

Instantons and monopoles in terms of ADHM/Nahm construction

東京理科大学 理工学部 物理学科 澤渡研究室
6206113 村中大地

2010年3月

概要

Yang-Mills 理論のラグランジアンには、インスタントンやモノポールと呼ばれるソリトン解が存在する。それらは、始めは ASD 条件と ansatz を用いて場当たりに解かれていたが、後に発表された ADHM/Nahm 構成法によって系統的に求められるようになった。ADHM/Nahm 構成法では、インスタントンやモノポールの持つ情報はすべて ADHM/Nahm データに集約される。また、特に Nahm データには、それに対応する TP_1 という空間上の曲線であるスペクトル曲線が存在する。それゆえ、Nahm 構成法の応用として、スペクトル曲線に対称性を課し、それに対応する Nahm データを得て、それより対称性を持つモノポールを構成することができる。そのような Nahm データを解析的に見つけることは、困難であるが可能である。しかし、それらから full のモノポールを解析的に構成することはほとんど不可能であり、数値計算に頼らなければならない。本研究では、ADHM/Nahm 構成法、Nahm 構成法により構成されるシンメトリックモノポール、その数値計算についての過去の論文を追い、正 4 面体の対称性を持つモノポールのエネルギー密度を求めるコードの作成を実際に行った。

目次

第 1 章	緒言	1
1.1	序論	1
1.2	本論の構成	2
1.3	本書の使い方	2
第 2 章	多少の数学	3
2.1	テンソルと行列	3
2.1.1	添え字についての注意	3
2.1.2	クロネッカーのデルタ	4
2.1.3	完全反対称テンソル	4
2.1.4	't Hooft のイェータシンボル	9
2.1.5	トレース	11
2.1.6	指数行列と path ordered exponential	12
2.1.7	Pauli 行列	12
2.1.8	't Hooft 行列	13
2.1.9	4 元数	14
2.2	リー群とリー代数	15
2.2.1	リー群とリー代数	15
2.2.2	SU(2)	16
2.3	4次元ユークリッド空間	18
2.3.1	4次元ユークリッド空間	19
2.3.2	4次元球座標	19
2.3.3	双対と Bianchi の恒等式	20
第 3 章	ASD Yang-Mills とインスタントン	23
3.1	ASD Yang-Mills	23
3.1.1	4次元 Euclidean Yang-Mills system	23
3.1.2	ピュアゲージ	25
3.1.3	境界条件とトポロジカルチャージ	26
3.1.4	ASD 条件	33
3.2	't Hooft インスタントン	35
3.2.1	't Hooft ansatz と 't Hooft 解	35
3.2.2	't Hooft 1-インスタントン	37
3.2.3	't Hooft 解のゲージ変換	40

3.2.4	't Hooft N -インスタントン	41
3.3	Liouville 解	43
3.3.1	Cauchy-Riemann の定理	44
3.3.2	Liouville 解の ansatz	44
3.3.3	Liouville 解	47
3.3.4	Liouville 解の性質	51
第 4 章	ADHM/Nahm 構成法	55
4.1	基本的な知識	55
4.1.1	モジュライ空間	55
4.1.2	次元降下	56
4.2	ADHM 構成法	57
4.2.1	ディラック作用素と ASD 条件	57
4.2.2	ADHM データと ADHM 方程式	58
4.2.3	ADHM 構成法	61
4.2.4	ADHM 構成法の諸性質	65
4.2.5	't Hooft インスタントンの構成	66
4.3	Nahm 構成法	68
4.3.1	カロロンの定義	68
4.3.2	HS カロロン	69
4.3.3	Nahm 方程式と Nahm データ	71
4.3.4	Nahm 構成法	74
4.3.5	BPS モノポールの構成	79
4.3.6	2-モノポールの Nahm データ	81
第 5 章	対称性を持つモノポール	85
5.1	有限群	85
5.1.1	群	85
5.1.2	対称群と交代群	88
5.1.3	正多面体回転群	90
5.2	スペクトル曲線と対称性の導入	92
5.2.1	Lax 形式とスペクトル曲線	92
5.2.2	TP_1	95
5.2.3	対称性を持つスペクトル曲線	98
5.2.4	不変 2 元形式	100
5.2.5	対称性を持つ Nahm データ	103
第 6 章	数値計算を用いた Nahm 構成法	107
6.1	基本的な数値計算	107
6.1.1	積分	107
6.1.2	ラプラシアン	108
6.1.3	同次方程式の解法	109

6.1.4	1 階線型連立微分方程式の解法	109
6.2	数値計算を用いた Nahm 構成法	110
6.2.1	全体的な流れ	110
6.2.2	BPS モノポールのエネルギー密度	113
6.3	正 4 面体の対称性を持つモノポールの数値的な構成	114
6.3.1	Weyl 方程式と導関数	114
6.3.2	初期条件	118
6.3.3	計算結果	120
第 7 章	結び	123
7.1	まとめ	123
7.2	結論	124
7.3	今後の展望	125
7.4	謝辞	125
付録 A	テンソルと行列の公式	127
A.1	クロネッカーのデルタ	127
A.2	完全反対称テンソル	127
A.3	't Hooft のイェータシンボル	128
A.4	トレース	129
A.5	Pauli 行列	129
A.6	't Hooft 行列	130
A.7	4 元数	130
付録 B	プログラムのコード	133
B.1	main 関数	133
B.2	初期条件のパラメーター	136
B.3	z の表の作成	136
B.4	Runge-Kutta 法で解を求める	137
B.5	初期条件	139
B.6	導関数	141
B.7	解を中央でつなげる	142
B.8	同次方程式の解法	144
B.9	$\ \Phi\ ^2$ を求める	146
B.10	正規直交化	147
B.11	ノルム	148
B.12	ユニタリー内積	148
B.13	Simpson の公式	149
B.14	ラプラシアン	149

第1章 緒言

1.1 序論

原子核の理論や QCD(Quantum ChromoDynamics, 量子色力学) などの基礎となる Yang-Mills 理論のラグランジアンには, インスタントンやモノポールと呼ばれるソリトン解が存在する. インスタントンやモノポールは, 始めは Yang-Mills 理論に特有の ASD 条件といくつかの ansatz によって場当たりの求められていた. しかし, インスタントンは, 1978 年に Atiyah, Drinfeld, Hitchin, Manin によって発表された ADHM 構成法 [8] によって, 系統的に求められるようになった. また, モノポールも, その後に発表された ADHM 構成法をモノポールに応用した Nahm 構成法 [13] によって, 系統的に求められるようになった. 解を得るための手法である ADHM/Nahm 構成法は, インスタントンやモノポールの存在を保証するという意味でも重要である. また, その中に現れる ADHM データや Nahm データ, Nahm データから示唆されるモノポールのスペクトル曲線も重要な意味を持つ.

ADHM/Nahm 構成法の原理は, インスタントンやモノポールの住む実空間と, インスタントンやモノポールの持つ位置やサイズといったパラメーターが作る空間であるモジュライ空間が対応していることにある. それにより, インスタントンやモノポールには, 実空間におけるポテンシャルの他にモジュライ空間におけるポテンシャルも存在する. そして, それらを用いることでモジュライ空間上でインスタントンやモノポールを構成することができる. このとき, インスタントンやモノポールの持つ情報はすべて, モジュライ空間の量である ADHM データ, Nahm データにそれぞれ集約される. また, 特に Nahm データには, それに対応する TP_1 という空間上の曲線であるスペクトル曲線が存在する. ADHM/Nahm 構成法を用いる利点は, これらの量の方が ASD 条件と ansatz を用いて得たそのままの形のインスタントンやモノポールよりも扱いやすいことにある. 特に, ADHM/Nahm 構成法に現れる方程式は, それぞれ代数方程式と 1 階の線型連立微分方程式である.

ADHM/Nahm 構成法の応用として, ADHM データや Nahm データに対称性を課すことで, 対称性を持つインスタントンやモノポールを構成することができる. 対称性の種類には様々なものがあるが, 特に興味深いのは実空間における幾何学的な対称性である. そのような対称性はモノポールの持つチャージ N によって異なり, $N = 1, 2, 3, 4, 7$ ではそれぞれ球, トーラス, 正 4 面体, 正 8 面体, 正 20 面体の対称性となる [19]. そのようなモノポールを実際に構成するには, まずスペクトル曲線に対称性を課し, 次にそのスペクトル曲線から Nahm データを見出し, 最後に Nahm データから対応するモノポールを Nahm 構成法によって構成する. このとき, Nahm データを見つけるまでは, 困難であるが, 解析的な範囲で可能である. しかし, それらより full のモノポールを Nahm 構成法により構成することは, 解析的な範囲ではほとんど不可能であり, 数値計算に頼らなければならない [22]. とはいえ, 数値計算を用いれば, Nahm データがわかっている様々なモノポールやその散

乱を図示することができる。

1.2 本論の構成

本論では、まず2章で ASD Yang-Mills の計算に必要な数学について述べる。この章のテンソルや行列の公式の導出は、自分が ASD Yang-Mills を勉強する際に行ったものである。このような公式は本来自分自身で導くべきであるが、スタートでつまずいても仕方ないので、この分野がゼミや卒研で当たってしまった後輩のために書き残しておく。その後、3章では、ASD Yang-Mills についてトポロジカルチャージや ASD 条件などの基本的な事柄について述べた後、インスタントンの例として 't Hooft インスタントンと Liouville 解について述べる。この章の内容は、自分が担当したゼミをもとにしている (教科書は [1] であった。この辺りの式の導出も自ら行うのが望ましい)。

ADHM/Nahm 構成法については4章から述べる。4章では、まず、モジュライ空間や次元降下などの基本的な概念について述べる。その後、ASD 条件をディラック作用素を用いて一般化した後、ADHM 構成法について述べ、実際に 't Hooft インスタントンの構成を行う。そして、最後に、インスタントンとモノポールの間の次元降下を連続的に行うカロロンというインスタントンについて述べた後、Nahm 構成法について述べ、実際に BPS モノポールの構成を行い、チャージ2のモノポールの Nahm データについても見てみる。この章の内容は、主に千葉大学での特別講義をもとにしている。その後、5章では、正多面体を持つ対称性を群論の視点から説明した後、スペクトル曲線について述べ、それを用いて対称性を持つさらに高いチャージのモノポールの Nahm データを求める。この章の内容は、もともとは [12] を読むために勉強したものであり、[2] や [19] をもとにしている。そのようにして求めた Nahm データを用いて数値計算により Nahm 構成法を行う過程は、章を改めて6章で説明する。この章の内容は主に [22] によるが、プログラムのコードまでは公開されていなかった。[22] を追う過程で自分が作成した、正4面体の対称性を持つモノポールを数値計算を用いて構成する C 言語によるプログラムのコードは、付録 B に載せてある。

1.3 本書の使い方

本書は、一応、著者の学部の卒業論文であるが、著者としては自分がこの分野について勉強したことをまとめたノートのみで作ったので、印刷して手元に置いて使うのに適した作りになっている。そのように使うには、まず本 PDF ファイルをプリンタで両面印刷する。そして、それを生協などで売っている背表紙に挟み、背の糊を専用のヒーターで溶かして接着する。

第2章 多少の数学

この章では、ASD Yang-Mills や ADHM/Nahm 構成法を理解するのに必要な最低限の数学について解説する。2.1 節では、テンソルと行列の性質や公式について述べた。2.2 節では、リー群とリー代数、4次元 Euclidean Yang-Mills system でのゲージ変換に用いられる $SU(2)$ について述べた。2.3 節では、4次元ユークリッド空間と、積分をする際に必要となる4次元球座標、ASD Yang-Mills の基礎となる概念である双対について述べた。読者がこれらの数学に精通しているならば、本章を飛ばして次章に進んでもらって構わない。式変形の途中でわからなくなったら、常に本章に立ち返るとよい。

2.1 テンソルと行列

ASD Yang-Mills にはたくさんのテンソルや行列が登場する。クロネッカーのデルタや完全反対称テンソル、Pauli 行列などは、ゲージ場の理論を学ぶ上では必須のものである。また、ASD である 't Hooft 行列は、ASD Yang-Mills の最も基本的なインスタントンである 't Hooft インスタントンや ADHM 構成法の基礎となる行列である。

2.1.1 添え字についての注意

まず、テンソルの添え字について注意しておく。テンソル計算において、添え字の範囲は常に把握されるべきものである。例えば、クロネッカーのデルタの縮約 $\delta_{ij}\delta_{ij}$ は、添え字の変域によって値が変わる。添え字の変域は、その都度、 $i, j = 1, 2$ といった形で示すようにするが、特に指定がない場合は、 $i, j, k, \ell, m, n, p, q, r$ などのアルファベット小文字は $1, 2, 3$ 、 $\mu, \nu, \rho, \sigma, \xi, \lambda, \alpha, \beta$ などのギリシャ小文字は $1, 2, 3, 4$ を表すとする。また、 $1, 2, 3, 4$ を想定していたが、計算の途中で $1, 2, 3$ の場合のみになり、そのことが明らかでない場合、その添え字には「 \prime 」をつけるとする。さらに、2つのテンソル A_i, B_i の和(縮約)については、お馴染みのアインシュタインの総和則 (Einstein summation convention)

$$A_i B_i = \sum_i A_i B_i \quad (2.1)$$

を用いることにする。ただし、この章においては(というより、ASD Yang-Mills の話であるから、本論全体的に)、添え字の上下は区別しない。

2.1.2 クロネッカーのデルタ

次のように定義されたテンソルをクロネッカーのデルタ (Kronecker's delta) という：

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n). \quad (2.2)$$

定義より明らかに $\delta_{ij} = \delta_{ji}$ が成り立つ．また，テンソル T_i に対し

$$\begin{aligned} T_i \delta_{ij} &= T_1 \delta_{1j} + T_2 \delta_{2j} + \dots + T_j \delta_{jj} + \dots \\ &= T_1 \cdot 0 + T_2 \cdot 0 + \dots + T_j \cdot 1 + \dots = T_j \end{aligned} \quad (2.3)$$

であるから，クロネッカーのデルタがかかると添え字が入れ換わる．クロネッカーのデルタについての性質と公式をいくつか挙げておく：

$$\delta_{ij} = \delta_{ji}, \quad (\text{対称性}) \quad (2.4)$$

$$T_i \delta_{ij} = T_j, \quad (\text{添え字の入れ換え}) \quad (2.5)$$

$$\delta_{ij} \delta_{ij} = n, \quad (\text{縮約}) \quad (2.6)$$

$$\delta_{ij} = \delta_{ik} \delta_{kj}, \quad (2.7)$$

$$\delta_{\mu\nu} = \delta_{\mu'\nu'} + \delta_{\mu 4} \delta_{\nu 4}. \quad (2.8)$$

ただし， $i, j = 1, 2, \dots, n$ で， T_j は任意のテンソルである．

2.1.3 完全反対称テンソル

次のように定義されたテンソルを完全反対称テンソル¹(anti-symmetric tensor) という：

$$\varepsilon_{p_1 p_2 \dots p_n} = \begin{cases} 1 & ((p_1, p_2, \dots, p_n) \text{ が偶置換}^2 \text{ のとき}) \\ -1 & ((p_1, p_2, \dots, p_n) \text{ が奇置換のとき}) \\ 0 & ((p_1, p_2, \dots, p_n) \text{ が置換でないとき}) \end{cases} \quad (2.9)$$

$(p_1, p_2, \dots, p_n = 1, 2, \dots, n).$

定義より，添え字の中に同じものが2つ以上あれば，その完全反対称テンソルは0である．また，2つの添え字を入れ替えれば，それらを元に戻すのに1手かかるので符号が変わる．これらに加え，さらに次の性質は計算のテクニックとして重要である：

$$S_{p_i p_j} \text{ が対称テンソル} \Rightarrow S_{p_i p_j} \varepsilon_{p_1 \dots p_i \dots p_j \dots p_n} = 0. \quad (2.10)$$

¹一般に， $S_{p_i p_j} = S_{p_j p_i}$ を満たすテンソルを対称テンソル， $A_{p_i p_j} = -A_{p_j p_i}$ を満たすテンソルを反対称テンソルという．

² $1, 2, \dots, n$ を並べ替えたものを置換という．また，2つの数を入れ換えたものを互換という．与えられた置換を互換によって $1, 2, \dots, n$ に戻すとき，かかる手数が奇数のものを奇置換，偶数のものを偶置換という．与えられた置換を互換によって $1, 2, \dots, n$ に戻すのにかかる手数は無限にあるが，それが奇数か偶数か，すなわち，与えられた置換が奇置換であるか偶置換であるかは一意に決まっていることが知られている．

$$\begin{aligned}
\therefore S_{p_i p_j} \varepsilon_{p_1 \dots p_i \dots p_j \dots p_n} &= \frac{1}{2} (S_{p_i p_j} \varepsilon_{p_1 \dots p_i \dots p_j \dots p_n} + S_{p_i p_j} \varepsilon_{p_1 \dots p_j \dots p_i \dots p_n}) \\
&= \frac{1}{2} (S_{p_i p_j} \varepsilon_{p_1 \dots p_i \dots p_j \dots p_n} + S_{p_j p_i} \varepsilon_{p_1 \dots p_j \dots p_i \dots p_n}) \quad (\text{添え字の付け替え}) \\
&= \frac{1}{2} (S_{p_i p_j} \varepsilon_{p_1 \dots p_i \dots p_j \dots p_n} - S_{p_i p_j} \varepsilon_{p_1 \dots p_i \dots p_j \dots p_n}) \\
&\quad (S_{p_i p_j} \text{ の対称性と完全反対称テンソルの反対称性}) \\
&= 0. \quad \square
\end{aligned} \tag{2.11}$$

また，次の性質も重要である：

$$\varepsilon_{p_1 \dots p_{n-1} n} = \varepsilon_{p_1 \dots p_{n-1}}. \tag{2.12}$$

これにより，例えば，3 階の完全反対称テンソルはクロネッカーのデルタを用いて

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ijk} &= \delta_{i3} \varepsilon_{3jk} + \delta_{j3} \varepsilon_{i3k} + \delta_{k3} \varepsilon_{ij3} + \varepsilon_{i'j'k'} \\
&= \delta_{i3} \varepsilon_{jk} + \delta_{j3} \varepsilon_{ki} + \delta_{k3} \varepsilon_{ij} \\
&= \delta_{i3} (\delta_{j2} \varepsilon_{2k} + \delta_{k2} \varepsilon_{j2} + \varepsilon_{j'k'}) + \delta_{j3} (\delta_{k2} \varepsilon_{2i} + \delta_{i2} \varepsilon_{k2} + \varepsilon_{k'i'}) + \delta_{k3} (\delta_{i2} \varepsilon_{2j} + \delta_{j2} \varepsilon_{i2} + \varepsilon_{i'j'}) \\
&= \delta_{i1} \delta_{j2} \delta_{k3} + \delta_{i2} \delta_{j3} \delta_{k1} + \delta_{i3} \delta_{j1} \delta_{k2} - \delta_{i1} \delta_{j3} \delta_{k2} - \delta_{i2} \delta_{j1} \delta_{k3} - \delta_{i3} \delta_{j2} \delta_{k1}.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

と展開できる．この最後の形も，途中のクロネッカーのデルタと完全反対称テンソルが混ざった形も，計算においてよく用いられる．完全反対称テンソルについての性質をいくつかまとめておく：

$$\varepsilon_{p_1 \dots p_i \dots p_j \dots p_n} = \varepsilon_{p_1 \dots p_j \dots p_i \dots p_n}, \quad (2 \text{ つの異なる添え字について反対称}) \tag{2.14}$$

$$\delta_{p_i p_j} \varepsilon_{p_1 \dots p_i \dots p_j \dots p_n} = 0, \quad (\text{同じ添え字が入ると } 0) \tag{2.15}$$

$$S_{p_i p_j} = S_{p_j p_i} \Rightarrow S_{p_i p_j} \varepsilon_{p_1 \dots p_i \dots p_j \dots p_n} = 0, \quad (\text{対称テンソルにかかると } 0) \tag{2.16}$$

$$\varepsilon_{p_1 \dots p_i \dots p_j \dots p_n} (T_{p_i p_j} - T_{p_j p_i}) = 2 \varepsilon_{p_1 \dots p_i \dots p_j \dots p_n} T_{ij}, \quad (\text{特に交換関係との積}) \tag{2.17}$$

$$\varepsilon_{p_1 \dots p_n} \varepsilon_{p_1 \dots p_n} = n!, \quad (\text{積の縮約}) \tag{2.18}$$

$$\varepsilon_{p_1 \dots p_{n-1} n} = \varepsilon_{p_1 \dots p_{n-1}}. \quad (n \text{ 階から } n-1 \text{ 階へ}) \tag{2.19}$$

ただし， $S_{p_i p_j}, T_{p_i p_j}$ は任意のテンソルである．

次に，完全反対称テンソル同士の積であるが，まずは簡単な 2 階の場合から考えてみる．普通に計算してみると，

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} &= (\delta_{i1} \delta_{j2} - \delta_{i2} \delta_{j1}) (\delta_{k1} \delta_{l2} - \delta_{k2} \delta_{l1}) \\
&= \delta_{i1} \delta_{k1} \delta_{j2} \delta_{l2} + \delta_{i2} \delta_{k2} \delta_{j1} \delta_{l1} - \delta_{i1} \delta_{k2} \delta_{j2} \delta_{l1} - \delta_{i2} \delta_{k1} \delta_{j1} \delta_{l2} \\
&\quad + \delta_{i1} \delta_{k1} \delta_{j1} \delta_{l1} + \delta_{i2} \delta_{k2} \delta_{j2} \delta_{l2} - \delta_{i1} \delta_{k1} \delta_{j1} \delta_{l1} - \delta_{i2} \delta_{k2} \delta_{j2} \delta_{l2} \\
&= \delta_{i1} \delta_{k1} \delta_{j2} + \delta_{i2} \delta_{k2} \delta_{j1} - \delta_{i1} \delta_{l1} \delta_{j2} - \delta_{i2} \delta_{l2} \delta_{j1} \\
&= \delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}
\end{aligned} \tag{2.20}$$

となるが，この方法によると， n 階の場合を計算するには $n! \times n!$ 個の項を扱わなければならないので，もう少し工夫が必要である．そこで，(2.20) の第 1 等号の右辺が行列式になっ

ていることに注目すると，

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} &= \begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \delta_{k1} & \delta_{k2} \\ \delta_{\ell 1} & \delta_{\ell 2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_{i1}\delta_{k1} + \delta_{i2}\delta_{\ell 1} & \delta_{i1}\delta_{k2} + \delta_{i2}\delta_{\ell 2} \\ \delta_{j1}\delta_{k1} + \delta_{j2}\delta_{\ell 1} & \delta_{j1}\delta_{k2} + \delta_{j2}\delta_{\ell 2} \end{vmatrix} \quad (|AB| = |A||B|) \\
&= \begin{vmatrix} \delta_{i1}\delta_{k1} & \delta_{i1}\delta_{k2} \\ \delta_{j1}\delta_{k1} & \delta_{j1}\delta_{k2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \delta_{i1}\delta_{k1} & \delta_{i2}\delta_{\ell 2} \\ \delta_{j1}\delta_{k1} & \delta_{j2}\delta_{\ell 2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \delta_{i2}\delta_{\ell 1} & \delta_{i1}\delta_{k2} \\ \delta_{j2}\delta_{\ell 1} & \delta_{j1}\delta_{k2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \delta_{i2}\delta_{\ell 1} & \delta_{i2}\delta_{\ell 2} \\ \delta_{j2}\delta_{\ell 1} & \delta_{j2}\delta_{\ell 2} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \delta_{i1}\delta_{k1} & \delta_{i2}\delta_{\ell 2} \\ \delta_{j1}\delta_{k1} & \delta_{j2}\delta_{\ell 2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \delta_{i2}\delta_{\ell 1} & \delta_{i1}\delta_{k2} \\ \delta_{j2}\delta_{\ell 1} & \delta_{j1}\delta_{k2} \end{vmatrix} \quad (\text{例えば, 第1項は } \delta_{i1}, \delta_{j1} \text{ を括り出す}) \\
&= \begin{vmatrix} \delta_{i1}\delta_{k1} & \delta_{i2}\delta_{\ell 2} \\ \delta_{j1}\delta_{k1} & \delta_{j2}\delta_{\ell 2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \delta_{i2}\delta_{k2} & \delta_{i1}\delta_{\ell 1} \\ \delta_{j2}\delta_{k2} & \delta_{j1}\delta_{\ell 1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \delta_{i1}\delta_{k1} & \delta_{i1}\delta_{\ell 1} \\ \delta_{j1}\delta_{k1} & \delta_{j1}\delta_{\ell 1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \delta_{i2}\delta_{k2} & \delta_{i2}\delta_{\ell 2} \\ \delta_{j2}\delta_{k2} & \delta_{j2}\delta_{\ell 2} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \delta_{i1}\delta_{k1} & \delta_{i\ell} \\ \delta_{j1}\delta_{k1} & \delta_{j\ell} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \delta_{i2}\delta_{k2} & \delta_{i\ell} \\ \delta_{j2}\delta_{k2} & \delta_{j\ell} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_{ik} & \delta_{i\ell} \\ \delta_{jk} & \delta_{j\ell} \end{vmatrix} = \delta_{ik}\delta_{j\ell} - \delta_{i\ell}\delta_{jk} \quad (2.21)
\end{aligned}$$

と変形できることに気づく．ここで，(2.21)の第4等号の右辺を見ると，結局，列の i, j, k の脚を持つクロネッカーのデルタとペアになっている数字が順列になっている行列式だけが残るので，一般の n 階の場合でも項は $n!$ 個で済む．また，行列式の形で行うから， n 階の場合の公式も容易に想像がつく．3階の場合で試してみると，

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} &= \begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \delta_{\ell 1} & \delta_{\ell 2} & \delta_{\ell 3} \\ \delta_{m1} & \delta_{m2} & \delta_{m3} \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \delta_{n3} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \delta_{i1}\delta_{\ell 1} + \delta_{i2}\delta_{m1} + \delta_{i3}\delta_{n1} & \delta_{i1}\delta_{\ell 2} + \delta_{i2}\delta_{m2} + \delta_{i3}\delta_{n2} & \delta_{i1}\delta_{\ell 3} + \delta_{i2}\delta_{m3} + \delta_{i3}\delta_{n3} \\ \delta_{j1}\delta_{\ell 1} + \delta_{j2}\delta_{m1} + \delta_{j3}\delta_{n1} & \delta_{j1}\delta_{\ell 2} + \delta_{j2}\delta_{m2} + \delta_{j3}\delta_{n2} & \delta_{j1}\delta_{\ell 3} + \delta_{j2}\delta_{m3} + \delta_{j3}\delta_{n3} \\ \delta_{k1}\delta_{\ell 1} + \delta_{k2}\delta_{m1} + \delta_{k3}\delta_{n1} & \delta_{k1}\delta_{\ell 2} + \delta_{k2}\delta_{m2} + \delta_{k3}\delta_{n2} & \delta_{k1}\delta_{\ell 3} + \delta_{k2}\delta_{m3} + \delta_{k3}\delta_{n3} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \delta_{i1}\delta_{\ell 1} & \delta_{i2}\delta_{m2} & \delta_{i3}\delta_{n3} \\ \delta_{j1}\delta_{\ell 1} & \delta_{j2}\delta_{m2} & \delta_{j3}\delta_{n3} \\ \delta_{k1}\delta_{\ell 1} & \delta_{k2}\delta_{m2} & \delta_{k3}\delta_{n3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \delta_{i2}\delta_{m1} & \delta_{i3}\delta_{n2} & \delta_{i1}\delta_{\ell 3} \\ \delta_{j2}\delta_{m1} & \delta_{j3}\delta_{n2} & \delta_{j1}\delta_{\ell 3} \\ \delta_{k2}\delta_{m1} & \delta_{k3}\delta_{n2} & \delta_{k1}\delta_{\ell 3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \delta_{i3}\delta_{n1} & \delta_{i1}\delta_{\ell 2} & \delta_{i2}\delta_{m3} \\ \delta_{j3}\delta_{n1} & \delta_{j1}\delta_{\ell 2} & \delta_{j2}\delta_{m3} \\ \delta_{k3}\delta_{n1} & \delta_{k1}\delta_{\ell 2} & \delta_{k2}\delta_{m3} \end{vmatrix} \\
&+ \begin{vmatrix} \delta_{i1}\delta_{\ell 1} & \delta_{i3}\delta_{n2} & \delta_{i2}\delta_{m3} \\ \delta_{j1}\delta_{\ell 1} & \delta_{j3}\delta_{n2} & \delta_{j2}\delta_{m3} \\ \delta_{k1}\delta_{\ell 1} & \delta_{k3}\delta_{n2} & \delta_{k2}\delta_{m3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \delta_{i2}\delta_{m1} & \delta_{i1}\delta_{\ell 2} & \delta_{i3}\delta_{n3} \\ \delta_{j2}\delta_{m1} & \delta_{j1}\delta_{\ell 2} & \delta_{j3}\delta_{n3} \\ \delta_{k2}\delta_{m1} & \delta_{k1}\delta_{\ell 2} & \delta_{k3}\delta_{n3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \delta_{i3}\delta_{n1} & \delta_{i2}\delta_{m2} & \delta_{i1}\delta_{\ell 3} \\ \delta_{j3}\delta_{n1} & \delta_{j2}\delta_{m2} & \delta_{j1}\delta_{\ell 3} \\ \delta_{k3}\delta_{n1} & \delta_{k2}\delta_{m2} & \delta_{k1}\delta_{\ell 3} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

(列の i, j, k とペアになっている数字が順列になっている行列式だけが残る)

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} \delta_{i1}\delta_{\ell 1} & \delta_{i2}\delta_{m2} & \delta_{i3}\delta_{n3} \\ \delta_{j1}\delta_{\ell 1} & \delta_{j2}\delta_{m2} & \delta_{j3}\delta_{n3} \\ \delta_{k1}\delta_{\ell 1} & \delta_{k2}\delta_{m2} & \delta_{k3}\delta_{n3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \delta_{i2}\delta_{n2} & \delta_{i3}\delta_{\ell 3} & \delta_{i1}\delta_{m1} \\ \delta_{j2}\delta_{n2} & \delta_{j3}\delta_{\ell 3} & \delta_{j1}\delta_{m1} \\ \delta_{k2}\delta_{n2} & \delta_{k3}\delta_{\ell 3} & \delta_{k1}\delta_{m1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \delta_{i3}\delta_{m3} & \delta_{i1}\delta_{n1} & \delta_{i2}\delta_{\ell 2} \\ \delta_{j3}\delta_{m3} & \delta_{j1}\delta_{n1} & \delta_{j2}\delta_{\ell 2} \\ \delta_{k3}\delta_{m3} & \delta_{k1}\delta_{n1} & \delta_{k2}\delta_{\ell 2} \end{vmatrix} \\
&+ \begin{vmatrix} \delta_{i1}\delta_{\ell 1} & \delta_{i3}\delta_{m3} & \delta_{i2}\delta_{n2} \\ \delta_{j1}\delta_{\ell 1} & \delta_{j3}\delta_{m3} & \delta_{j2}\delta_{n2} \\ \delta_{k1}\delta_{\ell 1} & \delta_{k3}\delta_{m3} & \delta_{k2}\delta_{n2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \delta_{i2}\delta_{\ell 2} & \delta_{i1}\delta_{m1} & \delta_{i3}\delta_{n3} \\ \delta_{j2}\delta_{\ell 2} & \delta_{j1}\delta_{m1} & \delta_{j3}\delta_{n3} \\ \delta_{k2}\delta_{\ell 2} & \delta_{k1}\delta_{m1} & \delta_{k3}\delta_{n3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \delta_{i3}\delta_{\ell 3} & \delta_{i2}\delta_{m2} & \delta_{i1}\delta_{n1} \\ \delta_{j3}\delta_{\ell 3} & \delta_{j2}\delta_{m2} & \delta_{j1}\delta_{n1} \\ \delta_{k3}\delta_{\ell 3} & \delta_{k2}\delta_{m2} & \delta_{k1}\delta_{n1} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

(括り出して別の列に掛ける)

$$\begin{aligned}
 &= \begin{vmatrix} \delta_{i1}\delta_{l1} & \delta_{i2}\delta_{m2} & \delta_{in} \\ \delta_{j1}\delta_{l1} & \delta_{j2}\delta_{m2} & \delta_{jn} \\ \delta_{k1}\delta_{l1} & \delta_{k2}\delta_{m2} & \delta_{kn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \delta_{in} & \delta_{i3}\delta_{l3} & \delta_{i1}\delta_{m1} \\ \delta_{jn} & \delta_{j3}\delta_{l3} & \delta_{j1}\delta_{m1} \\ \delta_{kn} & \delta_{k3}\delta_{l3} & \delta_{k1}\delta_{m1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \delta_{i3}\delta_{m3} & \delta_{in} & \delta_{i2}\delta_{l2} \\ \delta_{j3}\delta_{m3} & \delta_{jn} & \delta_{j2}\delta_{l2} \\ \delta_{k3}\delta_{m3} & \delta_{kn} & \delta_{k2}\delta_{l2} \end{vmatrix} \\
 &+ \begin{vmatrix} \delta_{i1}\delta_{l1} & \delta_{i3}\delta_{m3} & \delta_{in} \\ \delta_{j1}\delta_{l1} & \delta_{j3}\delta_{m3} & \delta_{jn} \\ \delta_{k1}\delta_{l1} & \delta_{k3}\delta_{m3} & \delta_{kn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \delta_{i2}\delta_{l2} & \delta_{i1}\delta_{m1} & \delta_{in} \\ \delta_{j2}\delta_{l2} & \delta_{j1}\delta_{m1} & \delta_{jn} \\ \delta_{k2}\delta_{l2} & \delta_{k1}\delta_{m1} & \delta_{kn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \delta_{i3}\delta_{l3} & \delta_{i2}\delta_{m2} & \delta_{in} \\ \delta_{j3}\delta_{l3} & \delta_{j2}\delta_{m2} & \delta_{jn} \\ \delta_{k3}\delta_{l3} & \delta_{k2}\delta_{m2} & \delta_{kn} \end{vmatrix} \\
 & \text{(同じ列を持つ行列式で和を補う)} \\
 &= \begin{vmatrix} \delta_{i1}\delta_{l1} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{j1}\delta_{l1} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{k1}\delta_{l1} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \delta_{i2}\delta_{l2} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{j2}\delta_{l2} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{k2}\delta_{l2} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \delta_{i3}\delta_{l3} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{j3}\delta_{l3} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{k3}\delta_{l3} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} \tag{2.22}
 \end{aligned}$$

となる．この行列式の形の公式が一般の階数の場合にも成り立つのは明らかだろう．これは，積の公式の最も一般的な形だが，実際の計算では，いくつかの添え字が揃ったものがよく出てくる．それらの公式を得るには，上の公式でいくつかの添え字を揃えてから行列式を展開すればよい．例えば，3階の完全反対称テンソルの場合，添え字を1つ揃えると

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm} &= \begin{vmatrix} \delta_{ii} & \delta_{il} & \delta_{im} \\ \delta_{ji} & \delta_{jl} & \delta_{jm} \\ \delta_{ki} & \delta_{kl} & \delta_{km} \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} \delta_{j\ell} & \delta_{jm} \\ \delta_{k\ell} & \delta_{km} \end{vmatrix} - \delta_{il} \begin{vmatrix} \delta_{ji} & \delta_{jm} \\ \delta_{ki} & \delta_{km} \end{vmatrix} + \delta_{im} \begin{vmatrix} \delta_{ji} & \delta_{j\ell} \\ \delta_{ki} & \delta_{k\ell} \end{vmatrix} \\
 &= 3 \begin{vmatrix} \delta_{j\ell} & \delta_{jm} \\ \delta_{k\ell} & \delta_{km} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \delta_{j\ell} & \delta_{jm} \\ \delta_{k\ell} & \delta_{km} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \delta_{jm} & \delta_{j\ell} \\ \delta_{km} & \delta_{k\ell} \end{vmatrix} = \delta_{il}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{k\ell} \tag{2.23}
 \end{aligned}$$

となり，さらに1つ揃えると

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ij\ell} = \delta_{jj}\delta_{k\ell} - \delta_{j\ell}\delta_{kj} = 3\delta_{k\ell} - \delta_{k\ell} = 2\delta_{k\ell} \tag{2.24}$$

となる．残った添え字も揃えたものは，もちろん $3! = 6$ である．また，ASD Yang-Mills の計算でよく使う，4階の完全反対称テンソルで添え字を2つ揃えたものは，

$$\begin{aligned}
 &\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \\
 &= \begin{vmatrix} \delta_{\mu\mu} & \delta_{\mu\nu} & \delta_{\mu\rho} & \delta_{\mu\sigma} \\ \delta_{\nu\mu} & \delta_{\nu\nu} & \delta_{\nu\rho} & \delta_{\nu\sigma} \\ \delta_{\alpha\mu} & \delta_{\alpha\nu} & \delta_{\alpha\rho} & \delta_{\alpha\sigma} \\ \delta_{\beta\mu} & \delta_{\beta\nu} & \delta_{\beta\rho} & \delta_{\beta\sigma} \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} \delta_{\nu\nu} & \delta_{\nu\rho} & \delta_{\nu\sigma} \\ \delta_{\alpha\nu} & \delta_{\alpha\rho} & \delta_{\alpha\sigma} \\ \delta_{\beta\nu} & \delta_{\beta\rho} & \delta_{\beta\sigma} \end{vmatrix} - \delta_{\mu\nu} \begin{vmatrix} \delta_{\nu\mu} & \delta_{\nu\rho} & \delta_{\nu\sigma} \\ \delta_{\alpha\mu} & \delta_{\alpha\rho} & \delta_{\alpha\sigma} \\ \delta_{\beta\mu} & \delta_{\beta\rho} & \delta_{\beta\sigma} \end{vmatrix} \\
 &+ \delta_{\mu\rho} \begin{vmatrix} \delta_{\nu\mu} & \delta_{\nu\nu} & \delta_{\nu\sigma} \\ \delta_{\alpha\mu} & \delta_{\alpha\nu} & \delta_{\alpha\sigma} \\ \delta_{\beta\mu} & \delta_{\beta\nu} & \delta_{\beta\sigma} \end{vmatrix} - \delta_{\mu\sigma} \begin{vmatrix} \delta_{\nu\mu} & \delta_{\nu\nu} & \delta_{\nu\rho} \\ \delta_{\alpha\mu} & \delta_{\alpha\nu} & \delta_{\alpha\rho} \\ \delta_{\beta\mu} & \delta_{\beta\nu} & \delta_{\beta\rho} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_{\nu\nu} & \delta_{\nu\rho} & \delta_{\nu\sigma} \\ \delta_{\alpha\nu} & \delta_{\alpha\rho} & \delta_{\alpha\sigma} \\ \delta_{\beta\nu} & \delta_{\beta\rho} & \delta_{\beta\sigma} \end{vmatrix} \\
 &= 4 \begin{vmatrix} \delta_{\alpha\rho} & \delta_{\alpha\sigma} \\ \delta_{\beta\rho} & \delta_{\beta\sigma} \end{vmatrix} - \delta_{\nu\rho} \begin{vmatrix} \delta_{\alpha\nu} & \delta_{\alpha\sigma} \\ \delta_{\beta\nu} & \delta_{\beta\sigma} \end{vmatrix} + \delta_{\nu\sigma} \begin{vmatrix} \delta_{\alpha\nu} & \delta_{\alpha\rho} \\ \delta_{\beta\nu} & \delta_{\beta\rho} \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} \delta_{\alpha\rho} & \delta_{\alpha\sigma} \\ \delta_{\beta\rho} & \delta_{\beta\sigma} \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

$$= 2(\delta_{\alpha\rho}\delta_{\beta\sigma} - \delta_{\alpha\sigma}\delta_{\beta\rho}) \quad (2.25)$$

となり，さらに1つ揃えと

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\rho} = 2(\delta_{\alpha\alpha}\delta_{\beta\rho} - \delta_{\alpha\rho}\delta_{\beta\alpha}) = 2(4\delta_{\beta\rho} - \delta_{\beta\rho}) = 6\delta_{\beta\rho} \quad (2.26)$$

となる．残った添え字も揃えたものは，もちろん $4! = 24$ である．2, 3, 4 階の完全反対称テンソルの積公式をまとめておく：

$$\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}, \quad (2 \text{ 階の積公式}) \quad (2.27)$$

$$\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ik} = \delta_{jk}, \quad (2.28)$$

$$\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} = 2, \quad (2.29)$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm} = \delta_{il}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}, \quad (3 \text{ 階の積公式}) \quad (2.30)$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijl} = 2\delta_{kl}, \quad (2.31)$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6, \quad (2.32)$$

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = 2(\delta_{\alpha\rho}\delta_{\beta\sigma} - \delta_{\alpha\sigma}\delta_{\beta\rho}), \quad (4 \text{ 階の積公式}) \quad (2.33)$$

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\rho} = 6\delta_{\beta\rho}, \quad (2.34)$$

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} = 24. \quad (2.35)$$

それから，クロネッカーのデルタと完全反対称テンソルの積であるが，今導いた積公式より，3階の場合は以下が成り立つことがわかる：

$$\begin{aligned} \delta_{ij}\varepsilon_{klm} &= \frac{1}{2}\varepsilon_{iab}\varepsilon_{jab}\varepsilon_{klm} = \frac{1}{2}\varepsilon_{jab} \begin{vmatrix} \delta_{ik} & \delta_{il} & \delta_{im} \\ \delta_{ak} & \delta_{al} & \delta_{am} \\ \delta_{bk} & \delta_{bl} & \delta_{bm} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon_{jab} \left\{ \delta_{ik} \begin{vmatrix} \delta_{al} & \delta_{am} \\ \delta_{bl} & \delta_{bm} \end{vmatrix} - \delta_{il} \begin{vmatrix} \delta_{ak} & \delta_{am} \\ \delta_{bk} & \delta_{bm} \end{vmatrix} + \delta_{im} \begin{vmatrix} \delta_{ak} & \delta_{al} \\ \delta_{bk} & \delta_{bl} \end{vmatrix} \right\} \\ &= \delta_{ik}\varepsilon_{jlm} + \delta_{il}\varepsilon_{kjm} + \delta_{im}\varepsilon_{klj}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

