_\eta |v_\eta\rangle, \quad J_0 |v_\eta\rangle = q_\eta |v_\eta\rangle$$

とすると, (2.21) を用いて

$$\begin{aligned} (h_\eta + \eta q_\eta + \frac{c}{6} \eta^2) |v_\eta\rangle &= L'_0 |v_\eta\rangle = \mathcal{U}_\eta L_0 \mathcal{U}_\eta^{-1} \mathcal{U}_\eta |v_0\rangle = h |v_\eta\rangle, \\ (q_\eta + \frac{c}{3} \eta) |v_\eta\rangle &= J'_0 |v_\eta\rangle = \mathcal{U}_\eta J_0 \mathcal{U}_\eta^{-1} \mathcal{U}_\eta |v_0\rangle = q |v_\eta\rangle \end{aligned}$$

となるので以下を得る。

$$h_\eta = h - \eta q + \frac{c}{6} \eta^2, \quad q_\eta = q - \frac{c}{3} \eta. \quad (2.22)$$

† Spectral flow の表現

上の \mathcal{U}_η は free boson ϕ ($i\phi(z)i\phi(\omega) = \ln(z - \omega) + \dots$) を用いて表現することができ, ここではそれについて述べる。まず $N = 2$ の $U(1)$ current は $J(z) = i\sqrt{\frac{c}{3}} \partial_z \phi(z)$ と表現できる。事実 OPE から, (2.3) の最後の式が直ちに確認できる。 $N = 2$ super Virasoro 代数の charge q を持つ任意の primary field は, Conf.dim h_χ の neutral field χ を使って $\mathcal{O}(z) \doteq \chi(z) \exp\left(iq\sqrt{\frac{3}{c}}\phi(z)\right)$ と書く事が出来る。この Conf.dim を計算すると $h = h_\chi + \frac{1}{2} \left(q\sqrt{\frac{3}{c}}\right)^2$ となる。ここで η を parameter とする unitary 表現 \mathcal{U}_η を $\mathcal{U}_\eta = \exp(-i\sqrt{\frac{c}{3}}\eta\phi)$ で定義すると,

$$\mathcal{O}_\eta(z) \doteq \mathcal{U}_\eta \mathcal{O}(z) \mathcal{U}_\eta^{-1} = \chi \exp\left(i\left(q - \frac{c}{3}\eta\right)\sqrt{\frac{3}{c}}\phi(z)\right)$$

となって, $\mathcal{O}_\eta(z)$ の Conf.dim と charge はそれぞれ $h_\eta = h_\chi + \frac{1}{2} \left(q\sqrt{\frac{3}{c}} - \eta\sqrt{\frac{c}{3}}\right)^2$, $q_\eta = q - \frac{c}{3}\eta$ となる事が分かる。故に (2.22) が確認できるので, ここで定義した \mathcal{U}_η は spectral flow の表現を与える。一般的に left-, right-sector を考えると, $\phi_L(z)$, $\phi_R(\bar{z})$ を用いて spectral flow は次のように表現される。

$$\mathcal{U}_\eta = \exp\left(-i\sqrt{\frac{c}{3}}\eta(\phi_L(z) - \phi_R(\bar{z}))\right) = \mathcal{U}_\eta^L \otimes \mathcal{U}_\eta^R. \quad (2.23)$$

† Spectral flow と Poincaré 多項式

ここでは spectral flow による $U(1)$ charge を追跡する事で mirror の概念を抽出する。その為に, まずは $\eta = 1/2$ の flow を考える事によって次を得る。

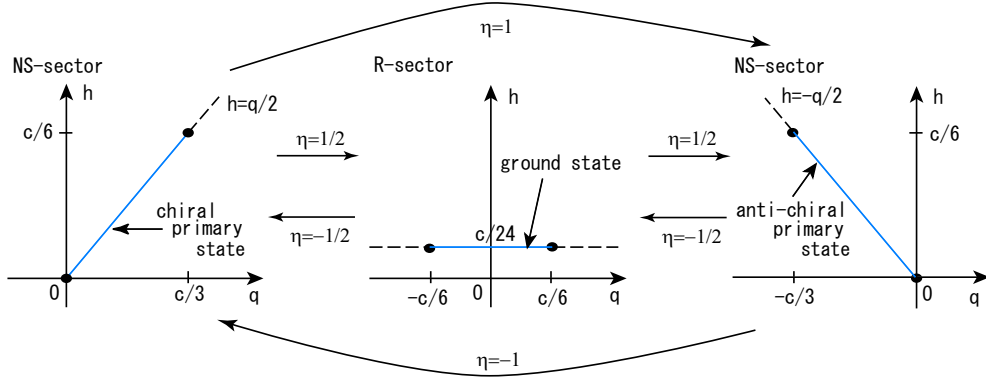


図 2: Spectral flow

NS chiral primary state	$\xrightarrow{1:1}$	R ground state	$\xrightarrow{1:1}$	NS anti-chiral primary state
$G_{1/2}^- \phi\rangle = G_{-1/2}^+ \phi\rangle = 0.$	$\eta = 1/2$	$G_0^+ \phi\rangle = G_0^- \phi\rangle = 0.$	$\eta = 1/2$	$G_{-1/2}^- \phi\rangle = G_{1/2}^+ \phi\rangle = 0.$
$h = q/2$		$h = c/24$		$h = -q/2$

即ち $\eta = 1/2$, $\eta = 1$ の flow に着目すると, これは NS chiral primary state を R ground state へ, さらに NS anti-chiral primary state へと 1 対 1 に map している事が分かる (図 2).

$2D$, $N = (2, 2)$ の non-linear σ -model を, $4D$, $N = 1$ の space-time SUSY を持つ弦理論に整合的に貼り合わせが出来る事は 0.5 節で既に述べた. ところで, その時 space-time SUSY との整合性は non-linear σ -model に $N = (2, 2)$ SUSY の $U(1)$ charge が整数である事を要求する. 即ち,

$$J_0|\phi\rangle = q|\phi\rangle, \quad q = d \in \mathbb{Z}. \quad (2.24)$$

ここで NS anti-chiral primary state の真空 ($q = h = 0$) を $\eta = -1$ で flow させると, $q = c/3$, $h = c/6$ の NS chiral primary state に移るので, この状態に上の charge integrality を課すと考えるべき理論の central charge は $c = 3d$ となる². この flow を, このような $U(1)$ charge に着目してさらに注意深く観察するとその背後に Mirror 対称性が浮かび上がってくる.

(2.23) で与えた $\mathcal{U}_\eta = \mathcal{U}_\eta^L \otimes \mathcal{U}_\eta^R$ を用いて次の flow を考える.

$$R \xrightarrow{(I)} NS(C, C) \xrightarrow{(II)} NS(A, C), \quad ((I): \mathcal{U}_{-1/2}^L \otimes \mathcal{U}_{-1/2}^R, (II): \mathcal{U}_1^L \otimes 1).$$

まず R-sector における ground state の $U(1)$ charge を数える Poincaré 多項式を次で定義する.

$$f(t, \bar{t}) \doteq \text{Tr}_R t^{J_0} \bar{t}^{\bar{J}_0} |_{G_0^\pm = \bar{G}_0^\pm = 0}. \quad (2.25)$$

これは R-sector の荷電対称性によって次の性質を持つ.

$$f(t, \bar{t}) = f\left(\frac{1}{t}, \frac{1}{\bar{t}}\right). \quad (2.26)$$

次に NS-sector における (C, C) ring, (A, C) ring の Poincaré 多項式を次式で定義する.

$$P_{(C,C)}(t, \bar{t}) \doteq \text{Tr}_{NS} t^{J_0} \bar{t}^{\bar{J}_0} |_{(C,C)} = \sum_{p,q=0}^d b_{(C,C)}^{p,q} t^p \bar{t}^q,$$

$$P_{(A,C)}(t, \bar{t}) \doteq \text{Tr}_{NS} t^{J_0} \bar{t}^{\bar{J}_0} |_{(A,C)} = \sum_{p,q=0}^d b_{(A,C)}^{p,q} t^p \bar{t}^q. \quad (2.27)$$

²後でこの d は target space の複素次元に identify される.

ここで展開係数 $b_{(C,C)}^{p,q}$ ($b_{(A,C)}^{p,q}$) は, (C, C) ring ((A, C) ring) における charge (p, q) を持つ primary field の個数であり, 複素多様体上の Hodge 数に対応する. 以下 (2.22) を用いて上の flow (I), (II) を追跡する.

(I); $f(t, \bar{t}) = (t\bar{t})^{-d/2} P_{(C,C)}(t, \bar{t})$ より (2.26) を用いて $(t\bar{t})^{-d/2} P_{(C,C)}(t, \bar{t}) = (t\bar{t})^{d/2} P_{(C,C)}(\frac{1}{t}, \frac{1}{\bar{t}})$, 故に

$$b_{(C,C)}^{p,q} = b_{(C,C)}^{d-p, d-q}, \quad (\text{cf. Poincaré duality}). \quad (2.28)$$

(II); $P_{(C,C)}(t, \bar{t}) = t^d P_{(A,C)}(t, \bar{t})$, 故に

$$b_{(C,C)}^{p,q} = b_{(A,C)}^{d-p, q}, \quad (\text{cf. mirror symmetry}). \quad (2.29)$$

† Chiral Ring と Cohomology Ring

0.5 節で述べたように $N = (2, 2)$ SCFT は Calabi-Yau 多様体と非常に相性が良く, この事から上の (2.29) は Calabi-Yau 多様体の mirror 対という概念を提示する. まずは $N = (2, 2)$ の Kähler 多様体 M 上の non-linear σ -model と話を繋げる. 以下では Kähler 多様体 M 上の微分形式 (調和形式) を, この model の Ramond ground state (2.16) と 1 対 1 の対応関係で結びつける [25, 29].

まず Ramond ground state は 0-mode である事に着目する. この状態だけを考えるのであれば, σ -model は field x^i , ψ_α^i の空間依存性のある部分を除いて 0-mode だけで考える事ができ通常の量子力学系となる. この 0-mode の正準交換関係は, left-sector と right-sector のそれぞれで次のようになる.

$$\begin{aligned} \{x^I, \pi_J\} &= \delta_J^I, & \{x^{\bar{I}}, \pi_{\bar{J}}\} &= \delta_{\bar{J}}^{\bar{I}}, \\ \{\psi_+^I, \psi_+^{\bar{J}}\} &= G^{I\bar{J}} \text{ (L-sector)}, & \{\psi_-^I, \psi_-^{\bar{J}}\} &= G^{I\bar{J}} \text{ (R-sector)}, \quad \text{その他} = 0. \end{aligned} \quad (2.30)$$

この 0-mode だけを考える量子化では, supercharge は left-sector では $Q^+ \sim G_0^+ \sim \psi_+^I \pi_I$, $Q^- \sim G_0^- \sim \psi_-^{\bar{I}} \pi_{\bar{I}}$ によって, right-sector では ψ_+ を ψ_- に置き換える事によって得られる. ここで正準量子化により $\pi_i \rightarrow D_i$ (Kähler 多様体 M 上の covariant derivative) となるので, これらは

$$G_0^+ = \psi_+^I D_I, \quad G_0^- = \psi_-^{\bar{I}} D_{\bar{I}} \quad (2.31)$$

となる. Fermion については 2 通りの量子化の仕方がある.

(1) $\psi_+^I 0\rangle = \psi_-^{\bar{I}} 0\rangle = 0$, $\psi_+^I, \psi_-^{\bar{I}}$ が生成演算子 $ \Phi\rangle = \sum_{r,s} b_{I_1 \dots I_r \bar{J}_1 \dots \bar{J}_s} \psi_+^{I_1} \dots \psi_+^{I_r} \psi_-^{\bar{J}_1} \dots \psi_-^{\bar{J}_s} 0\rangle$	(2) $\psi_+^I 0\rangle = \psi_-^{\bar{I}} 0\rangle = 0$, $\psi_+^I, \psi_-^{\bar{I}}$ が生成演算子 $ \Phi\rangle = \sum_{r,s} b_{\bar{J}_1 \dots \bar{J}_r I_1 \dots I_s} \psi_-^{\bar{J}_1} \dots \psi_-^{\bar{J}_r} \psi_+^{I_1} \dots \psi_+^{I_s} 0\rangle$
--	--

この Fock module の $|\Phi\rangle$ に, 上述の G_0^\pm を作用させると次の対応関係が得られる³.

$$G_0^- \longleftrightarrow \bar{\partial}, \quad G_0^+ \longleftrightarrow \bar{\partial}^\dagger. \quad (2.32)$$

このようにして, (2.16) により⁴Ramond ground state が Dolbeault cohomology の元と 1 対 1 に対応する事が分かる. より詳しくは, (1) とは $H_{\bar{\partial}}^{0,s}(M, \wedge^r T^* M)$ の元が, (2) とは $H_{\bar{\partial}}^{0,s}(M, \wedge^r TM)$ の元が対応している. この Ramond ground state $|\Phi\rangle$ の $\eta = 1/2$ による spectral flow を考えると, right sector における $|\Phi\rangle$ の $U(1)$ charge の符号が (1) と (2) とでは逆になっている為に, (1) では (C, A) ring へ, (2) では (C, C) ring へと flow する. この事と (2.29) から Calabi-Yau 多様体 M の mirror 対という概念に導かれる.

Mirror conjecture⁵

Calabi-Yau 多様体 M に対して, $b^{p,q}(M) = b^{d-p,q}(\widetilde{M})$ を満たすような mirror 多様体 \widetilde{M} が存在する. (2.33)

以下その他の対応関係についてまとめておく.

³ここで $\bar{\partial}$ と $\bar{\partial}^\dagger$ は, それぞれ M 上の反正則微分とその adjoint である.

⁴(2.32) によって M 上では Laplace-Beltrami operator $\bar{\Delta} = \bar{\partial}\bar{\partial}^\dagger + \bar{\partial}^\dagger\bar{\partial}$ を考えるとよい.

⁵第 0 節で述べたように実際にはあらゆる Calabi-Yau 多様体に対して, その mirror 対が存在しているわけではない.

	Chiral Ring	Cohomology Ring
$b^{0,0} = 1$	unique vacuum	path connected
$b^{d,0} = 1$	unique chiral primary	nowhere vanishing holomorphic d -form
$b^{d,d} = 1$	unique chiral primary	volume form
$b^{p,q} = b^{d-p,d-q}$	charge conjugate symmetry	Hodge dual

2.2 Landau-Ginzburg model

2.2.1 Landau-Ginzburg model の Chiral Ring

まず天下り的に Landau-Ginzburg model を定義する。この model は以下のように $D = 2$, $N = (2, 2)$ の superspace で Kähler potential (D -term) と super potential (F -term) を用いて以下の action で定義される。

$$\mathcal{L} = \int d^2z d^4\theta K(\Phi, \bar{\Phi}) + \int d^2z d^2\theta^- W(\Phi) + \int d^2z d^2\theta^+ W(\bar{\Phi}). \quad (2.34)$$

ここで Φ は chiral superfield $\Phi_I = \Phi_I(z, \bar{z}, \theta^-, \bar{\theta}^-)$, $I = 1, 2, \dots, m$ であり⁶, これは (2.7) に対応している。また $W(\Phi)$ には次の scaling 条件を課す⁷。

$\Phi_I = 0$ で isolated quasi-homogeneous singular $\stackrel{def}{\iff}$

$$W(\lambda^{\omega_1}\Phi_1, \dots, \lambda^{\omega_m}\Phi_m) = \lambda^D W(\Phi_1, \dots, \Phi_m), \quad \mathbb{C} \ni \lambda \neq 0, \omega_I \in \mathbb{Z}, D \in \mathbb{Z}.$$

ここで赤外方向への scaling $\lambda \rightarrow \infty$ を考えた時, (2.35) で $D = -1$ とすると F -term はこの scaling 不変で⁸, 摂動論的に action (2.34) が固定点に flow して $N = (2, 2)$ の SCFT になる事が知られている。よって, LG model は $W(\Phi)$ により分類される [30]。また $d^2\theta^-$ は left-, right-sector の $U(1)$ charge $(-1, -1)$ を持つので, action (2.34) の charge が 0 である為には $W(\Phi)$ は $U(1)$ charge $(1, 1)$ を持たなければならない。故に (2.35) から Φ_I の $U(1)$ charge は $(\frac{\omega_I}{D}, \frac{\omega_I}{D})$ と決まる。よって Φ_I において left-, right-sector の $U(1)$ charge は常に等しく ($q_L - q_R = 0$), LG model の任意の field operator は $\Phi_I, \bar{\Phi}_I, D_\pm \Phi_I, D_\pm \bar{\Phi}_I$ (± 1 の $U(1)$ charge) の product によって得られるので, LG model では条件 (2.24) が一般的な形 $q_L - q_R \in \mathbb{Z}$ で常に満たされている。

次に LG model の context で chiral ring \mathcal{R}^{LG} を定義する。運動方程式 $\partial_J W(\Phi)$ による多項式環 $C[\Phi]$ の商空間

$$\mathcal{R}^{LG} \doteq C[\Phi]/[\partial_J W(\Phi)] \quad (2.35)$$

を考えると, $\partial_J W(\Phi)$ により生成される空間は全て同一視されるので \mathcal{R}^{LG} は有限環を定義する⁹。

2.2.2 Landau-Ginzburg model と $N = 2$ Minimal model

まず $N = 2$ SCFT の有限次元 unitary 表現論 (minimal model) について結果だけ述べておく。

Fact 2.1 ($N = 2$ minimal model)

Unitary 表現論は central charge

$$c = \frac{3k}{k+2}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (0 \leq c < 3)$$

⁶ $D_+ \Phi_I = \bar{D}_+ \Phi_I = 0$, ($D_\pm \doteq \frac{\partial}{\partial \theta^\pm} + \theta^\mp \frac{\partial}{\partial z}$, $\bar{D}_\pm \doteq \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^\pm} + \bar{\theta}^\mp \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$) を満たしている。

⁷ この条件から $\partial_J W(\Phi_I) = 0$, $\forall J$ の解は $\Phi_I = 0$ だけとなる。

⁸ $z \rightarrow \lambda z, \theta \rightarrow \lambda^{-1/2} \theta$ より $d^2z d^2\theta \rightarrow \lambda d^2z d^2\theta$ 。今 $W(\Phi) = \Phi^n$ の時を考えると, 上の事から Φ の scaling rule は $\Phi \rightarrow \lambda^{-1/n} \Phi$ 。これに高次の摂動 Φ^m ($m > n$) をかけて, scaling すると $W'(\Phi) = \Phi^n + \Phi^m \rightarrow \lambda^{-1}(\Phi^n + \lambda^{1-m/n} \Phi^m)$ となる。Infrared limit $\lambda \rightarrow \infty$ によって, この高次摂動は irrelevant になる。

⁹ $\mu \doteq \dim \mathcal{R}^{LG}$ は $W(\Phi)$ の多重度を与える。ところで, この定義は $W(\Phi) = \Phi^n$ の摂動として, 上の脚注で述べた irrelevant な高次の多項式によるものを除き, 低次摂動の $W'(\Phi) = \Phi^n + a_n \Phi^{n-1} + \dots + a_1$ を考える事を意味する。また場の再定義 $\Phi \doteq \Phi' + \alpha$ を考えると, Φ'^{n-1} の項の係数が $n\alpha + a_n$ となるので $\alpha = -a_n/n$ によって常に Φ'^{n-1} の項を消去できる事から, この trivial な shift も除くという事も意味する。この時の多重度は $n-1$ である。

で与えられて、そのとき次のような有限個の primary state $|\phi_{l,s}\rangle, 0 \leq l \leq k, -l \leq s \leq l$, が存在する。

$$\begin{aligned} NS: h &= \frac{l(l+2) - s^2}{4(k+2)}, \quad q = \frac{s}{k+2}. \\ R: h &= \frac{l(l+2) - (s \pm 1)^2}{4(k+2)} + \frac{1}{s}, \quad q = \frac{s \pm 1}{k+2} \mp \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

ここで LG model (2.34) を考える。 Φ_I の $U(1)$ charge は $q_I = \omega_I/D$ で left-, right-sector で同数なので、以前定義した Poincaré 多項式は $t\bar{t}$ を t でまとめて表記すると、

$$P(t) \doteq \text{Tr}_{\mathcal{R}^{LG}}(t^{J_0}) = \prod_{I=1}^m \frac{1 - t^{1-\omega_I/D}}{1 - t^{\omega_I/D}}. \quad (2.37)$$

この式の右辺の形は、まず分母は $C[\Phi]$ から単純に頂を拾ってきた部分で、分子は $\partial_J W(\Phi)$ が charge $1 - \omega_J/D$ を持つので、この部分を全体から引かなければならない為に付け加わっている。まず chiral ring の多重度 μ を求めると、

$$\mu = P(t=1) = \prod_{I=1}^m \frac{D - \omega_I}{\omega_I} = \prod_{I=1}^m \left(\frac{1}{q_I} - 1 \right). \quad (2.38)$$

理論の central charge c は、NS-sector の chiral ring の最大の $U(1)$ charge q_{max} と (2.11) によって関係づいている。この q_{max} は $P(\text{large } t) = t^{\sum_I(1-2\omega_I/D)}$ から読み取れて、

$$q_{max} = \sum_{I=1}^m \frac{D - 2\omega_I}{D} \quad (2.39)$$

である。よって、

$$c = 3q_{max} = \sum_{I=1}^m \frac{3(D - 2\omega_I)}{D}. \quad (2.40)$$

ここで例として $W(\Phi) = \Phi^{k+2}$ ($D = -1, \omega = \frac{-1}{k+2}$) の時を考えると (2.40) を用いて central charge $c = \frac{3k}{k+2}$ が得られる。この時、有限環 \mathcal{R}^{LG} の元は $\Phi^s, s = 0, 1, \dots, k$ で¹⁰, $q = \frac{s}{k+2}, h = \frac{s}{2(k+2)}$ である。これは、(2.36) において NS-sector の $|\phi_{s,s}\rangle$ に対応する。この様にして、LG model は $N = 2$ の minimal model の spectrum を部分的にはあるが、正しく再現している事が分かる。そこでこの例で考えた model を k th minimal model といって MM_k で表す。

逆に $N = (2, 2)$ の SCFT から以下のように、多項式環 $C[\Phi]/[\partial_J W(\Phi)]$ が構成できる。

Proposition 2.4 [27]

$N = (2, 2)$ の SCFT の chiral ring $\mathcal{R} = (C, C), \bar{\mathcal{R}} = (A, A)$ に対して¹¹,

(i) \forall chiral field Ψ は $\Psi = \Psi(\Phi)$ ($\mathcal{R} \ni \Phi_I$) と書ける。(Anti-chiral field についても同様.)

(ii) \forall field Λ は $\Phi_I \in \mathcal{R}$ と $\bar{\Phi}_{\bar{I}} \in \bar{\mathcal{R}}$ との operator product の多項式で書ける。

の2条件が満足されている時、 $U(1)$ charge $(1, 1)$ をもつ関数 $W(\Phi)$ が存在して、有限環 $\mathcal{R} = C[\Phi]/[\partial_J W(\Phi)]$ が構成される。

Proof. まず簡単のために left-sector についてだけ考える。定義より $\mathcal{R} = C[\Phi]/J$ 。ここで J は $C[\Phi]$ の元で primary ではない chiral operator の集合である。そこで $J \ni \forall f$ を取って $f|0\rangle = |f\rangle$ を考えた時、(2.13) より $|f\rangle = G_{-1/2}^+ |f_1\rangle$ となるような、ある state $|f_1\rangle$ が存在する。そこで仮定 (ii) より、field f_1 は $\Phi_I \in \mathcal{R}$ と $\bar{\Phi}_{\bar{I}} \in \bar{\mathcal{R}}$ の多項式で得られ、 $D_+ \Phi = 0$ である事から、

$$J = [D_+ \bar{\Phi}_{\bar{I}}], \quad D_+ \bar{\Phi}_{\bar{I}}(0) = \lim_{z \rightarrow 0} z G^+(z) \bar{\Phi}_{\bar{I}}(0). \quad (2.41)$$

¹⁰これは (2.38) を用いて求めた多重度 $k+1$ と当然一致している。

¹¹LG model では基本的には $q_L = q_R$ の理論しか取り扱えないことに注意。ただし軌道体化によって、 $(C, A), (A, C)$ 環も扱える [31]. (Landau-Ginzburg orbifold)

ここで (2.41) 第 2 式の両辺を chiral field に対する仮定 (i) を用いて評価する¹². まず左辺は chiral field なので (i) より $H_I(\Phi)$ と書けて, $h = h_I + 1/2$, $q = -q_I + 1 = -2h_I + 1$ より脚注を用いて $D_- \bar{\Phi}_I(0) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^{-2h_I} H_I^\lambda(\Phi)$ と書ける. 一方右辺の operator $G^+(z)$ は $h = 3/2$, $q = 1$ を持つ chiral operator なので再び (i) より $W(\Phi)$ と書けて, 脚注を用いることによって $G^+(0) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^{-1} W^\lambda(\Phi)$ と書ける. 以上のことから $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^{-2h_I} H_I^\lambda(\Phi) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} W^\lambda(\Phi) \bar{\Phi}_I(0)$ の関係式が得られる. しかるに Φ_I と $\bar{\Phi}_I$ の OPE は $\Phi_I(z) \bar{\Phi}_I(z') \sim (z - z')^{-2h_I} + \dots$ なので, この関係式から $H_I(\Phi) \propto \partial_I W(\Phi)$ が帰結される. ここで $W(\Phi)$ はその定義から明らかに charge (1, 1) を持ち, これが示すべきところのものであった¹³. ■

2.2.3 Calabi-Yau/Landau-Ginzburg Correspondence

Space-time SUSY との整合条件 (2.24) 即ち $c = 3d$ を満足するような model を, m 個の MM_k の tensor product から構成する [32]. すなわち $W(\Phi) = \sum_{I=1}^m \Phi_I^{k_I+2}$, ($D = -1$, $\omega_I = \frac{-1}{k_I+2}$) を考えて, (2.40) より $c = \sum_{I=1}^m \frac{3k_I}{k_I+2} = 3d$ を得る. 以下 $m = d+2$ で考えると, この条件から $d = \sum_{I=1}^{d+2} \frac{k_I+2-2}{k_I+2} = d+2 - 2 \sum_{I=1}^{d+2} \frac{1}{k_I+2}$ となり, 故に次の constraint が得られる.

$$\sum_{I=1}^{d+2} \omega_I = -1. \quad (2.42)$$

ところで LG model の universality class は, infrared fixed point 直上において super potential $W(\Phi)$ によって決まるので考えるべき partition function は

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\Phi_1 \cdots \mathcal{D}\Phi_{d+2} \exp \left(i \int d^2 z d^2 \theta^- W(\Phi) + h.c. \right) \quad (2.43)$$

である. $W(\Phi)$ の scaling 不変性から, これら $d+2$ 個の chiral superfield Φ_I を weighted projective space 上の座標, すなわち $WCP^{d+1} \ni (\Phi_1 : \cdots : \Phi_{d+2}) \sim (\lambda^{\omega_1} \Phi_1 : \cdots : \lambda^{\omega_{d+2}} \Phi_{d+2})$ だと考える事ができる. そこで今 $\Phi_I \neq 0$ として変数変換 $\xi_1 \doteq \Phi_1^{-1/\omega_1}$, $\xi_I \doteq \xi_1^{\omega_I} \Phi_I$ ($I = 2, 3, \dots, d+2$) をすると, $W(\Phi) = \sum_I \Phi_I^{-1/\omega_I} = \xi_1 + \xi_1 \xi_2^{-1/\omega_2} + \cdots + \xi_1 \xi_{d+2}^{-1/\omega_{d+2}} = \xi_1 W(1, \xi_2, \dots, \xi_{d+2})$ となる. ヤコビアンは (2.42) によって $J = \det \left(\frac{\partial \Phi_I}{\partial \xi_J} \right) = -\omega_1 \xi_1^{-\omega_1-1} \xi_1^{-\omega_2} \cdots \xi_1^{-\omega_{d+2}} = -\omega_1$ となり定数なので, partition function から落とすことができ (2.43) で ξ_1 積分を実行すると次が得られる.

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\xi_2 \cdots \mathcal{D}\xi_{d+2} \delta(W(1, \xi_2, \dots, \xi_{d+2})). \quad (2.44)$$

よって WCP^{d+1} の局所座標系 $(\xi_2, \dots, \xi_{d+2})$ での LG model の fixed point 直上における場の配位は $W(\Phi) = 0$ の d 次元複素超平面に束縛されている. これは $WCP^{d+1} \ni (\Phi_1 : \cdots : \Phi_{d+2})$ で見ると, $D = -1$ 次の斉次代数方程式 $W(\Phi) = \sum_I \Phi_I^{-1/\omega_I} = 0$ となり, 条件 (2.42) から, この d 次元複素超平面は Calabi-Yau 多様体になる¹⁴ので結局次のように言うことができる.

LG model の $d+2$ 個の MM_k の tensor 積で与えられる, 整合条件 (2.24) を満足する理論の infrared fixed point 直上における chiral field の配位は, 複素 d 次元の Calabi-Yau 多様体を構成している.

¹²この時, 次の事を用いる. $\text{Conf.dim} = h$, $\text{charge} = q$ の nonlocal field $F_{I_1 \dots I_n}(z_1, \dots, z_n) \doteq \Phi_{I_1}(z_1) \cdots \Phi_{I_n}(z_n)$ は scaling field $F_{I_1 \dots I_n}^\lambda(z_1, \dots, z_n) = F_{I_1 \dots I_n}(\lambda z_1, \dots, \lambda z_n)$ を用いると, $\text{Conf.dim} = h$, $\text{charge} = q$ の local operator としては $O_h^q(0) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^{-(h-q/2)} F^\lambda$ のように表す事が出来る.

¹³証明を完成させるには left, right を同時に扱わなければならない. その為には $W(\Phi)$ の定義で G^+ を $G^+ \bar{G}^+$ で置き換えるとよい. ただしこのままだと $G^+ \doteq G_1^+ + G_2^+$ を考えると $G^+ \bar{G}^+$ には非対称な場が含まれてしまうので, たくしくは $W(\Phi_I) \doteq [G^+ \bar{G}^+]_{LR\text{symmetric}} = [G_1^+ \bar{G}_1^+ + G_2^+ \bar{G}_2^+]$ のようにすれば良い.

¹⁴一般に WCP^n における D 次斉次多項式によって張られる超局所の Chern class は $C = \frac{\prod_{I=1}^{n+1} (1 + \omega_I J)}{1 + D J} = 1 + (\sum_{I=1}^{n+1} \omega_I - D) J + \dots$, (J : Kähler form, 分子は WCP^n の Chern class を与え, 分母は D 次同次多項式の normal bundle の Chern class を与えている) となるので Calabi-Yau \leftrightarrow vanishing first chern class $\leftrightarrow D = \sum_{I=1}^{n+1} \omega_I$ となる (1.2.2 節も参照). 今の場合は $D = -1$, $n = d+1$ に相当する.

例として $d = 3$ ($c = 9$), $(k_1, \dots, k_5) = (3, 3, 3, 3, 3)$ を考えると (2.42) を満足しており, この場合は quintic 3-fold $Y_{(4,5)}$ である.

このような LG model と Calabi-Yau 多様体との対応関係として, $2D$, $N = 2$ 超対称ゲージ理論を用いた解析の結果があるのでそれを引用しておく [33]. この理論は, 以下のような $4D$, $N = 1$ 超対称ゲージ理論の $2D$ への reduction から得る事ができる. $U(1)$ gauge の vector superfield として V , matter field として chiral superfield P と S_I , $I = 1, 2, \dots, n$ を使い, $U(1)$ gauge 相互作用の他に後者の自己相互作用を記述する superpotential $W = P \cdot G(S_1, \dots, S_n)$ を導入する (G は n 次斉次多項式). Gauge 不変性を要請して P と S_I に $U(1)$ gauge charge $Q_P = -n$, $Q_{S_I} = 1$ を付与する. 後々の為に $0 = \frac{\partial G}{\partial S_1} = \dots = \frac{\partial G}{\partial S_n}$ の解 (特異点) は $S_I = 0$ のみとする (smooth condition). Superpotential を展開して $4D$ から $2D$ への reduction をすると, 次のような bosonic potential が得られる.

$$U = |G|^2 + |p|^2 \sum_I \left| \frac{\partial G}{\partial S_I} \right|^2 + \frac{1}{2e^2} D^2 + 2|\sigma|^2 \left(\sum_I |s_I|^2 + n^2 |p|^2 \right). \quad (2.45)$$

ここで $D = -e^2(\sum_I |s_I|^2 - n|p|^2 - r)$ で, p , s_I は superfield P , S_I の boson 成分である. また σ , $\bar{\sigma}$ は $U(1)$ gauge field の余剰次元成分である. e は $U(1)$ gauge coupling で r は Fayet-Iliopoulos 定数である. この potential を minimize するような場の配位を考えると, 次の 2 つの場合に分けられる.

$r \gg 0$ の時, $D^2 = 0$ とする為には s_I を全て 0 にはできず, 故に $\frac{\partial G}{\partial S_I}$ も全てが 0 とはならないので, $p = 0$, $\sigma = 0$ などとなって結局次が得られる.

$$\sum_I |s_I|^2 = r, \quad G(s_I) = 0. \quad (2.46)$$

最初の式は, $U(1)$ gauge 対称性と合わせて (s_1, \dots, s_n) が \mathbb{P}^{n-1} の元となっていることを示しており, Fayet-Iliopoulos 定数 r は Kähler parameter となっている. さらに第 2 式により (s_1, \dots, s_n) が \mathbb{P}^{n-1} の非特異超曲面を形成していて, 今の場合 first Chern class が消えていることが分かる. これは始めに superpotential の total charge が 0 になるように P と S の charge を与えていたからに他ならない. よってこの時, bosonic field は CY^{n-2} を形成する.

$r \ll 0$ の時, $D^2 = 0$ とする為には $p \neq 0$ でなければならず故に $\frac{\partial G}{\partial S_I} = 0$ から s_I は全て 0 となって, $|p| = \sqrt{-r/n}$ で固定される. この事から gauge 対称性が $U(1)$ から \mathbb{Z}_n に破れて $s_I = 0$ 周りの fluctuation を考えると, Landau-Ginzburg orbifold geometry $\mathbb{C}^n/\mathbb{Z}_n$ を得る.

以上のように $r = 0$ を境にして同じ理論に 2 つの phase (Calabi-Yau phase と Landau-Ginzburg phase) が存在している事が分かる. ところが action には, もともと非摂動項としての θ -term が存在しており, これが nonzero の場合には $r = 0$ で特異性は現れずに (特異性が解消されて), この 2 つの phase は連続的に移り変わる事が示されている [33]. この事は Calabi-Yau/Landau-Ginzburg correspondence と呼ばれている. さらに, この model を用いる事により mirror 対称性の証明が具体的な形で実行されている [34].

第3節 場の理論の厳密解 (下からの Approach)

この節は他の節とは基本的に独立している. ここでは 1994 年に Seiberg と Witten によって得られた 4 次元 $N = 2$ SYM 理論の厳密解 (古典的微分形式の周期計算)[35, 36] と, 2002 年に Nekrasov が示した厳密解 (instanton counting, Nekrasov の分配関数)[37] を最短ルートで紹介する. $N = 2$ の理論を考える事は現実的な model としては対称性が強すぎるのだが, Type II 理論を Calabi-Yau 多様体に compact 化すると自然にこの model に行き着く. 第 7 節では A-model(第 6 節) に geometric engineering(第 5 節) を用いることにより, 以下で述べる厳密解が再現される事が示される.

3.1 Seiberg-Witten Theory

Notation は Wess-Bagger に従う [13]. ここでは特に単純な $SU(2)$, no flavor の場合について得られた Seiberg-Witten の厳密解を紹介する [38]. この議論は数学的な厳密性には欠けるが, その部分は深い物理的直感によって補われており, その後の数理学の発展に大きな影響を与えている. まずは一般的に議論を展開する. $4D$, $N = 2$ の massless theory の表現論を考える上で必要な代数は $\{Q_\alpha^{1,2}, \bar{Q}_\beta^{1,2}\} = 2\sigma_{\alpha\beta}^\mu P_\mu$, $\{Q_\alpha^{1,2}, Q_\beta^{1,2}\} = \{\bar{Q}_\alpha^{1,2}, \bar{Q}_\beta^{1,2}\} = 0$ であるが massless を考えているのでローレンツ対称性を用いて, $P^\mu = (|P|, 0, 0, |P|)$ のような座標系を取ることができる. よって, この代数を使うと $Q_2^{1,2}, \bar{Q}_2^{1,2}$ は null state を張るので考えなくてよくなり, $Q_1^{1,2}, \bar{Q}_1^{1,2}$ をそれぞれ消滅・生成演算子として Fock module を作るができる. Helicity $h = 0, -1/2$ の真空をそれぞれ $|0\rangle, |-1/2\rangle$ として次の 2 つの空間が定義される. (I) Vector multiplet (Ψ); $|0\rangle, \bar{Q}_1^{1,2}|0\rangle, \bar{Q}_1^1\bar{Q}_1^2|0\rangle$, それぞれの state の helicity と数は, $(h, \#) = (0, 1), (1/2, 2), (1, 1)$ である. さらに, これらの state の CPT 共役を付け加えることにより (逆の helicity の state $h = 0, -1/2, -1$ が付け加わり), state (A_μ : vector, $\psi_\alpha, \lambda_\alpha$: Weyl spinor, ϕ : complex scalar) が得られて, これを vector multiplet という. (II) Hyper multiplet (Ξ); $|-1/2\rangle, \bar{Q}_1^{1,2}|-1/2\rangle, \bar{Q}_1^1\bar{Q}_1^2|-1/2\rangle$, それぞれの state の helicity と数は, $(h, \#) = (-1/2, 1), (0, 2), (1/2, 1)$ である. 上と同様にして CPT 共役を付け加えることにより, state (ψ_q : Weyl spinor, q, \tilde{q}^\dagger : complex scalar, $\tilde{\psi}_q^\dagger$: Weyl spinor) が得られて, これを hyper multiplet という. 表現論からは分からないが Lagrangian の構成によってそれぞれの state は $U(1)_R$ 対称性 ($\theta_{1,2} \rightarrow e^{-i\alpha}\theta_{1,2}$) に伴う charge と, 2 つの supercharge を入れ替える対称性に付随した $SU(2)_I$ の量子数を持つ¹. これらをまとめると以下のように書ける.

Vector multiplet Ψ				$U(1)_R$	Hyper multiplet Ξ				$U(1)_R$
		A_μ		0		ψ_q		-1 (1)	
	ψ		λ	1 (-1)		q	\tilde{q}^\dagger	0	
		ϕ		2 (-2)		$\tilde{\psi}_q^\dagger$		1 (-1)	
$SU(2)_I$	1/2	0	1/2		$SU(2)_I$	1/2	0	1/2	

今 gauge 群が $SU(N_c)$, N_f -flavor の理論を考えて², まずは $N = 2$ の理論が $N = 1$ の理論を用いて記述可能であることに注意すると³, $N = 2$ の action を $N = 1$ の superspace で表現することができる.

$$\mathcal{L} = \text{ImTr} \int d^4x \frac{\tau}{16\pi} \left(\int d^2\theta W^\alpha W_\alpha + h.c. + \int d^2\theta d^2\bar{\theta} \Phi^\dagger e^{-2gV} \Phi \right), \quad (\tau \doteq \frac{\theta}{2\pi} + \frac{4\pi i}{g^2}). \quad (3.1)$$

ここで第 1 項は gauge term, 第 2 項は gauge interaction term (Kähler potential), g は gauge coupling, θ は θ vacuum である. この式から補助場の項を取り出すと, $\mathcal{L}_{aux} = \frac{1}{g^2} \int d^4x \text{Tr} (\frac{1}{2} D^2 - g\phi^\dagger [D, \phi] + F^\dagger F)$ が

¹ $N = 1$ の理論について述べると (以下の脚注等参照), $U(1)_R$ に関しては $W_\alpha(\theta) \rightarrow e^{i\alpha} W_\alpha(e^{-i\alpha}\theta)$, $\Phi(\theta) \rightarrow e^{2i\alpha} \Phi(e^{-i\alpha}\theta)$ の下で action は不変. $SU(2)_I$ に関しては対角化を考えることにより ($\theta_1 \rightarrow e^{-i\alpha}\theta_1$, $\theta_2 \rightarrow e^{i\alpha}\theta_2$), $W_\alpha(\theta) \rightarrow e^{i\alpha} W_\alpha(e^{-i\alpha}\theta)$, $\Phi(\theta) \rightarrow \Phi(e^{-i\alpha}\theta)$ の下で action は不変. 後は component field で書く事によってそれぞれの場の量子数が分かる.

²以下では Wick 回転を行って計量をユークリッド計量だとして議論する.

³ $N = 2$ の vector multiplet は $N = 1$ の chiral multiplet (Φ) 1 つと vector multiplet (V) 1 つから構成されており, $N = 2$ の hyper multiplet は $N = 1$ の chiral multiplet 2 つから構成されている. 特に以下の議論で重要なのは, $4D$, $N = 1$ の chiral multiplet が Kähler 構造を持ち [8], vector multiplet が special geometry の構造を持つ (1.2.1 節参照) という事実である.

得られる。そこで運動方程式 $D : D + g[\phi^\dagger, \phi] = 0$, $F : F = 0$ を用いて補助場を消去する事によって, $\mathcal{L}_{aux} = -\int d^4x \frac{1}{2} Tr([\phi^\dagger, \phi])^2$ が得られるので, bosonic potential として $V(\phi) = \frac{1}{2} Tr([\phi^\dagger, \phi])^2 \geq 0$ が得られて, unbroken SUSY である為には $[\phi^\dagger, \phi] = 0$ とならなければいけない。そこで簡単の為に $N_c = 2$ の場合を考えると, その解は $\phi = \frac{1}{2} a \sigma^3$, ($\sigma^3 = \text{diag}(1, -1)$) により与えられる。ここで a は真空を類別する moduli parameter となつて, a と $-a$ は群の Weyl 対称性によって gauge 理論として等価なので, moduli を類別する parameter として $u \doteq \frac{1}{2} a^2 (= Tr \phi^2)$ を定義しておく。しかるに $N = 2$ の action は, $N = 2$ gauge superfield Ψ^a の正則関数 $\mathcal{F}(\Psi^a)$ (prepotential) を用いて, $\mathcal{F}_a(\Phi) \doteq \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \Phi^a}$, $\mathcal{F}_{ab}(\Phi) \doteq \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \Phi^a \partial \Phi^b}$ を定義すると,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{16\pi} Im \int d^4x \left(\int d^2\theta \mathcal{F}_{ab}(\Phi) W^{a\alpha} W_\alpha^b + h.c. + \int d^2\theta d^2\bar{\theta} (\Phi^\dagger e^{-2gV})^a \mathcal{F}_a(\Phi) \right) \quad (3.2)$$

と書くことができる [39]。Classical には $\mathcal{F}_{class}(\Psi) = \frac{1}{2} Tr \tau \Psi^2$ とすると action (3.1) に一致することが分かる。そこで量子補正を考えるには, この prepotential (τ) への補正を考えれば良く, $N = 2$ 理論においてこの補正は 1-loop と非摂動補正によって exact な形で与えられる事が分かる。まずは Seiberg-Witten 以前に知られていた 1-loop 補正から求める。その為に, 上で述べた $U(1)_R$ charge の chiral anomaly による対称性の破れから議論を始める。これは fermion の 1-loop から来る triangle anomaly であり, 次の形になる事が知られている。

$$\partial^\mu j_\mu^5 = \sum_{f=\lambda, \psi, \psi_q, \bar{q}^\dagger} q_R \frac{g^2}{16\pi^2} Tr F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}, \quad \left(\tilde{F}_{\mu\nu} \doteq \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \right). \quad (3.3)$$

ここで, q_R は $U(1)_R$ charge である。今, vector multiplet は adjoint 表現で変換して, hyper multiplet は fundamental 表現で変換すると考えると, 1.1.3 節の脚注 8 の 2 次の Casimir の形を用いて (3.3) から, $\partial^\mu j_\mu^5 = \frac{g^2}{16\pi^2} F_{\mu\nu}^a \tilde{F}^{\mu\nu a} (1 \cdot N_c + 1 \cdot N_c + ((-1) \cdot 1/2 + 1 \cdot (-1/2)) \cdot N_f)$ となつて, この式の係数/2 は instanton 数 $k \in \mathbb{Z}$ を与えるので次を得る。

$$\partial^\mu j_\mu^5 = (4N_c - 2N_f)k, \quad \left(k = \frac{g^2}{32\pi^2} F_{\mu\nu}^a \tilde{F}^{\mu\nu a} \right). \quad (3.4)$$

故に symmetry breaking $U(1)_R \rightarrow \mathbb{Z}_{4N_c - 2N_f}$ が起こる。さらに Seiberg は, 以下のように (3.4) を用いて摂動論レベルで 1-loop exact な β 関数 (prepotential) を求めた。今 $\langle \phi^a \rangle \neq 0$ によって⁴, symmetry breaking $SU(N_c) \rightarrow U(1)^{N_c - 1}$ が起こる。故に τ への摂動効果 (Wilson 流の繰り込み) により prepotential は一般的に $\mathcal{F}_{eff}^{pert} = \frac{\tau}{2} \Psi^2 (A_1 + A_2 \ln \frac{\Psi^2}{\Lambda^2})$ (Λ : scale parameter, A_1 : 場の scaling で 1 に規格化しておく) となる。よつて $\partial^2 \mathcal{F}_{eff}^{pert} = \tau (1 + 3A_2 + A_2 \ln \frac{\Psi^2}{\Lambda^2})$ から, $U(1)_R$ 変換 $\Psi(\theta) \rightarrow e^{2i\alpha} \Psi(e^{-i\alpha} \theta)$ により $\delta \partial^2 \mathcal{F}_{eff}^{pert} = \tau A_2 \cdot 4i\alpha$ となるので, $\delta \mathcal{L}_{eff}^{pert} = \frac{1}{16\pi} Im \tau A_2 \cdot 4i\alpha \cdot \frac{i}{2} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} \cdot (-2) = \alpha \frac{A_2}{g^2} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}$ (1 つ目の等号の最後の -2 は $\int d^2\theta \theta^2 = -2$ から来ている) を $U(1)_R$ anomaly (3.4) と比較することによって $A_2 = \frac{2N_c - N_f}{16\pi^2} g^2$ を得る ((3.4) において g^2 は gauge 場に吸収させなければならない)。よつて

$$\mathcal{F}_{eff}^{pert} = \frac{2\pi}{g^2} \Psi^2 \left(1 + \frac{2N_c - N_f}{16\pi^2} g^2 \ln \frac{\Psi^2}{\Lambda^2} \right) \quad (3.5)$$

となるので, $\partial^2 \mathcal{F}_{eff}^{pert} = \frac{4\pi}{g^2} (1 + \frac{3}{16\pi^2} (2N_c - N_f) g^2 + \frac{2N_c - N_f}{16\pi^2} g^2 \ln \frac{\Psi^2}{\Lambda^2})$ から coupling constant への繰り込みとして, $\frac{1}{g_{eff}^2}(\langle \phi \rangle) = \frac{1}{g^2} (1 + \frac{3}{16\pi^2} (2N_c - N_f) g^2 + \frac{2N_c - N_f}{16\pi^2} g^2 \ln \frac{\langle \phi \rangle^2}{\Lambda^2})$ が求まる。故に β 関数が

$$\beta(g) = \langle \phi \rangle \frac{\delta g}{\delta \langle \phi \rangle} = -\frac{2N_c - N_f}{16\pi^2} g^3 \quad (3.6)$$

という, よく知られた 1-loop exact な形で求まり⁵, 理論が漸近的自由性を保持する為の条件 $2N_c > N_f$ が得られる。以下では $N_c = 2, N_f = 0$ の一番簡単な場合について考える。この時 $\langle \phi^a \rangle$ によって, 対称性が

⁴ このような phase を Coulomb phase と言い, 一方で hyper multiplet の scalar 期待値を考える phase を Higgs phase と言う。

⁵ QCD の 1-loop β 関数; $\beta(g) = \frac{g^3}{16\pi^2} (-\frac{11}{3} C[\text{ad: gauge}] + \frac{2}{3} C[\text{rep: Wyle fermion}] + \frac{1}{6} C[\text{rep: real scalar}])$, (ad は adjoint, rep は表現を表し, C は相当する 2 次の Casimir である) が知られている。今の $N = 2$ の理論でこれを用いると vector multiplet (adjoint); $(-\frac{11}{3} + \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 2) N_c = -2N_c$ と hyper multiplet (fund); $(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4) N_f = N_f$ とを合わせて, 確かに (3.6) に一致している。ところで, この計算の背後には $U(1)_R$ anomaly と trace anomaly が SUSY multiplet を組むという事実が存在する [40]。

$SU(2) \rightarrow U(1)$ に破れて action (3.2) は次のように書ける.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{16\pi} \text{Im} \int d^4x \left(\int d^2\theta \mathcal{F}''(\Phi) W^\alpha W_\alpha + h.c. + \int d^2\theta d^2\bar{\theta} \Phi^\dagger \mathcal{F}'(\Phi) \right). \quad (3.7)$$

今理論は漸近的自由性を持っているので $u \rightarrow \infty$ の極限を考えると, coupling が 0 極限になって摂動論が exact な結果を与えるのだが, ここからずれた u に対しては非摂動的な効果が重要になってきて, その形は (3.4) の下で述べた \mathbb{Z}_8 対称性から決まり ($U(1)_R: \phi \rightarrow e^{2i\alpha}\phi \Rightarrow \mathbb{Z}_8: \phi \rightarrow e^{2i\frac{2\pi n}{8}}\phi$ ($n \in \mathbb{Z}$)), prepotential の形は (3.5) の摂動項と合わせて次のようになる. (漸近的自由性により弱結合領域での prepotential)

$$\mathcal{F}(\Phi) = \frac{\tau}{2}\Phi^2 + \frac{i}{2\pi}\Phi^2 \ln \frac{\Phi^2}{\Lambda^2} + \sum_{k=1}^{\infty} F_k \left(\frac{\Lambda}{\Phi}\right)^{4k} \Phi^2. \quad (3.8)$$

ここで F_k は k -instanton 数と呼ばれるものであり, この形を exact に決定するための処方箋を与えたのが Seiberg-Witten の仕事である (以下で review). その為に $N = 2$ の moduli 空間を考える. そこでの metric は, (3.7) より Kähler potential $K = \text{Im}(\frac{\partial \mathcal{F}(\Phi)}{\partial \Phi} \bar{\Phi})$ が得られるので

$$ds^2 = \text{Im} \frac{\partial^2 \mathcal{F}(\Phi)}{\partial \Phi^2} d\Phi d\bar{\Phi} = \text{Im} \tau(\Phi) d\Phi d\bar{\Phi} \quad (3.9)$$

と書ける. この時 action (3.7) の unitarity の要請から $\text{Im} \tau(\Phi) > 0$ (正定値性の条件) が課されるが, $\tau(\Phi)$ は Φ についての正則関数なので Cauchy-Riemann の定理から $\text{Im} \tau(\Phi)$ は調和関数となって, 調和関数についての最大値の原理から, $\text{Im} \tau(\Phi)$ は定数でない限り Φ が定義されている領域内で最小値を取ることができないので, 正定値の条件に矛盾してしまう. 故に metric (3.9) は $u = \infty$ 近傍でのみ定義されていると考えなければならず, そこから離れると (3.8) の形自体破綻してしまう.

そこで $N = 2$ 理論の duality について述べる. この話が Seiberg-Witten 理論の核心となる. まず Φ に対する dual 座標を $\Phi_D \doteq \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \Phi}$ で定義すると, metric (3.9) は $ds^2 = \text{Im} d\Phi_D d\bar{\Phi}_D$ と書き直せて, これを boson ϕ の moduli parameter $a(u)$ を用いて次の形で表しておく.

$$ds^2 = \text{Im} da_D d\bar{a} = \frac{1}{2i} (da_D d\bar{a} - d\bar{a}_D da), \quad a_D \doteq \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial a}. \quad (3.10)$$

ここで metric (3.10) は $SL(2, \mathbb{R})$ 対称性を持っている⁶.

さらに effective action の level でこの対称性について議論する. まず $\mathcal{F}(\Phi)$ に対する dual な prepotential $\mathcal{F}_D(\Phi_D)$ を $\mathcal{F}'_D(\Phi_D) \doteq -\Phi$ によって定義する. これから, $\mathcal{F}''_D(\Phi_D) = -\frac{\partial \Phi}{\partial \Phi_D} = -\frac{1}{\mathcal{F}'(\Phi)}$ となるので (3.9) と同様に, dual 座標でも τ_D を定義する事により,

$$\tau_D(a_D) = -\frac{1}{\tau(a)}$$

が得られる. 故に moduli 空間の dual 座標系では, coupling の強結合と弱結合が入れ替わる (S -duality). この定義において (3.7) の第 2 項は, $\text{Im}(\Phi^\dagger \mathcal{F}'(\Phi)) = -\text{Im}(\mathcal{F}'(\Phi)^\dagger \Phi) = \text{Im}(\Phi_D^\dagger \mathcal{F}'_D(\Phi_D))$ と全く形を変えないので, S 変換の対称性があることが分かる. 一方で (3.7) の第 1 項については, superspace で表示した Bianchi 恒等式 $\text{Im} D_\alpha W^\alpha = 0$ を Lagrange 未定乗数 V_D により付け加えて, $\int d^4x (\int d^2\theta \mathcal{F}''(\Phi) W^\alpha W_\alpha + \frac{1}{2} \int d^2\theta d^2\bar{\theta} V_D D_\alpha W^\alpha)$ と書く. するとこの式の第 2 項は,

$$-\frac{1}{2} \int d^2\theta d^2\bar{\theta} D_\alpha V_D \cdot W^\alpha = \frac{1}{2} \int d^2\theta \bar{D}^2 (D_\alpha V_D W^\alpha) = \frac{1}{2} \int d^2\theta (\bar{D}^2 D_\alpha V_D) W^\alpha = -2 \int d^2\theta W_D^\alpha W_\alpha.$$

ここで, W と同じ形で $W_D^\alpha \doteq -\frac{1}{4} \bar{D}^2 D_\alpha V_D$ が定義されている. そこで, W について Gauss 積分すると残る項は $\int d^4x d^2\theta \frac{-1}{\mathcal{F}'(\Phi)} W_D^\alpha W_{D\alpha}$ となる. よって (3.7) は, S 変換の下で全く形を変えずに dual な座標系に移ることが

⁶証明; $SL(2, \mathbb{R})$ 群が T 変換: $T_b = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ と S 変換: $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ によって生成されることを用いると, この 2 つの変換群の作用 $T_b, S: \begin{pmatrix} a_D \\ a \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ の下で metric (3.10) が不変である事が分かる.

分かった. ところで (3.7) の T 変換を見てみると, 第 2 項は全く形を変えず第 1 項は $\frac{b}{16\pi} \text{Im} \int d^4x d^2\theta W_\alpha W^\alpha = \frac{b}{16\pi} \int d^4x F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} = 2\pi b k$ ($k \in \mathbb{Z}$: instanton 数) となるが, $b \in \mathbb{Z}$ ならば path には効いてこないで, T 変換では理論は何の変化も受けない. 故に $N = 2$ 理論には $SL(2, \mathbb{Z})$ duality が存在する (strong-weak duality).

次に特異点 (branch point) とモノドロミー行列について述べる. まずは理論の真空を特徴付ける parameter u に着目して, 理論 (ϕ) の対称性が \mathbb{Z}_8 であった事を想起するのだが u の定義からこの真空の対称性は \mathbb{Z}_4 に落ちる. この時 u と $-u$ とは大域的に対称な真空となっているので u_0 がある関数の branch point ならば, 必ず $-u_0$ も同じ関数の branch point となる. そこでまず, $u = \infty$ が a, a_D の branch point となっている事に着目する. この事は, この点近傍では厳密に $a_D = \frac{\partial \mathcal{F}^{\text{pert}}(a)}{\partial a} = \frac{i}{\pi} a (\ln \frac{a^2}{\Lambda^2} + 1)$ より $u \rightarrow e^{2\pi i} u$ によって, $a \rightarrow -a$, $a_D \rightarrow -a_D + 2a$ と変換する事から分かる. このような u の $2\pi i$ 回転に伴う a, a_D の変化を与える行列をモノドロミー行列という.

$$M_\infty \doteq \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} a_D \\ a \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -a_D + 2a \\ -a \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

このモノドロミーの存在は対称性に関係なく, 少なくともあと 1 つは branch point が存在する事を示しており, まずは他の branch point がただ 1 つで $u = 0$ が branch point となっていると仮定してみる. この時には u -plane 上の path の変形によって, $u = 0$ でのモノドロミー行列と $u = \infty$ でのモノドロミー行列は一致する ($M_0 = M_\infty$). よって $u = 0$ での厳密解が $a = \sqrt{2u}$, $a_D = \frac{i}{\pi} a (\ln \frac{a^2}{\Lambda^2} + 1) + g(a)$ ($g(a) : a^2$ の整関数) と求まって, $\tau = \frac{da_D}{da} = \frac{i}{\pi} (\ln \frac{a^2}{\Lambda^2} + 3) + \frac{dg(a)}{da}$ となるが, 最大値の原理から $\text{Im} \frac{dg(a)}{da}$ は u -plane 上で最小値を持たないので, $\text{Im} \tau$ の正定値性の条件に矛盾して少なくともこの仮定は偽となる. そこで, 次に単純な場合として $u = \infty, u_0, -u_0$ ($u_0 \neq 0$) の 3 点だけが branch point だと仮定して話を進める. この時, 上で述べた理論の $SL(2, \mathbb{Z})$ duality から, $u = \infty$ での理論の dual を $u = u_0$ での理論だと考える事が重要である. ここで $u = u_0, -u_0$ の物理的意味づけであるが, Seiberg と Witten は物理的な経験則から, この特異点は, massive な $N = 2$ の理論に存在する central charge が mass による自由度を相殺する (saturate する)⁷ ような, BPS state と呼ばれる量子論的安定状態に粒子が落ち込んで現れると考えた (soliton, monopole, dyon など).

Fact 3.1 (BPS mass 公式)

BPS 粒子の mass M は次の式で与えられる. (Witten-Olive[41])

$$M^2 = 2|Z|^2, \quad Z = (n_m, n_e) \begin{pmatrix} a_D \\ a \end{pmatrix}, \quad (n_m, n_e \in \mathbb{Z}). \quad (3.12)$$

まず $n_e = 0, n_m = 1$ の magnetic monopole (t'Hooft monopole) を考える ($M^2 = 2|a_D|^2$). この状態は $a_D = 0$ で massless になり, この時の u を u_0 とする. そこで, この点でのモノドロミー行列を求める為に以上で述べた duality の概念を用いて, この monopole が dual potential $V_{D\mu}$ と標準的な相互作用を起こすと考える. するとそこでの β 関数は, $N = 2$, $U(1)$, $N_f = 1$ の SYM 理論に対して上述の脚注 5 の公式を用いて ($\beta(g_D) =$) $a_D \frac{dg_D}{da_D} = \frac{g_D^3}{16\pi^2} \cdot 2 = \frac{g_D^3}{8\pi^2}$ と求められる (この時, $U(1)$ 群なので 2 次の Casimir の $1/2$ が不要なことに注意). ここで $\theta_D = 0$ と仮定する事によって, $-\frac{da}{da_D} = \tau_D = -\frac{i}{\pi} \ln a_D$ が得られて, $a = a_0 + \frac{i}{\pi} a_D \ln a_D - \frac{i}{\pi} a_D \simeq a_0 + \frac{i}{\pi} a_D \ln a_D$, ($u \simeq u_0$) となる. この $u \simeq u_0$ 近傍では, a_D は $u - u_0$ と 1 対 1 で対応していると考えられるので, $a_D \simeq c_0(u - u_0)$, $a \simeq a_0 + \frac{i}{\pi} c_0(u - u_0) \ln(u - u_0)$ と書ける. よって $u - u_0 \rightarrow e^{2\pi i}(u - u_0)$ により, この点近傍におけるモノドロミー行列が求まる.

$$M_{u_0} \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} a_D \\ a \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_D \\ -2a_D + a \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

一方 $u = -u_0$ の特異点におけるモノドロミー行列は非可換モノドロミーの出発点の任意性を除いて, $M_\infty = M_{u_0} M_{-u_0}$ から求める事ができる.

$$M_{u_0} \doteq \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

⁷これによって massive な状態にもかかわらず自由度は massless のものと等しくなる.

この特異点での物理的意味付けは次のように考えると良い。まず (3.12) より, モノドロミー変換によって $(n_m, n_e) \rightarrow (n_m, n_e)M_{-u_0}$ となるのだが, この変換で mass は不変でなければならないので $n_m = -n_e$ の関係にしなければならない。特に $(n_m, n_e) = (1, -1)$ の状態であると考えれば, これはいわゆる dyon と呼ばれるものである。

以上で厳密解を構成するための情報は集まっている。以下, Seiberg-Witten の議論にしたがって楕円関数論 (Riemann 面の理論) の方法を援用する。その為の上で得られた結果のうち必要十分な部分をまとめながら議論の set up を行う。(簡単な為に $u_0 = 1$ と scaling しておく。) まず, 真空を parametrize する空間 u -plane には 3 つの特異点 $u = \pm 1, \infty$ が存在しており⁸, この空間を理論の対称性である flat $SL(2, \mathbb{Z})$ bundle V の base space とする。ここで正則断面 a, a_D は正定値性の条件を満足する τ を $\tau = \frac{da_D}{da} = \frac{da_D}{du} / \frac{da}{du}$ によって定義して, 特異点の近傍で以下のように振舞うようなものである。

$$u = \infty \text{ 近傍で } a \approx \sqrt{2u}, a_D \approx i \frac{\sqrt{2u}}{\pi} \ln u. \quad (3.15)$$

$$u = 1 \text{ 近傍で } a_D \approx c_0(u - 1), a \approx a_0 + \frac{i}{\pi} a_D \ln a_D, (a_0, c_0 : \text{constant}). \quad (3.16)$$

以上のように振舞うような正則断面 a, a_D を求めたい。その為に, まず上で定義した τ を考えて正定値性の条件からこれを上半平面 \mathbb{H} の元であると考え。ここで 2×2 行列 $\text{diag}(-1, -1)$ は \mathbb{H} に自明に作用するので, 以降考えるのは $SL(2, \mathbb{Z})$ の代わりに $\Gamma(1)$ を考えればよい。もしも u -plane に特異点が存在しなければ, τ の基本領域が $\mathbb{H}/\Gamma(1)$ によって genus 0 の Riemann 面として parametrize できるのだが, 特異点が上述の 3 個あると考えているので基本領域は $\mathbb{H}/\Gamma(2)$ となって genus 1 の Riemann 面として parametrize される。ここで脚注 8 に示した $\Gamma(1)/\Gamma(2)$ の 6 つの元に対応して, $\mathbb{H}/\Gamma(1)$ は $\mathbb{H}/\Gamma(2)$ を 6 重に被覆しており, 特に $\mathbb{H}/\Gamma(2)$ の基本領域には 3 つの劣点 $\tau = 0, 1, \infty$ が存在している (図 3), これはそのまま u -plane 上の 3 つの特異点 $u = \pm 1, \infty$ に対応付けることができる。そこで再び u -plane に戻って考えると, 真空を parametrize する $u \neq \pm 1, \infty$ に対してそれぞれ別の genus 1 の Riemann 面 (トーラス) が形成されて, それは $u = \pm 1, \infty$ で特異な楕円曲線

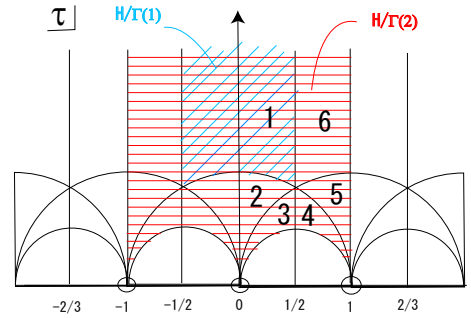


図 3: $\mathbb{H}/\Gamma(1)$ と $\mathbb{H}/\Gamma(2)$ の基本領域

$$y^2 = (x - 1)(x + 1)(x - u) \quad (3.17)$$

により与えられる (u は楕円曲線の変形 parameter となる)。この曲線を Seiberg-Witten curve という (Coulomb phase の特徴付け)。

上記によって真空を parametrize している幾何学的実態が浮き彫りになった。次にこのトーラスの古典的微分形式の周期計算という視点から厳密解の構成を行う。まずトーラス上には non-trivial な homology base が 2 つ存在して (γ_1, γ_2 とする。Intersection number は $\gamma_1 \cdot \gamma_2 = 1$ となるように規格化できる), それに対応して 1 次元 cohomology 群も 2 次元の vector 空間を張る。これは上の Seiberg-Witten curve を用いて次のように定義できる。 $\lambda_1 \doteq \frac{dx}{y}$ (holomorphic differential), $\lambda_2 \doteq \frac{x dx}{y}$ (meromorphic differential) を定義して⁹, これらの線形結合 $\lambda \doteq a_1(u)\lambda_1 + a_2(u)\lambda_2$ によって, それぞれの cycle $\gamma_{1,2}$ に対して $\oint_{\gamma_{1,2}} \lambda$ を与えると, これらは homology cycle にだけ依存する 1 次元 cohomology 群の基底を与える。(V の正則断面の一般形はこれ

⁸この特異点の情報はモノドロミー行列 (3.11), (3.13), (3.14) によって与えられていて, これら (特に (3.11), (3.13)) から群 $\Gamma(2) \doteq \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(1) \doteq SL(2, \mathbb{Z})/\{\pm 1\} \mid a \equiv d \equiv 1 \pmod{2}, b \equiv c \equiv 0 \pmod{2} \right\}$ が生成される。ここで

$\Gamma(1)/\Gamma(2) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ に注意。

⁹Fact; genus g の閉 Riemann 面上には, g 個の 1 次独立な holomorphic differential が存在する [20]。

に尽きる.) そこで $SL(2, \mathbb{Z})$ 対称性を用いると, a_D, a は次のように定義できる.

$$a_D = \oint_{\gamma_1} \lambda, \quad a = \oint_{\gamma_2} \lambda. \quad (3.18)$$

ここで τ について考える. まず $\frac{d\lambda}{du} = f_1(u)\lambda_1 + f_2(u)\lambda_2$ と書ける事を用いると

$$\tau = \frac{da_D}{du} / \frac{da}{du} = \frac{f_1(u) \oint_{\gamma_1} \lambda_1 + f_2(u) \oint_{\gamma_1} \lambda_2}{f_1(u) \oint_{\gamma_2} \lambda_1 + f_2(u) \oint_{\gamma_2} \lambda_2}$$

となるのだが, 正定値性の条件を満足しなければならない. そこで周期行列の一般論の結果 ($\tau_u \doteq \frac{\oint_{\gamma_1} \lambda_1}{\oint_{\gamma_2} \lambda_1}$ において常に $\text{Im}\tau_u > 0$ が成り立つ [20]) を引用して, τ と見比べると $f_2(u) = 0$ とする事で常に正定値性の条件を満足する解が得られることが分かる. この結果を用いると $\frac{d\lambda}{du} = f_1(u)\lambda_1$ となり, (3.15), (3.16) を満足するような解を得るためには $f_1(u) \equiv -\frac{\sqrt{2}}{4\pi}$ とすると良いことが分かる (以下). これで計算すると $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \frac{y dx}{x^2 - 1} (= \frac{\sqrt{2}}{2\pi} (\lambda_2 - u\lambda_1))$ (留数は 0) を得る. (これを Seiberg-Witten differential という.) よって homology base を γ_1 に対しては $x = 1 \rightarrow u$ 周りの閉曲線を取って, γ_2 に対しては $x = -1 \rightarrow 1$ 周りの閉曲線を取る事にすれば (\pm の符号の不定性はあるが, これは Weyl 対称性 $a^2 = 2u$ による), 次のような厳密解が得られる.

$$a_D(u) = \oint_{\gamma_1} \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \frac{\sqrt{x-u}}{\sqrt{x^2-1}} dx = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_1^u dx \frac{\sqrt{x-u}}{\sqrt{x^2-1}}, \quad (3.19)$$

$$a(u) = \oint_{\gamma_2} \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \frac{\sqrt{x-u}}{\sqrt{x^2-1}} dx = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_{-1}^1 dx \frac{\sqrt{x-u}}{\sqrt{x^2-1}}. \quad (3.20)$$

後は実際に, この解が (3.15)(3.16) を満足している事を確認すればよい (consistency check). まず (3.15) ($u = \infty$ 近傍) については,

$$a(u) \approx \frac{\sqrt{2u}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{2u},$$

$$a_D(u) \stackrel{(x=uz)}{=} \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_{\frac{1}{u}}^1 u dz \frac{\sqrt{uz-u}}{\sqrt{u^2z^2-1}} = \frac{\sqrt{2u}}{\pi} \int_{\frac{1}{u}}^1 \frac{\sqrt{z-1}}{\sqrt{z^2-1/u^2}} dz \approx \frac{\sqrt{2u}}{\pi} \int_{\frac{1}{u}}^1 \frac{\sqrt{z-1}}{z} \approx i \frac{\sqrt{2u}}{\pi} \ln u$$

となって consistent. 次に (3.16) ($u = 1$ 近傍) については,

$$a_D(u) = \frac{\sqrt{2u}}{\pi} \int_{\frac{1}{u}}^1 \frac{\sqrt{z-1}}{\sqrt{(z+1/u)(z-1/u)}} dz \approx \frac{1}{\pi} \int_{\frac{1}{u}}^1 \frac{\sqrt{z-1}}{\sqrt{z-\frac{1}{u}}} dz \stackrel{(z-1/u=t^2)}{=} \frac{2}{\pi} \int_0^{\sqrt{1-1/u}} \sqrt{t^2 - (1-\frac{1}{u})} dt$$

$$\stackrel{(t=\sqrt{1-1/u} \sin \theta)}{=} \frac{2}{\pi} i \left(1 - \frac{1}{u}\right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta = \frac{i}{2} \left(1 - \frac{1}{u}\right) \approx \frac{i}{2}(u-1)$$

となって consistent. $a(u)$ に関しては直接確認する事ができないので次のように考える¹⁰.

$$\frac{da(u)}{du} = -\frac{\sqrt{2}}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(x+1)(x-u)}} \approx -\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(x-u)}} \approx -\frac{1}{2\pi} \ln(u-1) \text{ より}$$

$$a(u) \approx -\frac{1}{2\pi}(u-1) \ln(u-1) + \text{constant} + \dots$$

となって consistent.

以上が 94 年に Seiberg-Witten によって得られた厳密解である. ただし上で得られたのは $a, a_D = \frac{d\mathcal{F}}{da}$ の moduli parameter u による表示であって, そもそもの目的である prepotential を求める為にはこの結果の逆解が必要となる. それを実行する代わりに, 上の周期積分の解を微分方程式 (Picard-Fuchs 方程式) の解として得る事もなされている [42].

¹⁰ $a(u=1) = 4/\pi$ と exact に求まる.

3.2 Nekrasov の分配関数 (Instanton Counting)

Seiberg-Witten によって原理的には、厳密解 (prepotential への instanton 補正) が全て得られたことになる。そこで用いられた手法は gauge 理論の moduli 空間を意識する事無く微分形式の周期計算を行うというエレガントなものであったが、数学としては実際の所何を計算しているのかが不明瞭だという問題点があった。一方で、以下で紹介する Nekrasov による厳密解 [37] は gauge 理論の moduli 空間を具体的に扱い、instanton の counting を行うといったものであり、数学的に計算すべき実体の厳密な定義がなされる¹¹。以下では、 $4D$, $N = 2$ pure $SU(N_c)$ SYM 理論の partition function \mathcal{Z}_{Nek} について結果だけをを紹介する。これは、 $SU(N_c)$ の maximal torus $T^{N_c-1} \ni e^{a_1}, \dots, e^{a_{N_c}}$, $\sum_i a_i = 0$ と、 $SO(4)$ の maximal torus $T^2 \ni e^{\epsilon_1}, e^{\epsilon_2}$ 及び、scale parameter Λ の関数として、

$$\mathcal{Z}_{Nek} = \mathcal{Z}_{Nek}(\vec{a}, \epsilon_1, \epsilon_2, \Lambda) \quad (3.21)$$

によって与えられる。ここで Sieberg-Witten prepotential (3.8) の instanton(非摂動) term F_{inst} が、次のようにして得られる事が示されている。

Fact 3.2 [43, 45]

$$F_{inst}(\vec{a}, \Lambda) = \lim_{\epsilon_1, \epsilon_2 \rightarrow 0} \epsilon_1 \epsilon_2 \ln \mathcal{Z}_{Nek}(\vec{a}, \epsilon_1, \epsilon_2, \Lambda). \quad (3.22)$$

この式の極限は、位相的弦理論の言葉 (7.3 節) に翻訳すると world sheet の genus 0 の部分が Seiberg-Witten prepotential であったという事を意味している ((4.31) 参照)。

† 局所化

まずは equivariant cohomology と局所化の公式について注意しておく [46]。 M を境界の無い実 n 次元の compact 多様体、 X を M 上の vector field として内部積 ι_X を定義すると、 M 上の微分形式 α に対し Lie derivative が

$$\mathcal{L}_X \alpha = \iota_X d\alpha + d\iota_X \alpha$$

で与えられる (H. Cartan)。ここで特に X として $U(1)$ vector field を取って equivariant exterior derivative を

$$D_{U(1)} \doteq d + i\xi \iota_{U(1)}, \quad (\xi : \text{parameter}) \quad (3.23)$$

で定義すると、 $D_{U(1)}^2 = i\xi \mathcal{L}_{U(1)}$ となる事に注意しておく。そこで $\alpha(\xi)$ を M 上でこの $U(1)$ action で不変な微分形式とすると (これを equivariant form という)、

$$D_{U(1)}^2 \alpha(\xi) = 0 \quad (3.24)$$

が成り立つ。この事から、equivariant form に対して通常の cohomology の理論と同様にして equivariant cohomology が定義できる。即ち equivariant closed form を $D_{U(1)} \alpha(\xi) = 0$ で、equivariant exact form を $\alpha(\xi) = D_{U(1)} \beta(\xi)$ でそれぞれ定義して、closed form の空間を exact form の空間で割ればよい。ここで M に境界がない時は Stokes の定理から、($d\alpha$ を n -form として)

$$\int_M D_{U(1)} \alpha(\xi) = \int_M d\alpha(\xi) = \int_{\partial M} \alpha(\xi) = 0 \quad (3.25)$$

となるので $\int_M \alpha(\xi)$ は equivariant cohomology class にしか依らない。ここで次が成り立つ。

Fact 3.3 (局所化定理)

M を境界の無い実 n 次元 compact 多様体、 $\alpha(\xi)$ を equivariant closed form (その 0-form 成分を α_0 とする)、点 $p \in M$ を $U(1)$ vector field の固定点とする時、次が成り立つ。

$$\int_M \alpha(\xi) = \left(\frac{2\pi i}{\xi} \right)^{\frac{n}{2}} \sum_p \frac{\alpha_0(\xi)(p)}{\det^{\frac{1}{2}} \mathcal{L}_p}. \quad (3.26)$$

¹¹[43, 44] では Nekrasov の partition function を \mathbb{C}^2 上の G -値 bundle の framed moduli 空間上の正則関数環の指標で定義して議論している。ところで、ここまで instanton の定義を述べて来なかったのだが、YM 理論の instanton とは YM 方程式の特解で field strength について $F = \pm *F$, (+(-): (anti) self-dual field strength) を満たす connection の事であり、次節で述べる world sheet instanton とは区別される。

† SYM の moduli 空間

次に理論の位相化を実行する [47, 48]. それは 3.1 節で述べた量子数 $SU(2)_I$ に着目して, space-time の Poincaré 対称性 $SO(4) \supset SU(2)_{left} \times SU(2)_{right}$ の内 $SU(2)_{right}$ との対角和を取る事によりなされる. この操作を topological twist という. Twist により量子数は $(SU(2)_{left}, SU(2)_{right}, SU(2)_I) \rightarrow (SU(2)_{left}, SU(2)'_{right})$ と変化する. Boson については変化しないので fermion についてだけ述べると,

$$\begin{aligned}\psi_\alpha^i \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \right) &\rightarrow \psi_\mu \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \\ \lambda_\alpha^i \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) &\rightarrow \chi_{\mu\nu}^+ (0, 1) \oplus \eta (0, 0)\end{aligned}\quad (3.27)$$

となる. ここで $\chi_{\mu\nu}^+$ は self-dual 2-form である. また twist により supercharge も次のように変化する.

$$\begin{aligned}Q_\alpha^i \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \right) &\rightarrow Q_\mu \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \\ \bar{Q}_\alpha^i \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) &\rightarrow Q_{\mu\nu}^+ (0, 1) \oplus Q (0, 0).\end{aligned}\quad (3.28)$$

ここで Q を BRST operator (冪零) と考える. この時 energy-momentum tensor が BRST exact な形で書かれるので, BRST 条件

$$|Phys\rangle : \text{physical state} \stackrel{\text{def}}{\iff} Q|Phys\rangle = 0 \quad (3.29)$$

によって理論が topological (cohomological field theory) になる (4.1.2 節参照). ここで Q の共役 operator \bar{Q} を $\{Q, \bar{Q}\} = 2H$ (H は Hamiltonian) が満たされるように定義出来る¹²[47]. また Q が保存量である事から, $\{H, Q\} = 0$ なので Q cohomology state と H eigenstate を同時に取る事が出来る. そこで E を H の eigenvalue として $H|Phys\rangle = E|Phys\rangle$ を考える. この時, もしも $E \neq 0$ ならば上で述べた事から,

$$|Phys\rangle = Q \left(\frac{\bar{Q}|Phys\rangle}{2E} \right)$$

となるので, Q cohomology の元として $|Phys\rangle$ は自明となる. 故に cohomological な理論としては, state の 0-mode 以外は decouple していると考えられる. そこで Nekrasov は上述のような SYM 理論の位相化から議論を始めている. これによって, 場の理論の内部に局所化定理で必要な equivariant exterior derivative の対応物を次のようにして与える事ができる.

$$\tilde{Q} \doteq Q + \xi_a \Omega_{\mu\nu}^a x^\nu Q_\mu. \quad (3.30)$$

ここで ξ と $\Omega^a = \Omega_{\mu\nu}^a x^\nu \partial_\mu$, $a = 1, \dots, 6$ はそれぞれ $SO(4)$ の Lie 環の parameter とその回転の generator である. また, 位相化により場の 0-mode 以外が自明になる事から SYM 理論の 0 次元への reduction が自然に行える. そこで現れる空間は ADHM moduli 空間と呼ばれていて, Nekrasov は局所化定理 (3.26) を用いて SYM 理論の partition function の計算 (instanton の数え上げの問題) を, この moduli 空間の固定点を数え上げる問題に帰着させた. この固定点は, この節の初めに述べた maximal torus $T^{N_c-1} \times T^2$ の作用によるものである. この数え上げは, Young tableaux を用いた組み合わせ論的な議論となる [49, 50]. 以下, 結果だけ記す. まず partition function は k instanton で展開して,

$$\mathcal{Z}_{Nek}(\vec{a}, \epsilon_1, \epsilon_2, \Lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda^{2N_c k} \mathcal{Z}_k(\vec{a}, \epsilon_1, \epsilon_2) \quad (3.31)$$

で与えられ, 特に $\epsilon_1 = -\epsilon_2 = \hbar$ (constant self-dual graviphoton に対応, 6.1 節参照) の時には (以下全てこれ考える),

$$\mathcal{Z}_k(\vec{a}, \hbar, -\hbar) = \sum_{|\mu|=k} \prod_{l,n=1}^{N_c} \prod_{i,j \geq 1} \frac{a_l - a_n + \hbar(\mu_{l,i} - \mu_{n,j} + j - i)}{a_l - a_n + \hbar(j - i)}, \quad |\mu| \doteq \sum_{l=1}^{N_c} \sum_{i \geq 1} \mu_{l,i} \quad (3.32)$$

¹²Cohomological field theory では, energy-momentum tensor に対して 4.1.2 節の (4.9) と同様の関係式, 即ち $T_{\mu\nu} = \{Q, \lambda_{\mu\nu}\}$ が成り立つ. そこで $\tilde{Q} \doteq 2 \int d^3x \lambda_{00}$ を定義すれば, Hamiltonian は $H = \int d^3x T_{00}$ で与えられるので, $\{Q, \tilde{Q}\} = 2H$ が成り立つ.

と固定点の拾い上げから得られている. ここで $\mu_{l,i}$ は, Young tableaux Y_l を一番上の段の box の数から下の段のそれに続く非増加列 $\mu_{l,1} \geq \dots \geq \mu_{l,d_l} > \mu_{l,d_l+1} = 0, \dots$ で表した時の $\mu_{l,i}$ である. また label l は N_c 個の colored partition $\vec{Y} = (Y_1, \dots, Y_{N_c})$ を表していて, $|\mu|$ はそれらの box の総和を表している (図 4).

ここで上述の partition function の 5 次元への持ち上げを行う (M 理論 compact 化). ただし 5 次元方向は半径 R の S^1 であるとする. この時, 5 次元方向の運動量は量子化されるので, その寄与を考慮に入れると (6.1 節参照, 調和振動子の partition function), 5 次元の partition function が次の形で得られる.

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{Nek}^{5D}(\vec{a}, \hbar, -\hbar, \Lambda; R) &= \sum_{k=0}^{\infty} (\Lambda R)^{2N_c k} \mathcal{Z}_k^{5D}(\vec{a}, \epsilon_1, \epsilon_2; R), \\ \mathcal{Z}_k^{5D}(\vec{a}, \hbar, -\hbar; R) &= \sum_{|\mu|=k} \prod_{l=1}^{N_c} \prod_{i,j \geq 1} \frac{\sinh[a_l - a_n + \hbar(\mu_{l,i} - \mu_{n,j} + j - i)]}{\sinh[a_l - a_n + \hbar(j - i)]}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

ここで, 特に $5D, N = 2$ の pure $SU(2)$ の partition function を具体的に書いておく.

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{Nek}^{5D}(\vec{a}, \hbar, -\hbar, \Lambda; R) &= \sum_{k=0}^{\infty} (\Lambda R)^{4k} \sum_{l(R_1)+l(R_2)=k} \prod_{l,n=1}^2 \prod_{i,j \geq 1} \frac{\sinh[a_l - a_n + \hbar(\mu_{l,i} - \mu_{n,j} + j - i)]}{\sinh[a_l - a_n + \hbar(j - i)]} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l(R_1)+l(R_2)=k} (\Lambda R)^{4k} \mathcal{Z}^{(l=n)} \mathcal{Z}^{(l \neq n)}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

この式の等号は, l, n の積について $l = n$ と $l \neq n$ に分離した事を表していて, $a_1 = -a_2 \doteq a$ に注意すると直ちに次を得る.

$$\mathcal{Z}^{(l=n)} = \prod_{l=1}^2 \prod_{1 \leq i < j \leq \infty} \frac{\sinh^2[R\hbar(\mu_{l,i} - \mu_{l,j} + j - i)]}{\sinh^2[R\hbar(j - i)]}, \quad (3.35)$$

$$\mathcal{Z}^{(l \neq n)} = \prod_{i,j \in \mathbb{N}} \frac{\sinh^2[R(2a + \hbar(\mu_{1,i} - \mu_{2,j} + j - i))]}{\sinh^2[R(2a + \hbar(j - i))]} \quad (3.36)$$

7.3 節では, 全く別の計算から (3.34) が得られる事を述べる.

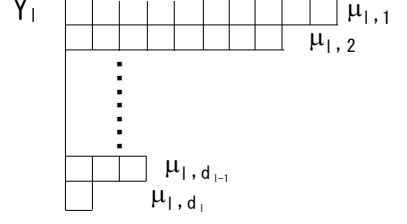


図 4: Young tableaux

第4節 Topological String Theory

以下の節では位相的弦理論についてのレビューを行う。そこで、この節では基本的な定義等を述べる。

4.1 Topological σ -model

4.1.1 $2D$, $N = (2, 2)$ σ -model の Topological Twist

第2節では $N = (2, 2)$ SCFT の持つ代数構造から Calabi-Yau 多様体の持つ mirror 対称性の概念が提示され、model (LG model) を考えることにより Calabi-Yau 多様体の例も得られた。ところで多様体の topology についての理解を得たいのであれば始めから topological な理論を考えるべきである。そのような model が仮にできたとしても物理的には無意味なもののように感じられるのだが¹、結果的にこの model から string theory の重要な性質である (と考えられている) gauge/gravity 対応のような非摂動理論定式化への道を具体的に示唆することができる²。以下ではそのような model を構築するために 0.5 節で述べてある Kähler 多様体上の non-linear σ -model を考えて、topological twist と呼ばれる操作を施すことにより理論が topological になることを説明する。この話の出発点となっているのは 1988 年以降になされた Witten による一連の仕事によるところが大きい [51, 52]。まずは topological twist の定義から行う。

この $2D$, $N = (2, 2)$ 理論は $4D$, $N = 1$ 理論を 2次元分 reduction する事によって得られる理論であるが、この時始めの $4D$, $N = 1$ 理論に存在していた R -対称性がそのまま $2D$, $N = (2, 2)$ 理論にも遺伝して、この対称性を $U(1)_V$ と書く。また $2D$ に reduction したことによって、supercharge が $2D + 2D$ に分離される事により、それらを入れ替える対称性が加わって、これを $U(1)_A$ と書く。それぞれの対称性の generator とそれに相当する charge を F_V , F_A , F_V , F_A と書く。Superfield \mathcal{F} を用いて、これらの対称性を symbolic に表すと次のようになる。

$$e^{i\alpha F_V} \mathcal{F}(x, \theta^\pm, \bar{\theta}^\pm) = e^{i\alpha q_V} \mathcal{F}(x, e^{-i\alpha} \theta^\pm, e^{i\alpha} \bar{\theta}^\pm), \quad (4.1)$$

$$e^{i\alpha F_A} \mathcal{F}(x, \theta^\pm, \bar{\theta}^\pm) = e^{i\alpha q_A} \mathcal{F}(x, e^{\mp i\alpha} \theta^\pm, e^{\pm i\alpha} \bar{\theta}^\pm). \quad (4.2)$$

ここで、これらの対称性による Noether current を求めると (action (0.8) 参照),

$$j_V^z = -G_{IJ}(z) \psi_-^I \psi_-^{\bar{J}}, \quad j_V^{\bar{z}} = G_{IJ}(z) \psi_+^{\bar{I}} \psi_+^J, \quad (4.3)$$

$$j_A^z = -j_V^{\bar{z}}, \quad j_A^{\bar{z}} = j_V^z \quad (4.4)$$

が得られる。ここで topological twist とはこれらの対称性 $U(1)_V$, または $U(1)_A$ を gauge 化することによって定義される。この時、どちらの対称性の gauge 化を行うかによって 2通り twist が定義できる (ただし、ここで言う gauge 場とは 2次元の spin connection のことである)。

$$U(1)_V \text{ の gauge 化} \rightarrow \text{A-twist}, \quad U(1)_A \text{ の gauge 化} \rightarrow \text{B-twist}$$

そして、A-twist によって得られる理論のことを topological A-model と言い、B-twist によって得られる理論のことを topological B-model と言う。そこで実際に action (0.8) を用いて具体的にこれらの gauge 化を実行してみる。

† Topological A-model

$\mathcal{L} - (2it) \frac{i}{2} \int_{\Sigma_g} d^2z \omega_\alpha j_V^\alpha$ によって、 $-\frac{i}{2} \omega_\alpha j_V^\alpha = \frac{i}{2} \omega_z G_{IJ} \psi_-^I \psi_-^{\bar{J}} - \frac{i}{2} \omega_{\bar{z}} G_{IJ} \psi_+^{\bar{I}} \psi_+^J$ から、 $\psi_-^{\bar{I}}$ の spin は 0 に変わって (これを $\rightarrow \chi^{\bar{I}}$ と書く), ψ_+^I の spin も 0 となる (これを $\rightarrow \chi^I$ と書く)。同様にして、 ψ_-^I の spin は -1 に (これを $\rightarrow \psi_z^I$ と書く), $\psi_+^{\bar{I}}$ の spin は $+1$ に変わる (これを $\rightarrow \psi_{\bar{z}}^{\bar{I}}$ と書く)。

¹連続変形可能な対象が全て同一視されてしまうのだが (それ故に string の dynamics は議論できない), その結果として理論構築の障害となるような部分が捨て去られて、string theory に内在的に備わっている性質が浮き彫りになる。

²この model では理論の見通しがかなり簡単になって、Chern-Simons theory からその厳密解が得られることが分かる (6.2.3 節)。

† Topological B-model

$\mathcal{L} + (2it)\frac{i}{2}\int_{\Sigma_g} d^2z\omega_\alpha j_A^\alpha$ によって, $\frac{i}{2}\omega_\alpha j_A^\alpha = \frac{i}{2}\omega_z G_{I\bar{J}}\psi_-^I\psi_-^{\bar{J}} + \frac{i}{2}\omega_{\bar{z}} G_{\bar{I}J}\psi_+^{\bar{I}}\psi_+^J$ から, $\psi_-^{\bar{I}}$ の spin は 0 に変わって (これを $\rightarrow \lambda_{\bar{2}}^{\bar{I}}$ と書く), ψ_+^I の spin は +1 となる (これを $\rightarrow \rho_z^I$ と書く). 同様にして, ψ_-^I の spin は -1 に (これを $\rightarrow \rho_{\bar{z}}^I$ と書く), $\psi_+^{\bar{I}}$ の spin は 0 に変わる (これを $\rightarrow \lambda_1^{\bar{I}}$ と書く).

まとめると次のようになる.

Field	Bundle		Field	Bundle		Field	Bundle
χ^I	$\phi^*(T_M^{1,0})$	A-twist	ψ_+^I	$K^{1/2} \otimes \phi^*(T_M^{1,0})$	B-twist	ρ_z^I	$K \otimes \phi^*(T_M^{1,0})$
$\psi_z^{\bar{I}}$	$K \otimes \phi^*(T_M^{0,1})$		$\psi_+^{\bar{I}}$	$K^{1/2} \otimes \phi^*(T_M^{0,1})$		$\lambda_1^{\bar{I}}$	$\phi^*(T_M^{0,1})$
$\psi_{\bar{z}}^I$	$\bar{K} \otimes \phi^*(T_M^{1,0})$		ψ_-^I	$\bar{K}^{1/2} \otimes \phi^*(T_M^{1,0})$		$\rho_{\bar{z}}^I$	$\bar{K} \otimes \phi^*(T_M^{1,0})$
$\chi^{\bar{I}}$	$\phi^*(T_M^{0,1})$		$\psi_-^{\bar{I}}$	$\bar{K}^{1/2} \otimes \phi^*(T_M^{0,1})$		$\lambda_{\bar{2}}^{\bar{I}}$	$\phi^*(T_M^{0,1})$

この表から分かるように topological A-model は vector 理論であり, topological B-model は chiral 理論になっている (それぞれの理論は通常の Type IIA,B string theory に対応している). 以下でそれぞれの model について議論する [51, 52, 53, 10]. なおこの 2 つの model はちょうど mirror 関係にある. 象徴的に述べておくと, Calabi-Yau 多様体 M とその mirror 多様体 \tilde{M} に対して M 上の topological A-model は \tilde{M} 上の topological B-model と mirror 写像によって 1 対 1 で対応付ける事ができる [34].

4.1.2 Topological A-model

まずは A-twist によって action (0.8) は次のようになる (A-model action).

$$\mathcal{L} = 2t \int_{\Sigma_g} d^2z \left(\frac{1}{2} G_{ij} \partial_z x^i \partial_{\bar{z}} x^j + i G_{I\bar{J}} \psi_z^I D_z \chi^{\bar{J}} + i G_{\bar{I}J} \psi_{\bar{z}}^{\bar{I}} D_{\bar{z}} \chi^J - R_{I\bar{I}J\bar{J}} \psi_z^I \psi_{\bar{z}}^{\bar{I}} \chi^J \chi^{\bar{J}} \right). \quad (4.5)$$

次に twist によって BRST charge (scalar supercharge $Q = Q_L + Q_R$) が定義できる事に注意して, この BRST charge に対する場の変換則を考える. そこで $N = 2$ の super 変換 (0.9) において, ϵ_- , $\tilde{\epsilon}_+$ は Σ_g 上の関数, $\tilde{\epsilon}_-$, ϵ_+ は Σ_g 上 K^{-1} , \bar{K}^{-1} の断面となっている事に注意して, ϵ_- , $\tilde{\epsilon}_+$ を定数に, $\tilde{\epsilon}_-$, ϵ_+ を 0 と置く事によって (0.9) は次のようになる.

$$\begin{aligned} \delta x^I &= i\epsilon_- \chi^I, & \delta x^{\bar{I}} &= i\tilde{\epsilon}_+ \chi^{\bar{I}}, \\ \delta \chi^I &= 0, & \delta \psi_z^{\bar{I}} &= -\epsilon_- \partial_z x^{\bar{I}} - i\tilde{\epsilon}_+ \chi^{\bar{J}} \Gamma_{\bar{J}\bar{K}}^{\bar{I}} \psi_z^{\bar{K}}, \\ \delta \psi_{\bar{z}}^I &= -\tilde{\epsilon}_+ \partial_{\bar{z}} x^I - i\epsilon_- \chi^J \Gamma_{JK}^I \psi_{\bar{z}}^K, & \delta \chi^{\bar{I}} &= 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

ここで, (ψ について) on-shell で ${}^3\delta^2 = 0$ が成り立っていることに注意しておく. 今簡単な為に $\epsilon_- = \tilde{\epsilon}_+ = \epsilon$ とし, この変換を BRST charge を用いて, $\delta\Phi = i\epsilon\{Q, \Phi\}$ で表して ($Q^2 = 0$ for on-shell), (4.6) を書き直すと次が得られる.

$$\begin{aligned} [Q, x^I] &= \chi^I, & [Q, x^{\bar{I}}] &= \chi^{\bar{I}}, \\ \{Q, \chi^I\} &= 0, & \{Q, \psi_z^{\bar{I}}\} &= i\partial_z x^{\bar{I}} - \chi^{\bar{J}} \Gamma_{\bar{J}\bar{K}}^{\bar{I}} \psi_z^{\bar{K}}, \\ \{Q, \psi_{\bar{z}}^I\} &= i\partial_{\bar{z}} x^I - \chi^J \Gamma_{JK}^I \psi_{\bar{z}}^K, & \{Q, \chi^{\bar{I}}\} &= 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

また, action (4.5) は ψ についての運動方程式を用いると次の形で書ける⁴.

$$\mathcal{L} = -i\{Q, V\} + t \int_{\Sigma_g} \phi^*(J), \quad V = t \int_{\Sigma_g} d^2z G_{I\bar{J}} (\psi_z^I \partial_z x^{\bar{J}} + \partial_{\bar{z}} x^I \psi_{\bar{z}}^{\bar{J}}). \quad (4.8)$$

³ $\psi_z^{\bar{I}}; iG_{I\bar{J}} D_z \chi^{\bar{J}} - R_{I\bar{I}J\bar{J}} \psi_z^I \chi^{\bar{J}} \chi^{\bar{J}} = 0, \quad \psi_{\bar{z}}^I; iG_{\bar{I}J} D_{\bar{z}} \chi^J + R_{I\bar{I}J\bar{J}} \psi_{\bar{z}}^{\bar{I}} \chi^J \chi^{\bar{J}} = 0$ を用いる. なお補助場を用いると, off-shell でも以下の議論はうまくいくのだが [53], ここでは on-shell の議論で十分.

⁴ $\{Q, G_{I\bar{J}}\} = \partial_i G_{I\bar{J}} \chi^i$ に注意. ここでも, 補助場を入れると off-shell で O.K.