4階の場合も同様である：

$$\begin{aligned} \delta_{\mu\nu}\varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} &= \frac{1}{6}\varepsilon_{\mu\xi\lambda\eta}\varepsilon_{\nu\xi\lambda\eta}\varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} = \frac{1}{6}\varepsilon_{\nu\xi\lambda\eta} \begin{vmatrix} \delta_{\mu\alpha} & \delta_{\mu\beta} & \delta_{\mu\rho} & \delta_{\mu\sigma} \\ \delta_{\xi\alpha} & \delta_{\xi\beta} & \delta_{\xi\rho} & \delta_{\xi\sigma} \\ \delta_{\lambda\alpha} & \delta_{\lambda\beta} & \delta_{\lambda\rho} & \delta_{\lambda\sigma} \\ \delta_{\eta\alpha} & \delta_{\eta\beta} & \delta_{\eta\rho} & \delta_{\eta\sigma} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{6}\varepsilon_{\nu\xi\lambda\eta} \left\{ \delta_{\mu\alpha} \begin{vmatrix} \delta_{\xi\beta} & \delta_{\xi\rho} & \delta_{\xi\sigma} \\ \delta_{\lambda\beta} & \delta_{\lambda\rho} & \delta_{\lambda\sigma} \\ \delta_{\eta\beta} & \delta_{\eta\rho} & \delta_{\eta\sigma} \end{vmatrix} - \delta_{\mu\beta} \begin{vmatrix} \delta_{\xi\alpha} & \delta_{\xi\rho} & \delta_{\xi\sigma} \\ \delta_{\lambda\alpha} & \delta_{\lambda\rho} & \delta_{\lambda\sigma} \\ \delta_{\eta\alpha} & \delta_{\eta\rho} & \delta_{\eta\sigma} \end{vmatrix} + \delta_{\mu\rho} \begin{vmatrix} \delta_{\xi\alpha} & \delta_{\xi\beta} & \delta_{\xi\sigma} \\ \delta_{\lambda\alpha} & \delta_{\lambda\beta} & \delta_{\lambda\sigma} \\ \delta_{\eta\alpha} & \delta_{\eta\beta} & \delta_{\eta\sigma} \end{vmatrix} \right. \\ &\quad \left. - \delta_{\mu\sigma} \begin{vmatrix} \delta_{\xi\alpha} & \delta_{\xi\beta} & \delta_{\xi\rho} \\ \delta_{\lambda\alpha} & \delta_{\lambda\beta} & \delta_{\lambda\rho} \\ \delta_{\eta\alpha} & \delta_{\eta\beta} & \delta_{\eta\rho} \end{vmatrix} \right\} = \delta_{\mu\alpha}\varepsilon_{\nu\beta\rho\sigma} + \delta_{\mu\beta}\varepsilon_{\alpha\nu\rho\sigma} + \delta_{\mu\rho}\varepsilon_{\alpha\beta\nu\sigma} + \delta_{\mu\sigma}\varepsilon_{\alpha\beta\rho\nu}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

まとめて，

$$\delta_{ij}\varepsilon_{klm} = \delta_{ik}\varepsilon_{jlm} + \delta_{il}\varepsilon_{kjm} + \delta_{im}\varepsilon_{klj} \quad (2.38)$$

$$\delta_{\mu\nu}\varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} = \delta_{\mu\alpha}\varepsilon_{\nu\beta\rho\sigma} + \delta_{\mu\beta}\varepsilon_{\alpha\nu\rho\sigma} + \delta_{\mu\rho}\varepsilon_{\alpha\beta\nu\sigma} + \delta_{\mu\sigma}\varepsilon_{\alpha\beta\rho\nu}. \quad (2.39)$$

最後に，今までの公式の応用として，計算中によく現れる以下の公式を証明しておく：

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn}\varepsilon_{j pq} = \delta_{mp}\varepsilon_{knq} + \delta_{nq}\varepsilon_{kmp} - \delta_{mq}\varepsilon_{knp} - \delta_{np}\varepsilon_{kmq}. \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned} \therefore \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn}\varepsilon_{j pq} &= (\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km})\varepsilon_{j pq} = \delta_{kn}\varepsilon_{mpq} - \delta_{km}\varepsilon_{npq} \\ &= \delta_{nm}\varepsilon_{kpq} + \delta_{np}\varepsilon_{mkq} + \delta_{np}\varepsilon_{mpk} - (\delta_{mn}\varepsilon_{kpq} + \delta_{mp}\varepsilon_{nkq} + \delta_{mq}\varepsilon_{npk}) \\ &= \delta_{np}\varepsilon_{mkq} + \delta_{nq}\varepsilon_{mpk} - \delta_{mp}\varepsilon_{nkq} - \delta_{mq}\varepsilon_{npk} \\ &= \delta_{mp}\varepsilon_{knq} + \delta_{nq}\varepsilon_{kmp} - \delta_{mq}\varepsilon_{knp} - \delta_{np}\varepsilon_{kmq}. \quad \square \end{aligned} \quad (2.41)$$

ASD Yang-Mills のような分野を研究していると，ここに挙げた公式だけではカバーしきれないかもしれない．しかし，どのようなテンソルも，基本はクロネッカーのデルタと完全反対称テンソルであり，その基本的な計算方法は今述べたので，より複雑なテンソルに出くわしても，それらを計算することは可能であろう．

2.1.4 't Hooft のイェータシンボル

以下のように定義されたテンソルを't Hooft のイェータシンボルという：

$$\eta_{\mu\nu}^{i(\pm)} = \varepsilon_{i\mu\nu 4} \pm (\delta_{i\mu}\delta_{\nu 4} - \delta_{i\nu}\delta_{\mu 4}). \quad (2.42)$$

ただし， $i = 1, 2, 3$ ， $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$ で，これらをそれぞれアイソスピン添え字，空間添え字という．定義より明らかに，'t Hooft のイェータシンボルは空間添え字について反対称である：

$$\eta_{\mu\nu}^{i(\pm)} = -\eta_{\nu\mu}^{i(\pm)}. \quad (2.43)$$

さて，クロネッカーのデルタと完全反対称テンソルの公式より't Hooft のイェータシンボルの公式をいくつか導いてみる．まず，アイソスピン添え字が同じで空間添え字が異なる 2 つの't Hooft のイェータシンボルの積は，

$$\begin{aligned} \eta_{\mu\nu}^{i(\pm)}\eta_{\alpha\beta}^{i(\pm)} &= \{\varepsilon_{i\mu\nu 4} \pm (\delta_{i\mu}\delta_{\nu 4} - \delta_{i\nu}\delta_{\mu 4})\} \{\varepsilon_{i\alpha\beta 4} \pm (\delta_{i\alpha}\delta_{\beta 4} - \delta_{i\beta}\delta_{\alpha 4})\} \\ &= \delta_{\mu'\alpha'}\delta_{\nu'\beta'} - \delta_{\mu'\beta'}\delta_{\nu'\alpha'} \pm (\delta_{\beta 4}\varepsilon_{\alpha\mu\nu 4} - \delta_{\alpha 4}\varepsilon_{\beta\mu\nu 4} + \delta_{\nu 4}\varepsilon_{\mu\alpha\beta 4} - \delta_{\mu 4}\varepsilon_{\nu\alpha\beta 4}) \\ &\quad + \delta_{\mu'\alpha'}\delta_{\nu 4}\delta_{\beta 4} - \delta_{\mu'\beta'}\delta_{\nu 4}\delta_{\alpha 4} - \delta_{\nu'\alpha'}\delta_{\mu 4}\delta_{\beta 4} + \delta_{\nu'\beta'}\delta_{\mu 4}\delta_{\alpha 4} \\ &= \pm(\delta_{\mu 4}\varepsilon_{4\nu\alpha\beta} + \delta_{\nu 4}\varepsilon_{\mu 4\alpha\beta} + \delta_{\alpha 4}\varepsilon_{\mu\nu 4\beta} + \delta_{\beta 4}\varepsilon_{\mu\nu\alpha 4}) \\ &\quad + \delta_{\mu'\alpha'}\delta_{\nu\beta} - \delta_{\mu'\beta'}\delta_{\nu\alpha} - (\delta_{\nu\alpha}\delta_{\mu 4}\delta_{\beta 4} - \delta_{\nu 4}\delta_{\alpha 4}\delta_{\mu 4}\delta_{\beta 4}) + (\delta_{\nu\beta}\delta_{\mu 4}\delta_{\alpha 4} - \delta_{\nu 4}\delta_{\beta 4}\delta_{\mu 4}\delta_{\alpha 4}) \\ &= \pm\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} + \delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta} - \delta_{\mu\beta}\delta_{\nu\alpha} \end{aligned} \quad (2.44)$$

となる．ここで異なる脚を揃えれば，容易に

$$\eta_{\mu\nu}^{i(\pm)}\eta_{\mu\alpha}^{i(\pm)} = 3\delta_{\nu\alpha}, \quad \eta_{\mu\nu}^{i(\pm)}\eta_{\mu\nu}^{i(\pm)} = 12 \quad (2.45)$$

が得られる．次に，空間添え字が2つとも同じでアイソスピン添え字が異なる場合は，

$$\begin{aligned} \eta_{\mu\nu}^{i(\pm)}\eta_{\mu\nu}^{j(\pm)} &= \{\varepsilon_{i\mu\nu 4} \pm (\delta_{i\mu}\delta_{\nu 4} - \delta_{i\nu}\delta_{\mu 4})\} \{\varepsilon_{j\mu\nu 4} \pm (\delta_{j\mu}\delta_{\nu 4} - \delta_{j\nu}\delta_{\mu 4})\} \\ &= \varepsilon_{i\mu'\nu'}\varepsilon_{j\mu'\nu'} + \delta_{ij}\delta_{44} + \delta_{ij}\delta_{44} = 2\delta_{ij} + 2\delta_{ij} = 4\delta_{ij} \end{aligned} \quad (2.46)$$

となる．そして，空間添え字についての完全反対称テンソルとの積で脚が1つだけ一致する場合は，

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\eta_{\rho\beta}^{i(\pm)} &= \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \{\varepsilon_{i\rho\beta 4} \pm (\delta_{i\rho}\delta_{\beta 4} - \delta_{i\beta}\delta_{\rho 4})\} \\ &= - \begin{vmatrix} \delta_{\mu i} & \delta_{\mu\rho} & \delta_{\mu 4} \\ \delta_{\nu i} & \delta_{\nu\rho} & \delta_{\nu 4} \\ \delta_{\alpha i} & \delta_{\alpha\rho} & \delta_{\alpha 4} \end{vmatrix} \pm (\delta_{i\rho}\varepsilon_{\mu\nu\alpha 4} - \delta_{\rho 4}\varepsilon_{\mu\nu\alpha i}) \\ &= \delta_{\mu\rho}(\delta_{\nu i}\delta_{\alpha 4} - \delta_{\nu 4}\delta_{\alpha i}) + \delta_{\nu\rho}(\delta_{\mu 4}\delta_{\alpha i} - \delta_{\mu i}\delta_{\alpha 4}) + \delta_{\alpha\rho}(\delta_{\mu i}\delta_{\nu 4} - \delta_{\mu 4}\delta_{\nu i}) \\ &\quad \pm \{\delta_{\rho'\mu'}\varepsilon_{i\nu\alpha 4} + \delta_{\rho'\nu'}\varepsilon_{\mu i\alpha 4} + \delta_{\rho'\alpha'}\varepsilon_{\mu\nu i 4} + \delta_{\rho' 4}\varepsilon_{\mu\nu\alpha i} \\ &\quad - \delta_{\rho 4}(\delta_{\mu 4}\varepsilon_{4\nu\alpha i} + \delta_{\nu 4}\varepsilon_{\mu 4\alpha i} + \delta_{\alpha 4}\varepsilon_{\mu\nu 4 i} + \delta_{i 4}\varepsilon_{\mu\nu\alpha 4})\} \\ &= \delta_{\mu\rho}(\pm\varepsilon_{i\nu\alpha 4} + \delta_{i\nu}\delta_{\alpha 4} - \delta_{i\alpha}\delta_{\nu 4}) + \delta_{\nu\rho}(\pm\varepsilon_{i\alpha\mu 4} + \delta_{i\alpha}\delta_{\mu 4} - \delta_{i\mu}\delta_{\alpha 4}) \\ &\quad + \delta_{\alpha\rho}(\pm\varepsilon_{i\mu\nu 4} + \delta_{i\mu}\delta_{\nu 4} - \delta_{i\nu}\delta_{\mu 4}) = \pm(\delta_{\mu\rho}\eta_{\nu\alpha}^{i(\pm)} + \delta_{\nu\rho}\eta_{\alpha\mu}^{i(\pm)} + \delta_{\alpha\rho}\eta_{\mu\nu}^{i(\pm)}) \end{aligned} \quad (2.47)$$

となる．ここで，もう1つの添え字も揃えれば

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\eta_{\alpha\beta}^{i(\pm)} = \pm 2\eta_{\mu\nu}^{i(\pm)} \quad (2.48)$$

が得られる．最後に，積にアイソスピン添え字についての完全反対称テンソルが掛かる場合は，

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk}\eta_{\mu\nu}^{i(\pm)}\eta_{\alpha\beta}^{j(\pm)} &= \varepsilon_{ijk} \{\varepsilon_{i\mu'\nu'} \pm (\delta_{i\mu}\delta_{\nu 4} - \delta_{i\nu}\delta_{\mu 4})\} \{\varepsilon_{j\alpha'\beta'} \pm (\delta_{j\alpha}\delta_{\beta 4} - \delta_{j\beta}\delta_{\alpha 4})\} \\ &= \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{i\mu'\nu'}\varepsilon_{j\alpha'\beta'} \pm \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{i\mu'\nu'}(\delta_{j\alpha}\delta_{\beta 4} - \delta_{j\beta}\delta_{\alpha 4}) \pm \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{j\alpha'\beta'}(\delta_{i\mu}\delta_{\nu 4} - \delta_{i\nu}\delta_{\mu 4}) \\ &\quad + \varepsilon_{ijk}(\delta_{i\mu}\delta_{\nu 4} - \delta_{i\nu}\delta_{\mu 4})(\delta_{j\alpha}\delta_{\beta 4} - \delta_{j\beta}\delta_{\alpha 4}) \\ &= \delta_{\mu'\alpha'}\varepsilon_{k\nu'\beta'} + \delta_{\nu'\beta'}\varepsilon_{k\mu'\alpha'} - \delta_{\mu'\beta'}\varepsilon_{k\nu'\alpha'} - \delta_{\nu'\alpha'}\varepsilon_{k\mu'\beta'} \\ &\quad \pm \varepsilon_{i\alpha'k}\varepsilon_{i\mu'\nu'}\delta_{\beta 4} \pm \varepsilon_{i\beta'k}\varepsilon_{i\mu'\nu'}\delta_{\alpha 4} \pm \varepsilon_{\mu'jk}\varepsilon_{j\alpha'\beta'}\delta_{\nu 4} \pm \varepsilon_{\nu'jk}\varepsilon_{j\alpha'\beta'}\delta_{\mu 4} \\ &\quad + \varepsilon_{\mu'\alpha'k}\delta_{\nu 4}\delta_{\beta 4} - \varepsilon_{\mu'\beta'k}\delta_{\nu 4}\delta_{\alpha 4} - \varepsilon_{\nu'\alpha'k}\delta_{\mu 4}\delta_{\beta 4} + \varepsilon_{\nu'\beta'k}\delta_{\mu 4}\delta_{\alpha 4} \\ &= \delta_{\mu\alpha}(\varepsilon_{k\nu\beta 4} \pm \delta_{k\nu}\delta_{\beta 4} \mp \delta_{k\beta}\delta_{\nu 4}) + \delta_{\nu\beta}(\varepsilon_{k\mu\alpha 4} \pm \delta_{k\mu}\delta_{\alpha 4} \mp \delta_{k\alpha}\delta_{\mu 4}) \\ &\quad - \delta_{\mu\beta}(\varepsilon_{k\nu\alpha 4} \pm \delta_{k\nu}\delta_{\alpha 4} \mp \delta_{k\alpha}\delta_{\nu 4}) - \delta_{\nu\alpha}(\varepsilon_{k\mu\beta 4} \pm \delta_{k\mu}\delta_{\beta 4} \mp \delta_{k\beta}\delta_{\mu 4}) \\ &= \delta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta}^{k(\pm)} + \delta_{\nu\beta}\eta_{\mu\alpha}^{k(\pm)} - \delta_{\mu\beta}\eta_{\nu\alpha}^{k(\pm)} - \delta_{\nu\alpha}\eta_{\mu\beta}^{k(\pm)} \end{aligned} \quad (2.49)$$

となり，さらに，添え字を揃えて

$$\varepsilon_{ijk}\eta_{\mu\nu}^{i(\pm)}\eta_{\mu\alpha}^{j(\pm)} = 2\eta_{\nu\rho}^{k(\pm)} \quad (2.50)$$

を得る．'t Hooft のイェータシンボルについての公式をまとめておく：

$$\eta_{\mu\nu}^{i(\pm)} = -\eta_{\nu\mu}^{i(\pm)}, \quad (\text{空間添え字について反対称}) \quad (2.51)$$

$$\eta_{\mu\nu}^{i(\pm)} \eta_{\alpha\beta}^{i(\pm)} = \pm \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} + \delta_{\mu\alpha} \delta_{\nu\beta} - \delta_{\mu\beta} \delta_{\nu\alpha}, \quad (2.52)$$

$$\eta_{\mu\nu}^{i(\pm)} \eta_{\mu\nu}^{j(\pm)} = 4\delta_{ij}, \quad (2.53)$$

$$\eta_{\mu\nu}^{i(\pm)} \eta_{\mu\alpha}^{i(\pm)} = 3\delta_{\nu\alpha}, \quad (2.54)$$

$$\eta_{\mu\nu}^{i(\pm)} \eta_{\mu\nu}^{i(\pm)} = 12, \quad (2.55)$$

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \eta_{\rho\beta}^{i(\pm)} = \pm (\delta_{\mu\rho} \eta_{\nu\alpha}^{i(\pm)} + \delta_{\nu\rho} \eta_{\alpha\mu}^{i(\pm)} + \delta_{\alpha\rho} \eta_{\mu\nu}^{i(\pm)}), \quad (2.56)$$

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \eta_{\alpha\beta}^{i(\pm)} = \pm 2\eta_{\mu\nu}^{i(\pm)}, \quad ((A)SD) \quad (2.57)$$

$$\varepsilon_{ijk} \eta_{\mu\nu}^{i(\pm)} \eta_{\alpha\beta}^{j(\pm)} = \delta_{\mu\alpha} \eta_{\nu\beta}^{k(\pm)} + \delta_{\nu\beta} \eta_{\mu\alpha}^{k(\pm)} - \delta_{\mu\beta} \eta_{\nu\alpha}^{k(\pm)} - \delta_{\nu\alpha} \eta_{\mu\beta}^{k(\pm)}, \quad (2.58)$$

$$\varepsilon_{ijk} \eta_{\mu\nu}^{i(\pm)} \eta_{\mu\alpha}^{j(\pm)} = 2\eta_{\nu\rho}^{k(\pm)}. \quad (2.59)$$

2.1.5 トレース

行列 $A = (a_{ij})$ に対し，

$$\text{tr } A = \sum_i a_{ii} \quad (2.60)$$

を A のトレース (trace) またはシュプール (Spur, $\text{sp } A$) という．定義より明らかに，同じ次数の任意の正方行列 A, B ，任意の定数 c に対し

$$\text{tr}(A + B) = \text{tr } A + \text{tr } B, \quad \text{tr}(cA) = c \text{tr } A \quad (2.61)$$

が成り立つ．また，2つの行列 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ の積について

$$\text{tr}(AB) = \text{tr} \left(\sum_k a_{ik} b_{kj} \right) = \sum_{i,k} a_{ik} b_{ki} = \sum_{i,k} b_{ik} a_{ki} = \text{tr} \left(\sum_k b_{ik} a_{kj} \right) = \text{tr}(BA) \quad (2.62)$$

となるので，トレースの中では2つの行列の積は可換である．ところが，3つの行列 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$ の積については，

$$\begin{aligned} \text{tr}(ABC) &= \text{tr} \left(\sum_{k,\ell} a_{ik} b_{k\ell} c_{\ell j} \right) = \sum_{i,k} a_{ik} b_{k\ell} c_{\ell i} = \sum_{i,k} b_{ik} c_{k\ell} a_{\ell i} = \text{tr} \left(\sum_{k,\ell} b_{ik} c_{k\ell} a_{\ell i} \right) \\ &= \text{tr}(BCA) \end{aligned} \quad (2.63)$$

となり，可換ではなく循環する．この性質を循環律 (cyclic property) という．トレースの性質をまとめておく：

$$\text{tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \text{tr } A + \mu \text{tr } B, \quad (\text{線形性}) \quad (2.64)$$

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA) \quad (\text{可換性}), \quad (2.65)$$

$$\text{tr}(A_1 A_2 \cdots A_n) = \text{tr}(A_2 \cdots A_n A_1) = \cdots, \quad (\text{循環律}) \quad (2.66)$$

$$\text{tr}(UAU^{-1}) = \text{tr} A \quad (\text{相似変換に対して不変}), \quad (2.67)$$

$$\text{tr} \mathbf{1}_n = n. \quad (2.68)$$

ただし, $A, B, A_1, A_2, \dots, A_n$ は次数が同じ任意の正方行列, λ, μ は任意の定数, $\mathbf{1}_n$ は n 次の単位行列である.

2.1.6 指数行列と path ordered exponential

n 次の正方行列 A に対し,

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = \mathbf{1}_n + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3!} + \dots \quad (2.69)$$

を A の指数行列という. 定義より明らかに, n 次正方行列の指数行列は n 次正方行列である. また, 指数関数と同様に, その極限は任意の行列に対してそれぞれ一意に存在することが知られている.

指数関数と同様に, 2 つの n 次正方行列 A, B に対し,

$$e^A e^B = e^{A+B} \quad (2.70)$$

が成り立つ. ここで, $n \geq 2$ のとき, 一般には e^A と e^B は可換とは限らないから, 一般には $e^{A+B} \neq e^{B+A}$ である. e^A と e^B が可換であるときは, もちろん $e^{A+B} = e^{B+A}$ である.

空間内の任意の点 x に, 1 つの行列 $A_\mu(x)$ がそれぞれ一意に定められているとき, 空間内の点 P_0 から点 P_n に至るある経路 C に対し, C 上に点 P_1, P_2, \dots, P_{n-1} を順番にとってゆき, $\overline{P_{i-1}P_i}$ 上の任意の点を x_i とし, $|P_{i-1}P_i| = \Delta x_i$ としたとき, 極限

$$\mathcal{P} \exp \left(\int_c dx_\mu A_\mu(x) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left(\sum_{i=1}^n A_\mu(x_i) \Delta x_i \right) \quad (2.71)$$

は一意に決まる. これを, $A_\mu(x)$ の C 上での path ordered exponential という. 経路上の各点での $A_\mu(x)$ は, 一般には可換とは限らないから, path ordered exponential は経路だけでなくその経路を動く順序にもよる. (2.71) の \mathcal{P} は, その順序を気にしていることを表す. 経路上の各点での $A_\mu(x)$ がそれぞれ互いに可換なときは, path ordered exponential は普通の積分になり, \mathcal{P} が外れる. また, 証明は省略するが

$$\partial_\mu \mathcal{P} \exp \left(\int_c dx_\nu A_\nu(x) \right) = \mathcal{P} \exp \left(\int_c dx_\nu A_\nu(x) \right) A_\mu(x) \quad (2.72)$$

が成り立つ (後ろに降りてくることに注意).

2.1.7 Pauli 行列

以下の3つの行列を Pauli 行列という:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.73)$$

(τ で書く場合もある) . ここで , Pauli 行列の積を計算してみると ,

$$\begin{aligned}\sigma_1\sigma_2 &= -\sigma_2\sigma_1 = i\sigma_3, & \sigma_2\sigma_3 &= -\sigma_3\sigma_2 = i\sigma_1, & \sigma_3\sigma_1 &= -\sigma_1\sigma_3 = i\sigma_2, \\ \sigma_1\sigma_1 &= \sigma_2\sigma_2 = \sigma_3\sigma_3 = \mathbf{1}_2\end{aligned}\quad (2.74)$$

(ただし , $\mathbf{1}_2$ は 2 次の単位行列 . 読者自身 1 度は実際に計算してみるように) となるが , これらの関係は , クロネッカーのデルタと完全反対称テンソルを用いて以下のようにまとめられる :

$$\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij}\mathbf{1}_2 + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k. \quad (2.75)$$

ただし , $i, j, k = 1, 2, 3$. これは , Pauli 行列を含んだ計算において最も重要な公式である . Pauli 行列の性質と公式をまとめておく :

$$\sigma_i^\dagger = \sigma_i, \quad (\text{Pauli 行列はエルミート}) \quad (2.76)$$

$$\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij}\mathbf{1}_2 + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k, \quad (\text{Pauli 行列の積}) \quad (2.77)$$

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k, \quad (\text{交換関係}) \quad (2.78)$$

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = \{\sigma_j, \sigma_i\} = 2\delta_{ij}\mathbf{1}_2, \quad (\text{反交換関係}) \quad (2.79)$$

$$\text{tr } \sigma_i = 0, \quad (2.80)$$

$$\text{tr } (\sigma_i\sigma_j) = 2\delta_{ij}, \quad (2.81)$$

$$\text{tr } (\sigma_i\sigma_j\sigma_k) = 2i\varepsilon_{ijk}. \quad (2.82)$$

2.1.8 't Hooft 行列

次のように定義された行列を't Hooft 行列という :

$$\eta_{\mu\nu}^{(\pm)} = \eta_{\mu\nu}^{i(\pm)}\sigma_i. \quad (2.83)$$

't Hooft 行列についての公式は , 't Hooft のイェータシンボルと Pauli 行列の性質から容易に導ける . 't Hooft 行列についての性質と公式をまとめておく :

$$\eta_{\mu\nu}^{(\pm)} = -\eta_{\nu\mu}^{(\pm)}, \quad (2.84)$$

$$\eta_{\mu\nu}^{(\pm)\dagger} = \eta_{\mu\nu}^{(\pm)}, \quad (2.85)$$

$$\begin{aligned}\eta_{\mu\nu}^{(\pm)}\eta_{\alpha\beta}^{(\pm)} &= (\pm\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} + \delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta} - \delta_{\mu\beta}\delta_{\nu\alpha})\mathbf{1}_2 \\ &\quad + i\delta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta}^{(\pm)} + i\delta_{\nu\beta}\eta_{\mu\alpha}^{(\pm)} - i\delta_{\mu\beta}\eta_{\nu\alpha}^{(\pm)} - i\delta_{\nu\alpha}\eta_{\mu\beta}^{(\pm)},\end{aligned}\quad (2.86)$$

$$\eta_{\mu\nu}^{(\pm)}\eta_{\mu\alpha}^{(\pm)} = 3\delta_{\nu\alpha}\mathbf{1}_2 + 2i\eta_{\nu\alpha}^{(\pm)}, \quad (2.87)$$

$$\eta_{\mu\nu}^{(\pm)}\eta_{\mu\nu}^{(\pm)} = 12 \cdot \mathbf{1}_2, \quad (2.88)$$

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\eta_{\rho\beta}^{(\pm)} = \pm(\delta_{\mu\rho}\eta_{\nu\alpha}^{(\pm)} + \delta_{\nu\rho}\eta_{\alpha\mu}^{(\pm)} + \delta_{\alpha\rho}\eta_{\mu\nu}^{(\pm)}), \quad (2.89)$$

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\eta_{\alpha\beta}^{(\pm)} = \pm 2\eta_{\mu\nu}^{(\pm)}, \quad (2.90)$$

$$[\eta_{\mu\nu}^{(\pm)}\eta_{\alpha\beta}^{(\pm)}] = 2i(\delta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta}^{(\pm)} + \delta_{\nu\beta}\eta_{\mu\alpha}^{(\pm)} - \delta_{\mu\beta}\eta_{\nu\alpha}^{(\pm)} - \delta_{\nu\alpha}\eta_{\mu\beta}^{(\pm)}), \quad (2.91)$$

$$\text{tr } \eta_{\mu\nu}^{(\pm)} = 0, \quad (2.92)$$

$$\text{tr } (\eta_{\mu\nu}^{(\pm)} \eta_{\alpha\beta}^{(\pm)}) = \pm 2\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} + 2\delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta} - 2\delta_{\mu\beta}\delta_{\nu\alpha}, \quad (2.93)$$

$$\text{tr } (\eta_{\mu\nu}^{(\pm)} \eta_{\mu\alpha}^{(\pm)}) = 6\delta_{\nu\alpha}, \quad (2.94)$$

$$\text{tr } (\eta_{\mu\nu}^{(\pm)} \eta_{\mu\nu}^{(\pm)}) = 24. \quad (2.95)$$

2.1.9 4元数

次のように定義された行列を4元数の2次行列表現における基底行列という：

$$e_\mu = \delta_{\mu 4} \mathbf{1}_2 - i\delta_{\mu j} \sigma_j. \quad (2.96)$$

また $q_\mu \in \mathbb{R}^4$ に対し

$$q = q_\mu e_\mu = q_4 \mathbf{1}_2 - iq_j \sigma_j = \begin{pmatrix} q_4 - iq_3 & -q_2 - iq_1 \\ q_2 - iq_1 & q_4 + iq_3 \end{pmatrix} \quad (2.97)$$

という形の行列を4元数 (quaternion) という。4元数の2次行列表現における基底行列は、定義により以下を満たす：

$$e_4 = \mathbf{1}_2, \quad e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = -\mathbf{1}_2. \quad (2.98)$$

これより、4元数 $q = q_\mu e_\mu$ に対し、 $q_4 e_4$ を q の実成分、 $q_j e_j$ を q の純虚数成分という（この意味で、4元数は複素数の拡張である）。また、実成分しか持たない4元数を Real な4元数という。Real な4元数は、単に単位行列 $\mathbf{1}_2$ の実数倍である。

4元数の2次行列表現における基底行列の性質をしてみる。まず、Pauli 行列はエルミートなので、

$$e_\mu^\dagger = \delta_{\mu 4} \mathbf{1}_2 + i\delta_{\mu j} \sigma_j \quad (2.99)$$

である。すると、

$$\begin{aligned} e_\mu^\dagger e_\nu &= (\delta_{4\mu} \mathbf{1}_2 + i\delta_{\mu i} \sigma_i)(\delta_{4\nu} \mathbf{1}_2 - i\delta_{\nu j} \sigma_j) \\ &= \delta_{4\mu} \delta_{4\nu} \mathbf{1}_2 - i(\delta_{4\mu} \delta_{\nu k} - \delta_{4\nu} \delta_{\mu k}) \sigma_k + \delta_{\mu i} \delta_{\nu j} (\delta_{ij} \mathbf{1}_2 + i\varepsilon_{ijk} \sigma_k) \\ &= \delta_{4\mu} \delta_{4\nu} \mathbf{1}_2 + \delta_{\mu' \nu'} \mathbf{1}_2 + i(\varepsilon_{\mu\nu k} + \delta_{k\mu} \delta_{\nu 4} - \delta_{k\nu} \delta_{\mu 4}) \sigma_k \\ &= \delta_{\mu\nu} \mathbf{1}_2 + i\eta_{\mu\nu}^{k(+)} \sigma_k = \delta_{\mu\nu} \mathbf{1}_2 + i\eta_{\mu\nu}^{(+)}, \end{aligned} \quad (2.100)$$

$$\begin{aligned} e_\mu e_\nu^\dagger &= (\delta_{4\mu} \mathbf{1}_2 - i\delta_{\mu i} \sigma_i)(\delta_{4\nu} \mathbf{1}_2 + i\delta_{\nu j} \sigma_j) \\ &= \delta_{4\mu} \delta_{4\nu} \mathbf{1}_2 + i(\delta_{4\mu} \delta_{\nu k} - \delta_{4\nu} \delta_{\mu k}) \sigma_k + \delta_{\mu i} \delta_{\nu j} (\delta_{ij} \mathbf{1}_2 + i\varepsilon_{ijk} \sigma_k) \\ &= \delta_{4\mu} \delta_{4\nu} \mathbf{1}_2 + \delta_{\mu' \nu'} \mathbf{1}_2 + i(\varepsilon_{\mu\nu k} - \delta_{k\mu} \delta_{\nu 4} + \delta_{k\nu} \delta_{\mu 4}) \sigma_k \\ &= \delta_{\mu\nu} \mathbf{1}_2 + i\eta_{\mu\nu}^{k(-)} \sigma_k = \delta_{\mu\nu} \mathbf{1}_2 + i\eta_{\mu\nu}^{(-)} \end{aligned} \quad (2.101)$$

となるのがわかる。また、これより

$$e_\mu^\dagger e_\nu - e_\nu^\dagger e_\mu = 2i\eta_{\mu\nu}^{(+)}, \quad e_\mu e_\nu^\dagger - e_\nu e_\mu^\dagger = 2i\eta_{\mu\nu}^{(-)} \quad (2.102)$$

であることもわかる．最後に，今導いた公式により，4元数 $q = q_\mu e_\mu$ とそのエルミート共役 $q^\dagger = q_\mu e_\mu^\dagger$ の積を計算してみると，'t Hooft 行列の反対称性より

$$q^\dagger q = qq^\dagger = q_\mu q_\nu \delta_{\mu\nu} \mathbf{1}_2 = |q|^2 \mathbf{1}_2, \quad (2.103)$$

つまり，4元数の絶対値は Real な4元数であることがわかる．

2.2 リー群とリー代数

行列は写像の一種であるから群を成す．場の理論におけるゲージ変換は，そのような群を成す行列によって行われる．

2.2.1 リー群とリー代数

N 次の実 (複素) 正方行列のうち，その行列式が 0 でないもの全体の集合を N 次実 (複素) 一般線型変換群 (general linear transformation group) といい， $GL(N)$ と書く． $GL(N)$ は，その名の通り，行列の積を演算として群を成す．

∴ まず，結合法則は明らか．次に， N 次の単位行列 1_N は，

$$\det 1_N = 1 \neq 0 \quad \therefore 1_N \in GL(N) \quad (2.104)$$

であり，これは明らかに $GL(N)$ の単位元である．それから， $A \in GL(N)$ ならば， $\det A \neq 0$ より，その逆元 A^{-1} が存在し，

$$\det A^{-1} = (\det A)^{-1} \neq 0 \quad \therefore A^{-1} \in GL(N) \quad (2.105)$$

であり，これは明らかに A の逆元である．最後に， $A, B \in GL(N)$ ならば， $\det A, \det B \neq 0$ より，

$$\det (AB) = \det A \cdot \det B \neq 0 \quad \therefore AB \in GL(N). \quad \square \quad (2.106)$$

また，後に見るように， $GL(N)$ の部分集合もまた群となっている場合がある．このような， $GL(N)$ とその部分群をリー群 (Lie group) という．リー群の種類と性質について，表 2.1 にまとめておく．

リー群 G が与えられたとき，任意の実数パラメーター t に対し，

$$e^{tX} \in G \quad (2.107)$$

を満たす X 全体の集合を G のリー代数 (Lie algebra) といい， G を表す記号を小文字やドイツ飾り文字に変えた記号で表す．ここで，リー群 G に対し，そのリー代数を \mathcal{G} とすると，任意の行列 X, Y ，スカラー λ, μ に対し

$$\begin{aligned} e^{tX}, e^{tY} \in G &\Rightarrow e^{(\lambda t)X} e^{(\mu t)Y} = e^{t(\lambda X + \mu Y)} \in G \\ \iff X, Y \in \mathcal{G} &\Rightarrow \lambda X + \mu Y \in \mathcal{G}, \end{aligned} \quad (2.108)$$

すなわち，リー代数は線型空間を成している．これより，リー代数はいくつかの生成元 (generator) で張られることになる．

表 2.1: リー群とリー代数

群	呼び方	群元 g
$GL(n, \mathbf{C})$	複素一般線形変換群	複素正則行列
$GL(n, \mathbf{R})$	実一般線形変換群	実正則行列
$SL(n, \mathbf{C})$	複素特殊線形変換群	$\det g = 1$ の複素正則行列
$SL(n, \mathbf{R})$	実特殊線形変換群	$\det g = 1$ の実正則行列
$U(n)$	ユニタリー群	ユニタリー行列
$SU(n)$	特殊ユニタリー群	$\det g = 1$ のユニタリー行列
$O(n)$	直交群	直交行列
$SO(n)$	回転群	$\det g = 1$ の直交行列
$Sp(n, \mathbf{C})$	シンプレクティック群	シンプレクティック行列

2.2.2 $SU(2)$

行列式が1でない N 次ユニタリー行列, すなわち,

$$\det U = 1, \quad U^\dagger = U^{-1} \quad (2.109)$$

を満たす N 次正方行列 U 全体の集合を N 次の特殊ユニタリー群 (special unitary group) といい, $SU(N)$ と書く. $SU(N)$ はリー群である.

\therefore まず, 単位行列 1_N はユニタリーかつ行列式が1だから, $1_N \in SU(N)$. 次に, $U, U' \in SU(N)$ ならば,

$$\begin{aligned} (UU')^\dagger &= (U')^\dagger U^\dagger = (U')^{-1} U^{-1} = (UU')^{-1}, \\ \det(UU') &= \det U \cdot \det U' = 1 \cdot 1 = 1 \quad \therefore UU' \in SU(N). \end{aligned} \quad (2.110)$$

最後に, $U \in SU(N)$ ならば,

$$(U^{-1})^\dagger = (U^\dagger)^{-1} = (U^{-1})^{-1}, \quad \det(U^{-1}) = \det U = 1 \quad \therefore U^{-1} \in SU(N). \quad \square \quad (2.111)$$

これより, 任意の $U \in SU(N)$ に対し, 常にその逆行列 U^{-1} を仮定できる. それゆえ, 任意の空間上に定義された $U(x) \in SU(N)$ に対し

$$\partial_\mu(UU^{-1}) = (\partial_\mu U)U^{-1} + U(\partial_\mu U^{-1}) = 0 \quad (2.112)$$

が成り立つ (計算でよく用いるので注意).

$SU(N)$ のうちの $SU(2)$ は, 4次元 Euclidean Yang-Mills system におけるゲージ変換として用いられるので, これについて詳しく見ておく. まず, 任意の2次の複素正方行列 U は, 4つの複素数のパラメーター, すなわち, 8つの実数のパラメーター a, b, c, d, e, f, g, h により

$$U = \begin{pmatrix} a + ib & c + id \\ e + if & g + ih \end{pmatrix} \quad (2.113)$$

と表される．ここで， $SU(2)$ の元であるための条件 $U^\dagger = U^{-1}$, $\det U = 1$ を課すと

$$U^\dagger = U^{-1} \iff \begin{pmatrix} a - ib & e - if \\ c - id & g - ih \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g + ih & -c - id \\ -e - if & a + ib \end{pmatrix} \quad (2.114)$$

より， $e = -c$, $f = d$, $g = a$, $h = -b$ であることがわかる．それゆえ， $SU(2)$ の元は一般に

$$U = \begin{pmatrix} a_4 + ia_3 & a_2 + ia_1 \\ -a_2 + ia_1 & a_4 - ia_3 \end{pmatrix} = a_\mu e_\mu \quad (2.115)$$

と書ける．ただし， e_μ は4元数の2次行列表現における基底行列であり， a_μ は実数のパラメーターである．ここで， a_μ には

$$a_\mu a_\mu = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = 1 \quad (2.116)$$

という条件があるので，自由なパラメーターは3つであり，それらのパラメーター空間は4次元空間における3次元球表面と見なすことができる．

次に， $SU(2)$ の代数，すなわち， $\mathfrak{su}(2)$ について考えてみる¹．まず， $\mathfrak{su}(2)$ の元が2次の行列でなければならないのは明らかである．次に，任意の $X = (x_{ij}) \in \mathfrak{su}(2)$ に対し， $t \ll 1$ の場合を考えると，

$$\det e^{tX} \simeq \det(1_2 + tX) = \det \begin{pmatrix} 1 + tx_{11} & tx_{12} \\ tx_{21} & 1 + tx_{22} \end{pmatrix} \simeq 1 + (x_{11} + x_{22})t = 1$$

$$\therefore \text{tr } X = x_{11} + x_{22} = 0, \quad (2.117)$$

すなわち， $\mathfrak{su}(2)$ の元はトレースが0でなければならない．それから，任意の $X \in \mathfrak{su}(2)$ に対し，

$$(e^{tX})^\dagger = \left\{ 1_2 + tX + \frac{(tX)^2}{2} + \frac{(tX)^3}{3!} + \dots \right\}^\dagger = \left\{ 1_2 + tX^\dagger + \frac{(tX^\dagger)^2}{2} + \frac{(tX^\dagger)^3}{3!} + \dots \right\}$$

$$= e^{tX^\dagger} = (e^{tX})^{-1} = e^{-tX} \quad \therefore X^\dagger = -X \quad (2.118)$$

すなわち， $\mathfrak{su}(2)$ の元は反エルミート行列でなければならない．まとめると， $\mathfrak{su}(2)$ の元はトレースが0の2次反エルミート行列でなければならない．逆に，先と同様に，任意の2次の複素正方行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} a + ib & c + id \\ e + if & g + ih \end{pmatrix} \quad (2.119)$$

と置き，これに反エルミート行列であるための条件を課すと，

$$A^\dagger = -A \iff \begin{pmatrix} a - ib & e - if \\ c - id & g - ih \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a - ib & -c - id \\ -e - if & -g - ih \end{pmatrix} \quad (2.120)$$

¹ $\mathfrak{su}(2)$ の元は反エルミートであるが，物理量はエルミートでなければならない．それゆえ，本来物理でリー群を用いるときは，リー代数の元1つ1つに虚数単位を掛けて，虚数単位を除いたものを用いる．しかし，そのようにすると式中に虚数単位が入り込んでしまうので， $\mathfrak{su}(2)$ の元は反エルミートのままで扱い，物理量として扱いたいときのみ虚数単位をつけるのが習慣である．

より, $a = 0, g = 0, e = -c, f = d$ となり, さらにトレースが0となるための条件を課すと, $h = -b$ となることからわかる. それゆえ, トレーシング0の2次反エルミート行列は一般に

$$\begin{pmatrix} ia_3 & a_2 + ia_1 \\ -a_2 + ia_1 & -ia_3 \end{pmatrix} = ia_i \sigma_i \quad (2.121)$$

と書ける. ただし, σ_i は Pauli 行列であり, a_i は実数のパラメーターである. ここで, リー代数が線型空間を成していることと, $e^{i\sigma_1 t}, e^{i\sigma_2 t}, e^{i\sigma_3 t} \in \text{SU}(2)$ に対し,

$$\begin{aligned} e^{i\sigma_1 t} = \exp \begin{pmatrix} 0 & it \\ it & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & it \\ it & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -t^2 & 0 \\ 0 & -t^2 \end{pmatrix} \\ &+ \frac{1}{3!} \begin{pmatrix} 0 & -it^3 \\ -it^3 & 0 \end{pmatrix} + \cdots = \begin{pmatrix} \cos t & i \sin t \\ i \sin t & \cos t \end{pmatrix} \in \text{SU}(2), \end{aligned} \quad (2.122)$$

$$\begin{aligned} e^{i\sigma_2 t} = \exp \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -t^2 & 0 \\ 0 & -t^2 \end{pmatrix} \\ &+ \frac{1}{3!} \begin{pmatrix} 0 & -t^3 \\ t^3 & 0 \end{pmatrix} + \cdots = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \in \text{SU}(2), \end{aligned} \quad (2.123)$$

$$\begin{aligned} e^{i\sigma_3 t} = \exp \begin{pmatrix} it & 0 \\ 0 & -it \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} it & 0 \\ 0 & -it \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -t^2 & 0 \\ 0 & -t^2 \end{pmatrix} \\ &+ \frac{1}{3!} \begin{pmatrix} -it^3 & 0 \\ 0 & it^3 \end{pmatrix} + \cdots = \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} \in \text{SU}(2). \end{aligned} \quad (2.124)$$

であることより, トレーシング0の2次反エルミート行列は $\text{su}(2)$ の元であることがわかる. すなわち, $\text{su}(2)$ はトレースが0の2次反エルミート行列全体の集合であり, その生成元は Pauli 行列 (4元数の虚数単位) である.

2.3 4次元ユークリッド空間

本論で主に扱う4次元 Euclidean Yang-Mills system は4次元ユークリッド空間内で定義される. 4次元ユークリッド空間は, 変数の数はミンコフスキー空間と同じであるが, 計量が異なり, すべて空間変数と見なされる. また, 4次元ユークリッド空間では, 双対という量が重要な意味を持つ.

2.3.1 4次元ユークリッド空間

4つの実数の組全体の集合 R^4 に、計量

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & O \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ O & & & 1 \end{pmatrix} \quad (2.125)$$

を定めた空間を4次元ユークリッド空間 (4-dimensional Euclidean space) という。この計量において、任意のテンソル T_μ に対し

$$T_\mu = g_{\mu\nu} T^\nu = \delta_{\mu\nu} T^\nu = T^\mu \quad (2.126)$$

であるから、4次元ユークリッド空間では添え字の上下に区別がない。それゆえ、和は、単に添え字が2つそろったときにとるとする。また、定義より、この空間の座標を $x_\mu = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ とすれば、直交変換 $T = {}^t(T^{-1}) \in O(4)$ に対し、内積

$$x_\mu x_\mu = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \quad (2.127)$$

が不変量となる：

$$\because x_\mu x_\mu \mapsto (T)_{\mu\nu} x_\nu (T)_{\mu\sigma} x_\sigma = (T^{-1})_{\nu\mu} (T)_{\mu\sigma} x_\nu x_\sigma = (\mathbf{1}_4)_{\nu\sigma} x_\nu x_\sigma = \delta_{\nu\sigma} x_\nu x_\sigma = x_\nu x_\nu. \quad \square \quad (2.128)$$

2.3.2 4次元球座標

4次元ユークリッド空間におけるデカルト座標 (x_1, x_2, x_3, x_4) に対し

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \alpha_1, \\ x_2 &= r \sin \alpha_1 \cos \alpha_2, \\ x_3 &= r \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_3, \\ x_4 &= r \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 \end{aligned} \quad (2.129)$$

となる座標 $(r, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ($0 \leq r < \infty$, $0 \leq \alpha_1 < \pi$, $0 \leq \alpha_2 < \pi$, $0 \leq \alpha_3 < 2\pi$) を4次元球座標という。また、特に $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ を4次元球座標における角座標という。定義を逆に解けば

$$\begin{aligned} r &= |x| = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^{\frac{1}{2}}, \\ \alpha_1 &= \tan^{-1} \{(x_4^2 + x_3^2 + x_2^2)/x_1^2\}, \\ \alpha_2 &= \tan^{-1} \{(x_4^2 + x_3^2)/x_2^2\}, \\ \alpha_3 &= \tan^{-1}(x_4/x_3) \end{aligned} \quad (2.130)$$

となる。また、この球座標のヤコビアンを求めると

$$\frac{\partial(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\partial(r, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} =$$

$$\begin{aligned}
& \begin{vmatrix} \cos \alpha_1 & -r \sin \alpha_1 & 0 & 0 \\ \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 & r \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 & -r \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 & 0 \\ \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_3 & r \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_3 & r \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 & -r \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 \\ \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 & r \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 & r \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 \sin \alpha_3 & r \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_3 \end{vmatrix} \\
&= r \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \begin{vmatrix} \cos \alpha_1 & -r \sin \alpha_1 & 0 \\ \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 & r \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 & -r \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \\ \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 & r \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 & r \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 \end{vmatrix} \\
&= (r \sin \alpha_1 \sin \alpha_2)(r \sin \alpha_1) \begin{vmatrix} \cos \alpha_1 & -r \sin \alpha_1 \\ \sin \alpha_1 & r \cos \alpha_1 \end{vmatrix} = r^3 \sin^2 \alpha_1 \sin \alpha_2 \quad (2.131)
\end{aligned}$$

($\cos \alpha_i \neq 0$ かつ $\sin \alpha_i \neq 0$ のときは, 最下行に $\sin \alpha_i$, その1つ上に $\cos \alpha_i$ をかけて最下行にその上の行を足せばよい. $\cos \alpha_i = 0$ のときは $\sin \alpha_i = 1$, $\cos \alpha_i = 0$ のときは $\sin \alpha_i = 1$ であるから, そのままくればよい)

となり, 4次元球座標の体積素は

$$d^4x = r^3 \sin^2 \alpha_1 \sin \alpha_2 dr d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 = r^3 dr d\Omega \quad (2.132)$$

となることがわかる. ここで,

$$d\Omega = \sin^2 \alpha_1 \sin \alpha_2 d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 \quad (2.133)$$

は4次元球座標の立体角であり, その全立体角は

$$\int d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\pi \sin^2 \alpha_1 \sin \alpha_2 d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 = \frac{\pi}{2} \cdot 2 \cdot 2\pi = 2\pi^2 \quad (2.134)$$

となる. さらに, 面積素ベクトル $d\sigma_\mu$ は, 単位ベクトル $x_\mu/|x|$ を用いて

$$d\sigma_\mu = |x|^3 d\Omega \cdot \frac{x_\mu}{|x|} = x_\mu |x|^2 d\Omega \quad (2.135)$$

と書ける.

2.3.3 双対と Bianchi の恒等式

4次元ユークリッド空間において, テンソル $T_{\mu\nu}$ に対し,

$$T_{\mu\nu}^* = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} T_{\alpha\beta} \quad (2.136)$$

を $T_{\mu\nu}$ の双対 (dual) 「 \star 」を Hodge 作用素 (Hodge star) という. ここで, 反対称テンソル $A_{\mu\nu} = -A_{\nu\mu}$ に対し

$$(A_{\mu\nu}^*)^* = A_{\mu\nu} \quad (2.137)$$

が成り立つ．

$$\therefore (A_{\mu\nu}^*)^* = \frac{1}{4}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma}A_{\rho\sigma} = \frac{1}{2}(\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma} - \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho})A_{\rho\sigma} = \frac{1}{2}(A_{\mu\nu} - A_{\nu\mu}) = A_{\mu\nu}. \quad \square \quad (2.138)$$

また，テンソル $T_{\mu\nu}$ が $T_{\mu\nu} \mapsto gT_{\mu\nu}g^{-1}$ という変換を受けるとき，その双対 $T_{\mu\nu}^*$ は

$$T_{\mu\nu}^* \mapsto gT_{\mu\nu}^*g^{-1} \quad (2.139)$$

と変換される．

$$\therefore \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}T_{\alpha\beta} \mapsto \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}gT_{\alpha\beta}g^{-1} = g\left(\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}T_{\alpha\beta}\right)g^{-1}. \quad \square \quad (2.140)$$

さらに，テンソル A_μ (ゲージ場) に対し，

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] \quad (2.141)$$

という形をしたテンソル $F_{\mu\nu}$ (場の強さ) は

$$D_\mu F_{\mu\nu}^* = \partial_\mu F_{\mu\nu}^* + [A_\mu, F_{\mu\nu}^*] = 0. \quad (2.142)$$

を満たす．これを Bianchi の恒等式という．これを示すには，まず $F_{\mu\nu}^*$ を計算する：

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^* &= \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha + [A_\alpha, A_\beta]) \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}(\partial_\alpha A_\beta + A_\alpha A_\beta) - \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}(\partial_\beta A_\alpha + A_\beta A_\alpha) \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}(\partial_\alpha A_\beta + A_\alpha A_\beta) - \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\beta\alpha}(\partial_\alpha A_\beta + A_\alpha A_\beta) \quad (\alpha \text{ と } \beta \text{ のつけかえ}) \\ &= \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}(\partial_\alpha A_\beta + A_\alpha A_\beta). \quad (\text{完全反対称テンソルの脚の入れ換え}) \end{aligned} \quad (2.143)$$

これより，

$$\begin{aligned} D_\mu F_{\mu\nu}^* &= \partial_\mu F_{\mu\nu}^* + [A_\mu, F_{\mu\nu}^*] \\ &= \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\{\partial_\mu(\partial_\alpha A_\beta + A_\alpha A_\beta) + [A_\mu, \partial_\alpha A_\beta + A_\alpha A_\beta]\} \\ &= \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\{\partial_\mu\partial_\alpha A_\beta + (\partial_\mu A_\alpha)A_\beta + A_\alpha(\partial_\mu A_\beta) \\ &\quad + A_\mu(\partial_\alpha A_\beta) + A_\mu A_\alpha A_\beta - (\partial_\alpha A_\beta)A_\mu - A_\alpha A_\beta A_\mu\} \\ &= \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\{(\partial_\mu A_\alpha)A_\beta + A_\mu A_\alpha A_\beta - (\partial_\alpha A_\beta)A_\mu - A_\alpha A_\beta A_\mu\} \\ &\quad (\text{第1項と第3項 + 第4項はそれぞれ } \mu \text{ と } \alpha \text{ について対称}) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.144)$$

(第1, 2項の μ, α, β を，循環するようにそれぞれつけかえれば，それぞれ第3, 4項と打ち消す)．

第3章 ASD Yang-Mills とインスタントン

この章では，ASD Yang-Mills と，それにより得られるインスタントンについて説明する．3.1 節では，4次元 Euclidean Yang-Mills system の定義と，境界条件，トポロジカルチャージ，ASD 条件などについて述べた．3.2 節では，ASD Yang-Mills において最も基本的なインスタントンである 't Hooft インスタントンについて述べた．3.3 節では，4次元ユークリッド空間における円柱対称性を持つインスタントンである Liouville 解について述べた．

3.1 ASD Yang-Mills

4次元ユークリッド空間に $SU(2)$ のゲージとゲージ変換を導入し，Yang-Mills の作用を導入したものは4次元 Euclidean Yang-Mills system と呼ばれる．4次元 Euclidean Yang-Mills system に作用が有限となるように境界条件を課すと，実空間の3次元球表面と内部空間の3次元球表面の間にトポロジーが定義でき，場の方程式である Yang-Mills 方程式の解はトポロジカルチャージによって分類される．また，Bianchi の恒等式より，Yang-Mills 方程式の十分条件である ASD 条件が得られる．

3.1.1 4次元 Euclidean Yang-Mills system

4次元ユークリッド空間 R^4 において，ゲージ場 (Yang-Mills field) $A_\mu(x) \in \mathfrak{su}(2)$ に対し $g \in SU(2)$ によるゲージ変換 (gauge transform)

$$A_\mu \mapsto gA_\mu g^{-1} + g\partial_\mu g^{-1} \quad (3.1)$$

を導入した空間を4次元 Euclidean Yang-Mills system という¹．このとき，場の強さ (field strength) $F_{\mu\nu}$ は

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] \quad (3.2)$$

で与えられる．定義より明らかに，場の強さは反対称，すなわち

$$F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu} \quad (3.3)$$

¹このように，ゲージ場を行列で表す記法を基本表現，実数 $A_\mu^a(x)$ と Pauli 行列 σ_a を用いて $A_\mu^a \sigma_a$ と表す記法を随伴表現という (随伴表現において Pauli 行列 σ_a の添え字 $a = 1, 2, 3$ を内部空間の添え字またはアイソスピン添え字という)．

を満たす．また，ゲージ場は反エルミートだから

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^\dagger &= \partial_\mu A_\nu^\dagger - \partial_\nu A_\mu^\dagger + A_\nu^\dagger A_\mu^\dagger - A_\mu^\dagger A_\nu^\dagger \\ &= -\partial_\mu A_\nu + \partial_\nu A_\mu + A_\nu A_\mu - A_\mu A_\nu = -F_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

すなわち，場の強さもまた反エルミートであり， $\mathfrak{su}(2)$ の元である．さらに，場の強さ $F_{\mu\nu}$ の $g(x) \in \text{SU}(2)$ によるゲージ変換は

$$F_{\mu\nu} \mapsto g F_{\mu\nu} g^{-1} \quad (3.5)$$

で与えられる．

$$\begin{aligned} \because F_{\mu\nu} \mapsto & \partial_\mu (g A_\nu g^{-1} + g \partial_\nu g^{-1}) - \partial_\nu (g A_\mu g^{-1} + g \partial_\mu g^{-1}) \\ & + [g A_\mu g^{-1} + g \partial_\mu g^{-1}, g A_\nu g^{-1} + g \partial_\nu g^{-1}] \\ = & (\partial_\mu g) A_\nu g^{-1} + g (\partial_\mu A_\nu) g^{-1} + g A_\nu (\partial_\mu g^{-1}) + (\partial_\mu g) (\partial_\nu g^{-1}) + g \partial_\mu \partial_\nu g^{-1} \\ & - (\partial_\nu g) A_\mu g^{-1} - g (\partial_\nu A_\mu) g^{-1} - g A_\mu (\partial_\nu g^{-1}) - (\partial_\nu g) (\partial_\mu g^{-1}) - g \partial_\nu \partial_\mu g^{-1} \\ & + g A_\mu A_\nu g^{-1} + g A_\mu (\partial_\nu g^{-1}) - (\partial_\mu g) A_\nu g^{-1} - (\partial_\mu g) (\partial_\nu g^{-1}) \\ & - g A_\nu A_\mu g^{-1} - g A_\nu (\partial_\mu g^{-1}) + (\partial_\nu g) A_\mu g^{-1} + (\partial_\nu g) (\partial_\mu g^{-1}) \\ = & g (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]) g^{-1} = g F_{\mu\nu} g^{-1}. \quad \square \end{aligned} \quad (3.6)$$

場の強さ $F_{\mu\nu}$ が与えられたとき，4次元 Euclidean Yang-Mills system での作用 (action) S_{YM} は

$$S_{\text{YM}} = -\frac{1}{2g^2} \int d^4x \text{tr} (F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}) \quad (3.7)$$

で与えられる．ただし， g は結合定数と呼ばれる実数であり，積分は4次元ユークリッド空間の全空間で行う．場の強さのゲージ変換とトレースの循環律により，作用は明らかにゲージ変換に対して不変である．また，与えられた場の強さ $F_{\mu\nu}$ からゲージ場を求めるには，作用の変分を取ることによって得られる場の方程式

$$D_\mu F_{\mu\nu} = \partial_\mu F_{\mu\nu} + [A_\mu, F_{\mu\nu}] = 0 \quad (3.8)$$

を解けばよい．これを Yang-Mills 方程式という．Yang-Mills 方程式は，ゲージ変換に対して不変である：

$$\begin{aligned} \because \partial_\mu F_{\mu\nu} + [A_\mu, F_{\mu\nu}] &= 0 \\ \mapsto \partial_\mu (g F_{\mu\nu} g^{-1}) + [g A_\mu g^{-1} + g \partial_\mu g^{-1}, g F_{\mu\nu} g^{-1}] \\ &= (\partial_\mu g) F_{\mu\nu} g^{-1} + g (\partial_\mu F_{\mu\nu}) g^{-1} + g F_{\mu\nu} (\partial_\mu g^{-1}) \\ &\quad + g A_\mu F_{\mu\nu} g^{-1} - (\partial_\mu g) F_{\mu\nu} g^{-1} - g F_{\mu\nu} A_\mu g^{-1} - g F_{\mu\nu} (\partial_\mu g^{-1}) \\ &= g (\partial_\mu F_{\mu\nu} + [A_\mu, F_{\mu\nu}]) g^{-1} = 0. \quad \square \end{aligned} \quad (3.9)$$

本来は，この方程式を解いて解を得るべきであるが，full の Yang-Mills 方程式の解はほとんど見つからず，実際には後に見る ASD 条件により解を求める．

3.1.2 ピュアゲージ

(3.7) をよく見ると，場の強さ $F_{\mu\nu}$ は反エルミートであったから， $F_{\mu\nu}$ の行列としての成分を f_{ij} ($i, j = 1, 2$) とすれば

$$(F_{\mu\nu}^\dagger)_{ij} = f_{ji}^* = (F_{\mu\nu})_{ij} = -f_{ij} \quad (3.10)$$

となる．すると

$$\text{tr}(F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}) = \text{tr}\left(\sum_k f_{ik}f_{kj}\right) = \sum_{i,k} f_{ik}f_{ki} = -\sum_{i,k} |f_{ik}|^2 \leq 0 \quad (3.11)$$

であるから

$$S_{\text{YM}} \geq 0, \quad (3.12)$$

すなわち，4次元 Euclidean Yang-Mills system では作用が常に正であることがわかる．ここで，等号成立条件は明らかに

$$F_{\mu\nu} = 0 \quad (3.13)$$

と同値であるが，これは (3.12) より作用の極小を与えるから，Yang-Mills 方程式の解を与える条件である．そこで， $F_{\mu\nu}$ の定義を思い出すと，まず

$$A_\mu = 0 \quad (3.14)$$

は (3.13) を満たすことがわかる．ところで，(3.13) は明らかにゲージ不変であるから，(3.14) を任意の $g(x) \in \text{SU}(2)$ でゲージ変換した

$$A'_\mu = gA_\mu g^{-1} + g\partial_\mu g^{-1} = g\partial_\mu g^{-1} \quad (3.15)$$

も (3.13) を満たすはずである．実際，(3.14) を仮定して (3.13) をゲージ変換すれば

$$\begin{aligned} & \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] = 0 \\ & \mapsto \partial_\mu(gA_\nu g^{-1} + g\partial_\nu g^{-1}) - \partial_\nu(gA_\mu g^{-1} + g\partial_\mu g^{-1}) \\ & \quad + [gA_\mu g^{-1} + g\partial_\mu g^{-1}, gA_\nu g^{-1} + g\partial_\nu g^{-1}] \\ & = \partial_\mu(g\partial_\nu g^{-1}) - \partial_\nu(g\partial_\mu g^{-1}) + [g\partial_\mu g^{-1}, g\partial_\nu g^{-1}] = 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

であり，そのまま計算してみても

$$\begin{aligned} & \partial_\mu(g\partial_\nu g^{-1}) - \partial_\nu(g\partial_\mu g^{-1}) + [g\partial_\mu g^{-1}, g\partial_\nu g^{-1}] \\ & = (\partial_\mu g)(\partial_\nu g^{-1}) + g(\partial_\mu \partial_\nu g^{-1}) - (\partial_\nu g)(\partial_\mu g^{-1}) \\ & \quad - g(\partial_\nu \partial_\mu g^{-1}) - (\partial_\mu g)(\partial_\nu g^{-1}) + (\partial_\nu g)(\partial_\mu g^{-1}) = 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

となる．また，逆に (3.13) のゲージ不変性より，任意の A_μ に対し $A'_\mu = 0$ に変換する $\tilde{g}^{-1}(x) \in \text{SU}(2)$ が存在して

$$A_\mu \mapsto A'_\mu = \tilde{g}^{-1}A_\mu(\tilde{g}^{-1})^{-1} + \tilde{g}^{-1}\partial_\mu\{(\tilde{g}^{-1})^{-1}\} = 0$$

$$\iff A_\mu = -(\partial_\mu \tilde{g})\tilde{g}^{-1} = \tilde{g}\partial_\mu \tilde{g}^{-1}, \quad (3.18)$$

すなわち，(3.13) を満たす解はすべて (3.15) の形で表される．このような形の解をピュアゲージ (pure gauge) という．(3.13) は作用が 0 となるための必要十分条件であったから，ピュアゲージは Yang-Mills 方程式の真空解である．また，(3.15) において， $g(x)$ は全空間で $SU(2)$ の元でなければならないことに注意．最後に，(3.13) において $F_{\mu\nu}$ はゲージ不変であるが，ピュアゲージはゲージ不変ではないことに注意．ピュアゲージ $A_\mu = g\partial_\mu g^{-1}$ の $g' \in SU(2)$ によるゲージ変換は

$$\begin{aligned} g\partial_\mu g^{-1} &\mapsto g'(g\partial_\mu g^{-1})g'^{-1} + g'\partial_\mu g'^{-1} \\ &= g'g\{(\partial_\mu g^{-1})g'^{-1} + g^{-1}\partial_\mu g'^{-1}\} = g'g\partial_\mu(g^{-1}g'^{-1}) \\ &= g'g\partial_\mu(g'g)^{-1} \end{aligned} \quad (3.19)$$

となり，単に g に g' を左から掛けたものになる．

3.1.3 境界条件とトポロジカルチャージ

我々はこれから Yang-Mills 方程式のソリトン解を求める．それゆえ，解に課される境界条件は，無限遠方でその解による作用が 0 となることである．ところが，そのための必要十分条件は，前小節で見たように解がピュアゲージの形になることであった．それゆえ，求める境界条件は

$$\exists g(x) \text{ s.t. } g(\infty) \in SU(2) \text{ et } \lim_{|x| \rightarrow \infty} A_\mu(x) = g(x)\partial_\mu g(x)^{-1} \quad (3.20)$$

(無限遠方で $SU(2)$ の群元となり，かつピュアゲージの形になるような 4 次元ユークリッド空間内の関数 $g(x)$ が存在する) であることがわかる．ここで，無限遠方以外の場所では $g(x) \in SU(2)$ でなくてもよいことに注意．

補足

$|x| \rightarrow \infty$ の極限を考えると， $A_\mu(x)$ を 4 次元球座標 $(r, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ で表し，無限遠方での $A_\mu(x)$ は角座標 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ で表すのが便利である．しかし，そのようにすると， $A_\mu(x)$ は一般には動径方向成分 $A_r(x)$ を含んでいるので，動径方向の微分が定義できなくなるように思われる．しかし，そのような心配は必要なく，与えられたゲージ場 $A_\mu(x)$ を

$$\tilde{g}(x) = \mathcal{P} \exp \left(\int_0^r dr' A_r(x') \right) \quad (3.21)$$

によって $A'_\mu(x)$ にゲージ変換すれば

$$\begin{aligned} A_r(x) &\mapsto A'_\mu(x) = \tilde{g}A_r\tilde{g}^{-1} + \tilde{g}(\partial_r\tilde{g}^{-1}) = \tilde{g}A_r\tilde{g}^{-1} - (\partial_r\tilde{g})\tilde{g}^{-1} \\ &= \tilde{g}A_r\tilde{g}^{-1} - \left\{ \partial_r \mathcal{P} \left(\exp \int_0^r dr' A_r \right) \right\} \tilde{g}^{-1} = \tilde{g}A_r\tilde{g}^{-1} - \tilde{g}A_r\tilde{g}^{-1} = 0 \end{aligned} \quad (3.22)$$

となり，動径方向の微分を考える必要はなくなる．また，このとき，境界条件は

$$\exists g \in \text{SU}(2) \text{ s.t. } \lim_{r \rightarrow \infty} A'_\mu(x) = g(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \partial_\mu g^{-1}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \quad (3.23)$$

と書ける(補足終)．

ここで無限遠方での $g(x)$ は，極限操作により自由度が1少なくなるので，4次元実空間内の3次元球面 $S_3^{(\text{phy})}$ 上で定義されるような関数である．また，このとき， $g(x)$ は $\text{SU}(2)$ の元であるが，それらは

$$a_\mu a_\mu = 1 \quad (3.24)$$

という制限のついた4つのパラメーター a_1, a_2, a_3, a_4 により

$$g = \begin{pmatrix} a_4 + ia_3 & a_2 + ia_1 \\ -a_2 + ia_1 & a_4 - ia_3 \end{pmatrix} = a_4 + ia_i \sigma_i = a_\mu e_\mu^\dagger \quad (3.25)$$

と表せるのであったから， $g(x)$ のターゲットスペースは4次元内部空間内の3次元球面 $S_3^{(\text{int})}$ である．すると

$$g : S_3^{(\text{phy})} \rightarrow S_3^{(\text{int})} \quad (3.26)$$

であるから，トポロジーの話より，これらの間にはトポロジーが定義でき，無限遠方での任意の $g(x)$ に対し，それに対応するトポロジカルチャージ $Q \in \mathbb{Z}$ が存在することが保証される¹．ところが，境界条件より，有限の作用を持つ任意の解にはこのような $g(x)$ が一意に存在するから，有限の作用を持つ任意の解はこのトポロジカルチャージによってトポロジカルに分類されている．4次元 Euclidean Yang-Mills system の場合，このような Q は

$$Q = -\frac{1}{16\pi^2} \int d^4x \text{tr} (F_{\mu\nu}^* F_{\mu\nu}). \quad (3.27)$$

で与えられる．ただし， $F_{\mu\nu}$ は与えられたゲージ場に対する場の強さであり，積分は4次元ユークリッド空間の全空間について行う．これが実際に解を分類するトポロジカルチャージを与えることを以下で示す．

まず，(3.27)の体積積分を面積分書き換える．そのためには，まず被積分関数を発散の形に書き換える．

$$F_{\mu\nu}^* = \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} (\partial_\alpha A_\beta + A_\alpha A_\beta), \quad D_\mu F_{\mu\nu}^* = \partial_\mu F_{\mu\nu}^* + [A_\mu, F_{\mu\nu}^*] = 0 \quad (3.28)$$

などを思い出せば

$$\begin{aligned} \text{tr} (F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}^*) &= \text{tr} \{ (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) F_{\mu\nu}^* + (A_\mu A_\nu - A_\nu A_\mu) F_{\mu\nu}^* \} \\ &= \text{tr} \{ (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) F_{\mu\nu}^* + A_\mu A_\nu F_{\mu\nu}^* - A_\nu F_{\mu\nu}^* A_\mu \} \\ &= \text{tr} \{ (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) F_{\mu\nu}^* + A_\mu [A_\nu, F_{\mu\nu}^*] \} \end{aligned}$$

¹この Q はしばしば Pontryagin index と呼ばれる．

$$\begin{aligned}
&= \text{tr} \{ (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) F_{\mu\nu}^* - A_\mu \partial_\nu F_{\mu\nu}^* \} = \text{tr} \{ (\partial_\mu A_\nu) F_{\mu\nu}^* - \partial_\nu (A_\mu F_{\mu\nu}^*) \} \\
&= \text{tr} [\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \{ (\partial_\mu A_\nu) (\partial_\alpha A_\beta) + (\partial_\mu A_\nu) A_\alpha A_\beta - \partial_\nu (A_\mu \partial_\alpha A_\beta) - \partial_\nu (A_\mu A_\alpha A_\beta) \}] \\
&= \text{tr} [\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \{ (\partial_\mu A_\nu) (\partial_\alpha A_\beta) + (\partial_\mu A_\nu) A_\alpha A_\beta + \partial_\mu (A_\nu \partial_\alpha A_\beta) + \partial_\mu (A_\nu A_\alpha A_\beta) \}] \quad (3.29)
\end{aligned}$$

(第3項と第4項の μ と ν をそれぞれつけかえてから, それぞれに掛かる完全反対称テンソルの脚を入れ換える).

ここで

$$\begin{aligned}
\text{tr} \{ \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\mu (A_\nu A_\alpha A_\beta) \} &= \text{tr} [\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \{ (\partial_\mu A_\nu) A_\alpha A_\beta + A_\nu (\partial_\mu A_\alpha) A_\beta + A_\nu A_\alpha (\partial_\mu A_\beta) \}] \\
&= 3 \text{tr} \{ \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} (\partial_\mu A_\nu) A_\alpha A_\beta \} \quad (\text{トレースの循環律と添え字の入れ換え}) \quad (3.30)
\end{aligned}$$

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\mu (A_\nu \partial_\alpha A_\beta) = \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \{ (\partial_\mu A_\nu) (\partial_\alpha A_\beta) + A_\nu (\partial_\mu \partial_\alpha A_\beta) \} = \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} (\partial_\mu A_\nu) (\partial_\alpha A_\beta) \quad (3.31)$$

に注意すると, 結局

$$\text{tr} (F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}^*) = \partial_\mu \left\{ 2\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \text{tr} \left(A_\nu \partial_\alpha A_\beta + \frac{2}{3} A_\nu A_\alpha A_\beta \right) \right\} \quad (3.32)$$

となり, 発散の形で書けた. 後は, 全空間での体積分が $S_3^{(\text{phy})}$ 上での面積分に書き換えられることと, $S_3^{(\text{phy})}$ 上, すなわち, 無限遠方では

$$F_{\mu\nu}^* = \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} (\partial_\alpha A_\beta + A_\alpha A_\beta) = 0 \iff \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\alpha A_\beta = -\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} A_\alpha A_\beta \quad (3.33)$$

となることを用いれば, Stokes の定理より

$$\begin{aligned}
Q &= -\frac{1}{16\pi^2} \int d^4x \text{tr} (F_{\mu\nu}^* F_{\mu\nu}) = +\frac{1}{24\pi^2} \oint_{S_3^{(\text{phy})}} d\sigma_\mu \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \text{tr} (A_\nu A_\alpha A_\beta) \\
&= -\frac{1}{24\pi^2} \oint_{S_3^{(\text{phy})}} d\sigma_\mu \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \text{tr} \{ (\partial_\nu g) g^{-1} (\partial_\alpha g) g^{-1} (\partial_\beta g) g^{-1} \} \quad (3.34)
\end{aligned}$$

となり, $g(x)$ のみで表される形に変形できる. ただし, $d\sigma_\mu$ は4次元ユークリッド空間における面積素ベクトルである. (3.34) は, 与えられた $g(x)$ に対し Q を計算する具体的な表式である. また, (3.34) より $g(x)$ が定行列ならば $Q = 0$ であることが直ちにわかる.

実際の計算では (3.34) を用いることになるが, (3.27) の性質を見るためにさらに式変形を続けてみる. (3.34) の積分は $S_3^{(\text{phy})}$ 上で行われるが, そこは3次元であるから, その座標としてデカルト座標 (x_1, x_2, x_3) をとることができる. すると

$$\begin{aligned}
Q &= -\frac{1}{24\pi^2} \oint_{S_3^{(\text{phy})}} d\sigma_\mu \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \text{tr} \{ (\partial_\nu g) g^{-1} (\partial_\alpha g) g^{-1} (\partial_\beta g) g^{-1} \} \\
&= -\frac{1}{24\pi^2} \oint_{S_3^{(\text{phy})}} dx_\ell dx_m dx_n \varepsilon_{\ell mn} \text{tr} \left(\frac{\partial g}{\partial x_\ell} g^{-1} \frac{\partial g}{\partial x_m} g^{-1} \frac{\partial g}{\partial x_n} g^{-1} \right) \quad (3.35)
\end{aligned}$$

であり, また $S_3^{(\text{int})}$ も3次元だから, その座標として3つの独立変数 (ξ_1, ξ_2, ξ_3) をとることができ, $S_3^{(\text{int})}$ 上の任意の $g(x) \in \text{SU}(2)$ は, ξ_1, ξ_2, ξ_3 を用いて

$$g = g(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \quad (3.36)$$

と表される．ところが， $g(x)$ は $S_3^{(\text{phy})}$ の座標 (x_1, x_2, x_3) と $S_3^{(\text{int})}$ の座標 (ξ_1, ξ_2, ξ_3) の2つの座標で表されるから，逆にこれらの座標は $g(x)$ によって関係づけられており，2つの座標の間には連鎖律 (chain rule) が成り立つ．すると

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{24\pi^2} \oint_{S_3^{(\text{phy})}} dx_\ell dx_m dx_n \varepsilon_{\ell mn} \text{tr} \left(\frac{\partial g}{\partial x_\ell} g^{-1} \frac{\partial g}{\partial x_m} g^{-1} \frac{\partial g}{\partial x_n} g^{-1} \right) \\
 &= -\frac{1}{24\pi^2} \oint_{S_3^{(\text{int})}} dx_\ell dx_m dx_n \varepsilon_{\ell mn} \text{tr} \left(\frac{\partial g}{\partial \xi_i} g^{-1} \frac{\partial g}{\partial \xi_j} g^{-1} \frac{\partial g}{\partial \xi_k} g^{-1} \right) \frac{\partial \xi_i}{\partial x_\ell} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_m} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_n} \\
 &= -\frac{1}{24\pi^2} \oint_{S_3^{(\text{int})}} d\xi_i d\xi_j d\xi_k \varepsilon_{ijk} \text{tr} \left(\frac{\partial g}{\partial \xi_i} g^{-1} \frac{\partial g}{\partial \xi_j} g^{-1} \frac{\partial g}{\partial \xi_k} g^{-1} \right) \\
 &= -\frac{1}{24\pi^2} \oint_{S_3^{(\text{int})}} d\mu(g) \tag{3.37}
 \end{aligned}$$

となり， $S_3^{(\text{phy})}$ での積分を $S_3^{(\text{int})}$ での積分に移すことができる．ただし，

$$d\mu(g) = \rho(\xi_1, \xi_2, \xi_3) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \tag{3.38}$$

$$\rho(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \varepsilon_{ijk} \text{tr} \left(g^{-1} \frac{\partial g}{\partial \xi_i} g^{-1} \frac{\partial g}{\partial \xi_j} g^{-1} \frac{\partial g}{\partial \xi_k} \right) \tag{3.39}$$

である (トレースの循環律より， g^{-1} はどちらから掛かってもよい)．ここで $\rho(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ の $\tilde{g} \in \text{SU}(2)$ によるゲージ変換を考えてみる．それには，(3.19) より $\rho(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ の中の g を

$$g'(\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3) = \tilde{g}g(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \tag{3.40}$$

で置き換えればよい．すると

$$g = \tilde{g}^{-1}g' \quad \therefore g^{-1} = (\tilde{g}^{-1}g')^{-1} = (g')^{-1}(\tilde{g}^{-1})^{-1} = (g')^{-1}\tilde{g} \tag{3.41}$$

(g と \tilde{g} が $\text{SU}(2)$ の元であるからこのような変形が許されることに注意) と，本節の最後の補足で説明するように，(3.34) のゲージ変換は常に定行列によるものとしてよいことに注意して，

$$\begin{aligned}
 \rho(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \varepsilon_{ijk} \text{tr} \left(g^{-1} \frac{\partial g}{\partial \xi_i} g^{-1} \frac{\partial g}{\partial \xi_j} g^{-1} \frac{\partial g}{\partial \xi_k} \right) \\
 &= \varepsilon_{ijk} \text{tr} \left\{ (g')^{-1} \tilde{g} \tilde{g}^{-1} \frac{\partial g'}{\partial \xi'_p} \frac{\partial \xi'_p}{\partial \xi_i} (g')^{-1} \tilde{g} \tilde{g}^{-1} \frac{\partial g'}{\partial \xi'_q} \frac{\partial \xi'_q}{\partial \xi_j} (g')^{-1} \tilde{g} \tilde{g}^{-1} \frac{\partial g'}{\partial \xi'_r} \frac{\partial \xi'_r}{\partial \xi_k} \right\} \\
 &= \text{tr} \left\{ (g')^{-1} \frac{\partial g'}{\partial \xi'_p} (g')^{-1} \frac{\partial g'}{\partial \xi'_q} (g')^{-1} \frac{\partial g'}{\partial \xi'_r} \right\} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial \xi'_p}{\partial \xi_i} \frac{\partial \xi'_q}{\partial \xi_j} \frac{\partial \xi'_r}{\partial \xi_k} \\
 &= \text{tr} \left\{ (g')^{-1} \frac{\partial g'}{\partial \xi'_p} (g')^{-1} \frac{\partial g'}{\partial \xi'_q} (g')^{-1} \frac{\partial g'}{\partial \xi'_r} \right\} \varepsilon_{pqr} \det \left| \frac{\partial \xi'}{\partial \xi} \right| \\
 &= \rho(\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3) \det \left| \frac{\partial \xi'}{\partial \xi} \right| \tag{3.42}
 \end{aligned}$$

となる．すると

$$d\mu(g) = \rho(\xi_1, \xi_2, \xi_3) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 = \rho(\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3) \det \left| \frac{\partial \xi'}{\partial \xi} \right| d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$$

$$= \rho(\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3) d\xi'_1 d\xi'_2 d\xi'_3 = d\mu(g') \quad (3.43)$$

となり, $d\mu(g)$ は $S_3^{(\text{int})}$ の座標に依らない微分, すなわち, $S_3^{(\text{int})}$ の面積素であることがわかる. それゆえ, (3.34) は $g(x)$ の巻き数 (winding number) を与える積分となっており, それは, すなわち, $A_\mu(x)$ のトポロジカルチャージを与える積分である.