ここで $J \doteq iG_{I\bar{J}}dx^I \wedge dx^{\bar{J}}$ は Kähler form で、この式の第 2 項は $\int_{\Sigma_g} \phi^*(J) \doteq \int_{\Sigma_g} d^2z G_{I\bar{J}}(\partial_z x^I \partial_{\bar{z}} x^{\bar{J}} - \partial_{\bar{z}} x^I \partial_z x^{\bar{J}})$ である。これは M 上の Kähler form の ϕ による world sheet 上への pullback で topological な term であり、この項がある為に A-model は Kähler 構造に依存する理論となる⁵。(以下の議論では、まずこの項を除いて考える。) この action の形から energy-momentum tensor が BRST exact な形で与えられる事に注意しておく。

$$T_{\alpha\beta} = \frac{2}{\sqrt{h}} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta h^{\alpha\beta}} = -i\{Q, \Lambda_{\alpha\beta}\}, \quad \Lambda_{\alpha\beta} = \frac{2}{\sqrt{h}} \frac{\delta V}{\delta h^{\alpha\beta}}. \quad (4.9)$$

ここで BRST 量子化の議論から次のような条件を援用する。

$$|Phys\rangle : \text{physical state} \stackrel{\text{def}}{\longleftrightarrow} Q|Phys\rangle = 0. \quad (4.10)$$

そこで、考えている理論の真空を上の意味で physical だとして、(2D metric に依らない) observable \mathcal{O} に対して generating function $\mathcal{Z}(\mathcal{O}) = \langle \mathcal{O} \rangle = \int \mathcal{D}X e^{-\mathcal{L}} \cdot \mathcal{O}$ を考える。(ここで X は今考えている理論の場を表している。) ここで BRST exact な真空期待値は $\langle \{Q, \mathcal{O}\} \rangle = 0$ となる事に注目して、2つの observable の差が BRST exact であるものを同一視する。ここで observable \mathcal{O} の真空期待値を 2D metric に関して変分すると、 $\delta \mathcal{Z}(\mathcal{O}) = \int \mathcal{D}X e^{-\mathcal{L}} \cdot (-\delta \mathcal{L} \cdot \mathcal{O}) = \int \mathcal{D}X e^{-\mathcal{L}} \cdot (i\frac{1}{2}\{Q, \int \sqrt{h} \delta h^{\alpha\beta} \Lambda_{\alpha\beta}\} \cdot \mathcal{O})$ となるので、 $\langle \mathcal{O} \rangle$ が (2D metric に依らない) 位相不変量を定義する為には、 $\{Q, \mathcal{O}\} = 0$ でなければならない。このような cohomological な observable は以下のように具体的に定義できる。

† Observables

BRST 対称性である (4.7) を観察して、特に $[Q, x^i] = \chi^i$, $\{Q, \chi^i\} = 0$ に注目する。そこで $A^n(M) \ni A = A_{i_1 \dots i_n} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_n}$ に対して $\mathcal{O}_A^{(0)} \doteq A_{i_1 \dots i_n} \chi^{i_1} \dots \chi^{i_n}$ を定義すると (χ は target space 上 1-form), $\{Q, \mathcal{O}_A^{(0)}\} = \partial_{i_0} A_{i_1 \dots i_n} \chi^{i_0} \chi^{i_1} \dots \chi^{i_n} = \mathcal{O}_{dA}^{(0)}$ を得る。よって、A-model の observable と多様体 M 上の de Rham cohomology class が 1 対 1 に対応する。これを用いると、以下のように位相不変量が逐次定義されていく。

Proposition 4.1 [51]

$A_1, \dots, A_k \in H^x(M)$ (それぞれの degree= d_1, \dots, d_k) を M 上の cohomology class, 点 $P_1, \dots, P_k \in \Sigma_g$ として $\mathcal{Z}(A_1, \dots, A_k) \doteq \langle \mathcal{O}_{A_1}^{(0)}(P_1) \dots \mathcal{O}_{A_k}^{(0)}(P_k) \rangle$ を定義すると、これは Σ_g と M の metric や複素構造には依らず (実際には topological term があるので M の metric には依存する), 特に $P_i \in \Sigma_g$ にも依らない。

Proof. Metric や複素構造に依らない事は (4.9) から直ちに分かるので、点 P に依らない事のみ示す。その為に $P \neq P' \in \Sigma_g$ を考える。この時、

$$\langle (\mathcal{O}_A^{(0)}(P) - \mathcal{O}_A^{(0)}(P')) \cdot \prod_j \mathcal{O}_{A_j}^{(0)}(P_j) \rangle = \langle \int_{P'}^P \partial_\alpha \mathcal{O}_A^{(0)} d\sigma^\alpha \cdot \prod_j \mathcal{O}_{A_j}^{(0)}(P_j) \rangle = \langle \{Q, \int_{P'}^P \mathcal{O}_A^{(1)} \prod_j \mathcal{O}_{A_j}^{(0)}(P_j)\} \rangle = 0.$$

ここで、degree= n の cohomology class A に対して $\mathcal{O}_A^{(1)} \doteq n A_{i_1 \dots i_n} dx^{i_1} \chi^{i_2} \dots \chi^{i_n}$ である。 ■

この証明から得られたような Q -closed にはならないが、world sheet 上で全微分になる observables が次のように逐次定義される。

$$\begin{aligned} 0 &= \{Q, \mathcal{O}_A^{(0)}\}, & \mathcal{O}_A^{(0)} &= A_{i_1 \dots i_n} \chi^{i_1} \dots \chi^{i_n}, \\ d\mathcal{O}_A^{(0)} &= \{Q, \mathcal{O}_A^{(1)}\}, & \mathcal{O}_A^{(1)} &= n A_{i_1 \dots i_n} dx^{i_1} \chi^{i_2} \dots \chi^{i_n}, \\ d\mathcal{O}_A^{(1)} &= \{Q, \mathcal{O}_A^{(2)}\}, & \mathcal{O}_A^{(2)} &= \frac{n(n-1)}{2} A_{i_1 \dots i_n} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \chi^{i_3} \dots \chi^{i_n}, \\ d\mathcal{O}_A^{(2)} &= 0, & & \text{(world sheet 上 3-form 以上は vanish.)} \end{aligned} \quad (4.11)$$

そこで、 Σ_g 上で homology 1-cycle γ を取って $W_A(\gamma) \doteq \int_\gamma \mathcal{O}_A^{(1)}$ を考えると、 $\{Q, W_A(\gamma)\} = \int_\gamma d\mathcal{O}_A^{(0)} = 0$ より $W_A(\gamma)$ は BRST closed となっている。一方で $\gamma = \partial\beta$ (trivial cycle) の時、Stokes の定理を用いる

⁵Action (4.8) に B -場を $-it \int_{\Sigma_g} \phi^*(B)$ と付け加えることによって、complexified Kähler form $\omega = J + iB$ が定義される。

と $W_A(\gamma) = \int_{\partial\beta} \mathcal{O}_A^{(1)} = \int_{\beta} d\mathcal{O}_A^{(1)} = \int_{\beta} \{Q, \mathcal{O}_A^{(2)}\}$ より, $W_A(\gamma)$ は BRST exact となるので $W_A(\gamma)$ は γ の homology class にしか依らない. 同様に, Σ_g 上で homology 2-cycle Σ' を取って, $W_A(\Sigma') \doteq \int_{\Sigma'} \mathcal{O}_A^{(2)}$ を定義すれば, これは Σ' の homology class にしか依らない BRST closed な量を与える. 以上のようにして topological A-model には位相不変量が定義できるが, この位相不変量が non-trivial (nonzero) な量を定義する為には以下に述べる selection rule が必要となる.

† World sheet instanton と Selection rule

まずは action (4.8) を見ると, topological term を除いて BRST exact となっている事に注目する. この事から observables は, (topological term を除いて) coupling t の大きさに依らないことが分かるので (coupling t に関して observables の変分を実行するとすぐ分かる), observables を large t で評価する事ができて path に効くのは action の極小値となる. そこで今 (4.8) の V の形に着目すると, この極値解は bosonic field に対する正則写像として与えられる.

$$\partial_{\bar{z}} x^I = \partial_z x^{\bar{I}} = 0. \quad (4.12)$$

このような (holomorphic) map $\phi : \Sigma_g \rightarrow M$ の事を world sheet instanton という. この instanton 解周りの fluctuation により得られる空間を, instanton moduli space \mathcal{M}_n (n は topological term から来る真空の類別を表す) と言い, 実はこの量は fermion χ と ψ の zero mode 解の量子論的な fluctuation から生じるものと一致する. 即ち, χ が ghost number 1 の場, ψ が ghost number -1 の場 (anti-ghost) であることから,それぞれの zero mode 解 (これは action (4.5) の kinetic term に着目して (large coupling では, このような free な term の評価だけで十分), その運動方程式 $D_{\bar{z}}\chi^I = D_z\chi^{\bar{I}} = 0$ と $D_{\bar{z}}\psi^{\bar{I}} = D_z\psi^I = 0$ から得られる) の個数 a_n, b_n を用いて, $\dim\mathcal{M}_n = a_n - b_n$ となる. この Dirac operator の zero mode の数は, 指数定理の結果として n に依存しない形で

$$\dim\mathcal{M}_n = 2m(1-g) + 2 \int_{\Sigma_g} \phi^*(C_1(M)) \quad (4.13)$$

と得られる. ここで m は target space の複素次元, $\phi^*(C_1(M))$ は first Chern class の Riemann 面への pull-back, g は Riemann 面の種数である.

そこで, action (4.5) の large coupling を考えて fermion の kinetic term を partition function から Gauss 積分すると, 分子に上で述べた fermion の zero mode 解から来る寄与が現れる. この事から observables が nonzero で定義されるためには, operator \mathcal{O} の zero mode がこれを相殺する必要がある. この事を observables の selection rule という. 以上を踏まえると, (4.11) で述べた observables から得られる位相不変量に関して次の事が分かる⁶.

Proposition 4.2 (Selection Rule)

Map $\phi : \Sigma_g \rightarrow M$ の instanton moduli \mathcal{M} に対して,
 $H_x(\Sigma_g) \ni \gamma_1, \dots, \gamma_k$ ($\dim = t_1, \dots, t_k$), $H^x(M) \ni A_1, \dots, A_k$ ($\text{degree} = d_1, \dots, d_k$) とする.
 この時, 位相不変量 $\mathcal{Z}((A_1, \gamma_1), \dots, (A_k, \gamma_k)) = \left\langle \prod_{i=1}^k W_{A_i}(\gamma_i) \right\rangle$ が nonzero である為には,

$$\sum_{i=1}^k (d_i - t_i) = 2m(1-g) + 2 \int_{\Sigma_g} \phi^*(C_1(M)) \quad (4.14)$$

が満たされなければならない.

ここで特に Calabi-Yau 多様体を考えて, かつ observable としては $\mathcal{O}_A^{(0)}$ を取ると, (4.14) から selection rule $\sum_{i=1}^k d_i = 2m(1-g)$ が得られる. この時 genus が 2 以上の Riemann 面に対しては, これを満たす事ができないので observable が trivial になり, genus が 1 の Riemann 面に対しては observable を含まない partition function のみが non-trivial となるので, 結局この observable に対して non-trivial な位相不変量が

⁶一般的には $\dim\mathcal{M}_n > 0$ (Calabi-Yau 多様体の場合には Riemann 面の種数 0 に相当) ならば $b_n = 0$ となる. それを踏まえた上で, (4.11) の observables の zero mode が全て χ から来ている事に注意しておく.

定義される為には, Riemann 面の genus が 0 でなければならない. さらに今, 複素 3 次元 Calabi-Yau 多様体とその上の 2-form ω を考えると non-trivial な相関関数が次の形で与えられる.

$$\left\langle \mathcal{O}_{\omega_A}^{(0)} \mathcal{O}_{\omega_B}^{(0)} \mathcal{O}_{\omega_C}^{(0)} \right\rangle = \#(N_A, N_B, N_C) + \sum_{\beta \neq 0} I_{0,3,\beta}(A, B, C) Q^\beta. \quad (4.15)$$

ここで第 1 項は 1.1.4 節で述べた classical な位相不変量である intersection number を与えており trivial instanton を表している. 一方で第 2 項は non-trivial な instanton を与えており, world sheet から target space 上の non-trivial 2-cycle への巻き付きの寄与を表している⁷. (Q の項は action (4.8) の topological term から来ている (quantum cohomology term).) ここで $I_{0,3,\beta}(A, B, C)$ を, 次のように ω に依存しない項で分離できる事が知られている.

$$I_{0,3,\beta}(A, B, C) = N_{0,\beta} \int_{\beta} \omega_A \int_{\beta} \omega_B \int_{\beta} \omega_C. \quad (4.16)$$

そこで, この係数 $N_{0,\beta}$ のことを Gromov-Witten invariant といって, prepotential と呼ばれる topological string theory で重要な役割を果たす量が次で定義される.

$$F_0(t) \doteq \sum_{\beta} N_{0,\beta} Q^\beta. \quad (4.17)$$

4.1.3 Topological B-model

A-model と同様に考えると良いが, BRST 変換則 (4.20) を導くとすぐに分かるように, 場 $\lambda_{1,2}^{\bar{I}}$ を以下で定義し直した方が理論の見通しが良くなる.

$$\eta^{\bar{I}} \doteq \lambda_1^{\bar{I}} + \lambda_2^{\bar{I}}, \quad \theta_I \doteq G_{I\bar{J}}(\lambda_1^{\bar{J}} - \lambda_2^{\bar{J}}). \quad (4.18)$$

そうすると B-model action は次のようになる.

$$\mathcal{L} = t \int_{\Sigma_g} d^2z \left(G_{ij} \partial_z x^i \partial_{\bar{z}} x^j + i G_{I\bar{J}} \eta^{\bar{J}} (D_z \rho_z^I + D_{\bar{z}} \rho_z^I) + i \theta_I (D_{\bar{z}} \rho_z^I - D_z \rho_{\bar{z}}^I) + R_{I\bar{I}J\bar{J}} \rho_z^I \rho_{\bar{z}}^J \eta^{\bar{I}} \theta_K G^{K\bar{J}} \right). \quad (4.19)$$

A-model と同様にして BRST 変換則は次で与えられる (冪零性は自明).

$$\begin{aligned} [Q, x^I] &= 0, & [Q, x^{\bar{I}}] &= \eta^{\bar{I}}, \\ \{Q, \rho_z^I\} &= i \partial_z x^I, & \{Q, \rho_{\bar{z}}^I\} &= i \partial_{\bar{z}} x^I, \\ \{Q, \eta^{\bar{I}}\} &= 0, & \{Q, \theta_I\} &= 0. \end{aligned} \quad (4.20)$$

この BRST charge を用いると action (4.19) は次の形で書ける⁸.

$$\mathcal{L} = -i\{Q, V\} + t \int_{\Sigma_g} W, \quad V = t \int_{\Sigma_g} d^2G_{I\bar{J}} \left(\rho_z^I \partial_{\bar{z}} x^{\bar{J}} + \rho_{\bar{z}}^I \partial_z x^{\bar{J}} \right). \quad (4.21)$$

ここで第 2 項の W は topological な項で, $W \doteq -\theta_I D \rho^I - i/2 R_{I\bar{I}J\bar{J}} \rho^I \wedge \rho^J \eta^{\bar{I}} \theta_K G^{K\bar{J}}$ のように微分形式で完全に書く事ができる. 故に, この model からは A-model の時と同様にして, Σ_g と M の Kähler 構造や複素構造に依存せずに coupling にも依らない⁹ model が定義できる. ところが実際には BRST 変換則 (4.20) から分かるように, この model では M の正則, 反正則依存の場が全く違った変換を行う為には M の複素構造には依存することになる. また B-model は chiral な理論である為には, 通常は chiral anomaly が存在して理論が

⁷記号の意味: $\beta \doteq \sum_{i=1}^{b_2} n_i \sigma_i$ ($\{\sigma_i\} \in H_2(M, \mathbb{Z})$ の base, n_i : instanton number), $Q^\beta \doteq \Pi_i Q_i^{n_i}$, ($Q_i \doteq e^{-t_i}$, $t_i \doteq \int_{\sigma_i} \omega$, ω : complexified Kähler form), $I_{0,3,\beta} : g=0$, $\dim_{\mathbb{C}} M = 3$, non-trivial instanton β から来る moduli 空間上の積分

⁸最初の 2 つの項が BRST exact になって, 残りの 2 つの項が topological な項になる.

⁹ W から t 依存性を除く為に $\theta \rightarrow t^{-1}\theta$ と scaling する. (V は θ に依らない事に注意.)

consistent に定義できない。そこで B-model においては常に多様体 M は Calabi-Yau 多様体であると考えなければならない。

† Observables と Selection rule

A-model と同様にして BRST closed な observables を定義したい。その為に (4.20) の 1 行目と 3 行目の変換則に着目して、 $H_{\bar{\partial}}^p(M, \wedge^q TM) \ni B = B_{\bar{I}_1 \dots \bar{I}_p}^{J_1 \dots J_q} dx^{\bar{I}_1} \wedge \dots \wedge dx^{\bar{I}_p} \frac{\partial}{\partial x^{J_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{J_q}}$ に対して $\mathcal{O}_B \doteq B_{\bar{I}_1 \dots \bar{I}_p}^{J_1 \dots J_q} \eta^{\bar{I}_1} \dots \eta^{\bar{I}_p} \theta_{J_1} \dots \theta_{J_q}$ を定義すると、B-model の observable と多様体 M 上の Dolbeault cohomology class が 1 対 1 に対応する。そこで Proposition 4.1 と同様にして相関関数 $\mathcal{Z}(B_1, \dots, B_k) \doteq \langle \mathcal{O}_{B_1}(P_1) \dots \mathcal{O}_{B_k}(P_k) \rangle$ ($B_i \in H^{p_i}(M, \wedge^{q_i} TM)$) を定義した時に、この量が nonzero である為には (Proposition 4.2 参照、ただしこの selection rule は complex moduli 空間から生じるものである),

$$\sum_{i=1}^k p_i = \sum_{i=1}^k q_i = m(1-g) \quad (4.22)$$

でなければならない。故に相関関数で非自明なものを考えたいのであれば、A-model 同様に球面上の理論に限定されてしまう。ここで A-model との大きな違いとして world sheet instanton の問題がある。B-model では action (4.21) から large t の評価によって古典解を求めると、直ちに分かるように、それは constant map となる。よって A-model と違って B-model では classical な位相不変量が exact な結果を与える (only trivial instanton)。今 Calabi-Yau 多様体を考えているので nowhere vanishing holomorphic m -form Ω が存在することをを用いると、 $H_{\bar{\partial}}^p(M, \wedge^q TM)$ の元を $H^{m-q,p}(M)$ の元に map する事ができる。そこで特に $m=3$ の時を考えて、 $H_{\bar{\partial}}^1(M, T^{1,0})$ の元を $H^{2,1}(M)$ の元に map して、selection rule (4.22) を満足させると次のような non-trivial な相関関数が得られる。

$$\langle \mathcal{O}_{\omega_A} \mathcal{O}_{\omega_B} \mathcal{O}_{\omega_C} \rangle = \int_M \Omega_{IJK} \omega_A^I \wedge \omega_B^J \wedge \omega_C^K \wedge \Omega. \quad (4.23)$$

これは 1.1.4 節で述べた (2, 1)-Yukawa coupling (1.26) と同じ形であり、1.2.1 節で述べたように prepotential の 3 階微分から得る事ができる。

4.2 位相的弦の導入

4.2.1 2次元重力との結合

以上で見たように topological σ -model の理論において (A-model, B-model とともに), non-trivial な相関関数はかなり制限されたものしか存在しなくなる。そこで topological string theory は以下のように、world sheet の metric を dynamical にする事によって定義される (2次元重力との結合)。その為には、上で述べた topological theory と bosonic string theory[2] における次の類似点に着目すれば良い。まず上の topological theory には、2次元で spin 0 の BRST charge Q だけでなく、spin 1, -1 の fermionic charge $G_z, G_{\bar{z}}$ も存在しており、元の $N=2$ の代数から $P_{z, \bar{z}} = \{Q, G_{z, \bar{z}}\}$ (P は平行移動の generator) が成り立つ事が分かる。一方で bosonic string theory において、world sheet の reparametrization に関する FP gauge 固定の処方から anti-ghost $b(z), \bar{b}(\bar{z})$ が得られ、かつ BRST charge も定義できてその energy-momentum tensor が $T(z) = \{Q, b(z)\}$ の形で得られる。このような類似点 ($G \leftrightarrow b$) を踏まえ、bosonic string theory の amplitude 計算の議論から、 $g \geq 2$ に対する topological string theory の partition function を次で定義するのが自然である事が分かる [54]。

$$F_g \doteq \int_{\mathcal{M}_g} \left\langle \prod_{k=1}^{6g-6} (G, \mu_k) \right\rangle, \quad (G, \mu_k) \doteq \int_{\Sigma_g} (G_z \mu_k + G_{\bar{z}} \bar{\mu}_k). \quad (4.24)$$

ここで $\mu_k \doteq (1/2)h^{-1}\partial_k h$ は通常の Beltrami differential (Riemann 面の複素構造の deformation) を表して、種数 g の Riemann 面の deformation の自由度である $6g-6$ 個の vertex operator が挿入されている。

上の定義には Riemann 面の moduli 空間 \mathcal{M}_g 上の積分が含まれている事に注意しておく. ここで実際に n 個の observable を挿入して n -point function を計算する時には, n 点付きの Riemann 面の moduli 空間 $\mathcal{M}_{g,n}$ を考えなければならない. そこで observable として $\mathcal{O}_A^{(0)}$ を考えると, selection rule (4.14) は次のように修正される. (右辺第 3 項は種数 g の Riemann 面の複素構造の deformation の自由度.)

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n d_i = m(1-g) + \int_{\Sigma_g} \phi^*(C_1(M)) + 3(g-1) + n. \quad (4.25)$$

この式から複素 3 次元の Calabi-Yau 多様体を考えて observable として 2-form を取ると, 上の selection rule は常に満たされる事が分かる. このような現象は複素 3 次元の Calabi-Yau 多様体ならではのであり, その意味でこの次元を critical dimension と言う. 即ち, この次元では任意の genus に対して ((4.17) に倣って), Gromov-Witten invariant $N_{g,\beta}$ が定義出来る.

$$F_g(t) = \sum_{\beta} N_{g,\beta} Q^{\beta}. \quad (4.26)$$

これを定義に従って具体的に計算することは, 非常に難しいのだが A-model について trivial instanton の寄与は具体的に計算されていて, 次のような形が得られている¹⁰[55]. ($g \geq 2$ に対して)

$$F_g(t) = \frac{\chi(M)}{2} \int_{\mathcal{M}_g} C_{g-1}^3 + (\text{non-trivial instanton}). \quad (4.27)$$

ここで, C_{g-1} は \mathcal{M}_g 上の Hodge bundle の $g-1$ 次の Chern class であり, 第 1 項を計算すると次の形になる事が示されている.

$$\int_{\mathcal{M}_g} C_{g-1}^3 = -\chi_g(\mathcal{M}_g) \frac{B_{2g-2}}{(2g-2)!}, \quad \chi_g(\mathcal{M}_g) \doteq \frac{B_{2g}}{2g(2g-2)}. \quad (4.28)$$

ここで, $\chi_g(\mathcal{M}_g)$ は genus g の moduli 空間の virtual Euler characteristic と呼ばれており, B は Bernoulli 数で, 次のような冪級数で定義される [56].

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n = 1 + B_1 x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} x^{2n}. \quad (4.29)$$

2 つ目の等号では $B_{2n+1} (n \geq 1) = 0$ となる事を用いた¹¹. さらに, 整数論的にも興味深い ζ -関数¹² は Bernoulli 数を用いて次のように計算できる.

$$\zeta(2m) = \frac{(-1)^{m-1} (2\pi)^{2m} B_{2m}}{2(2m)!} = \frac{(2\pi)^{2m} |B_{2m}|}{2(2m)!}, \quad (m \in \mathbb{N}). \quad (4.30)$$

この Bernoulli 数は以下で述べる節で中心的な役者として登場する (特に geometric transition).

また topological string theory では, 2 次元重力の効果を取り入れる事によって, 一般の partition function があらゆる genus の Riemann 面からの寄与を (string coupling g_s によるべき展開として) 足し上げる事により定義される. (冪の形は有効理論 (dilaton) の Euler 数から来ており, 指数関数の肩に乗せる事は連結とは限らない寄与も全て足し上げる事を意味する.)

$$\mathcal{Z}_{GW} \doteq \exp \left(\sum_{g=0}^{\infty} g_s^{2g-2} F_g(t) \right). \quad (4.31)$$

本修士論文で以下述べるのは, 特に断りが無い限り全て A-model の議論とする.

¹⁰第 2 項は $[\phi(\Sigma_g)] = \beta$ なる正則写像の数え上げとして得られる.

¹¹最初の数項は $B_1 = -1/2, B_2 = 1/6, B_4 = -1/30, \dots$ となって, 特に $|B_{2n}| = (-1)^{n-1} B_{2n}$ が成り立つ.

¹²定義は $\zeta(s) \doteq \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ を複素平面全体に解析接続することによってなされる.

4.2.2 Open Gromov-Witten invariant

通常は Riemann 面という境界の無いものを考えるのであるが、開弦を考えると world sheet としての Riemann 面には必然的に境界が出来る。6.2 節では位相的開弦の理論を考えるのであるが(ここでは位相的開弦の議論が WZW model の議論に置き換えられる)、ここでは境界のある Riemann 面を target 空間に map する事によって上述と同様の不変量である open Gromov-Witten invariant を定義しておく。まず境界 (h 個) 付きの Riemann 面 $\Sigma_{g,h}$ から CY^3 への map ϕ をこれまでと同様に定義して、この map を用いて Riemann 面の境界 $\partial\Sigma_{g,h}$ から CY^3 の部分多様体 L (5.2.2 節の Fact 5.4 により、これは special Lagrangian submanifold とする) への map を考える。この map による instanton の寄与として、まず閉弦の理論と同様に bulk に対する相対 homology $\phi_*[\Sigma_{g,h}] = \beta \in H_2(CY^3, L)$ と、開弦には無かった寄与として境界からの寄与がある。まずは $\dim H_1(L, \mathbb{Z}) = 1$ と仮定して話を進める。この時、 $H_1(L, \mathbb{Z})$ は non-trivial な 1-cycle γ によって生成されて ($\phi_*[C_i] = \omega_i \gamma$, $C_i \in \partial\Sigma_{g,h}$ ($i = 1, \dots, h$), $\omega_i \in \mathbb{Z}$: winding number), $\vec{\omega} \doteq (\omega_1, \dots, \omega_h)$ と書く。これらの記号を用いると (4.26) の類似物として (genus) = g , (winding number) = $\vec{\omega}$ の prepotential が

$$F_{\vec{\omega},g}(t) = \sum_{\beta} N_{\vec{\omega},g,\beta} Q^{\beta} \quad (4.32)$$

の形で形式的に与えられる。ここで $N_{\vec{\omega},g,\beta}$ は一般的に有理数となって、これを open Gromov-Witten invariant という。さらに (4.31) と同様にして、開弦の prepotential を全ての genus と全ての hole についての寄与を考えて次のように定義する。(この時、開弦の端は gauge の自由度がある為そこから得られる gauge 場 ($U(N)$) による holonomy 行列 V (open string modulus) を導入する.)

$$F(V) \doteq \sum_{g=0}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{\omega_1, \dots, \omega_h} \frac{i^h}{h!} g_s^{2g-2+h} F_{\vec{\omega},g}(t) Tr V^{\omega_1} \dots Tr V^{\omega_h}. \quad (4.33)$$

ここで $\frac{i^h}{h!}$ の i は便宜上導入した factor であり、 $h!$ で割るのは穴に区別が付けられない事による symmetric factor である。また coupling の指数は境界付き 2 次元面の Euler 数となっている。ここで次のような resummation を行う。(例: $\vec{\omega} = (1, 2, 3, 3, 5) \rightarrow \vec{k} = (1, 1, 2, 0, 1, 0, 0, \dots)$.)¹³

$$\vec{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_h) \rightarrow \vec{k} = (k_1, k_2, \dots), \quad (k_i : \vec{\omega} \text{ に含まれる } i \text{ の数}). \quad (4.34)$$

この時 $Tr V^{\omega_1} \dots Tr V^{\omega_h} = \prod (Tr V^j)^{k_j} \doteq \Upsilon_{\vec{k}}(V)$, $h = |\vec{k}|$ となり、 \vec{k} と同じものを与える $\vec{\omega}$ が $h! / \prod_j k_j!$ 個あるので、(4.33) を次の形に書き換えることが出来る。

$$F(V) = \sum_{g=0}^{\infty} \sum_{\vec{k}} \frac{i^{|\vec{k}|}}{\prod k_j!} g_s^{2g-2+h} F_{\vec{k},g}(t) \Upsilon_{\vec{k}}(V) = \sum_R F_R(g_s, t) Tr_R V. \quad (4.35)$$

ただし最後の等号では次の Frobenius の指標公式を用いた (l は box の数)。

$$\begin{aligned} \Upsilon_{\vec{k}}(V) &= \sum_R \chi_R(C(\vec{k})) Tr_R V, \quad (\chi_R(C(\vec{k})): \text{共役類 } C(\vec{k}) \text{ で評価した表現 } R \text{ での対称群 } S_l \text{ の指標}), \\ Tr_R V &= \sum_{\vec{k}} \frac{1}{z_{\vec{k}}} \chi_R(C(\vec{k})) \Upsilon_{\vec{k}}(V), \quad \left(z_{\vec{k}} \doteq \prod_j k_j! j^{k_j} \right). \end{aligned} \quad (4.36)$$

ここで次の指標の直交性にも注意しておく。

$$\sum_{\vec{k}} \frac{1}{z_{\vec{k}}} \chi_R(C(\vec{k})) \chi_{R'}(C(\vec{k})) = \delta_{RR'}, \quad \sum_R \chi_R(C(\vec{k})) \chi_R(C(\vec{k}')) = z_{\vec{k}} \delta_{\vec{k}\vec{k}'}. \quad (4.37)$$

¹³以下、 $U(N)$ 群の表現空間を対称群の表現空間を用いて記述する。即ち、群の表現を Young tableaux を用いて表す。この時、winding base である \vec{k} は、ある対称群の共役類として考える事が出来る。ここで $l = \sum_i \omega_i = \sum_j j k_j$ は Young tableaux の box の総数を与える。

故に, 位相的開弦の partition function が $\mathcal{Z}(V) = e^{F(V)} = \sum_R \mathcal{Z}_R(g_s, t) \text{Tr}_R V$ という形で与えられる. このように書いておくと, 上の設定で $\dim H_1(L, \mathbb{Z}) = K$ の場合に一般化できて, それぞれを α で類別して $(\omega^{(\alpha)}, \alpha = 1, \dots, K)$, 形式的に partition function が次の形で与えられる.

$$\mathcal{Z}(V_i) = \sum_{R_1, \dots, R_K} \mathcal{Z}_{R_1 \dots R_K}(g_s, t) \prod_{\alpha=1}^K \text{Tr}_{R_\alpha} V_\alpha. \quad (4.38)$$

ここで, 以下の計算の為に次の事に注意しておく. $N_{R_1 R_2}^R$ を tensor 積 $R_1 \otimes R_2$ から得られる表現 R の個数 (Littlewood-Richardson coefficient) として,

$$\text{Tr}_{R_1} V \text{Tr}_{R_2} V = \text{Tr}_{R_1 \otimes R_2} V = \sum_R N_{R_1 R_2}^R \text{Tr}_R V \quad (4.39)$$

が成り立つ.

以上で位相的弦理論 (閉弦, 開弦) の定義とその基本的な性質を述べた. 続く第 5 節では world sheet を map する target space としての local toric Calabi-Yau 多様体について述べる. そして第 6 節では, 位相的閉弦理論の厳密解を D-brane を用いた BPS state の counting から求め, 位相的開弦理論の厳密解を実 3D の Chern-Simons 理論に帰着させて求める.

は D2-brane(及び向きを反転した anti D2-brane) が存在して、これを S^2_{ij} に巻きつける事によって 6 次元には massive particle が現れる事に注意する⁵. これらの 2-cycle が退化すると, $N(N-1)$ 個の massive particle が massless に転化する. 一方で D2-brane には, 3-form C_3 が標準的に coupling している. そこで 2-cycle 上でこれを積分すると local に $N-1$ 個 (独立な 2-cycle の数) の 1-form field が得られ, これは gauge 対称性 $U(1)^{N-1}$ を持つ gauge 粒子となる事が分かっている. これに上述の D2-brane の議論を合わせると, gauge 対称性が $U(1)^{N-1}$ から $SU(N)$ に持ち上がる事が分かる (enhanced gauge symmetry). このようにして string theory を考える事から, A 型の特異点と A 型の gauge 理論が 1 対 1 に対応する事が分かる.

ところで我々は 4 次元で $N=2$ SYM 理論に興味があるので, さらに 2 次元 compact 化しなければならない. 今 IIA 理論を K3 曲面に compact 化したので, 6 次元で $N=2$ SYM 理論が得られて 16 個の supercharge が存在する. ここで仮に 2 次元 torus に compact 化を行えば, これらの 16 個の supercharge がそのまま 4 次元に遺伝してしまい, 4 次元で $N=4$ SYM 理論になってしまう. そこで CY^3 を考える為には, genus 0 または genus 2 以上の曲面上に上の K3 曲面を fibration するしかない. ところが genus 2 以上の曲面 (負曲率曲面) を用いると, 単連結でない CY^3 が得られてしまうので (gauge 理論として対称性の破れが起こる), 結局 genus 0 の曲面を用いなければならない. 以上の議論を一般化する事により次の事が分かっている [59].

$$4 \text{ 次元 } N=2 \text{ ADE 型の gauge 理論} \xleftrightarrow{1:1} \mathbb{P}^1 \text{ 上の ADE 型の ALE fibration.} \quad (5.2)$$

さらに matter を入れた場合 (Higgs phase) を考えたければ, 次のようにすると良い [60].

$$N_f \text{ 個の hyper multiplet} \xleftrightarrow{1:1} N_f \text{ 個の点で blow up.} \quad (5.3)$$

このような対応関係を用いた gauge 理論の構成方法を geometric engineering という. そこで上述により, 我々が考えるべきなのは Calabi-Yau 多様体の local な記述 (退化極限) である. 以下では, この geometric engineering を代数的に実現するための準備として toric 多様体について一般的に述べた上で, この local な記述を toric の言葉で述べる. これは local toric Calabi-Yau 多様体と呼ばれている (non-compact).

5.2 Toric Geometry

5.2.1 定義 其の 1 (Cone と Fan)

ここでは toric 多様体 (toric variety) の定義を cone と fan を使って述べる [61, 11]. (Local coordinate patch)

Def 5.1 (Toric variety)

X : Toric variety (r 次元) $\xleftrightarrow{\text{def}}$ X の dense subset として, algebraic torus $T = (\mathbb{C}^\times)^r$ が存在して, かつ X に対する torus action $T \times X \rightarrow X$ が存在する. (T action の $T \subset X$ への制限は標準的な T の積.)

以下 toric variety を cone と fan で構成する. まず $N \simeq \mathbb{Z}^r$ を rank= r の lattice, $N_{\mathbb{R}} \doteq N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^r$ とする.

Def 5.2 (Strong convex rational polyhedral cone (略して cone) $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$)

$$\sigma \doteq \{a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k \mid a_i \geq 0, v_i \in N\}, \quad \sigma \cap (-\sigma) = \{0\}.$$

ここで集合 $\{v_1, \dots, v_k\}$ を σ の生成系という (rational). Strong は右に書いた補助条件を表して, 尖っている cone を想像すると良い.

⁵D-brane は張力を持つので, mass M が $M=(\text{D2-tension}) \times (S^2 \text{の面積})$ の massive particle が $2 \times N(N-1)/2 = N(N-1)$ 個得られる. (初めの因子 2 は anti D-brane も考えてのもの)

Def 5.3 (Face) (直感的に想像できる面と考えれば良い)

V : \mathbb{R} 上の vector 空間, V^* : V の dual vector 空間 として canonical bilinear map (内積) $\langle, \rangle: V^* \times V \rightarrow \mathbb{R}$ を定義する. この時,

$$\text{Cone } C \supset C' : \text{face} \xleftrightarrow{\text{def}} \exists u \in V^*, C \subset (u \geq 0) \doteq \{x \in V \mid \langle u, x \rangle \geq 0\}$$

$$\text{かつ } C' = C \cap \{x \in V \mid \langle u, x \rangle = 0\}.$$

ここで $u = 0$ の時は, $C' = C$ となって C 自身は C の面となる. そこで C 以外の面を真の面という.

Def 5.4 (Fan Σ)

$$\Sigma \doteq \left\{ \text{set of cone} \left| \begin{array}{l} \cdot \text{face } \sigma' \subset \sigma \in \Sigma \Rightarrow \sigma' \in \Sigma \\ \cdot \sigma, \sigma' \in \Sigma \Rightarrow \sigma \supset \sigma \cap \sigma' : \text{face}, \quad \sigma' \supset \sigma \cap \sigma' : \text{face} \end{array} \right. \right\}.$$

次に $M \doteq \text{Hom}(N, \mathbb{Z})$: N の dual lattice, $M_{\mathbb{R}} \doteq M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, $\sigma \doteq \{u \in V^* \mid \langle u, v \rangle \geq 0, \text{ for } \forall v \in \sigma\}$ (dual cone) を用いて可換半群 $S_{\sigma} \doteq \sigma \cap M = \{u \in M \mid \langle u, v \rangle \geq 0, \text{ for } \forall v \in \sigma\}$ を定義する. 以下では, この可換半群を幾何学的対象として考える事により ($U_{\sigma} \doteq \text{Spec}(\mathbb{C}[S_{\sigma}])$ ⁶), これが toric variety となる. 今, N の基底 e_1, \dots, e_r を取る事によって, その dual lattice 上の基底 e_1^*, \dots, e_r^* が定まって, さらに M から得られる関数環 $\mathbb{C}[M]$ の基底を X_1, \dots, X_r とする. 以下で例を述べる.

例 A (cone); $\sigma = \{0\}$ に対する dual cone である M は $\pm e_1^*, \dots, \pm e_r^*$ から生成されるので, $\mathbb{C}[S_{\{0\}} = M] = \mathbb{C}[X_1, X_1^{-1}, \dots, X_r, X_r^{-1}]$ となって, これは $U_{\{0\}} = T = (\mathbb{C}^{\times})^r$ の affine ring である.

例 B (cone); σ が e_1, \dots, e_r から生成されるとすれば, $\mathbb{C}[S_{\sigma}] = \mathbb{C}[X_1, \dots, X_r]$ となって, これは $U_{\sigma} = \mathbb{C}^r$ の affine ring である.

この 2 つの例から分かるように, 元の cone の”点”に対して \mathbb{C}^{\times} (algebraic torus) が定義され, vector を 1 つ付け加える毎に点が付加されて \mathbb{C} が定義されている (例 D も参照). この事から cone 上の点では toric の退化する様子を観察する事ができて, これは 5.1 節で述べた geometric engineering の精神に繋がる.

例 C (cone); $v_1 = (1, 0), v_2 = (1, 2)$ によって挟まれた cone を考える (次のページの図 5). この dual vector を (a, b) で表すと, 定義から $a \geq 0, 2b \geq -a$ となり, その dual cone は $u_1 = (2, -1), u_2 = (0, 1)$ によって挟まれたものとなる. よって S_{σ} の generator は $e_1^*, e_2^*, 2e_1^* - e_2^*$ となるので, $\mathbb{C}[S_{\sigma}] = \mathbb{C}[X, Y, X^2Y^{-1}] = \mathbb{C}[U, V, W]/(U^2 - VW)$ となって, U_{σ} は quadratic cone (cone over conic) として得られる.

例 D (fan); 3 つの cone $\{0\}, \{\mathbb{R}_{\geq 0}\}, \{\mathbb{R}_{\leq 0}\}$ から成る 1 次元の fan を考える. これら 3 つの cone に対する dual cone それぞれから, 関数環 $\mathbb{C}[X, X^{-1}], \mathbb{C}[X], \mathbb{C}[X^{-1}]$ が定義されて, これらのスペクトルはそれぞれ $\mathbb{C}^{\times}, \mathbb{C}, \mathbb{C}$ となり, \mathbb{C}^{\times} の所で対応 $X \rightarrow X^{-1}$ を用いて貼り合わせる事によって, \mathbb{P}^1 が得られる.

例 E (fan); $v_1 = (1, 0), v_2 = (0, 1), v_3 = (-1, -1)$ を用いて, 3 つの cone⁷ $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ (それぞれ $(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_1)$ で挟まれた cone) から成る 2 次元の fan を考える. この時, 例 C で実行した要領でそれぞれの dual cone を得る事ができて, それぞれから関数環 $\mathbb{C}[X, Y], \mathbb{C}[X^{-1}, X^{-1}Y], \mathbb{C}[Y^{-1}, XY^{-1}]$ が定義できる (スペクトルは 3 つとも \mathbb{C}^2 と同相)⁸. そこで, 例 D に倣ってこれらを貼り合わせる事によって, \mathbb{P}^2 が得られる. ($\mathbb{P}^2 \ni (Z^0 : Z^1 : Z^2), X = Z^1/Z^0, Y = Z^2/Z^0$ とすると, それぞれの cone のスペクトルは $Z^0 \neq 0, Z^1 \neq 0, Z^2 \neq 0$ に対応した local coordinate patch となる.)

Def 5.5

- (1) Σ : Complete fan $\xleftrightarrow{\text{def}} |\Sigma| (\doteq \bigcup_{\sigma \in \Sigma} \sigma: \Sigma \text{ の台}) = N_{\mathbb{R}}$.
- (2) Σ : Nonsingular fan $\xleftrightarrow{\text{def}} \forall \sigma \in \Sigma, \sigma$ の生成系は N の \mathbb{Z} 基底である.
- (3) Σ : Simplicial fan $\xleftrightarrow{\text{def}} \forall \sigma \in \Sigma, \sigma$ の生成系は \mathbb{R} 上線形独立.

rank が 1 の complete fan は, 上の例 D だけである. ここで, この定義に対応して, その toric variety X_{Σ} を定義した時に, 次の事実が示される.

⁶可換環 R に対して, R の素イデアル全体の集合として $\text{Spec}(R)$ が定義される. これを R のスペクトルという.

⁷実際には, 0,1 次元の cone も含まれる.

⁸このように toric 多様体は, local には \mathbb{C}^r の patch によって構成されているという事が, topological vertex(第 7 節) を用いると任意の local toric Calabi-Yau 多様体上の topological string theory の厳密解が得られる, という議論の大本になっている.

Fact 5.1

- (1) $\xLeftrightarrow{\text{iff}}$ X_Σ : Compact manifold.
- (2) $\xLeftrightarrow{\text{iff}}$ X_Σ : Smooth (nonsingular, 故に manifold).
- (3) $\xLeftrightarrow{\text{iff}}$ X_Σ : 特異性は高々 orbifold.

以下で例 (rank 2) を挙げる. (例証)

例 1; (1),(2),(3) を満足する例はすでに述べた例 E がある.

例 2; もう一つ (1),(2),(3) を満足する例として, 後々に geometric engineering で重要になる (Hirzebruch surface \mathbb{F}_0 として現れる) 例を挙げる. $v_1 = (1, 0), v_2 = (0, 1), v_3 = (-1, 0), v_4 = (0, -1)$ を用いて, 4つの2次元 cone $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ (それぞれ $(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_4, v_1)$ で挟まれた cone) を持つ2次元の fan を考える. この時, 例 E に倣って計算すると, それぞれの cone から関数環 $\mathbb{C}[X, Y], \mathbb{C}[X^{-1}, Y], \mathbb{C}[X^{-1}, Y^{-1}], \mathbb{C}[X, Y^{-1}]$ が定義できる. そこで始めの2つを X に沿って貼り合わせると $\mathbb{P}^1 \otimes \mathbb{C}$ が得られ, 同様にして後の2つを X に沿って貼り合わせると $\mathbb{P}^1 \otimes \mathbb{C}$ が得られる. さらに, これらを Y に沿って貼り合わせる事によって, 結局 $X_\Sigma = \mathbb{P}^1 \otimes \mathbb{P}^1$ が得られる.

例 3; (1) を満足せずに (2),(3) を満足する例としては, 上の例 2 の σ_3, σ_4 を除いた fan を考えると良い. 上述によって直ちに $X_\Sigma = \mathbb{P}^1 \otimes \mathbb{C}$ が得られる.

例 4; (1),(2) を満足せずに (3) を満足する例はすでに述べた例 C がある. これを一般化して, $v_1 = (1, 0), v_2 = (1, m)$ ($m \geq 2$) によって挟まれた cone を考える. 例 C の計算を追うと直ちに, $\mathbb{C}[S_\sigma] = \mathbb{C}[X, Y, X^m Y^{-1}] = \mathbb{C}[U, V, W]/(U^m - VW)$ が得られる. これから 5.1.1 節で述べたような A_{m-1} 型の orbifold singularity を持つ toric variety が得られる.

ここで Fact 5.1 から直ちに toric variety の特異点解消 (blow up) の方法が分かる (図 5). それは, cone の状態で生成系の細分を考えると良い. 例えば, 例 C に述べたような A_1 型の特異点を持つ多様体を考えて, 実際に細分を実行すると, $v_1 = (1, 0), v_2 = (1, 2)$ の間に $v_3 = (1, 1)$ を補うという事になる. そうすると2つの2次元 cone が得られて, 同様に計算すると関数環 $\mathbb{C}[XY^{-1}, Y], \mathbb{C}[X^{-1}Y, X^2Y^{-1}]$ が得られる. 見易くする為に $Z = XY^{-1}$ と置くと $\mathbb{C}[Z, Y], \mathbb{C}[Z^{-1}, Z^2Y]$ となり, 後はこれらを Z に沿って貼り合わせると良い. これは, まさに \mathbb{C}^2/Z^2 を blow up して得られる多様体 $X_\Sigma = T^*\mathbb{P}^1 \simeq \mathcal{O}(-2) \rightarrow \mathbb{P}^1$ である.

次に local toric Calabi-Yau 多様体について述べる. その為に有益なのが次の事実である.

Fact 5.2

$\Sigma: D = X_\Sigma$ の fan, $\{v_1, \dots, v_n\}$: あらゆる cone の生成系 とする. この時, D の canonical bundle K_D の fan $\tilde{\Sigma}$ は次のように得られる.

$$(\tilde{\Sigma}\text{のあらゆる cone の生成系}) = \{(v_1, 1), \dots, (v_n, 1), (\vec{0}, 1)\}. \tag{5.4}$$

その例証の為に, rank が 3 の多様体の特異点解消と合わせて例を見ておく. まずは $v_1 = (1, 0, 1), v_2 = (0, 1, 1), v_3 = (-1, -1, 1)$ によって挟まれた3次元 cone (singular, Σ) を考える. その dual cone を (a, b, c) で表すと, (i) v_1 から $c \geq -a$, (ii) v_2 から $c \geq -b$, (iii) v_3 から $c \geq a+b$ が得られる. (i) と (ii) の面の共通部分は $-c = a = b$ であり (iii) から, S_σ の generator の1つは $-e_1^* - e_2^* + e_3^*$ となる. 同様にして, (i) と (iii) の面の共通部分から generator $-e_1^* + 2e_2^* + e_3^*$ が, (ii) と (iii) の面の共通部分から generator $2e_1^* - e_2^* + e_3^*$ がそれぞれ

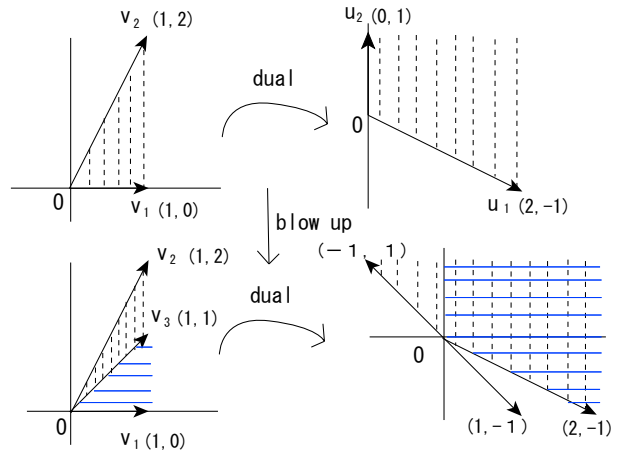


図 5: 例 C とその blow up (A_1 型 singularity の blow up)

得られる. すぐに分かる事だが, この dual cone を張るためにはもう 1 個 generator e_3^* が必要なので, 結局この singular cone から得られる関数環は, $\mathbb{C}[S_\sigma] = \mathbb{C}[T, U, V, W]/(W^3 - TUV)$ となって, $X_\Sigma = \mathbb{C}^3/\mathbb{Z}^3$ が得られる. そこで今, 上述した様にこの多様体の blow up を始めに与えた cone の細分によって実行する. この細分は, v_1, v_2, v_3 の重心細分である $v_4 = (0, 0, 1)$ によって達成される. そうすると 3 つの 3 次元 cone から成る fan $\tilde{\Sigma}$ が得られる. 計算の詳細は上述と全く同じなので省略するが, cone (v_1, v_2, v_4) から得られる関数環 P は $\mathbb{C}[X, Y, X^{-1}Y^{-1}Z]$, cone (v_1, v_3, v_4) から得られる関数環 Q は $\mathbb{C}[X^{-1}Y^2Z, Y^{-1}, XY^{-1}]$, cone (v_2, v_3, v_4) から得られる関数環 R は $\mathbb{C}[X^2Y^{-1}Z, X^{-1}, X^{-1}Y]$ となって, P と Q の (Y による) 貼り合わせ, P と R の (X による) 貼り合わせ, Q と R の (XY^{-1} による) 貼り合わせによって toric variety $X_{\tilde{\Sigma}} = \mathcal{O}(-3) \rightarrow \mathbb{P}^2$ が得られる. これは \mathbb{P}^2 の canonical bundle となっており, 例 E と組み合わせる事により実際に Fact 5.2 を確認できる. また例 E の脚注でも述べたが重要なので繰り返しておく, この canonical bundle の local な patch 部分を見ると全て \mathbb{C}^3 で構成されていることが分かる.

Fact 5.2 から得られる toric variety は, canonical bundle が trivial になるので 1.1.2 節の Fact 1.2 から, これは Calabi-Yau 多様体になっている事が分かる. そこで, 以下では Fact 5.2 を用いて複素 3 次元の local toric Calabi-Yau 多様体を考える. その為に, 2 次元で Def 5.5 (1),(2),(3) を満足するような fan について述べる. まず反時計回りで \mathbb{Z}^2 の点列 $\{v_0 = (1, 0), v_1, \dots, v_d = v_0\}$ を取る. この時, 仮定 (2) から $\forall i, \{v_i, v_{i+1}\}$ は \mathbb{Z}^2 の \mathbb{Z} 基底であるので $\forall i, av_{i-1} + bv_i = v_{i+1}, cv_i + dv_{i+1} = v_{i-1}$ ($\exists a, b, c, d \in \mathbb{Z}, a < 0$) から次が示される.

$$\text{任意の } i \text{ に対して, 常に } a_i v_i = v_{i-1} + v_{i+1} \text{ を満足するような } a_i \in \mathbb{Z} \text{ が存在.} \quad (5.5)$$

さらに次の事実に注目する.

Fact 5.3

$$d \geq 5 \implies v_j = v_{j-1} + v_{j+1} \text{ を満たすような } j \text{ (} 1 \leq j \leq d \text{)} \text{ が常に存在.}$$

故に $\{v_{j-1}, v_{j+1}\}$ も \mathbb{Z} 基底となるので v_j を除いても, この toric variety は nonsingular である. この事から, 2 次元で Def 5.5 (1),(2),(3) を満足するような fan の分類は, $d = 3, 4$ に尽きる. $d = 3$ の fan については, 直ちに理解できるように, その toric 多様体は $X_\Sigma = \mathbb{P}^2$ (例 E) 以外には有り得ない. 一方で $d = 4$ の fan については, (5.5) を用いると直ちに分かるように, a_0, a_1, a_2, a_3 が全て non-zero である事は不可能なので (もしそうなら全ての v_i が平行になってしまう), これらの 1 次元 cone の内少なくともどれか 2 つは $v_i = -v_j$ のように, 反並行な配置となる. 実際に $d = 4$ の fan は $\{(1, 0), (0, 1), (-1, -n), (0, -1)\} (n \in \{0\} \cup \mathbb{Z})$ の形以外には有り得ず, この様な fan から構成される toric 多様体を通常 \mathbb{F}_n と表して Hirzebruch surface と呼ばれている. ($n = 0$ に関しては例 2 で見た.)

Proposition 5.1

2 次元で Def 5.5 (1),(2),(3) を満足するような fan は, 基本的には次のものだけ.

$$d = 3 \text{ に対する } X_\Sigma = \mathbb{P}^2, \quad d = 4 \text{ に対する } X_\Sigma = \mathbb{F}_n.$$

特に geometric engineering では, Hirzebruch surface が用いられる [62]. なぜならば (5.2) において, \mathbb{P}^1 上の A 型の ALE fibration とは \mathbb{P}^1 上の \mathbb{P}^1 -bundle のことであり, これはまさに Hirzebruch surface そのものだからである (図 6).