最後に, (3.34) の係数が $Q \in \mathbb{Z}$ となるようにとられていることを,

$$g_1(x) = \frac{1}{|x|} x_\sigma e_\sigma^\dagger = \frac{1}{|x|} (x_4 + ix_i \sigma_i). \quad (3.44)$$

を用いて実際に見てみる. ただし, $|x| = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^{1/2}$ である. これは $x \neq 0$ では明らかに $SU(2)$ の元であるが, $x = 0$ では特異となっている. このように特異点を持つゲージを特異なゲージ (singular gauge) という. ここで, $g_1(x) \in SU(2)$ ($x \neq 0$) より

$$g_1^{-1} = g_1^\dagger = \frac{1}{|x|} x_\sigma e_\sigma = \frac{1}{|x|} (x_4 - ix_i \sigma_i) \quad (x \neq 0) \quad (3.45)$$

であることに注意. これより $(\partial_\nu g_1) g_1^{-1}$ を求めると

$$\begin{aligned} \partial_\nu g_1 &= \frac{1}{|x|} (\partial_\nu x_\sigma) e_\sigma^\dagger + \left(\partial_\nu \frac{1}{|x|} \right) x_\sigma e_\sigma^\dagger = \frac{e_\nu^\dagger}{|x|} - \frac{x_\nu}{|x|^3} x_\sigma e_\sigma^\dagger = \frac{e_\nu^\dagger}{|x|} - \frac{x_\nu}{|x|^2} g_1 \\ \therefore (\partial_\nu g_1) g_1^{-1} &= \frac{e_\nu^\dagger}{|x|} g_1^{-1} - \frac{x_\nu}{|x|^2} = \frac{1}{|x|} \left(e_\nu^\dagger g_1^{-1} - \frac{x_\nu}{|x|} \right). \end{aligned} \quad (3.46)$$

これより

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \text{tr} \{ (\partial_\nu g) g^{-1} (\partial_\alpha g) g^{-1} (\partial_\beta g) g^{-1} \} \\ = \frac{1}{|x|^3} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \text{tr} \left\{ \left(e_\nu^\dagger g_1^{-1} - \frac{x_\nu}{|x|} \right) \left(e_\alpha^\dagger g_1^{-1} - \frac{x_\alpha}{|x|} \right) \left(e_\beta^\dagger g_1^{-1} - \frac{x_\beta}{|x|} \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.47)$$

であるが, $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \text{tr}$ の中では x_ν, x_α, x_β が2つ以上かかる項はそれらの積の対称性により消え, 1つ入る項はトレースの中で行列が可換であることによる対称性により消えるから, 結局

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \text{tr} \{ (\partial_\nu g) g^{-1} (\partial_\alpha g) g^{-1} (\partial_\beta g) g^{-1} \} = \frac{1}{|x|^3} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \text{tr} \left(e_\nu^\dagger g_1^{-1} e_\alpha^\dagger g_1^{-1} e_\beta^\dagger g_1^{-1} \right) \quad (3.48)$$

となる. この先は場合分けをして考える. まず, $\mu = 4$ のとき

$$\begin{aligned} \varepsilon_{4\nu\alpha\beta} \text{tr} \left(e_\nu^\dagger g_1^{-1} e_\alpha^\dagger g_1^{-1} e_\beta^\dagger g_1^{-1} \right) &= i \varepsilon_{abc} \text{tr} \left(\sigma_a g_1^{-1} \sigma_b g_1^{-1} \sigma_c g_1^{-1} \right) \\ &= \frac{i}{|x|^3} \varepsilon_{abc} \text{tr} \{ \sigma_a (x_4 - ix_i \sigma_i) \sigma_b (x_4 - ix_j \sigma_j) \sigma_c (x_4 - ix_k \sigma_k) \} \\ &= \frac{i}{|x|^3} \varepsilon_{abc} \text{tr} \{ (\sigma_a x_4 - ix_i (i \varepsilon_{ail} \sigma_\ell + \delta_{ai})) (\sigma_b x_4 - ix_j (i \varepsilon_{bjm} \sigma_m + \delta_{bj})) \\ &\quad (\sigma_c x_4 - ix_k (i \varepsilon_{ckn} \sigma_n + \delta_{ck})) \} \\ &= \frac{i}{|x|^3} \varepsilon_{abc} \text{tr} \{ (\sigma_a x_4 + \varepsilon_{ail} x_i \sigma_\ell) (\sigma_b x_4 + \varepsilon_{bjm} x_j \sigma_m) (\sigma_c x_4 + \varepsilon_{ckn} x_k \sigma_n) \} \end{aligned}$$

($\delta_{ai}, \delta_{bj}, \delta_{ck}$ が 2 つ以上入ると a, b の対称性, 1 つ入ると $\text{tr } \sigma_\ell = 0$ などで消える)

$$\begin{aligned}
&= \frac{i}{|x|^3} \varepsilon_{abc} \text{tr} \left(x_4^3 \sigma_a \sigma_b \sigma_c + 3 \varepsilon_{bjm} \varepsilon_{ckn} x_4 x_j x_k \sigma_a \sigma_m \sigma_n + 3 x_4^2 \varepsilon_{ckn} x_k \sigma_a \sigma_b \sigma_n \right. \\
&\quad \left. + \varepsilon_{ail} \varepsilon_{bkm} \varepsilon_{ckn} x_i x_j x_k \sigma_\ell \sigma_m \sigma_n \right) \\
&\quad \text{(循環律と添え字の置き換えをすると 3 項が同じ形になるセットが 2 つある)} \\
&= -\frac{2}{|x|^3} \left(x_4^3 \varepsilon_{abc} \varepsilon_{abc} + 3 \varepsilon_{abc} \varepsilon_{bjm} \varepsilon_{ckn} \varepsilon_{amn} x_4 x_j x_k + 3 x_4^2 \varepsilon_{abc} \varepsilon_{ckn} \varepsilon_{abn} x_k \right. \\
&\quad \left. + \varepsilon_{abc} \varepsilon_{ail} \varepsilon_{bkm} \varepsilon_{ckn} \varepsilon_{lmn} x_i x_j x_k \right) \tag{3.49}
\end{aligned}$$

となる．ここで，カッコ内の

$$\text{第 1 項} = x_4^3 \varepsilon_{abc} \varepsilon_{abc} = 6x_4^3, \tag{3.50}$$

$$\begin{aligned}
\text{第 2 項} &= 3 \varepsilon_{bjm} \varepsilon_{ckn} x_4 x_j x_k \sigma_a \sigma_m \sigma_n = -3(\delta_{aj} \delta_{cm} - \delta_{am} \delta_{cj})(\delta_{ca} \delta_{km} - \delta_{cm} \delta_{ka}) x_4 x_j x_k \\
&= -3(\delta_{jk} - 3\delta_{jk} - \delta_{jk} + \delta_{jk}) x_4 x_j x_k = 6x_4 x_k^2, \tag{3.51}
\end{aligned}$$

$$\text{第 3 項} = 3x_4^2 \varepsilon_{abc} \varepsilon_{ckn} \varepsilon_{abn} x_k = 6x_4^2 \varepsilon_{ckn} \delta_{cn} = 0, \tag{3.52}$$

$$\begin{aligned}
\text{第 4 項} &= \varepsilon_{abc} \varepsilon_{ail} \varepsilon_{bkm} \varepsilon_{ckn} \varepsilon_{lmn} x_i x_j x_k = (\delta_{bi} \delta_{cl} - \delta_{bl} \delta_{ci}) \varepsilon_{bkm} (\delta_{cl} \delta_{km} - \delta_{cm} \delta_{kl}) x_i x_j x_k \\
&= (3\delta_{bi} \delta_{km} - \delta_{bi} \delta_{km} - \delta_{bi} \delta_{km} + \delta_{im} \delta_{bk}) \varepsilon_{bkm} x_i x_j x_k = 0. \tag{3.53}
\end{aligned}$$

よって

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \text{tr} \{ (\partial_\nu g_1) g_1^{-1} (\partial_\alpha g_1) g_1^{-1} (\partial_\beta g_1) g_1^{-1} \} = -\frac{12}{|x|^6} x_4 (x_4^2 + x_k^2) = -\frac{12}{|x|^4} x_4 \tag{3.54}$$

である．また， $\mu = a = 1, 2, 3$ のとき

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_{a\nu\alpha\beta} \text{tr} (s_\nu g_1^{-1} s_\alpha g_1^{-1} s_\beta g_1^{-1}) \\
&= \varepsilon_{a4\alpha\beta} \text{tr} (g_1^{-1} s_\alpha g_1^{-1} s_\beta g_1^{-1}) + \varepsilon_{a\nu4\beta} \text{tr} (s_\nu g_1^{-1} g_1^{-1} s_\beta g_1^{-1}) + \varepsilon_{a\nu\alpha4} \text{tr} (s_\nu g_1^{-1} s_\alpha g_1^{-1} g_1^{-1}) \\
&= 3\varepsilon_{a4\alpha\beta} \text{tr} (g_1^{-1} s_\alpha g_1^{-1} s_\beta g_1^{-1}) \quad \text{(循環律と添え字のつけかえ)} \\
&= -3\varepsilon_{abc} \text{tr} (g_1^{-1} \sigma_b g_1^{-1} \sigma_c g_1^{-1}) \\
&= -\frac{3}{|x|^3} \varepsilon_{abc} \text{tr} \{ (x_4 - ix_i \sigma_i) \sigma_b (x_4 - ix_j \sigma_j) \sigma_c (x_4 - ix_k \sigma_k) \} \\
&= \frac{3i}{|x|^3} \varepsilon_{abc} \text{tr} \{ x_i \sigma_i \sigma_b (x_4 - ix_j \sigma_j) \sigma_c (x_4 - ix_k \sigma_k) \} \\
&\quad \text{(tr} (\sigma_b g_1^{-1} \sigma_c g_1^{-1}) \text{ は } b, c \text{ について対称)} \\
&= \frac{3i}{|x|^3} \varepsilon_{abc} \text{tr} \{ x_i \sigma_i (x_4 \sigma_b - ix_j (i\varepsilon_{bjm} \sigma_m + \delta_{bj})) (x_4 \sigma_c - ix_k (i\varepsilon_{ckn} \sigma_n + \delta_{ck})) \} \\
&= \frac{3i}{|x|^3} \varepsilon_{abc} \text{tr} \{ x_i \sigma_i (x_4 \sigma_b + \varepsilon_{bjm} x_j \sigma_m) (x_4 \sigma_c + \varepsilon_{ckn} x_k \sigma_n) \}
\end{aligned}$$

(δ_{bj}, δ_{ck} が両方入った項は $\text{tr } \sigma_i = 0$ で消え, 1 つずつ入った項は 2 つ

合わせて b と c の対称性により消える)

$$= \frac{3i}{|x|^3} \varepsilon_{abc} \text{tr} \{ x_4^2 x_i \sigma_i \sigma_b \sigma_c + x_4 x_i \sigma_i (\varepsilon_{ckn} x_k \sigma_b \sigma_n + \varepsilon_{bjm} x_j \sigma_m \sigma_c) + \varepsilon_{bjm} \varepsilon_{ckn} x_i x_j x_k \sigma_i \sigma_m \sigma_n \}$$

$$= -\frac{6}{|x|^3} \left\{ x_4^2 \varepsilon_{abc} \varepsilon_{ibc} x_i + x_4 (\varepsilon_{abc} \varepsilon_{ckn} \varepsilon_{ibn} x_i x_k + \varepsilon_{abc} \varepsilon_{bjm} \varepsilon_{imc} x_i x_j) \right. \\ \left. + \varepsilon_{abc} \varepsilon_{bjm} \varepsilon_{ckn} \varepsilon_{imn} x_i x_j x_k \right\} \quad (3.55)$$

となる．ここで，カッコ内の

$$\text{第1項} = x_4^2 \varepsilon_{abc} \varepsilon_{ibc} x_i = 2x_4^2 \delta_{ai} x_i = 2x_a x_4^2, \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned} \text{第2項} &= x_4 (\varepsilon_{abc} \varepsilon_{ckn} \varepsilon_{ibn} x_i x_k + \varepsilon_{abc} \varepsilon_{bjm} \varepsilon_{imc} x_i x_j) \\ &= x_4 \{ (\delta_{ak} \delta_{bn} - \delta_{an} \delta_{bk}) \varepsilon_{ibn} x_i x_k + (\delta_{ai} \delta_{bm} - \delta_{am} \delta_{bi}) \varepsilon_{bjm} x_i x_j \} \\ &= -\varepsilon_{iba} x_b x_i - \varepsilon_{bja} x_b x_j = -\varepsilon_{iba} x_b x_i + \varepsilon_{jba} x_b x_j = 0, \end{aligned} \quad (3.57)$$

$$\begin{aligned} \text{第1項} &= \varepsilon_{abc} \varepsilon_{bjm} \varepsilon_{ckn} \varepsilon_{imn} x_i x_j x_k = -(\delta_{aj} \delta_{cm} - \delta_{am} \delta_{cj}) (\delta_{ci} \delta_{km} - \delta_{cm} \delta_{ki}) x_i x_j x_k \\ &= -(\delta_{aj} \delta_{ik} - 3\delta_{aj} \delta_{ki} - \delta_{ij} \delta_{ak} + \delta_{aj} \delta_{ki}) x_i x_j x_k = 2x_a x_k^2. \end{aligned} \quad (3.58)$$

よって，

$$\varepsilon_{av\alpha\beta} \text{tr} \{ (\partial_\nu g_1) g_1^{-1} (\partial_\alpha g_1) g_1^{-1} (\partial_\beta g_1) g_1^{-1} \} = -\frac{12}{|x|^6} x_a (x_4^2 + x_k^2) = -\frac{12}{|x|^4} x_a \quad (3.59)$$

となる．以上より， μ のすべての場合を合わせると

$$\begin{aligned} Q &= -\frac{1}{24\pi^2} \oint d\sigma_\mu \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \text{tr} \{ (\partial_\nu g_1) g_1^{-1} (\partial_\alpha g_1) g_1^{-1} (\partial_\beta g_1) g_1^{-1} \} \\ &= -\frac{1}{24\pi^2} \oint d\sigma_\mu \left(\frac{-12x_\mu}{|x|^4} \right) \end{aligned} \quad (3.60)$$

となる．最後に， $d\sigma_\mu$ は4次元ユークリッド空間における立体角 $d\Omega$ を用いて

$$d\sigma_\mu = |x|^3 d\Omega \frac{x_\mu}{|x|} \quad (3.61)$$

と書けること，また，4次元ユークリッド空間の全立体角は $2\pi^2$ であることを思い出せば

$$-\frac{1}{24\pi^2} \oint d\sigma_\mu \left(\frac{-12x_\mu}{|x|^4} \right) = -\frac{1}{24\pi^2} \oint d\Omega x_\mu |x|^2 \left(\frac{-12x_\mu}{|x|^4} \right) = \frac{1}{2\pi^2} \oint d\Omega = 1 \quad (3.62)$$

となり，(3.34) の係数は $Q \in \mathbb{Z}$ となるようにとられていること，また $g_1(x)$ が $Q = +1$ を持つゲージであることがわかった．他の $SU(2)$ の元に対しても，それぞれ対応する整数が得られる．

補足

(3.27) の $\text{tr}(F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}^*)$ はゲージ不変であるから， Q もゲージ不変であるが，境界条件 (3.20) 中のピュアゲージ $g\partial_\mu g^{-1}$ はゲージ不変でなく，(3.19) のように変換されるのであった．それゆえ， Q がゲージ不変であることを疑問に思うかもしれない．特に，変換行列として g^{-1} をとれば， $A_\mu(x)$ は0になり， $Q = 0$ となってしまうのではないか．そのような心配が必要ないことを示しておく．

まず, (3.19) の $g(x)$ は無限遠方で $g(x) \in \text{SU}(2)$ であるが, 無限遠方以外ではそうである必要はない. これに対し, その変換行列 $g'(x)$ は全空間での変換であるから全空間で $g'(x) \in \text{SU}(2)$ でなければならない. ここで, 4次元ユークリッド空間に対し, 4次元球座標をとって $g'(r, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ と書くことにすると, $g'(x)$ が全空間で $g'(x) \in \text{SU}(2)$ であることにより, $g'(x)$ は全空間で正則であるから, 常に

$$\lim_{r \rightarrow 0} g'(r, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \quad (3.63)$$

という連続変形を考えることができる. ところが, この極限は角座標に依らないから, これは定行列への連続変形である. また, トポロジカルチャージは連続変形に対して不変な量である. それゆえ, g' は始めから定行列と見なしてよい. すると, ピュアゲージの変換性と循環律より, (3.34) がゲージ変換に対して不変となることは明らかである. また, このように全空間で正則なゲージ変換では Q は不変となるから, Q を変化させるようなゲージ変換は少なくとも特異なゲージ変換 (singular gauge transform) でなければならない. ところが, 特異なゲージ変換にはそもそも特異点付近での逆行列は定義されていない (補足終).

以上より, (3.27) が与えられた $A_\mu(x)$ のトポロジカルチャージを与えることが示せた. これにより, 4次元 Euclidean Yang-Mills system における有限の作用を与える Yang-Mills 方程式の解を分類することができる (Yang-Mills 方程式を満たさないゲージ場でも, トポロジカルチャージが存在しないとは限らないことに注意). それらの解のうち, $|Q| = 1$ のものを 1-インスタントン (1-instanton), $|Q| = k \geq 2$ のものを k -インスタントン (k -instanton) という¹. また, それらの $Q = k$ を, それらのインスタントン数 (instanton number) という.

3.1.4 ASD 条件

3.1.2 で, 作用の表式 (3.7) について見たが, それについてももう一度考えてみる. まず, 場の強さ $F_{\mu\nu}$ の反対称性を思い出すと

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^* F_{\mu\nu} &= \frac{1}{4} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F_{\alpha\beta} F_{\rho\sigma} = \frac{1}{2} (\delta_{\alpha\rho} \delta_{\beta\sigma} - \delta_{\alpha\sigma} \delta_{\beta\rho}) F_{\alpha\beta} F_{\rho\sigma} \\ &= \frac{1}{2} (F_{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} - F_{\alpha\beta} F_{\beta\alpha}) = F_{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (3.64)$$

であるから

$$\begin{aligned} S_{\text{YM}} &= -\frac{1}{4g^2} \int d^4x \text{tr} (F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + F_{\mu\nu}^* F_{\mu\nu}^*) \\ &= -\frac{1}{4g^2} \int d^4x \text{tr} \{ (F_{\mu\nu} \pm F_{\mu\nu}^*)^2 \} \mp \frac{1}{2g^2} \int d^4x \text{tr} (F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}^*) \end{aligned} \quad (3.65)$$

となることがわかる. ここで, 第1項はトレースの中が反エルミート行列の2乗になっているから, 3.1.2 と同様にして0以上であることが示せる. また第2項は, 前節のトポロジ

¹ $Q = -1$ のものをアンチインスタントン (anti-instanton), $|Q| = k \geq 2$ のものをマルチインスタントン (multi-instanton) ということもある.

カルチャージ Q によって

$$\mp \frac{1}{2g^2} \int d^4x \operatorname{tr}(F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}^*) = \pm \frac{8\pi^2}{g^2} \left(-\frac{1}{16\pi^2} \int d^4x \operatorname{tr}(F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}^*) \right) = \frac{8\pi^2}{g^2} |Q| \quad (3.66)$$

と書ける．それゆえ，

$$S_{\text{YM}} \geq \frac{8\pi^2}{g^2} |Q| \quad (3.67)$$

であることがわかる．ここで，等号成立条件

$$F_{\mu\nu}^* = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = \pm F_{\mu\nu} \quad (3.68)$$

は作用の極小を与える条件である．しかし，よくよく考えて見ると，これを満たす $F_{\mu\nu}$ は，Bianchi の恒等式より自動的に Yang-Mills 方程式を満たす，すなわち，(3.68) は与えられたゲージ場が Yang-Mills 方程式の解であるための十分条件である（必要条件ではないことに注意）．この条件を (A)SD 条件（自己双対条件，(Anti-)Self Dual conditions）または (A)SD 方程式もしくは単に (A)SD という（+ が SD，- が ASD，以後，(A)SD を単に ASD と書く）．場の強さとその双対の変換性より，ASD 条件は明らかにゲージ不変である．また，ASD である解の作用（ \simeq エネルギー）は，常にそのトポロジカルチャージ（の $8\pi/g$ 倍）に等しい．

ASD であるテンソルと ASD 条件について少し考えてみる．まず，テンソル $T_{\mu\nu}$ が ASD ならば

$$T_{\mu\nu} = \pm \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} T_{\alpha\beta} = \mp \frac{1}{2} \varepsilon_{\nu\mu\alpha\beta} T_{\alpha\beta} = -T_{\nu\mu} \quad (3.69)$$

より $T_{\mu\nu}$ は反対称テンソルである．ここで，反対称テンソル $A_{\mu\nu}$ は一般に

$$A_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ -A_{12} & 0 & A_{23} & A_{24} \\ -A_{13} & -A_{23} & 0 & A_{34} \\ -A_{14} & -A_{24} & -A_{34} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.70)$$

と書けるから，反対称テンソルが持つ独立な成分は6つである．これに，さらに ADS 条件が加わると，独立な成分は3つになるから，いくつもある ADS 条件の成分のうちトリビアルでないものはたかだか3つであることがわかる．それらを書き下すと

$$A_{12}^* = \frac{1}{2} \varepsilon_{12\alpha\beta} A_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (A_{34} - A_{43}) = A_{34} = \pm A_{12}, \quad (3.71)$$

$$A_{13}^* = \frac{1}{2} \varepsilon_{13\alpha\beta} A_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (A_{42} - A_{24}) = A_{42} = \pm A_{13}, \quad (3.72)$$

$$A_{14}^* = \frac{1}{2} \varepsilon_{14\alpha\beta} A_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (A_{23} - A_{32}) = A_{23} = \pm A_{14}, \quad (3.73)$$

改めて書いて

$$A_{12} = \pm A_{34}, \quad A_{13} = \pm A_{42}, \quad A_{14} = \pm A_{23} \quad (3.74)$$

である (複号の上が SD, 下が ASD, ASD であるテンソルは反対称テンソルなので, 添え字の順番に注意). 次に, ASD であるテンソルの例を挙げておく. (2.1) で述べた 't Hooft のイェータシンボル $\eta_{\mu\nu}^{i(\pm)}$ は ASD である ($\eta_{\mu\nu}^{i(+)}$ は SD, $\eta_{\mu\nu}^{i(-)}$ は ASD), すなわち

$$\eta_{\mu\nu}^{i(\pm)*} = \pm \eta_{\mu\nu}^{i(\pm)}. \quad (3.75)$$

が成り立つ. 't Hooft 行列 $\eta_{\mu\nu}^{(\pm)}$ についても同様である.

ASD 条件は与えられたゲージ場が Yang-Mills 方程式を満たすための十分条件であるが, それでも, ASD 条件からは多くのインスタントンが導ける. むしろ, ASD でない full の Yang-Mills 方程式の解の方が珍しい. 4次元 Euclidean Yang-Mills system で ASD であるインスタントンを主に考える場合, そのような分野を ASD Yang-Mills (ASDYM) という.

3.2 't Hooft インスタントン

ASD 条件を用いて解を探すには, 何かしらの ansatz を仮定しなければならない. 't Hooft ansatz に ASD 条件を課すことで, ASD Yang-Mills における最も基本的なインスタントンである 't Hooft インスタントンが得られる.

3.2.1 't Hooft ansatz と 't Hooft 解

以下の ansatz を 't Hooft ansatz という:

$$A_\mu(x) = \frac{i}{2} \eta_{\mu\nu}^{(-)} \partial_\nu \ln \phi(x). \quad (3.76)$$

ただし, $\phi(x)$ はスカラー関数で, 新たな未知関数である. また, $\eta_{\mu\nu}^{(-)}$ は 't Hooft 行列である. 't Hooft テンソル, 't Hooft 行列の定義と性質をいくつか思い出しておく:

$$\eta_{\mu\nu}^{(\pm)} = \eta_{\mu\nu}^{i(\pm)} \sigma_i, \quad (3.77)$$

$$\eta_{\mu\nu}^{i(\pm)} = \varepsilon_{i\mu\nu 4} \pm \delta_{i\mu} \delta_{\nu 4} \mp \delta_{i\nu} \delta_{\mu 4}, \quad (3.78)$$

$$[\eta_{\mu\sigma}^{(\pm)}, \eta_{\nu\rho}^{(\pm)}] = 2i(\delta_{\mu\nu} \eta_{\sigma\rho}^{(\pm)} + \delta_{\rho\sigma} \eta_{\mu\nu}^{(\pm)} - \delta_{\mu\rho} \eta_{\sigma\nu}^{(\pm)} - \delta_{\nu\sigma} \eta_{\mu\rho}^{(\pm)}), \quad (3.79)$$

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \eta_{\beta\sigma}^{(\pm)} = \mp (\delta_{\mu\rho} \eta_{\nu\alpha}^{(\pm)} + \delta_{\nu\sigma} \eta_{\alpha\mu}^{(\pm)} + \delta_{\alpha\sigma} \eta_{\mu\nu}^{(\pm)}), \quad (3.80)$$

$$\frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \eta_{\alpha\beta}^{(\pm)} = \pm \eta_{\mu\nu}^{(\pm)}. \quad (3.81)$$

ASD 条件を用いるには, まずは場の強さ $F_{\mu\nu}$ を求める. すると,

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] \\ &= \frac{i}{2} \eta_{\nu\sigma}^{(-)} \partial_\mu \partial_\sigma \ln \phi - \frac{i}{2} \eta_{\mu\rho}^{(-)} \partial_\nu \partial_\rho \ln \phi - \frac{1}{4} (\partial_\sigma \ln \phi) (\partial_\rho \ln \phi) [\eta_{\mu\sigma}^{(-)}, \eta_{\nu\rho}^{(-)}] \\ &= \frac{i}{2} \eta_{\nu\sigma}^{(-)} \partial_\mu \partial_\sigma \ln \phi - \frac{i}{2} \eta_{\mu\rho}^{(-)} \partial_\nu \partial_\rho \ln \phi \\ &\quad - \frac{i}{2} (\partial_\sigma \ln \phi) (\partial_\rho \ln \phi) (\delta_{\mu\nu} \eta_{\sigma\rho}^{(-)} + \delta_{\rho\sigma} \eta_{\mu\nu}^{(-)} - \delta_{\mu\rho} \eta_{\sigma\nu}^{(-)} - \delta_{\nu\sigma} \eta_{\mu\rho}^{(-)}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{i}{2}\eta_{\nu\sigma}^{(-)}\{\partial_\mu\partial_\sigma\ln\phi - (\partial_\mu\ln\phi)(\partial_\sigma\ln\phi)\} \\
&\quad - \frac{i}{2}\eta_{\mu\sigma}^{(-)}\{\partial_\nu\partial_\sigma\ln\phi - (\partial_\nu\ln\phi)(\partial_\sigma\ln\phi)\} - \frac{i}{2}\eta_{\mu\nu}^{(-)}(\partial_\sigma\ln\phi)^2 \\
&\quad (-i\delta_{\mu\nu}\eta_{\sigma\rho}^{(-)}(\partial_\sigma\ln\phi)(\partial_\rho\ln\phi) \text{ という項は } \sigma, \rho \text{ について } \eta_{\sigma\rho}^{(-)} \text{ が反対称で} \\
&\quad \text{その後ろが対称だから消える})
\end{aligned} \tag{3.82}$$

となる．次に，その双対 $\tilde{F}_{\mu\nu}$ を求める．すると，

$$\begin{aligned}
F_{\mu\nu}^* &= \frac{i}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\eta_{\beta\sigma}^{(-)}\{\partial_\alpha\partial_\sigma\ln\phi - (\partial_\alpha\ln\phi)(\partial_\sigma\ln\phi)\} - \frac{i}{4}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\eta_{\alpha\beta}^{(-)}(\partial_\sigma\ln\phi)^2 \\
&= \frac{i}{2}(\delta_{\mu\nu}\eta_{\nu\alpha}^{(-)} + \delta_{\nu\sigma}\eta_{\alpha\mu}^{(-)} + \delta_{\alpha\sigma}\eta_{\mu\nu}^{(-)})\{\partial_\alpha\partial_\sigma\ln\phi - (\partial_\alpha\ln\phi)(\partial_\sigma\ln\phi)\} + \frac{i}{2}\eta_{\mu\nu}^{(-)}(\partial_\sigma\ln\phi)^2 \\
&= \frac{i}{2}\{\eta_{\nu\alpha}^{(-)}\partial_\alpha\partial_\mu\ln\phi + \eta_{\alpha\mu}^{(-)}\partial_\alpha\partial_\nu\ln\phi + \eta_{\mu\nu}^{(-)}\partial_\alpha(\partial_\alpha\ln\phi)\} \\
&\quad - \frac{i}{2}\{\eta_{\nu\alpha}^{(-)}(\partial_\alpha\ln\phi)(\partial_\mu\ln\phi) + \eta_{\alpha\mu}^{(-)}(\partial_\alpha\ln\phi)(\partial_\nu\ln\phi) + \eta_{\mu\nu}^{(-)}(\partial_\alpha\ln\phi)^2\} \\
&\quad + \frac{i}{2}\eta_{\mu\nu}^{(-)}(\partial_\sigma\ln\phi)^2 \\
&= \frac{i}{2}\eta_{\nu\alpha}^{(-)}\{\partial_\alpha\partial_\mu\ln\phi - (\partial_\alpha\ln\phi)(\partial_\mu\ln\phi)\} \\
&\quad - \frac{i}{2}\eta_{\mu\alpha}^{(-)}\{\partial_\alpha\partial_\nu\ln\phi - (\partial_\alpha\ln\phi)(\partial_\nu\ln\phi)\} + \frac{i}{2}\eta_{\mu\nu}^{(-)}\partial_\alpha(\partial_\alpha\ln\phi)
\end{aligned} \tag{3.83}$$

となる．これで ASD 条件を用いる準備が整った．今の場合，ASD 条件のうち，SD 条件を課す．すると， $\eta_{\nu\sigma}^{(-)}, \eta_{\mu\sigma}^{(-)}$ の項は自動的に満たされているから，

$$\begin{aligned}
\partial_\alpha(\partial_\sigma\ln\phi) + (\partial_\sigma\ln\phi)^2 &= \partial_\sigma\left(\frac{\partial_\sigma\phi}{\phi}\right) + \left(\frac{\partial_\sigma\phi}{\phi}\right)^2 \\
&= \frac{\partial_\sigma(\partial_\sigma\phi)}{\phi} - \frac{\partial_\sigma\phi}{\phi^2}\partial_\sigma\phi + \left(\frac{\partial_\sigma\phi}{\phi}\right)^2 = 0 \iff \frac{\square\phi}{\phi} = 0
\end{aligned} \tag{3.84}$$

が，求める ansatz に対する方程式である．ここで，もし ϕ を正則なものに限れば， $\phi = \text{一定}$ というトリビアルな解しか持たない．しかし，正則でない ϕ ，例えば

$$\phi(x) = \frac{1}{|x|^2} \tag{3.85}$$

は，この方程式の $x = 0$ で特異なトリビアルでない解である．

∴ まず， $x \neq 0$ のとき，

$$\frac{1}{\phi}\square\phi = \frac{1}{\phi}\partial_\sigma\left(-\frac{2x_\sigma}{|x|^4}\right) = \frac{1}{\phi}\left(-\frac{2}{|x|^4}\partial_\sigma x_\sigma + \frac{8x_\sigma}{|x|^6}x_\sigma\right) = \frac{1}{\phi}\left(-\frac{8}{|x|^4} + \frac{8}{|x|^6}|x|^2\right) = 0. \tag{3.86}$$

次に， $x = 0$ のとき， $x \neq 0$ で $\square(1/|x|^2) = 0$ であることと

$$\int d^4x \square\left(\frac{1}{|x|^2}\right) = \oint d\sigma_\mu\partial_\mu\left(\frac{1}{|x|^2}\right) = \oint d\Omega x_\mu|x|^2\left(-\frac{2x_\mu}{|x|^4}\right) = -4\pi^2 \tag{3.87}$$

$$(4 \text{次元ユークリッド空間では } d\sigma_\mu = d\Omega x_\mu |x|^2, \oint d\Omega = 2\pi^2) \quad (3.88)$$

より,

$$\square \left(\frac{1}{|x|^2} \right) = -4\pi^2 \delta^4(x). \quad (3.89)$$

ゆえに,

$$\frac{1}{\phi} \square \phi = -4\pi^2 |x|^2 \delta^4(x) = 0. \quad \square \quad (3.90)$$

これに定数項も加えて一般化した

$$\phi(x) = 1 + \sum_{i=1}^N \frac{\lambda_i^2}{|x_\mu - a_{i\mu}|^2} \quad (3.91)$$

を't Hooft 解という。ただし, λ_i は実数で, $a_{i\mu}$ は4次元ユークリッド空間内の位置である。ここで, 't Hooft 解とは別の

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^{N+1} \frac{\lambda_i^2}{|x_\mu - a_{i\mu}|^2} \quad (3.92)$$

という形の解も考えられる。これをJNR 解 (Jackiw-Nohl-Rebbi) という¹。この節では主に't Hooft 解を扱う。

3.2.2 't Hooft 1-インスタントン

't Hooft 解 (3.91) について, 詳しく見てみる。

まず, $N = 0$ のとき, $\phi(x) = 1$ で $A_\mu = 0$ であり, (3.34) より $Q = 0$ であるから, これは真空解に対応する。

次に, $N = 1$ のとき, $y_\mu = x_\mu - a_{1\mu}$, $y^2 = y_\mu y_\mu$ と置くと, (3.91) は

$$\phi(x) = 1 + \frac{\lambda_1^2}{y^2} \quad (3.93)$$

となる。これを't Hooft ansatz (3.76) に代入してゲージ場 $A_\mu(x)$ を求めると

$$\begin{aligned} A_\mu(x) &= \frac{i}{2} \eta_{\mu\nu}^{(-)} \partial_\nu \ln \phi(x) = \frac{i}{2} \eta_{\mu\nu}^{(-)} \partial_\nu \ln \left(\frac{y^2 + \lambda_1^2}{y^2} \right) = \frac{i}{2} \eta_{\mu\nu}^{(-)} \partial_\nu \{ \ln(y^2 + \lambda_1^2) - 2 \ln y \} \\ &= \frac{i}{2} \eta_{\mu\nu}^{(-)} \left\{ \frac{2y}{y^2 + \lambda_1^2} \partial_\nu y - \frac{2}{y} \partial_\nu y \right\} = \frac{i}{2} \eta_{\mu\nu}^{(-)} \left\{ \frac{2y^3 - 2y(y^2 + \lambda_1^2)}{y^2(y^2 + \lambda_1^2)} \frac{y_\nu}{y} \right\} \\ &= -i \eta_{\mu\nu}^{(-)} \frac{\lambda_1^2 y_\nu}{y^2(y^2 + \lambda_1^2)} \end{aligned} \quad (3.94)$$

¹JNR 解は, $\lambda_{N+1}^2/a_{N+1}^2 = 1$ の条件のもとで $a_{N+1}^2 \rightarrow \infty$, $\lambda_{N+1}^2 \rightarrow \infty$ とすると't Hooft 解と一致するから, 't Hooft 解の一般化のように思われるが, 必ずしもそうとは限らない [12]。

となる．そして， $A_\mu(x)$ より場の強さ $F_{\mu\nu}$ を求めると

$$\begin{aligned}
 F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] \\
 &= -i\eta_{\nu\sigma}^{(-)} \frac{\lambda_1^2 \delta_{\mu\sigma}}{y^4 + \lambda_1^2 y^2} + i\eta_{\nu\sigma}^{(-)} \frac{\lambda_1^2 y_\sigma}{(y^4 + \lambda_1^2 y^2)^2} (4y^3 + 2\lambda_1^2 y) \partial_\mu y \\
 &\quad + i\eta_{\mu\rho}^{(-)} \frac{\lambda_1^2 \delta_{\nu\rho}}{y^4 + \lambda_1^2 y^2} - i\eta_{\mu\rho}^{(-)} \frac{\lambda_1^2 y_\rho}{(y^4 + \lambda_1^2 y^2)^2} (4y^3 + 2\lambda_1^2 y) \partial_\nu y \\
 &\quad - 2i \frac{\lambda_1^4 y_\sigma y_\rho}{(y^4 + \lambda_1^2 y^2)^2} (\delta_{\mu\nu} \eta_{\rho\sigma}^{(-)} + \delta_{\sigma\rho} \eta_{\mu\nu}^{(-)} - \delta_{\mu\sigma} \eta_{\rho\nu}^{(-)} - \delta_{\nu\rho} \eta_{\mu\sigma}^{(-)}) \\
 &= -i\eta_{\nu\mu}^{(-)} \frac{\lambda_1^2}{y^4 + \lambda_1^2 y^2} + i\eta_{\mu\nu}^{(-)} \frac{\lambda_1^2}{y^4 + \lambda_1^2 y^2} \\
 &\quad + i\eta_{\nu\sigma}^{(-)} \frac{y_\sigma y_\mu}{(y^4 + \lambda_1^2 y^2)^2} (4\lambda_1^2 y^2 + 2\lambda_1^4) - i\eta_{\mu\rho}^{(-)} \frac{y_\rho y_\nu}{(y^4 + \lambda_1^2 y^2)^2} (4\lambda_1^2 y^2 + 2\lambda_1^4) \\
 &\quad - 2i\eta_{\mu\nu}^{(-)} \frac{\lambda_1^4 y^2}{(y^4 + \lambda_1^2 y^2)^2} + 2i\eta_{\rho\nu}^{(-)} \frac{\lambda_1^4 y_\mu y_\rho}{(y^4 + \lambda_1^2 y^2)^2} + 2i\eta_{\mu\sigma}^{(-)} \frac{\lambda_1^4 y_\sigma y_\nu}{(y^4 + \lambda_1^2 y^2)^2} \\
 &= +2i\eta_{\mu\nu}^{(-)} \frac{\lambda_1^2}{y^4 + \lambda_1^2 y^2} - 2i\eta_{\mu\nu}^{(-)} \frac{\lambda_1^4 y^2}{(y^4 + \lambda_1^2 y^2)^2} \\
 &\quad + i\eta_{\nu\sigma}^{(-)} \frac{y_\sigma y_\mu}{(y^4 + \lambda_1^2 y^2)^2} 4\lambda_1^2 y^2 - i\eta_{\mu\rho}^{(-)} \frac{y_\rho y_\nu}{(y^4 + \lambda_1^2 y^2)^2} 4\lambda_1^2 y^2 \\
 &= +2i\eta_{\mu\nu}^{(-)} \frac{\lambda_1^2}{(y^2 + \lambda_1^2)^2} + 4i\eta_{\nu\sigma}^{(-)} \frac{\lambda_1^2}{(y^2 + \lambda_1^2)^2} \frac{y_\sigma y_\mu}{y^2} - 4i\eta_{\mu\rho}^{(-)} \frac{\lambda_1^2}{(y^2 + \lambda_1^2)^2} \frac{y_\rho y_\nu}{y^2} \\
 &= 2i \frac{\lambda_1^2}{(y^2 + \lambda_1^2)^2} \left(\eta_{\mu\nu}^{(-)} + 2\eta_{\nu\sigma}^{(-)} \frac{y_\sigma y_\mu}{y^2} - 2\eta_{\mu\rho}^{(-)} \frac{y_\rho y_\nu}{y^2} \right) \tag{3.95}
 \end{aligned}$$

となる．最後に，作用 S_{YM} を求めてみるが，これは多少計算が長い．まず，

$$\begin{aligned}
 &\text{tr} \left\{ \left(\eta_{\mu\nu}^{(-)} + 2\eta_{\nu\sigma}^{(-)} \frac{y_\sigma y_\mu}{y^2} - 2\eta_{\mu\rho}^{(-)} \frac{y_\rho y_\nu}{y^2} \right)^2 \right\} \\
 &= \text{tr} \left\{ \left(\eta_{\mu\nu}^{(-)} + 2\eta_{\nu\sigma}^{(-)} \frac{y_\sigma y_\mu}{y^2} - 2\eta_{\mu\rho}^{(-)} \frac{y_\rho y_\nu}{y^2} \right) \left(\eta_{\mu\nu}^{(-)} + 2\eta_{\nu\alpha}^{(-)} \frac{y_\alpha y_\mu}{y^2} - 2\eta_{\mu\beta}^{(-)} \frac{y_\beta y_\nu}{y^2} \right) \right\} \\
 &= \text{tr} \left\{ \eta_{\mu\nu}^{(-)} \eta_{\mu\nu}^{(-)} + \frac{2}{y^2} \eta_{\mu\nu}^{(-)} (\eta_{\nu\alpha}^{(-)} y_\alpha y_\mu - \eta_{\mu\beta}^{(-)} y_\beta y_\nu) + \frac{2}{y^2} (\eta_{\nu\sigma}^{(-)} y_\sigma y_\mu - \eta_{\mu\rho}^{(-)} y_\rho y_\nu) \eta_{\mu\nu}^{(-)} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{4}{y^4} (\eta_{\nu\sigma}^{(-)} y_\sigma y_\mu - \eta_{\mu\rho}^{(-)} y_\rho y_\nu) (\eta_{\nu\alpha}^{(-)} y_\alpha y_\mu - \eta_{\mu\beta}^{(-)} y_\beta y_\nu) \right\}. \tag{3.96}
 \end{aligned}$$

次に，

$$\text{tr} (\eta_{\mu\nu}^{(\pm)} \eta_{\alpha\beta}^{(\pm)}) = \pm 2\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} + 2\delta_{\mu\alpha} \delta_{\nu\beta} - 2\delta_{\mu\beta} \delta_{\nu\alpha}, \tag{3.97}$$

$$\text{tr} (\eta_{\mu\nu}^{(\pm)} \eta_{\mu\alpha}^{(\pm)}) = 6\delta_{\nu\alpha}, \quad \text{tr} (\eta_{\mu\nu}^{(\pm)} \eta_{\mu\nu}^{(\pm)}) = 24 \tag{3.98}$$

に注意して，括弧内の第1項は

$$\text{tr} (\eta_{\mu\nu}^{(-)} \eta_{\mu\nu}^{(-)}) = 24, \tag{3.99}$$

第2項は

$$\text{tr} \left\{ \frac{2}{y^2} \eta_{\mu\nu}^{(-)} (\eta_{\nu\alpha}^{(-)} y_\alpha y_\mu - \eta_{\mu\beta}^{(-)} y_\beta y_\nu) \right\} = \frac{2}{y^2} (-6\delta_{\mu\alpha} y_\alpha y_\mu - 6\delta_{\nu\beta} y_\beta y_\nu) = -24, \tag{3.100}$$

第3項は

$$\text{tr} \left\{ \frac{2}{y^2} (\eta_{\nu\sigma}^{(-)} y_\sigma y_\mu - \eta_{\mu\rho}^{(-)} y_\rho y_\nu) \eta_{\mu\nu}^{(-)} \right\} = \frac{2}{y^2} (-6\delta_{\sigma\mu} y_\sigma y_\mu - 6\delta_{\rho\nu} y_\rho y_\nu) = -24, \quad (3.101)$$

第4項は

$$\begin{aligned} & \text{tr} \left\{ \frac{4}{y^4} (\eta_{\nu\sigma}^{(-)} y_\sigma y_\mu - \eta_{\mu\rho}^{(-)} y_\rho y_\nu) (\eta_{\nu\alpha}^{(-)} y_\alpha y_\mu - \eta_{\mu\beta}^{(-)} y_\beta y_\nu) \right\} \\ &= \text{tr} \left\{ \frac{4}{y^4} (\eta_{\nu\sigma}^{(-)} \eta_{\nu\alpha}^{(-)} y_\sigma y_\mu y_\alpha y_\mu - \eta_{\nu\sigma}^{(-)} \eta_{\mu\beta}^{(-)} y_\sigma y_\mu y_\beta y_\nu - \eta_{\mu\rho}^{(-)} \eta_{\nu\alpha}^{(-)} y_\rho y_\nu y_\alpha y_\mu + \eta_{\mu\rho}^{(-)} \eta_{\mu\beta}^{(-)} y_\rho y_\nu y_\beta y_\nu) \right\} \\ &= \frac{4}{y^4} \{ 6\delta_{\sigma\alpha} y_\sigma y_\alpha y^2 + 6\delta_{\rho\beta} y_\rho y_\beta y^2 - 2(\pm\varepsilon_{\nu\sigma\mu\beta} + \delta_{\nu\mu}\delta_{\sigma\beta} - \delta_{\nu\beta}\delta_{\sigma\mu}) y_\sigma y_\mu y_\beta y_\nu \\ & \quad - 2(\pm\varepsilon_{\mu\rho\nu\alpha} + \delta_{\mu\nu}\delta_{\rho\alpha} - \delta_{\mu\alpha}\delta_{\rho\nu}) y_\rho y_\nu y_\alpha y_\mu \} = 48. \quad (3.102) \end{aligned}$$

ゆえに

$$\text{tr} \left\{ \left(\eta_{\mu\nu}^{(-)} + 2\eta_{\nu\sigma}^{(-)} \frac{y_\sigma y_\mu}{y^2} - 2\eta_{\mu\rho}^{(-)} \frac{y_\rho y_\nu}{y^2} \right)^2 \right\} = 24 - 24 - 24 + 48 = 24 \quad (3.103)$$

となり、

$$S_{\text{SM}} = -\frac{1}{2g^2} \int dx^4 \text{tr}(F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}) = \frac{2\lambda_1^4}{g^2} \cdot 24 \int dx^4 \frac{1}{(y^2 + \lambda_1^2)^4} \quad (3.104)$$

となる(トレースをとることで元のゲージ場にあった特異点がなくなることに注意)。後は積分のみであるが、4次元球座標をとれば $d^4y = y^3 dy d\Omega$ となり

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4x}{(y^2 + \lambda_1^2)^4} &= 2\pi^2 \int_0^\infty \frac{y^3 dy}{(y^2 + \lambda_1^2)^4} = 2\pi^2 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{(\lambda_1^2 \sec^2 \theta)^4} \cdot \lambda_1^3 \tan^3 \theta \cdot \lambda_1 \sec^2 \theta d\theta \\ & \quad (y = \lambda_1 \tan \theta, \quad dy = \lambda_1 \sec^2 \theta d\theta, \quad y: 0 \rightarrow \infty; \quad \theta: 0 \rightarrow \pi/2) \\ &= \frac{2\pi^2}{\lambda_1^4} \int_0^{\pi/2} \cos^3 \theta \sin^3 \theta d\theta. \quad (3.105) \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \cos^3 \theta \sin^3 \theta d\theta &= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right) \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right) d\theta = -\frac{1}{64i} \int_0^{\pi/2} (e^{i2\theta} - e^{-i2\theta})^3 d\theta \\ &= -\frac{1}{64i} \int_0^{\pi/2} (e^{i6\theta} - 3e^{i2\theta} + 3e^{-i2\theta} - e^{-i6\theta}) d\theta = -\frac{1}{32} \int_0^{\pi/2} (\sin 6\theta - 3\sin 2\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{32} \left[\frac{1}{6} \cos \theta - \frac{3}{2} \cos 2\theta \right]_0^{\pi/2} = -\frac{1}{16} \left(\frac{1}{6} - \frac{3}{2} \right) = \frac{1}{12}. \quad (3.106) \end{aligned}$$

よって、

$$S_{\text{YM}} = \frac{2\lambda_1^4}{g^2} \cdot 24 \cdot \frac{2\pi^2}{\lambda_1^4} \cdot \frac{1}{12} = \frac{8\pi^2}{g^2} \cdot (+1) \quad (3.107)$$

となる。これより $Q = +1$ であることがわかるから、 $N = 1$ の解は1-インスタントンに対応することがわかる。ちなみに、これまでの ansatz に対し $\eta_{\mu\nu}^{(-)}$ を $\eta_{\mu\nu}^{(+)}$ に置き換えた

$$A_\mu(x) = \frac{i}{2} \eta_{\mu\nu}^{(+)} \partial_\nu \ln \phi(x) \quad (3.108)$$

を用いると、 $\eta_{\mu\nu}^{(-)}$ と $\eta_{\mu\nu}^{(+)}$ が入れ換わり $Q = -1$ を持つ1-インスタントンが得られる。

3.2.3 't Hooft 解のゲージ変換

(3.93) は $y = 0$, すなわち , $x_\mu = a_\mu$ で特異となっている . このように解が特異点を持っていると解を図示するときに不便であるし , 作用の積分も特異点を含む積分のように見えてしまう ('t Hooft インスタントンの場合には , 前節で見たように , 作用の被積分関数には特異点は含まれない) . それゆえ , 与えられた解を適当なゲージ変換によって特異点を持たない形に書き直すことが考えられる (ゲージ変換に対し , ASD 条件と Yang-Mills 方程式が不変であるから , ゲージ変換したゲージ場も再び解になることに注意) . 今の場合 , それには 3.1.3 で扱ったゲージ

$$g_1(y) = \frac{y_\nu}{|y|} e_\nu^\dagger . \quad (3.109)$$

を用いる . ただし , 前小節と同様 , $y_\mu = x_\mu - a_{1\mu}$, $y^2 = y_\mu y_\mu$ である . これによりゲージ変換を行うには , まず

$$g_1^{-1} = g_1^\dagger = \frac{y_\nu}{|y|} e_\nu , \quad e_\mu e_\nu^\dagger = \delta_{\mu\nu} + i\eta_{\mu\nu}^{k(-)} \sigma_k = \delta_{\mu\nu} + i\eta_{\mu\nu}^{(-)} \quad (3.110)$$