次に, 因子 D とは元の多様体に含まれる余次元 1 の多様体 (ここでは 1 次元多様体となる) の事であるが, 今これの自己交点数 $D \cdot D$ を考える. 特に Hirzebruch surface \mathbb{F}_n について (繰り返すにもなるが) 述べておくと, これらからは 4 つの cone に対応した 4 つの関数環 $\mathbb{C}[X, Y], \mathbb{C}[X^{-1}, X^{-n}Y], \mathbb{C}[X^{-1}, X^nY^{-1}], \mathbb{C}[X, Y^{-1}]$ が得られ, 因子を考える事はそれぞれの貼り合わせの face を考えるという事である. 故に例えば最初の 2 つを X で貼り合わせたものを考えると, この因子は 1 つ目の cone

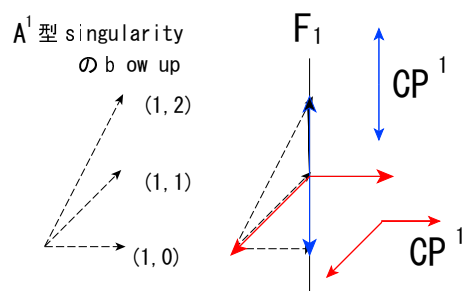


図 6: 特異点の解消と Hirzebruch surface

に対しては $Y = 0$ により, 2 つ目の cone に対しては $X^{-n}Y = 0$ により定義される. よってこの因子の \mathbb{F}_n 上の normal bundle は, $\mathcal{O}(n) \rightarrow \mathbb{P}^1$ によって与えられるので, $D \cdot D = n$ となる. そこで, これを一般的に述べると次のようになる.

Proposition 5.2

Rank 2 の生成系の元 v_i に対する因子 $D_i \simeq \mathbb{P}^1$ に対して, D_i の X_Σ 上での normal bundle は $\mathcal{O}(-a_i) \rightarrow \mathbb{P}^1$ で与えられ, $D \cdot D = -a_i$ となる. (ここで a_i は (5.5) で定義される整数である.)

以上が cone と fan による toric 多様体の構成であり, 後は Hirzebruch surface に対して *Fact 5.2* を適用して, geometric engineering が実現される. そこで実際に以下の節では, この rank 3 の toric diagram において, 余次元 3 の部分に対しては点を, 余次元 2 の部分に対しては線 (曲線) を, 余次元 1 の部分に対しては面 (因子) を対応させる事によって, dual な diagram で記述する事にする. これを web diagram という. (そして曲線部分 (2-cycle) に D2-brane が巻き付くことになる.)

5.2.2 定義 其の 2 (Dual description, Web diagram)

そこで, そのような diagram (web diagram) を (上述と無関係に) 定義する方法について述べる. 我々に興味があるのは rank が 3 の local toric Calabi-Yau 多様体であり, 上で述べたように, これは \mathbb{C}^3 を local に patch する事によって得られるので, まずは \mathbb{C}^3 から述べれば良い [10].

(I) \mathbb{C}^3 (\mathbb{R}^3 上の $T^2 \times \mathbb{R}$ fibration)

まず曲座標系で見ると \mathbb{C} は $\mathbb{R}_{\geq 0}$ 上の S^1 fibration と見る事ができるので, それを 3 次元に拡張すると良い. ただし geometric engineering で重要なのは 3 次元全体の構造ではなく, local な 2 次元部分空間の構造である. そこで \mathbb{C}^3 を以下のように \mathbb{R}^3 上の $T^2 \times \mathbb{R}$ fibration として構成する.

まず $\mathbb{C}^3 \ni z_i$ ($i = 1, 2, 3$) 上には, symplectic form $\omega = i \sum_i z_i \wedge \bar{z}_i$ によって自然に Hamilton 構造が入る. Base 空間 \mathbb{R}^3 の座標を

$$r_\alpha(z) \doteq |z_1|^2 - |z_3|^2, \quad r_\beta(z) \doteq |z_2|^2 - |z_3|^2, \quad r_\gamma \doteq \text{Im}(z_1 z_2 z_3) \quad (5.6)$$

と定義して, これらを Hamiltonian とする flow $\partial_\epsilon z_i = \{\epsilon \cdot r, z_i\}_{PB}$ で T^2 fiber を生成する. (r_γ は \mathbb{R} を生成.)

$$e^{i\alpha r_\alpha + i\beta r_\beta} : (z_1, z_2, z_3) \mapsto (e^{i\alpha} z_1, e^{i\beta} z_2, e^{-i(\alpha+\beta)} z_3). \quad (5.7)$$

そこで r_α により生成される cycle を (0,1) cycle, r_β により生成される cycle を (1,0) cycle として, これらの cycle が退化する部分空間を考える. (0,1) cycle ; $z_1 = z_3 = 0$ で退化. この部分空間は \mathbb{R}^3 では, edge $r_\alpha = r_\gamma = 0, r_\beta \geq 0$ である. (1,0) cycle ; $z_2 = z_3 = 0$ で退化. この部分空間は \mathbb{R}^3 では, edge $r_\beta = r_\gamma = 0, r_\alpha \geq 0$ である. $r_\alpha - r_\beta$ により生成される cycle ; $z_1 = z_2 = 0$ で退化. この部分空間は \mathbb{R}^3 では, edge $r_\alpha - r_\beta = 0 = r_\gamma, r_\alpha \leq 0$ である.

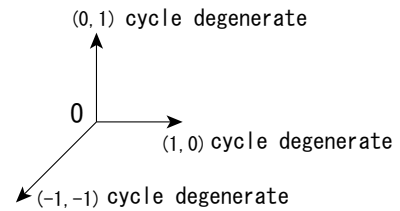


図 7: \mathbb{C}^3 の toric diagram (web diagram)

ここで \mathbb{R}^3 上でこれらの cycle が退化する様子を一般的に表示する事を考える. そこで edge ($pr_\alpha + qr_\beta = \text{定数}$) 上で T^2 fibration が退化する cycle を $(-q, p)$ ($(q, p) \sim (-q, -p)$) として, 上で述べた退化する様子を $r_\gamma = 0$ plane 上に描く (trivalent graph, 図 7).

ここで T^2 の $SL(2, \mathbb{Z})$ 対称性による trivalent graph の任意性が存在する;

$$SL(2, \mathbb{Z}) \ni \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}; \quad r_\alpha : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} q \\ s \end{pmatrix}, \quad r_\beta : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

により $ps - qr = 1$ なる (q, s) cycle, (p, r) cycle を生成するように r_α, r_β を変換しても, 同じ \mathbb{C}^3 diagram を与える.

† Toric Calabi-Yau 多様体

ここで、上述の trivalent graph で non-compact な Calabi-Yau 多様体を記述する方法について述べておく。まずは Kähler 多様体から構成する [63];

$$X \doteq \left\{ (z^1, \dots, z^n) \in \mathbb{C}^n \mid \sum_i Q_i^a |z^i|^2 = t^a (\text{const.}), a = 1, \dots, n-k, Q_i^a \in \mathbb{Z} \right\},$$

$$G \doteq U(1)^{n-k} \text{ action : } z^i \mapsto e^{i \sum_a \epsilon_a Q_i^a} z^i \quad (\epsilon_a : \text{real}). \quad (5.9)$$

この時、十分一般的な t^a を取る事により $Y \doteq X/G$ は k 次元の smooth な Kähler 多様体となる⁹。しかるに、このような空間 Y は weighted projective space $Y \simeq \mathbb{C}^n/G^{\mathbb{C}}, G^{\mathbb{C}} : z^i \mapsto \prod_a (\lambda_a)^{Q_i^a} z^i$ (λ_a : complex) として得る事もできる。条件

$$\sum_{i=1}^n Q_i^a = 0, \quad (a = 1, \dots, n-k) \quad (5.10)$$

を課すと、 \mathbb{C}^n 上で大域的に定義された nowhere vanishing な holomorphic n -form $\Omega = dz^1 \wedge \dots \wedge dz^n$ が $G^{\mathbb{C}}$ action で不変になる。故に Y 上の holomorphic k -form は、これを $G^{\mathbb{C}}$ の ϵ_a ($a = 1, \dots, n-k$) を parameter とする $U(1)$ vector field で縮約して $\Omega_Y = \iota_{\epsilon_1} \dots \iota_{\epsilon_{n-k}} \Omega$ (ι_{ϵ} は内部積を表す) で与えられるので、条件 (5.10) は toric 多様体に対する Calabi-Yau 条件という事になる¹⁰。以下では、 $n = N+3, k = 3$ (N は $U(1)$ の個数) として複素 3 次元の CY^3 を考える事にする。

(II) $\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-1) \rightarrow \mathbb{P}^1$ (resolved conifold)

$$X \doteq \left\{ z_i \in \mathbb{C}^4 \mid |z_1|^2 + |z_4|^2 - |z_2|^2 - |z_3|^2 = t \text{ (Kähler parameter)} \right\},$$

$$U(1) : (z_1, z_2, z_3, z_4) \mapsto (e^{i\alpha} z_1, e^{-i\alpha} z_2, e^{-i\alpha} z_3, e^{i\alpha} z_4)$$

よって、 $Y \doteq X/U(1)$ を定義すると、これは Calabi-Yau 多様体となる。構造を調べると $Y|_{z_2=z_3=0} \simeq \mathbb{P}^1 \ni (z_1, z_4)$ を base の座標と考える事により、 z_2, z_3 を fiber の座標に対応させる事ができる。この時 t は base 空間の大きさである。故に、 $Y \simeq \mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-1) \rightarrow \mathbb{P}^1$ となっていて、これを resolved conifold という。そこで、この base を基準にした 2 つの patch を考察する事により、これを \mathbb{C}^3 patch による toric diagram で表す。

Patch A ($z_4 \neq 0$); これは $U_4 = (z_1, z_2, z_3)$ によって parametrize される \mathbb{C}^3 patch である。Base の座標と T^2 action を¹¹,

$$r_\alpha(z) = |z_2|^2 - |z_1|^2, \quad r_\beta(z) = |z_3|^2 - |z_1|^2,$$

$$e^{i\alpha r_\alpha + i\beta r_\beta} : (z_1, z_2, z_3) \mapsto (e^{-i(\alpha+\beta)} z_1, e^{i\alpha} z_2, e^{i\beta} z_3)$$

として、cycle の退化の様子を調べると、そのような部分空間は $z_1 = z_2 = 0$ ($(0, 1)$ cycle の退化) $\rightarrow r_\alpha = r_\gamma = 0, r_\beta \geq 0$ と、 $z_1 = z_3 = 0$ ($(1, 0)$ cycle の退化) $\rightarrow r_\beta = r_\gamma = 0, r_\alpha \geq 0$ と、 $z_2 = z_3 = 0$ ($(-1, -1)$ cycle の退化) $\rightarrow r_\alpha - r_\beta = 0 = r_\gamma, r_\alpha \leq 0$ によって与えられる。

Patch B ($z_1 \neq 0$); これは $U_1 = (z_4, z_2, z_3)$ によって parametrize される \mathbb{C}^3 patch である。Base の座標と T^2 action は、

$$r_\alpha(z) = |z_2|^2 - |z_1|^2 = |z_4|^2 - |z_3|^2 - t, \quad r_\beta(z) = |z_3|^2 - |z_1|^2 = |z_4|^2 - |z_2|^2 - t,$$

$$e^{i\alpha r_\alpha + i\beta r_\beta} : (z_4, z_2, z_3) \mapsto (e^{i(\alpha+\beta)} z_4, e^{-i\beta} z_2, e^{-i\alpha} z_3)$$

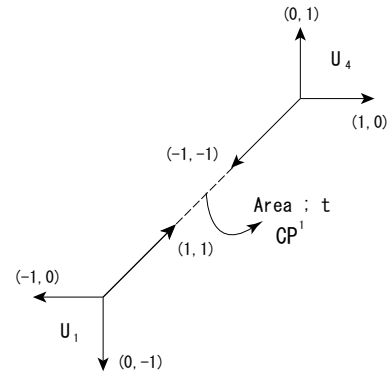


図 8: Resolved conifold

⁹略証; (smooth): 十分一般的な t^a に対しては、 G は X に固定点 $z^i = 0$ を持ち得ない。(Kähler): \mathbb{C}^n で Kähler form $\omega = i \sum_i dz^i \wedge d\bar{z}^i$ を与えて、これを X に制限した後 G で割る事により Y での Kähler form が得られる。しかるに、 Q は 2.2.3 節で述べた Witten の model における $U(1)$ charge に、 G による商は $U(1)$ gauge 同値な真空の同一視に相当する。

¹⁰ちなみに Witten の model では、これは $U(1)$ gauge anomaly 相殺の条件に相当する。

¹¹ $r_\gamma = \text{Im}(z_1 z_2 z_3)$ により定義されている事に注意しておく。

となって, cycle の退化する様子を調べると, そのような部分空間は $z_4 = z_2 = 0$ ($(-1, 0)$ cycle の退化) $\rightarrow r_\beta = -t, r_\gamma = 0$ と, $z_4 = z_3 = 0$ ($(0, -1)$ cycle の退化) $\rightarrow r_\alpha = -t, r_\gamma = 0$ と, $z_2 = z_3 = 0$ ($(1, 1)$ cycle の退化) $\rightarrow r_\alpha - r_\beta = 0 = r_\gamma$ によって与えられる. 故に図 8 のような toric diagram が得られる.

(III) $\mathcal{O}(-3) \rightarrow \mathbb{P}^2$

$$X \doteq \left\{ z_i \in \mathbb{C}^4 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 - 3|z_0|^2 = t \text{ (Kähler parameter)} \right\},$$

$$U(1) : (z_0, z_1, z_2, z_3) \mapsto (e^{-3i\alpha} z_0, e^{i\alpha} z_1, e^{i\alpha} z_2, e^{i\alpha} z_3)$$

よって, $Y \doteq X/U(1)$ を定義するとこれは Calabi-Yau 多様体となる. 構造を調べると $Y|_{z_0=0} \simeq \mathbb{P}^2 \ni (z_1, z_2, z_3)$ を base の座標と考える事により, z_0 を fiber の座標に対応させる事ができる. この時 t は base 空間の大きさである. 故に, $Y \simeq \mathcal{O}(-3) \rightarrow \mathbb{P}^2$ となっている. そこで base を基準にして 3 つの patch を考察する事により, これを \mathbb{C}^3 patch による toric diagram で表す.

Patch A ($z_3 \neq 0$); これは $U_3 = (z_0, z_1, z_2)$ によって parametrize される. Base の座標と T^2 action を,

$$r_\alpha(z) = |z_1|^2 - |z_0|^2, \quad r_\beta(z) = |z_2|^2 - |z_0|^2,$$

$$e^{i\alpha r_\alpha + i\beta r_\beta} : (z_0, z_1, z_2) \mapsto (e^{-i(\alpha+\beta)} z_0, e^{i\alpha} z_1, e^{i\beta} z_2)$$

として, cycle の退化する様子を調べると, そのような部分空間は $z_0 = z_1 = 0$ ($(0, 1)$ cycle の退化) $\rightarrow r_\alpha = r_\gamma = 0, r_\beta \geq 0$ と, $z_0 = z_2 = 0$ ($(1, 0)$ cycle の退化) $\rightarrow r_\beta = r_\gamma = 0, r_\alpha \geq 0$ と, $z_1 = z_2 = 0$ ($(-1, -1)$ cycle の退化) $\rightarrow r_\alpha - r_\beta = 0 = r_\gamma, r_\alpha \leq 0$ によって与えられる.

Patch B ($z_2 \neq 0$); これは $U_2 = (z_0, z_1, z_3)$ によって parametrize される. Base の座標と T^2 action は,

$$r_\alpha(z) = |z_1|^2 - |z_0|^2, \quad r_\beta(z) = t + 2|z_0|^2 - |z_1|^2 - |z_3|^2,$$

$$e^{i\alpha r_\alpha + i\beta r_\beta} : (z_0, z_1, z_3) \mapsto (e^{i(-\alpha+2\beta)} z_0, e^{i(\alpha-\beta)} z_1, e^{-i\beta} z_3)$$

となって, cycle の退化する様子を調べると, そのような部分空間は $z_0 = z_1 = 0$ ($(0, -1)$ cycle の退化) $\rightarrow r_\alpha = r_\gamma = 0, r_\beta = t - |z_3|^2$ と, $z_0 = z_3 = 0$ ($(1, -1)$ cycle の退化) $\rightarrow r_\alpha + r_\beta = t, r_\gamma = 0$ と, $z_1 = z_3 = 0$ ($(-1, 2)$ cycle の退化) $\rightarrow 2r_\alpha + r_\beta = 0 = r_\gamma$ によって与えられる.

Patch C ($z_1 \neq 0$); これは $U_1 = (z_0, z_2, z_3)$ によって parametrize される. Base の座標と T^2 action は,

$$r_\alpha(z) = t + 2|z_0|^2 - |z_2|^2 - |z_3|^2, \quad r_\beta(z) = |z_2|^2 - |z_0|^2,$$

$$e^{i\alpha r_\alpha + i\beta r_\beta} : (z_0, z_2, z_3) \mapsto (e^{i(2\alpha-\beta)} z_0, e^{i(-\alpha+\beta)} z_2, e^{-i\alpha} z_3)$$

となって, cycle の退化する様子を調べると, そのような部分空間は $z_0 = z_2 = 0$ ($(-1, 0)$ cycle の退化) $\rightarrow r_\beta = r_\gamma = 0, r_\alpha = t - |z_3|^2$ と, $z_0 = z_3 = 0$ ($(-1, 1)$ cycle の退化) $\rightarrow r_\alpha + r_\beta = t, r_\gamma = 0$ と, $z_2 = z_3 = 0$ ($(2, -1)$ cycle の退化) $\rightarrow r_\alpha + 2r_\beta = t, r_\gamma = 0$ によって与えられる. 故に図 9 のような toric diagram が得られる.

ここで少し脱線して, 上で述べた toric Calabi-Yau 多様体と Fact 5.2 の接点について述べておく [64]. まず上述の $z_i \in \mathbb{C}^n$ に対して 3 次元 vector \vec{v}_i を考える. (5.9) に対応して $\sum_i Q_i^a \vec{v}_i = 0$ でこれを定義して, Calabi-Yau 条件 (5.10) より座標系の取り方によって, 全ての \vec{v}_i を $\vec{v}_i = (\vec{\omega}_i, 1)$ のように 2 次元面上に乗せる事ができる (canonical bundle が自明). 例えば例 (III) を考えると, もちろん $SL(2, \mathbb{Z})$ の任意性はあるが $-3\vec{\omega}_0 + \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3 = 0$ を満たすように $\vec{\omega}_0 = (0, 0), \vec{\omega}_1 = (1, 0), \vec{\omega}_2 = (0, 1), \vec{\omega}_3 = (-1, -1)$ と取る事によって, Fact 5.2 の下で述べた toric の fan が得られる (図 9).

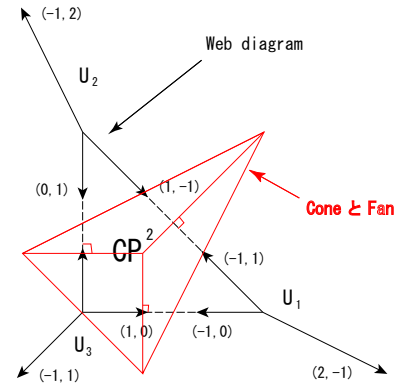


図 9: $\mathcal{O}(-3) \rightarrow \mathbb{P}^2$

† Lagrangian submanifold と deformed conifold

ここで toric variety とは関係無いが以下で述べる deformed conifold に絡んだ話題として、次のような多様体について注意しておく。(特に断りが無い限り複素 3 次元について述べる.)

Def 5.6 (Special Lagrangian Submanifold (SLS))

$X : CY^3 \supset M$ について、埋め込み写像 $i : M \xrightarrow{\text{embedding}} X$ を考える。

この時、 X の Kähler form J , holomorphic 3-form Ω に対して (M の座標の添え字を a, b, c とする),

$$i^*(J) = 0 \quad (\partial_{[a} x^I \partial_{b]} x^{\bar{J}} J_{I\bar{J}} = 0), \quad i^*(\Omega) \propto \text{Vol}(M) \quad (\partial_a x^I \partial_b x^{\bar{J}} \partial_c x^K \Omega_{I\bar{J}K} \propto \epsilon_{abc} \text{Vol}(M)) \quad (5.11)$$

を満たすような多様体 M を X の special Lagrangian submanifold という¹².

この様な多様体を定義したのは、以下の理由からである。まず第 4 節で定義した topological twist には $N = 2$ の SUSY が必要であった事を想起しておく。次に Riemann 面が境界を持つ理論となる開弦の理論について、その端点がある固定曲面 (D-brane) に固定される時に通常は、SUSY を半分に破ってしまう (BPS state) ので、topological twist が定義できなくなってしまう。しかし次の事実が知られている。

Fact 5.4 (Becker, Becker, Strominger[66])

Σ_g の境界 $\partial\Sigma_g$ が map $\phi : \Sigma_g \rightarrow X$ によって $C(\subset M)$ に map される時、SUSY の breaking が起こらない為の必要十分条件は M が SLS となる事である。

次に、多様体 M (実 3 次元) の cotangent bundle ($T^*M \rightarrow M$) は Calabi-Yau 多様体になるという事について述べる。まず base M の座標を q^1, q^2, q^3 , fiber の座標を p_1, p_2, p_3 と取る。2-form $\omega \doteq d\kappa = dp_a \wedge dq^a$ ($\kappa \doteq p_a dq^a$) を定義すると、 $d\omega = 0$ となり T^*M には自然に Hamilton 構造が入り¹³, ω を Kähler form と考える事によって、 T^*M は Kähler 多様体となる (ただし複素構造の存在は保証される必要があり、以下ではその存在は仮定しておく)。一方で M 上の curvature が cotangent vector による curvature により相殺される事によって、 T^*M の Ricci flat 性が保障される。故に T^*M は Calabi-Yau 多様体となる。また M 上で $p_a = 0$ より $\omega|_M = 0$ かつ、 $z^a = q^a + ip_a$ で定義された holomorphic 3-form Ω について $\text{Im}\Omega|_M = 0$ となっているので M は SLS である。

ここで $M = S^3$ とした cotangent bundle の事を deformed conifold という。以下では、これの代数的な定義を与え、その toric diagram による記述についても述べる。

(IV) $T^*S^3 \rightarrow S^3$ (deformed conifold)

$$X \doteq \left\{ y_\mu \in \mathbb{C}^4 \quad (\mu = 1, \dots, 4) \quad \left| \quad \sum_{\mu=1}^4 y_\mu^2 = a^2 \quad (a \in \mathbb{R}) \right. \right\} \quad (5.12)$$

を考えて、 $y_\mu = q^\mu + ip_\mu$ と置くと、 X の実部は $(q^\mu)^2 - (p_\mu)^2 = a^2$ となって、 $p_\mu = 0$ で base の多様体 S^3 が実現される。一方で、 X の虚部から $q^\mu p_\mu = 0$ が得られるので、 p_μ は S^3 上の cotangent vector となっている。故に、 $X \simeq T^*S^3 \rightarrow S^3$ である事が分かった。次に、これを toric diagram で表す方法について述べる。その為に、 $x \doteq y_1 + iy_2, y \doteq y_1 - iy_2, u \doteq i(y_3 + iy_4), v \doteq i(y_3 - iy_4)$ と変数変換をして、(5.12) を次のように書き直す；

$$X = \{(x, y, u, v) \in \mathbb{C}^4 \mid xy = uv + a^2 \quad (a \in \mathbb{R})\}. \quad (5.13)$$

¹² 次の 2 条件を満足すればよい [65]. $J|_M \equiv 0$ かつ $\text{Im}\Omega|_M \equiv 0$

¹³ Hamilton 系 ; $\mathbb{R}^{2m} \ni x = (x_1, \dots, x_m, x'_1, \dots, x'_m), y = (y_1, \dots, y_m, y'_1, \dots, y'_m)$ について、 $A(x, y) \doteq (x_1 y'_1 - x'_1 y_1) + \dots + (x_m y'_m - x'_m y_m) = x^T J y$, $J \doteq \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix}_{2m \times 2m}$ を不変にするような群が $Sp(2m, \mathbb{R}) \ni A$, $A^T J A = J$ であるが、

$2m$ 次元多様体 M 上非退化な 2-form ω ($\det\omega \neq 0$ for $\forall x \in M$) が存在する時 $\omega = J$ と置くことにより、 M は almost Hamilton 構造を持つといわれ、 M が Hamilton 構造 (symplectic 構造) を持つとはさらに $d\omega = 0$ (global に J が定義できる) のような ω の存在で定義される。 M が Hamilton 構造を持てば、 M は orientable となる。しかるに上記の T^*M についての説明から、classical な力学系は常に Hamilton 構造を持つ事が分かる。

そこで T^2 action を $(x, y, u, v) \mapsto (e^{-i\alpha}x, e^{i\alpha}y, e^{-i\beta}u, e^{i\beta}v)$ によって与えて, $U(1)_\alpha$ を α -action として $(0, 1)$ cycle を生成, $U(1)_\beta$ を β -action として $(1, 0)$ cycle を生成すると考える. 後はこれまでと同様にして, これらの cycle が退化する様子を観察すれば良い. 一方は, $(0, 1)$ cycle が退化 $(x = y = 0) \rightarrow \{(u, v) \in \mathbb{C}^2 \mid uv = -a^2\} \simeq \mathbb{C}^\times$: cylinder, もう一方は, $(1, 0)$ cycle が退化 $(u = v = 0) \rightarrow \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid xy = a^2\} \simeq \mathbb{C}^\times$: cylinder となっており, $z \doteq uv$ と置いて base と fibration を次のように考える.

base : 2 つの cylinder の軸, $Re(z) \simeq \mathbb{R}^3$,
 fiber : 2 つの cylinder の cycle, $Im(z) \simeq T^2 \times \mathbb{R}$.

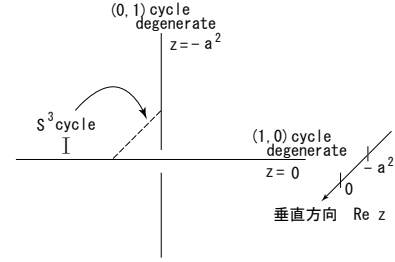


図 10: Deformed conifold

すると, T^*S^3 を \mathbb{R}^3 上の $T^2 \times \mathbb{R}$ fibration として考える事ができて, これを toric diagram で表すと, $z = -a^2$ で $(0, 1)$ cycle が退化して, $z = 0$ で $(1, 0)$ cycle が退化している事から図 10 のような non-planar diagram となる. ここで点線は S^3 cycle を表している¹⁴.

ここで後の為に次の注意を述べておく. まず 2 つの solid torus $T = D \times S^1$, $T' = D' \times S^1$ (D は disk) を考えて, T の 2 つの cycle a, b と T' の cycle a', b' をそれぞれ貼り合わせると $S^2 \times S^1$ を作ることができる. しかし T' の 2 つの cycle に modular 変換 (S 変換) $a' \rightarrow b'$, $b' \rightarrow -a'$ を施して, T の 2 つの cycle と貼り合わせると S^3 ができる事が分かる (図 11). この事は toric diagram を用いると分かり易い. まず $S^2 = \{(z, x) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \mid |z|^2 + x^2 = a^2 (a \in \mathbb{R})\}$ から torus action を $\alpha : z \mapsto e^{i\alpha}z$ によって与えると, この cycle は $z = 0$ で退化している事が分かり, また x の符号の不定性に伴った 2 つの patch S^2_+, S^2_- を考慮すると, S^2_\pm を I (interval $0 \leq |z| \leq a$) 上の S^1 fibration と見る事が出来る. そこで $S^2_\pm \times S^1$ を $I \times S^1$ 上の S^1 fibration と見る事が出来て, これを脚注 14 で述べた S^3 の toric と見比べると図 12 でその関係を表す事が出来て, 上で述べた事が直ちに理解できる.

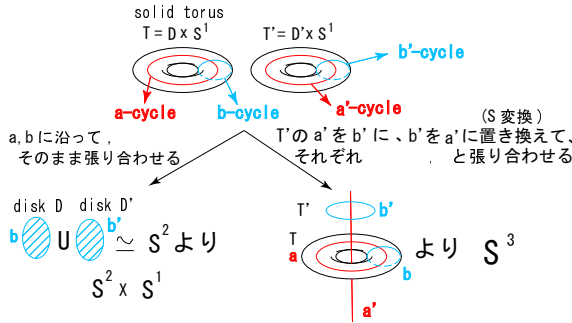


図 11: 2 つの torus の cycle の貼り合わせ

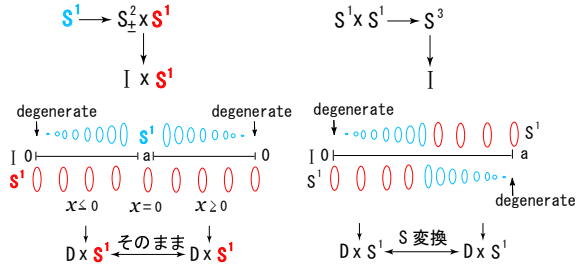


図 12: Toric description

(V) Special Lagrangian submanifold (SLS) の toric diagram (開弦の boundary の定式化)

Proposition 5.3

例 (I) で考察した \mathbb{C}^3 toric 多様体上で以下の部分多様体は SLS である. (c_1, c_2, c_3 : constant)

$$\begin{aligned} L_1 : & r_\alpha = r_\gamma = 0, r_\beta = c_1, Re(z_1 z_2 z_3) \geq 0, \\ L_2 : & r_\alpha = c_2, r_\beta = r_\gamma = 0, Re(z_1 z_2 z_3) \geq 0, \\ L_3 : & r_\alpha = r_\beta = c_3, r_\gamma = 0, Re(z_1 z_2 z_3) \geq 0. \end{aligned} \tag{5.14}$$

¹⁴ (S^3 について) $S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = a^2 (a \in \mathbb{R})\}$ から T^2 action を $\alpha : z_1 \mapsto e^{i\alpha}z_1$, $\beta : z_2 \mapsto e^{i\beta}z_2$ によって与えると, $|z_2|^2 = a^2 - |z_1|^2$ より α cycle は $|z_1|^2 = 0$ で, β cycle は $|z_1|^2 = a^2$ でそれぞれ退化している事が分かる. 故に S^3 を I (interval $0 \leq |z_1|^2 \leq a^2$) 上の T^2 fibration と見る事ができて, これはまさに点線の状態を表している.

Proof. L_1 についてだけ示す. $r_\alpha = 0$ より, $|z_3|^2 = |z_1|^2$ であり, $r_\beta = c_1$ より, $|z_2|^2 = |z_1|^2 + c_1$ が得られる. ここで $z_i = e^{i\theta_i}|z_i|$ とすると, symplectic form $\omega = \sum_{i=1}^3 dz_i \wedge d\bar{z}_i$ は, $\omega = \sum_{i=1}^3 d|z_i|^2 \wedge d\theta_i$ と書ける. 故に上で得られた条件から, $\omega = d|z_1|^2 \wedge \sum_{i=1}^3 d\theta_i$ となって, 残りの条件 $r_\gamma = 0$, $Re(z_1 z_2 z_3) \geq 0$ より, $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 0$ なので $\omega|_{L_1} = 0$ となる. また holomorphic 3-form は $\Omega = dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3 = e^{i\theta_1}(i|z_1|d\theta_1 + d|z_1|) \wedge e^{i\theta_2}(i|z_2|d\theta_2 + d|z_2|) \wedge e^{i\theta_3}(i|z_3|d\theta_3 + d|z_3|)$ となって, ここで $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 0$, $|z_3| = |z_1|$, $|z_2| = \sqrt{|z_1|^2 + c_1}$ より, $Im\Omega = -i|z_1 z_2 z_3|d\theta_1 \wedge d\theta_2 \wedge d\theta_3 = 0$ となって, 故に L_1 は SLS. ■

7.2 節で位相的開弦の理論の分配関数を toric Calabi-Yau 多様体上 (\mathbb{C}^3 patch で構成) で議論する時には, この SLS を考える (図 13).

† Conifold transition

ここでは, 以上で述べた例 (II) と例 (IV) の local toric Calabi-Yau 多様体を conifold transition と呼ばれている幾何学的転移で結びつける. ここで前者は閉弦の理論で primitive に現れて, 後者は開弦の理論で primitive に現れる (第 6 節) ので, この議論はそのまま閉弦と開弦の duality の議論へと shift する (7.1 節).

まず deformed conifold から出発する. (5.12) より $a^2 = 0$ で $xy = uv$ となって conical singularity が現れる事が分かる (そういった意味で a は deformation parameter). この singularity を $x = \eta v$, $u = \eta y$ ($\eta \in \mathbb{P}^1$) で解消 (resolve) する. この代数的な記述の幾何学的意味を明確にする為に, $x \doteq z_1 z_3, y \doteq z_2 z_4, u \doteq z_1 z_2, v \doteq z_3 z_4$ において座標系 (z_1, z_2, z_3, z_4) に移る. この時 $\eta = z_1/z_4$ なので, これを blow up された $\mathbb{P}^1: |z_1|^2 + |z_4|^2 = t$ の非斉次座標と考える. 一方, (5.13) における T^2 action は $(z_1, z_2, z_3, z_4) \mapsto (e^{-i(\alpha+\beta)}z_1, e^{i\alpha}z_2, e^{i\beta}z_3, z_4)$ となるので, 新しい座標系は resolved conifold $\mathcal{O}(-1) \otimes \mathcal{O}(-1) \rightarrow \mathbb{P}^1$ の Patch A を記述している事が分かる. この様な deformed conifold から resolved conifold への幾何学的転移の事を conifold transition といって, toric で図示すると以下ようになる (図 14).

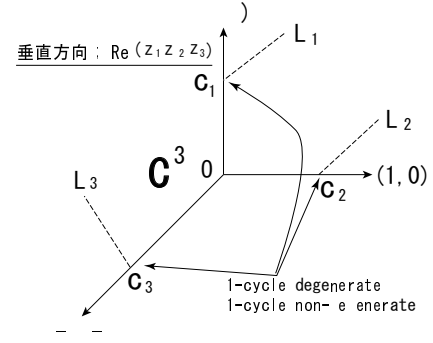


図 13: Special Lagrangian submanifold

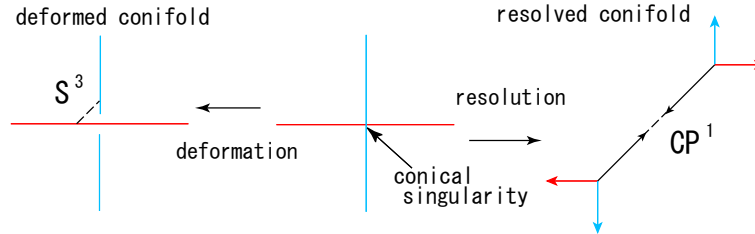


図 14: Conifold transition

5.3 Hirzebruch Surface による Geometric Engineering

5.2.1 節で述べた Hirzebruch surface \mathbb{F}_n (の cone を取ったもの) を 5.2.2 節で述べた toric の言語で書き直す事は簡単である (例 (III) の下で述べた脱線部分を用いる). この local \mathbb{F}_n の fan は $v_0 = (0, 0, 1), v_1 = (1, 0, 1), v_2 = (0, 1, 1), v_3 = (-1, -n, 1), v_4 = (0, -1, 1)$ によって与えられて, それぞれの toric data に対して $(z_0, z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^5$ を対応させる. これから複素 3 次元多様体を定義する為には 2 つの条件式が必要で, これらを t^1, t^2 を Kähler parameter として $\sum_{i=0}^4 Q_i^1 |z_i|^2 = t^1, \sum_{i=0}^4 Q_i^2 |z_i|^2 = t^2$ によって定義し, Calabi-Yau 条件 (5.10) を満たすものとする. この時 fan による toric の言葉では, これは次のような条件と等価になる. 即

ち $\sum_{i=0}^4 Q_i^{1,2} \omega_i = 0$, $\sum_{i=0}^4 Q_i^{1,2} = 0$ ($\omega_0 = (0, 0), \omega_1 = (1, 0), \omega_2 = (0, 1), \omega_3 = (-1, -n), \omega_4 = (0, -1)$) を満たすように Q を決めると良い. これを書き直すと $Q_1^{1,2} - Q_3^{1,2} = 0, Q_2^{1,2} - nQ_3^{1,2} - Q_4^{1,2} = 0, \sum_i Q_i^{1,2} = 0$ となって, これらを満たす Q として $Q^1 = (-2 - n, 1, n, 1, 0), Q^2 = (-2, 0, 1, 0, 1)$ と取ると,

$$X = \left\{ (z_0, \dots, z_4) \in \mathbb{C}^5 \mid \begin{array}{l} -(2+n)|z_0|^2 + |z_1|^2 + n|z_2|^2 + |z_3|^2 = t^1 \\ -2|z_0|^2 + |z_2|^2 + |z_4|^2 = t^2 \end{array} \right\}$$

$$U(1) \otimes U(1) : (z_0, z_1, z_2, z_3, z_4) \mapsto (e^{-i(2+n)\alpha - 2i\beta} z_0, e^{i\alpha} z_1, e^{in\alpha + i\beta} z_2, e^{i\alpha} z_3, e^{i\beta} z_4) \quad (5.15)$$

によって, local \mathbb{F}_n は $Y = X/(U(1) \otimes U(1))$ で与えられる. そこで 4 つの Patch $U_{34} = (z_0, z_1, z_2)$ ($z_3 \neq 0, z_4 \neq 0$), $U_{23} = (z_0, z_1, z_4)$ ($z_3 \neq 0, z_2 \neq 0$), $U_{14} = (z_0, z_2, z_3)$ ($z_1 \neq 0, z_4 \neq 0$), $U_{12} = (z_0, z_3, z_4)$ ($z_1 \neq 0, z_2 \neq 0$) の貼り合わせにより, 具体的に図 15 のような toric diagram (web diagram) を書く事ができる.

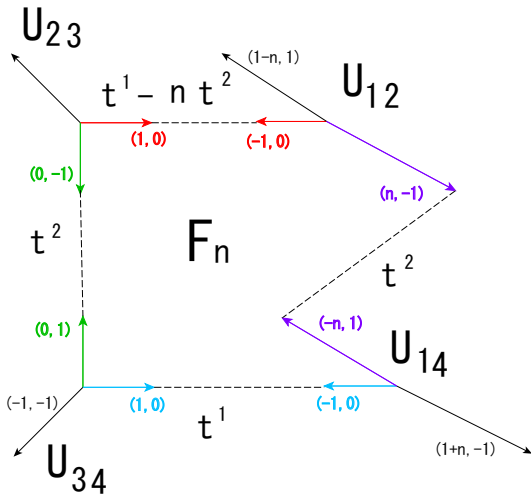


図 15: Local Hirzebruch surface

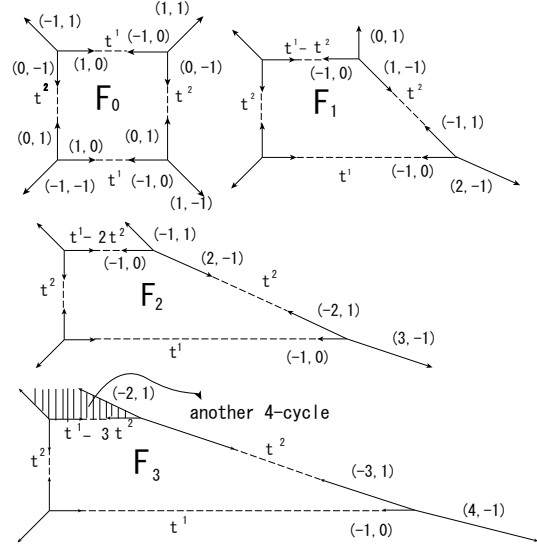


図 16: Pure $SU(2)$ SYM 理論

ここで, いくつかの注意をしておく. \mathbb{F}_n が \mathbb{P}^1 上で A_1 型の singularity を解消した多様体となっているので, まず最も簡単な $4D$, $N = 2$ の pure $SU(2)$ SYM 理論を得る為には 1 つの \mathbb{F}_n を考えれば良いのであるが, 上の図 16 のように \mathbb{F}_3 以上の Hirzebruch surface には Calabi-Yau 多様体の中に別の 4-cycle が存在するので, $SU(2)$ の geometric engineering では $\mathbb{F}_0, \mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2$ だけを考える事になる.

次に pure $SU(N)$ の理論であるが, これは \mathbb{P}^1 上で A_{N-1} 型の fibration を行う事になるので, $N - 1$ 個の Hirzebruch surface を梯子状に積み上げる事になる. ただし, 自由に積み上げることはできずに local patch が矛盾無く定義されなければならない. 即ち, \mathbb{F}_n の上に \mathbb{F}_l を貼り合わせる為には, それぞれの Hirzebruch surface の local patch U_{23} (U_{12}) と U_{34} (U_{14}) における edge が, $SL(2, \mathbb{Z}) \ni \exists g$ により同一視できなければならない.

$$g : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow g = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -l \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+l \\ -1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1-n \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} n \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \therefore l = n - 2.$$

即ち pure $SU(N)$ を得るには, 次のような $N - 1$ 個の local Hirzebruch surface の組を考えると良い.

$$\{\mathbb{F}_n, \mathbb{F}_{n+2}, \dots, \mathbb{F}_{n+2(N-2)}\}. \quad (5.16)$$

ここで, n の取りうる値の範囲も以下のように制限される. まず $\mathbb{F}_{-n} = \mathbb{F}_n$ なので, $n \geq -(n+2N-4)$ によって制限する事ができる. 即ち,

$$n \geq 2 - N. \quad (5.17)$$

一方で N 個以上の compact divisor が現れないように制限する事から, n の上限も以下のように決まる. 即ち, 図 17 から $-N+1 \leq -n-N+3$ と制限されるので $n \leq 2$ となる. 故に (5.17) と組み合わせる事によって, (5.16) の pure $SU(N)$ の fibration の行い方は $m = 0, 1, \dots, N$ の $N+1$ 個で次のように label する事ができる [67, 62].

$$S_m = \{\mathbb{F}_{m+2-N}, \mathbb{F}_{m+4-N}, \dots, \mathbb{F}_{m+N-2}\}. \quad (5.18)$$

ちなみに matter を N_f 個入れた場合は, (5.3) を考える事によって \mathbb{F}_n について N_f 個の点で blow up すれば良い (ただし asymptotic free の要請から $N_f \leq 2N$). 簡単の為に pure $SU(2)$ の blow up について述べると, その外線の本数は $n = 4 + N_f = 4, 5, 6, 7$ のような 1-loop diagram となっている (del Pezzo surface[68]).

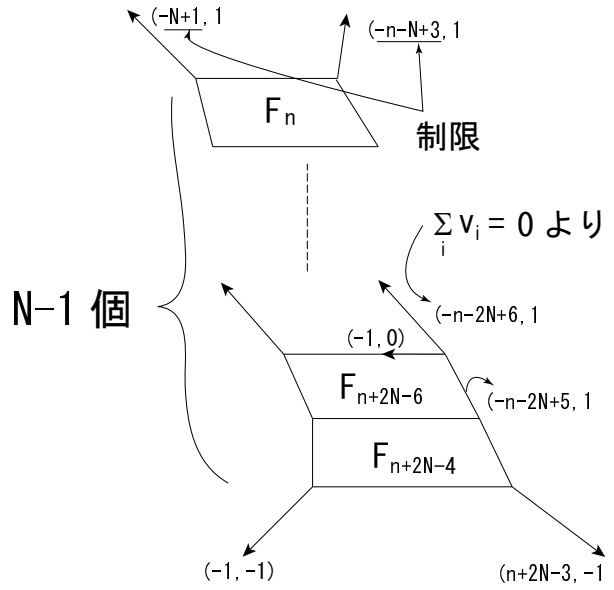


図 17: Pure $SU(N)$ SYM 理論

第6節 Topological A-model

この節では閉弦の理論と開弦の理論を独立に考えて (位相的弦では始めから bulk と boundary の decouple が起こっており $\alpha' \rightarrow 0$ のような極限操作を必要としない [69].), それぞれの理論の厳密解について述べる.

6.1 位相的閉弦 (Gopakumar-Vafa の M 理論解釈)

ここでは位相的閉弦の厳密解について述べる [9, 11](A-model). 以下で述べる厳密解は 98 年に Gopakumar と Vafa によって得られた M 理論を考える事による, target space からの approach による結果である [70, 71](world sheet からの approach によって, 厳密解 (Gromov-Witten invariant) を計算することは非常に困難). この議論は, 弦理論の非摂動的定式化により姿を現すと考えられている M 理論を仮定するのだが, 後で述べる開弦の理論との調和が見事であり, M 理論の正しさの状況証拠のようなものでもありと考えられる.

まず位相的弦理論 (A-model) の定義を振り返る事から始める. 弦理論は 10 次元で無矛盾に定式化されていて, 我々は 6 次元部分を Calabi-Yau 多様体に compact 化した. ここで始めに IIA 型弦理論を考えると, world sheet 上には $N = (2, 2)$ の SUSY が存在するので topological A-twist が定義できて理論が topological になった. 我々が計算したいのはこの理論 ($\Sigma_g \rightarrow CY^3$) の相関関数であるのだが, これを直接計算するのは難しいので物理的な直感を働かせてこの困難を乗り越える事にする. まず IIA 型の弦が CY^3 において振動する事によって, 我々の scale である $\mathbb{R}^{1,3}$ に観測可能な現象が現れる. 我々が上で計算したいと述べたのは, まさにこの振動状態であるのだが $\mathbb{R}^{1,3}$ に現れる状態から, 何らかの形でこの振動状態が得られるのではないかと考えられる. そこで compact 化した部分 (振動状態) を経路積分で落としてしまう事によって 4 次元 $N = 2$ の有効理論が得られて, 実際にその結果として (とりあえず $g \geq 1$ に関しては) 次のような形で有効作用の中の 1 つの項として, 上の位相的弦理論の partition function $F_g(t)$ が現れる事が知られている¹[54, 72, 73]. (位相的弦理論が通常の IIA 型弦理論の一部として現れている.)

$$S_{eff}^{IIA} = \dots + \int d^4x F_g(t) R_+^2 F_+^{2g-2}. \quad (6.1)$$

ここで R_+ は Riemann tensor の self-dual part を, F_+ は $U(1)$ graviphoton の field strength の self-dual part を表している. そこで $F_g(t)$ を求める為に次にやるべき事は F_+ の期待値を定数として, 即ち定常電磁場の background 中で (何らかしらの方法で) 有効作用を求めて R_+ の係数を引っ張り出す事である (もちろん重力の寄与も考えて). ここで string coupling g_s を十分大きく取る事により, この有効作用の計算を実行する. (これによって 11 次元方向の半径 $R \sim g_s^{2/3}$ が大きくなって理論が M 理論へと持ち上がる.) この時, 有効作用に最も効いてくる自由度は Calabi-Yau 多様体の cycle に巻きついた D-brane の寄与であると考えられる². この D-brane の 4 次元での効果は, 4 次元 $N = 2$ の hyper multiplet の寄与 (3.1 節の始めに述べた) で, D-brane が BPS state である為にこの multiplet の内の半分しか効かない. 即ち, BPS charge が Z で 4 次元 spin が $SO(4) \simeq SU(2)_{left} \otimes SU(2)_{right}$ の表現 $[(1/2, 0) \oplus 2(0, 0)] \otimes \mathcal{R}$ である half hyper multiplet を用いて, 定常電磁場中における有効作用を重力の寄与も考えて計算すると良い. 計算後に, R_+ の係数を引っ張り出す必要があるのだが実はこの係数は,

定常電磁場中における 4 次元の spin 表現 \mathcal{R} の荷電粒子の有効作用の計算

から得られる事が知られていて, 以下ではこの計算を具体的に実行する. (Schwinger's calculus[74])

† Schwinger's calculus (\mathbb{R}^4 で計算)

簡単な為に $U(1)$ gauge 場中の charged scalar (mass m , charge e) を考える. Action は

$$\mathcal{L} = |D_\mu \phi|^2 - m^2 |\phi|^2, \quad (D_\mu \doteq \partial_\mu - ieA_\mu)$$

¹4D, $N = 2$ の超重力 multiplet は graviton (spin 2), 2 個の gravitino (spin 3/2), graviphoton (spin 1) から成っている事に注意しておく.

² CY^3 に巻き付けるのは D0-brane と D2-brane のみ. (結果的に前者は $\Sigma_g \rightarrow CY^3$ の constant map (trivial instanton) の寄与を, 後者は non-trivial instanton の寄与を与える.) この 2 つの D-brane の mass M は $M(D0) \sim 1/g_s$, $M(D2) \sim A/g_s$ (A : 2-cycle の面積) で与えられるので ((0.4) 参照), g_s の強結合領域で, とても軽い粒子として現れて 4 次元の有効理論で重要になる.

であって, self-dual ($F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma}$) な定常電磁場は 3 次元空間対称性を用いて $F_{12} = F_{34} = F$ (定数), (その他)=0 のように取れる. そこで, 経路積分によって scalar 場 ϕ の integrate out を行うと,

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\phi \exp\left(\int d^4x \phi^\dagger (D^2 + m^2)\phi\right) \propto \det^{-1/2}(D^2 + m^2) = \exp(\ln \det^{-1/2}(D^2 + m^2))$$

となる. 故に $S_{eff} = Tr \ln(D^2 + m^2) = \int_\epsilon^\infty dt t^{-1} Tr \exp(-t(D^2 + m^2))$ (ϵ : cut-off) が得られる. ここで $D^2 = \Delta_2^{(1,2)} + \Delta_2^{(3,4)}$ (Δ_2 : 2D covariant Laplacian) と分離しておく. まず $\Delta_2^{(1,2)}$ を考えて $A_1 = -Fx^2, A_2 = 0, A_3 = -Fx^4, A_4 = 0$ と gauge 固定しておく,

$$\begin{aligned} \Delta_2^{(1,2)} &= D_1^2 + D_2^2 = (\partial_1 + ieFx^2)^2 + \partial_2^2 = -(p_1^2 + p_2^2) - e^2F^2(x^2)^2 - 2eFx^2p_1 \\ &= -e^{ip_1p_2/(eF)} (p_2^2 + e^2F^2(x^2)^2) e^{-ip_1p_2/(eF)} \end{aligned}$$

となる³. ここで基底の変換を行うと $Tr e^{-t\Delta_2^{(1,2)}} = Tr e^{t(p_2^2 + e^2F^2(x^2)^2)} = Tr e^{-t(p^2/(2m_0) + (m_0/2)(eFx^2)^2)}$ のように⁴, 調和振動子の partition function が得られるので, 結局これは $\sum_{n=0}^\infty e^{-t(n+1/2)eF} = (2 \sinh(teF/2))^{-1}$ となる. ここで $\Delta_2^{(3,4)}$ についても全く同様に計算すると, 求めるべき 4 次元有効作用は次のようになる.

$$S_{eff} = \int_\epsilon^\infty dt \frac{e^{-tm^2}}{t (2 \sinh(teF/2))^2} \xrightarrow{(m=e\dot{Z}, s\dot{=}teF)} \int_\epsilon^\infty ds \frac{e^{-Zs/F}}{s (2 \sinh s/2)^2}. \quad (6.2)$$

この式で $m = e$ とできるのは, BPS mass と BPS charge には 3.1 節の *Fact* 3.1 のような関係が成り立っているからである. 次に (6.2) の F についての級数展開を行う. ただし cut-off の問題があるので正則化 (Nekrasov の正則化) が必要である⁵[45, 44].

$$\begin{aligned} S_{eff} \Big|_{s=Ft} &= \int_\epsilon^\infty dt \frac{e^{-tZ}}{t (e^{Ft} - 1)(e^{-Ft} - 1)} = - \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \frac{\Lambda^s}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dt \frac{e^{-tZ}}{t^{1-s} (e^{Ft} - 1)(e^{-Ft} - 1)} \\ &= - \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \frac{\Lambda^s}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dt e^{-tZ} \left(-F^{-2}t^{s-3} + \sum_{g=1}^\infty \frac{B_{2g}}{2g(2g-2)!} t^{2g+s-3} F^{2g-2} \right) \\ &= - \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \left(\frac{\Lambda}{Z} \right)^s \left\{ - \left(\frac{Z}{F} \right)^2 \frac{\Gamma(s-2)}{\Gamma(s)} + \frac{1}{2} B_1 + \sum_{g=2}^\infty \frac{B_{2g}}{2g(2g-2)!} \left(\frac{F}{Z} \right)^{2g-2} \frac{\Gamma(s+2g-2)}{\Gamma(s)} \right\}. \end{aligned}$$

ここで, $\Gamma(s) = (s-1)\Gamma(s-1)$ より $\frac{\Gamma(s-2)}{\Gamma(s)} = (s-1)^{-1}(s-2)^{-1}$, $\frac{\Gamma(s+2g-2)}{\Gamma(s)} = (s+2g-3)\cdots(s+1)s$ となる事を用いて計算すると, 結局次が得られる.

$$S_{eff} = -F^{-2} \left(\frac{1}{2} Z^2 \ln \frac{Z}{\Lambda} - \frac{3}{4} Z^2 \right) + \frac{1}{12} \ln \frac{Z}{\Lambda} - \sum_{g=2}^\infty F^{2g-2} \frac{B_{2g}}{2g(2g-2)!} Z^{2-2g}. \quad (6.3)$$

最後の項には 4.2.1 節で述べた virtual Euler characteristic $\chi_g(\mathcal{M}_g)$ が含まれている事に注意しておく ((4.28) 参照). また, 第一項に 3.1 節で述べた 1-loop の Seiberg-Witten prepotential が現れているのだが, この現象は閉弦から得られる重力理論の幾何学的転移を通じて, 開弦から得られる gauge 理論が現れることを予言している (第 7 節). 以下では, D0-brane と D2-brane を M 理論に持ち上げて上の結果を再考する. また以下では F は括り出すので 1 と置いて計算する.

† Constant map (M0-brane)

まず strong coupling を考えると IIA 理論は M 理論に持ち上がり, 時空の状態は $\mathbb{R}^{1,3} \otimes CY^3 \otimes S^1$ となる. この時, D0-brane は M0-brane と呼ばれるものに持ち上がって, この brane は S^1 の cohomology class

³ここで $\partial = ip$ で, 最後の等号は $[ip_1p_2/(eF), e^2F^2(x^2)^2] = 2eFx^2p_1$, $1/2[ip_1p_2/(eF), 2eFx^2p_1] = p_1^2$ をハウスドルフの公式に適用すると直ちに分かる.

⁴最後の等号では scaling $p_2^2 \rightarrow -p^2/(2m_0)$, $F^2 \rightarrow -(1/2)m_0F^2$ を行った.

⁵以下のガンマ関数を用いる部分が正則化となっている ($\Gamma(z) \doteq \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$ ($Re(z) > 0$)). また以下では途中で 4.2.1 節で述べた Bernoulli 数を導入しており, 用いるのは (4.29) の両辺を x で微分して出て来る次の公式である.

$$-(2 \sinh s/2)^{-2} = (e^s - 1)^{-1}(e^{-s} - 1)^{-1} = -s^{-2} + \sum_{g=1}^\infty \frac{B_{2g}}{(2g)(2g-2)!} s^{2g-2}.$$

によって類別されるような mass を持つ (KK-mode と呼ばれる). これは $M = Z = 2\pi in/g_s$ ($n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$) で与えられる. そこで (6.2) を用いて, これらの mode を全て足し合わせると

$$F^{(0)}(g_s) = \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{ds}{s} \frac{e^{-2\pi ins/g_s}}{(2 \sinh s/2)^2} = \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{ds}{s} \frac{e^{-2\pi ins}}{(2 \sinh g_s s/2)^2}.$$

ここで Poisson の再和公式

$$\sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} e^{2\pi ins} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \delta(s - m) \quad (6.4)$$

を用いると, M0-brane の寄与は次のようになる⁶.

$$F^{(0)}(g_s) = \sum_{m \in \mathbb{N}} \frac{1}{m} \frac{1}{(2 \sinh mg_s/2)^2} = - \sum_{n=1}^{\infty} n \ln(1 - q^n), \quad (q \doteq e^{-g_s}). \quad (6.5)$$

ここで $g \geq 2$ についての寄与を考えたい (4.2.1 節 (4.27) との比較のため). その為には (6.5) を用いるよりは, むしろ (6.3) を用いた方が簡単であり, mode の足し合わせから直ちに次のようになる事が分かる.

$$F_{g \geq 2}^{(0)} = \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} (-\chi_g)(2\pi in)^{2-2g} = -\chi_g(-1)^{1-g}(2\pi)^{2-2g} \zeta(2g-2) \times 2 = \chi_g \frac{B_{2g-2}}{(2g-2)!} = - \int_{\mathcal{M}_g} C_{g-1}^3.$$

以上の寄与は, 1 個の hypermultiplet からの寄与であって実際の寄与は $b^{2,1}(CY^3) - b^{1,1}(CY^3) = -\frac{1}{2}\chi(CY^3)$ の分だけ足し合わせる必要がある [70, 71]. 故に $g \geq 2$ における有効作用の係数部分は $F_g^{(0)} = \frac{1}{2}\chi(CY^3) \int_{\mathcal{M}_g} C_{g-1}^3$ となって確かに (4.27) に一致していて, Gromov-Witten invariant の constant map の寄与は target space から見ると D0-brane の寄与として実現している事が分かった.

† Non-trivial instanton (M2-brane) I

次に有効作用に効いてくるはずである D2-brane が CY^3 の 2-cycle に巻きつく事による寄与を考える. ただし一般的な状況考えると, この 2-cycle には deformation (複素構造の変形) の自由度が存在するので, brane が巻きつく事によって scalar だけでなくより高い spin の粒子が現れてくる為に (6.2) のような公式を微修正する必要がある. この修正は簡単にできるので後から述べる事にして, まずはこのような修正が必要の無い例として $CY^3 \simeq \mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-1) \rightarrow \mathbb{P}^1$ (resolved conifold (5.2.2 節参照)) の場合を考える. 即ち, この場合には D2-brane は base の \mathbb{P}^1 に巻きつく.

この場合も strong coupling に持っていく事により, D2-brane は M2-brane に持ち上がる. そうすると, この brane の持つ mass は D2-brane が tension を持つ事に因る \mathbb{P}^1 の volume A に比例する部分と, さらに S^1 の compact 化された momentum の量子化から現れる部分の 2 つの部分からの寄与の和として, $M = Z = 2\pi(A + in)/g_s$ ($n \in \mathbb{Z}$) によって与えられる. 後は constant map の時と同様にして (6.2) を用いて, これらの mode を足し上げて Poisson の再和公式 (6.4) を使って書き直すと次が得られる. ($2\pi A \doteq t$)

$$F^{(2)}(g_s) = \sum_{m \in \mathbb{N}} \frac{1}{m} \frac{e^{-mt}}{(2 \sinh mg_s/2)^2} = - \sum_{n=1}^{\infty} n \ln(1 - Qq^n), \quad (q \doteq e^{-g_s}, Q \doteq e^{-t}). \quad (6.6)$$

ここで Nekrasov の正則化の所で述べた脚注の公式を用いると,

$$F^{(2)}(g_s) = g_s^{-2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-mt}}{m^3} - \frac{1}{12} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-mt}}{m} - \sum_{g=2}^{\infty} g_s^{2g-2} \frac{\chi_g}{(2g-3)!} \sum_{m=1}^{\infty} m^{2g-3} e^{-mt} \quad (6.7)$$

が得られる. この式の解釈を Gromov-Witten invariant の言葉で述べる. まずこの式には, 高次の genus の Riemann 面から \mathbb{P}^1 への map の寄与が現れている. これは, 高次の genus の Riemann 面が \mathbb{P}^1 に map される時に genus が退化して巻き付いている事を示している. このような, もとの Riemann 面の genus が target space では小さくなって現れる現象を bubbling (small instanton) という.

⁶この式の 2 つ目の等号では, 級数展開 $(1-x)^{-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$, $\ln(1-x) = -\sum_{m=1}^{\infty} m^{-1}x^m$ を用いた.

† Non-trivial instanton (M2-brane) II

さらに上で述べた事を一般的に議論する (即ち higher spin の寄与も取り入れる). その為に $SO(4) \simeq SU(2)_{left} \otimes SU(2)_{right}$ の spin state を, $((1/2, 0) \oplus 2(0, 0)) \otimes (j_L, j_R)$ と表して, その個数を n_{j_L, j_R}^β ($\beta \in H_2(CY^3, \mathbb{Z})$) と置く. この時 Schwinger の計算を spin を持つ粒子に適用すると, spin 行列の非可換性⁷から, 一般的に

$$\Delta_2 \rightarrow \Delta_2 - \frac{1}{2} e F_{\mu\nu} \sigma_{(j_L, j_R)}^{\mu\nu} \quad \left(\sigma_{(j_L, j_R)}^3 : \text{spin の表現行列} \right)$$

のような補正が必要である. しかるに, $F_{\mu\nu}$ の self-duality より j_R については上記の補正を考慮する必要が無く ($F_{\mu\nu}$ は right spin とは decouple), j_R の Tr 計算の寄与は単純に多重度を足し上げるだけでよい. そこで $n_{j_L}^\beta \doteq \sum_{j_R} (-1)^{2j_R} (2j_R + 1) n_{j_L, j_R}^\beta$ を定義しておくことと便利である. さらに j_L についての計算を実行する為に次のような基底変換を行う⁸.

$$\sum_{j_L} n_{j_L}^\beta [j_L] = \sum_{r=0}^{\infty} n_{r, \beta} I_r, \quad \left(I_r \doteq \left[\left(\frac{1}{2} \right) \oplus 2(0) \right]^{\otimes r} \right). \quad (6.8)$$

これを用いると, Tr 計算を I_r 基底で実行する事ができて

$$Tr_{I_r} (-1)^{2j_L} e^{eF\sigma_{j_L}^3} = \left(Tr_{I_1} (-1)^{2j_L} e^{eF\sigma_{j_L}^3} \right)^r = (2 - 2 \cosh eF)^r = (2 \sinh eF/2)^{2r} (-1)^r$$

となる. 故に higher spin の寄与も取り入れた最も一般的な非摂動的有効作用の answer として, 次の結果が得られた事になる.

$$F_{GV}(g_s, t) = \sum_{\beta} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{n_{r, \beta}}{m} \left(2 \sinh \frac{m g_s}{2} \right)^{2r-2} Q^{m\beta}. \quad (6.9)$$

ここで $n_{r, \beta}$ は Gopakumar-Vafa invariant と呼ばれている. この式で β についての和は, Gopakumar-Vafa の解釈では D2-brane が Calabi-Yau 多様体の非自明な 2-cycle に巻き付く事による寄与であり, r についての和はこれによって現れる spin についての和で, これが Gromov-Witten invariant では genus 展開として現れており, m についての和は Riemann 面による Calabi-Yau 多様体の正則曲線の多重被覆を表している.

6.2 位相的開弦

次に local CY^3 上の位相的開弦の理論の厳密解について述べる. 閉弦との違いは弦に端点が存在する (境界付きの Riemann 面を考えることになる) ので SUSY の破れを起こさない為には, その端点を固定する brane が特別な条件を満足する必要がある (special Lagrangian submanifold). これについては 5.2.2 節の Fact 5.4 で述べた通りである. 以下では, 位相的開弦の正準量子化から弦の 0-mode 以外が decouple する事を説明した後, その結果を string field theory で解釈する事によって, 位相的開弦の有効理論が 3D Chern-Simons gauge 理論 (弦の端点) となる事を述べる [69]. さらにそれを量子化する事により Chern-Simons(CS) gauge 理論 (即ち位相的開弦) の厳密解が, 群構造の入った 2D の CFT である Wess-Zumino-Witten(WZW) model(CS の境界) によって与えられる [75] 事を述べる.

まず考えるべきは 4.1.2 節の topological A-model の action (4.5) である. $\psi_\tau^i \doteq \frac{1}{2} (\psi_z^i + \psi_{\bar{z}}^i)$ として, 正準交換関係は次の形で与えられる.

$$\left[\frac{dx^i(\sigma)}{d\tau}, x^j(\sigma') \right] = -\frac{i}{t} G^{ij} \delta(\sigma - \sigma'), \quad \{ \psi_\tau^i(\sigma), \chi^j(\sigma') \} = \frac{1}{t} G^{ij} \delta(\sigma - \sigma').$$

⁷Spin 1/2 の粒子について $\sigma_{(1/2)}^{\mu\nu} \doteq \gamma^{\mu\nu} = i\gamma^\mu \gamma^\nu = (i/2)\gamma^{[\mu} \gamma^{\nu]}$ とすると, $(\gamma^\mu (\partial - ieA)_\mu)^2 = (\partial - ieA)^2 - (1/2)eF_{\mu\nu} \gamma^{\mu\nu}$ となつて, 後は 0.6 節の notation(Weyl) 及び $F_{12} = F_{34} = F$ (定数), (その他) = 0 によって 2 次元への分離を行うと, 以下で述べる gauge 場の right spin との decouple も具体的に示されて, その補正は $-\frac{1}{2}eF_{\mu\nu} \sigma_{(1/2)}^{\mu\nu} = -eF\sigma^3$ となる.

⁸(例) $[0] = I_0$, $[1/2] = I_1 - 2I_0$, $[1] = I_2 - 4I_1 + 3I_0$ など.

これから、量子論では $G_{ij} \frac{dx^j}{d\tau} \Rightarrow -\frac{i}{t} \frac{\delta}{\delta x^i}$, $G_{ij} \psi_\tau^j \Rightarrow \frac{1}{t} \frac{\delta}{\delta \chi^i}$ となる。ここで Hamiltonian $L_0 = \int_0^\pi d\sigma T_{00}$ を考えて、特にその bosonic part に着目すると

$$L_0 = \int_0^\pi d\sigma t G_{ij} \left(\frac{dx^i}{d\sigma} \frac{dx^j}{d\sigma} + \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^j}{d\tau} \right) = \int_0^\pi d\sigma \left(-\frac{1}{t} G^{ij} \frac{\delta^2}{\delta x^i \delta x^j} + t G_{ij} \frac{dx^i}{d\sigma} \frac{dx^j}{d\sigma} \right) \quad (6.10)$$

となる。一方で 4.1.2 節の (4.9) より topological な理論では $\text{Ker} L_0$ の Hilbert 空間を考察すればよく、また coupling t にも因らないので $t \rightarrow \infty$ で理論の応答を調べる事ができて、(6.10) から topological な理論では $\frac{dx^i}{d\sigma} = 0$ と考える事ができる。即ち位相的開弦は point-like particle として振舞うのである (弦の 0-mode 以外が decouple)。

6.2.1 String Field Theory

通常の弦理論の dynamics は on-shell でしか扱う事ができていないのだが、それを off-shell で扱う為に導入された理論が以下で述べる string field theory である [76]。まず string field $\Psi[x(\sigma)]$ (ghost number 1) を用意して積分の測度を次のように定義する。 ($0 \leq \sigma \leq \pi, -\infty < \tau < \infty, ds^2 = d\sigma^2 + d\tau^2$: flat metric.)

$$\int \Psi \doteq \int \mathcal{D}x(\sigma) \prod_{0 \leq \sigma \leq \pi/2} \delta[x(\sigma) - x(\pi - \sigma)] \Psi[x(\sigma)].$$

ここで真空の ghost number は -3 となる⁹。さらに string field 同士の相互作用を取り扱う為に、次のようにして非可換結合 \star 積を定義する。 ($x_{N+1} \doteq x_1$)

$$\int \Psi_1 \star \cdots \star \Psi_N \doteq \int \prod_{i=1}^N \mathcal{D}x_i(\sigma) \prod_{j=1}^N \prod_{0 \leq \sigma \leq \pi/2} \delta[x_j(\sigma) - x_{j+1}(\pi - \sigma)] \Psi_j[x_j(\sigma)].$$

これらを用いる事によって、BRST charge による gauge 変換 $\delta\Psi = Q\epsilon - \epsilon \star \Psi + \Psi \star \epsilon$, (ϵ : ghost number 0) の下で不変かつ ghost number 0 の off-shell action として Witten は次のようなものを導入した。(Chan-Paton factor を考えると Ψ は Lie 代数値を取るので全体に Tr が掛かる。)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2g_s} \int \left(\Psi \star Q\Psi + \frac{2}{3} \Psi \star \Psi \star \Psi \right). \quad (6.11)$$

ここで開弦の coupling は $g_s^{1/2}$ で与えられる事に注意しておく (0.2 節 (0.3) 参照)。

そこで位相的開弦を T^*M (M : 実 3 次元多様体で SLS) 上で考える。上で述べたように弦の massive mode が decouple するので、string field Ψ は $x^i(\sigma), \chi^i(\sigma)$ の 0-mode のみの関数である。開弦の境界は $\partial\Sigma_g \subset M$ なので、これらの 0-mode は M 上に束縛される。それらを $(x^i, \chi^i)|_M \doteq (q^a, \chi^a)$ と記すと、string field は ghost number 1 なので $\Psi = A_a(q)\chi^a$ と書く事ができる。さらに $\{Q, x\} = \chi, \{Q, \chi\} = 0$ より Q を M 上の外微分演算子 d で読み替えて、string field action から χ を integrate out してしまうと、action (6.11) は次の形になる [69]。

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2g_s} \int_M Tr \left(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A \right). \quad (6.12)$$

この action は 3 次元の topological な gauge 理論を与える Chern-Simons action と呼ばれている。この作用について詳しく調べる前に、もう少し位相的開弦の理論について観察しておく。

Proposition 6.1 (Vanishing theorem)

上の T^*M 上の位相的開弦の instanton は constant map だけである。

Proof. 後の為に一般的状況設定を行っておく。 X を実 6 次元の symplectic 多様体、 J を概複素構造、 ω を positive ($\stackrel{def}{\Leftrightarrow} G_{ij} = J_i^k \omega_{kj}$: positive definite) かつ type(1,1) ($\stackrel{def}{\Leftrightarrow} G_{IJ} = G_{\bar{I}\bar{J}} = 0, G_{I\bar{J}} = G_{\bar{J}I} = -i\omega_{I\bar{J}}$) の

⁹Riemann 面の moduli を count する量は $\int_\Sigma bc = -3\chi(\Sigma)$ で与えられて、disc については $\chi(\Sigma) = 1$ となるからである。

symplectic form とする. 今 map $\phi: \Sigma_{g,h} \rightarrow X$, (h は Riemann 面の境界の数) を考えて, この map による holomorphic instanton $\bar{\partial}x^I = 0$ の存在を仮定する. この時 action (4.8) で重要なのは topological term だけとなる. そこで $X = T^*M$ とすると上の条件は満たされて,

$$\int_{\Sigma_{g,h}} \phi^*(\omega) = \int_{\partial\Sigma_{g,h}} \phi^*(\kappa) = 0, \quad (\omega = d\kappa = d(p_i dq^i)).$$

故に topological term が消えるので instanton は constant map だけとなる. ■

この事から, T^*M 上で位相的弦を考える限りでは非摂動補正は無く上述のような Chern-Simons 理論への reduction は厳密な回答を提示している事が分かるが, 自明な constant map だけから非自明な Chern-Simons 理論が得られた事は直感に反する. これは, 今考えている多様体 X が non-compact である事を考慮すると解決する. 即ち non-compact 性を考えれば, 実際には degenerate instanton と呼ばれる寄与が存在している事が分かり, この寄与が非自明な Chern-Simons 理論を与える事の根拠となる. また, この証明から一般的には topological term が消えないので background の connection による Wilson loop の補正が入ってくる事も分かる [69].

6.2.2 Chern-Simons Theory

次に Chern-Simons 理論について Witten の論文に沿って述べる [75]. 基本となる action は (6.12) であるが, 便宜上 $g_s = 2\pi/k$ と定義し直して次の形の action から議論を始める. (M : 実 3 次元多様体, k : 結合定数, A : 群 G の connection, また Tr は G の Killing form について取る.)

$$\mathcal{L} = \frac{k}{4\pi} \int_M Tr \left(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A \right) = \frac{k}{4\pi} \int_M Tr \left(A \wedge F - \frac{1}{3} A \wedge A \wedge A \right), \quad F = DA = dA + A \wedge A. \quad (6.13)$$

この action は M の metric を含まないので, Chern-Simons 理論は topological な理論である事が分かる. ここで大域的 gauge 変換 $A \rightarrow g^{-1}Ag + g^{-1}dg$, $F \rightarrow g^{-1}Fg$ ($g \in G$) を行う. この変換によるおつりの項は,

$$\delta\mathcal{L} = -\frac{k}{12\pi} \int_M Tr (g^{-1}dg \wedge g^{-1}dg \wedge g^{-1}dg) + \frac{k}{4\pi} \int_M Tr d(dg \wedge g^{-1}A)$$

となって, 第 2 項については M に境界が無ければ表面項なので消えて, 第 1 項については G を compact 単純群とした時 $\pi_3(G) = \mathbb{Z}$ による topological term を与えて $-2\pi k\mathbb{Z}$ の形になる. そこで partition function $\mathcal{Z}(M) = \int [DA] e^{i\mathcal{L}}$ を考える¹⁰と, その不変性から k に対する量子化条件として $k \in \mathbb{Z}$ が得られる.

† Observables

Topological な理論を考える為に, まずは observable を定義する. この observable には次の Wilson loop を考えるのが最も適当である (位相不変かつ gauge 不変).

$$W_R^{\mathcal{K}}(A) \doteq Tr_R P \exp \oint_{\mathcal{K}} A \doteq Tr_R U_{\mathcal{K}}. \quad (6.14)$$

ここで R は G の表現, P は通常の順序積, \mathcal{K} は M 内の閉曲線 (knot(結び目)) をそれぞれ表しており, その性質として直ちに次が分かる. (\mathcal{K}^{-1} : \mathcal{K} の向き付けを逆にした knot, \bar{R} : R の共役表現)

$$Tr_R U_{\mathcal{K}^{-1}} = Tr_R U_{\mathcal{K}}^{-1} = Tr_{\bar{R}} U_{\mathcal{K}}. \quad (6.15)$$

これを用いて, Chern-Simons 理論の相関関数は次のように定義される. (L : link(絡み目), \mathcal{K}_i : L の要素である knot, R_i : G の表現 ($i = 1, \dots, K$))

$$W_{R_1 \dots R_K}(L) \doteq \left\langle W_{R_1}^{\mathcal{K}_1} \dots W_{R_K}^{\mathcal{K}_K} \right\rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}(M)} \int [DA] \left(\prod_{i=1}^K W_{R_i}^{\mathcal{K}_i} \right) e^{i\mathcal{L}}. \quad (6.16)$$

¹⁰積分測度 $[DA]$ は gauge 同値なものを同一視して定義されている.

このような observable から場の理論的に結び目不変量が定義されるので, Chern-Simons 理論について調べる事によって結び目理論についての理解も得られる.

Remark 6.1

4.2.2 節の (4.38) 式との関連として, 以下が成り立つ事が期待されている (Open string/Chern-Simons).

$$\mathcal{Z}_{R_1 \dots R_K} = W_{R_1 \dots R_K}(L).$$

† 弱結合解析

まずは $k \gg 1$ の時を考えると partition function の評価は古典解の評価で十分なので, 以下では古典解を考察する事から始める. まず action (6.13) は, $\mathcal{L} = \frac{k}{8\pi} \int_M \epsilon^{abc} Tr (A_a \partial_{[b} A_{c]} + \frac{2}{3} A_a [A_b, A_c])$ と書けるので, Euler-Lagrange 方程式から直ちに古典解として,

$$F_{ab} = 0 \quad (\text{flat connection}) \quad (6.17)$$

が得られる. この解の gauge 同値な A は 1:1 map $\phi : \pi_1(M) \rightarrow G$ を与えるので, $\pi_1(M)$ が有限次元かつ行き先が孤立点 A^α の集合を与える場合 (stationary phase evaluation) には,

$$\mathcal{Z}(M) = \sum_{\alpha} \mu(A^\alpha) \quad (6.18)$$

の形で解が得られる. ここで孤立点周りの fluctuation $A_a = A_a^\alpha + B_a$ (B_a : 無限小量) によって $\mu(A^\alpha)$ への量子補正を求める. すると action (6.13) は次の様になる. ($DB \doteq dB + 2A^\alpha \wedge B$.)

$$\mathcal{L} = kI(A^\alpha) + \frac{k}{4\pi} \int_M (B \wedge DB), \quad I(A^\alpha) \doteq \frac{1}{4\pi} \int_M Tr \left(A^\alpha \wedge dA^\alpha + \frac{2}{3} A^\alpha \wedge A^\alpha \wedge A^\alpha \right). \quad (6.19)$$

次に gauge 固定を行うが, その為にはどうしても metric が必要であり, ここでは $D_a B^a = 0$ によって固定する. すると通常の場の理論の時と同様にして FP ghost c が現れて, 次のような作用が付け加わる.

$$\mathcal{L}_{FP} = \int_M Tr (\phi D_a B^a + \bar{c} D_a D^a c), \quad (\phi : \text{補助場}). \quad (6.20)$$

後は $\mathcal{L} + \mathcal{L}_{FP}$ から saddle point method で $\mu(A^\alpha)$ を求める. すると Gauss 積分から直ちに $\mu(A^\alpha) = e^{ikI(A^\alpha)} \frac{\text{Pf}(D_a D^a)}{\sqrt{\det L_-}}$ が得られる. ここで Pf は Pfaffian で行列式のルートを表して ghost の積分からきている (故に ghost に zero mode が存在する時は 4.1.2 節で述べたように $\mu = 0$ となる). 一方 $\det L_-$ の項は以下でもう少し詳しく述べるが B (及び ϕ) の積分からきており, gauge 固定が metric を含んでいた為この量は位相不変量を与えない. 以下これについて述べる.

考えるべきは $\frac{1}{\sqrt{\det L_-}} = \int DBD\phi \exp(i \int_M Tr(B \wedge DB + \phi D_a B^a))$ である. この肩に乗っている指数で B に作用する演算子が L_- であるが, 変数変換によって L_- の固有関数を x_i (固有値を λ_i) とする事によって, $\frac{1}{\sqrt{\det L_-}} = \prod_i \int_{-\infty}^{\infty} dx_i \pi^{-1/2} e^{i\lambda_i x_i^2} = \prod_i \frac{1}{|\sqrt{\lambda_i}|} \exp(\frac{\pi}{4} i \sigma(\lambda_i))$ となる (σ は符号を表す). この解析をもっと詳しく続けると $\frac{1}{\sqrt{\det L_-}} = \frac{1}{|\sqrt{\det L_-}|} \exp(\frac{\pi}{2} i \eta(A^\alpha))$, ($\eta(A^\alpha) \doteq \frac{1}{2} \lim_{s \rightarrow 0} \sum_i \sigma(\lambda_i) |\lambda_i|^{-s}$: η -invariant) となり, η についての次の公式が成立する事が知られている.

$$\frac{1}{2} (\eta(A^\alpha) - \eta(0)) = \frac{C_2(G)}{2\pi} I(A^\alpha).$$

ここで, $C_2(G)$ は adjoint 表現での 2 次の Casimir である. これにより (6.18) は次の様になる.

$$\mathcal{Z} = e^{i\pi\eta(0)/2} \sum_{\alpha} e^{i(k+C_2(G)/2)I(A^\alpha)} T_{\alpha}, \quad T_{\alpha} \doteq \frac{\text{Pf}(D_a D^a)}{|\sqrt{\det L_-}|}. \quad (6.21)$$

ここで指数の $C_2(G)/2$ は k の量子補正で, T_{α} は Ray-Singer torsion と呼ばれている位相不変量である. 一方一番前に掛かっている因子は位相不変ではないのだが, 以下の様にして重力の local counter term を付け

加える事により, この結果を位相不変にする事が出来る. まず $\eta(0)$ は自明な gauge field による寄与なので, この項を $d \doteq \dim G$ 個の metric 依存な η_{grav} と結合したものと見なす事が出来る (即ち $\eta(0) = d\eta_{grav}$). 一方で M の spin connection ω を用いて, この重力 (holonomy 群を H とする) の local counter term として $I(g) \doteq \frac{1}{4\pi} \int_M Tr(\omega \wedge d\omega + \frac{2}{3}\omega \wedge \omega \wedge \omega)$ を考える. ここで次の事実が知られている.

Fact 6.1 (Atiyah-Patodi-Singer)

$$\frac{1}{2}\eta_{grav} + \frac{1}{12} \frac{I(g)}{2\pi} \quad \text{は位相不変量を与える.}$$

結果的に弱結合解析 ($k \gg 1$) により得られた位相不変な partition function は, (6.21) に上の local counter term を付け加えて次の形で与えられる.

$$\mathcal{Z} = e^{i\pi d(\frac{1}{2}\eta_{grav} + \frac{1}{12} \frac{I(g)}{2\pi})} \sum_{\alpha} e^{i(k+C_2(G)/2)I(A^\alpha)} T_{\alpha}. \quad (6.22)$$

ところで, $\pi_3(H) = \mathbb{Z}$ なので $I(g)$ も $I(A)$ と同じように, ω の homotopy class が変化すれば $I(g) \rightarrow I(g) + 2\pi s$ ($s \in \mathbb{Z}$) と shift する. この shift は $k \gg 1$ の評価から得られたものであるが, 一般的な k に対しては \mathfrak{g} を G の Lie 環として,

$$\mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z} e^{2\pi i s \frac{c}{24}}, \quad c \doteq \frac{k \dim \mathfrak{g}}{k + h^v} \quad (h^v : \text{dual coxeter 数}, U(N) \text{ では } N) \quad (6.23)$$

のようになる. ここで c は WZW model (level k) における central charge であり, ここでは, この shift は CFT の moduli 空間の T 変換による結果として現れる.

† Knot の framing

上のような shift の他に Chern-Simons 理論には, 以下に述べるような framing の問題がある. 簡単の為に $G = U(1)$ で議論する. この時 action (6.13) は $\mathcal{L} = \frac{k}{4\pi} \int_M \epsilon^{abc} A_a \partial_b A_c$ となって, 相関関数 (6.16) (\mathcal{K}_α : knot, m_α : $U(1)$ の表現次元 (巻き付き数), $\mathcal{K}_\alpha \cdot \mathcal{K}_\beta = 0$ ($\alpha \neq \beta$): not intersect, $\alpha, \beta = 1, \dots, K$) は Gauss 型の積分によって得られて¹¹,

$$W_{R_1 \dots R_K} = \left\langle \prod_{\alpha=1}^K e^{i m_\alpha \int_{\mathcal{K}_\alpha} A} \right\rangle = \exp \left(\frac{\pi i}{k} \sum_{\alpha, \beta} m_\alpha m_\beta \text{lk}(\mathcal{K}_\alpha, \mathcal{K}_\beta) \right),$$

$$\text{lk}(\mathcal{K}_\alpha, \mathcal{K}_\beta) \doteq \frac{1}{4\pi} \oint_{\mathcal{K}_\alpha} dx^a \oint_{\mathcal{K}_\beta} dx^b \epsilon_{abc} \frac{(x-y)^c}{|x-y|^3}.$$

ここで $\text{lk}(\mathcal{K}_\alpha, \mathcal{K}_\beta)$ は linking number を与えていて, その値を整数 \mathbb{Z} に取る. しかるに, この量は明らかに $\alpha = \beta$ に関しては $x = y$ 近傍で ill-defined であるが (これは knot の cotorsion と呼ばれる), 以下のように framing を考える事 (場の理論的に言うならば, point splitting による正則化) によってこの問題が解消される. 即ち, $\alpha = \beta$ の時には一方の knot を無限小量ずらす ($\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}^f$) 事によりこの問題は解消される. ただしそのずらし方に依存したものが framing と呼ばれるものである. このような framing で正則化された上の相関関数は, \mathcal{K}^f が \mathcal{K} にさらに t 回巻き付く新しい framing に移ると $W_{R_1 \dots R_K} \rightarrow e^{2\pi i t \sum_{\alpha} m_\alpha^2 / 2k} W_{R_1 \dots R_K}$ のように shift される. ところで一般の G の場合には, この shift は整数 n_α (これは上の t に対応) を用いて次のように表される. ((6.23) と共に T 変換の結果として現れる (6.34).)

$$W_{R_1 \dots R_K} \rightarrow \exp \left[2\pi i \sum_{\alpha=1}^K n_\alpha h_{R_\alpha} \right] W_{R_1 \dots R_K},$$

$$h_R \doteq \frac{(\Lambda, \Lambda + 2\rho)}{2(k + h^v)} \quad (\Lambda : \text{可積分表現 } R \text{ の highest weight vector}, \rho : \text{Weyl vector}). \quad (6.24)$$

ここで h_R は WZW model における primary field の conformal dim である. (Root α, β に対して (α, β) を標準内積 (最高 root の 2 乗を 2 に規格化) で定義しておく.)

¹¹ $\frac{k}{4\pi} x^2 + mx = \frac{k}{4\pi} (x + 2\pi m/k)^2 - \pi m^2/k$ から以下の形は理解できる.

以上で分かった重要な事は (I) 量子効果によって $k \rightarrow k + C_2(G)/2$ の shift が起こる. (II) 重力との結合によって shift (6.23) が起こる. (III) knot の framing によって shift (6.24) が起こる. 以下では Chern-Simons 理論の正準量子化を議論する事によって WZW model へと議論を繋げる.

† 正準量子化

まず $2+1$ 次元多様体 M を 2 次元面 Σ の時間発展により構成されたものとする (Hamiltonian formalism). この時 M は, 境界 $\partial M = \Sigma$ によって 2 つの領域 M_1 と M_2 に分割されて, $M = M_1 \cup_f M_2$ ($f: \Sigma \rightarrow \Sigma$ 同相)¹² のように map f による貼り合わせで与える事ができる. 次に理論の量子化を実行, 即ち Hilbert 空間 $\mathcal{H}(\Sigma)$ の wave function を多様体 $M_{1,2}$ 上で path integral

$$\Psi_{M,\mathcal{O}}(\mathcal{A}) \doteq \langle \mathcal{A} | \Psi_{M,\mathcal{O}} \rangle = \int_{\mathcal{A}|_{\Sigma}=\mathcal{A}} \mathcal{D}A e^{i\mathcal{L}\mathcal{O}}$$

により定義する. f による多様体の貼り合わせから誘導される Hilbert 空間上の作用素環を $U_f: \mathcal{H}(\Sigma) \rightarrow \mathcal{H}(\Sigma)$ とすると Chern-Simons 理論の partition function は $\mathcal{Z} = \langle \Psi_{M_1} | U_f | \Psi_{M_2} \rangle$ で与えられる. 要点は, この partition function 全体が Σ 上の $1+1$ 次元 WZW model の conformal block の空間と 1 対 1 で対応付けられる事である. この対応関係を使うと, 3 次元 Chern-Simons 理論の partition function が 2 次元 WZW 理論から計算できる. 以下ではもう少し詳しくこの対応について述べる. (より詳しくは Witten の原論文, 及びそこでの参考文献を参照. 以下では M に Wilson loop を含まない状況下でのみ議論する.)

M_1 と M_2 との貼り合わせ近傍の理論は local には $\Sigma \times \mathbb{R}$ 上の Chern-Simons 理論となる. 今 gauge を $A_0 = 0$ と選ぶと action (6.13) は, $\mathcal{L} = -\frac{k}{4\pi} \int dt \int_{\Sigma} \epsilon^{ab} \text{Tr} A_a \frac{d}{dt} A_b$ となるので正準交換関係が $\{A_a^{(a)}(x), A_b^{(b)}(y)\} = \frac{4\pi}{k} \epsilon_{ab} \delta^{(a)(b)} \delta^2(x-y)$ と得られる ((a) は群 G の添え字). ここで gauge 固定による以下の束縛条件が存在する.

$$\mathcal{L} \text{ は } A_0 \text{ を含まない.} \quad \Rightarrow \quad F_{12}^a = 0 \text{ (flat connection).} \quad (6.25)$$

故に, この束縛条件付きの量子化を考える必要があるが上述の正準交換関係は gauge 変換を生成して, 束縛条件 (6.25) により (その解空間は Wilson line (多様体 M の holonomy) によって特徴付けられる), 量子化された moduli 空間 (flat G -bundle modulo gauge 変換) \mathcal{M} は有限次元 (index theorem から $\dim \mathcal{M} = 2d(g-1)$ (for $g > 1, d = \dim G$)) の symplectic 多様体となる. さらに Σ 上の複素構造 J を用いて \mathcal{M} に複素構造を導入する事ができて, \mathcal{M} は Kähler 多様体となりその symplectic form は $L^{\otimes k}$ (\mathcal{M} 上の determinant line bundle の k 次の tensor 積) の first Chern class となる事が示される. このようにして Hilbert 空間 $\mathcal{H}(\Sigma)$ は $L^{\otimes k}$ の global holomorphic section の空間と同一視される.

さらに上記の $\mathcal{H}(\Sigma)$ は J に依存しない事から, これから得られる moduli 空間上の vector bundle が fiber を同一視するような flat connection を持つべきであり, その様な flat bundle は Σ 上の WZW model の conformal block の空間として得る事ができる [77]. この conformal block (level k) の空間こそ上の $L^{\otimes k}$ の global holomorphic section の空間に他ならない.

6.2.3 Chern-Simons Theory の厳密解

上記の事を認めると, Chern-Simons 理論の量子論を議論する為に action (6.13) に戻る必要も無くなり, WZW model の conformal block さえ扱う事ができれば良くなる. ところで, ここまで WZW model を定義してこなかったのだが WZW model というのは affine Lie algebra を 2 次元の CFT の context で述べた理論の事で, 以下の議論においては explicit な action を示しておく必要は無い¹³.

¹² M_1 と M_2 とでは境界の向きが逆になっている事に注意.

¹³ この model の action は, 2 次元面 Σ 及びこれを境界に持つ 3 次元 ball B^3 から群 $G \ni g$ への map として次の様に定義される.

$$\mathcal{L} = \frac{k}{16\pi} \int_{\Sigma} d^2z \text{Tr}' \partial_{\alpha} g^{-1} \partial^{\alpha} g + \frac{k}{24\pi} \int_{B^3} \text{Tr}' g'^{-1} dg' \wedge g'^{-1} dg' \wedge g'^{-1} dg', \quad (g'|_{\partial B^3} = g).$$

この作用の対称性 $g \rightarrow \Omega(z)g\bar{\Omega}^{-1}(\bar{z})$ に付随する保存カレント $J(z) = -\frac{1}{2}k(\partial_z g)g^{-1}, J(\bar{z}) = -\frac{1}{2}k(\partial_{\bar{z}} g^{-1})g$ の mode 展開から current 代数 $[J_m^a, J_n^b] = f^{abc} J_{m+n}^c + \frac{1}{2}km\delta^{ab}\delta_{m+n}$, (f : 群 G の構造定数) が得られる [78].

以下で必要なのは、WZW model を特徴付ける affine Lie algebra の指標の modular 変換であって、これから Chern-Simons 理論の partition function を与える事ができる。即ち 3 次元多様体 M 上で仮想的閉曲線 K に沿って太らせた tube を分離すると、3 次元多様体 M_L (切り取られた境界 Σ 上で定義される Hilbert 空間 \mathcal{H}_L の状態 vector を ψ とする。) と、切り取られた 3 次元 solid torus M_R ($\partial M_R = \Sigma$ 上で定義される Hilbert 空間 \mathcal{H}_R の状態 vector を χ とする。) を得る。そこで 3 次元 solid torus の境界 ∂M_R を modular 変換 (K) して、3 次元多様体 M_L のもとの位置に埋め込むと新しい 3 次元多様体 \tilde{M} が出来上がり実質的な Chern-Simons の partition function は $\langle \psi | \chi \rangle \rightarrow \langle \psi | K\chi \rangle$ のように変換する (図 18)。これによって 1 つの多様体上の partition function から別の多様体上の partition function が得られる。

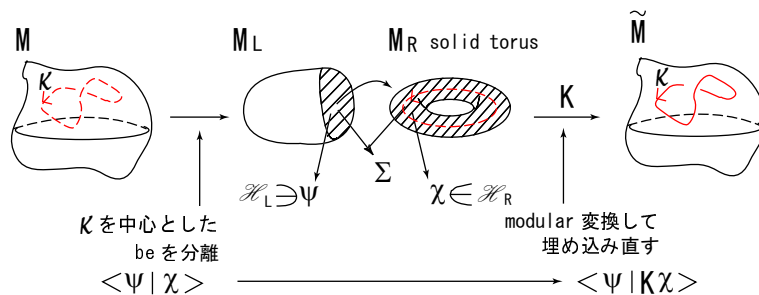


図 18: Dehn 手術

ここで M の内部に Wilson line を導入すると、Hilbert 空間 $\mathcal{H}(\Sigma)$ は次のように一般化される。Wilson line が横切る点 (marked point) で Σ 上に gauge charge が置かれて、 $\mathcal{H}(\Sigma)$ はそれに対応した Hilbert 空間に一般化される。まず $\Sigma = S^2$ の場合の、この Hilbert 空間について次の事を注意しておく。

- (1) Marked point が無い時, $\dim \mathcal{H}_\Sigma = 1$.
- (2) 表現 R の marked point が 1 個の時, $\dim \mathcal{H}_\Sigma = 1$ (for R : trivial), $\dim \mathcal{H}_\Sigma = 0$ (for R : non-trivial).
- (3) 表現 R_1, R_2 の 2 個の marked point がある時, $\dim \mathcal{H}_\Sigma = 1$ (for R_1, R_2 : dual), $\dim \mathcal{H}_\Sigma = 0$ (その他).
- (4) 表現 R_1, R_2, R_3 の 3 個の marked point がある時, $\dim \mathcal{H}_\Sigma = N_{123}$ (Verlinde).

ここで N_{123} は表現 R_1, R_2 に対応した primary field ϕ_1, ϕ_2 の OPE から得られる primary field ϕ_3 (表現 R_3 に対応) の多重度である。さらに 1 以上の genus を持っている marked point 付きの Riemann 面の時には、因子化により、上述の次元を Verlinde の N_{123} から計算することができる。(任意の marked point 付き Riemann 面を退化させていくと、これは 3 点付き (以下) の球面の線形結合として表現できる [79]. 図 19, 20)

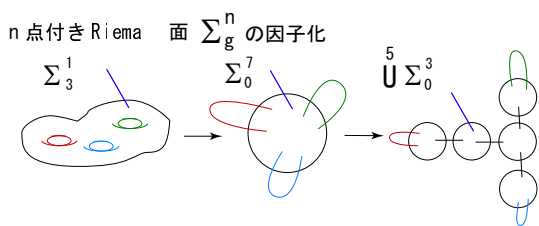


図 19: 因子化 1

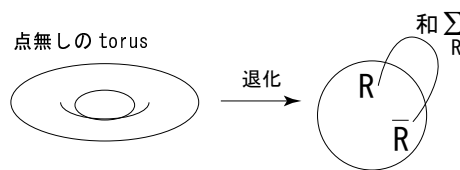


図 20: 因子化 2

今 3 次元多様体 M として $\Sigma \times S^1$ を考える。そこで S^1 に時間発展の parameter を導入する事によって、この多様体上の partition function は $Z(\Sigma \times S^1) = Tr_{\mathcal{H}_\Sigma}(1) = \dim \mathcal{H}_\Sigma$ の様に得られる。ここで Σ として genus 0 の球面を取ってくると上の注意 (1) より、

$$Z(S^2 \times S^1) = 1 \tag{6.26}$$

となる. そこで, この $S^2 \times S^1$ を議論の出発点となる多様体だと考えれば良い.

次に上の Dehn 手術で述べたように, torus 上の WZW 理論の modular 変換について知っておく必要がある. その前に WZW model の表現論について要約しておく.

† WZW model の表現論 [79, 80]

実際には Lie 環 \mathfrak{g} の表現論を Kac-Moody 代数から構築して, そこに現れる特異 vector の可約性から (有限次元となる) 可積分表現を定義した上で上述の current 代数の表現論を述べる必要があるが, 詳しく定義している余裕が無いので以下で必要な結果だけを取り出しておく. まず以下の current 代数 (OPE) が重要である. (g^{ab} : 標準内積 (最高ルートの長さが $\sqrt{2}$) における Cartan 計量, k : 代数の level)

$$J^a(z)J^b(\omega) = \frac{kg^{ab}}{(z-\omega)^2} + \frac{f^{abc}}{z-\omega} J^c(\omega) + \dots \Leftrightarrow [J_m^a, J_n^b] = f^{abc} J_{m+n}^c + kmg^{ab} \delta_{m+n}. \quad (6.27)$$

ここで mode 展開 $J^a(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{J_n^a}{z^{n+1}}$ を使った. この current $J^a(z)$ を用いて, EM tensor を次で定義すると J の Comf.dim が 1 となる事が示される. (Sugawara construction, $f^{abc} f_{abd} = 2h^v \delta_d^a$, h^v : dual coxeter 数)

$$T(z) \doteq \frac{1}{2(k+h^v)} : J^a(z)J_a(z) :, \quad (: \text{ は正規積}). \quad (6.28)$$

そうしておくとも mode 展開 $T(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{L_n}{z^{n+2}}$ により Virasoro 代数を得て, その cenrtal charge として以下の形が得られる.

$$c = \frac{k \dim \mathfrak{g}}{k+h^v}. \quad (6.29)$$

さらに可積分表現の highest weight vector ($|\Lambda\rangle$) 空間上で, primary state $|\phi, \Lambda\rangle (= \phi(z)|\Lambda\rangle)$ を Lie 環の generator X^a を用いて $J_0^a|\phi, \Lambda\rangle = X^a|\phi, \Lambda\rangle$, $J_n^a|\phi, \Lambda\rangle = 0$, (X^a : \mathfrak{g} の表現, $n > 0$) で定義すると, (6.28) の EM tensor から直ちに $L_n|\phi, \Lambda\rangle = 0$, ($n > 0$), $L_0|\phi, \Lambda\rangle = \frac{J_0^a J_{0a}}{2(k+h^v)}|\phi, \Lambda\rangle$ が得られる. この様にして得られた Conf.dim $\frac{J_0^a J_{0a}}{2(k+h^v)}$ の分子は 2 次の Casimir 作用素となっていて, Lie 代数の適当な基底 (Chevalley 基底¹⁴) を用いる事によって, $J_0^a J_{0a} = \sum_i h_i h^i + \sum_{\Delta_+} \frac{\alpha^2}{2} (e_\alpha e_{-\alpha} + e_{-\alpha} e_\alpha) = \sum_i h_i h^i + \sum_{\Delta_+} ((\alpha, h) + \alpha^2 e_{-\alpha} e_\alpha)$ と書けるので, 結局次を得る. ($e_\alpha|\Lambda\rangle = 0$, $h_i|\Lambda\rangle = \Lambda_i|\Lambda\rangle$ に注意.)

$$L_n|\phi, \Lambda\rangle = 0 \quad (n > 0), \quad L_0|\phi, \Lambda\rangle = \frac{(\Lambda, \Lambda + 2\rho)}{2(k+h^v)}|\phi, \Lambda\rangle. \quad (6.30)$$

ここで $\rho \doteq \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta_+} \alpha$ は Weyl vector である.