より

$$\begin{aligned} \partial_\mu g_1 &= \left(\partial_\mu \frac{1}{|y|} \right) y_\nu e_\nu^\dagger + \frac{1}{|y|} (\partial_\mu y_\nu) e_\nu^\dagger = -\frac{y_\mu}{|y|^3} y_\nu e_\nu^\dagger + \frac{1}{|y|} \delta_{\mu\nu} e_\nu^\dagger = -\frac{y_\mu}{|y|^2} g_1 + \frac{1}{|y|} e_\mu^\dagger \\ \therefore g_1^{-1} \partial_\mu g_1 &= -\frac{y_\mu}{|y|^2} + \frac{y_\nu}{|y|^2} (\delta_{\nu\mu} + i\eta_{\nu\mu}^{k(-)} \sigma_k) = -i\eta_{\mu\nu}^{(-)} \frac{y_\nu}{|y|^2} \end{aligned} \quad (3.111)$$

であることを用いて , (3.94) を

$$A_\mu(x) = g_1^{-1} \partial_\mu g_1 \frac{\lambda_1^2}{y^2 + \lambda_1^2} \quad (3.112)$$

と変形しておく . ここで , これを見ると , この時点で特異点が消えたように見えるが , g_1 がまだ特異性を持つことに注意 . また , これを見ると , (無限遠方ではなく) $y_\mu \rightarrow 0$, すなわち , $x_\mu \rightarrow a_\mu$ で $A_\mu(x)$ がピュアゲージ $g_1^{-1} (\partial_\mu g_1)$ に近づくことに注意 . すると , $g_1(y)$ によるゲージ変換は , ひとまず

$$\begin{aligned} A_\mu(x) &\mapsto A'_\mu(x) = g_1 \left(g_1^{-1} \partial_\mu g_1 \frac{\lambda_1^2}{y^2 + \lambda_1^2} \right) g_1^{-1} + g_1 \partial_\mu g_1^{-1} \\ &= (\partial_\mu g_1) g_1^{-1} \left(\frac{\lambda_1^2}{y^2 + \lambda_1^2} - 1 \right) = g_1 (\partial_\mu g_1^{-1}) \frac{y^2}{y^2 + \lambda_1^2} \end{aligned} \quad (3.113)$$

となる . これより , $A'_\mu(x)$ が無限遠方でピュアゲージ $g_1 (\partial_\mu g_1^{-1})$ に近づくのは明らかである . さらに

$$e_\mu^\dagger e_\nu = \delta_{\mu\nu} + i\eta_{\mu\nu}^{k(+)} \sigma_k = \delta_{\mu\nu} + i\eta_{\mu\nu}^{(+)} \quad (3.114)$$

に注意すれば ,

$$\partial_\mu g_1^{-1} = \left(\partial_\mu \frac{1}{|y|} \right) y_\nu e_\nu + \frac{1}{|y|} (\partial_\mu y_\nu) e_\nu = -\frac{y_\mu}{|y|^3} y_\nu e_\nu + \frac{1}{|y|} \delta_{\mu\nu} e_\nu = -\frac{y_\mu}{|y|^2} g_1^{-1} + \frac{1}{|y|} e_\mu$$

$$\therefore g_1 \partial_\mu g_1^{-1} = -\frac{y_\mu}{|y|^2} + \frac{y_\nu}{|y|^2} (\delta_{\nu\mu} + i\eta_{\nu\mu}^{k(+)} \sigma_k) = -i\eta_{\mu\nu}^{(+)} \frac{y_\nu}{|y|^2} \quad (3.115)$$

だから，結局

$$A'_\mu(x) = g_1 (\partial_\mu g_1^{-1}) \frac{y^2}{y^2 + \lambda_1^2} = -i\eta_{\mu\nu}^{(+)} \frac{y_\nu}{y^2 + \lambda_1^2} = -i\eta_{\mu\nu}^{(+)} \frac{(x - a_1)_\nu}{|x - a_1|^2 + \lambda_1^2} \quad (3.116)$$

となり，特異点を持たない形にゲージ変換されていることがわかる（ゲージ変換を行う前のゲージ場は特異点を持ち，それに特異なゲージ変換を行うことで特異でないゲージが得られたということに注意）．次に，このゲージ場を用いて再び作用を求めてみる．まず，場の強さ $F'_{\mu\nu}$ を求めると

$$\begin{aligned} F'_{\mu\nu} &= \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu + [A'_\mu, A'_\nu] = -i\eta_{\nu\sigma}^{(+)} \left\{ -\frac{y_\sigma}{(y^2 + \lambda_1^2)^2} 2y \partial_\mu y + \frac{\partial_\mu y_\sigma}{y^2 + \lambda_1^2} \right\} \\ &\quad + i\eta_{\mu\rho}^{(+)} \left\{ -\frac{y_\rho}{(y^2 + \lambda_1^2)^2} 2y \partial_\nu y + \frac{\partial_\nu y_\rho}{y^2 + \lambda_1^2} \right\} - \frac{y_\eta y_\rho}{(y^2 + \lambda_1^2)^2} [\eta_{\mu\rho}^{(+)}, \eta_{\nu\sigma}^{(+)}] \\ &= -i\eta_{\nu\sigma}^{(+)} \left\{ -\frac{2y_\sigma y}{(y^2 + \lambda_1^2)^2} \frac{y_\mu}{y} + \frac{\delta_{\mu\sigma}}{y^2 + \lambda_1^2} \right\} + i\eta_{\mu\rho}^{(+)} \left\{ -\frac{2y_\rho y}{(y^2 + \lambda_1^2)^2} \frac{y_\nu}{y} + \frac{\delta_{\nu\rho}}{y^2 + \lambda_1^2} \right\} \\ &\quad - 2i \frac{y_\sigma y_\rho}{(y^2 + \lambda_1^2)^2} \{ \delta_{\mu\nu} \eta_{\rho\sigma}^{(+)} + \delta_{\sigma\rho} \eta_{\mu\nu}^{(+)} - \delta_{\mu\sigma} \eta_{\rho\nu}^{(+)} - \delta_{\nu\rho} \eta_{\mu\sigma}^{(+)} \} \\ &= 2i\eta_{\nu\sigma}^{(+)} \frac{y_\sigma y_\mu}{(y^2 + \lambda_1^2)^2} - i\eta_{\nu\mu}^{(+)} \frac{1}{y^2 + \lambda_1^2} - 2i\eta_{\mu\rho}^{(+)} \frac{y_\rho y_\nu}{(y^2 + \lambda_1^2)^2} + i\eta_{\mu\nu}^{(+)} \frac{1}{y^2 + \lambda_1^2} \\ &\quad - 2i\eta_{\mu\nu}^{(+)} \frac{y^2}{(y^2 + \lambda_1^2)^2} + 2i\eta_{\rho\nu}^{(+)} \frac{y_\mu y_\rho}{(y^2 + \lambda_1^2)^2} + 2i\eta_{\mu\sigma}^{(+)} \frac{y_\sigma y_\nu}{(y^2 + \lambda_1^2)^2} \\ &= -2i\eta_{\mu\nu}^{(+)} \frac{y^2}{(y^2 + \lambda_1^2)^2} + 2i\eta_{\mu\nu}^{(+)} \frac{1}{y^2 + \lambda_1^2} = 2i\eta_{\mu\nu}^{(+)} \frac{\lambda_1^2}{(y^2 + \lambda_1^2)^2} \\ &= 2i\eta_{\mu\nu}^{(+)} \frac{\lambda_1^2}{(|x - a_1|^2 + \lambda_1^2)^2} \end{aligned} \quad (3.117)$$

となり，ゲージ変換前のゲージ場による場の強さよりも簡単な形になる．また，これを見ると， $\eta_{\mu\nu}^{(+)}$ が SD であることにより， $F_{\mu\nu}$ が Yang-Mills 方程式の解であることは明らかである．さらに，作用を求める際のトレースをとる作業はゲージ変換前よりも容易になっている．計算してみると

$$\begin{aligned} S_{\text{YM}} &= -\frac{1}{2g^2} \int d^4x \operatorname{tr}(F'_{\mu\nu} F'_{\mu\nu}) = \frac{2\lambda_1^4}{g^2} \operatorname{tr}(\eta_{\mu\nu}^{(+)} \eta_{\mu\nu}^{(+)}) \int d^4x \frac{1}{(y^2 + \lambda_1^2)^4} \\ &= \frac{2\lambda_1^4}{g^2} \cdot 24 \int d^4x \frac{1}{(y^2 + \lambda_1^2)^4} \end{aligned} \quad (3.118)$$

となり，後は前と同様に計算すればよい．その値は，もちろん，ゲージ変換前と一致する（トレースをとった時点で前の作用と一致することに注意）．

3.2.4 't Hooft N -インスタントン

最後に， N -インスタントンについて見てみる．

まず, (3.91) をそのまま (3.76) に代入すると

$$A_\mu(x) = \frac{i}{2} \eta_{\mu\nu}^{(-)} \partial_\nu \left\{ \ln \left(1 + \sum_{i=1}^N \frac{\lambda_i^2}{|y_i|^2} \right) \right\} = -i \eta_{\mu\nu}^{(-)} \left(\sum_i \frac{\lambda_i^2 y_{i\nu}}{|y_i|^4} \right) / \left(1 + \sum_j \frac{\lambda_j^2}{|y_j|^2} \right) \quad (3.119)$$

となる. ただし, $y_{i\mu} = (x - a_i)_\mu$ である. 次に, 前節と同様に

$$g_1^{-1}(y_i) \partial_\mu g_1(y_i) = -i \eta_{\mu\nu}^{(-)} \frac{y_{i\nu}}{|y_i|^2} \quad (3.120)$$

によって

$$A_\mu(x) = \sum_{i=1}^N g_1^{-1}(y_i) \partial_\mu g_1(y_i) f_i(x), \quad f_i(x) = \left(\frac{\lambda_i^2}{y_i^2} \right) / \left(1 + \sum_{j=1}^N \frac{\lambda_j^2}{y_j^2} \right) \quad (3.121)$$

と書き換える. すると, $x \rightarrow a_i$ の極限では, $f_j(x) \rightarrow \delta_{ij}$ より

$$A_\mu(x) \rightarrow g_1^{-1}(y_i) \partial_\mu g_1(y_i) \quad (3.122)$$

となり, 1-インスタントンのピュアゲージに近づくことがわかる. これより, 't Hooft N-インスタントンは 1-インスタントンが各 a_i に置かれているような解と見ることができる. それから, この解は N 個の特異点 $x = a_i$ を持っているから, 前節と同様にして, 適当なゲージ変換によって特異点を持たない形に変形することを考える. それには

$$g_N(x) = \frac{1}{|Z|} Z_\nu e_\nu^\dagger, \quad Z_\nu(x) = \sum_{i=1}^N \gamma_i \left(\frac{y_{i\nu}}{y_i^2} \right) \quad (3.123)$$

というゲージを用いる. ただし, γ_i は任意の実数である. これを用いてゲージ変換を行うと,

$$A_\mu(x) \mapsto A'_\mu(x) = g_N(x) (A_\mu + \partial_\mu) g_N^{-1}(x) \quad (3.124)$$

となる. これを見ると, ある i について $y_i \rightarrow 0$ としたとき,

$$Z_\nu \rightarrow \gamma_i \left(\frac{y_{i\nu}}{y_i^2} \right), \quad Z^2 \rightarrow \frac{\gamma_i^2}{y_i^2} \quad (3.125)$$

より

$$g_N(y_i) \rightarrow \frac{|y_i|}{\gamma_i} \cdot \gamma_i \left(\frac{y_{i\nu}}{y_i^2} e_\nu^\dagger \right) = \frac{y_{i\nu}}{|y_i|} e_\nu^\dagger = g_1(y_i) \quad (3.126)$$

となるので

$$\begin{aligned} A'_\mu(x) &\xrightarrow{x \rightarrow a_i} g_1(y_i) \{ g_1^{-1}(y_i) \partial_\mu g_1(y_i) \} g_1^{-1}(y_i) + g_1(y_i) \partial_\mu g_1^{-1}(y_i) + \cdots \\ &= -g_1(y_i) \partial_\mu g_1^{-1}(y_i) + g_1(y_i) \partial_\mu g_1^{-1}(y_i) + \cdots \\ &= 0 + \cdots \end{aligned} \quad (3.127)$$

となり，最初にあった N 個の特異点はすべて取り除かれる．ところが，1-インスタントンのときとは異なり， N -インスタントンの場合，このゲージ変換によって新たな特異点が生じることがある．例えば， $N = 2, \gamma_1 = \gamma_2 = 1$ としたとき，

$$Z_\mu = \frac{x_\mu - a_{1\mu}}{(x - a_1)_\mu^2} + \frac{x_\mu - a_{2\mu}}{(x - a_2)_\mu^2} \quad (3.128)$$

は

$$\bar{x}_\mu = \frac{1}{2}(a_1 + a_2)_\mu \quad (3.129)$$

で0となるから，ゲージ変換によって特異点 $x_\mu = a_{1\mu}, a_{2\mu}$ が取り除かれるかわりに $\bar{x}_\mu = (1/2)(a_1 + a_2)_\mu$ が特異点となってしまう．このことについては，各インスタントンが4次元ユークリッド空間上の一直線上に並んでいれば，適当な γ_i が存在して，すべての特異点を取り除くことができることが示される [5](例えば， $N = 2$ の場合， $\gamma_1 = -\gamma_2 = 1$ とすれば完全に特異点を取り除ける)．

最後に，なんとなく予想はされるが，この解のトポロジカルチャージが実際に $Q = N$ となることを示しておく．それには，先のように作用から求めるのではなく，今述べたゲージ変換と (3.34) を用いて間接的に求める．まず，今のようにして，適当なゲージ変換により $A_\mu(x)$ が特異点を持たない $A'_\mu(x)$ に変換されたとする．すると， $A'_\mu(x)$ は全空間で解析的であるから，Stokes の定理より，全空間での積分を各 $x = a_i$ を囲む微小な球面 σ_i と，無限遠方での表面積分に書き換えることができる．ところが， N -インスタントンのゲージ場の表式と (3.34) より，無限遠方での表面積分が0になることは明らかである．また，先に見たように， $x \rightarrow a_i$ においてゲージ場は1-インスタントンのピュアゲージに近づくから，(3.34) の $S_3^{(\text{phy})}$ を σ_i を置き換えて考えればよく，3.1.3 での計算により

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{24\pi^2} \oint_{\sigma_i} d\sigma_\mu \operatorname{tr} \left\{ g_1(y_i) (\partial_\mu g_1^{-1}(y_i)) g_1(y_i) (\partial_\mu g_1^{-1}(y_i)) g_1(y_i) (\partial_\mu g_1^{-1}(y_i)) \right\} \\ & = +\frac{1}{24\pi^2} \oint_{\sigma_i} d\sigma_\mu \operatorname{tr} \left\{ (\partial_\mu g_1(y_i)) g_1^{-1}(y_i) (\partial_\mu g_1(y_i)) g_1^{-1}(y_i) (\partial_\mu g_1(y_i)) g_1^{-1}(y_i) \right\} \\ & = -1 \end{aligned} \quad (3.130)$$

となる．これと，微小球面の法線ベクトルが内側を向いていることに注意すれば

$$Q = 0 - (-1) - (-1) - \cdots - (-1) = N \quad (3.131)$$

となり，予想通りの結果が得られた (1-インスタントンのトポロジカルチャージもこのようにして求めれば楽だったのではあるが)．

3.3 Liouville 解

't Hooft インスタントンは4次元ユークリッド空間において4次元球対称な解である．これに対し，Liouville 解は4次元ユークリッド空間において円柱対称性を持つ．

3.3.1 Cauchy-Riemann の定理

Liouville 解の話をする前に, Cauchy-Riemann の定理を復習しておく. 複素平面

$$z = x + iy \quad (3.132)$$

上に定義された複素関数

$$w(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (3.133)$$

の微分が極限の取り方に依らず一意に決まるとき, $w(z)$ は解析的または $w(z)$ は解析関数であるという. ここで, 解析関数 $w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ についての微分

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y + \Delta y) + iv(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) - iv(x, y)}{\Delta x + i\Delta y} \quad (3.134)$$

を考えると, 解析関数の定義より始めから $\Delta y = 0$ としてよいから,

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y) + iv(x + \Delta x, y) - u(x, y) - iv(x, y)}{\Delta x} = u_x + iv_x \quad (3.135)$$

となる. また, 始めから $\Delta x = 0$ としてもよいから,

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x, y + \Delta y) + iv(x, y + \Delta y) - u(x, y) - iv(x, y)}{i\Delta y} = -iu_y + v_y \quad (3.136)$$

となる. それゆえ, 任意の解析関数 $w(z)$ に対し

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x \quad (3.137)$$

が成り立つ. 実は, この逆も成り立ち, (3.137) を満たす任意の複素関数は解析関数である (証明は省略). これを Cauchy-Riemann の定理, (3.137) を Cauchy-Riemann の方程式という. 最後に, Cauchy-Riemann の定理から直ちにわかる系を紹介しておく. $w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ が解析関数ならば, (3.137) より

$$u_{xx} + u_{yy} = v_{xy} - v_{yx} = 0, \quad v_{xx} + v_{yy} = -u_{xy} + v_{yx} = 0 \quad (3.138)$$

なので

$$\nabla^2 w(z) = u_{xx} + u_{yy} + i(v_{xx} + v_{yy}) = 0, \quad (3.139)$$

すなわち, 解析関数は常にラプラス方程式を満たす.

3.3.2 Liouville 解の ansatz

't Hooft 解は, その ansatz から本質的に 4 次元球対称である. これに対し, Liouville 解の ansatz は 4 次元円柱座標 (cylindrical coordinate)

$$t = x_0, \quad (\text{時間座標}) \quad (3.140)$$

$$r = (x_i x_i)^{1/2} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (\text{空間座標}) \quad (3.141)$$

によって書かれ, Liouville 解は円柱的な対称性 (cylindrical symmetry) を持つことになる. Liouville 解は Witten が見つけたもので [6], その導出の途中に Liouville 方程式という非線形の偏微分方程式が登場する.

4次元円柱座標において, Liouville 解の (随伴表現による) ansatz は以下ようになる:

$$A_j^a = \frac{\varphi_2 + 1}{r^2} \varepsilon_{jak} x_k + \frac{\varphi_1}{r^3} (\delta_{ja} r^2 - x_j x_a) + \frac{A_1}{r^2} x_j x_a, \quad A_0^a = \frac{A_0}{r} x^a. \quad (3.142)$$

ただし, a は内部空間の脚で $a = 1, 2, 3$ である. また, $\varphi_1, \varphi_2, A_0, A_1$ は r と x_0 の関数で, 新たな未知関数である. これより場の強さ

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - \varepsilon^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \quad (3.143)$$

を求めてみる. $\partial_i = (\partial_i r) \partial_r = (x_i/r) \partial_r$, $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}$, $x_i x_i = r^2$ などに注意して, まず F_{0i}^a は

$$\begin{aligned} F_{0i}^a &= \partial_0 A_i^a - \partial_i A_0^a - \varepsilon^{abc} A_0^b A_i^c \\ &= \partial_0 \left\{ \frac{\varphi_2 + 1}{r^2} \varepsilon_{iak} x_k + \frac{\varphi_1}{r^3} (\delta_{ia} r^2 - x_i x_a) + \frac{A_1}{r^2} x_i x_a \right\} - \partial_i \left(\frac{A_0}{r} x^a \right) \\ &\quad - \varepsilon_{abc} \frac{A_0}{r} \left\{ \frac{\varphi_2 + 1}{r^2} \varepsilon_{ick} x_b x_k + \frac{\varphi_1}{r^3} (x_b \delta_{ic} r^2 - x_i x_b x_c) + \frac{A_1}{r^2} x_i x_b x_c \right\} \\ &= \frac{\partial_0 \varphi_2}{r^2} \varepsilon_{iak} x_k + \frac{\partial_0 \varphi_1}{r^3} (\delta_{ia} r^2 - x_i x_a) + \frac{\partial_0 A_1}{r^2} x_i x_a - \frac{\partial_r A_0}{r^2} x_i x_a + \frac{A_0}{r^3} x_i x_a - \frac{A_0}{r} \delta_{ia} \\ &\quad - \frac{A_0 (\varphi_2 + 1)}{r^3} (-\delta_{ia} r^2 + x_i x_a) - \frac{A_0 \varphi_1}{r^2} \varepsilon_{iak} x_k \\ &= (\partial_0 \varphi_2 - A_0 \varphi_1) \frac{\varepsilon_{iak} x_k}{r^2} + (\partial_0 \varphi_1 + A_0 \varphi_2) \frac{(\delta_{ai} r^2 - x_a x_i)}{r^3} + r^2 (\partial_0 A_1 - \partial_r A_0) \frac{x_a x_i}{r^4} \end{aligned} \quad (3.144)$$

となる (添え字の上下は気にしなくてよい). 次に, $(1/2) \varepsilon_{ijk} F_{jk}^a$ であるが, ひとまず

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} F_{jk}^a &= \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} (\partial_j A_k^a - \partial_k A_j^a - \varepsilon^{abc} A_j^b A_k^c) = \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k^a - \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{abc} A_j^b A_k^c \\ &= \varepsilon_{ijk} \partial_j \left\{ \frac{\varphi_2 + 1}{r^2} \varepsilon_{kal} x_l + \frac{\varphi_1}{r^3} (\delta_{ka} r^2 - x_k x_a) + \frac{A_1}{r^2} x_k x_a \right\} \\ &\quad - \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{abc} \left\{ \frac{\varphi_2 + 1}{r^2} \varepsilon_{jbl} x_l + \frac{\varphi_1}{r^3} (\delta_{jb} r^2 - x_j x_b) + \frac{A_1}{r^2} x_j x_b \right\} \\ &\quad \cdot \left\{ \frac{\varphi_2 + 1}{r^2} \varepsilon_{kcm} x_l + \frac{\varphi_1}{r^3} (\delta_{kc} r^2 - x_k x_c) + \frac{A_1}{r^2} x_k x_c \right\}. \end{aligned} \quad (3.145)$$

ここで, 第1項は

$$\varepsilon_{ijk} \partial_j \left\{ \frac{\varphi_2 + 1}{r^2} \varepsilon_{kal} x_l + \frac{\varphi_1}{r^3} (\delta_{ka} r^2 - x_k x_a) + \frac{A_1}{r^2} x_k x_a \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \varepsilon_{ijk} \left\{ \frac{\partial_r \varphi_2}{r^3} \varepsilon_{kal} x_j x_l - 2 \frac{\varphi_2 + 1}{r^4} \varepsilon_{kal} x_j x_l + \frac{\varphi_2 + 1}{r^2} \varepsilon_{kal} \delta_{jl} \right. \\
&\quad + \frac{\partial_r \varphi_1}{r^4} (\delta_{ka} x_j r^2 - x_j x_k x_a) - 3 \frac{\varphi_1}{r^5} (\delta_{ka} x_j r^2 - x_j x_k x_a) + \frac{\varphi_1}{r^3} (2\delta_{ka} x_j - \delta_{jk} x_a - \delta_{ja} x_k) \\
&\quad \left. + \frac{\partial_r A_1}{r^3} x_j x_k x_a - 2 \frac{A_1}{r^4} x_j x_k x_a + \frac{A_1}{r^2} (\delta_{jk} x_a + \delta_{ja} x_k) \right\} \\
&= \varepsilon_{ijk} \left\{ \left(\frac{\partial_r \varphi_2}{r^3} - 2 \frac{\varphi_2 + 1}{r^4} \right) \varepsilon_{kal} x_j x_l + \frac{\varphi_2 + 1}{r^2} \varepsilon_{kaj} \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\partial_r \varphi_1}{r^2} - \frac{\varphi_1}{r^3} \right) \delta_{ka} x_j - \left(\frac{\varphi_1}{r^3} - \frac{A_1}{r^2} \right) \delta_{ja} x_k \right\} \\
&= \left(\frac{\partial_r \varphi_2}{r^3} - 2 \frac{\varphi_2 + 1}{r^4} \right) (\delta_{ia} r^2 - x_i x_a) + \frac{\varphi_2 + 1}{r^2} \cdot 2\delta_{ia} \\
&\quad - \left(\frac{\partial_r \varphi_1}{r^2} - \frac{\varphi_1}{r^3} \right) \varepsilon_{ias} x_s - \left(\frac{\varphi_1}{r^3} - \frac{A_1}{r^2} \right) \varepsilon_{ias} x_s \\
&= \frac{\delta_{ia} r^2 - x_i x_a}{r^3} \partial_r \varphi_2 + 2 \frac{x_i x_a}{r^4} (\varphi_2 + 1) - \frac{\varepsilon_{ias} x_s}{r^2} (\partial_r \varphi_1 - A_1), \tag{3.146}
\end{aligned}$$

第2項は

$$\begin{aligned}
&- \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{abc} \left\{ \frac{\varphi_2 + 1}{r^2} \varepsilon_{jbl} x_l + \frac{\varphi_1}{r^3} (\delta_{jb} r^2 - x_j x_b) + \frac{A_1}{r^2} x_j x_b \right\} \\
&\quad \cdot \left\{ \frac{\varphi_2 + 1}{r^2} \varepsilon_{kcm} x_m + \frac{\varphi_1}{r^3} (\delta_{kc} r^2 - x_k x_c) + \frac{A_1}{r^2} x_k x_c \right\} \\
&= - \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{abc} \left\{ \frac{(\varphi_2 + 1)^2}{r^4} \varepsilon_{jbl} \varepsilon_{kcm} x_l x_m + \frac{\varphi_2 + 1}{r^3} \varphi_1 (\varepsilon_{jbl} \delta_{kc} x_l + \varepsilon_{kcm} \delta_{jb} x_m) \right. \\
&\quad - \left(\frac{\varphi_2 + 1}{r^5} \varphi_1 - \frac{\varphi_2 + 1}{r^4} A_1 \right) (\varepsilon_{jbl} x_l x_k x_c + \varepsilon_{kcm} x_m x_j x_b) \\
&\quad \left. - \left(\frac{\varphi_1^2}{r^4} - \frac{\varphi_1 A_1}{r^3} \right) (\delta_{jb} x_k x_c + \delta_{kc} x_j x_b) - \frac{\varphi_1^2}{r^2} \delta_{jb} \delta_{kc} \right\} \\
&= - \frac{(\varphi_2 + 1)^2}{r^4} x_i x_a - \frac{\varphi_2 + 1}{r^3} \varphi_1 \varepsilon_{ias} x_s + \left(\frac{\varphi_2 + 1}{r^5} \varphi_1 - \frac{\varphi_2 + 1}{r^4} A_1 \right) \varepsilon_{ias} x_s r^2 \\
&\quad + \left(\frac{\varphi_1^2}{r^4} - \frac{\varphi_1 A_1}{r^3} \right) (\delta_{ia} r^2 - x_i x_a) - \frac{\varphi_1^2}{r^2} \delta_{ia} \\
&= - \frac{x_i x_a}{r^4} (\varphi_2 + 1)^2 - \frac{\varepsilon_{ias} x_s}{r^2} (\varphi_2 + 1) A_1 + \frac{\delta_{ia} r^2 - x_i x_a}{r^4} \varphi_1^2 - \frac{\delta_{ia} r^2 - x_i x_a}{r^3} \varphi_1 A_1 - \frac{\delta_{ia}}{r^2} \varphi_1^2. \tag{3.147}
\end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} F_{jk}^a &= \frac{\delta_{ia} r^2 - x_i x_a}{r^3} \partial_r \varphi_2 + 2 \frac{x_i x_a}{r^4} (\varphi_2 + 1) - \frac{\varepsilon_{ias} x_s}{r^2} (\partial_r \varphi_1 - A_1) \\
&\quad - \frac{x_i x_a}{r^4} (\varphi_2 + 1)^2 - \frac{\varepsilon_{ias} x_s}{r^2} (\varphi_2 + 1) A_1 + \frac{\delta_{ia} r^2 - x_i x_a}{r^4} \varphi_1^2 - \frac{\delta_{ia} r^2 - x_i x_a}{r^3} \varphi_1 A_1 - \frac{\delta_{ia}}{r^2} \varphi_1^2 \\
&= - \frac{\varepsilon_{ias} x_s}{r^2} (\partial_r \varphi_1 + A_1 \varphi_2) + \frac{\delta_{ia} r^2 - x_i x_a}{r^3} (\partial_r \varphi_2 - \varphi_1 A_1) + \frac{x_i x_a}{r^4} (1 - \varphi_1^2 - \varphi_2^2). \tag{3.148}
\end{aligned}$$

となる．ここで， $\partial_r = \partial_1$ として改めて場の強さを書き出すと

$$F_{0i}^a = (\partial_0\varphi_2 - A_0\varphi_1)\frac{\varepsilon_{iak}x_k}{r^2} + (\partial_0\varphi_1 + A_0\varphi_2)\frac{(\delta_{ai}r^2 - x_ax_i)}{r^3} + r^2(\partial_0A_1 - \partial_1A_0)\frac{x_ax_i}{r^4}, \quad (3.149)$$

$$\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}F_{jk}^a = -\frac{\varepsilon_{ias}x_s}{r^2}(\partial_1\varphi_1 + A_1\varphi_2) + \frac{\delta_{ia}r^2 - x_ix_a}{r^3}(\partial_1\varphi_2 - \varphi_1A_1) + \frac{x_ix_a}{r^4}(1 - \varphi_1^2 - \varphi_2^2). \quad (3.150)$$

となり，これらより作用 A を求めると

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{4} \int d^3x \int dt F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a = \frac{1}{2} \int d^3x \int dt \left\{ F_{0i}^a F_{0i}^a + \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} F_{jk}^a \right) \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{ilm} F_{lm}^a \right) \right\} \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_0^{\infty} dr r^2 \left\{ (\partial_0\varphi_2 - A_0\varphi_1)^2 \frac{2}{r^2} + (\partial_0\varphi_1 + A_0\varphi_2)^2 \frac{2}{r^2} + (\partial_0A_1 - \partial_1A_0)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{r^2} (\partial_1\varphi_1 + A_1\varphi_2)^2 + \frac{2}{r^2} (\partial_1\varphi_2 - A_1\varphi_1)^2 + \frac{1}{r^4} (1 - \varphi_1^2 - \varphi_2^2)^2 \right\} \\ &\quad (\text{クロスタームはことごとく消える}) \\ &= 8\pi \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_0^{\infty} dr \left\{ \frac{1}{2} (D_\mu\varphi_i)^2 + \frac{1}{8} r^2 F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{4r^2} (1 - \varphi_1^2 - \varphi_2^2)^2 \right\} \end{aligned} \quad (3.151)$$

となるが，これは $\varphi_0, \varphi_1, A_0, A_1$ をそれぞれヒッグス場，ゲージ場と見なせば 2 次元 Abelian Higgs モデルの作用と同じ形である．ただし， $F_{\mu\nu}, D_\mu$ はそれぞれ 2 次元 Abelian Higgs モデルにおける場の強さと共変微分で

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (3.152)$$

$$D_\mu\varphi_i = \partial_\mu\varphi_i + \varepsilon_{ij}A_\mu\varphi_j \quad (\mu, \nu = 0, 1, i, j = 1, 2) \quad (3.153)$$

である．また，曲率 $g^{\mu\nu}$ を持つ空間における Abelian Higgs モデルの作用

$$\int d^2x \sqrt{g} \left\{ \frac{1}{2} g^{\mu\nu} D_\mu\varphi_i D_\nu\varphi_i + \frac{1}{8} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} + \frac{1}{4} (1 - \varphi_1^2 - \varphi_2^2)^2 \right\} \quad (3.154)$$

と比較すると，今の場合 $g^{\mu\nu} = r^2\delta^{\mu\nu}$ であることがわかる．

$$\begin{aligned} \therefore ds^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \frac{1}{r^2} (dt^2 + dr^2) \quad \therefore \sqrt{g} = \sqrt{\frac{1}{r^2} \cdot \frac{1}{r^2}} = \frac{1}{r^2}, \\ \frac{1}{2} g^{\mu\nu} D_\mu\varphi_i D_\nu\varphi_i &= \frac{1}{2} r^2 (D_\mu\varphi_i)^2, \quad g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} = r^4 F_{\mu\nu}^2 \end{aligned} \quad (3.155)$$

などを代入すればよい． □

3.3.3 Liouville 解

次に，() に ASD 条件を課して解を求めてみる．今の場合，ASD 条件は明らかに

$$F_{0i}^a = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} F_{jk}^a \quad (3.156)$$

であるが, (3.149), (3.150) より, これが満たされるには

$$\partial_0\varphi_1 + A_0\varphi_2 = \partial_1\varphi_2 - A_1\varphi_1, \quad (3.157)$$

$$\partial_1\varphi_1 + A_1\varphi_2 = -(\partial_0\varphi_2 - A_0\varphi_1), \quad (3.158)$$

$$r^2(\partial_0A_1 - \partial_1A_0) = 1 - \varphi_1^2 - \varphi_2^2 \quad (3.159)$$

であれば十分である (これが必要かどうかはここでは考えないことにする). これを解くには, まずゲージを $\partial_\mu A_\mu = 0$ に固定する. ここで, この条件は, $A_\mu = \varepsilon_{\mu\nu}\partial_\nu\psi$ を満たす ψ が存在することと同値である.

∴ まず

$$A_0 = \partial_1\psi \iff \psi(r, t) = \int_0^{r_0} A_0 dr + f(t). \quad (f \text{ は任意関数}) \quad (3.160)$$

次に

$$\begin{aligned} \partial_0\psi &= \int_0^{r_0} \partial_0A_0 dr + f'(t) = -A_1 \\ \iff f(t) &= -\int_0^{t_0} \left(\int_0^{r_0} \partial_0A_0 dr + A_1 \right) dt + g(r). \quad (g \text{ は任意関数}) \end{aligned} \quad (3.161)$$

ところが

$$g'(r) = \int_0^{t_0} (\partial_0A_0 + \partial_1A_1) dt = 0 \iff g(r) = c. \quad (c \text{ は任意定数}) \quad (3.162)$$

よって

$$\psi(r, t) = \int_0^{r_0} A_0 dr - \int_0^{t_0} \left(\int_0^{r_0} \partial_0A_0 dr + A_1 \right) dt + c \quad (3.163)$$

であり

$$\partial_\mu A_\mu = 0 \implies \exists\psi \text{ s.t. } A_\mu = \varepsilon_{\mu\nu}\partial_\nu\psi. \quad (3.164)$$

逆は, $\partial_\mu\partial_\nu = \partial_\nu\partial_\mu$ より明らかである. □

これより, (3.157), (3.158) はそれぞれ

$$\begin{aligned} \partial_0\varphi_1 + A_0\varphi_2 = \partial_1\varphi_2 - A_1\varphi_1 &\iff \partial_0\varphi_1 + (\partial_1\psi)\varphi_2 = \partial_1\varphi_2 - (-\partial_0\psi)\varphi_1 \\ \iff \{\partial_0 - (\partial_0\psi)\}\varphi_1 &= \{\partial_1 - (\partial_1\psi)\}\varphi_2 \end{aligned} \quad (3.165)$$

$$\begin{aligned} \partial_1\varphi_1 + A_1\varphi_2 = -(\partial_0\varphi_2 - A_0\varphi_1) &\iff \partial_1\varphi_1 + (-\partial_0\psi)\varphi_2 = -\{\partial_0\varphi_2 - (\partial_1\psi)\varphi_1\} \\ \iff \{\partial_1 - (\partial_1\psi)\}\varphi_1 &= -\{\partial_0 - (\partial_0\psi)\}\varphi_2 \end{aligned} \quad (3.166)$$

と書けるが,

$$\varphi_1 = e^\psi\chi_1, \quad \varphi_2 = e^\psi\chi_2 \quad (3.167)$$

と置けば

$$\begin{aligned} \{\partial_0 - (\partial_0\psi)\}\varphi_1 &= \{\partial_1 - (\partial_1\psi)\}\varphi_2 \\ \iff e^\psi\{(\partial_0\psi) + \partial_0 - (\partial_0\psi)\}\chi_1 &= e^\psi\{(\partial_1\psi) + \partial_1 - (\partial_1\psi)\}\chi_2 \\ \iff \partial_0\chi_1 &= \partial_1\chi_2 \end{aligned} \quad (3.168)$$

$$\begin{aligned} \{\partial_1 - (\partial_1\psi)\}\varphi_1 &= -\{\partial_0 - (\partial_0\psi)\}\varphi_2 \\ \iff e^\psi\{(\partial_1\psi) + \partial_1 - (\partial_1\psi)\}\chi_1 &= -e^\psi\{(\partial_0\psi) + \partial_0 - (\partial_0\psi)\}\chi_2 \\ \iff \partial_1\chi_1 &= -\partial_0\chi_2 \end{aligned} \quad (3.169)$$

となって Cauchy-Riemann の方程式になる．それゆえ， $z = r + it$ で

$$f = \chi_1 - i\chi_2 \quad (3.170)$$

が解析的となる任意の χ_1, χ_2 が解となる．すると，残りは (3.159) であるが，これは今までのいくつかの関数の定義を用いると

$$\begin{aligned} r^2(\partial_0 A_1 - \partial_1 A_0) &= 1 - \varphi_1^2 - \varphi_2^2 \\ \iff r^2\{\partial_0(-\partial_0\psi) - \partial_1(\partial_1\psi)\} &= 1 - (\chi_1^2 + \chi_2^2)e^{2\psi} \\ \iff -r^2\nabla^2\psi &= 1 - f^*fe^{2\psi} \end{aligned} \quad (3.171)$$

と書ける．ただし

$$\nabla^2 = \partial_\mu\partial_\mu = \partial_0^2 + \partial_1^2 \quad (3.172)$$

である．ここで，(3.171) が，任意の零点を持たない解析関数 $h(z)$ による

$$f \mapsto fh, \quad \psi \mapsto \psi - \frac{1}{2}\ln(h^*h) \quad (3.173)$$

というゲージ変換に対して不変であることに注意．

$\therefore h(z)$ は零点を持たない解析関数だから， $\ln(h^*h)$ は解析関数である．ところが，解析関数はラプラス方程式を満たすから

$$\begin{aligned} -r^2\nabla^2\psi &= 1 - f^*fe^{2\psi} \mapsto -r^2\nabla^2\left\{\psi - \frac{1}{2}\ln(h^*h)\right\} = -r^2\nabla^2\psi \\ &= 1 - h^*f^*fhe^{2\psi - \ln(h^*h)} = 1 - f^*f(h^*h)(h^*h)^{-1}e^{2\psi} = 1 - f^*fe^{2\psi}. \quad \square \end{aligned} \quad (3.174)$$

また，零点を持つ解析関数 $h(z)$ によるゲージ変換は，零点の数だけの孤立した特異点を持つことになる．

さて，(3.171) を解くために，新たに

$$\psi = \ln r - \frac{1}{2}\ln(f^*f) + \rho \quad (3.175)$$

という ansatz を導入する．ここで $\rho(z)$ は新たな未知関数である．この ansatz により， f の零点をひとまず無視して $\nabla^2 \ln(f^*f) = 0$ に注意すると，(3.171) は，結局

$$-r^2\nabla^2\psi = 1 - f^*fe^{2\psi} \iff -r^2\nabla^2\left(\ln r - \frac{1}{2}\ln(f^*f) + \rho\right) = -r^2\left(-\frac{1}{r^2} + \nabla^2\rho\right)$$

$$= 1 - f^* f e^{2 \ln r - \ln(f^* f) + 2\rho} = 1 - r^2 e^{2\rho} \iff \nabla^2 \rho = e^{2\rho} \quad (3.176)$$

と書けるが，最後の式は Liouville 方程式と呼ばれる微分方程式である．この方程式の解だが，ひとまず

$$\rho_1(z) = -\ln \left\{ \frac{1}{2}(1 - z^* z) \right\}. \quad (3.177)$$

は (3.176) を満たす．

$$\begin{aligned} \therefore \partial_1 &= (\partial_1 z) \frac{\partial}{\partial z} + (\partial_1 z^*) \frac{\partial}{\partial z^*} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z^*}, & \partial_1^2 &= \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial z^*} + \frac{\partial^2}{\partial z^{*2}}, \\ \partial_0 &= (\partial_0 z) \frac{\partial}{\partial z} + (\partial_0 z^*) \frac{\partial}{\partial z^*} = i \frac{\partial}{\partial z} - i \frac{\partial}{\partial z^*}, & \partial_0^2 &= -\frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial z^*} - \frac{\partial^2}{\partial z^{*2}} \\ \therefore \nabla^2 &= 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial z^*} \end{aligned} \quad (3.178)$$

であることに注意して

$$\begin{aligned} \nabla^2 \rho_1(z) &= -4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial z^*} \ln \left\{ \frac{1}{2}(1 - z^* z) \right\} = 4 \frac{\partial}{\partial z} \frac{z}{1 - z^* z} \\ &= 4 \frac{1}{1 - z^* z} - 4 \frac{z}{(1 - z^* z)^2} (-z^*) = \frac{4}{(1 - z^* z)^2}. \end{aligned} \quad (3.179)$$

また

$$e^{2\rho_1(z)} = e^{-\ln \left\{ \frac{1}{4}(1 - z^* z)^2 \right\}} = \frac{4}{(1 - z^* z)^2}. \quad (3.180)$$

よって， $\rho_1(z)$ は (3.176) を満たす．□

ここで，任意の解析関数 $g(z)$ に対し， $\rho_1(g)$ という関数を考えると，

$$\nabla_z^2 = \left| \frac{dg}{dz} \right|^2 \nabla_g^2 \quad (3.181)$$

より

$$\nabla_z^2 \rho_1(g) = \left| \frac{dg}{dz} \right|^2 \nabla_g^2 \rho_1(g) = \left| \frac{dg}{dz} \right|^2 e^{2\rho_1(g)} \quad (3.182)$$

となる．これは，(3.176) とは因子 $|dg/dz|^2$ 分だけ異なるが， $\rho_1(g)$ の代わりに

$$\rho(z) = \rho_1(g) + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{dg}{dz} \right|^2 \quad (3.183)$$