† 厳密解

上で述べた Dehn 手術から議論を続ける. まず WZW model の level k の可積分表現の highest weight vector 空間は有限次元で, これを群 G の t 個の既約表現 R_0, \dots, R_{t-1} で label する (R_0 : 自明な表現). 一方, solid torus 上の path integral で定義された Chern-Simons 理論の Hilbert 空間 $\mathcal{H}(T^2)$ は, 内部に Wilson line (境界 T^2 の homology cycle a に平行で表現 R , 図 21) が挿入されると t 次元の Hilbert 空間 $\mathcal{H}(T^2) = \mathcal{H}(T^2, R_0) \oplus \dots \oplus \mathcal{H}(T^2, R_{t-1})$ になって, WZW model の可積分表現の highest weight vector 空間 (図 20) と同一視される. ここで $\mathcal{H}(T^2, R_i)$ は, 表現 R_i の Wilson line が挿入された場合の Chern-Simons 理論の Hilbert 空間で, wave function $v_i \in \mathcal{H}(T^2, R_i)$ を $\mathcal{H}(T^2)$ の base vector とする事ができる (Dehn 手術において $v_0 = \chi$ に注意). これを用いると $\mathcal{Z}(\tilde{M}) = \langle \psi | K \chi \rangle = \langle \psi | K v_0 \rangle = \sum_i K_0^i \langle \psi | v_i \rangle = \sum_i K_0^i \mathcal{Z}(M; R_i)$ が得られる. ここで $g_{ij} \doteq \langle v_i | v_j \rangle$ (R_i, R_j が dual でなければ 0) で添え字の上げ下げを定義しておく. すると上で述べた注意 (2),(3),(4) から, $\mathcal{Z}(S^2 \times S^1; R_i) = \delta_{i0}$, $\mathcal{Z}(S^2 \times S^1; R_i, R_j) = g_{ij}$, $\mathcal{Z}(S^2 \times S^1; R_i, R_j, R_k) = N_{ijk}$ となるので, これらを用いてより一般の相関関数が計算できる.

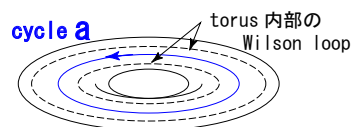


図 21: Torus の a -cycle

¹⁴ α を positive root Δ_+ の元として $[h_i, h_j] = 0$, ($i, j = 1, \dots, \text{rank} \mathfrak{g}$), $[h_i, e_\alpha] = (\alpha_i^v, \alpha) e_\alpha$, $[e_\alpha, e_{-\alpha}] = (\alpha^v, h)$, $B(e_\alpha, e_{-\alpha}) = \frac{2}{\alpha^2}$ のような基底 $\{h_i, e_{\pm\alpha}\}$ の事. ここで h は Cartan 部分代数の元であり, B は通常の Killing 形式, α_i は simple root, $\alpha^v \doteq \frac{2\alpha}{\alpha^2}$ は α の coroot, $(\alpha^v, h) \doteq \sum_i \alpha_i^v h_i$ である.

例えば S^3 上の partition function は, $S^2 \times S^1$ を形成する 2 つの solid torus ($T = D \times S^1$, $T' = D' \times S^1$, D は disk) を, 一方の cycle の S 変換 $\tau \rightarrow -1/\tau$ をして, 貼り合わせる事によって S^3 が得られるので (5.2.2 節の例 (IV) を参照),

$$\mathcal{Z}(S^3) = \sum_i S_0^i \mathcal{Z}(S^2 \times S^1; R_i) = S_{00} \quad (6.31)$$

と求める事が出来る. 次に S^3 内部に unknot の Wilson line がある場合は,

$$\mathcal{Z}(S^3; R_i) = \sum_j S_0^j \mathcal{Z}(S^2 \times S^1; R_i, R_j) = S_{0i} = S_{00} W_{R_i}(\text{unknot}). \quad (6.32)$$

ここで $W_{R_i}(\text{unknot})$ については (6.16) を参照. 最後に 2 つの unknot R_i, R_j が絡まっている例として Hopf link を挙げておく. これは, 上述の議論を少し修正して次のように計算できる. (表現 R_i の base v_i から出発すれば良い.)

$$\mathcal{Z}(S^3; L(R_i, R_j)) = \sum_k S_i^k \mathcal{Z}(S^2 \times S^1; R_j, R_k) = S_{ij} = S_{00} W_{R_i R_j}. \quad (6.33)$$

以上から modular 変換 S が分かれば厳密解が得られる事が分かる. これは WZW model の指標の変換行列として定義されるもので T 変換 ($\tau \rightarrow \tau + 1$) と合わせて結果だけ示しておく [81]. ($p \doteq \Lambda + \rho$, r : 群 G の rank, ω : Weyl 群¹⁵ W の元, $|\Delta_+|$: positive root の数, $\epsilon(\omega) \doteq (-1)^{|\omega|}$: Weyl 群の最短表示の符号, $\text{Vol } \Gamma^r$, $\text{Vol } \Gamma^w$: それぞれ root lattice と weight lattice の volume で ADE 型については Cartan 行列 C_{ij} を用いて $\text{Vol } \Gamma^w / \text{Vol } \Gamma^r = (\det C_{ij})^{-1}$ となる.)

$$T_{pp'} = \delta_{pp'} e^{2\pi i(h_p - c/24)}, \quad h_p = \frac{p^2 - \rho^2}{2(k + h^v)} = \frac{(\Lambda, \Lambda + 2\rho)}{2(k + h^v)}, \quad (6.34)$$

$$S_{pp'} = \frac{i^{|\Delta_+|}}{(k + h^v)^{r/2}} \left(\frac{\text{Vol } \Gamma^w}{\text{Vol } \Gamma^r} \right)^{1/2} \sum_{\omega \in W} \epsilon(\omega) e^{-\frac{2\pi i}{k+h^v}(p, \omega(p'))}. \quad (6.35)$$

ここで $p = 0$ は自明な表現を表す. また T 変換の物理的な解釈は 6.2.2 節で述べた通りである. 以下では $G = U(N)$ の場合について具体的に (6.31), (6.32), (6.33) の厳密解を示しておく.

(6.31)

まずは次の Weyl の分母公式に注意しておく.

$$\sum_{\omega \in W} \epsilon(\omega) e^{\omega(\rho, X)} = \prod_{\alpha \in \Delta_+} 2 \sinh \left(\frac{\alpha, X}{2} \right), \quad (X \in \Gamma^w \otimes \mathbb{R}). \quad (6.36)$$

これを用いると (6.31) は positive root の積の計算に帰着出来て, さらに $U(N)$ の partition function は $SU(N)$ の partition function に $U(1)$ factor $N^{1/2}/(k+N)^{1/2}$ を掛ける事によって得る事が出来る¹⁶. ($SU(N)$ について $h^v = N$, $\det C_{ij} = N$.)

$$\mathcal{Z}(S^3) = \frac{N^{1/2}}{(k+N)^{1/2}} \frac{1}{(k+N)^{(N-1)/2}} (N)^{-1/2} \prod_{\alpha \in \Delta_+} 2 \sin \left(\frac{\pi(\alpha, \rho)}{k+N} \right) = \frac{1}{(k+N)^{N/2}} \prod_{j=1}^{N-1} \left[2 \sin \frac{\pi j}{k+N} \right]^{N-j}. \quad (6.37)$$

¹⁵Weyl 群とは root 空間の鏡映変換 $\omega_i(\lambda) = \lambda - (\alpha_i^v, \lambda)\alpha_i$, $\lambda \in \Gamma^r$ によって生成される群で次のように定義される.

$$W \doteq \langle \omega_1, \dots, \omega_r \mid \omega_i^2 = 1, (\omega_i \omega_j)^{m_{ij}} = 1 \rangle.$$

ここで m_{ij} は, $C_{ij}C_{ji} = 0, 1, 2, 3$ となる Cartan 行列 $C_{ij} \doteq 2 \frac{(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_i, \alpha_i)}$ の非対角要素の pair に対応して $m_{ij} = 2, 3, 4, 6$ の値を取る.

¹⁶ $A_{N-1}(SU(N))$ の positive root は正規直行基底 e_i を用いて $e_i - e_j$ ($i < j = 1, \dots, N$) によって与える事が出来るので Weyl vector $\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta_+} \alpha = \sum_{j=1}^N \frac{1}{2}(N-2j+1)e_j$ と具体的に得られる. これから以下の式が計算できる.

(6.32)

Unknot の相関関数 (6.32) は quantum dimension $dim_q R$ と呼ばれ次の形で与えられる.

$$W_R(\text{unknot}) = dim_q R = \frac{S_{0R}}{S_{00}} = \frac{\sum_{\omega \in W} \epsilon(\omega) e^{-\frac{2\pi i}{k+N}(\rho, \omega(\Lambda + \rho))}}{\sum_{\omega \in W} \epsilon(\omega) e^{-\frac{2\pi i}{k+N}(\rho, \omega(\rho))}}. \quad (6.38)$$

ここで非増加な数列 $l_1 \geq l_2 \geq \dots \geq l_{C_R}$ を用いて, 表現 R を Young tableaux で表した時 $\Lambda = \sum_{i=1}^{C_R} l_i e_i$ ($C_R \leq N$) と書けて, 分母公式 (6.36) を用いると ($\alpha_{ij} = e_i - e_j$ に対して $(\alpha_{ij}, \rho) = j - i$, $(\alpha_{ij}, \Lambda) = l_i - l_j$ から), (6.38) は次のようになる. ($[x] \doteq 2i \sin \frac{\pi x}{k+N} = q^{x/2} - q^{-x/2}$, $[x]_\lambda \doteq \lambda^{1/2} q^{x/2} - \lambda^{-1/2} q^{-x/2}$, $q \doteq e^{\frac{2\pi i}{k+N}}$, $\lambda \doteq q^N$)

$$dim_q R = \prod_{\alpha \in \Delta_+} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{k+N} \alpha \cdot (\Lambda + \rho)\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{k+N} \alpha \cdot \rho\right)} = \prod_{1 \leq i < j \leq C_R} \frac{[l_i - l_j + j - i]}{[j - i]} \prod_{k=1}^{C_R} \frac{\prod_{v=1}^{l_k - k} [v]_\lambda}{\prod_{v=1}^{l_k} [v - k + C_R]}. \quad (6.39)$$

以下の便宜の為に, この式の $\lambda \rightarrow \infty$ の leading term を求めると次を得る.

$$\begin{aligned} dim_q R(\text{leading}) &= \lambda^{l(R)/2} q^{\kappa_R/4} \prod_{1 \leq i < j \leq C_R} \frac{[l_i - l_j + j - i]}{[j - i]} \prod_{k=1}^{C_R} \prod_{v=1}^{l_k} \frac{1}{[v - k + C_R]} \\ &= \lambda^{l(R)/2} q^{\kappa_R/4} \prod_{1 \leq i < j \leq \infty} \frac{[l_i - l_j + j - i]}{[j - i]}. \end{aligned} \quad (6.40)$$

ここで $l(R) \doteq \sum_{i=1}^{C_R} l_i = \sum_{(i,j) \in Y_R} 1$ は Young tableaux Y_R の box の数 ((i, j) は Young tableaux の i 行 j 列) で, $\kappa_R \doteq l(R) + \sum_{j=1}^{C_R} (l_j^2 - 2jl_j) = 2 \sum_{(i,j) \in \mu_R} (j - i)$ であり, 2 つ目の等号は積の並べ直しを具体的に考える事から得られる.

(6.38) に戻って別の書き換えも行っておく (Schur polynomial¹⁷による表示). まず (6.38) は群 $G(= U(N))$ の指標を用いて次の形に持っていく事が出来る. (M_R : 既約表現 R に属する weight vector の集合)

$$dim_q R = ch_R \left[-\frac{2\pi i}{k+N} \rho \right], \quad ch_R(a) \doteq \sum_{\mu \in M_R} e^{(a, \mu)} \quad (a \in \Gamma^w \otimes \mathbb{R}). \quad (6.41)$$

ここで次の Weyl の指標公式を用いる.

$$ch_R(a) = S_R(x_i = e^{a_i}), \quad a = \sum_{i=1}^N a_i e_i. \quad (6.42)$$

すると (6.41) より,

$$dim_q R = S_R(x_i = q^{-\frac{1}{2}(N-2i+1)}) = S_R(x_i = q^{\frac{1}{2}(N-2i+1)}) = \lambda^{\frac{1}{2}l(R)} q^{\frac{1}{2}l(R)} S_R(x_i = q^{-i}) \quad (6.43)$$

が厳密に Schur polynomial の形で求まる. (2 つ目の等号では $dim_q R = dim_q \bar{R}$ を用いた.)

(6.33)

Hopf link の相関関数は群 $G(= U(N))$ の指標を用いると次の形にもっていき事が出来る.

$$W_{R_1 R_2} = ch_{R_1} \left[\frac{2\pi i}{k+N} (\Lambda_{R_2} + \rho) \right] ch_{R_2} \left[\frac{2\pi i}{k+N} \rho \right]. \quad (6.44)$$

ここで $l_i^{R_2}$, ($i = 1, \dots, C_{R_2}$) を表現 R_2 における Young tableaux の非増加列として $\Lambda_{R_2} = \sum_i l_i^{R_2} e_i$ と表すと, Weyl の指標公式 (6.42) から

$$W_{R_1 R_2} = \lambda^{\frac{1}{2}(l(R_1) + l(R_2))} q^{\frac{1}{2}(l(R_1) + l(R_2))} S_{R_1}(x_i = q^{l_i^{R_2} - i}) S_{R_2}(x_i = q^{-i}) \quad (6.45)$$

¹⁷Young tableaux に対して Schur polynomial は次のように定義される. $S_R(x) \doteq \frac{\det x_j^{l_i + N - i}}{\det x_j^{N - i}} = \frac{\det x_j^{l_i + N - i}}{\Delta(x)}$, ($x = (x_1, \dots, x_N)$, $l_{C_R+1} = \dots = l_N = 0$, $\Delta(x) \doteq \prod_{i < j} (x_i - x_j)$: 差積). ここで定義から Schur polynomial は $x_i \rightarrow \alpha x_i$ とした時 $S_R(x) \rightarrow \alpha^{l(R)} S_R(x)$ となる事に注意しておく.

と厳密に求まる. この式の λ についての leading を考える. その為に Schur polynomial の technical な取り扱い方について注意しておく. まず次の Jacobi-Trudy 恒等式が有用である.

$$S_R(x_i) = \det \left(e_{l'_i - i + j}(x) \right). \quad (6.46)$$

ここで $e_n(x)$ は elementary symmetric polynomial である¹⁸. この式を用いる為に $E_{R_2}(t, q) \doteq \prod_{i=1}^N (1 + q^{l'_i - i} t)$ を定義する. これは $E_{R_2}(t, q) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1 + q^{l'_i - i} t}{1 + \lambda^{-1} q^{-i} t}$ と書き換える事が出来るので, $\lambda \rightarrow \infty$ を考えると $E_{R_2}(t, q) \rightarrow \prod_{i=1}^{\infty} (1 + q^{l'_i - i} t)$ となる. 即ち, (6.45) における large λ は (6.46) を用いる事により, large N の Schur polynomial として

$$W_{R_1 R_2}(\text{leading}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \lambda^{\frac{1}{2}(l(R_1) + l(R_2))} q^{\frac{1}{2}(l(R_1) + l(R_2))} S_{R_1}(x_i = q^{l'_i - i}) S_{R_2}(x_i = q^{-i}) \quad (6.47)$$

が得られる. このような leading を考えたのは第 7 節で導出される topological vertex なるものがこの Hopf link の leading だけから計算されるからである ((7.40) 参照). そして Schur polynomial について次の性質は計算上有用である.

$$\sum_R S_R(x) S_R(y) = \prod_{i, j \geq 1} (1 - x_i y_j)^{-1}, \quad \left(\sum_R : \text{あらゆる表現 } R \text{ についての和} \right), \quad (6.48)$$

$$\sum_R S_R(x) S_{R^t}(y) = \prod_{i, j \geq 1} (1 + x_i y_j). \quad (6.49)$$

† 具体的計算例 (leading term)

ここで (6.46), (6.47) を用いた Hopf link の large N に関する具体的な計算例をいくつか示す. (係数 $\lambda^{\frac{1}{2}(l(R_1) + l(R_2))}$ は省略する.) 以下では $E_R(t, q)$ の展開係数として $e_n^R = e_n(x_i = q^{l'_i - i})$ を定義しておく. また \bullet は自明な表現を表している. ((6.34), (6.35) の notation では, $p = 0$ に相当する.)

$$W_{\square \bullet} = q^{\frac{1}{2}} S_{\square}(x_i = q^{-i}) = q^{\frac{1}{2}} e_1^{\bullet} = q^{\frac{1}{2}} (q^{-1} + q^{-2} + \dots) = \frac{1}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}},$$

$$W_{\square \square} = q S_{\square}(x_i = q^{l'_i - i}) S_{\square}(x_i = q^{-i}) = q e_1^{\square} e_1^{\bullet} = q^{\frac{1}{2}} (1 + (q^{-2} + q^{-3} + \dots)) \frac{1}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}} = \frac{q^2 - q + 1}{(q - 1)^2},$$

$$W_{\square \bullet} = q S_{\square}(x_i = q^{-i}) = q e_2^{\bullet} = \sum_{1 \leq i < j \leq \infty} q^{-(i+j)+1} = \frac{q}{(q^2 - 1)(q - 1)},$$

$$W_{\square \bullet} = q S_{\square}(x_i = q^{-i}) = q \begin{vmatrix} e_1^{\bullet} & e_2^{\bullet} \\ e_0^{\bullet} & e_1^{\bullet} \end{vmatrix} = q(e_1^{\bullet})^2 - q e_2^{\bullet} = \frac{1}{(q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}})^2} - \frac{q}{(q^2 - 1)(q - 1)} = \frac{q^2}{(q^2 - 1)(q - 1)},$$

$$\begin{aligned} W_{\square \square} &= q^{\frac{3}{2}} S_{\square}(x_i = q^{l'_i - i}) S_{\square}(x_i = q^{-i}) = \left(q(e_1^{\square})^2 - q e_2^{\square} \right) \frac{1}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}} \\ &= \left(\left(\frac{q^2 - q + 1}{q^{\frac{1}{2}}(q - 1)} \right)^2 - \left(q^{-1} + \frac{q}{(q^2 - 1)(q - 1)} \right) \right) \frac{1}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}} = \frac{q^{\frac{3}{2}}(q^3 - q^2 + 1)}{(q - 1)^2(q^2 - 1)}. \end{aligned}$$

以上のように原理的には, あらゆる Young tableaux に対する Hopf link の leading を計算する事が出来る. ここで, $W_{R_1 R_2}(q) = W_{R_2 R_1}(q)$ が成り立つ事に注意しておく.

† Factorization property

最後に計算上便利な性質について述べておく. まず 3 次元多様体 M を 2 つの部分 M_1, M_2 に分解すると (Heegaard splitting, 図 23), それぞれの切断面は向き付けの異なる disk になっている事が分かる. (M_1 上の path integral で定義される Hilbert 空間 \mathcal{H} 上の状態 vector を χ , M_2 上の path integral で定義される Hilbert 空間 \mathcal{H}' 上の状態 vector を ψ とする.) そこで以上で述べた事からその切断面にだけ着目すると, これは 2 次元球面 S^2 となる. 同様に S^3 を 2 つの部分 B^3 (3 次元球体) に切断して, それぞれの多様体上での状態 vector を

¹⁸ 定義は母関数 $E(t, x) = \prod_{i=1}^N (1 + x_i t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} e_n(x) t^n$ から帰納的になされる. 具体的には $e_n(x) = \sum_{i_1 < \dots < i_n} x_{i_1} \dots x_{i_n}$ のようになる. ただし $n < 0$ に対しては $e_n(x) = 0$ とする.

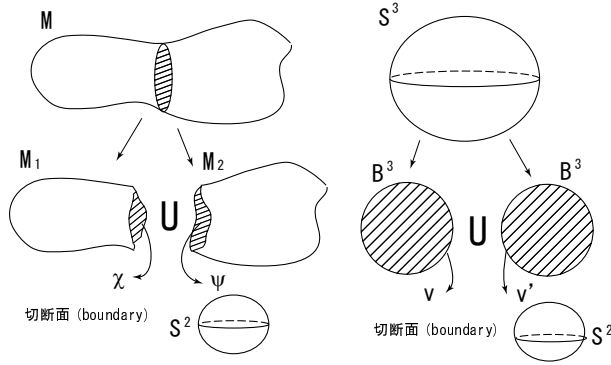


図 23: Heegaard splitting

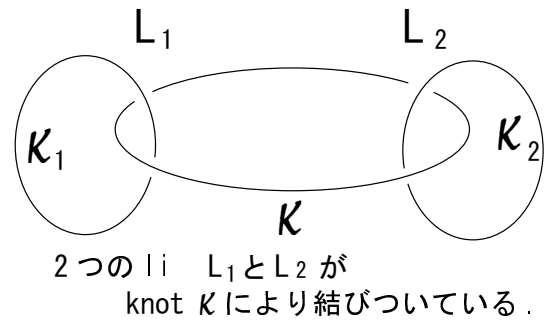


図 24: $L = L_1 \# L_2$

v, v' とする. しかるに, この節の冒頭の Dehn 手術の後の注意 (1) で述べたように $\mathcal{H}, \mathcal{H}'$ には marked point が無いので 1 次元である. よって $v \propto \chi, v' \propto \psi$ から, $\mathcal{Z}(M)\mathcal{Z}(S^3) = \langle \chi|\psi \rangle \cdot \langle v|v' \rangle = \langle \chi|v' \rangle \cdot \langle v|\psi \rangle = \mathcal{Z}(M_1)\mathcal{Z}(M_2)$ となるので,

$$\frac{\mathcal{Z}(M)}{\mathcal{Z}(S^3)} = \frac{\mathcal{Z}(M_1)}{\mathcal{Z}(S^3)} \cdot \frac{\mathcal{Z}(M_2)}{\mathcal{Z}(S^3)} \quad (6.50)$$

が成り立つ. この性質を M の内部で互いに絡まらない K 個の knot のある場合 (unlink) に応用すると, (6.16) の相関関数が factorize されて次のように計算出来る.

$$W_{R_1 \dots R_K}(\text{unlink}) = \prod_{i=1}^K W_{R_i}(\mathcal{K}_i). \quad (6.51)$$

さらに, この factorization property を上の図 24 のような link の直和 $L = L_1 \# L_2$ がある場合に一般化すると, 直和公式

$$\mathcal{Z}(M_1 \cup M_2 : L) \cdot \mathcal{Z}(S^3 : \mathcal{K}) = \mathcal{Z}(M_1 : \mathcal{K}_1) \cdot \mathcal{Z}(M_2 : \mathcal{K}_2) \quad (6.52)$$

が成り立つ. 故に (6.51), (6.52) を用いて Chern-Simons 理論の相関関数 (6.16) を, 上で求めた unknot と Hopf link の厳密解 (6.39), (6.45) から求める事が出来る.

第7節 All Genus Answer (By A-model)

この節では、第5節、第6節で述べてきた事を用いて geometric transition (Open/Closed duality) の議論を行った後、任意の local toric Calabi-Yau 多様体上の位相的弦理論の分配関数の厳密解への議論に移り、最終的には第3節で紹介した $4D$, $N = 2$ SYM 理論の厳密解 (Nekrasov の分配関数) が再現される事を示す [67, 62, 68, 91].

7.1 Geometric Transition

7.1.1 Gopakumar-Vafa/Chern-Simons

以下で考える群は全て $U(N)$ とする。6.1節で resolved conifold 上の閉弦の partition function が厳密に計算された。一方で 6.2.3 節で deformed conifold 上の開弦の partition function も厳密に計算できた。次に、この2つの計算結果の比較を行う。比較するのは (6.5), (6.7) と (6.37) から得られる free energy であり、以下では開弦の厳密解の $1/N$ 展開を実行する。そこで、まずは $1/N$ 展開についての注意から計算の方針を立てる。

† $1/N$ 展開

$U(N)$ gauge 理論の connection を adjoint 表現で A_{ab} ($a, b = 1, \dots, N$) と表して、Feynmann diagram の double line 表示を行う [82].

ここで一般的な partition function について形式的に議論を進める (free energy の導出)。まず action の前に掛かる gauge coupling を $1/\kappa$ として (Chern-Simons action (6.12) だと $\kappa = g_s$), 一般的な Feynmann diagram が vertex, propagator, loop から成る事を考慮すると、vertex からの寄与は1点について κ^{-1} の寄与を与えるので (V を vertex (頂点) の数として) κ^{-V} の寄与が得られ、propagator からの寄与は1本について κ の寄与を与えるので (E を propagator (内線) の数として) κ^E の寄与が得られ、loop からの寄与は1つについて N (trace) の寄与を与えるので (h を loop (閉曲線) の数として) N^h の寄与が得られる。故に、このような diagram の摂動次数は $N^h \kappa^{E-V} = N^h \kappa^{h-2+2g} = \kappa^{2g-2} \lambda_s^h$ ($\lambda_s \doteq N\kappa$: 't Hooft coupling) となるので、gauge 理論の free energy は形式的に次のような形で g と h の (2重級数による) 摂動展開として書く事が出来る²。(この h の寄与は 6.2.1 節の Proposition 6.1 の下で述べた degenerate instanton の寄与となっている。)

$$F^p = \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{g=0}^{\infty} F_{g,h} \kappa^{2g-2} \lambda_s^h. \quad (7.1)$$

以下では、 $\kappa = g_s$ と置き直して議論する。この式について h についての和を全て取る (面 (穴) をつぶす) 事を考えると $F^p = \sum_g g_s^{2g-2} F_g(\lambda_s)$ となって、幾何学的にも代数的にも閉弦の free energy が得られる事が予想される (λ_s についての強結合 \rightarrow 閉弦の free energy ?)。以下の計算方針はこのような議論に基づく [84].

† Chern-Simons 理論の $1/N$ 展開

Deformed conifold 上の開弦の free energy は (6.37) より、

$$F = \ln \mathcal{Z}(S^3) = -\frac{N}{2} \ln(k+N) + \sum_{j=1}^{N-1} (N-j) \ln \left[2 \sin \frac{\pi j}{k+N} \right]. \quad (7.2)$$

ここで \sin 関数の無限積展開 $\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{z^2}{n^2})$ を用いて、 $g_s = \frac{2\pi}{k+N}$, $\sum_{j=1}^{N-1} (N-j) = \frac{N}{2}(N-1)$ に注意すると次の形に変形できる。

$$F = F^p + F^{np}, \quad (7.3)$$

¹ここで境界の無い2次元多様体 (genus g) の Euler 数が、 $\chi = V - E + h = 2 - 2g$ によって与えられる事に注意。また、ここで考えているのは pure gauge の理論であって、もしも matter と coupling するような場合は考えるべき2次元多様体には境界 (b) が出来て、その Euler 数は $\chi = 2 - 2g - b$ となる。

²これが有名な $1/N$ 展開である。即ち摂動 parameter を N と λ_s (これは固定) で書き直すと $\kappa^{2g-2} \lambda_s^h = N^{2-2g} \lambda_s^{2g-2+h}$ となり $1/N$ で展開したのと同じと考え、large N で厳密解が得られたりもする [83].

$$F^p \doteq \sum_{j=1}^N (N-j) \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{j^2 g_s^2}{4\pi^2 n^2} \right), \quad (7.4)$$

$$F^{np} \doteq -\frac{N^2}{2} \ln(k+N) + \frac{N}{2} (N-1) \ln 2\pi + \sum_{j=1}^{N-1} (N-j) \ln j. \quad (7.5)$$

ここで F^p は上述の摂動項 ($h \geq 2$) を与えるが, F^{np} は摂動展開では現れない非摂動項 ((6.21) における Ray-Singer torsion) を表している. まずは摂動項 (7.4) から展開する. 計算の詳細は長くなるので省略して, その流れだけを書く. まず $\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ を用いて級数展開した後, $\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2k}$, $\sum_{j=1}^N j^k = \frac{1}{k+1} \sum_{l=1}^{k+1} (-1)^{\delta_{lk}} \binom{k+1}{l} B_{k+1-l} N^l$ を用いて ζ -関数と Bernoulli 数で書き換える. その後 $l+1 \doteq h$ と置く事により次の形が得られる. ($B_0 = 1, B_1 = -1/2, B_2 = 1/6, B_{2k+1} = 0$ (for $k \geq 1$) に注意して,)

$$F^p = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{h=2}^{2k} \frac{\zeta(2k)}{k} \left(\frac{g_s}{2\pi} \right)^{2k} B_{2k+2-h} N^h \left(\binom{2k+2}{h} - \binom{2k+1}{h-1} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(2k)}{k} \left(\frac{g_s}{2\pi} \right)^{2k} N^{2k+2} \left(\frac{1}{2k+2} - \frac{1}{2k+1} \right).$$

まず第 1 項から考える. $B_{2k+1} = 0$ (for $k \geq 1$) に注意して $2g \doteq 2k+2-h$ と置いて (h が奇数のものは消える), k の和を g の和に書き直した後で少し計算すると, 次のように genus 1 と 2 以上の展開が得られる. ($\zeta(h) = \frac{(2\pi)^h |B_h|}{2h!}$, $\lambda_s \doteq g_s N$ に注意して,)

$$(\text{第 1 項}) = \sum_{h \in 2\mathbb{N}} \frac{|B_h|}{12hh!} \lambda_s^h + \sum_{g=2}^{\infty} \sum_{h \in 2\mathbb{N}} \frac{2\zeta(2g-2+h)}{(2\pi)^{2g-2+h}} \binom{2g-3+h}{h} \frac{B_{2g}}{2g(2g-2)} g_s^{2g-2} \lambda_s^h = F_1^p(\lambda_s) + \sum_{g=2}^{\infty} F_g^p(\lambda_s) g_s^{2g-2}.$$

また, 第 2 項については $h \doteq 2k+2$ と置くと直ちに genus 0 の展開が得られる.

$$(\text{第 2 項}) = -\sum_{h=4}^{\infty} \frac{|B_{h-2}|}{(h-2)h!} g_s^{-2} \lambda_s^h = F_0^p(\lambda_s) g_s^{-2}.$$

次に非摂動項 (7.5) の展開を行う [85]. その第 3 項は (第 3 項) $= \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j=1}^k \ln j = \sum_{k=1}^{N-1} \ln \Gamma(k+1) = \ln G_2(N+1)$ と変形出来るので³ ($\Gamma(N) = (N-1)!$), 結局次の形に展開できる.

$$F^{np} = \frac{\lambda_s^2}{2} g_s^{-2} \left(\ln \lambda_s - \frac{3}{2} \right) - \frac{1}{12} \ln \frac{\lambda_s}{g_s} + \zeta'(-1) + \sum_{g=2}^{\infty} \frac{B_{2g}}{2g(2g-2)} g_s^{2g-2} \lambda_s^{2-2g}. \quad (7.6)$$

以下では初めに述べた計算方針に基づいて, 摂動項の h についての和を計算する. まず $g=0$ の項から考える. (4.30) を用いて ζ -関数で書き直し展開すると,

$$F_0^p(\lambda_s) = -\sum_{h=4}^{\infty} \frac{2\zeta(h-2)\lambda_s^h}{h(h-1)(h-2)(2\pi)^{h-2}} \stackrel{(h=2p)}{=} -\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=2}^{\infty} \frac{2(2\pi n)^2}{2p(2p-1)(2p-2)} \left(\frac{\lambda_s}{2\pi n} \right)^{2p}$$

を得る. さらに計算を進める為に, λ_s について 2 回微分して \sin 関数の無限積展開を用いると,

$$F_0^{p''}(\lambda_s) = -\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p} \left(\frac{\lambda_s}{2\pi n} \right)^{2p} = \ln \left(1 - \left(\frac{\lambda_s}{2\pi n} \right)^2 \right) = \ln \left(\frac{2}{\lambda_s} \sin \frac{\lambda_s}{2} \right) = -\ln i - \ln \lambda_s + \frac{i\lambda_s}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-in\lambda_s}}{n}$$

となる. この式の第 1 項については, 分岐の任意性が存在するので $i = e^{(\frac{1}{2}+2m)\pi i}$ ($m \in \mathbb{Z}$) と書くと,

$$F_0^{p'}(\lambda_s) = -\left(\frac{1}{2} + 2m \right) \pi i \lambda_s - \lambda_s \ln \lambda_s + \lambda_s + \frac{i\lambda_s^2}{4} - i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-in\lambda_s}}{n^2} + (\text{const.})$$

³ここで $G_2(z)$ は Barnes 関数で $G_2(z+1) = \Gamma(z)G_2(z)$, $G_2(1) = 1$ のように帰納的に定義される. また Barnes 関数の展開公式として $\ln G_2(N+1) = \frac{N^2}{2} \ln N - \frac{1}{12} \ln N - \frac{3}{4} N^2 + \frac{1}{2} N \ln 2\pi + \zeta'(-1) + \sum_{g=2}^{\infty} \frac{B_{2g}}{2g(2g-2)N^{2g-2}}$ が知られている.

となる. 定数項は $F_0^{p'}(0) = 0$ から決定できて $(\text{const.}) = \frac{i\pi^2}{6}$ となる. 同様にして $F_0^p(0) = 0$ を用いて,

$$F_0^p(\lambda_s) = -\zeta(3) + \frac{i\pi^2\lambda_s}{6} + \frac{3}{4}\lambda_s^2 - i\left(m + \frac{1}{4}\right)\pi\lambda_s^2 + \frac{i\lambda_s^3}{12} - \frac{\lambda_s^2}{2}\ln\lambda_s + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-in\lambda_s}}{n^3}$$

が得られる. 故に, 非摂動展開 (7.6) の genus 0 の項と合わせると次の結果に到る.

$$F_0(\lambda_s) = -\zeta(3) + \frac{i\pi^2\lambda_s}{6} - i\left(m + \frac{1}{4}\right)\pi\lambda_s^2 + \frac{i\lambda_s^3}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-in\lambda_s}}{n^3}. \quad (7.7)$$

ここで m の任意性は framing の任意性だと考える事が出来る. 次に $g = 1$ の項について考える. これは上の計算と全く同様に出来て (今度は微分を考えなくても),

$$F_1^p(\lambda_s) = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{2} + 2m\right)\pi i + \frac{1}{12}\ln\lambda_s - \frac{i\lambda_s}{24} + \frac{1}{12}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-in\lambda_s}}{n}, \quad (m \in \mathbb{Z})$$

となって, 非摂動展開 (7.6) の genus 1 の寄与と合わせる事により,

$$F_1(\lambda_s) = -\frac{i\lambda_s}{24} + \frac{1}{12}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-in\lambda_s}}{n} \quad (7.8)$$

が得られる. ここで λ_s に依存しない項は省略した. 最後に $g \geq 2$ の項を考えると, 公式 $(1-z)^{-q} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{q+n-1}{n} z^n$ を用いて,

$$\begin{aligned} F_g^p(\lambda_s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\chi_g}{(2\pi n)^{2g-2}} \sum_{p=1}^{\infty} \binom{2g-3+2p}{2p} \left(\frac{\lambda_s}{2\pi n}\right)^{2p} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_g}{(2\pi n)^{2g-2}} \left\{ -2 + \left(1 - \frac{\lambda_s}{2\pi n}\right)^{2-2g} + \left(1 + \frac{\lambda_s}{2\pi n}\right)^{2-2g} \right\} = (-1)^g \int_{\mathcal{M}_g} C_{g-1}^3 + \chi_g \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} (\lambda_s + 2\pi n)^{2-2g} \end{aligned}$$

を得る. ここで, $g \geq 2$ の非摂動展開項 (7.6) をこの式の第 2 項に加えて, 公式 $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\lambda_s + 2\pi n} = i \sum_{n=0}^{\infty} e^{-in\lambda_s}$ の両辺を $2g-3$ 回微分して得られる式を用いて変形すると, 結局次の形が得られる.

$$F_g(\lambda_s) = (-1)^g \int_{\mathcal{M}_g} C_{g-1}^3 - \frac{(-1)^g \chi_g}{(2g-3)!} \sum_{n=1}^{\infty} n^{2g-3} e^{-in\lambda_s}. \quad (7.9)$$

以上で, Chern-Simons 理論の free energy の $1/N$ 展開 $F = \sum_g g_s^{2g-2} F_g(\lambda_s)$ として (7.7), (7.8), (7.9) が得られた.

† Conifold Transition

ここで実際に閉弦側の厳密解との比較を行う. (6.7) 式を上を展開と比べると,

$$t = i\lambda_s \quad (7.10)$$

とする事によって, 少なくとも $g \geq 2$ に関しては, 上の $1/N$ 展開は閉弦側の free energy を与えている事が分かる⁴. (実際には genus が 0 と 1 の部分も一致している.)

まとめると deformed conifold (base S^3 に N 枚の D-brane が巻きついている) 上の開弦の理論が, (7.10) の parameter の変換 ('t Hooft coupling が Kähler parameter に読み替えられる) に伴って target space の topology が変換して resolved conifold $\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-1) \rightarrow \mathbb{P}^1$ 上の閉弦の理論へと変わったことになる. しかるに開弦の理論は gauge 理論, 閉弦の理論は重力理論になるので, この転移はまさに gauge 理論と重力理論の duality を示唆する結果である.

⁴ただし overall の符号 $(-1)^g$ の違いは, Schwinger の計算で parameter の虚軸への解析接続 $g_s \rightarrow ig_s$ によって sin 関数で書き表す事により解消されるので, この違いは trivial である. 以下の議論では Chern-Simons 理論が基盤になるので, こちらの notation で話を進める.

7.1.2 Wilson loop の導入

Wilson line が挿入された Chern-Simons 理論についても, 上のような幾何学的転移現象が得られる事が予想される. 以下 Ooguri-Vafa 論文に従って議論を進める [86].

Deformed conifold T^*S^3 の base space S^3 に unknot Wilson loop \mathcal{K} を導入する. この時 unknot に対して T^*S^3 内には次のような自然な SLS である $\tilde{C}_{\mathcal{K}}$ (\mathcal{K} の conormal bundle) が定義される. ここで, \mathcal{K} を parameter s ($0 \leq s < 2\pi$) を用いて $q(s)$ で表す.

$$\tilde{C}_{\mathcal{K}} \doteq \left\{ (q(s), p) \in T^*S^3 \left| \sum_{a=1}^3 p_a \frac{dq_a}{ds} = 0 \right. \right\} \simeq S^1 \times \mathbb{R}^2.$$

これは, 定義から $\tilde{C}_{\mathcal{K}}$ 上で $\omega = d\kappa = 0$ ($\kappa = p_a dq^a = 0$) より確かに SLS となっている.

そこで今 S^3 に N 枚の D-brane を, $\tilde{C}_{\mathcal{K}}$ に M 枚の D-brane をそれぞれ巻きつける. すると S^3 上には $U(N)$, $\tilde{C}_{\mathcal{K}}$ 上には $U(M)$ の gauge 理論が実現される. 以下では, $M \ll N$ として $\tilde{C}_{\mathcal{K}}$ 上の理論を S^3 上の理論の probe として取り扱う. 今, 開弦の一端が S^3 上に, もう一端が $\tilde{C}_{\mathcal{K}}$ 上に乗った状態を考えると, 開弦 $x^i \in T^*S^3$ の excitation として matter 場 $\phi(x)$ が, それぞれの gauge 群の bifundamental 表現 (N, \bar{M}) の complex scalar 場として現れる. ただし 6.2 節の初めに述べたように, 位相的弦の excitation は 0-mode のみで弦の両端で決まる. 即ち $x^a \in S^3 \cap \tilde{C}_{\mathcal{K}} = \mathcal{K}$ なので, matter 場は $\phi(x) = \phi(q(s))$ で表される. この matter 場の effective action は,

$$\mathcal{L}_{\mathcal{K}} = \oint_{\mathcal{K}} \text{Tr}_{(N, \bar{M})} \bar{\phi} (d + A - \tilde{A}) \phi \quad (7.11)$$

で与えられる. ここで A と \tilde{A} はそれぞれ S^3 上の $U(N)$ gauge 場と $\tilde{C}_{\mathcal{K}}$ 上の $U(M)$ gauge 場であり, 後者は probe の source として扱われる.

まず action (7.11) について scalar 場の integrate out を実行すると,

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} = \det(d + A - \tilde{A})^{-1} = \det \left(\frac{d}{ds} + \sum_a (A_a - \tilde{A}_a) \frac{dq_a}{ds} \right)^{-1} = \exp \left[-\text{Tr} \ln \left(\frac{d}{ds} + \sum_a (A_a - \tilde{A}_a) \frac{dq_a}{ds} \right) \right].$$

ここで円周上の運動量の量子化, 及び gauge 群の対角化 $A \rightarrow i\theta_n$, $\tilde{A} \rightarrow i\tilde{\theta}_m$ を行って, \sin 関数の無限積展開から得られる公式 $\ln \sin \pi\theta = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \ln(k + \theta) + \text{const.}$ を用いると, $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \propto \exp \left(-\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \ln \sin \frac{\theta_n - \tilde{\theta}_m}{2} \right)$ を得る. さらに $U(1)$ factor を framing(の任意性) で吸収させると ($\sum_n \theta_n = 1$, $\sum_m \tilde{\theta}_m = 1$),

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{\mathcal{K}} &\propto \exp \{ -\text{Tr} \ln(1 - U \otimes V) \}, \quad (U = P \exp \oint A \in SU(N), V^{-1} = P \exp \oint \tilde{A} \in SU(M)) \\ &= \exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{Tr} U^n \text{Tr} V^n \right\} \doteq \mathcal{O}(U, V) \end{aligned} \quad (7.12)$$

が得られ, これを Ooguri-Vafa (OV) operator という. そこで $U(N)$ の gauge 場を integrate out して $e^{-F(t, V)} = \langle \mathcal{O}(U, V) \rangle_{S^3}$ とすると, $\tilde{C}_{\mathcal{K}}$ 上の gauge 場 \tilde{A} の有効作用は $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{CS}(\tilde{A}, \tilde{C}_{\mathcal{K}}) + F(t, V)$ (第1項は通常の CS action) となる. そこで OV operator の真空期待値を考える. 今考えている trace は基本表現に関するものなので, $\langle \text{Tr} U \rangle = \text{Tr} U_0$ と計算した時 U_0 は次の形で与えられる. $U_0 = \text{diag} \left(e^{\frac{\pi i(N-1)}{k+N}}, e^{\frac{\pi i(N-3)}{k+N}}, \dots, e^{\frac{\pi i(1-N)}{k+N}} \right)$ (Cartan 部分代数の要素). これを用いると ($\alpha \doteq \frac{n\pi}{k+N}$)

$$\text{Tr} U_0^n = \sum_{p=1}^N e^{(N+1)\alpha i} e^{-2\alpha p i} = \frac{\sin \alpha N}{\sin \alpha} = \frac{\sin n\lambda_s/2}{\sin n g_s/2} = -\frac{i}{2 \sin n g_s/2} (e^{nt/2} - e^{-nt/2})$$

(最後に (7.10) を用いて parameter を置換した) を得る. そこで Frobenius の公式 (4.36) を用いると $\langle \text{Tr} U^{n_1} \dots \text{Tr} U^{n_h} \rangle = \text{Tr} U_0^{n_1} \dots \text{Tr} U_0^{n_h}$ が成り立つ事に注意すると, 次が得られる.

$$\langle \mathcal{O}(U, V) \rangle_{S^3} = \exp \left[-i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nt/2} - e^{-nt/2}}{2n \sin(n g_s/2)} \text{Tr} V^n \right] = \exp \left[i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Tr} V^n + \text{Tr} V^{-n}}{2n \sin(n g_s/2)} e^{-nt/2} \right]. \quad (7.13)$$

最後の等号は t の解析性を仮定した上で解析接続がなされた結果である。この解析接続によって、前節の議論と全く同じ conifold transition が起こっているが、ここでは SLS の \tilde{C}_K と一緒に起こっている。よって、その指数は前節のような閉弦の free energy とはならない。

この状況が resolved conifold 側ではどのように見えているのかを考える。以下代数的に上の状態を構成して conifold transition を行う。今 5.2.2 節の例 (IV) T^*S^3 において anti-holomorphic な involution $y_{1,2} \rightarrow \bar{y}_{1,2}$, $y_{3,4} \rightarrow -\bar{y}_{3,4}$ を考える。これによって明らかに symplectic form ω の符号は反転するので、この involution の固定点の集合が SLS となり、これを \tilde{C}_K と考える。即ち、固定点は $y_\mu = q^\mu + ip_\mu$ より $p_{1,2} = 0$, $q^{3,4} = 0$ であり、 $(q^\mu)^2 - (p_\mu)^2 = a^2$ に代入すると $(q^1)^2 + (q^2)^2 = a^2 + (p_3)^2 + (p_4)^2$ となって、これが \tilde{C}_K を与える。故に S^3 との intersection は $(q^1)^2 + (q^2)^2 = a^2$ となり、これは上で述べた unknot K となっている。

そこで conifold transition による、 \tilde{C}_K の resolved conifold 側での状態を特定する (5.2.2 節の最後を参照)。まず上の involution の固定点は $\bar{x} = y$ ($p_{1,2} = 0$), $\bar{u} = v$ ($q^{3,4} = 0$) であるから、base 上では $\eta = x/\bar{u} = u/\bar{x} = 1/\bar{\eta}$ より $|\eta| = 1$ となっている。このことから、 \tilde{C}_K は resolved conifold 側では base S^2 における $|\eta| = 1$ なる赤道と intersect しており、 $u - \eta\bar{x} = 0$ により記述される SLS の C_K として現れる。そこで (7.13) を type IIA の弦理論の立場から観察すると、この赤道を境界にした北半球と南半球のそれぞれに D2-brane が巻きついて non-trivial instanton の寄与が現れている事が分かる (6.2.1 節 Proposition 6.1 の下の注意参照)。(7.13) の分母の形については、 C_K に D4-brane を巻きつけて、残りの \mathbb{R}^2 上の有効作用を Gopakumar-Vafa 型の計算 (Schwinger's calculus) と同様に求めると、得られる事が示される。結果として、これは resolved conifold 上の boundary K を持った開弦の free energy と解釈でき open Gromov-Witten invariant と一致している事が分かる [86]。

7.1.3 More general situation by Toric variety

次に 2 つの T^*S^3 を貼り合わせて新しい多様体を構成して、2 つの base S^3 にそれぞれ N_1 枚、 N_2 枚の D-brane を巻きつける。そこで開弦の両端がそれぞれ別の S^3 上に乗っているような場合を考えて、2 つの S^3 に Wilson loop を導入する [87]。ただし上の節とは違って、2 つの S^3 間には有限の距離が存在する為に (7.11) に complexified Kähler parameter r による mass term が加わる。(A_1, A_2 をそれぞれの多様体上で定義される connection として、)

$$\mathcal{L} = \oint_{S^1} Tr_{(N_1, \bar{N}_2)} \bar{\phi} (d + A_1 - \tilde{A}_2 - r) \phi. \quad (7.14)$$

ここで ϕ を integrate out して、(7.12) と同様の計算から

$$\mathcal{O}(U_1, U_2; r) = \exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nr}}{n} Tr U_1^n Tr U_2^n \right\} \quad (7.15)$$

が得られる。ここで次の事に注意しておく。

Proposition 7.1 [87]

Toric diagram において、2 つの S^3 を結ぶ開弦による holomorphic curve (non-degenerate instanton) は、同じ edge に沿ったものにだけ存在する (図 25)。

Proof. 5.2.2 節の例 (IV) の notation で toric $xy = (z - \nu_1)(z - \nu_2)$, $uv = (z - \mu_1)(z - \mu_2)$ を考えたとき A-model は複素構造の変形に拠らないので、例えば $\mu_2 < \nu_1, \nu_2 < \mu_1$ における図 25 のような異なった edge にまたがった holomorphic curve は、deformation $\mu_2 < \nu_2 < \mu_1 < \nu_1$ により消失する。 ■

ここで以下の便宜の為に (7.15) の書き直しを行う。まず単純に展開すると、

$$\mathcal{O}(U_1, U_2; r) = 1 + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h!} \sum_{\omega_1, \dots, \omega_h} \frac{e^{-rl}}{\omega_1 \dots \omega_h} Tr U_1^{\omega_1} \dots Tr U_1^{\omega_h} Tr U_2^{\omega_1} \dots Tr U_2^{\omega_h}, \quad (l \doteq \sum_{i=1}^h \omega_i)$$

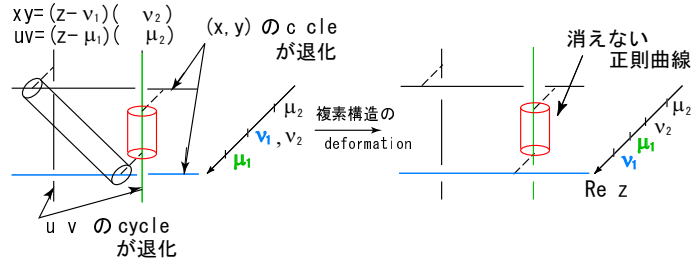


図 25: Proposition 7.1

が得られる. 次に 4.2.2 節の resummation (4.34) を行うと次のようになる. ($\omega_1 \cdots \omega_h = \prod_j j^{k_j}$, $l = \sum_{i=1}^h \omega_i = \sum_j j k_j$, $z_{\vec{k}} \doteq \prod_j k_j! j^{k_j}$)

$$\mathcal{O}(U_1, U_2; r) = 1 + \sum_{\vec{k}} \frac{e^{-lr}}{z_{\vec{k}}} \Upsilon_{\vec{k}}(U_1) \Upsilon_{\vec{k}}(U_2) = \sum_R \text{Tr}_R U_1 e^{-lr} \text{Tr}_R U_2. \quad (7.16)$$

ここで 2 つ目の等号では Frobenius の公式 (4.36) 及び指標の直交性 (4.37) を用いた. R についての和は自明なものも含む. (この時 l は表現 R の Young tableaux の box の数となっている事に注意.)