と置けば，

$$\nabla_z^2 \rho(z) = \nabla_z^2 \left(\rho_1(g) + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{dg}{dz} \right|^2 \right) = \nabla_z^2 \rho_1(g) = \left| \frac{dg}{dz} \right|^2 e^{2\rho_1(g)}$$

$$= e^{2\{\rho_1(g) + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{dg}{dz} \right|^2\}} = e^{2\rho(g)}, \quad (3.184)$$

すなわち,

$$\rho(z) = -\ln \left\{ \frac{1}{2}(1 - g^*g) \right\} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{dg}{dz} \right|^2 \quad (3.185)$$

も Liouville 方程式の解となっている．これを (3.175) に代入してみると,

$$\psi = \ln r - \frac{1}{2} \ln(f^*f) - \ln \left\{ \frac{1}{2}(1 - g^*g) \right\} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{dg}{dz} \right|^2 = \frac{1}{2} \ln \left| \left(\frac{dg}{dz} \right) / f \right|^2 - \ln \left(\frac{1 - g^*g}{2r} \right) \quad (3.186)$$

となる．これを見ると, $(dg/dz)/f$ が零点や極を持つと ψ は特異になるから, 特異でない最も一般的な解は

$$\psi = -\ln \left(\frac{1 - g^*g}{2r} \right), \quad f = \frac{dg}{dz} \quad (3.187)$$

であることがわかる．ただし, g は $r = 0$ で $|g| = 1$, $r > 0$ で $|g| < 1$ となるような解析関数である．このような性質を持ち, かつ $z \rightarrow 0$ で滑らかな振る舞いをする最も一般的な関数としては

$$g(z) = \prod_{i=1}^k \left(\frac{a_i - z}{a_i^* + z} \right) \quad (3.188)$$

とすればよい．ただし, a_i は $\operatorname{Re} a_i > 0$ を満たす複素数, すなわち, 複素平面 z の上半面に分布する点である．

3.3.4 Liouville 解の性質

(3.173) を見ると, 解の持つゲージ不変な唯一の性質は f の持つ零点であるから, それらがこの解において重要な役割を果たすことになる．

まず, (3.187), (3.188) において, $k = 1$ の場合の解

$$g_1(z) = \frac{a_1 - z}{a_1^* + z} \quad (3.189)$$

について見てみる．これより f を求めると

$$f = \frac{dg}{dz} = -\frac{1}{a_1^* + z} - \frac{a_1 - z}{(a_1^* + z)^2} = -\frac{a_1^* + a_1}{(a_1^* + z)^2} \neq 0 \quad (\operatorname{Re} a_1^* > 0) \quad (3.190)$$

で f は零点を持たない．また, このとき ψ を計算してみると

$$1 - g_1^*g_1 = 1 - \frac{a_1^* - z^*}{a_1 + z^*} \frac{a_1 - z}{a_1^* + z} = \frac{a_1z + a_1^*z^* + a_1z^* + a_1^*z}{|a_1 + z^*|^2} = \frac{(a_1 + a_1^*)(z + z^*)}{|a_1 + z^*|^2}$$

$$\therefore \psi = -\ln \frac{1-g^*g}{2r} = -\ln \frac{a_1 + a_1^*}{|a_1 + z^*|^2} = -\frac{1}{2} \ln(h^*h) \quad (z + z^* = 2r), \quad (3.191)$$

$$h(z) = \frac{a_1 + a_1^*}{(a_1^* + z)^2} \quad (3.192)$$

となる．ここで $\text{Re } a_1^* > 0$ より $h(z)$ は解析関数であるから，これは真空をゲージ変換したものである．一般に $k > 2$ の場合， f は $k - 1$ 個の零点を持つ ($g(z)$ を微分すると，分子の z が1つ消えるから)．

次に，Liouville 解のトポロジカルチャージ Q を計算してみると，ひとまず

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{32\pi^2} \int d^4x F_{\mu\nu}^a \tilde{F}_{\mu\nu}^a = \frac{1}{2\pi} \int d^2x r^2 F_{0i}^a \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} F_{jk}^a \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int d^2x r^2 \left\{ -(\partial_0\varphi_2 - A_0\varphi_1)(\partial_1\varphi_1 + A_1\varphi_2) \frac{2}{r^2} \right. \\ &\quad \left. + (\partial_0\varphi_1 + A_0\varphi_1)(\partial_1\varphi_2 - \varphi_1 A_1) \frac{2}{r^2} + (\partial_0 A_1 - \partial_1 A_0)(1 - \varphi_1^2 - \varphi_2^2) \frac{1}{r^2} \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int d^2x \left\{ \varepsilon_{\mu\nu} \varepsilon_{ij} D_\mu \varphi_i D_\nu \varphi_j + \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} F_{\mu\nu} (1 - \varphi_1^2 - \varphi_2^2) \right\} \end{aligned} \quad (3.193)$$

となる．ここで，被積分関数の第1項は

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\mu\nu} \varepsilon_{ij} D_\mu \varphi_i D_\nu \varphi_j &= \varepsilon_{\mu\nu} \varepsilon_{ij} (\partial_\mu \varphi_i) D_\nu \varphi_j + \varepsilon_{\mu\nu} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ik} A_\mu \varphi_k D_\nu \varphi_j \\ &= \varepsilon_{\mu\nu} \varepsilon_{ij} \partial_\mu (\varphi_i D_\nu \varphi_j) - \varepsilon_{\mu\nu} \varepsilon_{ij} \varphi_i \partial_\mu (D_\nu \varphi_j) + \varepsilon_{\mu\nu} A_\mu \varphi_j D_\nu \varphi_j \quad (\varepsilon_{ij} \varepsilon_{ik} = \delta_{jk}). \end{aligned} \quad (3.194)$$

この第2項は

$$\begin{aligned} -\varepsilon_{\mu\nu} \varepsilon_{ij} \varphi_i \partial_\mu (D_\nu \varphi_j) &= -\varepsilon_{\mu\nu} \varepsilon_{ij} \varphi_i \partial_\mu (\partial_\nu \varphi_j + \varepsilon_{jk} A_\nu \varphi_k) = \varepsilon_{\mu\nu} \varphi_j \partial_\mu (A_\nu \varphi_j) \\ &= \varepsilon_{\mu\nu} \varphi_j (\partial_\mu A_\nu) \varphi_j + \varepsilon_{\mu\nu} \varphi_j A_\nu (\partial_\mu \varphi_j), \end{aligned} \quad (3.195)$$

第3項は

$$\varepsilon_{\mu\nu} A_\mu \varphi_j D_\nu \varphi_j = \varepsilon_{\mu\nu} A_\mu \varphi_j (\partial_\nu \varphi_j + \varepsilon_{jk} A_\nu \varphi_k) = \varepsilon_{\mu\nu} A_\mu \varphi_j \partial_\nu \varphi_j. \quad (3.196)$$

ゆえに

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{\mu\nu} \varepsilon_{ij} D_\mu \varphi_i D_\nu \varphi_j \\ &= \varepsilon_{\mu\nu} \varepsilon_{ij} \partial_\mu (\varphi_i D_\nu \varphi_j) + \varepsilon_{\mu\nu} \{ \varphi_j (\partial_\mu A_\nu) \varphi_j + \varphi_j A_\nu (\partial_\mu \varphi_j) + A_\mu \varphi_j \partial_\nu \varphi_j \} \\ &= \varepsilon_{\mu\nu} \varepsilon_{ij} \partial_\mu (\varphi_i D_\nu \varphi_j) + \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \varphi_j \varphi_j \\ &= \varepsilon_{\mu\nu} \varepsilon_{ij} \partial_\mu (\varphi_i D_\nu \varphi_j) + \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} F_{\mu\nu} (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) \end{aligned} \quad (3.197)$$

となるので

$$\frac{1}{2\pi} \int d^2x \left\{ \varepsilon_{\mu\nu} \varepsilon_{ij} D_\mu \varphi_i D_\nu \varphi_j + \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} F_{\mu\nu} (1 - \varphi_1^2 - \varphi_2^2) \right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int d^2x \left\{ \varepsilon_{\mu\nu} \varepsilon_{ij} \partial_\mu (\varphi_i D_\nu \varphi_j) + \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right\} \quad (3.198)$$

となるが, stokes の定理より

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int d^2x \varepsilon_{\mu\nu} \varepsilon_{ij} \partial_\mu (\varphi_i D_\nu \varphi_j) &= \frac{1}{2\pi} \oint dx_\mu \varepsilon_{ij} \varphi_i D_\nu \varphi_j = 0 \\ &\text{(全空間での積分が無限遠方での表面積分になることと, } r \rightarrow \infty \text{ で} \\ &\quad D_\nu \varphi_j \rightarrow 0 \text{ となることより)} \end{aligned} \quad (3.199)$$

なので

$$Q = \frac{1}{4\pi} \int d^2x \varepsilon_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (3.200)$$

となり, 作用のときと同様, 2次元 Abelian Higgs モデルの作用と一致する. ところが, 2次元 Abelian Higgs モデルのトポロジカルチャージは, ある領域を囲う経路の位相差の $1/2\pi$ に比例するから, 今の φ_1, φ_2 はある経路の位相差 φ により

$$\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2 = f e^\psi = \exp \left(i \oint dx_\mu A_\mu \right) \quad (3.201)$$

と関係づけられる. これと, 場の強さの定義, stokes の定理を用いて, f の零点の数が $k-1$ であることに注意すれば, Liouville 解のトポロジカルチャージは

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{2\pi} \int d^2x \varepsilon_{\mu\nu} \partial_\mu A_\nu = \frac{1}{2\pi} \oint dx_\mu A_\mu = \frac{1}{2\pi i} \oint d(\ln \varphi) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint ds \frac{d}{ds} \ln(f e^\psi) = \frac{1}{2\pi i} \oint ds \frac{d}{ds} \ln f + \frac{1}{2\pi i} \oint ds \frac{d\psi}{ds} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint ds \frac{d}{ds} \ln f \quad (\psi \text{ は解析関数}) \\ &= f \text{ の零点の数} = k - 1 \end{aligned} \quad (3.202)$$

となることがわかる.

第4章 ADHM/Nahm 構成法

この章では、インスタントンを系統的に求める ADHM 構成法と、それをモノポールに応用した Nahm 構成法について説明する。4.1 節では、ADHM/Nahm 構成法を理解するのに必要な概念であるモジュライ空間と次元降下について述べた。4.2 節では、ADHM 構成法の原理について詳しく述べた後、例として 't Hooft インスタントンの構成を行った。4.3 節では、インスタントンとモノポールをつなげるカロロンというインスタントンについて述べた後、Nahm 構成法について述べ、最後に例として BPS モノポールと 2-モノポールの構成を行った。

4.1 基本的な知識

インスタントンやモノポールの住む実空間に対し、インスタントンやモノポールの持つパラメーターが作るモジュライ空間という空間が存在する。前章で、ASD 条件と ansatz を用いてインスタントンを求めたが、それは実空間から見たインスタントンである。しかし、先のような方法では、ansatz は自分で見つけなければならず、また、それに ASD 条件を課して得られる方程式も複雑なものであった。これに対し、ADHM 構成法や Nahm 構成法は、モジュライ空間において行われ、インスタントンとモノポールは、それぞれ ADHM データ、Nahm データによって表される。また、インスタントンとモノポールのモジュライ空間の次元は実空間の次元より低いので、扱う方程式は単なる代数方程式や 1 階の線型連立微分方程式となる。ADHM/Nahm 構成法を理解するには、まず、このモジュライ空間について理解しなければならない。

また、ASD Yang-Mills において、インスタントンとモノポールはそれぞれ ASD 条件、Bogomolny 条件を用いて求められるが、それらは非常に良く似ていた。このことは ADHM/Nahm 構成法についてもいえて、ADHM 構成法と Nahm 構成法はモジュライ空間の次元が異なるだけで、全体的な手順は非常に良く似ている。このような類似性は次元降下によって説明され、それは ADHM/Nahm 構成法の理解に役立つ。

本節では、これらの概念について説明する。

4.1.1 モジュライ空間

3.2, 3.3 節でインスタントンの例を紹介したが、それらは位置やサイズのようないくつかのパラメーターを持っていた。このようなパラメーターをモジュライパラメーター、それによる空間をモジュライ空間という。

本来，モジュライパラメーターの概念は，曲線のパラメーターのような，より一般的な概念である．ところが，インスタントンやモノポールの場合，それらのモジュライ空間が実空間と対応していることが示される．これにより，インスタントンやモノポールを表すゲージ場は実空間におけるゲージ場 A_μ とモジュライ空間におけるゲージ場 T_α の2種類が存在することになる．すると， A_μ を直接求める代わりに， T_α を求めて，それより A_μ を構成することが考えられる．これが ADHM/Nahm 構成法の原理である．

4.1.2 次元降下

3.1.4 節でも触れたように，インスタントンを得るのに重要な役割をする ASD 条件

$$F_{\mu\nu}^* = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = F_{\mu\nu} \quad (4.1)$$

は，モノポールを得るのに重要な役割をする Bogomolny 条件

$$D_i\Phi = -B_i \quad (4.2)$$

に似ている．ただし， $F_{\mu\nu}$, B_i はそれぞれ場の強さ，磁場で，

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu], \quad B_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}F_{jk} \quad (4.3)$$

である．そこで，(4.1) の ν を時間成分 $t = 4$ に固定し， A_4 を Higgs 場 Φ で置き換え，ゲージ場の空間成分 A_i は時間に依らないとすると，

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= F_{it} = \partial_i\Phi + [A_\mu, \Phi] = D_i\Phi, \\ (\text{右辺}) &= -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}F_{jk} = -B_i \end{aligned} \quad (4.4)$$

となり，Bogomolny 条件が得られることがわかる．このように，いくつかの条件をつけて次元を下げる操作を次元降下という．

次元降下は，インスタントンからモノポールだけでなく，より低次元まで行うことができる．また，実空間の次元降下に伴って，モジュライ空間の次元は逆に増えていく．ただし，モジュライ空間の次元とは，ADHM/Nahm 構成法に現れる方程式の微分の階数を指す．実空間とモジュライ空間の次元と，そこに現れる方程式を表 4.1 にまとめておく．ただし，「 \cdot 」は 0 次元を表す．

ADHM/Nahm 構成法を用いる利点は，インスタントンやモノポールにおける実空間の次元より，モジュライ空間の次元の方が低いことである．それゆえ，インスタントンを構成する ADHM 構成法に現れる方程式は単なる代数方程式であり，モノポールを構成する Nahm 構成法に現れる方程式は 1 階の線型連立微分方程式である．

今の場合，次元降下は方程式に条件をつけることで 1 度に行われた．しかし，ある種のインスタントンは，そのパラメーターを連続的に変化させることで，ある極限ではモノポール，別の極限ではインスタントンになるという性質を持つ．これを用いることで，インスタントンからモノポールへの連続的な次元降下を行うことができる．このような性質を持つインスタントンはカロロンと呼ばれる．カロロンについては，次節で説明する．

表 4.1: ASD Yang-Mills における次元降下

A_μ		T_α	
\mathbb{R}^4	ASD 方程式	\cdot	ADHM 方程式
\downarrow	\leftarrow カロロン	\uparrow	
\mathbb{R}^3	Bogomolny 方程式	\mathbb{R}	Nahm 方程式
\downarrow		\uparrow	
\mathbb{R}^2	いろいろなソリトン方程式	\mathbb{R}^2	いろいろなソリトン方程式
\downarrow		\uparrow	
\mathbb{R}	Nahm 方程式	\mathbb{R}^3	Bogomolny 方程式
\downarrow		\uparrow	
\cdot	ADHM 方程式	\mathbb{R}^4	ASD 方程式

4.2 ADHM 構成法

前節で述べたように，インスタントンはモジュライ空間においても構成することができる．ADHM 構成法を理解するには，まず ADHM 構成法に用いられるディラック作用素について理解しなければならない．それにより，前章で実空間のインスタントンを得るために用いた ASD 条件をモジュライ空間でも用いれるように拡張することができる．

ADHM 構成法を行うには，まず ASD であるようなディラック作用素を用意しなければならない．そのためには，本来，ディラック作用素の中の ADHM データと呼ばれる行列に対する ADHM 方程式を解かなければならない．しかし，ADHM 構成法の場合はモジュライ空間が 0 次元なので，簡単な例の場合はそこまで手の込んだことをする必要はない．

ADHM データが得られれば，それに対応する実空間のインスタントンは，ADHM 構成法によって一意に，そして系統的に求められる．その構成例として，本節の最後に 't Hooft インスタントンの構成を行う．

4.2.1 ディラック作用素と ASD 条件

ADHM/Nahm 構成法はモジュライ空間の中で行われるが，その基礎となるのは ASD 条件である．しかし，ADHM/Nahm 構成法では，3.1.4 で説明したのとは別の形の，ディラック作用素を用いて表された ASD 条件を用いる．

ゲージ場 A_μ に対し，

$$\mathcal{D} = e_\mu \otimes D_\mu = e_\mu \otimes (\partial_\mu + A_\mu) \quad (4.5)$$

をディラック作用素，

$$\bar{\mathcal{D}} = e_\mu^\dagger \otimes D_\mu = e_\mu^\dagger \otimes (\partial_\mu + A_\mu) \quad (4.6)$$

をその共役という¹．ただし， e_μ は4元数の2次行列表現における基底行列である．また， A_μ が反エルミートであることと， $\partial_\mu^\dagger = -\partial_\mu$ に注意して，

$$D^\dagger = e_\mu^\dagger \otimes (\partial_\mu + A_\mu)^\dagger = -e_\mu^\dagger \otimes (\partial_\mu + A_\mu) = -\bar{D} \quad (4.7)$$

となる．

ここで，与えられたディラック作用素 D に対し， $\bar{D}D$ を計算してみると， $\eta_{\mu\nu}^{k(+)} F_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}^{k(+)*} F_{\mu\nu}^*$ ， $\eta_{\mu\nu}^{k(+)*} = \eta_{\mu\nu}^{k(+)}$ などに注意して

$$\begin{aligned} \bar{D}D &= e_\mu^\dagger e_\nu \otimes (\partial_\mu + A_\mu)(\partial_\nu + A_\nu) \\ &= (\delta_{\mu\nu} \mathbf{1}_2 + i\eta_{\mu\nu}^{k(+)} \sigma_k) \otimes (\partial_\mu \partial_\nu + \partial_\mu A_\nu + A_\nu \partial_\mu + A_\mu \partial_\nu + A_\mu A_\nu) \\ &= \mathbf{1}_2 \otimes D^2 + i\eta_{\mu\nu}^{k(+)} \sigma_k \otimes (\partial_\mu A_\nu + A_\mu A_\nu) \\ &= \mathbf{1}_2 \otimes D^2 + \frac{i}{2} \eta_{\mu\nu}^{k(+)} \sigma_k \otimes F_{\mu\nu} \\ &= \mathbf{1}_2 \otimes D^2 + \frac{i}{4} \eta_{\mu\nu}^{k(+)} \sigma_k \otimes (F_{\mu\nu} + F_{\mu\nu}^*) \end{aligned} \quad (4.8)$$

となる．ここで，この第2項が0となることがASD条件であるから，ASD条件とは， $\bar{D}D$ がPauli行列と可換であることと同値である．ADHM/Nahm構成法はモジュライ空間で行われるから，用いるディラック作用素 Δ もモジュライ空間のもので，それは単なる行列である．そのとき，ASD条件は， $\bar{D}D$ がRealかつRegularであることと同値である．ただし，Realとは，その行列が4元数の意味で実数，すなわち 2×2 の単位行列 $\mathbf{1}_2$ のスカラー倍であることであり，Regularとは，その行列の逆行列が存在することである．それゆえ，ADHM構成法においては， Δ がASDであることを確かめるには，単に $\Delta^\dagger \Delta$ がRealかつRegularであることを確かめればよい．

4.2.2 ADHM データと ADHM 方程式

ADHM構成法を行うには，前小節で見たような，ASDであるディラック作用素が必要となる．そのようなディラック作用素はADHMデータによって特徴づけられ，ディラック作用素がASDであるための条件はADHMデータに課されることになる．

ADHM構成法ではモジュライ空間のディラック作用素 Δ を用いるが，インスタントンに対するモジュライ空間は0次元であるから， Δ は

$$\Delta(x) = C \otimes x - D \quad (4.9)$$

と置くことができる．ただし， C は $(n+k) \times k$ ， D は $(2n+2k) \times 2k$ の行列であり，また

$$x = x^\mu e_\mu \quad (4.10)$$

¹2つの線型空間 V, W に対し， $V \otimes W$ はテンソル積 ($v \in V, w \in W$ に対し， $v \otimes w$ は $V \otimes W$ の元) で，それは2つの線型空間の両方の構造を合わせたような線型空間である．線型空間であるから，その基底 (基底の数は $\dim V \cdot \dim W$) は，(可換性により) 任意に並べ替えてよく，例えば， 2×2 の行列と $k \times k$ の行列のテンソル積は， $2k \times 2k$ の行列と見ても，各成分が 2×2 の行列である $k \times k$ の行列と見ても， 2×2 の行列で成分が $k \times k$ の行列だと見てもよい．

で, x^μ は R^4 の座標, e_μ は 4 元数の 2 次表現行列の基底行列である (つまり, $\Delta(x)$ は $(2n + 2k) \times 2k$ の行列, もしくは 4 元数を成分として持つ $(n + k) \times k$ の行列である. また, x は実空間の座標であるから, Δ の中にはモジュライ空間の座標は含まれない. Δ を x について線型に仮定するのは一種の ansatz である). これを 0 次元ディラック作用素という. このとき, C, D はそれぞれ

$$C = \begin{bmatrix} O_{n \times k} \\ \mathbf{1}_k \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} S \\ T \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

という標準形 (standard form) に変形可能であることが知られている. ただし, $O_{n \times k}$ は $n \times k$ の零行列, $\mathbf{1}_k$ は k 次の単位行列, S は $2n \times 2k$ の行列, T は $2k$ 次の正方行列である. すると, Δ に含まれる情報はすべて D が担うことになる. この D を ADHM データという. ADHM データは, さらに

$$T = e_\mu \otimes T^\mu, \quad S = \begin{bmatrix} I^\dagger & J \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

と分解できる. ただし, T^μ は k 次のエルミート行列, I, J はそれぞれ $k \times 2n$, $2n \times k$ の行列である. すると, 結局, $\Delta(x)$ は

$$\Delta(x) = \begin{bmatrix} -S \\ e_\mu \otimes (x^\mu \mathbf{1}_k - T^\mu) \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

と表される. このとき, $\Delta^\dagger \Delta$ を計算してみると

$$\begin{aligned} \Delta^\dagger \Delta &= \begin{bmatrix} -S^\dagger & e_\mu^\dagger \otimes (x^\mu \mathbf{1}_k - T^\mu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -S \\ e_\nu \otimes (x^\nu \mathbf{1}_k - T^\nu) \end{bmatrix} \\ &= S^\dagger S + e_\mu^\dagger e_\nu \otimes (x^\mu \mathbf{1}_k - T^\mu)(x^\nu \mathbf{1}_k - T^\nu) \\ &= \begin{bmatrix} I \\ J^\dagger \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I^\dagger & J \end{bmatrix} + (\delta_{\mu\nu} \mathbf{1}_2 + i\eta_{\mu\nu}^{j(+)} \sigma_j) \otimes (x^\mu x^\nu - x^\mu T^\nu - x^\nu T^\mu + T^\mu T^\nu) \\ &= \begin{bmatrix} II^\dagger & IJ \\ J^\dagger I^\dagger & J^\dagger J \end{bmatrix} + \mathbf{1}_2 \otimes (x - T)^2 + i\eta_{\mu\nu}^{j(+)} \sigma_j \otimes T^\mu T^\nu \end{aligned} \quad (4.14)$$

となる. ここで, 第 1 項を e_μ でくくるため

$$\begin{bmatrix} II^\dagger & IJ \\ J^\dagger I^\dagger & J^\dagger J \end{bmatrix} = e_\mu \otimes I^\mu = \begin{bmatrix} I^4 - iI^3 & -I^2 - iI^1 \\ I^2 - iI^1 & I^4 + iI^3 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

と置く. すると, 簡単な連立方程式を解いて

$$\begin{aligned} I^4 &= \frac{1}{2}(II^\dagger + J^\dagger J), & I^3 &= \frac{i}{2}(II^\dagger - J^\dagger J), \\ I^2 &= \frac{1}{2}(J^\dagger I^\dagger - IJ), & I^1 &= \frac{i}{2}(J^\dagger I^\dagger + IJ) \end{aligned} \quad (4.16)$$

であることがわかり，これらを用いて，第1項は

$$\begin{bmatrix} II^\dagger & IJ \\ J^\dagger I^\dagger & J^\dagger J \end{bmatrix} = e_\mu \otimes I^\mu = (-i\delta_{\mu j}\sigma_j + \delta_{\mu 4}) \otimes I^\mu = -i\sigma_j \otimes I^j + \mathbf{1}_2 \otimes I^4 \quad (4.17)$$

と書き直せる．また，第3項は

$$\begin{aligned} i\eta_{\mu\nu}^{j(+)}\sigma_j \otimes T^\mu T^\nu &= i\sigma_j \otimes (\varepsilon_{j\mu\nu 4} + \delta_{j\mu}\delta_{\nu 4} - \delta_{j\nu}\delta_{\mu 4})T^\mu T^\nu \\ &= i\sigma_j \otimes \left(\frac{1}{2}\varepsilon_{j\mu\nu}[T_\mu, T_\nu] + [T_j, T_4] \right) \end{aligned} \quad (4.18)$$

となる．ゆえに，

$$\Delta^\dagger \Delta = \mathbf{1}_2 \otimes \left\{ (x - T)^2 + I^4 \right\} + i\sigma_j \otimes \left(\frac{1}{2}\varepsilon_{j\mu\nu}[T_\mu, T_\nu] + [T_j, T_4] - I^j \right) \quad (4.19)$$

となり，これが Pauli 行列と可換となる，すなわち， $\Delta(x)$ が ASD であるための必要十分条件は

$$\frac{1}{2}\varepsilon_{j\mu\nu}[T_\mu, T_\nu] + [T_j, T_4] - I^j = 0 \quad (j = 1, 2, 3) \quad (4.20)$$

であることがわかる．これを ADHM 方程式という．ADHM 方程式を成分で書けば

$$\begin{cases} [T_1, T_2] + [T_3, T_4] - \frac{i}{2}(II^\dagger - J^\dagger J) = 0, \\ [T_1, T_3] - [T_2, T_4] - \frac{1}{2}(IJ - J^\dagger I^\dagger) = 0, \\ [T_1, T_4] + [T_2, T_3] - \frac{i}{2}(IJ + J^\dagger I^\dagger) = 0 \end{cases} \quad (4.21)$$

となる．また，ADHM 方程式は，複素行列

$$B_1 = T_4 + iT_3, \quad B_2 = T_2 + iT_1 \quad (4.22)$$

を用いて

$$\begin{cases} [B_1, B_1^\dagger] + [B_2, B_2^\dagger] + II^\dagger - J^\dagger J = 0, \\ [B_1, B_2] + IJ = 0 \end{cases} \quad (4.23)$$

とも書ける．

∴ まず，

$$\begin{aligned} & [B_1, B_1^\dagger] + [B_2, B_2^\dagger] + II^\dagger - J^\dagger J \\ &= [T_4 + iT_3, T_4 - iT_3] + [T_2 + iT_1, T_2 - iT_1] + II^\dagger - J^\dagger J \\ &= 2i[T_1, T_2] + 2i[T_3, T_4] + II^\dagger - J^\dagger J = 0 \end{aligned}$$

$$\iff [T_1, T_2] + [T_3, T_4] - \frac{i}{2}(II^\dagger - J^\dagger J) = 0. \quad (4.24)$$

次に,

$$\begin{aligned} & [B_1, B_2] + IJ = [T_2 + iT_1, T_4 + iT_3] + \frac{1}{2}(IJ + J^\dagger I^\dagger) + \frac{1}{2}(IJ - J^\dagger I^\dagger) \\ &= \left\{ [T_2, T_4] - [T_1, T_3] + \frac{1}{2}(IJ - J^\dagger I^\dagger) \right\} + i \left\{ [T_2, T_3] + [T_1, T_4] - \frac{i}{2}(IJ + J^\dagger I^\dagger) \right\} = 0 \\ &\iff \begin{cases} [T_2, T_4] - [T_1, T_3] + \frac{1}{2}(IJ - J^\dagger I^\dagger) = 0 \\ [T_2, T_3] + [T_1, T_4] - \frac{i}{2}(IJ + J^\dagger I^\dagger) = 0 \end{cases} \\ &\quad (\text{中括弧の中は反エルミートであり, 共役をとって足し引きすればよい}). \quad \square \end{aligned} \quad (4.25)$$

さらに, 4元数のブロックをバラさずに書き下すこともできる. ひとまず, $\Delta^\dagger \Delta$ の中には $\mathbf{1}_2$ と σ_i の項しかないので, $\Delta^\dagger \Delta$ の4元数についてのトレースをとると,

$$\text{tr } \sigma_i = 0, \quad \text{tr } \mathbf{1}_2 = 2 \quad (4.26)$$

より, $\mathbf{1}_2$ の係数しか残らない. そこで, 今度は $\sigma_i \Delta^\dagger \Delta$ のトレースを考えると,

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} \mathbf{1}_2 + i \varepsilon_{ijk} \sigma_k \quad (4.27)$$

より, 都合よく σ_i の係数 (の2倍) だけが残ることがわかる. ところが,

$$\Delta^\dagger \Delta = \begin{bmatrix} -S^\dagger & x^\dagger - T^\dagger \\ x - T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -S \\ x - T \end{bmatrix} = S^\dagger S + x^\dagger x - x^\dagger T + T^\dagger x + T^\dagger T \quad (4.28)$$

をよく見ると,

$$x^\dagger x = |x_\mu|^2 \mathbf{1}_2, \quad x^\dagger T + T^\dagger x = x_\mu T_\nu (e_\mu^\dagger e_\nu + e_\nu^\dagger e_\mu) = x_\mu T_\nu 2\delta_{\mu\nu} \mathbf{1}_2 \quad (4.29)$$

であるから, $\sigma_i \Delta^\dagger \Delta$ のトレースをとるとこれらの項は0になる. よって, ADHM 方程式は

$$\text{tr}_2 \{ \sigma_i (S^\dagger S + T^\dagger T) \} = 0 \quad (4.30)$$

とも書かれる. ただし, tr_2 は4元数についてのトレースを表す.

与えられた0次元ディラック作用素 $\Delta(x)$ が ASD であるためには, $\Delta(x)$ は ADHM 方程式を満たさなければならない. しかし, 簡単な場合には, 単に $\Delta^\dagger \Delta$ を計算して, それが Real かつ Regular かどうか見ればよい.

4.2.3 ADHM 構成法

先に見たように, 実空間における ASD であるゲージ場は, Yang-Mills 方程式の解, すなわち, インスタントンを表すのであった. これに対し, ADHM データはモジュライ空間に

おける量であるが，それが ASD であれば，それは実空間のインスタントンに対応する．このことは，実際に ADHM データから実空間におけるゲージ場を構成することで示される．
まず，0次元ディラック作用素

$$\Delta(x) = \begin{bmatrix} -S \\ e_\nu \otimes (x^\nu - T^\nu) \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

が与えられたとき，方程式

$$\Delta^\dagger V = 0 \quad (\iff (\Delta^\dagger V)^\dagger = V^\dagger \Delta = 0) \quad (4.32)$$

を Weyl 方程式といい，その解 V を Δ のゼロモードという．ここで， $\Delta(x)$ の型より

$$\Delta^\dagger V = \left[\begin{array}{c|c} [2k \times 2n] & [2k \times 2k] \\ \hline & \end{array} \right]_{=\Delta^\dagger} \left[\begin{array}{c} [2n \times 2n] \\ \hline [2k \times 2n] \end{array} \right]_{=V} = O_{2k \times 2n} \quad (4.33)$$

となるので， V は $(2n + 2k) \times 2n$ の行列である．そこで，

$$V = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

と置く．ただし， u は $2n \times 2n$ ， v は $2k \times 2n$ の行列である．また， V は

$$V^\dagger V = \mathbf{1}_{2n} \quad (4.35)$$

と規格化されているとする．そのとき，

$$\partial_\mu (V^\dagger V) = (\partial_\mu V^\dagger) V + V^\dagger (\partial_\mu V) = 0 \quad (4.36)$$

が成り立つことに注意．

さて，ADHM 構成法 (Atiyah-Drinfeld-Hitchin-Manin construction) とは，このような与えられた ASD である 0次元ディラック作用素 Δ に対する，Weyl 方程式の規格化されたゼロモード V に対して

$$A_\mu = V^\dagger \partial_\mu V \quad (4.37)$$

としたとき，これが実空間におけるインスタントンのゲージ場になっているというものである．このことを示していく．

まず， A_μ が 4次元 Euclidean Yang-Mills system におけるゲージ場となっていることを示すが，これは簡単に

$$A_\mu^\dagger = (V^\dagger \partial_\mu V)^\dagger = (\partial_\mu V^\dagger) V = -V^\dagger \partial_\mu V = -A_\mu \quad (4.38)$$

である．

次に, A_μ が Yang-Mills 方程式の解になることを示す. ひとまず, ゼロモード V に対し,

$$P = VV^\dagger \quad (4.39)$$

と置く. ここで, P は V の型より $(2n + 2k) \times (2n + 2k)$ の行列である. また, P は

$$P^2 = P, \quad P^\dagger = P \quad (4.40)$$

を満たす.

$$\because P^2 = VV^\dagger VV^\dagger = V\mathbf{1}_{2n}V^\dagger = VV^\dagger = P, \quad (4.41)$$

$$P^\dagger = (VV^\dagger)^\dagger = (V^\dagger)^\dagger V^\dagger = VV^\dagger = P. \quad \square \quad (4.42)$$

このような性質を持つ行列を射影演算子という. 今までに出てきた量の中では, もう1つ, $\Delta(\Delta^\dagger\Delta)^{-1}\Delta^\dagger$ という積も射影演算子となっている.

$$\begin{aligned} \because \{\Delta(\Delta^\dagger\Delta)^{-1}\Delta^\dagger\}\{\Delta(\Delta^\dagger\Delta)^{-1}\Delta^\dagger\} &= \Delta(\Delta^\dagger\Delta)^{-1}(\Delta^\dagger\Delta)(\Delta^\dagger\Delta)^{-1}\Delta^\dagger \\ &= \Delta(\Delta^\dagger\Delta)^{-1}\Delta^\dagger, \end{aligned} \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned} \{\Delta(\Delta^\dagger\Delta)^{-1}\Delta^\dagger\}^\dagger &= (\Delta^\dagger)^\dagger\{(\Delta^\dagger\Delta)^{-1}\}^\dagger\Delta^\dagger = \Delta\{(\Delta^\dagger\Delta)^\dagger\}^{-1}\Delta^\dagger \\ &= \Delta\{\Delta^\dagger(\Delta^\dagger)^\dagger\}^{-1}\Delta^\dagger = \Delta(\Delta^\dagger\Delta)^{-1}\Delta^\dagger. \quad \square \end{aligned} \quad (4.44)$$

ここで, $\Delta^\dagger\Delta$ が $k \times k$ の行列であることに注意. また, $\Delta^\dagger\Delta$ の逆行列 $(\Delta^\dagger\Delta)^{-1}$ の存在は, $\Delta^\dagger\Delta$ が Regular であることより保証されている ($\Delta^\dagger\Delta$ が Regular であるからといって, Δ が Regular とは限らない). そこで

$$(\Delta^\dagger\Delta)^{-1} = f \quad (4.45)$$

と置いておく. このとき, これら2つの射影演算子に対し,

$$\Delta f \Delta^\dagger + P = \mathbf{1}_{2n+2k} \quad (4.46)$$

が成り立つ.

\because まず

$$W = \begin{bmatrix} \Delta & V \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

と置く. すると, Weyl 方程式に注意して,

$$W^\dagger W = \begin{bmatrix} \Delta^\dagger \\ V^\dagger \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta & V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta^\dagger\Delta & \Delta^\dagger V \\ V^\dagger\Delta & V^\dagger V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta^\dagger\Delta & O \\ O & \mathbf{1}_{2n} \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

となる. ここで, 明らかに

$$(W^\dagger W)^{-1} = \begin{bmatrix} f & O \\ O & \mathbf{1}_{2n} \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

であり，これと，恒等式

$$W(W^\dagger W)^{-1}W^\dagger = WW^{-1}(W^\dagger)^{-1}W^\dagger = \mathbf{1}_{2n+2k} \quad (4.50)$$

を用いて

$$\begin{bmatrix} \Delta & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f & O \\ O & \mathbf{1}_{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta^\dagger \\ V^\dagger \end{bmatrix} = \Delta f \Delta^\dagger + P = \mathbf{1}_{2n+2k}. \quad \square \quad (4.51)$$

これらの準備の下で，まず

$$F_{\mu\nu} = V^\dagger [\partial_\mu P, \partial_\nu P] V \quad (4.52)$$

が成り立つ．ただし， $F_{\mu\nu}$ は場の強さである．

$$\begin{aligned} \because \quad & V^\dagger [\partial_\mu P, \partial_\nu P] V \\ &= V^\dagger \{(\partial_\mu V) V^\dagger + V(\partial_\mu V^\dagger)\} \{(\partial_\nu V) V^\dagger + V(\partial_\nu V^\dagger)\} V - (\mu \leftrightarrow \nu) \\ &= V^\dagger (\partial_\mu V) V^\dagger (\partial_\nu V) + V^\dagger (\partial_\mu V) (\partial_\nu V^\dagger) V \\ &\quad + (\partial_\mu V^\dagger) (\partial_\nu V) + (\partial_\mu V^\dagger) V (\partial_\nu V^\dagger) V - (\mu \leftrightarrow \nu) \\ &= (\partial_\mu V^\dagger) (\partial_\nu V) + (\partial_\mu V^\dagger) V (\partial_\nu V^\dagger) V - (\mu \leftrightarrow \nu) \quad ((\partial_\nu V^\dagger) V = -V^\dagger (\partial_\nu V)) \\ &= \partial_\mu (V^\dagger \partial_\nu V) - V^\dagger \partial_\mu \partial_\nu V + V^\dagger (\partial_\mu V) V^\dagger (\partial_\nu V) - (\mu \leftrightarrow \nu) \\ &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] \quad (\partial_\mu \partial_\nu = \partial_\nu \partial_\mu, A_\mu = V^\dagger \partial_\mu V) \\ &= F_{\mu\nu}. \quad \square \end{aligned} \quad (4.53)$$

また，

$$\begin{aligned} V^\dagger \partial_\mu P &= V^\dagger \partial_\mu (1 - \Delta f \Delta^\dagger) = -V^\dagger (\partial_\mu \Delta) f \Delta^\dagger - V^\dagger \Delta \partial_\mu (f \Delta^\dagger) \\ &= -V^\dagger C (\partial_\mu x) f \Delta^\dagger = -v^\dagger e_\mu f \Delta^\dagger \end{aligned} \quad (4.54)$$

$$\begin{aligned} (\partial_\nu P) V &= \{\partial_\nu (1 - \Delta f \Delta^\dagger)\} V = -\{\partial_\nu (\Delta f)\} \Delta^\dagger V - \Delta f (\partial_\nu \Delta^\dagger) V \\ &= -\Delta f (\partial_\nu x^\dagger) C^\dagger V = -\Delta f e_\nu^\dagger v \quad (\Delta^\dagger = x^\dagger C^\dagger - D^\dagger) \end{aligned} \quad (4.55)$$

も成り立つ．すると，これらより

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= V^\dagger (\partial_\mu P) (\partial_\nu P) V - (\mu \leftrightarrow \nu) \\ &= v^\dagger e_\mu f \Delta^\dagger \Delta f e_\nu^\dagger v - (\mu \leftrightarrow \nu) \\ &= v^\dagger (e_\mu f e_\nu^\dagger - e_\nu f e_\mu^\dagger) v \quad (f = (\Delta^\dagger \Delta)^{-1}) \\ &= v^\dagger f (e_\mu e_\nu^\dagger - e_\nu e_\mu^\dagger) v \quad (f \text{ の Reality}) \\ &= 2i v^\dagger f \eta_{\mu\nu}^{(-)} v \quad (e_\mu e_\nu^\dagger = \delta_{\mu\nu} \mathbf{1}_2 + i \eta_{\mu\nu}^{(-)}) \end{aligned} \quad (4.56)$$

となるが， $\eta_{\mu\nu}^{(-)}$ は ASD であるから， $F_{\mu\nu}$ は明らかに ASD 条件を満たす．ゆえに， A_μ は Yang-Mills 方程式の解である．

最後に， A_μ が無限遠方でピュアゲージに近づくことを示す．まず， $u \approx \mathcal{O}(1)$ としたとき

$$\Delta^\dagger V = (x^\dagger C^\dagger - D^\dagger) V = x^\dagger v - (S^\dagger u + T^\dagger v) = 0$$

$$\iff v = \frac{x}{|x|^2}(S^\dagger u + T^\dagger v) \approx \mathcal{O}(|x|^{-1}) \quad (4.57)$$

であるから， V の規格化条件より

$$V^\dagger V \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} u^\dagger & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix} = u^\dagger u = \mathbf{1}_2 \quad (4.58)$$

となる．次に， A_μ の定義より

$$A_\mu \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} u^\dagger & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_\mu u \\ 0 \end{bmatrix} = u^\dagger \partial_\mu u \quad (4.59)$$

となる．それから，

$$\begin{aligned} C^\dagger C &= \begin{bmatrix} O_{2k \times 2n} & \mathbf{1}_{2k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O_{2n \times 2k} \\ \mathbf{1}_{2k} \end{bmatrix} = O_{2k \times 2k} + \mathbf{1}_{2k} = \mathbf{1}_{2k}, \\ C^\dagger D &= \begin{bmatrix} O_{2k \times 2n} & \mathbf{1}_{2k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S \\ T \end{bmatrix} = T, \quad D^\dagger C = \begin{bmatrix} S^\dagger & T^\dagger \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O_{2n \times 2k} \\ \mathbf{1}_{2k} \end{bmatrix} = T^\dagger \end{aligned} \quad (4.60)$$

より，

$$\begin{aligned} \Delta^\dagger \Delta &= (x^\dagger C^\dagger - D^\dagger)(Cx - D) = x^\dagger C^\dagger Cx - x^\dagger C^\dagger D - D^\dagger Cx + D^2 \\ &= x^2 + D^2 - x^\dagger T - T^\dagger x \iff f = (\Delta^\dagger \Delta)^{-1} \approx \frac{1}{|x|^2} \\ \therefore \Delta f \Delta^\dagger &\approx \frac{1}{|x|^2}(Cx - D)(x^\dagger C^\dagger - D^\dagger) = \frac{1}{|x|^2}(Cx^2 C^\dagger - CxD^\dagger - Dx^\dagger C^\dagger - D^2) \\ &\approx CC^\dagger \end{aligned} \quad (4.61)$$