よって total な free energy は Proposition 7.1 も考えて次のように書ける. (1,2 項は通常の Chern-Simons 理論の free energy)

$$F = F_{CS}(N_1, g_s) + F_{CS}(N_2, g_s) + F(N_1, N_2; r),$$

$$F(N_1, N_2; r) \doteq -\ln \langle \mathcal{O}(U_1, U_2; r) \rangle = -\ln \sum_R e^{-l(R)r} W_R(\mathcal{K}_1) W_R(\mathcal{K}_2).$$

ここで $W_R(\mathcal{K}_i) = \langle \text{Tr}_R U_i \rangle$ は, $\mathcal{K}_{1,2}$ を unknot として計算できる. それを見るのは簡単で次のように考えれば良い (図 26). $\mathcal{O}(U_1, U_2; r) = \sum_R |R\rangle_1 e^{-lr} \langle R|_2$ と書いたとき partition function は S 変換して貼り合わせる事により得られて (5.2.2 節の例 (IV) 参照), $\mathcal{Z}(g_s, N_{1,2}, r) = {}_1\langle 0|SOS|0\rangle_2 = \sum_R {}_1\langle 0|S|R\rangle_1 e^{-lr} \langle R|S|0\rangle_2$ となるので $W_R(\mathcal{K}_i) = \frac{S_{0,R}}{S_{0,0}}(g_s, \lambda_{si})$ ($\lambda_{si} = g_s N_i$) が得られる. 故に $W_R(\mathcal{K}_i)$ は $\mathcal{K}_{1,2}$ を unknot として計算できる. そこで, 今の状況における geometric transition を 7.1.2 節の Ooguri-Vafa の計算と同様にして考えることが出来る. 即ち

$$F(N_1, N_2; r) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nr}}{n} \text{Tr} U_{1,0}^n \text{Tr} U_{2,0}^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nr}}{n(2 \sin ng_s/2)^2} (e^{nt_1/2} - e^{-nt_1/2})(e^{nt_2/2} - e^{-nt_2/2})$$

が得られる.(ここで (7.10) を用いて $\lambda_{si} = -it_i$ と置いた.) さらに

$$r = t + \frac{t_1 + t_2}{2} \quad (7.17)$$

と置き換える事により (図 27), この toric 多様体における free energy が次の形で得られた. (これは Gromov-Witten invariant の all genus answer (厳密解) を与えている.)

$$F = \sum_{d=1}^{\infty} \frac{1}{d(2 \sin dg_s/2)^2} \{e^{-dt_1} + e^{-dt_2} + e^{-dt}(1 - e^{-dt_1})(1 - e^{-dt_2})\}. \quad (7.18)$$

7.2 Topological Vertex

以下では 5.2 節で述べた toric 多様体 (local toric Calabi-Yau 多様体) 上での partition function を考える. 複素 3 次元の toric 多様体は \mathbb{C}^3 を local に patch する事により定義できていたので, 基本となる \mathbb{C}^3

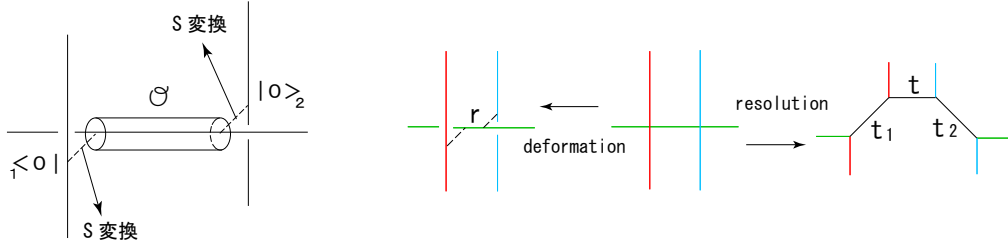


図 27: (7.17)

図 26: S 変換

上での partition function を定義する事が 1 つの目標となる. その為に 5.2.2 節の *Proposition* 5.3 の SLS (L_i ($i = 1, 2, 3$)) を持った \mathbb{C}^3 上の開弦の理論として partition function の定義を行う. (この SLS は $\mathbb{C} \times S^1$ の topology を持っているので, この S^1 を開弦の boundary だと考える事が出来る.) それは \mathbb{C}^3 のそれぞれの L_i に, D-brane を巻き付ける事により一般的に次の形で与えられる.

$$Z(V_1, V_2, V_3) = \sum_{R_1 R_2 R_3} C_{R_1 R_2 R_3} \prod_{i=1}^3 Tr_{R_i} V_i. \quad (7.19)$$

ここで V_i は L_i と \mathbb{C}^3 が交差する境界 S^1 での holonomy 行列で, 開弦の source である. $C_{R_1 R_2 R_3}$ を topological vertex といい [64], これを求める事が以下での主目的である [10]. (結果は (7.40) で与えられる.)

† 境界の compact 化

まず L_i の topology を $\mathbb{R}_+ \times S^1$ 上の S^1 fibration と考える事が出来る事に注意して, L_i を次のように修正して S^3 に置き換える (compact 化). 即ち, \mathbb{R}_+ に ∞ を付け加えた後, そこで non-degeneration cycle を潰す. これは, まさに interval I 上の T^2 fibration であり S^3 となっている. この T^2 fibration の edge を 5.2.2 節 (I) の要領で trivalent graph を使って $f_i = (p_i, q_i)$ で表して, \mathbb{C}^3 の T^2 fibration の edge $v_i = (s_i, t_i)$ に対応させる. それぞれの edge 上で T^2 fibration が退化する cycle は $(-q_i, p_i)$, $(-t_i, s_i)$ である. この時 S^3 が非退化, 即ち 2 つの cycle が平行になってはいけないので次の条件を課しておく⁵.

$$f_i \wedge v_i \doteq p_i t_i - q_i s_i = 1. \quad (7.20)$$

ここで, 直ちに分かるように f_i を $f_i - n_i v_i$ ($n_i \in \mathbb{Z}$) と変換させる任意性が存在する. この compact 化に伴う任意性は言い換えると, noncompact L_i の infrared region における ambiguity となっていて, この ambiguity の効果は Aganagic 達による B-model の brane を用いた解析 (7.1.2 節で触れた Ooguri-Vafa の D4-brane domain wall charge の解析 [88]) から, holonomy $V \rightarrow (-1)^n V$ ($n \in \mathbb{Z}$) の ambiguity として現れることが分かっている. 故に,

$$Tr_R V \rightarrow (-1)^{nl(R)} Tr_R V \quad (l(R): \text{表現 } R \text{ の Young tableaux の box の数}) \quad (7.21)$$

の任意性を導く [63, 89]. 一方この効果は, 6.2.2 節で議論した Chern-Simons 理論における framing ambiguity (ultraviolet region における ambiguity) と同じものとして考える事ができて [88], (6.24) で与えた ambiguity と同一視される. これを $U(N)$ (Weyl vector が $\rho = \sum_{j=1}^N \frac{1}{2}(N - 2j + 1)e_j$) で書くと次のようになる. ($q \doteq e^{\frac{2\pi i}{k+N}}$, $\lambda \doteq q^N$, $\kappa_R \doteq l(R) + \sum_{j=1}^{C_R} (l_j^2 - 2jl_j)$, $C_R \leq N$, l_i は表現 R の Young tableaux の i 行目の box の数)

$$W_{R_1 \dots R_K} \rightarrow q^{\frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^K n_{\alpha} \kappa_{R_{\alpha}}} \lambda^{\frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^K n_{\alpha} l(R_{\alpha})} W_{R_1 \dots R_K}, \quad (n_{\alpha} \in \mathbb{Z}). \quad (7.22)$$

故に (7.21) と (7.22) を 6.2.2 節 *Remark* 6.1 と合わせて次の結果が得られる. (ただし, λ の寄与は全て holonomy 行列 V_{α} の redefinition に吸収させる.)

$$f_{\alpha} \rightarrow f_{\alpha} - n_{\alpha} v_{\alpha} \Leftrightarrow Z_{R_1 \dots R_K} \rightarrow (-1)^{\sum_{\alpha=1}^K n_{\alpha} l(R_{\alpha})} q^{\frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^K n_{\alpha} \kappa_{R_{\alpha}}} Z_{R_1 \dots R_K}. \quad (7.23)$$

⁵ 2 つの cycle が平行になっている時, base の同じ点で同じ 1 つの cycle が退化するので, その topology は 2 つの $I \times S^1$ 上の S^1 fibration を貼り合わせたもの, 即ち $S^2 \times S^1$ である (5.2.2 節 (IV) 参照).

† Topological Vertex の一般的性質と patch の貼り合わせ

まず上で述べた compact 化を実行して, 図 28 のように境界付きの \mathbb{C}^3 patch の edge を書いておく. ここで (7.20) より $f_i \wedge v_i = 1$ となっており, 今 $v_2 \wedge v_1 = v_3 \wedge v_2 = v_1 \wedge v_3 = 1$, $\sum_i v_i = 0$ が成り立っている事に注意しておく (これらは $SL(2, \mathbb{Z})$ 変換を行っても不変). まず topological vertex を考える時には (7.23) のような framing の不定性が存在するので, 特定の (v_i, f_i) に対する topological vertex を $C_{R_1 R_2 R_3}^{(v_i, f_i)}$ と書く. すると (7.23) より,

$$C_{R_1 R_2 R_3}^{(v_i, f_i - n_i v_i)} = (-1)^{\sum_i n_i l(R_i)} q^{\frac{1}{2} \sum_i n_i \kappa_{R_i}} C_{R_1 R_2 R_3}^{(v_i, f_i)} \quad (7.24)$$

となって, 異なった framing の topological vertex はこれにより同一視できるので次のような framing を取る. まず $f_i = (p_i, q_i)$ とすると $f_1 \wedge v_1 = 1 \Leftrightarrow f_1 = (p_1, p_1 + 1)$, $f_2 \wedge v_2 = 1 \Leftrightarrow f_2 = (1, q_2)$, $f_3 \wedge v_3 = 1 \Leftrightarrow f_3 = (p_3, -1)$ となるので, framing を $f_1 \rightarrow f_1 - (-p_1)v_1 = (0, 1) = v_2$, $f_2 \rightarrow f_2 - q_2 v_2 = (1, 0) = v_3$, $f_3 \rightarrow f_3 - (p_3 + 1)v_3 = (-1, -1) = v_1$ のように取る事により,

$$(f_1, f_2, f_3) = (v_2, v_3, v_1) \quad (7.25)$$

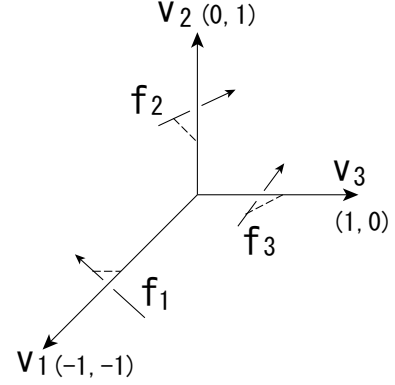


図 28: 境界付きの \mathbb{C}^3 patch

とする事が出来て, これを canonical framing という. そこで, このような framing での topological vertex を単純に $C_{R_1 R_2 R_3}$ と書く事にして, framing を $f_i \rightarrow f_i - n_i v_i$ と取った時の topological vertex を $C_{R_1 R_2 R_3}^{(n_1, n_2, n_3)}$ で表す. 次に, torus action による $SL(2, \mathbb{Z})$ 対称性から, $g \in SL(2, \mathbb{Z})$ に対して $g : (v_i, f_i) \rightarrow (g v_i, g f_i)$ の下で当然 topological vertex は不変でなければならない. これを認めると次が成り立つ.

Proposition 7.2 (Cyclic Symmetry)

$$C_{R_1 R_2 R_3} = C_{R_3 R_1 R_2} = C_{R_2 R_3 R_1}. \quad (7.26)$$

Proof. Topological vertex の $SL(2, \mathbb{Z})$ 対称性より, $SL(2, \mathbb{Z}) \ni TS^{-1}$ (3.1 節脚注 6 参照) によって,

$$TS^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} : (v_1, v_2, v_3) \mapsto (v_2, v_3, v_1)$$

となるので, $TS^{-1} : (v_i, f_i) \mapsto (v_{i+1}, f_{i+1})$ ($i : \text{mod } 3$) から直ちに示される. ■

次に \mathbb{C}^3 patch による topological vertex の貼り合わせについて述べておく. 以下では canonical framing を取っておいて, 図 29 のように edge v_i と v'_i の貼り合わせを考える (boundary に沿った hole の貼り合わせ). その為には $v'_i = -v_i$ であって, 表現 R_i と表現 R'_i の D-brane の parity が逆転していなければならない (boundary の向き付けが逆). この効果は action の overall な符号に $-$ の寄与を与える事になり, t' Hooft coupling $\lambda'_s = -\lambda_s$ によって amplitude に $(-1)^h$ の因子を与える ((7.1) 参照). また表現も $R'_i = R_i^t$ となっていなければならない (singlet を作る為). 以上の効果を見る為に topological vertex をその共役類 $C_{\vec{k}_1 \vec{k}_2 \vec{k}_3}$ に書き換えておく (holonomy 行列も表現の転置の影響を受ける為). つまり (7.19) を Frobenius の公式 (4.36) を用いて,

$$\mathcal{Z}(V_i) = \sum_{\vec{k}_1 \vec{k}_2 \vec{k}_3} \left(\sum_{R_1 R_2 R_3} \prod_{i=1}^3 \chi_{R_i}(C(\vec{k}_i)) C_{R_1 R_2 R_3} \right) \prod_{j=1}^3 \frac{1}{z_{\vec{k}_j}} \Upsilon_{\vec{k}_j}(V_j) \doteq \sum_{\vec{k}_1 \vec{k}_2 \vec{k}_3} C_{\vec{k}_1 \vec{k}_2 \vec{k}_3} \prod_{j=1}^3 \frac{1}{z_{\vec{k}_j}} \Upsilon_{\vec{k}_j}(V_j) \quad (7.27)$$

のように巻付き数で考える. ここで上の効果を考えると,

$$\sum_{R'_i R'_j R'_k} \prod_m \chi_{R'_m}(C(\vec{k}'_m)) C_{R'_i R'_j R'_k} = (-1)^h \sum_{R_i R'_j R'_k} \chi_{R_i}(C(\vec{k}_i)) \chi_{R'_j} \chi_{R'_k} C_{R_i R'_j R'_k}$$

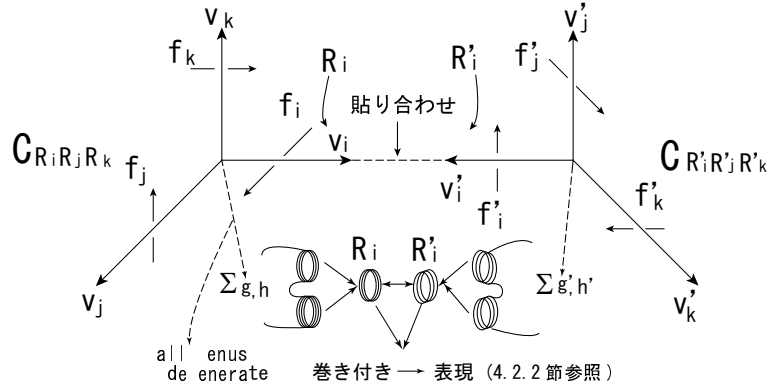


図 29: \mathbb{C}^3 patch の貼り合わせ

となって, さらに公式

$$\chi_{R^t}(C(\vec{k})) = (-1)^{|\vec{k}|+l(R)} \chi_R(C(\vec{k})), \quad (h = |\vec{k}|) \quad (7.28)$$

を用いると, 結局 topological vertex について

$$C_{R'_i R'_j R'_k} = (-1)^{l(R_i)} C_{R_i R_j R_k} \quad (7.29)$$

となる事が分かった. (これは framing には依らない.) さらに, これを $C_{R_i R_j R_k}$ と貼り合わせる為には framing も合わせる必要がある. (今 canonical framing $f_i = v_j$, $f'_i = v'_j$ となっている.)

lemma 7.1

$$f'_i - n_i v'_i = -f_i \text{ を満たすような } n_i \in \mathbb{Z} \text{ は常に存在する.} \quad (7.30)$$

$$(\because) \quad (f_i + f'_i) \wedge v'_i = -1 + 1 = 0. \quad (\because v'_i = -v_i.) \quad \blacksquare$$

よって f'_i を $-f_i$ にするような framing が存在して, さらに次が成り立つ.

lemma 7.2

$$n_i = v'_j \wedge v_j = f'_i \wedge f_i. \quad (7.31)$$

$$(\because) \quad \text{上の lemma より } n_i v'_i = f'_i + f_i = v'_j + v_j. \quad \therefore v'_j \wedge v'_i = 1 \text{ より } n_i = v'_j \wedge v_j. \quad \blacksquare$$

故に, このように具体的に得られた n_i を用いると (7.24) と (7.29) より

$$C_{R'_i R'_j R'_k}^{(v'_i, -f_i)} = C_{R'_i R'_j R'_k}^{(n_i, 0, 0)} = (-1)^{l(R_i)} C_{R'_i R'_j R'_k}^{(n_i, 0, 0)} = (-1)^{(n_i+1)l(R_i)} q^{-n_i \kappa_{R_i}/2} C_{R_i R_j R_k} \quad (7.32)$$

が得られる. これで貼り合わせられる topological vertex $C_{R'_i R'_j R'_k}^{(v'_i, -f_i)}$ が得られた. 後は, この topological vertex の edge v'_i と, もう一方の topological vertex の edge v_i の間に Kähler parameter t を propagator (内線) として挿入し貼り合わせればよい. その為に (7.16) を参照して (7.32) と合わせると次の結論を得る.

$$\sum_{R_i} C_{R_j R_k R_i} e^{-l(R_i)t} (-1)^{(n_i+1)l(R_i)} q^{-n_i \kappa_{R_i}/2} C_{R_i R'_j R'_k}. \quad (7.33)$$

† Topological Vertex の具体形

後は具体的に topological vertex が得られれば, 任意の local toric Calabi-Yau 多様体上の位相的弦理論の partition function が実質的に得られる事になる. 以下ではこの最後の step を実行する. まず図 30 のような toric 多様体を考える. この図では S^3, L_1, L_3 の world volume は互いに平行になっている. ところで平行な 2 枚の D-brane の 1-cycle は互いに交わる事は有り得ないのだが, 図 31 のように複素構造を変形させる事により片方の brane を anti-brane(元の brane とは向き付けが逆)に変換させると 2 つの cycle を交差させる事が出来る. ただし向き付けが逆になる効果として (7.14) における scalar 場 ϕ が fermion となる [90]. この事を考

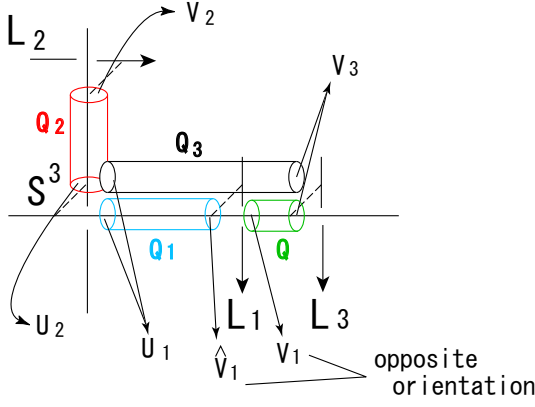


図 30: Holomorphic curve

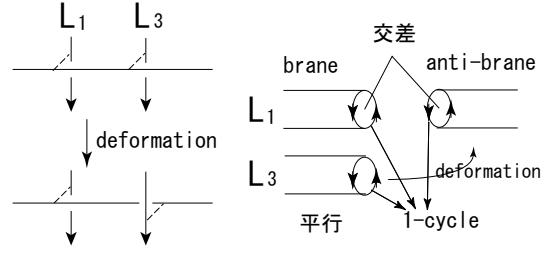


図 31: Brane/anti-brane deformation

慮して *Proposition 7.1* から, この toric 多様体上の partition function における non-degenerate instanton の寄与 4 つを全て (7.16) の形で書き下すと, r_1, r_2, r_3, r をそれぞれの cycle 間の距離として次を得る.

$$\begin{aligned} & \sum_{Q_1} \text{Tr}_{Q_1^t} U_1 e^{-l(Q_1)r_1} (-1)^{l(Q_1)} \text{Tr}_{Q_1} \hat{V}_1, & \sum_{Q_2} \text{Tr}_{Q_2} U_2 e^{-l(Q_2)r_2} \text{Tr}_{Q_2} V_2, \\ & \sum_{Q_3} \text{Tr}_{Q_3^t} U_1 e^{-l(Q_3)r_3} (-1)^{l(Q_3)} \text{Tr}_{Q_3} V_3, & \sum_Q \text{Tr}_{Q^t} V_1 e^{-l(Q)r} (-1)^{l(Q)} \text{Tr}_Q V_3. \end{aligned} \quad (7.34)$$

ここで $U_1, U_2, V_1, V_2, V_3, \hat{V}_1$ は, それぞれの SLS 上の開弦の boundary に対応した holonomy 行列で, V_1 と \hat{V}_1 は boundary の向きが逆になっている事を表す為に区別されている. そこで 7.1.2 節のように S^3 上の gauge 場を integrate out する事によって probe brane 上の有効理論の partition function が得られる.

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(V_1, V_2, V_3) = & \sum_{Q_1 Q_2 Q_3 Q} e^{-l(Q_1)r_1} e^{-l(Q_2)r_2} e^{-l(Q_3)r_3} e^{-l(Q)r} (-1)^{l(Q_1)+l(Q_3)+l(Q)} \\ & \times \left\langle \text{Tr}_{Q_2} U_2 \text{Tr}_{Q_1^t} U_1 \text{Tr}_{Q_3^t} U_1 \right\rangle_{S^3} \text{Tr}_{Q_1} \hat{V}_1 \text{Tr}_{Q^t} V_1 \text{Tr}_{Q_2} V_2 \text{Tr}_{Q \otimes Q_3} V_3. \end{aligned}$$

ここで S^3 上の期待値の部分は $\langle \text{Tr}_{Q_2} U_2 \text{Tr}_{Q_1^t \otimes Q_3^t} U_1 \rangle_{S^3}$ となり, これは表現 Q_1^t, Q_3^t の 2 つの平行な knot が表現 Q_2 の knot に絡んだ link と考えられるので, 直和公式 (6.2.3 節の (6.52)) を用いる事によって次を得る. (degenerate instanton の寄与を除いた probe brane 上の partition function)

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(V_1, V_2, V_3) = & \sum_{Q_1 Q_2 Q_3 Q} e^{-l(Q_1)r_1} e^{-l(Q_2)r_2} e^{-l(Q_3)r_3} e^{-l(Q)r} (-1)^{l(Q_1)+l(Q_3)+l(Q)} \\ & \times \text{Tr}_{Q_1} \hat{V}_1 \text{Tr}_{Q^t} V_1 \text{Tr}_{Q_2} V_2 \text{Tr}_{Q \otimes Q_3} V_3 \frac{W_{Q_1^t Q_2} W_{Q_3^t Q_2}}{W_{Q_2}}. \end{aligned} \quad (7.35)$$

これを用いて topological vertex の具体形を求める為には次の 2 つの step が必要である.

Step 1: Conifold transition を用いた \mathbb{C}^3 patch への変形 (図 32)

まず deformed conifold と resolved conifold の間の parameter の一般則として ((7.17) 参照), 次が成り立つ事が知られている.

$$r = s + \frac{t}{2}. \quad (7.36)$$

そこで parameter を $r_1 = s_1 + \frac{t}{2}$, $r_2 = s_2 + \frac{t}{2}$, $r_3 = s_3 + \frac{t}{2}$ で置き換えると resolved conifold の言葉で記述する事ができる. さらに degenerate instanton の寄与を完全に decouple させる為に, ここで定義した Kähler parameter t を ∞ に持って行く. 即ち (7.35) における期待値 W を,

$$W_{R_1 R_2} \rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\frac{t}{2}(l(R_1)+l(R_2))} W_{R_1 R_2}, \quad (W_R = W_{R \bullet}) \quad (7.37)$$

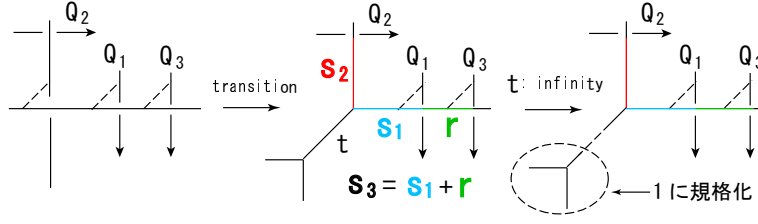


図 32: Step 1

で定義し直すと良い. この極限により leading term (6.47) だけが残り ((7.10) より $\lambda = q^N = e^{\frac{2\pi i N}{k+N}} = e^{ig_s N} = e^{i\lambda_s} = e^t$), それは (6.46) を用いて計算する事が出来る (その下の具体的な計算例を参照). 以下では W と書く
と常にこの leading の意味で用いられる.

Step 2: Cyclic symmetry を用いた SLS の移動

次に Step 1 で得られた toric 多様体における L_1 を, edge $(-1, -1)$ と交差する位置に移動させる. その為に, まず以上の計算で L_3 を除いた状態を考える. これは (7.35) の導出と同様にして次で与えられる.

$$\mathcal{Z}(V_1, V_2) = \sum_{Q_1 Q_2} e^{-l(Q_1)s_1} e^{-l(Q_2)s_2} (-1)^{l(Q_1)} \text{Tr}_{Q_1} \hat{V}_1 \text{Tr}_{Q_2} V_2 W_{Q_1^t Q_2}. \quad (7.38)$$

ここで topological vertex の定義 (7.19) より,

$$C_{\bullet Q_2 Q_1}^{(0,0,-1)} = (-1)^{l(Q_1)} W_{Q_1^t Q_2}$$

となるので (7.24) を用いて canonical framing で書くと次が得られる.

$$C_{\bullet Q_2 Q_1} = q^{\frac{\kappa_{Q_1}}{2}} W_{Q_1^t Q_2} \left(= q^{\frac{\kappa_{Q_1}}{2}} W_{Q_2 Q_1^t} \right). \quad (7.39)$$

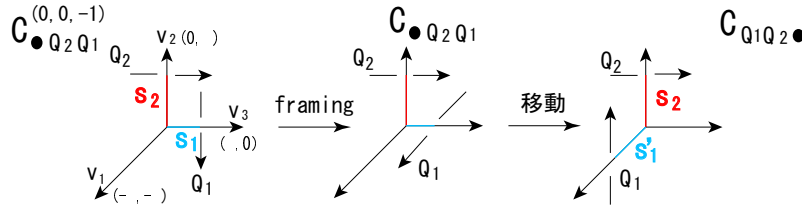


図 33: Step 2

さらに, 図 33 のように L_1 を移動させる. この topological vertex は, cyclic symmetry (7.26) 及び (7.39) を用いて次のように求める事が出来る. (また移動の時に L_1 の framing を逆向きにするので, \hat{V}_1 は V_1 となる事に注意しておく.)

$$C_{\bullet Q_2 Q_1}^{(0,0,-1)} = (-1)^{l(Q_1)} W_{Q_1^t Q_2} \rightarrow C_{Q_1 Q_2 \bullet} = C_{\bullet Q_1 Q_2} = q^{\frac{\kappa_{Q_2}}{2}} W_{Q_2^t Q_1}.$$

故に (Step 1 の後) これを (7.35) に適用すると, 図 33 のように L_1 が移動した toric 多様体上の partition function \mathcal{Z}_{New} が $r = s'_1 + s_3$ に注意して, 次のように求まる.

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{New}(V_1, V_2, V_3) &= \sum_{Q_1 Q_2 Q_3 Q} e^{-l(Q_1)s'_1} e^{-l(Q_2)s_2} e^{-l(Q_3)s_3} e^{-l(Q)(s'_1+s_3)} (-1)^{l(Q_3)+l(Q)} q^{\frac{\kappa_{Q_2}}{2}} \\ &\quad \times \frac{W_{Q_2^t Q_1} W_{Q_3^t Q_2}}{W_{Q_2}} \text{Tr}_{Q_1 \otimes Q^t} V_1 \text{Tr}_{Q_2} V_2 \text{Tr}_{Q \otimes Q_3} V_3 \end{aligned}$$

$$= \sum_{R_1 R_2 R_3} \sum_{Q_1 Q_3 Q} (-1)^{l(R_3)} q^{\frac{\kappa_{R_2}}{2}} N_{Q_1 Q^t}^{R_1} N_{Q Q_3}^{R_3} \frac{W_{R_2^t Q_1} W_{Q_3^t R_2}}{W_{R_2}} \\ \times e^{-l(R_1)s_1'} e^{-l(R_2)s_2} e^{-l(R_3)s_3} \text{Tr}_{R_1} V_1 \text{Tr}_{R_2} V_2 \text{Tr}_{R_3} V_3.$$

ここで2つ目の等号では Q_2 を R_2 に置き換えて, tensor 積 $\text{Tr}_{Q_1 \otimes Q^t} V_1 = \sum_{R_1} N_{Q_1 Q^t}^{R_1} \text{Tr}_{R_1} V_1$, $\text{Tr}_{Q \otimes Q_3} V_3 = \sum_{R_3} N_{Q Q_3}^{R_3} \text{Tr}_{R_3} V_3$ を用いて $l(Q_1) + l(Q) = l(R_1)$, $l(Q_3) + l(Q) = l(R_3)$ と置き換えた ((4.39) 参照).

最後に L_3 の framing を canonical framing に持っていく事により, (Q_3 を Q_2 に置き換えて, 距離 s の寄与は holonomy 行列に吸収させて,)

$$C_{R_1 R_2 R_3}^{(0,0,-1)} = (-1)^{-l(R_3)} q^{-\frac{\kappa_{R_3}}{2}} C_{R_1 R_2 R_3} = \sum_{Q_1 Q_2 Q} (-1)^{l(R_3)} q^{\frac{\kappa_{R_2}}{2}} N_{Q_1 Q^t}^{R_1} N_{Q Q_2}^{R_3} \frac{W_{R_2^t Q_1} W_{Q_2^t R_2}}{W_{R_2}}$$

となるので $Q \rightarrow Q^t$, $Q_2 \rightarrow Q_2^t$ と置き換えて $W_{R_1 R_2} = W_{R_2 R_1}$ を用いると, topological vertex が具体的に Hopf link の leading を使って次の形で求まる⁶. (当然 (7.39) も特別な場合として以下から示される.)

$$C_{R_1 R_2 R_3} = q^{\frac{\kappa_{R_2} + \kappa_{R_3}}{2}} \sum_{Q_1 Q_2 Q} N_{Q Q_1}^{R_1} N_{Q Q_2}^{R_3} \frac{W_{R_2^t Q_1} W_{R_2 Q_2}}{W_{R_2}}. \quad (7.40)$$

† Resolved conifold 上の partition function

(7.33), (7.40)(または (7.39)) を用いる事によって, 原理的には任意の local toric Calabi-Yau 多様体上の位相的弦理論の partition function が得られる. 以下の節では, これに geometric engineering (5.1 節) を用いて Nekrasov の partition function (3.2 節) を導く事が主な目標となるが, その前に適用例として最も簡単な resolved conifold 上の partition function を計算して, これが Gopakumar-Vafa invariant の non-trivial instanton (6.6) を忠実に再現(ただし 7.1.1 節脚注 4 で述べたように sin 関数として現れるはずである) している事を確認しておく. (constant map は規格化されている.)

2 つの \mathbb{C}^3 patch の framing は合っているので (7.39), (6.43), 公式 (6.49) などを用いて ($Q \doteq e^{-t}$),

$$\mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1} = \sum_R C_{\bullet \bullet R} C_{\bullet \bullet R^t} (-1)^{l(R)} Q^{l(R)} = \sum_R S_R(x_i = q^{-i+\frac{1}{2}}) S_{R^t}(x_i = q^{-i+\frac{1}{2}}) (-Q)^{l(R)} \\ = \sum_R S_R(x_i = (-Q)q^{-i+\frac{1}{2}}) S_{R^t}(x_i = q^{-i+\frac{1}{2}}) = \prod_{i,j \geq 1} (1 - Qq^{-(i+j)+1}) \\ = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - Qq^{-n})^n.$$

故に以下のように (6.6) が確認できる. (ここで $q = e^{ig_s}$)

$$F_{\mathbb{P}^1} = -\ln \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1} = -\sum_{n=1}^{\infty} n \ln(1 - Qq^{-n}) = \sum_{d=1}^{\infty} \frac{e^{-dt}}{d(q^{\frac{d}{2}} - q^{-\frac{d}{2}})^2} = -\sum_{d=1}^{\infty} \frac{e^{-dt}}{d(2 \sin \frac{dq_s}{2})^2}. \quad (7.41)$$

7.3 Nekrasov の分配関数 (Holomorphic Curve Counting)

ここでは 5.3 節で述べた事を用いて, Nekrasov の分配関数が実際に得られる事を示す [67, 62, 68, 91, 92].

† $SU(2)$ SYM

$N = 2$, $SU(2)$ SYM 理論を得る為には, ある Hirzebruch surface \mathbb{F}_m を用いて matter が入った場合を考えるのであれば $N_f \leq 3$ 個の点で blow up した diagram を用いればよい. そのような partition function は

⁶(7.35) の partition function は degenerate instanton を除いた部分であって, この寄与は Step 1 の $t \rightarrow \infty$ によって Gromov-Witten invariant の constant map の寄与となる. 以下この寄与は 1 に規格化されているものとする.

次の形で与える事が出来る [68]. ((7.33), (7.39) を用いる.)

$$\begin{aligned} Z_{\mathbb{F}_m}^{N_f} &= \sum_{R_1 \cdots R_n} C_{R_1^t \bullet R_2} C_{R_2^t \bullet R_3} \cdots C_{R_n^t \bullet R_1} e^{-\sum_{i=1}^n l(R_i) t_i} (-1)^{\sum_{i=1}^n (n_i+1) l(R_i)} q^{-\sum_{i=1}^n n_i \kappa_{R_i} / 2}, \quad (n_i = f'_i \wedge f_i) \\ &= \sum_{R_1 \cdots R_n} W_{R_1 R_2} W_{R_2 R_3} \cdots W_{R_n R_1} e^{-\sum_{i=1}^n l(R_i) t_i} (-1)^{\sum_{i=1}^n \alpha_i l(R_i)} q^{\sum_{i=1}^n \alpha_i \kappa_{R_i} / 2}. \end{aligned} \quad (7.42)$$

ここで $\alpha_i \doteq -(n_i + 1)$ は 5.2.1 節の *Proposition* 5.2 で述べた自己交点数 $\alpha_i = -a_i$ と一致する. そこで特に pure $SU(2)$ SYM 理論の場合について述べる事にすると, (7.42) は次のようになる. ($t_1 = t_F, t_2 = t_B, t_3 = t_F, t_4 = t_B + m t_F, Q_B \doteq e^{-t_B}, Q_F \doteq e^{-t_F}, K_{R_2 R_4}(q, Q_F) \doteq \sum_R W_{R_2 R} W_{R R_4} Q_F^{l(R)}$ と置いて,)

$$\begin{aligned} Z_{\mathbb{F}_m} &= \sum_{R_1 \cdots R_4} W_{R_1 R_2} W_{R_2 R_3} W_{R_3 R_4} W_{R_4 R_1} \\ &\quad \times e^{-t_F(l(R_1)+l(R_3)+ml(R_4))} e^{-t_B(l(R_2)+l(R_4))} (-1)^{m(l(R_4)-l(R_2))} q^{\frac{m}{2}(\kappa_{R_4}-\kappa_{R_2})} \\ &= \sum_{R_2 R_4} (-1)^{m(l(R_4)-l(R_2))} q^{\frac{m}{2}(\kappa_{R_4}-\kappa_{R_2})} Q_B^{l(R_2)+l(R_4)} Q_F^{ml(R_4)} K_{R_2 R_4}^2(q, Q_F). \end{aligned} \quad (7.43)$$

ここで $K_{R_2 R_4}$ の計算を実行する. (6.47) より

$$\begin{aligned} K_{R_2 R_4} &= \sum_R S_{R_2}(x_i = q^{-i+\frac{1}{2}}) S_R(x_i = q^{i^{R_2}-i+\frac{1}{2}}) S_{R_4}(x_i = q^{-i+\frac{1}{2}}) S_R(x_i = q^{i^{R_4}-i+\frac{1}{2}}) Q_F^{l(R)} \\ &= W_{R_2} W_{R_4} \left(\sum_R S_R(x_i = q^{i^{R_2}-i}) S_R(x_i = q^{i^{R_4}-i}) (q Q_F)^{l(R)} \right). \end{aligned}$$

次に (\cdots) 内の計算について (7.15) から (7.16) への計算を逆に辿る. 即ち, まず winding base \vec{k} に移って Frobenius の公式

$$\prod_j (P_j(x_i))^{k_j} = \sum_R \chi_R(C(\vec{k})) S_R(x_i), \quad P_j(x_i) \doteq \sum_i x_i^j \quad (7.44)$$

を逆に用いる事によって,

$$\begin{aligned} (\cdots) &= \sum_{\vec{k}} \frac{(q Q_F)^{l(R)}}{z_{\vec{k}}} \prod_j (P_j(x_i = q^{i^{R_2}-i}))^{k_j} \prod_j (P_j(x_i = q^{i^{R_4}-i}))^{k_j} \\ &= \exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(q Q_F)^n}{n} e_1^{R_2}(q^n) e_1^{R_4}(q^n) \right\}. \end{aligned}$$

ここで $e_1^R(q)$ は elementary symmetric polynomial の 1 次で ((6.46) 以下から具体的計算例を参照),

$$\begin{aligned} e_1^R(q) &= q^{l_1-1} + \cdots + q^{l_d-d} + q^{-d-1} + q^{-d-2} + \cdots + (q^{-1} + \cdots + q^{-d}) - (q^{-1} + \cdots + q^{-d}) \\ &= \frac{1}{q-1} + \sum_{i=1}^d (q^{l_i-i} - q^{-i}), \quad (d = C_R) \end{aligned} \quad (7.45)$$

となっている. さらに,

$$f_R(q) \doteq \frac{q}{q-1} \sum_{i=1}^d (q^{l_i-i} - q^{-i}) = \sum_{i=1}^d q^{-i} (q^{l_i} + q^{l_i-1} + \cdots + q) = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^{l_i} q^{j-i} \quad (7.46)$$

を定義して $e_1^{R_2}(q) e_1^{R_4}(q)$ を計算すると次のようになる.

$$e_1^{R_2}(q) e_1^{R_4}(q) = \frac{1}{q} (W_{\square}^2(q) + f_{R_2}(q) + f_{R_4}(q) + (q + q^{-1} - 2) f_{R_2}(q) f_{R_4}(q)) \doteq \frac{1}{q} (W_{\square}^2(q) + f_{R_2 R_4}(q)).$$

ここで $W_{\square}(q) = \frac{1}{q^{1/2}-q^{-1/2}}$ は後で gauge 理論の 1-loop の摂動項に相当する事が分かる. さらに $f_{R_2 R_4}(q)$ を

$$f_{R_2 R_4}(q) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} C_k(R_2, R_4) q^k \quad (7.47)$$

と q で冪級数に展開しておき, 元の定義から次が成り立つ事に注意しておく.

$$f_{R_2 R_4}(1) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} C_k(R_2, R_4) = l(R_2) + l(R_4), \quad (7.48)$$

$$\left. \frac{d}{dq} f_{R_2 R_4}(q) \right|_{q=1} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} k C_k(R_2, R_4) = \frac{1}{2} \kappa(R_2) + \frac{1}{2} \kappa(R_4). \quad (7.49)$$

そこで元に戻って, (\dots) を求めると次のように書ける. $\left(\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x) \right)$

$$(\dots) = \exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q_F^n}{n} W_{\square}^2(q^n) \right\} \cdot \exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q_F^n}{n} f_{R_2 R_4}(q^n) \right\} = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - Q_F q^k)^{-k} \prod_{k \in \mathbb{Z}} (1 - Q_F q^k)^{-C_k(R_2, R_4)}.$$

故に $W_{pert} \doteq \prod_{k=1}^{\infty} (1 - Q_F q^k)^{-2k}$ と置くと次が得られる. (以下の計算の都合上 R_4 を R_4^t で置き換えて, R_2 を R_1 , R_4 を R_2 で読み替える. (7.43) において, この置き換えは結果に何の影響も及ぼさない.)

$$K_{R_1 R_2^t}^2 = W_{pert} \cdot W_{R_1}^2 W_{R_2^t}^2 \cdot \prod_{k \in \mathbb{Z}} (1 - Q_F q^k)^{-2C_k(R_1, R_2^t)}. \quad (7.50)$$

ここで Nekrasov の partition function との比較の為に次のような parameter の置き換えを行っておく.

$$q = e^{-2R\hbar} \quad (ig_s = -2R\hbar), \quad Q_F = e^{-4Ra} \quad (t_F = 4Ra). \quad (7.51)$$

ここで R は 5 次元方向の compact 化の半径, \hbar は 4 次元 graviphoton の field strength F_+ , a は Coulomb phase の mass parameter にそれぞれ対応している. そこで (6.40) より,

$$W_R(q) = q^{\kappa_R/4} \prod_{1 \leq i < j \leq \infty} \frac{q^{\frac{l_i - l_j + j - i}{2}} - q^{-\frac{l_i - l_j + j - i}{2}}}{q^{\frac{j-i}{2}} - q^{-\frac{j-i}{2}}} = q^{\kappa_R/4} \prod_{1 \leq i < j \leq \infty} \frac{\sinh[R\hbar(l_i - l_j + j - i)]}{\sinh[R\hbar(j - i)]}$$

となるので, 表現 R_l を非増加列 $(\mu_{l,1}, \dots, \mu_{l,d_l}, 0, \dots)$ の Young tableaux で表して (3.2 節の図 4 参照), 次が得られる.

$$W_{R_1}^2 W_{R_2^t}^2 = q^{\frac{1}{2}(\kappa_{R_1} - \kappa_{R_2})} \prod_{l=1}^2 \prod_{1 \leq i < j \leq \infty} \frac{\sinh^2[R\hbar(\mu_{l,i} - \mu_{l,j} + j - i)]}{\sinh^2[R\hbar(j - i)]} \doteq q^{\frac{1}{2}(\kappa_{R_1} - \kappa_{R_2})} \mathcal{Z}_1. \quad (7.52)$$

同様に $\prod_{k \in \mathbb{Z}} (1 - Q_F q^k)^{-2C_k(R_1, R_2^t)}$ についても parameter の置き換え (7.51) を行くと (7.48), (7.49) を用いて, 次のように書き直す事が出来る.

$$\prod_{k \in \mathbb{Z}} (1 - Q_F q^k)^{-2C_k(R_1, R_2^t)} = (4Q_F)^{-l(R_1) - l(R_2)} q^{-\frac{\kappa_{R_1} - \kappa_{R_2}}{2}} \prod_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\{\sinh[R(2a + \hbar k)]\}^{2C_k(R_1, R_2^t)}}.$$

ここで次が成り立つ.

Proposition 7.3 [68]

$$\prod_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\{\sinh[R(2a + \hbar k)]\}^{C_k(R_1, R_2^t)}} = \prod_{i,j \in \mathbb{N}} \frac{\sinh[R(2a + \hbar(\mu_{1,i} - \mu_{2,j} + j - i))]}{\sinh[R(2a + \hbar(j - i))]} \doteq \mathcal{Z}_2^{\frac{1}{2}}. \quad (7.53)$$

Proof. まず (7.46) より $f_{R_2^t} = \sum_{i=1}^{d_2} \sum_{j=1}^{\mu_{2,i}} q^{i-j} = \frac{q}{q-1} \sum_{i=1}^{d_2} (q^{i-1} - q^{i-\mu_{2,i}-1})$ に注意して,

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} C_k(R_1, R_2^t) q^k &= \frac{(q-1)^2}{q} f_{R_1} f_{R_2^t} + f_{R_1} + f_{R_2^t} \\ &= f_{R_1} \left\{ \sum_{j=1}^{d_2} (q^{j-\mu_{2,j}-1} - q^{j-\mu_{2,j}}) + \sum_{j=1}^{d_2} (q^j - q^{j-1}) + 1 \right\} + f_{R_2^t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= f_{R_1} q^{d_2} + f_{R_1} \sum_{j=1}^{d_2} (q^{j-\mu_{2,j}-1} - q^{j-\mu_{2,j}}) + f_{R_2} \\
&= \sum_{i=1}^{d_1} \sum_{j=1}^{\mu_{1,i}} q^{j-i+d_2} + \sum_{i=1}^{d_1} \sum_{k=1}^{\mu_{1,i}} \sum_{j=1}^{d_2} (q^{k-i+j-1-\mu_{2,j}} - q^{k-i+j-\mu_{2,j}}) + \sum_{j=1}^{d_2} \sum_{i=1}^{\mu_{2,j}} q^{j-i}.
\end{aligned}$$

これを用いると,

(左辺) =

$$\begin{aligned}
&\prod_{i=1}^{d_1} \prod_{j=1}^{\mu_{1,i}} \frac{1}{\sinh[R(2a + \hbar(j-i+d_2))]} \prod_{i=1}^{d_1} \prod_{j=1}^{d_2} \prod_{k=1}^{\mu_{1,i}} \frac{\sinh[R(2a + \hbar(k-i+j-\mu_{2,j}))]}{\sinh[R(2a + \hbar(k-i+j-1-\mu_{2,j}))]} \prod_{j=1}^{d_2} \prod_{i=1}^{\mu_{2,j}} \frac{1}{\sinh[R(2a + \hbar(j-i))]} \\
&= \prod_{i=1}^{d_1} \prod_{j=1}^{\mu_{1,i}} \frac{1}{\sinh[R(2a + \hbar(j-i+d_2))]} \prod_{i=1}^{d_1} \prod_{j=1}^{d_2} \frac{\sinh[R(2a + \hbar(\mu_{1,i} - \mu_{2,j} + j - i))]}{\sinh[R(2a + \hbar(j-i-\mu_{2,j}))]} \prod_{j=1}^{d_2} \prod_{i=1}^{\mu_{2,j}} \frac{1}{\sinh[R(2a + \hbar(j-i))]}
\end{aligned}$$

となる一方で,

$$\begin{aligned}
(\text{右辺}) &= \prod_{i=1}^{d_1} \prod_{j=1}^{d_2} [\cdot] \cdot \prod_{j=1}^{d_2} \prod_{i=d_1+1}^{\infty} [\cdot] \cdot \prod_{i=1}^{d_1} \prod_{j=d_2+1}^{\infty} [\cdot] \\
&= \prod_{i=1}^{d_1} \prod_{j=1}^{d_2} \frac{\sinh[R(2a + \hbar(\mu_{1,i} - \mu_{2,j} + j - i))]}{\sinh[R(2a + \hbar(j-i))]} \prod_{j=1}^{d_2} \prod_{i=d_1+1}^{d_1+\mu_{2,j}} \frac{1}{\sinh[R(2a + \hbar(j-i))]} \prod_{i=1}^{d_1} \prod_{j=1}^{\mu_{1,i}} \frac{1}{\sinh[R(2a + \hbar(j-i+d_2))]} \\
&= \prod_{i=1}^{d_1} \prod_{j=1}^{d_2} \sinh[R(2a + \hbar(\mu_{1,i} - \mu_{2,j} + j - i))] \prod_{j=1}^{d_2} \left(\prod_{i=1}^{\mu_{2,j}} \frac{1}{\sinh[R(2a + \hbar(j-i))]} \prod_{i=1}^{d_1} \frac{1}{\sinh[R(2a + \hbar(j-i+\mu_{2,j}))]} \right) \\
&= (\text{左辺}), \quad (\text{ただし上の等号では, 3 つ目の項 (これは左辺の 1 つ目の項に一致) の記述を省略した.})
\end{aligned}$$

よって (7.53) が示された. ■

故に (7.50) で上述の書き換え ((7.52), (7.53)) を行くと, (7.43) は次のようになる.

$$\mathcal{Z}_{\mathbb{F}_m} = W_{\text{pert}} \sum_{R_1 R_2} \left(\frac{Q_B}{4Q_F} \right)^{l(R_1)+l(R_2)} Q_F^{ml(R_2)} (-1)^{m(l(R_1)-l(R_2))} q^{-\frac{m}{2}(\kappa_{R_1}+\kappa_{R_2})} \mathcal{Z}_1 \mathcal{Z}_2. \quad (7.54)$$

ここで特に \mathbb{F}_0 を考えて⁷,

$$\frac{Q_B}{4Q_F} = (\Lambda R)^4, \quad (\Lambda : \text{gauge 理論の scale parameter}) \quad (7.55)$$

と置き換える事により (摂動項を除いて), Nekrasov の partition function (pure $SU(2)$) の 5 次元 version (3.34) に一致している事が直ちに確認できる. 即ち (3.35) と \mathcal{Z}_1 が, (3.36) と \mathcal{Z}_2 がそれぞれ一致している.

ここで W_{pert} について以下のような評価を行う. まず $R \ll 1$ とすると, $q^{-n/2} - q^{n/2} = e^{nR\hbar} - e^{-nR\hbar} \simeq 2nR\hbar$ を用いて, $\mathcal{F}_{\text{pert}}(a) \doteq -\ln W_{\text{pert}} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-4nRa}}{n(q^{-n/2}-q^{n/2})} \simeq -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-4nRa}}{4n^3 R^2 \hbar^2}$ となる⁸. \hbar を省略すると $\partial^2 \mathcal{F}_{\text{pert}}(a) = -4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q_F^n}{n} = 4 \ln(1 - Q_F)$ が得られるので, これはまさしく 3.1 節で述べた 1-loop の摂動項に対応している事が確認できる.

$$\partial^2 \mathcal{F}_{\text{pert}}(a) \stackrel{R \ll 1}{\simeq} 4 \ln(4Ra). \quad (7.56)$$

同様に $SU(N)$ の場合 (Hirzebruch が梯子状に積み上がった diagram) や, さらに matter が入った場合 (del Pezzo 曲面) に対しても計算がなされており, 全て Nekrasov の分配関数と一致した結果が得られている [62, 68, 91].

⁷ $m = 1, 2$ に関しては, 5 次元 Chern-Simons term (0.2 参照) が coupling する事によって現れる任意性と解釈可能である事が知られている [93].

⁸ (7.51) より \hbar は g_s と考える事が出来るので, これはまさしく genus が 0 の展開項となっており, (6.3) で Seiberg-Witten prepotential が現れていた理由が geometric engineering を経て明らかになる事が分かる.