なので

$$\begin{aligned} VV^\dagger &= 1 - \Delta f \Delta^\dagger \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 1 - CC^\dagger \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^\dagger & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} uu^\dagger & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\iff uu^\dagger = \mathbf{1}_2 \end{aligned} \quad (4.62)$$

となる．以上より， $u \in U(n)$ であり， A_μ はピュアゲージ $u^\dagger \partial_\mu u$ に近づくことがわかる (ADHM データとして正方行列をとると始めからピュアゲージになってしまうことに注意)．

4.2.4 ADHM 構成法の諸性質

ここで，ADHM 構成法の性質について少し見ておく．まず，0次元ディラック作用素 Δ とそのゼロモード V に $h \in \text{Sp}(n+k)^1$ を左から掛けて

$$\Delta \mapsto h\Delta, \quad V \mapsto hV \quad (4.63)$$

¹ $\text{Sp}(n)$ はシンプレクティック群で， $h \in \text{Sp}(n)$ は $h^\dagger h = 1$ を満たす．

と変換してみる．すると

$$\Delta^\dagger V \rightarrow (h\Delta)^\dagger(hV) = \Delta^\dagger h^\dagger h V = \Delta^\dagger V = 0, \quad (4.64)$$

$$\Delta^\dagger \Delta \rightarrow (h\Delta)^\dagger(h\Delta) = \Delta^\dagger h^\dagger h \Delta = \Delta^\dagger \Delta \quad (4.65)$$

であるから，この変換は ADHM 構成法によって構成されるゲージ場に影響を及ぼさない．また， Δ に $\ell \in \text{GL}(k)^2$ を右から掛けて

$$\Delta \mapsto \Delta \ell \quad (4.66)$$

と変換してみても， $(\Delta^\dagger \Delta)^{-1}$ が正則ならば

$$\{(\Delta \ell)^\dagger(\Delta \ell)\}^{-1} = (\ell^\dagger \Delta^\dagger \Delta \ell)^{-1} = \ell^{-1}(\Delta^\dagger \Delta)^{-1}(\ell^\dagger)^{-1} \quad (4.67)$$

も正則となるので，この変換も ADHM 構成法に影響を及ぼさない．これらは，ADHM 構成法の持つグローバルな対称性である．さらに， V に $g \in \text{Sp}(n)$ を右から掛けて

$$V \mapsto Vg \quad (4.68)$$

と変換してみる．すると

$$\Delta^\dagger V \mapsto \Delta^\dagger(Vg) = (\Delta^\dagger V)g = 0 \quad (4.69)$$

であり，また

$$A_\mu = V^\dagger \partial_\mu V \mapsto (Vg)^\dagger \partial_\mu (Vg) = g^\dagger V^\dagger (\partial_\mu V)g + g^\dagger V^\dagger V (\partial_\mu g) = g^\dagger A_\mu g + g^\dagger \partial_\mu g \quad (4.70)$$

であるから，これは A_μ のゲージ変換に対応することがわかる．

4.2.5 't Hooft インスタントンの構成

前章で見た 't Hooft インスタントンは，ADHM 構成法によって，一般のチャージに対して解析的に構成することができる．手順は多少複雑であるが，ansatz は必要なく，手順もまったく機械的である．

まず，簡単な 1-インスタントンを構成してみる．ひとまず，1-インスタントンに対応する ADHM データが含まれた 0 次元ディラック作用素は

$$\Delta = \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ x_1 \end{bmatrix} \quad (4.71)$$

となる．ただし， λ_1 は Real な定 4 元数， α_1 は一般の定 4 元数である．また， $x = x_\mu e_\mu$ で， x_μ を 4 次元ユークリッド空間の座標として， $x + \alpha_1 = x_1 = x_{1\mu} e_\mu$ である．ここで

$$\Delta^\dagger \Delta = \begin{bmatrix} \lambda_1 & x_1^\dagger \\ & x_1 \end{bmatrix} = (|\lambda_1|^2 + |x_1|^2) \mathbf{1}_2 \quad (4.72)$$

² $\text{GL}(n)$ は一般線型変換群で， $g \in \text{GL}(n)$ は $\det g \neq 0$ を満たす．

であるから, $\Delta^\dagger \Delta$ は Real かつ Regular, すなわち, Δ は ASD である. 次に, Δ のゼロモードを

$$V = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_2 \\ v_1 \end{bmatrix} \phi^{-\frac{1}{2}} \quad (4.73)$$

と置く. ただし, v_1 は 4 元数である. また, $\phi(x)$ は実スカラー関数の規格化因子で

$$V^\dagger V = \phi^{-\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} \mathbf{1}_2 & v_1^\dagger \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1}_2 \\ v_1 \end{bmatrix} \phi^{-\frac{1}{2}} = \phi^{-1} (1 + |v_1|^2) \mathbf{1}_2 = \mathbf{1}_2 \iff \phi(x) = 1 + |v_1|^2 \quad (4.74)$$

である. これより, まず, V を求めると

$$\Delta^\dagger V = \begin{bmatrix} \lambda_1 & x_1^\dagger \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1}_2 \\ v_1 \end{bmatrix} \phi^{-\frac{1}{2}} = (\lambda_1 + x_1^\dagger v_1) \phi^{-\frac{1}{2}} = 0 \iff v_1 = -\frac{x_1}{|x_1|^2} \lambda_1 \quad (4.75)$$

となる. また, これより

$$\phi = 1 + |v_1|^2 = 1 + \frac{\lambda_1^2}{|x_1|^2} = 1 + \frac{\lambda_1^2}{|x + \alpha_1|^2} \quad (4.76)$$

であるから, ϕ は 't Hooft ansatz の未知関数に対応することがわかる. 次に, V からゲージ場 A_μ を求めると

$$\begin{aligned} A_\mu &= V^\dagger \partial_\mu V = \phi^{-\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} \mathbf{1}_2 & v_1^\dagger \end{bmatrix} \partial_\mu \left(\begin{bmatrix} \mathbf{1}_2 \\ v_1 \end{bmatrix} \phi^{-\frac{1}{2}} \right) \\ &= \phi^{-\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} \mathbf{1}_2 & v_1^\dagger \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ \partial_\mu v_1 \end{bmatrix} \phi^{-\frac{1}{2}} + \begin{bmatrix} \mathbf{1}_2 \\ v_1 \end{bmatrix} \left(-\frac{1}{2} \phi^{-\frac{3}{2}} \partial_\mu \phi \right) \right\} \\ &= \left(v_1^\dagger \partial_\mu v_1 - \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \right) \phi^{-1} = \frac{1}{2} \{ v_1^\dagger \partial_\mu v_1 - (\partial_\mu v_1^\dagger) v_1 \} \phi^{-1} \end{aligned} \quad (4.77)$$

となる. ここで,

$$\begin{aligned} \partial_\mu v_1 &= -\lambda_1 \partial_\mu \left(\frac{x_{1\nu}}{|x_1|^2} e_\nu \right) = -\lambda_1 \left(\frac{\delta_{\mu\nu}}{|x_1|^2} e_\nu - 2 \frac{x_{1\nu} x_{1\mu}}{|x_1|^3 |x_1|} e_\nu \right) = -\frac{\lambda_1}{|x_1|^2} e_\mu - 2 \frac{x_\mu}{|x_1|^2} v_1 \\ \therefore v_1^\dagger \partial_\mu v_1 &= \lambda_1^2 \frac{x_{1\nu}}{|x_1|^4} e_\nu^\dagger e_\mu - 2 \frac{x_\mu}{|x_1|^2} |v_1|^2 \end{aligned} \quad (4.78)$$

$$\partial_\mu v_1^\dagger = -\frac{\lambda_1}{|x_1|^2} e_\mu^\dagger - 2 \frac{x_\mu}{|x_1|^2} v_1^\dagger \quad \therefore (\partial_\mu v_1^\dagger) v_1 = \lambda_1^2 \frac{x_{1\nu}}{|x_1|^4} e_\mu^\dagger e_\nu - 2 \frac{x_\mu}{|x_1|^2} |v_1|^2 \quad (4.79)$$

を用いれば,

$$\begin{aligned} A_\mu &= \frac{1}{2} \lambda_1^2 \frac{x_{1\nu}}{|x_1|^4} (e_\nu^\dagger e_\mu - e_\mu^\dagger e_\nu) \phi^{-1} = -i \eta_{\mu\nu}^{(+)} \lambda_1^2 \frac{x_{1\nu}}{|x_1|^4} / \left(1 + \frac{\lambda_1^2}{|x_1|^2} \right) \\ &\quad (e_\mu^\dagger e_\nu = \delta_{\mu\nu} + i \eta_{\mu\nu}^{(+)}, \eta_{\mu\nu}^{(+)} = -\eta_{\nu\mu}^{(+)}) \end{aligned}$$

$$= \frac{i}{2} \eta_{\mu\nu}^{(+)} \partial_\nu \ln \left(1 + \frac{\lambda_1^2}{|x_1|^2} \right) = \frac{i}{2} \eta_{\mu\nu}^{(+)} \partial_\nu \ln \left(1 + \frac{\lambda_1^2}{|x + \alpha_1|^2} \right) \quad (4.80)$$

となり，'t Hooft 1-インスタントンが得られた。

N -インスタントンについても同様で，それらの ADHM データを含む 0 次元ディラック作用素は

$$\Delta = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ x & & & & \\ & x & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & x & \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_k \\ \alpha_1 & & & O \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \alpha_k \end{bmatrix} \quad (4.81)$$

となる．ここで， λ_i の成分は i 番目のインスタントンのサイズを， α_i の成分は i 番目のインスタントンの 4 次元ユークリッド空間における位置をそれぞれ表す．

4.3 Nahm 構成法

ADHM 構成法はインスタントンを構成するが，Nahm 構成法はモノポールを構成する．このとき，モノポールのモジュライ空間は 1 次元なので，そこに現れる方程式は 1 階の線型連立微分方程式となる．しかし，構成の仕方や，実空間のモノポールに対応する Nahm データを求める Nahm 方程式は，ADHM 構成法のものと同様のものである．

Nahm 構成法を理解するには，インスタントンからモノポールへの次元降下を連続的に行う，カロロンというタイプのインスタントンについて理解しなければならない．カロロンについては本節の始めに説明するが，そこで紹介する HS カロロンは，前章の 't Hooft インスタントンと深い関わりを持つ．

Nahm 構成法の例としては，本節の最後に，解析的な範囲で構成できる BPS モノポールについて見てみる．

4.3.1 カロロンの定義

前章では 2 つのインスタントンについて見たが，本章で扱うカロロンは少し変わった特徴を持つ．

4 次元 Euclidean Yang-Mills system において， $x_\mu = (x^1, x^2, x^3, x^4) = (x^j, t)$ ， $x^j x_j = r^2$ としたとき，以下の性質を持つゲージ場 $A_\mu(x)$ をカロロン (caloron) という：

- $x^4 = t$ について周期的．
- 全空間で滑らか．
- 場の強さ $F_{\mu\nu}$ は SD 条件 $F_{\mu\nu}^* = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = F_{\mu\nu}$ を満たす．
- $r \rightarrow \infty$ で $\text{tr}(F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}) \rightarrow O(1/r^4)$ ．

また，周期 β を持つカロロン $A_\mu(x)$ に対し，

$$\Omega(x^j) = \mathcal{P} \exp \left(- \int_0^\beta A_t(x^j, t) dt \right) \quad (4.82)$$

をホロノミー (holonomy) または Wilson loop という．特に，有限のホロノミーをトリビアルなホロノミー (trivial holonomy)，そうでないホロノミーをトリビアルでないホロノミー (non-trivial holonomy) という．ここで， $A_\mu(x) \in \mathfrak{su}(2)$ なので， $\Omega(x^j) \in \text{SU}(2)$ である．また， $\Lambda(x) \in \text{SU}(2)$ による周期的なゲージ変換により， $\Omega(x^j)$ は

$$\Omega(x^j) \mapsto \Lambda(x^j, 0)^{-1} \Omega(x^j) \Lambda(x^j, 0) \quad (4.83)$$

と変換される．

$$\begin{aligned} \therefore \Omega(x^j) &\mapsto \mathcal{P} \exp \left\{ - \int_0^\beta \left(\Lambda(x^j, 0)^{-1} A_t(x^j, t) \Lambda(x^j, 0) + \Lambda(x^j, 0)^{-1} \partial_t \Lambda(x^j, 0) \right) dt \right\} \\ &= \Lambda(x^j, 0)^{-1} \mathcal{P} \exp \left(- \int_0^\beta A_t(x^j, t) dt \right) \Lambda(x^j, 0) \\ &= \Lambda(x^j, 0)^{-1} \Omega(x^j) \Lambda(x^j, 0). \quad \square \end{aligned} \quad (4.84)$$

周期 β を持つカロロンは， $\beta \rightarrow 0$ の極限ではモノポールに， $\beta \rightarrow \infty$ の極限ではインスタントンに近づくことが示される．この性質は，カロロンにより，インスタントンからモノポールへの連続的な次元降下が行われることを表す．

周期 β を持つカロロンは漸近的にスキルミオンと見なすことができ，そのエネルギーは

$$E = \frac{1}{12\pi^2} \int \left\{ -\frac{1}{2} \text{tr}(L_j L_j) - \frac{1}{16} \text{tr}([L_i, L_j][L_i, L_j]) \right\} d^3x \quad (4.85)$$

で与えられる．ただし， Ω をホロノミーとして， $L_i = \Omega^{-1} \partial_j \Omega$ である．また，このとき，カロロンのトポロジカルチャージをカロロン数 (caloron number) といい，それは

$$N = -\frac{1}{32\pi^2} \int_0^\beta dt \int d^3x \text{tr}(\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}) \quad (4.86)$$

で与えられる．

4.3.2 HS カロロン

カロロン自体は，意外と昔から知られていた．この小節で扱う HS カロロンは，前章の 't Hooft インスタントンと関係している．

先に見たように，'t Hooft ansatz

$$A_\mu(x) = \frac{i}{2} \eta_{\mu\nu}^{(+)} \partial_\nu \ln \phi \quad (4.87)$$

に ASD 条件を課すと，方程式

$$\frac{\square \phi}{\phi} = 0 \quad (4.88)$$

が得られるのであった．ここで，3次元での球対称性を仮定すると， $x_i x_i = r$ ， $x_4 = t$ として

$$\square\phi = \ddot{\phi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) \quad (4.89)$$

となり，さらに， $\phi = r^{-1} f(r, t)$ と置けば

$$\ddot{\phi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \ddot{f} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (-f + rf') = \frac{1}{r} (\ddot{f} + f'') \quad (4.90)$$

となる．すると， $\ddot{f} + f'' = 0$ は2次元の波動方程式であるから， $\xi = r + it$ ， $\eta = r - it$ と置けば

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} &= \frac{\partial \xi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} & \therefore \frac{\partial^2}{\partial r^2} &= \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta}, \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \eta} = i \frac{\partial}{\partial \xi} - i \frac{\partial}{\partial \eta} & \therefore \frac{\partial^2}{\partial t^2} &= -\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \\ \therefore \ddot{f} + f'' &= 4 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \iff f = f_1(\xi) + f_2(\eta) = f_1(r + it) + f_2(r - it) \end{aligned} \quad (4.91)$$

となる．よって，3次元の球対称を仮定したときの解は

$$\phi = \frac{1}{r} \{ f_1(r + it) + f_2(r - it) \} \quad (4.92)$$

であることがわかる．ただし， f_1, f_2 は任意関数である．この解は，一般に複素平面 $z = r + it$ 内で定義されるものであるが， $f_1 = f_2 = (\lambda^2/4) \coth(\mu z/2)$ と置けば，三角関数と双曲線関数の公式

$$\begin{aligned} \cosh(z_1 + z_2) &= \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2, & \cosh iz &= \cos z, \\ \sinh(z_1 + z_2) &= \cosh z_1 \sinh z_2 + \sinh z_1 \cosh z_2, & \sinh iz &= i \sin z, \\ \cosh^2 z - \sinh^2 z &= 1, & \coth z &= \frac{\cosh z}{\sinh z}, & \coth z_1 + \coth z_2 &= \frac{\sinh(z_1 + z_2)}{\sinh z_1 \sinh z_2}, \\ \cosh 2z &= 2 \cosh^2 z - 1, & \cos 2z &= 2 \cos^2 z - 1 \end{aligned} \quad (4.93)$$

などに注意して

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{\lambda^2}{4r} \left\{ \coth \frac{\mu}{2}(r + it) + \coth \frac{\mu}{2}(r - it) \right\} \\ &= \frac{\lambda^2}{4r} \frac{\sinh \mu r}{\left| \sinh(\mu r/2) \cos(\mu t/2) + i \cosh(\mu r/2) \sin(\mu t/2) \right|^2} \\ &= \frac{\lambda^2}{4r} \frac{\sinh \mu r}{-\cos^2(t/2) + \cosh^2(r/2)} = \frac{\lambda^2}{2r} \frac{\sinh \mu r}{\cosh \mu r - \cos \mu t} \end{aligned} \quad (4.94)$$

となり，すべて実数で表せる．ただし， λ, μ は任意の実数である．この解を HS カロロン (Harrington Shepard) という．ここで，(4.94)の最右辺を見ると，これは岩波数学公式 [11] の 68 ページの下から 2 つ目の公式

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + (a + 2n\pi)^2} = \frac{\sinh x}{2x(\cosh x - \cos a)} \quad (4.95)$$

の右辺に似ている．そこで， $a_j = (0, 0, 0, j\beta)$ ， $\mu = 2\pi/\beta$ ， $x^j x^j = r^2$ とすると

$$\begin{aligned} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x - a_j|^2} &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{r^2 + (t - j\beta)^2} = \mu^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\mu r)^2 + (\mu t + 2n\pi)^2} \\ &= \frac{\mu}{2r \cosh \mu r - \cos \mu t} \quad \therefore \phi(x) = \frac{\lambda^2}{\mu} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x - a_j|^2} \end{aligned} \quad (4.96)$$

となる．これより，HS カロロンはサイズが λ^2/μ の JNR 1-インスタントンを時間軸上に周期 β で並べたものに等しいことがわかる．

最後に，HS カロロンでは

$$A_0 \xrightarrow{r \rightarrow \infty} i \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & -\mu \end{pmatrix} + O(r^{-1}) \quad (4.97)$$

となるようなゲージ A_0 が取れるので，HS カロロンは

$$\begin{aligned} \Omega(\infty) &= \mathcal{P} \exp \left[-i \int_0^{2\pi/\mu} \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & -\mu \end{pmatrix} dt \right] = \exp \begin{pmatrix} -2\pi i & 0 \\ 0 & 2\pi i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2\pi i} & 0 \\ 0 & e^{2\pi i} \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{1}_2 \end{aligned} \quad (4.98)$$

というトリビアルなホロノミーを持つ．

4.3.3 Nahm 方程式と Nahm データ

Nahm 構成法を行うには，ADHM 構成法のとおり同様に，実空間におけるモノポールに対応する Nahm データが必要になる．Nahm データを得るための方程式である Nahm 方程式は，ADHM 構成法のとおり同様にディラック作用素を考えることで得られるが，Nahm データの場合は，Nahm 方程式を満たすだけではモノポールにはならず，さらにいくつかの条件が必要になる．

Nahm 構成法はモジュライ空間の中で行われるが，モノポールについてのモジュライ空間は 1 次元なので，ディラック作用素は

$$\Delta = \mathbf{1}_{2k} i \frac{d}{ds} + T^\dagger(s) + x^\dagger = \mathbf{1}_{2k} i \frac{d}{ds} + e_\mu^\dagger \otimes \{T_\mu(s) + x_\mu \mathbf{1}_k\} \quad (4.99)$$

と置ける．ただし， $\mathbf{1}_{2k} = \mathbf{1}_2 \otimes \mathbf{1}_k$ は $2k$ 次の単位行列， s はモジュライ空間の座標， e_μ は 4 元数の 2 次表現行列の基底， $T_\mu(s)$ は k 次のエルミート行列， x_μ は 4 次元ユークリッド空間の座標である（エルミート共役をとるのは習慣である）．これを 1 次元零質量ディラック作用素という．また， $T_\mu(s)$ を Nahm データという．

例によって， $\Delta^\dagger \Delta$ を計算してみると， $(d/ds)^\dagger = -d/ds$ に注意して

$$\Delta^\dagger \Delta = \left\{ \mathbf{1}_{2k} i \frac{d}{ds} + e_\mu \otimes (T_\mu + x_\mu \mathbf{1}_k) \right\} \left\{ \mathbf{1}_{2k} i \frac{d}{ds} + e_\nu^\dagger \otimes (T_\nu + x_\nu \mathbf{1}_k) \right\}$$

$$= -\mathbf{1}_{2k} \frac{d^2}{ds^2} + e_\nu^\dagger \otimes i \frac{dT_\nu}{ds} + (e_\mu^\dagger + e_\mu) \otimes (T_\mu + x_\mu \mathbf{1}_k) i \frac{d}{ds} + e_\mu e_\nu^\dagger \otimes (T_\mu + x_\mu \mathbf{1}_k)(T_\nu + x_\nu \mathbf{1}_k) \quad (4.100)$$

となる．ここで

$$\text{第2項} = (\delta_{4\nu} \mathbf{1}_2 + i\delta_{\nu j} \sigma_j) \otimes i \frac{dT_\nu}{ds} = \mathbf{1}_2 \otimes i \frac{dT_4}{ds} - \sigma_j \otimes \frac{dT_j}{ds}, \quad (4.101)$$

$$\text{第3項} = 2\delta_{4\mu} \mathbf{1}_2 \otimes (T_\mu + x_\mu \mathbf{1}_k) i \frac{d}{ds} = \mathbf{1}_2 \otimes 2(T_4 + x_4 \mathbf{1}_k) i \frac{d}{ds}, \quad (4.102)$$

$$\begin{aligned} \text{第4項} &= (\delta_{\mu\nu} \mathbf{1}_2 + i\eta_{\mu\nu}^{(-)}) \otimes (T_\mu + x_\mu \mathbf{1}_k)(T_\nu + x_\nu \mathbf{1}_k) = \mathbf{1}_2 \otimes (T_\mu + x_\mu \mathbf{1}_k)^2 + i\eta_{\mu\nu}^{(-)} \otimes T_\mu T_\nu \\ &= \mathbf{1}_2 \otimes (T_\mu + x_\mu \mathbf{1}_k)^2 + i(\varepsilon_{i\mu\nu 4} - \delta_{i\mu} \delta_{\nu 4} + \delta_{i\nu} \delta_{\mu 4}) \sigma_i \otimes T_\mu T_\nu \\ &= \mathbf{1}_2 \otimes (T_\mu + x_\mu \mathbf{1}_k)^2 + \sigma_i \otimes \left(\frac{i}{2} \varepsilon_{ijk} [T_j, T_k] - i[T_i, T_4] \right) \end{aligned} \quad (4.103)$$

となる．ゆえに，

$$\begin{aligned} \Delta^\dagger \Delta &= \mathbf{1}_2 \otimes \left\{ -\mathbf{1}_k \frac{d^2}{ds^2} + i \frac{dT_4}{ds} + 2(T_4 + x_4 \mathbf{1}_k) i \frac{d}{ds} + (T_\mu + x_\mu \mathbf{1}_k)^2 \right\} \\ &\quad + \sigma_i \otimes \left(-\frac{dT_i}{ds} + \frac{i}{2} \varepsilon_{ijk} [T_j, T_k] - i[T_i, T_4] \right) \end{aligned} \quad (4.104)$$

となり，これが Δ が ASD であるためには

$$-\frac{dT_i}{ds} + \frac{i}{2} \varepsilon_{ijk} [T_j, T_k] - i[T_i, T_4] = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (4.105)$$

が満たされなければならないことがわかる．ところが，モノポールの場合， T_4 は適当なゲージ変換で 0 にできるので，結局

$$\frac{d}{ds} T_i(s) = \frac{i}{2} \varepsilon_{ijk} [T_j(s), T_k(s)] \quad (i = 1, 2, 3) \quad (4.106)$$

が求める条件である．これを Nahm 方程式という．

ADHM 構成法の場合は，ADHM 方程式を満たす ADHM データを持つ 0 次元ディラック作用素を用いれば，インスタントンが構成できた．しかし，モノポールの場合は，Nahm データが Nahm 方程式を満たすだけでは必ずしもモノポールを構成できない．モノポールが構成できるためには，まず， $T_i(s)$ が区間 $[-1, 1]$ (もしくは $[0, 2]$) で定義された N 次の正方行列でなければならない．そして，それに加えて，さらに以下の条件が必要である：

- 反エルミート行列，すなわち， $T_i^\dagger(s) = -T_i(s)$ を満たす．
- $T_i(-s) = {}^t T_i(s)$ を満たす (Reality の条件)．
- Nahm 方程式

$$\frac{d}{ds} T_i(s) = \frac{i}{2} \varepsilon_{ijk} [T_j(s), T_k(s)] \quad (4.107)$$

を満たす．

- $(-1, 1)$ の至る所で滑らか .
- $s = \pm 1$ で単純極を持ち , それぞれの留数は $\text{su}(2)$ の既約表現で表される , すなわち , $s = 1$ 付近で

$$T_i(s) \sim \frac{R_i}{s-1} + \mathcal{O}(1). \quad (4.108)$$

ただし , R_i は $\text{su}(2)$ の既約表現で , Nahm 方程式より , $[R_1, R_2] = -R_3$ などの交換関係を満たす .

ただし , Nahm データの型が 1×1 のときは , 必ずしもすべての条件を満たす必要はない .

これらの条件を満たす Nahm データ $T_i(s)$ が与えられれば , それらを含んだ 1 次元零質量ディラック作用素 Δ による Weyl 方程式

$$\Delta^\dagger v = \left\{ \mathbf{1}_{2k} \frac{d}{ds} - (T_\mu + x_\mu \mathbf{1}_k) \otimes \sigma_i \right\} v(s) = 0 \quad (4.109)$$

が与えられるが¹ , これには 2 つの独立なゼロモード $v_a(s), v_b(s)$ が存在することが知られている . そして ,

$$\int_{-1}^1 v_a(s)^\dagger v_b(s) ds = \delta_{ab} \quad (4.110)$$

となるように正規直交化したそれらにより , 各成分が

$$\Phi(x)_{ab} = i \int_{-1}^1 s v_a(s)^\dagger v_b(s) ds, \quad A_j(x)_{ab} = \int_{-1}^1 v_a(s)^\dagger \partial_j v_b(s) ds \quad (4.111)$$

となるような 2×2 の行列を作ると , Nahm データの条件より $\Phi(x)$ がモノポールの境界条件

$$\Phi \xrightarrow{r \rightarrow \infty} i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \frac{i}{2r} \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix} + \mathcal{O}(r^{-1}), \quad \frac{\partial}{\partial \Omega} \|\Phi\| \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \mathcal{O}(r^{-1}) \quad (4.112)$$

を満たし , $\Phi(x), A_i(x)$ がそれぞれモノポールのヒッグス場とゲージ場に対応することが示される [13] ($v(s)$ はモジュライ空間の座標 s を変数として持つので , 内積は掛け算でなくモジュライ空間での積分となる . また , 次元降下のアナロジーにより , $\Phi(x)$ は $A_\mu(x)$ の時間成分と見なされる) . ただし ,

$$\|\Phi\|^2 = -\frac{1}{2} \text{tr} \Phi^2 \quad (4.113)$$

である . このようにしてモノポールを構成する方法を Nahm 構成法 (Nahm construction) といい , 特に $T_i(s)$ から $\Phi(x), A_i(x)$ を得る手順を Nahm 変換 (Nahm transform) という .

次小節では , カロロンを用いてより一般的に Nahm 構成法を説明する .

¹Weyl 方程式には x_4 はあらわには含まれないことが示される [16] .

4.3.4 Nahm 構成法

Nahm 構成法は、カロロンを用いることで、より一般的に説明される。特に、先に見た't Hooft インスタントンの ADHM データから、HS カロロンの ADHM データを類推することで、Nahm 構成法が一種のフーリエ変換を含んでいることがわかる。

先に見たように、HS カロロンは JNR 1-インスタントン (ほとんど't Hooft インスタントンと同義) を時間軸上に周期的に並べたものである。これを踏まえると、原点にある HS カロロンの 0 次元ディラック作用素 Δ は、't Hooft インスタントンの ADHM データ (4.81) を踏まえて

$$\Delta = \begin{bmatrix} \cdots & \lambda_{-2} & \lambda_{-1} & \lambda_0 & \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots \\ \ddots & & & & & & \\ & -2\tau & & & & O & \\ & & -\tau & & & & \\ & & & 0 & & & \\ & O & & +\tau & & & \\ & & & & +2\tau & & \\ & & & & & \ddots & \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} & & & & 0 & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & x & & & O & \\ & & & x & & & \\ & & & & x & & \\ & & & & & x & \\ O & & & & & & x \\ & & & & & & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W \\ B \end{bmatrix} \quad (4.114)$$

となると考えられる。ただし、 $\lambda_n, \tau = 2\pi/\mu_0$ はそれぞれ Real な定 4 元数、 W は $1 \times \infty$ の行ベクトル、 B は $\infty \times \infty$ の正方行列である。この作用素の意味について考えてみる。

Δ はカロロンについてのディラック作用素であり、それは時間 $t = x_4$ について周期的である。そこで、 W, B をそれぞれ t に対応する空間 (座標を s とする) での微分作用素と見なし、そこでのフーリエ展開の基底

$$\frac{1}{\sqrt{\mu_0}} e^{i\tau ns} \quad (4.115)$$

を用いてそれぞれフーリエ展開することを考える。すると、まず $W(s)$ は

$$W(s) = \frac{1}{\sqrt{\mu_0}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n e^{i\tau ns} = \frac{\lambda}{\mu_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\tau ns} = \frac{\lambda}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(s - 2\pi n/\tau) \quad (4.116)$$

と表せる (本当は 2 次の単位行列 1_2 とのテンソル積である。以後テンソル積は省略する)。ただし、簡単のため、

$$\lambda_n = \frac{\lambda}{\sqrt{\mu_0}} \quad (4.117)$$

とした。また

$$\tau \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\tau ns} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(s - 2\pi n/\tau) \quad (4.118)$$

は周期デルタ関数であり， s 上の点 $2\pi n/\tau (n \in \mathbb{Z})$ にデルタ関数が並んでいるような関数である．今，周期デルタ関数の 1 周期のみを考えることにすると

$$\tau \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\tau ns} = \delta(s) \quad (4.119)$$

であり，結局， $W(s)$ は

$$W(s) = \frac{\lambda}{2\pi} \delta(s) \quad (4.120)$$

となる．次に， B は， $W(s)$ と同様にして

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{\mu_0} \sum_{m,n} (m\tau + x) \delta_{mn} e^{-i\tau ms'} e^{i\tau ns} \\ &= \frac{\tau}{\mu_0} \frac{d}{ds'} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{-i\tau} e^{i\tau m(s-s')} + \frac{x}{\mu_0 \tau} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{i\tau m(s-s')} = \frac{1}{2\pi} \left(i \frac{d}{ds'} + x \right) \delta(s-s') \end{aligned} \quad (4.121)$$

となる．そして，このようにフーリエ級数展開した Δ に対し，そのゼロモード V を

$$V(s) = \begin{bmatrix} u(s) \\ v(s) \end{bmatrix} \quad (4.122)$$

と置いてみる．すると，Weyl 方程式は

$$\Delta^\dagger V(s) = \begin{bmatrix} W(s)^\dagger & B(s)^\dagger \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(s) \\ v(s) \end{bmatrix} = W(s)^\dagger u(s) + B(s)^\dagger v(s) = 0 \quad (4.123)$$

となるが， $B(s)^\dagger v(s)$ は内積であるから

$$\begin{aligned} B(s)^\dagger v(s) &= \int_0^{\mu_0} \left\{ -\frac{i}{2\pi} \frac{d}{ds'} \delta(s-s') + \frac{x^\dagger}{2\pi} \delta(s-s') \right\} v(s') ds' \\ &= \int_0^{\mu_0} ds' \frac{1}{2\pi} \delta(s-s') \left(i \frac{d}{ds'} + x^\dagger \right) v(s') = \frac{1}{2\pi} \left(i \frac{d}{ds} + x^\dagger \right) v(s) \end{aligned} \quad (4.124)$$

となり，結局，Weyl 方程式は

$$\lambda \delta(s) u(s) + \left(i \frac{d}{ds} + x^\dagger \right) v(s) = 0 \quad (4.125)$$

となることがわかる．

次に，一般のカロロンの場合を考える．まず，一般の $k \geq 2$ の場合には， $k = 1$ の BPS モノポールのときのアナロジーで，原点にあり 0 となっていた $T(s)$ を改めて加えて

$$B(s) = i \frac{d}{ds} + T(s)^\dagger + x^\dagger \quad (4.126)$$

とすればよい．ただし， $T(s) = T_\mu(s) \otimes e_\mu$ で， $T_\mu(s)$ は $k \times k$ のエルミート行列である．次に， $W(s)$ は $k = 1$ のとき

$$W_1 = [\cdots, \lambda, \lambda, \lambda, \lambda, \lambda, \cdots] \quad (4.127)$$

であるが，この各成分を

$$g(\mu) = e^{-i\tau\mu\hat{\omega}\cdot\sigma} = \mathbf{1}_2 \cos \tau\mu - i(\hat{\omega}\cdot\sigma) \sin \tau\mu \in \text{SU}(2) \quad (4.128)$$

(ただし， $0 < \mu < \mu_0/2$ ， $\hat{\omega}$ は純虚数の単位 4 元数， σ は Pauli 行列) により

$$W_1 \mapsto [\cdots, g^{-2}\lambda, g^{-1}\lambda, \lambda, g\lambda, g^2\lambda, \cdots] \quad (4.129)$$

とゲージ変換してみる (これは一種の ansatz である．ローカルに見るとただのゲージ変換であるが，グローバルに見ることに意味がある)．すると， W_1 は，先と同様にフーリエ級数展開で表せ

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{1}{\mu_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \lambda \{ \cos \tau m \mu - i(\hat{\omega}\cdot\sigma) \sin \tau m \mu \} e^{i\tau m s} \\ &= \frac{\lambda}{\mu_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (P_+ e^{i\tau m(s-\mu)} + P_- e^{i\tau m(s+\mu)}) = \frac{\lambda}{2\pi} (P_+ \delta(s-\mu) + P_- \delta(s+\mu)) \end{aligned} \quad (4.130)$$

となる．ただし，

$$P_{\pm} = \frac{1}{2}(\mathbf{1}_2 \pm \hat{\omega}\cdot\sigma) \quad (4.131)$$

であり，これらはそれぞれ $P_{\pm}^2 = P_{\pm}$ ， $P_{\pm}^{\dagger} = P_{\pm}$ を満たす，すなわち，射影演算子である．この変換により， s 上の区間 $I = [-\mu_0/2, \mu_0/2]$ は，2 つの区間 $I_1 = [-\mu, \mu]$ ， $I_2 = [\mu, \mu_0 - \mu]$ の直和に分けられる ($I = I_1 \oplus I_2$)．また，ここに現れる因子を用いて，一般のカロロンのディラック作用素 Δ は (テンソル積を戻して)

$$\Delta = \begin{bmatrix} (P_+ \delta(s-\mu) + P_- \delta(s+\mu)) \tilde{W} \\ \mathbf{1}_{2k} i \frac{d}{ds} + (T_{\mu} + x_{\mu} \mathbf{1}_k) \otimes e_{\mu}^{\dagger} \end{bmatrix} \quad (4.132)$$

となる．

ここで， Δ の ASD 条件は，例のごとく $\Delta^{\dagger} \Delta$ を計算して

$$\begin{aligned} \Delta^{\dagger} \Delta &= \begin{bmatrix} W^{\dagger} & B^{\dagger} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W \\ B \end{bmatrix} = \tilde{W}^{\dagger} (P_+ \delta(s-\mu) + P_- \delta(s+\mu))^2 \tilde{W} + B^{\dagger} B \\ &= \tilde{W}^{\dagger} (P_+ \delta(s-\mu) + P_- \delta(s+\mu)) \tilde{W} + B^{\dagger} B \end{aligned} \quad (4.133)$$

となる (δ 関数の 2 乗は δ 関数)．このとき，Pauli 行列の係数は，第 2 項については Nahm 方程式のときと同様であり，第 1 項については， $\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} \mathbf{1}_2 + i \varepsilon_{ijk} \sigma_k$ ， $\text{tr} \sigma_i = 0$ ， $\text{tr} \mathbf{1}_2 = 2$ より， σ_j をかけて 2 で割ったものとすればよい．それゆえ，カロロンの ASD 条件，すなわち，Nahm 方程式は

$$\frac{d}{ds} T_j - i[T_4, T_j] - \frac{i}{2} \varepsilon_{jkl} [T_k, T_l] = \frac{1}{2} \text{tr}_2 \left\{ \sigma_j \tilde{W}^{\dagger} (P_+ \delta(s-\mu) + P_- \delta(s+\mu)) \tilde{W} \right\} \quad (4.134)$$

となることがわかる．ただし， tr_2 は4元数についてのトレースである．また，特に，1つの区間のみの場合は， $\mu \rightarrow \pm\mu_0/2$ として

$$\frac{d}{ds}T_j - i[T_4, T_j] - \frac{i}{2}\varepsilon_{jkl}[T_k, T_l] = \frac{1}{2}\text{tr}_2(\sigma_j\tilde{W}^\dagger\tilde{W})\delta(s - \mu_0/2) \quad (4.135)$$

となる．ここで，(4.134) は区間 $I = [-\mu_0/2, \mu_0/2]$ 全体での方程式であるが， I は2つの区間 $I_1 = [-\mu, \mu]$ ， $I_2 = [\mu, \mu_0 - \mu]$ に分けられおり，それらの上で独立の Nahm データ $T_j^{(1)}$ ， $T_j^{(2)}$ がそれぞれ考えられるので，境界を除いた2つの区間での Nahm 方程式は

$$\frac{d}{ds}T_j^{(m)} - i[T_4^{(m)}, T_j^{(m)}] - \frac{i}{2}\varepsilon_{jkl}[T_k^{(m)}, T_l^{(m)}] = 0 \quad (4.136)$$

となる．ただし， $m = 1, 2$ であり， $T_\mu^{(m)}$ を特に bulk の Nahm データという．また， I_1 と I_2 の境界 $s = \pm\mu$ で Nahm データが連続であるとは限らないので，カロロンの Nahm 方程式には $s = \pm\mu$ での境界条件 (matching conditions) が必要であるが，それらは境界付近の $\pm\varepsilon$ の間で (4.134) の両辺を積分してから $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限を取ることで

$$T_j^{(2)}(\mu) - T_j^{(1)}(\mu) = \frac{1}{2}\text{tr}_2(\sigma_j\tilde{W}^\dagger P_+\tilde{W}), \quad (4.137a)$$

$$T_j^{(1)}(-\mu) - T_j^{(2)}(\mu_0 - \mu) = \frac{1}{2}\text{tr}_2(\sigma_j\tilde{W}^\dagger P_-\tilde{W}) \quad (4.137b)$$

となることがわかる．それゆえ，この境界条件に含まれる量である \tilde{W} ， $\hat{\omega}$ を境界での Nahm データ (boundary data) という．1つの区間のみの場合も同様で，Nahm 方程式，境界条件はそれぞれ

$$\frac{d}{ds}T_j - i[T_4, T_j] - \frac{i}{2}\varepsilon_{jkl}[T_k, T_l] = 0, \quad (4.138)$$

$$T_j(-\mu_0/2) - T_j(\mu_0/2) = \frac{1}{2}\text{tr}_2(\sigma_j\tilde{W}^\dagger\tilde{W}) \quad (4.139)$$

となる．

これらの Nahm 方程式に加え，先に述べたようないくつかの条件を満たす Nahm データ $T_\mu^{(m)}$ が与えられれば，それらを含んだディラック作用素 Δ による Weyl 方程式が得られ，そのゼロモード

$$V = \begin{bmatrix} u(x) \\ v^{(m)}(s, x) \end{bmatrix} \quad (4.140)$$

が満たすべき条件は以下ようになる：

- $v(s, x)$ は s について周期 μ_0 を持つ周期関数．

$$\bullet v(s, x + 2\pi/\mu_0) = v(s, x)e^{i(2\pi/\mu_0)s}. \quad (4.141)$$

$$\bullet u(x + 2\pi/\mu_0) = u(x). \quad (4.142)$$

$$\bullet V^\dagger V = u^\dagger u + \int_{I_1} v^{(1)\dagger} v^{(1)} ds + \int_{I_2} v^{(2)\dagger} v^{(2)} ds = \mathbf{1}_2. \quad (\text{規格化条件}) \quad (4.143)$$

$$\bullet \left\{ \mathbf{1}_{2k} \frac{d}{ds} - i \left(T_\mu^{(m)} + x_\mu \mathbf{1}_k \right) \otimes e_\mu \right\} v^{(m)}(s, x) = i \tilde{W}^\dagger \left(P_+ \delta(s - \mu) + P_- \delta(s + \mu) \right) u(x). \quad (4.144)$$

(Weyl 方程式)

ただし, 特に, 1つの区間のみの場合は, 先と同様にして, Weyl 方程式は

$$\left\{ \mathbf{1}_{2k} \frac{d}{ds} - i \left(T_\mu + x_\mu \mathbf{1}_k \right) \otimes e_\mu \right\} v(s, x) = i \tilde{W}^\dagger u(s) \delta(s - \mu) \quad (4.145)$$

となる. そして, これらを満たす V によって, カロロンのゲージ場 $A_\mu(x)$ は

$$A_\mu(x) = V^\dagger \partial_\mu V = u^\dagger \partial_\mu u + \int_{I_1} v^{(1)\dagger} \partial_\mu v^{(1)} ds + \int_{I_2} v^{(2)\dagger} \partial_\mu v^{(2)} ds \quad (4.146)$$

で与えられる.

最後に, カロロンは $\mu_0 \rightarrow 2$ の極限ではモノポールに, $\mu_0 \rightarrow 0$ の極限ではインスタントンになるが, インスタントン極限の場合, 区間 $I = [-\mu_0/2, \mu_0/2]$ が小さくなるので, $v(s, x)$ は近似的に

$$v(s, x) = v_0 + v_1 s \quad (4.147)$$

と書け, Weyl 方程式は

$$\left\{ \mathbf{1}_2 \frac{d}{ds} - i(T + x) \right\} (v_0 + v_1 s) = v_1 - i(T + x)(v_0 + v_1 s) = i \tilde{W}^\dagger u \delta(s - \mu) \quad (4.148)$$

となる. そして, この両辺を区間全体で積分して $\mu_0 \ll 1$ と近似することで

$$v_1 = (x + i \mathcal{T}_j \otimes \sigma_j) v_0 = (i/\mu_0) \tilde{W}^\dagger u \quad (4.149)$$

となる. ただし, $\mathcal{T}_j = T_j(0)$ である. また, 規格化条件は

$$u^\dagger u + v_0^\dagger v_0 = \mathbf{1}_2 \quad (4.150)$$

となる. さらに, Δ は

$$\Delta = \begin{bmatrix} \Lambda \\ x + i \mathcal{T}_j \otimes \sigma_j \end{bmatrix} \quad (4.151)$$

となる. ただし, $\Lambda = (1/\sqrt{\mu_0})W$ である. モノポール極限については, 先に述べた通りである.