第8節 結論

この修士論文では, geometric engineering を通して Nekrasov による $4D$, $N = 2$ の SYM 理論の厳密解 (3.2 節) が, 位相的弦理論から得られる事を示すことを目標にまとめた (7.3 節). その一致は, 物理的には弦理論が gauge 理論を真に含んでいる理論である事の例証となっていると見なせて, 数学的には G -値 bundle の framed moduli 空間上の正則関数環の指標が, ある local toric Calabi-Yau 多様体の Gromov-Witten invariant と一致しているという興味深い現象を示唆している. また, そのような結論に至る中でも, 開弦と閉弦の duality (gauge 理論と重力理論の duality) が位相的弦理論により抽出された (7.1 節). このような結果は位相的弦理論の厳密解により得られており, その厳密解の出所は 6.2 節で述べたような $2D$ の CFT の持つ無限次元の対称性である事が分かる. それが結晶となって現れた例が 7.2 節で述べた topological vertex である. その組合せ論的解釈として $3D$ の Young tableaux である plane partition を用いたものが知られており [94], さらにこれを用いて self-dual でない graviphoton の background (3.2 節における $\epsilon_1 + \epsilon_2 \neq 0$) に対応した refined topological vertex [95] の議論も成されている [96]. また, この論文で触れる事のできなかった A-model の mirror としての B-model¹ についても, matrix model や可積分系との関連で現在活発に研究されている [97, 98].

謝辞

本修士論文作成にあたり, 懇切丁寧な指導と適切な指摘をして下さった青山昭五先生と, 私と議論をして下さった全ての方に感謝します.

¹B-model の厳密解 (partition function など) は, 積分 (4.24) を実行する時に, Riemann 面の moduli 空間の境界の影響で free energy の complex moduli の anti-holomorphic 依存性が decouple しない事による holomorphic anomaly ($\partial F_g(t, \bar{t}) \neq 0$) から得られる微分方程式 (holomorphic anomaly equation) を用いて原理的には all genus で求める事ができる [54].

付録 A 複素多様体の基礎

ここでは複素多様体について基本的な事をまとめておく [99, 100, 101].

Def A.1 (Complex manifold)

Hausdorff 空間 M (複素次元 n) を考えた時, その開被覆 $(\{U_\alpha\})$ が取れて, 同相写像 $\psi_\alpha: U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}^n$ が存在し, $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ に対して, $\psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ から $\psi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ への map $(f_{\beta\alpha} \doteq \psi_\beta \psi_\alpha^{-1})$ (及びその逆) が正則写像となるような時, M を複素 n 次元の複素多様体という. $(\{U_\alpha, \psi_\alpha\})$ を局所座標近傍系という.)

Def A.2 (Almost complex structure)

M : $2n$ 次元多様体, $U \subset M$: open, $U \ni (x^1, \dots, x^{2n})$: local coordinate, $p \in U$ に対し, $T_p(M)$ の complex structure J_p を

$$J_p(\partial_i) \doteq J_i^k(p)(\partial_k)_p, \quad J_i^k: C^\infty \text{級}, \quad J_i^l J_l^k = -\delta_i^k \quad (\text{A.1})$$

によって表現, 定義する. この時各点 p に J_p を対応させる対応 J の事を M 上の C^∞ 級 almost complex structure といい, これが定義された多様体を almost complex manifold という.

ここで M が (複素次元 n の) 複素多様体の時, 局所座標で z^I の実部と虚部をそれぞれ x^I, y^I と考える事によってこれを $2n$ 次元可微分多様体と見る事が出来る¹. そこで上のような対応

$$\begin{aligned} J_p \left(\frac{\partial}{\partial x^I} \right)_p &= \left(\frac{\partial}{\partial y^I} \right)_p, & J_p \left(\frac{\partial}{\partial y^I} \right)_p &= - \left(\frac{\partial}{\partial x^I} \right)_p \\ \Leftrightarrow J_p \left(\frac{\partial}{\partial z^I} \right)_p &= \sqrt{-1} \left(\frac{\partial}{\partial z^I} \right)_p, & J_p \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^I} \right)_p &= -\sqrt{-1} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^I} \right)_p \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

を定義する事によって, 座標系に依らない (これは Cauchy-Riemann の定理から分かる) almost complex structure を定義する事が出来る事に注意しておく.

Def A.3 (Integrable)

脚注のようにして $T(M)$ の複素化 $T^{\mathbb{C}}(M)$ を作る. そこで $p \in M$ において

$$T_p^+(M) \doteq \{u \in T_p^{\mathbb{C}}(M) \mid J_p u = \sqrt{-1}u\}, \quad T_p^-(M) \doteq \{u \in T_p^{\mathbb{C}}(M) \mid J_p u = -\sqrt{-1}u\} \quad (\text{A.3})$$

と置く. ここで任意の複素 vector 場 $X \in \mathfrak{X}^{\mathbb{C}}(M)$ は,

$$X^+ \doteq (X - \sqrt{-1}JX)/2, \quad X^- \doteq (X + \sqrt{-1}JX)/2$$

と置くことによって, $X_p^+ \in T_p^+$ (正則型), $X_p^- \in T_p^-$ (反正則型), $X_p = X_p^+ + X_p^-$ と分解できる. ($X^+ \in \mathfrak{X}^+(M)$, $X^- \in \mathfrak{X}^-(M)$ で表す.) そこで almost complex structure J が integrable であるとは,

$$X, Y \in \mathfrak{X}^+(M) \Rightarrow [X, Y] \in \mathfrak{X}^+(M) \quad (\text{A.4})$$

として定義される.

Fact A.1

次の 3 つは同値である.

(1) J が integrable, (2) M が複素多様体, (3) $N(X, Y) = 0, (X, Y \in \mathfrak{X}(M))$.

ここで N は Nijenhuis tensor で次のように定義される. (及び局所座標近傍系での表示)

$$N(X, Y) \doteq [X, Y] + J[JX, Y] + J[X, JY] - [JX, JY], \quad N_{ij}^k = J_i^l J_{[j;l]}^k - J_j^l J_{[i;l]}^k. \quad (\text{A.5})$$

故に $2n$ 次元多様体 M 上に almost complex structure が定義できて Nijenhuis tensor が消える事が示されれば, M は複素次元 n の複素多様体となる. 以下 M を複素 n 次元複素多様体とする.

¹ $T_p(M)$ と $T_p^*(M)$ の base を次の形で定義する.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial z^I} \right)_p &\doteq \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x^I} \right)_p - \sqrt{-1} \left(\frac{\partial}{\partial y^I} \right)_p \right\}, & \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^I} \right)_p &\doteq \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x^I} \right)_p + \sqrt{-1} \left(\frac{\partial}{\partial y^I} \right)_p \right\}, \\ (dz^I)_p &\doteq (dx^I)_p + \sqrt{-1}(dy^I)_p, & (d\bar{z}^I)_p &\doteq (dx^I)_p - \sqrt{-1}(dy^I)_p. \end{aligned}$$

Def A.4 (エルミート計量)

M を $2n$ 次元可微分多様体として, $g: M$ の Riemann 計量, $p \in M$, $u, v \in T_p(M)$ とする.

$$g_p(J_p u, J_p v) = g_p(u, v) \quad (\text{A.6})$$

が成り立つ時 g を M のエルミート計量といい², M をエルミート多様体という. ここで

$$g_p(u + \sqrt{-1}v, u' + \sqrt{-1}v') \doteq (g_p(u, u') - g_p(v, v')) + \sqrt{-1}(g_p(u, v') + g_p(v, u')) \text{ と定義して,}$$

$$\begin{aligned} g_{IJ}(p) &\doteq g_p \left(\left(\frac{\partial}{\partial z^I} \right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial z^J} \right)_p \right), & g_{I\bar{J}}(p) &\doteq g_p \left(\left(\frac{\partial}{\partial z^I} \right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^J} \right)_p \right), \\ g_{\bar{I}J}(p) &\doteq g_p \left(\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^I} \right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial z^J} \right)_p \right), & g_{\bar{I}\bar{J}}(p) &\doteq g_p \left(\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^I} \right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^J} \right)_p \right) \end{aligned}$$

と置く. すると, $g_{IJ} = g_{JI}$, $g_{I\bar{J}} = g_{\bar{J}I}$, $\bar{g}_{IJ} = g_{\bar{I}\bar{J}}$, $\bar{g}_{I\bar{J}} = g_{\bar{I}J}$ が成り立つが g がエルミート計量ならば $g_{IJ} = g_{\bar{I}\bar{J}} = 0$ が成り立つ. 故にこの時 metric を,

$$ds^2 = g_{I\bar{J}} dz^I d\bar{z}^J \quad (\text{A.7})$$

と表す事が出来る. 以下 g をエルミート計量とする.

Def A.5 (Kähler form)

$p \in M$, $u, v \in T_p(M)$ に対し Kähler form が次で定義される.

$$\omega_p(u, v) \doteq g_p(J_p u, v). \quad (\text{A.8})$$

ここで $\omega_p(u, v) = -\omega_p(v, u)$ が成り立つ事が簡単に分かるので M の各点 p に対し ω_p を対応させる対応 ω は M 上 2-form となる. 一般的に $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ に対して, X, Y が正則型ならば JX, Y も正則型であり, X, Y が反正則型ならば JX, Y も反正則型となるので $\omega(X, Y) = g(JX, Y)$ は $(1,1)$ 型の微分形式となっている. これを局所座標近傍系で書くと定義から次のようになる.

$$\omega = ig_{I\bar{J}} dz^I \wedge d\bar{z}^J. \quad (\text{A.9})$$

Def A.6 (Kähler metric)

$$g: \text{Kähler 計量} \xleftrightarrow{\text{def}} (1) g: \text{エルミート計量}, (2) d\omega = 0 \text{ (closed)}. \quad (\text{A.10})$$

特に (2) の条件は g から得られる Levi-Civita connection ($\nabla g = 0$, torsion free) に関して,

$$\nabla_i J = 0, \quad (\text{i.e. } J \text{ は covariantly constant}) \quad (\text{A.11})$$

と同値である事が示される. この事は Kähler 多様体 (Kähler 計量を持つエルミート多様体) については平行移動で複素構造が不変に保たれる事を意味する. また (2) の条件を局所座標近傍系で書き下すと $\frac{\partial g_{I\bar{J}}}{\partial z^K} - \frac{\partial g_{K\bar{I}}}{\partial z^J} = 0$ を意味するので,

$$g_{I\bar{J}} = \partial_I \partial_{\bar{J}} K, \quad (\omega = i\partial\bar{\partial}K) \text{ となるような, ある } K \text{ が存在.} \quad (\text{A.12})$$

のように表す事が出来る. この K の事を Kähler potential という.

M が Kähler 多様体の時には, 多様体上の Hodge の理論などから 1.1.2 節で述べたような事柄が成り立つ. Kähler 多様体の例としては, 複素 1 次元の複素多様体 (Riemann 面) や \mathbb{C}^n (複素ユークリッド空間) や 1.2.2 節で紹介した \mathbb{P}^n (複素射影空間) などがある.

²paracompact manifold は必ず metric g を持ち, さらに $g_p^*(u, v) = \frac{1}{2}(g_p(u, v) + g_p(J_p u, J_p v))$ と置くことによって, 常にエルミート計量が得られるので paracompact manifold はエルミート計量を持つ. 故にもちろん複素多様体は常にエルミート計量を持つ.

付録 B 表現論の基礎

ここでは表現論について基本的な事をまとめておく [102, 103].

B.1 Symmetric Polynomials

ここでは topological vertex の計算に現れる Schur polynomial に関する Jacobi-Trudy 恒等式 (6.46) を示す事を目標とする. まず k 変数 (x_1, \dots, x_k) , d 次元斉次対称多項式によって張られる vector 空間の base となるものをいくつか考える. 以下 Young tableaux の partition を上の行から非増加列によって, $R = (\mu_1 \geq \dots \mu_k \geq 0)$, $R^t = (\lambda_1 \geq \dots \lambda_l \geq 0)$ ($\lambda = \mu^t$) のように与えておく. (3.2 節の図 4 参照, $\sum_i \mu_i = d$ とする.)

Def B.1 (Symmetric polynomials)

(1) Complete symmetric polynomial $h_n(x)$ の母関数 ($h_n(x) = 0$ for $n < 0$ とする.)

$$H(t, x) \doteq \prod_{i=1}^k (1 - x_i t)^{-1} \doteq \sum_{n=0}^{\infty} h_n(x) t^n. \quad (\text{B.1})$$

$k = 3$ で例を示すと, $h_0(x) = 1$, $h_1(x) = x_1 + x_2 + x_3$, $h_2(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$, \dots などが直ちに分かる.

(2) Elementary symmetric polynomial $e_n(x)$ の母関数 ($e_n(x) = 0$ for $n < 0$ とする.)

$$E(t, x) \doteq \prod_{i=1}^k (1 + x_i t) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} e_n(x) t^n. \quad (\text{B.2})$$

$k = 3$ で例を示すと, $e_0(x) = 1$, $e_1(x) = x_1 + x_2 + x_3$, $e_2(x) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$, \dots などが直ちに分かる. 一般的には $e_n(x) = \sum_{i_1 < \dots < i_n} x_{i_1} \dots x_{i_n}$ となる.

(3) Schur polynomial

$$S_R(x) \doteq \frac{\det x_j^{\mu_i + k - i}}{\det x_j^{k - i}} = \frac{\det x_j^{\mu_i + k - i}}{\Delta(x)}, \quad (\Delta(x) \doteq \prod_{i < j} (x_i - x_j): \text{差積}). \quad (\text{B.3})$$

ここで 2 つ目の等号は Van der Monde 行列式から分かる. $k = 3$ で例を示しておく.

$$S_{\square}(x) = \frac{\begin{vmatrix} x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \\ x_1^0 & x_2^0 & x_3^0 \end{vmatrix}}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)} = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1,$$

$$S_{\square\square}(x) = \frac{\begin{vmatrix} x_1^4 & x_2^4 & x_3^4 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \\ x_1^0 & x_2^0 & x_3^0 \end{vmatrix}}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1.$$

以下 Jacobi-Trudy 恒等式 (6.46) を示す.

Proposition B.1 (Jacobi-Trudy 恒等式)

$$S_R(x) = \det (h_{\mu_i - i + j}(x)), \quad (\text{B.4})$$

$$S_R(x) = \det (e_{\lambda_i - i + j}(x)). \quad (\text{B.5})$$

Proof. (B.4) から示す. まず定義 (B.2) より, 両辺に x_j^p ($1 \leq j \leq k$, $p \geq k$) を掛けて $t = -x_j^{-1}$ を代入すると, $\prod_{i=1}^k (x_j - x_i) x_j^{p-k} = x_j^p - e_1 x_j^{p-1} + \dots + (-1)^k e_k x_j^{p-k}$ となるが, この右辺は 0 となるので次が得られる.

$$x_j^p - e_1 x_j^{p-1} + \dots + (-1)^k e_k x_j^{p-k} = 0. \quad (\text{B.6})$$

次に $E(-t, x)H(t, x) = 1$ より $(1 - e_1 t + \cdots + (-1)^k e_k t^k)(1 + h_1 t + h_2 t^2 + \cdots) = 1$ となって, 両辺 t^{p-m} ($0 \leq m < k, p \geq k$) の係数を比較する事によって次を得る.

$$h_{p-m} - e_1 h_{p-m-1} + \cdots + (-1)^k e_k h_{p-m-k} = 0. \quad (B.7)$$

ここで (B.6), (B.7) を見比べると代数構造が全く同じである事に気づくので, 以下のような e_1, \dots, e_k 変数の多項式 $A(p, q)$ が存在する.

$$x_j^p = A(p, 1)x_j^{k-1} + A(p, 2)x_j^{k-2} + \cdots + A(p, k), \quad h_{p-m} = A(p, 1)h_{k-m-1} + A(p, 2)h_{k-m-2} + \cdots + A(p, k)h_{-m}.$$

これを次のように $k \times k$ 行列として表現する. ($\forall \mu_1, \dots, \mu_k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$)

$$\left(x_j^{\mu_i+k-i}\right)_{ij} = (A(\mu_i+k-i, r))_{ir} \cdot (x_j^{k-r})_{rj}, \quad (h_{\mu_i-i+j})_{ij} = (A(\mu_i+k-i, r))_{ir} \cdot (h_{j-r})_{rj}.$$

故に次が得られる.

$$\left(x_j^{\mu_i+k-i}\right)_{ij} = (h_{\mu_i-i+p})_{ip} \cdot (h_{p-q}^{-1})_{pq} \cdot \left(x_j^{k-q}\right)_{qj}. \quad (B.8)$$

しかるに, $(h_{p-q})_{qp}$ は対角成分が 1 の上三角行列であるから $\det h^{-1} = 1$ となるので, (B.8) の両辺の行列式を考えると直ちに (B.4) が示される. 続いて (B.5) を示したいが, これは次を示せばよい.

$$\det (h_{\mu_i-i+j}(x)) = \det (e_{\lambda_i-i+j}(x)). \quad (B.9)$$

その為の準備としてまず次を示す.

lemma B.1

A, B を $AB = cI_r$ ($c: c$ 数) を満たす $r \times r$ 行列,

集合の組 $(S, S'), (T, T')$ を自然数の列 $(1, \dots, r)$ の置換の 2 つの集合への分割とする ($S, T: k$ 個, $S', T': r-k$ 個). この時, ϵ をこの 2 つの置換の符号の積として次が成り立つ.

$$c^{r-k} A_{S,T} = \epsilon \det(A) B_{T',S'}. \quad (B.10)$$

ここで $A_{S,T}$ は上の置換によって得られた順に行列 A の要素を取り出して, $k \times k$ の行列を作った時, その行列式を表す. 同様にして, $B_{T',S'}$ は $(r-k) \times (r-k)$ 行列の行列式を表す.

(\cdot): A の行と列の置換を, 2 つの置換行列 P, Q を左右から掛ける事によって, 次のように表す.

$$PAQ = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}, \quad A_1: k \times k \text{ 行列}, \det A_1 = A_{S,T}. \quad (B.11)$$

この時 $(AQ)_{ij} = A_{i\sigma(j)}$ などとなり, このような置換行列 Q に対する置換行列 X を $(XB)_{ij} = B_{\sigma(i)j}$ のように持って来ると, $AQXB = AB$ となるので $X = Q^{-1}$ でなければならないので次を得る.

$$Q^{-1}BP^{-1} = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}, \quad B_4: (r-k) \times (r-k) \text{ 行列}, \det B_4 = B_{T',S'}. \quad (B.12)$$

よって (B.11), (B.12) を掛けて $cI_r = \begin{pmatrix} A_1 B_1 + A_2 B_3 & A_1 B_2 + A_2 B_4 \\ A_3 B_1 + A_4 B_3 & A_3 B_2 + A_4 B_4 \end{pmatrix}$ より

$$PAQ \begin{pmatrix} I_k & B_2 \\ 0 & B_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_k & B_2 \\ 0 & B_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_3 & cI_{r-k} \end{pmatrix}$$

となるので両辺の行列式を取る事により, $\det P \det Q \det A \cdot B_{T',S'} = A_{S,T} \cdot c^{r-k}$ から直ちに (B.10) が示される. ■

そこで (B.9) の証明を行う. まず $A_{qp} \doteq (h_{q-p}(x))_{qp}$, $B_{qp} \doteq ((-1)^{q-p} e_{q-p}(x))_{qp}$ とすると, これらは共に

下三角行列でかつ (B.7) から $AB = I$ の関係にある. そこで lemma B.1 を用いたい. その為にまず $r = k + l$ として次のように S, T を取る. (最初に行った Young tableaux の定義を参照.)

$$(S|S') = (\mu_1 + k (= k + l), \mu_2 + k - 1, \dots, \mu_k + 1 \mid k + 1 - \lambda_1 (= 1), k + 2 - \lambda_2, \dots, k + l - \lambda_l),$$

$$(T|T') = (k, k - 1, \dots, 1 \mid k + 1, k + 2, \dots, k + l).$$

ここで $\mu_1 = l, \lambda_1 = k$ に注意しておく. さらに S, S' に同じ元が存在しない事を示す事によって, $(S|S')$ が確かに自然数の列 $(1, \dots, r)$ の置換になっている事を示す.

(\cdot): S の任意の元 $\mu_i + k + 1 - i$ ($1 \leq i \leq k$) と S' の任意の元 $k + j - \lambda_j$ ($1 \leq j \leq l$) を取る. この時 $\mu_i + k + 1 - i = k + j - \lambda_j$ を満たすような i, j が存在しない事を示せば良い. その為に, $\mu_i + \lambda_j = i + j - 1$ を満たすような i, j の存在を仮定する. もしも $\mu_i \geq j$ ならば $\lambda_j \geq i$ なので $\mu_i + \lambda_j \geq i + j$ より不適. よって $\mu_i \leq j - 1$ でなければならないが, この時 $\lambda_j \leq i - 1$ なので $\mu_i + \lambda_j \leq i + j - 2$ となって, これも不適. 故に矛盾して上の主張が示された. ■

故に $A_{S.T.} = \det(h_{(\mu_i + k + 1 - i) - (k + 1 - j)}) = \det(h_{\mu_i - i + j}), B_{T'.S'} = \det((-1)^{(k+i) - (k+j - \lambda_j)} e_{(k+i) - (k+j - \lambda_j)})$
 $= \det((-1)^{\lambda_i - i + j} e_{\lambda_i - i + j}) = (-1)^d \det(e_{\lambda_i - i + j})$ となる ($\sum_i \lambda_i = d$). また, 置換の符号の積について $\epsilon = (-1)^d$ が成り立つ.

(\cdot): まず置換 $(T|T')$ を考えると, その置換の符号 $\epsilon(T)$ は次で与えられる.

$$\epsilon(T) = (-1)^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}, \quad ([n] \text{ は } n \text{ を超えない最大の整数}). \quad (\text{B.13})$$

次に置換 $(S|S')$ の符号 $\epsilon(S)$ を求める為に, まずは簡単な $\mu_1 = l, \mu_2 = 1, \dots, \mu_k = 1$ で与えられる tableaux に対応した置換の符号 $\epsilon(S_1)$ を考えると直ちに次を得る.

$$\epsilon(S_1) = (-1)^{l + \lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor}. \quad (\text{B.14})$$

故に (B.13), (B.14) より, 置換の符号の積が確かに

$$\epsilon(T)\epsilon(S_1) = (-1)^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + l + \lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} = (-1)^{k+l-1} = (-1)^d \quad (\text{B.15})$$

となっている. ここで任意の Young tableaux に 1 個 box を付け加えると, 必ず S 中の 1 つの元だけが $\alpha \rightarrow \alpha + 1$ と増加して, それに付随して S' 中の 1 つの元だけが $\alpha + 1 \rightarrow \alpha$ と減少する. 故に 1 つ box を付加する事によって連続する 2 整数の順序が入れ替わるので符号に -1 が掛かる. 故に (B.15) から帰納的に上の主張が示される. ■

よって lemma B.1 を適用する事により, (B.9) が示された. ■

最後に次の公式を示しておく.

Proposition B.2 ((6.48), (6.49))

$$\sum_R S_R(x) S_R(y) = \prod_{i,j \geq 1} (1 - x_i y_j)^{-1}, \quad \left(\sum_R : \text{あらゆる表現 } R \text{ についての和} \right), \quad (\text{B.16})$$

$$\sum_R S_R(x) S_{R^t}(y) = \prod_{i,j \geq 1} (1 + x_i y_j). \quad (\text{B.17})$$

Proof. まず (B.16) から示す. 差積の部分は和に無関係なので置いておいて (S_k : k 次の対称群, $\epsilon(\sigma)$: 置換の符号),

$$\begin{aligned} \sum_R \left(\det x_j^{\mu_i + k - i} \right) \cdot \left(\det y_j^{\mu_i + k - i} \right) &= \sum_{l_1 > \dots > l_k} \left(\det x_j^{l_i} \right) \cdot \left(\det y_j^{l_i} \right) \\ &= \sum_{l_1 > \dots > l_k} \sum_{\sigma \in S_k} \epsilon(\sigma) x_1^{l_{\sigma(1)}} \dots x_k^{l_{\sigma(k)}} \sum_{\sigma' \in S_k} \epsilon(\sigma') y_{\sigma'(1)}^{l_1} \dots y_{\sigma'(k)}^{l_k} \\ &\stackrel{(\sigma' \sigma = \sigma'')}{=} \sum_{l_1 > \dots > l_k} \sum_{\sigma \in S_k} x_1^{l_{\sigma(1)}} \dots x_k^{l_{\sigma(k)}} \sum_{\sigma'' \in S_k} \epsilon(\sigma'') y_{\sigma''(1)}^{l_{\sigma(1)}} \dots y_{\sigma''(k)}^{l_{\sigma(k)}} = \sum_{\text{all } l} x_1^{l_1} \dots x_k^{l_k} \det y_j^{l_i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\sigma \in S_k} \epsilon(\sigma) (1 + x_1 y_{\sigma(1)} + x_1^2 y_{\sigma(1)}^2 + \cdots) \cdots (1 + x_k y_{\sigma(k)} + x_k^2 y_{\sigma(k)}^2 + \cdots) \\
&= \det(1 + x_i y_j + x_i^2 y_j^2 + \cdots) = \det \frac{1}{1 - x_i y_j} \\
&= \left| \begin{array}{ccc} \frac{1}{1-x_1 y_1} & \cdots & \frac{1}{1-x_1 y_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{1-x_k y_1} & \cdots & \frac{1}{1-x_k y_k} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} \frac{1}{1-x_1 y_1} & \cdots & \frac{1}{1-x_1 y_k} \\ \frac{x_2-x_1}{1-x_1 y_1} \cdot \frac{y_1}{1-x_2 y_1} & \cdots & \frac{x_2-x_1}{1-x_1 y_k} \cdot \frac{y_k}{1-x_2 y_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{x_k-x_1}{1-x_1 y_1} \cdot \frac{y_1}{1-x_k y_1} & \cdots & \frac{x_k-x_1}{1-x_1 y_k} \cdot \frac{y_k}{1-x_k y_k} \end{array} \right| \quad (\because \text{第 } i \text{ 行} - \text{第 } 1 \text{ 行}) \\
&= \frac{(x_2 - x_1) \cdots (x_k - x_1)}{(1 - x_1 y_1) \cdots (1 - x_1 y_k)} \left| \begin{array}{ccc} 1 & \cdots & 1 \\ \frac{y_1}{1-x_2 y_1} & \cdots & \frac{y_k}{1-x_2 y_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{y_1}{1-x_k y_1} & \cdots & \frac{y_k}{1-x_k y_k} \end{array} \right| \\
&= \frac{(x_2 - x_1) \cdots (x_k - x_1)}{(1 - x_1 y_1) \cdots (1 - x_1 y_k)} \frac{(y_2 - y_1) \cdots (y_k - y_1)}{(1 - x_2 y_1) \cdots (1 - x_k y_1)} \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ y_1 & \frac{1}{1-x_2 y_2} & \cdots & \frac{1}{1-x_2 y_k} \\ \vdots & & \vdots & \\ y_1 & \frac{1}{1-x_k y_2} & \cdots & \frac{1}{1-x_k y_k} \end{array} \right| \quad (\because \text{第 } j \text{ 列} - \text{第 } 1 \text{ 列}) \\
&= \Delta(x) \Delta(y) \prod_{i,j \geq 1} (1 - x_i y_j)^{-1}, \quad (\because \text{induction}).
\end{aligned}$$

故に (B.16) が示された. 次に (B.17) を示す. まず elementary symmetric polynomial の定義 (B.2) より, $\prod_{j=1}^k \sum_{n=0}^{\infty} e_n(x) y_j^n = \prod_{i,j \geq 1} (1 + x_i y_j)$ となる. ここで, J-T 恒等式 (B.5) より $e_n(x) = S(\underbrace{1, \dots, 1}_{n \text{ times}}, \underbrace{0, \dots, 0}_{k-n \text{ times}})(x)$

のように表す事が出来るので,

$$\prod_{j=1}^k \sum_{n=0}^{\infty} S_{(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)}(x) y_j^n = \prod_{i,j \geq 1} (1 + x_i y_j). \quad (\text{B.18})$$

一方で complete symmetric polynomial の定義 (B.1) 及び J-T 恒等式 (B.4) を用いて上と同様に考えると, $\prod_{j=1}^k \sum_{n=0}^{\infty} S_{(n, 0, \dots, 0)}(x) y_j^n = \prod_{i,j \geq 1} (1 - x_i y_j)^{-1}$ を得る. そこで公式 (B.16) より, $\sum_R S_R(x) S_R(y) = \prod_{j=1}^k \sum_{n=0}^{\infty} S_{(n, 0, \dots, 0)}(x) y_j^n$ を得る. そこで x についての partition の転置を考える事により¹,

$$\sum_R S_{R^t}(x) S_R(y) = \prod_{j=1}^k \sum_{n=0}^{\infty} S_{(\underbrace{1, \dots, 1}_{n \text{ times}}, 0, \dots, 0)}(x) y_j^n = \prod_{i,j \geq 1} (1 + x_i y_j) \quad (\because \text{B.18})$$

となって (B.17) が示された. ■

B.2 Character

ここでは指標 (character) について述べる.

Def B.2 (Character)

R : 群 G の表現, $g \in G$ として指標 $\chi_R(g)$ を g の R 上の対角和として定義する.

$$\chi_R(g) \doteq \text{Tr}(g|_R), \quad (\chi_R(1) = \dim R). \quad (\text{B.19})$$

¹表現 R の Young tableaux に対して Schur polynomial が 1 つ定まり ($R \rightarrow S_R$), 一方で Young tableaux の転置を行う map を考える事ができる ($U_t: R \rightarrow R^t$). そこでこれらを組み合わせる事により, map $S_R \rightarrow S_{R^t}$ が定義できる.

指標の重要な性質としては, $g, h \in G$ に対して $\chi_R(h^{-1}gh) = \chi_R(g)$ が成り立つので指標は群の共役類上の不変量を与えるというものである. 特に

$$\text{対称群 } S_d \text{ (box の総和が } d \text{ 個) の既約表現の数} = \text{その共役類の数} \quad (\text{B.20})$$

が成り立つので指標によって対称群の既約表現の分類を行う事が出来る. 以下 $G = S_d$ を考える. まず $C(\vec{k})$ を共役類とする.

$$\vec{k} = (k_1, k_2, \dots, k_d), \quad d = \sum_{j=1}^d j k_j.$$

次に指標の直交性 (4.37) を示す.

Proposition B.3 (指標の直交定理) $(z_{\vec{k}} \doteq \prod_j k_j! j^{k_j})$

$$\sum_{\vec{k}} \frac{1}{z_{\vec{k}}} \chi_R(C(\vec{k})) \chi_{R'}(C(\vec{k})) = \delta_{RR'}, \quad \sum_R \chi_R(C(\vec{k})) \chi_R(C(\vec{k}')) = z_{\vec{k}} \delta_{\vec{k}\vec{k}'}. \quad (\text{B.21})$$

Proof. まず A を既約表現 R から既約表現 R' への g -module homomorphism の元とする. また g の R, R' での表現をそれぞれ $\pi_R(g), \pi_{R'}(g)$ とおいて, $M \doteq \sum_{g \in G} \pi_R(g^{-1}) A \pi_{R'}(g)$ を定義すると $h \in G$ に対して,

$$\pi_R(h)M = \sum_g \pi_R(hg^{-1}) A \pi_{R'}(g) = \sum_{g'} \pi_R(g'^{-1}) A \pi_{R'}(g'h) = M \pi_{R'}(h)$$

となる. ここで Schur の lemma を用いると M は $R \neq R'$ の時には $M = 0$ で, $R = R'$ の時には $M = cI_R$ ($c \in \mathbb{C}$, I_R : 表現 R での単位行列) となる事に注意しておく. まずは $R = R'$ の時を考えて, A を (l, m) 成分だけが 1 でその他 0 の行列とすれば $c\delta_{ij} = \sum_g \{\pi_R(g^{-1})\}_{il} \{\pi_R(g)\}_{mj}$ が得られる. そこで $i = j$ として和を取ると, $c \dim R = \dim G \delta_{lm}$ を得る. 故に

$$\sum_g \{\pi_R(g^{-1})\}_{il} \{\pi_R(g)\}_{mj} = \frac{\dim G}{\dim R} \delta_{ij} \delta_{lm}$$

を得る. ここで $i = l, m = j$ として和を取ると, 上述の Schur の lemma に注意して次の形の指標の直交定理を得る.

$$\sum_{g \in G} \chi_R(g)^* \chi_{R'}(g) = \dim G \delta_{RR'}. \quad (\text{B.22})$$

特に今指標が実数で, 共役類 $C(\vec{k})$ には $d! / \prod_j k_j! j^{k_j}$ 個の元が属しており, かつ $\dim G = d!$ となっているので (B.22) より指標の直交性 (B.21) の 1 つ目が直ちに示される. (2 つ目の証明略 [103].) ■

次に Newton polynomial を以下で定義する.

$$P_{\vec{k}}(x) \doteq \prod_{j=1}^d (P_j(x))^{k_j}, \quad P_j(x) \doteq \sum_{i=1}^k x_i^j. \quad (\text{B.23})$$

Fact B.1 (Frobenius の指標公式)

$f(x)$ が x_1, \dots, x_k の形式的冪級数で与えられている時, $[f(x)]_{(l_1, \dots, l_k)}$ を $f(x)$ の $x_1^{l_1} \dots x_k^{l_k}$ の係数で定義する. この時, 次が成り立つ.

$$\chi_R(C(\vec{k})) = [\Delta(x) P_{\vec{k}}(x)]_{(l_1, \dots, l_k)}, \quad (l_i \doteq \mu_i + k - i). \quad (\text{B.24})$$

これを用いると, $\epsilon(\sigma) \chi_R(C(\vec{k})) = [\Delta(x) P_{\vec{k}}(x)]_{(l_{\sigma(1)}, \dots, l_{\sigma(k)})}$ となるので直ちに次を得る. ((4.36), (7.16), (7.44) などで引用した公式)

$$P_{\vec{k}}(x) = \sum_R \chi_R(C(\vec{k})) S_R(x). \quad (\text{B.25})$$

参考文献

- [1] M.B.Green, J.H.Schwarz and E.Witten, *Superstring theory*, Volume I & II, Cambridge University Press, (1987).
- [2] J.Polchinski, *String theory*, Volume I & II, Cambridge University Press, (1998). (邦訳; 伊藤 克司/小竹 悟/松尾 泰 訳, ストリング理論 1 巻 (2005), 2 巻 (2006). シュプリンガー・フェアラーク東京.)
- [3] A.Strominger, S.T.Yau and E.Zaslow, *Mirror Symmetry is T-Duality*, Nucl.Phys. B479, (1996) 243-259, hep-th/9606040.
- [4] P.Candelas, G.Horowitz, A.Strominger and E.Witten, *Vacuum configurations for superstrings*, Nucl.Phys. B258, (1985) 46-74.
- [5] J.C.Baez, *The octonions*, Bull. Amer. Math. Soc. **39**, (2002) 145-205. Errata in Bull Amer. Math. Soc. **42**, (2005) 213, math.RA/0105155.
- [6] B.S.Acharya, J.M.Figueroa-O’Farrill, C.M.Hull and B.Spence, *Branes at conical singularities and holography*, Adv.Theor.Math.Phys. **2**, (1998) 1249-1286, hep-th/9808014.
- [7] D.Cox and S.Katz, *Mirror symmetry and algebraic geometry*, American Mathematical Society, (1999).
- [8] B.Zumino, *Supersymmetry and Kähler manifolds*, Phys.Lett. B87, (1979) 203-206.
- [9] R.Gopakumar, *M-theory, topological strings and large N gauge theory*, Recent Advances in String Theory, 1999/12/8-10, 東大数理 (1999).
- [10] M.Mariño, *Chern-Simons theory and topological strings*, Rev.Mod.Phys. **77**, (2005) 675-720, hep-th/0406005.
- [11] 管野 浩明, *Topological strings and gravity/gauge theory correspondence (位相的弦理論と重力・ゲージ理論対応)*, Pathways Lecture Series in Mathematics, 2004/9/8-11, 慶應義塾大学 理工学部 (2004).
- [12] P.van Nieuwenhuizen, *Supergravity*, Phys.Rep. **68**, (1981) 189-398.
- [13] J.Wess and J.Bagger, *Supersymmetry and supergravity*, Princeton University Press, (1991).
- [14] A.Strominger, *Superstrings with torsion*, Nucl.Phys. B274, (1986) 253-284.
- [15] K.Becker, M.Becker, J.X.Fu, L.S.Tseng, S.T.Yau, *Anomaly cancellation and smooth non-Kähler solutions in Heterotic string theory*, Nucl.Phys. B751, (2006) 108-128, hep-th/0604137.
- [16] S.T.Yau, *Calabi’s conjecture and some new results in algebraic geometry*, Proc.Natl.Acad.Sci. **74**, (1977) 1798-1799.
- [17] 中島 啓, 岩波講座 現代数学の展開, 非線形問題と複素幾何学, 岩波書店, (1999).
- [18] A.Strominger, *Yukawa coupling in superstring compactification*, Phys.Rev.Lett. **55**, (1985) 2547-2550.
- [19] P.Candelas and X.de la Ossa, *Moduli space of Calabi-Yau manifolds*, Nucl.Phys. B355, (1991) 455-481.
- [20] 上野 健爾, 代数幾何入門, 岩波書店, (1995).

- [21] P.Griffiths and J.Harris, *Principles of algebraic geometry*, John Wiley & Sons, (1978).
- [22] 小林 昭七, 複素幾何, 岩波書店, (2005).
- [23] P.Candelas, A.M.Dale, C.A.Lütken and R.Schimmrigk, *Complete intersection Calabi-Yau manifolds*, Nucl.Phys. B298, (1988) 493-525.
- [24] B.R.Greene and M.Plesser, *Duality in Calabi-Yau moduli space*, Nucl.Phys. B338, (1990) 15-37.
- [25] B.R.Greene, *String theory on Calabi-Yau manifolds*, hep-th/9702155.
- [26] P.Candelas, X.de la Ossa, P.Green and L.Parkes, *A pair of Calabi-Yau manifolds as an exactly soluble superconformal theory*, Nucl.Phys. B359, (1991) 21-74.
- [27] W.Lerche, C.Vafa and N.Warner, *Chiral rings in $N = 2$ superconformal theories*, Nucl.Phys. B324, (1989) 427-474.
- [28] T.Eguchi and S.-K.Yang, *$N = 2$ superconformal models as topological field theories*, Mod.Phys.Lett. A5, (1990) 1693-1701.
- [29] S.Aoyama, *Quantization of the topological σ -model and the master equation of the BV formalism*, Mod.Phys.Lett. A9, (1994) 491-500, hep-th/9309103.
- [30] C.Vafa and N.Warner, *Catastrophes and the classification of conformal theories*, Phys.Lett. B218, (1989) 51-58.
- [31] K.Intriligator and C.Vafa, *Landau-Ginzburg orbifolds*, Nucl.Phys. B339, (1990) 95-120.
- [32] B.R.Greene and C.Vafa, *Calabi-Yau manifolds and renormalization group flows*, Nucl.Phys. B324, (1989) 371-390.
- [33] E.Witten, *Phases of $N = 2$ theories in two dimensions*, Nucl.Phys. B403, (1993) 159-222, hep-th/9301042.
- [34] K.Hori and C.Vafa, *Mirror symmetry*, hep-th/0002222.
- [35] N.Seiberg and E.Witten, *Electric-magnetic duality, monopole condensation, and confinement in $N = 2$ supersymmetric Yang-Mills theory*, Nucl.Phys. B426, (1994) 19-52, hep-th/9407087.
- [36] N.Seiberg and E.Witten, *Monopoles, duality and chiral symmetry breaking in $N = 2$ supersymmetric QCD*, Nucl.Phys. B431, (1994) 484-550, hep-th/9408099.
- [37] N.Nekrasov, *Seiberg-Witten prepotential from instanton counting*, Adv.Theor.Math.Phys. **7**, (2004) 831-864, hep-th/0206161.
- [38] A.Bilal, *Duality in $N = 2$ SUSY $SU(2)$ Yang-Mills theory: A pedagogical introduction to the work of Seiberg and Witten*, hep-th/9601007.
- [39] N.Seiberg, *Supersymmetry and non-perturbative beta functions*, Phys.Lett. B206, (1988) 75-80.
- [40] N.Arkani-Hamed and H.Murayama, *Holomorphy, rescaling anomalies and exact β functions in supersymmetric gauge theories*, JHEP **0006**, (2000) 030, hep-th/9707133.
- [41] E.Witten and D.Olive, *Supersymmetry algebras that include topological charges*, Phys.Lett. B78, (1978) 97-101.

- [42] A.Klemm, W.Lerche and S.Theisen, *Nonperturbative effective action of $N=2$ supersymmetric gauge theories*, Int.J.Mod.Phys. A11, (1996) 1929-1974, hep-th/9505150.
- [43] H.Nakajima and K.Yoshioka, *Instanton counting on blowup. I. 4-dimensional pure gauge theory*, math.AG/0306198.
- [44] H.Nakajima and K.Yoshioka, *Lectures on instanton counting*, math.AG/0311058.
- [45] N.Nekrasov and A.Okounkov, *Seiberg-Witten theory and random partitions*, hep-th/0306238.
- [46] R.J.Szabo, *Equivariant localization of path integrals*, hep-th/9608068.
- [47] E.Witten, *Topological quantum field theory*, Commun.Math.Phys. **117**, (1988) 353-386.
- [48] E.Witten, *Supersymmetric Yang-Mills theory on a four-manifold*, J.Math.Phys. **35**, (1994) 5101-5135, hep-th/9403195.
- [49] R.Flume and R.Poghossian, *An algorithm for the microscopic evaluation of the coefficients of the Seiberg-Witten prepotential*, Int.J.Mod.Phys. A18, (2003) 2541, hep-th/0208176.
- [50] U.Bruzzo, F.Fucito, J.F.Morales and A.Tanzini, *Multi-instanton calculus and equivariant cohomology*, JHEP **0305**, (2003) 054, hep-th/0211108.
- [51] E.Witten, *Topological sigma models*, Commun.Math.Phys. **118**, (1988) 411-449.
- [52] E.Witten, *Mirror manifolds and topological field theory*, hep-th/9112056.
- [53] J.M.F.Labastida and P.M.Llatas, *Topological matter in two dimensions* Nucl.Phys. B379, (1992) 220-258, hep-th/9112051.
- [54] M.Bershadsky, S.Cecotti, H.Ooguri and C.Vafa, *Kodaira-Spencer theory of gravity and exact results for quantum string amplitudes*, Commun.Math.Phys. **165**, (1994) 311-428, hep-th/9309140.
- [55] C.Faber and R.Pandharipande, *Hodge integrals and Gromov-Witten theory*, Invent.Math. **139**, (2000) 173, math.AG/9810173.
- [56] 荒川 恒男, 伊吹山 知義, 金子 昌信, ベルヌーイ数とゼータ関数, 牧野書店, (2001).
- [57] P.S.Aspinwall, *$K3$ surfaces and string duality*, hep-th/9611137.
- [58] M.Bershadsky and C.Vafa, *D-strings on D-manifolds*, Nucl.Phys. B463, (1996) 398-414, hep-th/9510225.
- [59] S.Katz, A.Klemm and C.Vafa, *Geometric engineering of quantum field theories*, Nucl.Phys. B497, (1997) 173-195, hep-th/9609239.
- [60] S.Katz and C.Vafa, *Matter from geometry*, Nucl.Phys. B497, (1997) 146-154, hep-th/9606086.
- [61] W.Fulton, *Introduction to toric varieties*, Princeton University Press, (1993).
- [62] A.Iqbal and A.-K.Kashani-Poor, *$SU(N)$ geometries and topological string amplitudes*, hep-th/0306032.
- [63] M.Aganagic and C.Vafa, *Mirror symmetry, D-branes and counting holomorphic disks*, hep-th/0012041.

- [64] M.Aganagic, A.Klemm, M.Mariño and C.Vafa, *The topological vertex*, Commun.Math.Phys. **254**, (2005) 425-478, hep-th/0305132.
- [65] D.Joyce, *On counting special Lagrangian homology 3-spheres*, Contemp.Math. **314**, (2002) 125-151, hep-th/9907013.
- [66] K.Becker, M.Becker and A.Strominger, *Fivebranes, membranes and non-perturbative string theory*, Nucl.Phys. B456, (1995) 130-152, hep-th/9507158.
- [67] A.Iqbal and A.-K.Kashani-Poor, *Instanton counting and Chern-Simons theory*, Adv.Theor.Math.Phys. **7**, (2004) 457-497, hep-th/0212279.
- [68] T.Eguchi and H.Kanno, *Topological strings and Nekrasov's formulas*, JHEP **0312**, (2003) 006, hep-th/0310235.
- [69] E.Witten, *Chern-Simons gauge theory as a string theory*, Prog.Math. **133**, (1995) 637-678, hep-th/9207094.
- [70] R.Gopakumar and C.Vafa, *M-theory and topological strings-I*, hep-th/9809187.
- [71] R.Gopakumar and C.Vafa, *M-theory and topological strings-II*, hep-th/9812127.
- [72] I.Antoniadis, E.Gava, K.S.Narain and T.R.Taylor, *Topological amplitudes in string theory*, Nucl.Phys. B413, (1994) 162-184, hep-th/9307158.
- [73] I.Antoniadis, E.Gava, K.S.Narain and T.R.Taylor, *$N = 2$ type II-Heterotic duality and higher derivative F -terms*, Nucl.Phys. B455, (1995) 109-130, hep-th/9507115.
- [74] C.Itzykson and J.Zuber, *Quantum field theory* (Section 4-3), Addison Wesley Publishing, (1980).
- [75] E.Witten, *Quantum field theory and the Jones polynomial*, Commun.Math.Phys. **121**, (1989) 351-399.
- [76] E.Witten, *Non-commutative geometry and string field theory*, Nucl.Phys. B268, (1986) 253-294.
- [77] D.Friedan and S.Shenker, *The analytic geometry of two-dimensional conformal field theory*, Nucl.Phys. B281, (1987) 509-545.
- [78] D.Gepner and E.Witten, *String theory on group manifolds*, Nucl.Phys. B278, (1986) 493-549.
- [79] 山田 泰彦, 数理物理シリーズ 1, 共形場理論入門, 培風館, (2006).
- [80] J.Fuchs, *Affine Lie algebras and quantum groups*, Cambridge University Press, (1992).
- [81] 脇本 実, 岩波講座 現代数学の展開, 無限次元 Lie 環, 岩波書店, (1999).
- [82] G.'t Hooft, *A planar diagram theory for string interactions*, Nucl.Phys. B72, (1974) 461-473.
- [83] S.Coleman, *Aspects of symmetry* (section 8), Cambridge University Press, (1985).
- [84] R.Gopakumar and C.Vafa, *On the gauge theory/geometry correspondence*, Adv.Theor.Math.Phys. **3**, (1999) 1415-1443, hep-th/9811131.
- [85] H.Ooguri and C.Vafa, *Worldsheet derivation of a large N duality*, Nucl.Phys. B641, (2002) 3-34, hep-th/0205297.

- [86] H.Ooguri and C.Vafa, *Knot invariants and topological strings*, Nucl.Phys. B577, (2000) 419-438, hep-th/9912123.
- [87] M.Aganagic, M.Mariño and C.Vafa, *All loop topological string amplitudes from Chern-Simons theory*, Commun.Math.Phys. **247**, (2004) 467-512, hep-th/0206164.
- [88] M.Aganagic, A.Klemm and C.Vafa, *Disk instantons, mirror symmetry and the duality web*, Z.Naturforsch. A57, (2002) 1-28, hep-th/0105045.
- [89] M.Mariño and C.Vafa, *Framed knots at large N* , Contemp.Math. **310**, (2002) 185, hep-th/0108064.
- [90] C.Vafa, *Brane/anti-brane systems and $U(N|M)$ supergroup*, hep-th/0101218.
- [91] T.Eguchi and H.Kanno, *Geometric transitions, Chern-Simons gauge theory and Veneziano type amplitudes*, Phys.Lett. B585, (2004) 163-172, hep-th/0312234.
- [92] J.Zhou, *Curve counting and instanton counting*, math.AG/0311237.
- [93] Y.Tachikawa, *Five-dimensional Chern-Simons terms and Nekrasov's instanton counting*, JHEP **0402**, (2004) 050, hep-th/0401184.
- [94] A.Okounkov, N.Reshetikhin and C.Vafa, *Quantum Calabi-Yau and classical crystals*, hep-th/0309208.
- [95] H.Awata and H.Kanno, *Instanton counting, Macdonald function and the moduli space of D -branes*, JHEP **0505**, (2005) 039, hep-th/0502061.
- [96] A.Iqbal, C.Kozcaz and C.Vafa, *The refined topological vertex*, hep-th/0701156.
- [97] M.Mariño, *Les Houches lectures on matrix models and topological strings*, hep-th/0410165.
- [98] M.Aganagic, R.Dijkgraaf, A.Klemm, M.Mariño and C.Vafa, *Topological strings and integrable hierarchies*, Commun.Math.Phys. **261**, (2006) 451-516, hep-th/0312085.
- [99] 松島 与三, 数学選書 5, 多様体入門, 裳華房, (1965).
- [100] 村上 信吾, 共立数学講座 19, 多様体 第2版, 共立出版, (1989).
- [101] M.Nakahara, *Geometry, topology and physics*, graduate student series in physics, IOP, (1990). (邦訳; 中原 幹夫/佐久間 一浩 訳, 理論物理学者のための幾何学とトポロジー I & II, ピアソン・エデュケーション, (2000).)
- [102] W.Fulton and J.Harris, *Representation theory*. A first course, graduate texts in mathematics, Springer-Verlag, (1991).
- [103] 犬井 鉄郎, 田辺 行人, 小野寺 嘉孝, 応用群論 - 群表現と物理学 - (増補版), 裳華房, (1976).