区間が1つの場合のカロロンは例えば [12] で, 区間が2つの場合のカロロンは例えば [17] で与えられている.

4.3.5 BPS モノポールの構成

1×1 型の Nahm データは単にスカラーである．そして，それを用いることで，単純な球対称性を持つ，チャージ 1 の BPS モノポールを解析的に構成することができる．

$N = 1$ のとき，Nahm データは 1×1 型の行列であるが，それは単にスカラーである．ところが，反エルミート性の条件があるので，一般の $N = 1$ の Nahm データは $T_i = ic_i$ となる．ただし， c_1, c_2, c_3 は任意の実数の定数である．ここでは，簡単のため， $T_j = 0$ とする．

まず，これが Nahm データの条件を満たすのは明らかである．これより，1次元零質量ディラック作用素 Δ は

$$\Delta = \frac{d}{ds} + \sigma_i x_i \quad (4.152)$$

となる．すると，Weyl 方程式は

$$\left(\frac{d}{ds} + \sigma_i x_i \right) V(s) = 0 \quad (4.153)$$

となる．ところが，この解は明らかに

$$\begin{aligned} V(s) &= e^{-\sigma_i x_i s} \phi(r) = \left\{ 1 - (\sigma_i s)s + \frac{1}{2}(\sigma_i s)^2 s^2 - \frac{1}{3!}(\sigma_i s)^3 s^3 + \dots \right\} \phi(r) \\ &= \left\{ 1 + \frac{1}{2}(rs)^2 + \dots \right\} \phi(r) - \frac{\sigma_i x_i}{r} \left\{ (rs) + \frac{1}{3!}(rs)^3 + \dots \right\} \phi(r) \\ &= \left(\cosh rs - \frac{\sigma_i s}{r} \sinh rs \right) \phi(r) \quad (\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} \mathbf{1}_2 + i \varepsilon_{ijk} \sigma_k, x_i x_i = r^2) \end{aligned} \quad (4.154)$$

である．ただし， $\phi(r)$ は規格化因子で

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 V(s)^\dagger V(s) ds &= \phi^2 \int_{-1}^1 \left(\cosh rs - \frac{\sigma_i x_i}{r} \sinh rs \right)^2 ds \\ &= \phi^2 \int_{-1}^1 \left(\cosh^2 rs + \sinh^2 rs - \frac{\sigma_i x_i}{r} 2 \cosh rs \sinh rs \right) ds \\ &= \phi^2 \int_{-1}^1 \left(\cosh 2rs - \frac{\sigma_i x_i}{r} \sinh 2rs \right) ds = \phi^2 \int_{-1}^1 \cosh 2rs ds \\ &\quad (\sinh 2x = 2 \cosh x \sinh x, \cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x) \\ &= \phi^2 \left[\frac{1}{2r} \sinh 2rs \right]_{-1}^1 = \phi^2 \frac{\sinh 2r}{r} = 1 \iff \phi(r) = \sqrt{\frac{r}{\sinh 2r}} \end{aligned} \quad (4.155)$$

である．これよりヒッグス場 $\Phi(x)$ を求めると

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= i \int_{-1}^1 s V(s)^\dagger V(s) ds = i \phi^2 \int_{-1}^1 s \left(\cosh rs - \frac{\sigma_i x_i}{r} \sinh rs \right)^2 ds \\ &= i \phi^2 \int_{-1}^1 s \left(\cosh^2 rs + \sinh^2 rs - \frac{\sigma_i x_i}{r} 2 \cosh rs \sinh rs \right) ds \\ &= i \phi^2 \int_{-1}^1 s \left(\cosh 2rs - \frac{\sigma_i x_i}{r} \sinh 2rs \right) ds = -i \frac{\sigma_i x_i}{r} \phi^2 \int_{-1}^1 s \sinh 2rs ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -i \frac{\sigma_i x_i}{r} \phi^2 \left[s \frac{1}{2r} \cosh 2rs - \frac{1}{4r^2} \sinh 2rs \right]_{-1}^1 \\
&= -i \frac{\sigma_i x_i}{r} \frac{r}{\sinh 2r} \left(\frac{1}{r} \cosh 2r - \frac{1}{2r^2} \sinh 2r \right) = -i \frac{\sigma_i x_i}{2r^2} \left(\frac{2r}{\tanh 2r} - 1 \right) \quad (4.156)
\end{aligned}$$

となる．また，ゲージ場 $A_i(x)$ は

$$\partial_i \phi(r) = \frac{x_i}{r} \partial_r \left(r^{\frac{1}{2}} \sinh^{-\frac{1}{2}} 2r \right) = \frac{x_i}{2r^2} \left(1 - \frac{2r}{\tanh 2r} \right) \phi \quad \left((x^n)' = n \frac{x^n}{x} \right) \quad (4.157)$$

に注意して，多少長いが

$$\begin{aligned}
A_i(x) &= i \int_{-1}^1 V(s)^\dagger \partial_i V(s) ds \\
&= \int_{-1}^1 ds \left(\cosh rs - \frac{\sigma_j x_j}{r} \sinh rs \right) \phi \partial_i \left\{ \left(\cosh rs - \frac{\sigma_k x_k}{r} \sinh rs \right) \phi \right\} \\
&= \int_{-1}^1 ds \left(\cosh rs - \frac{\sigma_j x_j}{r} \sinh rs \right) \phi \left\{ \frac{x_i}{r} s \left(\sinh rs - \frac{\sigma_k x_k}{r} \cosh rs \right) \phi \right. \\
&\quad \left. - \partial_i \left(\frac{\sigma_k x_k}{r} \right) \sinh rs \cdot \phi + \left(\cosh rs - \frac{\sigma_j x_j}{r} \sinh rs \right) \partial_i \phi \right\} \\
&= \int_{-1}^1 \frac{x_i}{r} s \left\{ 2 \cosh rs \sinh rs - \frac{\sigma_j x_j}{r} (\cosh^2 rs + \sinh^2 rs) \right\} \phi^2 ds \\
&\quad - \int_{-1}^1 \left(\cosh rs \sinh rs - \frac{\sigma_j x_j}{r} \sinh^2 rs \right) \left(\frac{\sigma_i}{r} - \frac{\sigma_k x_k x_i}{r^3} \right) \phi^2 ds \\
&\quad + \int_{-1}^1 \left(\cosh^2 rs + \sinh^2 rs - \frac{\sigma_j x_j}{r} 2 \cosh rs \sinh rs \right) \phi \partial_i \phi ds \\
&= \int_{-1}^1 \frac{x_i}{r} s \left\{ \sinh 2rs - \frac{\sigma_j x_j}{r} \cosh 2rs \right\} \phi^2 ds \\
&\quad - \int_{-1}^1 \frac{1}{2} \left\{ \sinh 2rs - \frac{\sigma_j x_j}{r} (\cosh 2rs - 1) \right\} \left(\frac{\sigma_i}{r} - \frac{\sigma_k x_k x_i}{r^3} \right) \phi^2 ds \\
&\quad + \int_{-1}^1 \left(\cosh 2rs - \frac{\sigma_j x_j}{r} \sinh 2rs \right) \phi \partial_i \phi ds \quad \left(\sinh^2 x = \frac{1}{2} (\cosh 2rs - 1) \right) \\
&= \frac{x_i}{r} \phi^2 \int_{-1}^1 s \sinh 2rs ds - \frac{\sigma_j x_j}{2r} \left(\frac{\sigma_i}{r} - \frac{\sigma_k x_k x_i}{r^3} \right) \phi^2 \int_{-1}^1 (\cosh 2rs - 1) ds \\
&\quad + \frac{x_i}{2r^2} \left(1 - \frac{2r}{\tanh 2r} \right) \phi^2 \int_{-1}^1 \cosh 2rs ds \\
&= \frac{x_i}{r} \phi^2 \left[s \frac{1}{2r} \cosh 2rs - \frac{1}{2r^2} \sinh 2rs \right]_{-1}^1 - \frac{\sigma_j x_j}{2r} \left(\frac{\sigma_i}{r} - \frac{\sigma_k x_k x_i}{r^3} \right) \phi^2 \left[\frac{1}{2r} \sinh 2rs - s \right]_{-1}^1 \\
&\quad + \frac{x_i}{2r^2} \left(1 - \frac{2r}{\tanh 2r} \right) \phi^2 \left[\frac{1}{2r} \sinh 2rs \right]_{-1}^1 \\
&= \frac{x_i}{r} \phi^2 \left(\frac{1}{r} \cosh 2r - \frac{1}{r^2} \sinh 2r \right) - \frac{\sigma_j x_j}{2r} \left(\frac{\sigma_i}{r} - \frac{\sigma_k x_k x_i}{r^3} \right) \phi^2 \left(\frac{1}{r} \sinh 2r - 2 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{x_i}{2r^2} \left(\frac{1}{r} \sinh 2r - 2 \cosh 2r \right) \phi^2 \\
& = \left\{ -\frac{x_j}{2r^2} (\delta_{ij} - i\varepsilon_{ijk}\sigma_k) + \frac{x_i}{2r^2} \right\} \left(\frac{1}{r} \sinh 2r - 2 \right) \frac{r}{\sinh 2r} \\
& = -i \frac{\varepsilon_{ijk} x_j \sigma_k}{2r^2} \left(\frac{2r}{\sinh 2r} - 1 \right) \tag{4.158}
\end{aligned}$$

となる．改めて書くと

$$\Phi = -i \frac{\sigma_i x_i}{2r^2} \left(\frac{2r}{\tanh 2r} - 1 \right), \quad A_i = -i \frac{\varepsilon_{ijk} x_j \sigma_k}{2r^2} \left(\frac{2r}{\sinh 2r} - 1 \right) \tag{4.159}$$

となり，これらはそれぞれ，Bogomolny 条件と ansatz を用いて得られる BPS モノポール (Bogomolny-Prasad-Sommerfield) のヒッグス場，ゲージ場と一致する．

今得られた BPS モノポールは原点に置かれたものであるが，Nahm データを $T_i = ic_i$ とすれば，実空間上の点 (c_1, c_2, c_3) に置かれた BPS モノポールを構成できる．

4.3.6 2-モノポールの Nahm データ

2×2 型の Nahm データは，Nahm データの条件より，未知関数を含む 3 つの反エルミート行列となる．それらの未知関数は，Nahm 方程式により決定され，今度はトーラスの対称性を持つ軸対称なチャージ 2 のモノポールを表す Nahm データであることがわかる．しかし， $N = 2$ の場合は， $N = 1$ のときとは異なり，full のモノポールを解析的に構成することはできない．

$N = 2$ の場合，Nahm データは 2×2 の行列となる．さらに，Nahm データの条件より，この場合の Nahm データは 2 次の反エルミート行列でなければならない．ところが，任意の反エルミート行列は，Pauli 行列 τ_i の純虚数による線型結合で表されるのであった．よって，結局， $N = 2$ の Nahm データ $T_i(s)$ は

$$T_1(s) = \frac{i}{2} f_1(s) \tau_1, \quad T_2(s) = \frac{i}{2} f_2(s) \tau_2, \quad T_3(s) = -\frac{i}{2} f_3(s) \tau_3 \tag{4.160}$$

と書ける．ただし， $f_1(s), f_2(s), f_3(s)$ は $[-1, 1]$ で定義された，Nahm データの条件を満たすような実数値関数である．これらを Nahm 方程式に代入すると， $[\tau_i, \tau_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\tau_k$ を思い出して

$$\frac{i}{2} f_1' \tau_1 = \frac{1}{4} f_2 f_3 \cdot 2i\tau_1 \iff f_1' = f_2 f_3, \tag{4.161}$$

$$\frac{i}{2} f_2' \tau_2 = \frac{1}{4} f_3 f_1 \cdot 2i\tau_2 \iff f_2' = f_3 f_1, \tag{4.162}$$

$$-\frac{i}{2} f_3' \tau_3 = -\frac{1}{4} f_1 f_2 \cdot 2i\tau_3 \iff f_3' = f_1 f_2 \tag{4.163}$$

となる (これは，剛体における Euler 方程式として知られるものである)．これらより

$$\frac{f_1'}{f_2'} = \frac{f_2}{f_1} \iff f_1 f_1' - f_2 f_2' = \frac{1}{2} (f_1^2 - f_2^2)' = 0 \tag{4.164}$$

などであるから,

$$f_2^2 - f_1^2 = c_{21}^2, \quad f_1^2 - f_3^2 = c_{13}^2, \quad f_2^2 - f_3^2 = c_{23}^2 \quad (4.165)$$

となる. ただし, $f_2^2 \geq f_1^2 \geq f_3^2$ と仮定し, c_{21}, c_{13}, c_{23} はそれぞれ実数の積分定数である. また, $f_3^2 = 0$ の場合を考えると, これらの積分定数の間には

$$c_{21}^2 + c_{13}^2 = c_{23}^2 \quad (4.166)$$

という関係がある. さらに, 任意の定数 L, s_0 を用いて

$$f_j(s) = LF_j(u), \quad u = L(s + s_0) \quad (4.167)$$

と置くと,

$$\begin{aligned} f_1' = f_2 f_3 &\iff \frac{d}{ds}(LF_1(u)) = L^2 F_1'(u) = L^2 F_2(u) F_3(u) \\ &\iff F_1'(u) = F_2(u) F_3(u) \end{aligned} \quad (4.168)$$

などというスケール不変性があることがわかる. そこで, この自由度を, L が

$$c_{21}^2 = L^2 k^2, \quad c_{13}^2 = L^2(1 - k^2), \quad c_{23}^2 = L^2 \quad (4.169)$$

を満たすように固定してみる. ただし, k は実数の定数で, c_{13}^2 が実数であることと, $f_2^2 \geq f_1^2 \geq f_3^2$ の順序を保つためには, $k \in [0, 1]$ である. このようにすると, F_1, F_3 は, F_2 を用いて

$$f_1^2 = L^2 F_1^2 = f_2^2 - c_{21}^2 = L^2 F_2^2 - L^2 k^2 \iff F_1^2 = F_2^2 - k^2, \quad (4.170)$$

$$f_3^2 = L^2 F_3^2 = f_2^2 - c_{23}^2 = L^2 F_2^2 - L^2 \iff F_3^2 = F_2^2 - 1 \quad (4.171)$$

と表せる. このとき, 残った f_2 が満たすべき方程式は

$$\left(\frac{dF_2}{du}\right)^2 = (F_2^2 - k^2)(F_2^2 - 1) \quad (4.172)$$

となる. ところが, これは, $F_2 = -1/y$ と置けば

$$\begin{aligned} \left(\frac{dy}{du}\right)^2 &= (1 - y^2)(1 - k^2 y^2) \iff \frac{du}{dy} = \frac{1}{\sqrt{(1 - y^2)(1 - k^2 y^2)}} \\ &\iff u = \int_0^y \frac{dy'}{\sqrt{(1 - y'^2)(1 - k^2 y'^2)}} = \text{sn}_k^{-1} y \iff y = \text{sn}_k(u) \end{aligned} \quad (4.173)$$

となることがわかり,

$$\begin{aligned} F_1 &= -\frac{1}{y} = \frac{-1}{\text{sn}_k(u)}, \quad F_1^2 = F_2^2 - k^2 = \frac{\text{dn}_k^2(u)}{\text{sn}_k^2(u)}, \quad F_3^2 = F_2^2 - 1 = \frac{\text{cn}_k^2(u)}{\text{sn}_k^2(u)} \\ \therefore f_2 &= \frac{-L}{\text{sn}_k(u)}, \quad f_1 = \frac{-L \text{dn}_k(u)}{\text{sn}_k(u)}, \quad f_3 = \frac{-L \text{cn}_k(u)}{\text{sn}_k(u)} \end{aligned} \quad (4.174)$$

が求める解である。ただし, $\text{sn}_k(u)$, $\text{cn}_k(u)$, $\text{dn}_k(u)$ はそれぞれパラメータ k を持つ Jacobi の楕円関数である。また, 途中でそれらについての公式

$$\text{sn}_k^2(u) + \text{cn}_k^2(u) = 1, \quad k^2 \text{sn}_k^2(u) + \text{dn}_k^2(u) = 1 \quad (4.175)$$

を用いた。このとき, $\text{sn}_k(u)$ は $u = 0, 2K_k$ で零点を持つから, $L = K_k$, $s_0 = 1$ とすれば, $s = \pm 1$ で極を持つことになる。ただし, K_k は第 1 種完全楕円積分で,

$$K_k = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} \quad (4.176)$$

である。ここで, 解にはパラメータ $k \in [0, 1]$ が含まれているが, これは, 2つのモノポールの間の距離を表す。特に, $k \rightarrow 1$ の極限では, 2つのモノポールは無限遠方に離される。また, $k \rightarrow 0$ の極限では, 2つのモノポールは合体して x^3 軸を軸とするトーラスの解となる。その場合, $K_k \rightarrow \pi/2$, $\text{sn}_k(u) \rightarrow \sin u$, $\text{cn}_k(u) \rightarrow \cos u$, $\text{dn}_k(u) \rightarrow 1$ より, 解は

$$f_1(s) = f_2(s) = \frac{-\pi}{2 \sin(\pi(s+1)/2)} = \frac{\pi}{2} \sec(\pi s/2), \quad (4.177)$$

$$f_3(s) = \frac{-\pi}{2 \tan(\pi(s+1)/2)} = -\frac{\pi}{2} \tan(\pi s/2) \quad (4.178)$$

となる。

このようにして, $N = 2$ の場合の Nahm データは解析的な範囲で得られた。すると, Nahm データの型は 2×2 であり, Weyl 方程式は (4 元数をバラして) 4本の線型連立微分方程式となる。この微分方程式は, 軸上などの特殊な場合は解析的に解くことができる [16]。しかし, full の方程式を解析的に解くことはほとんど不可能である。このような場合, full のモノポールを得るには数値計算に頼らなければならない。

第5章 対称性を持つモノポール

前章で見たように，ADHM/Nahm 構成法によると，インスタントンやモノポールの情報はすべて ADHM/Nahm データに集約されている．それゆえ，ADHM/Nahm データ自身に対称性を課すことで，それに対応するインスタントンやモノポールにその対称性を反映させることができる．これを実際に行うには，まず，モノポールに特有のスペクトル曲線に対称性を課し，次に，そのスペクトル曲線に対応する Nahm データを構成し，最後に，その Nahm データから対応するモノポールを構成するという手順を踏む．また，対称性を持つモノポールをカロロンに置き換えてインスタントン極限を取ることで，対称性を持つインスタントンを得ることもできる [12]．

モノポールに課すべき対称性は，そのチャージ N によって異なる． $N = 1, 2$ のときは，それぞれ球対称，トーラスであったが， $N = 3, 4, 7$ では，それぞれ正 4 面体，正 8 面体，正 20 面体の対称性となる．そのような高いチャージのモノポールの Nahm データは，解析的に求めることができる．

5.1 有限群

モノポールは 3 次元空間に住み，それらは種々の対称性を持つ．特に，高いチャージを持つモノポールは正多面体の対称性を持つ．対称性は，代数学を学ぶための道具である群と関連づける方が取り扱いやすい．そのようにすると，複雑な形をした正多面体も単純な対称群や交代群と同じ構造を持つことがわかる．本論ではこのような群論の知識は用いないが，正多面体について見るついでに群論の基本的な知識についても見ておく．

5.1.1 群

群とは，ある集合上の写像の持つ特殊な性質である．そして，それは代数学の基礎となる概念である．

集合 G とその上の 1 つの演算「 \cdot 」についての性質

$$1) \forall a, b, c \in G ((ab)c = a(bc)). \quad (\text{結合法則}) \quad (5.1)$$

$$2) \exists e \in G \text{ s.t. } \forall a \in G (ae = ea = a). \quad (\text{単位元の存在}) \quad (5.2)$$

このような e を G の単位元という．

$$3) \forall a \in G \exists a^{-1} \in G \text{ s.t. } aa^{-1} = a^{-1}a = e. \quad (\text{逆元の存在}) \quad (5.3)$$

ただし， e は G の単位元．このような a^{-1} を a の逆元という．

を, G は「 \cdot 」を演算として群 (group) を成すという (正確には, 対 (G, \cdot) を群と見る. また, 以後, 特に断らない限り, 演算は「 \cdot 」とする). ここで, 結合法則より, 3つ以上の元の積の括弧は省略できる. また, 群 G に対し, その単位元 e と任意の $a \in G$ の逆元 a^{-1} はそれぞれ一意に存在する.

\therefore まず, 2つの単位元 e_1, e_2 が存在するとすると,

$$e_1 = e_1 e_2 = e_2. \quad (5.4)$$

次に, 任意の $a \in G$ に対し, 2つの逆元 a_1^{-1}, a_2^{-1} が存在するとすると,

$$a_1^{-1} = a_1^{-1} e = a_1^{-1} (a a_2^{-1}) = (a_1^{-1} a) a_2^{-1} = e a_2^{-1} = a_2^{-1}. \quad \square \quad (5.5)$$

さらに, 群 G の任意の2つの元 a, b に対し,

$$(ab)^{-1} = b^{-1} a^{-1}, \quad (a^{-1})^{-1} = a \quad (5.6)$$

が成り立つ.

\therefore まず, e を G の単位元とすると,

$$b^{-1} a^{-1} a b = b^{-1} e b = b^{-1} b = e \quad (5.7)$$

であり, 同様にして $a b b^{-1} a^{-1} = e$ なので, 1つ目は示せた. 2つ目は, $a a^{-1} = a^{-1} a = e$ を a^{-1} について見ればよい. \square

群 G についての性質

$$\forall a \in G (ab = ba) \quad (\text{交換法則}) \quad (5.8)$$

を, G は可換群またはアーベル群 (Abelian group) であるという.

群 G の元の個数を, その群の位数 (order) といい, $|G|$ と書く. また, 位数が有限の群を有限群, そうでない群を無限群という.

2つの群 G, G' に対し, 写像 $f: G \rightarrow G'$ についての性質

$$\forall g_1, g_2 \in G (f(g_1 g_2) = f(g_1) f(g_2)) \quad (5.9)$$

を, f は G から G' への準同型写像 (homomorphism) であるという. また, G から G' への準同型写像が存在するという関係を, G と G' は準同型であるといい, $G \sim G'$ と書く. 全単射である準同型写像を, 特に同型写像 (isomorphism) という. また, G から G' への同型写像が存在するという関係を G と G' は同型であるといい, $G \simeq G'$ と書く.

群 G (演算は「 \cdot 」) とその部分集合 $H \neq \phi$ に対し, H と「 \cdot 」の H への制限 (「 \cdot 」の定義域を H に換えた写像) 「 \cdot 」 $|_H$ が

$$1) a, b \in H \Rightarrow ab \in H \quad (5.10)$$

$$2) a \in H \Rightarrow a^{-1} \in H \quad (5.11)$$

を満たすとき, H は「 \cdot 」 $|H$ を演算として群を成す.

\therefore まず, 1) より, 「 \cdot 」 $|H$ は H 上の演算となる. 次に, 結合法則は, G が「 \cdot 」を演算として群を成すことより明らか. そして, 単位元 e の存在は, $H \neq \phi$ よりある $a \in G$ が存在し, 2) より a^{-1} も存在し, 1) より $aa^{-1} = e \in H$. 最後に, 逆元の存在は 2) より保証される. \square

これを, G の部分群 (subgroup) という.

群 G の 2 つの部分集合 S, S' に対し, 集合

$$\{ss' \mid s \in S, s' \in S'\} \quad (5.12)$$

を S と S' の積といい, SS' と書く. 特に, $S = \{g\}$, $S' = \{g'\}$ のときは, それぞれ単に gS' , Sg' と書く. このとき, 群 G とその部分群 H , $a \in G$ に対し,

$$\ell_a : H \rightarrow aH, \quad \ell_a(h) = ah, \quad (5.13)$$

$$r_a : H \rightarrow Ha, \quad r_a(h) = ha \quad (5.14)$$

をそれぞれ a による H の左移動, 右移動という. 左移動, 右移動は全単射である.

\therefore 左移動のみを示す. 全射性は, 定義より明らかに

$$\ell_a(H) = \{ah \mid h \in H\} = aH. \quad (5.15)$$

単射性は, 任意の $h, h' \in H$ に対し,

$$\ell_a(h) = \ell_a(h') \Rightarrow h = a^{-1}(ah) = a^{-1}(ah') = h'. \quad \square \quad (5.16)$$

これらより

$$|aH| = |Ha| = |H| \quad (5.17)$$

である. また, 特に

$$aG = Ga = G \quad (5.18)$$

である. これを組みかえ定理という.

有限群に対し, その任意の 2 つの元の積を並べた表を, その群の群表という. 組みかえ定理より, 任意の有限群 G の群表のある行または列には, G の元が必ず 1 度, そして, ただ 1 度だけ現れる.

5.1.2 対称群と交代群

有限群においては、対称群と呼ばれる、写像の成す群が重要になる。様々な対称性を表す有限群には必ず、それと同型な対称群またはその部分群が存在する。

集合 X 上の全単射全体の集合は、合成写像を演算として群を成す (群が閉じていることは、2つの全単射の合成写像がまた全単射となることによる。結合法則は合成写像の結合法則による。単位元は恒等写像。逆元の存在は任意の元が全単射であることによる)。これを X 上の対称群 (symmetric group) といい、 $S(X)$ と書く。また、 $S(X)$ の元を置換 (permutation) といい、 $S(X)$ の部分群を X の置換群という。

有限集合 X (元の個数は n) 上の対称群は、同型なものを除くと明らかに n にしか依らない。それゆえ、これらを n 次対称群 (symmetric group) といい、 S_n と書く。ここで、特に $X = \{1, 2, \dots, n\}$ とすると、任意の $\pi \in S_n$ は、その定義域と値をすべて書き下すことで

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix} \quad (5.19)$$

と表される (列の並べ方は必ずしもこの順である必要はない)。ただし、 $p_i = \pi(i)$ である。このとき、2つの S_n の元の積は

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_n \\ p_{q_1} & p_{q_2} & \cdots & p_{q_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ p_{q_1} & p_{q_2} & \cdots & p_{q_n} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.20)$$

と計算できる。また、

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} \quad (5.21)$$

はそれぞれ S_n の単位元、 π の逆元であり、それぞれ単位置換、 π の逆置換という。

∴ 単位置換は明らか。逆置換は

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}, \quad (5.22)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}. \quad \square \quad (5.23)$$

S_n の元の値は1から n までの数の順列であるから、明らかに $|S_n| = n!$ である。また、任意の位数 n の有限群 $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ に対し、組みかえ定理より、写像

$$f(g) = \ell_g = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_n \\ gg_1 & gg_2 & \cdots & gg_n \end{pmatrix} \quad (5.24)$$

は G から S_n への単射となっている．すると，

$$\begin{aligned} f(a)f(b) &= \begin{pmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_n \\ ag_1 & ag_2 & \cdots & ag_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_n \\ bg_1 & bg_2 & \cdots & bg_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} bg_1 & bg_2 & \cdots & bg_n \\ abg_1 & abg_2 & \cdots & abg_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_n \\ bg_1 & bg_2 & \cdots & bg_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_n \\ abg_1 & abg_2 & \cdots & abg_n \end{pmatrix} \\ &= f(ab) \end{aligned} \quad (5.25)$$

より， f が同型写像となっている．すなわち，任意の有限群に対し，それと同型な置換群が存在する．これをケーリーの定理という．

$\pi \in S_n$ が

$$p_1 \mapsto p_2 \mapsto p_3, \cdots \mapsto p_m \mapsto p_1 \quad (p_i \in \{1, 2, \cdots, n\}, m \leq n) \quad (5.26)$$

という形するとき，これを特に巡回置換 (cyclic permutation) といい， (p_1, p_2, \cdots, p_m) と書く．共通の文字を含まない2つの巡回置換は明らかに可換である．また，任意の置換は，共通の文字を含まない巡回置換の積に分解できる (紙に1から n までの数字を1つずつ書いて各元の置換を矢印でたどれば必ず元の数字に戻る) ．

また，文字が2つの巡回置換を，特に互換 (transposition) という．任意の置換は互換の積に分解できるが，そのときの互換の数は一意ではない．しかし，それが奇数か偶数かは一意に決まっている．

$\therefore n$ 文字の置換

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix} \quad (5.27)$$

に対し， n 変数関数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ を考えたとき，一般には

$$\pi^{-1}f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f(x_{p_1}, x_{p_2}, \cdots, x_{p_n}) \quad (5.28)$$

となる (π は x の添え字を直接変えるのではなく， x が表す対象につけられた番号を置換する．それゆえ， p_i 番目の対象を i 番目に持ってくれば， x_i が指していた値は x_{p_i} となる) ．そこで，

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j) = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \cdots (x_1 - x_n) \\ &\quad \cdot (x_2 - x_3) \cdots (x_2 - x_n) \\ &\quad \cdots \cdot (x_{n-1} - x_n) \end{aligned} \quad (5.29)$$

という式を考えてみる (これを交代式という) ．すると，置換 $\pi \in S_n$ が偶数個の互換の積 π_e と奇数個の互換の積 π_o に同時に分解されるならば，

$$\begin{aligned} \pi^{-1}f(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= \pi_e^{-1}f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = +f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ &= \pi_o^{-1}f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = -f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{aligned}$$

$$\iff f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (5.30)$$

となるが、これは $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ が一般には値を持つことと矛盾する。よって、置換 $\pi \in S_n$ を互換の積で分解したときの互換の数が奇数か偶数であるかは一意に決まっている。□

偶数個の互換の積で表される置換を偶置換、奇数個の互換の積で表される置換を奇置換という。

n 次の偶置換全体の集合 A_n は、 S_n の部分群である。

∵ e を S_n の単位元としたとき、任意の (i, j) に対し $(i, j)(j, i) = e$ であるから、 $e \in A_n$ で $A_n \neq \phi$ 。また、2つの偶置換の積と偶置換の積は明らかに A_n の元である。□

これを n 次の交代群という。 A_n により、 S_n ($n \geq 2$) は明らかに

$$S_n = A_n \cup (1, 2)A_n \quad (5.31)$$

と分解される。また、これより、 n (≥ 2) 次の奇置換の個数と偶置換の個数は等しく、それぞれ $n!/2$ であることがわかる。

5.1.3 正多面体回転群

高いチャージを持つモノポールのいくつかは、正4面体や立方体などの正多面体の対称性を持つ。これらの正多面体の対称性からは、それを不変に保つ変換の成す群が得られるが、それらは簡単に数え上げることができ、それらに対応する対称群も見出すことができる。

面がすべて同じ正多角形でできていて、各頂点に集まる面の数が等しい凸多面体 (凹んでいない多面体) を正多面体 (regular polyhedron) またはプラトンの立体 (Platonic body, Platonic solid) という。また、正多面体の対称性を持つモノポールをプラトニックモノポール (Platonic monopole) という。正多面体は、正4面体 (tetrahedron)、正6面体 (立方体, cube)、正8面体 (octahedron)、正12面体 (dodecahedron)、正20面体 (icosahedron) の5つしか存在しないことが示される。正多面体の種類と性質を表5.1にまとめておく。また、各正多面体の図を5.1に示す (Mathematicaによる)。

正多面体について、例えば、正8面体の8つの面の中心を結ぶと立方体が得られる。また、同様に、立方体の6つの面の中心を結ぶと正8面体を得られる。このように、何らかの操作で互いに入れ換わる正多面体の関係を双対という。立方体は正8面体と双対であり、正12面体は正20面体と双対である。また、正4面体は自分自身と双対であり、このことを自己双対という。

双対な正多面体の対称性は明らかに等しいから、以後、正4面体、正8面体、正20面体のみを主に考えることにする (これらの正多面体の面はすべて正3角形である)。また、平面図形である正多角形も、正多面体と見なして扱っていく。これを、特に正2面体 (dihedron) という。

正多面体を不変に保つ回転操作全体の成す群を正多面体回転群という。特に、正4面体回転群、正8面体回転群、正20面体回転群をそれぞれ T, O, Y と書く。また、正 n 角形の正2面体を不変に保つ回転操作全体の成す群を n 次の正2面体回転群といい、 D_n と書く。

表 5.1: 正多面体の種類と性質 .

名称 (面の数)	面の形	頂点の数	辺の数	1つの頂点に集まる面の数
正 4 面体	正 3 角形	4	6	3
正 6 面体	正 4 角形	8	12	3
正 8 面体	正 3 角形	6	12	4
正 12 面体	正 5 角形	20	30	3
正 20 面体	正 3 角形	12	30	5

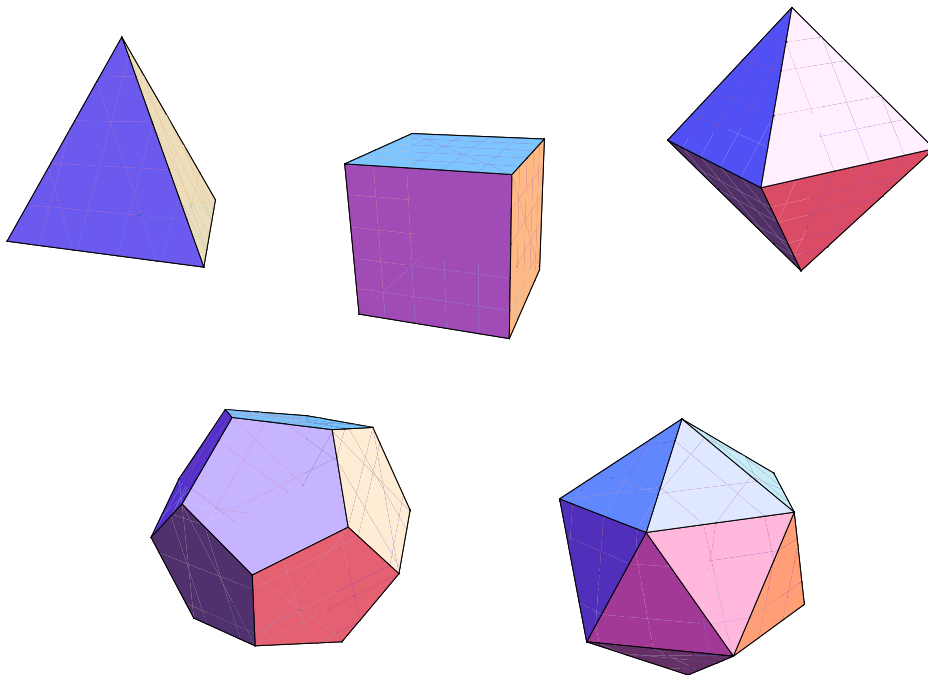


図 5.1: 正多面体の図 .

各々の正多面体回転群の元を数え上げてみる . まず , D_n について

- 正多角形の中心を通る垂線の周りの $2\pi/n, 4\pi/n, \dots$ 回転 . 計 $n - 1$ 個 .
- n が奇数のとき , 正多角形の各頂点と対する辺の中点を通る軸 $\times n$ の周りの π 回転 . 計 n 個 .
- n が偶数のとき , 正多角形の各辺と対する辺の中点を通る軸 $\times n/2$, 各頂点と対する頂点を通る軸 $\times n/2$ それぞれの周りの π 回転 . 計 n 個 .
- 恒等変換 . 計 1 個 .

ゆえに , $|D_n| = 2n$ である . 次に , T について

- 各頂点と対する面の中心を通る軸 $\times 4$ の周りの $2\pi/3, 4\pi/3$ 回転 . 計 8 個 .

- 各辺の中点と対する辺の中点を通る軸 $\times 3$ の周りの π 回転 . 計 3 個 .
- 恒等変換 . 計 1 個 .

ゆえに, $|T| = 12$ である . また, これらはすべて正 4 面体の 4 つの頂点を入れ替える偶置換であり, $T \simeq A_4$ である . それから, O について

- 各頂点と対する頂点を通る軸 $\times 3$ の周りの $\pi/2, \pi, 3\pi/2$ 回転 . 計 9 個 .
- 各面の中心と対する面の中心を通る軸 $\times 4$ の周りの $2\pi/3, 4\pi/3$ 回転 . 計 8 個 .
- 各辺の中点と対する辺の中点を通る軸 $\times 6$ の周りの π 回転 . 計 6 個 .
- 恒等変換 . 計 1 個 .

ゆえに, $|T| = 24$ である . また, これらはすべて正 8 面体と双対な立方体の 4 本の対角線を入れ替える置換と見なせるので, $O \simeq S_4$ である . 最後に, Y について

- 各頂点と対する頂点を通る軸 $\times 6$ の周りの $2\pi/5, 4\pi/5, 6\pi/5, 8\pi/5$ 回転 . 計 24 個 .
- 各面の中心と対する面の中心を通る軸 $\times 10$ の周りの $2\pi/3, 4\pi/3$ 回転 . 計 20 個 .
- 各辺の中点と対する辺の中点を通る軸 $\times 15$ の周りの π 回転 . 計 15 個 .
- 恒等変換 . 計 1 個 .

ゆえに, $|Y| = 60$ であり, また $Y \simeq A_5$ である .

正多面体のより詳しい群論的な解説 (共役類など) については, [20] の第 1 章を参照のこと .

5.2 スペクトル曲線と対称性の導入

スペクトル曲線は, Nahm 構成法における Nahm 方程式から自然に導かれる . スペクトル曲線は, 本来 TP_1 という空間上の曲線である . それゆえ, スペクトル曲線をより深く理解するには TP_1 を理解しなければならない .

5.2.1 Lax 形式とスペクトル曲線

Nahm 方程式

$$\frac{dT_i}{ds} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} [T_j, T_k] \quad (5.32)$$

をよく見ると, これらは

$$\frac{dT_1}{ds} = [T_2, T_3] = [iT_3, iT_2], \quad i \frac{dT_2}{ds} = i[T_3, T_1] = [iT_3, T_1]$$

$$\Rightarrow \frac{d}{ds}(T_1 + iT_2) = [iT_3, T_1 + iT_2] \quad (5.33)$$

と変形できることに気づく．このように，行列 $h(t)$, $A(t)$ に対し

$$\frac{dh}{dt} = [A, h] \quad (5.34)$$

という形の微分方程式を Lax 形式 (Lax form) という．ただし， t は，習慣的には時間と見られる．ここで， $h(t)$ のある固有値，それに対する固有関数， d/dt の表現行列をそれぞれ $\lambda(t)$, $\psi(t)$, A とし，

$$h\psi = \lambda\psi, \quad \frac{d\psi}{dt} = A\psi \quad (5.35)$$

とする．すると，これらより

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(h\psi) &= \frac{dh}{dt}\psi + hA\psi = \frac{d}{dt}(\lambda\psi) = \frac{d\lambda}{dt}\psi + \lambda A\psi = \frac{d\lambda}{dt}\psi + Ah\psi \\ \iff \frac{d\lambda}{dt} &= \frac{dh}{dt} - [A, h] \end{aligned} \quad (5.36)$$

となるが，この右辺が 0 となる条件が Lax 形式であった．それゆえ，Lax 形式とは，スペクトル保存の系が存在するための必要十分条件である．このとき，習慣に従って $\lambda = -\eta$ と置くと， h の固有多項式

$$P(\eta) = \det(\eta \mathbf{1}_N + h(t)) \quad (5.37)$$

も時間に依らない．ただし， N は Nahm データの行列としての次数である．これより， $P(\eta)$ は Lax 形式の解としての $h(t)$ の積分定数を与えることがわかる．

さて，本小節の冒頭では，Nahm 方程式のうちの 2 成分を用いて Lax 形式を作った．しかし，これだと残りの 1 成分が反映されない．そこで，新たに複素変数 ξ を導入して，

$$\Lambda = T_1 + iT_2 - 2iT_3\xi + (T_1 - iT_2)\xi^2 \quad (5.38)$$

$$\Lambda_+ = iT_3 - (T_1 - iT_2)\xi \quad (5.39)$$

と置いてみる．すると，

$$\frac{d\Lambda}{ds} = [\Lambda_+, \Lambda] \quad (5.40)$$

は，Nahm 方程式の 3 成分と同値であり，かつ Lax 形式である（この置き換えは一意ではないことに注意）．

$$\begin{aligned} \therefore (\text{左辺}) &= \frac{d}{ds}(T_1 + iT_2) - 2i\frac{dT_3}{ds}\xi + \frac{d}{ds}(T_1 - iT_2)\xi^2 \\ (\text{右辺}) &= [iT_3, T_1 + iT_2] + [iT_3, T_1 - iT_2]\xi^2 - 2i[T_1, T_2]\xi \end{aligned} \quad (5.41)$$

であり， ξ の各次数を比較すれば，Nahm 方程式の 3 成分が得られる．□

ここで，先と同様に複素変数 η を用いれば，永年方程式

$$P(\xi, \eta) = \det(\eta \mathbf{1}_N + T_1 + iT_2 - 2iT_3\xi + (T_1 - iT_2)\xi^2) = 0 \quad (5.42)$$

は，複素平面 (ξ, η) 上の s に依らない代数曲線を表す方程式となる．これを，Nahm 方程式の解のスペクトル曲線 (spectral curve) という．また，Nahm 方程式の解がモノポールを与えるときは，そのモノポールのスペクトル曲線という．

(5.42) は，行列式をとるので，

$$\eta^N + a_1(\xi)\eta^{N-1} + \cdots + a_N(\xi) = 0 \quad (5.43)$$

のような， η についての最高次数が N の多項式となる．このとき，Nahm データの Reality の条件は，

$$a_r(\xi) = (-1)^r \xi^{2r} a_r^*(-1/\xi^*) \quad \text{for all } r \quad (5.44)$$

となる．

スペクトル曲線の具体的な形を見してみる．まず， $N = 1$ のとき，一般の Nahm データは $T_i = ic_i$ となるのであった．ただし， c_1, c_2, c_3 は任意の実数の定数である．このとき，スペクトル曲線は単に

$$\eta - (c_2 - ic_1) + 2c_3\xi + (c_2 + ic_1)\xi^2 = 0 \quad (5.45)$$

となる．また，

$$\begin{aligned} -\xi^2 a_1^*(-1/\xi^*) &= -\xi^2 \left\{ -(c_2 - ic_1) - 2c_3 \frac{1}{\xi^*} + (c_2 + ic_1) \frac{1}{\xi^{*2}} \right\}^* \\ &= -(c_2 - ic_1) + 2c_3\xi + (c_2 + ic_1)\xi^2 \end{aligned} \quad (5.46)$$

であるから，任意の c_1, c_2, c_3 に対して Reality の条件が満たされている．次に，先に見た $N = 2$ の場合のシメトリックモノポールの場合は

$$\begin{aligned} &\det \left(\eta \mathbf{1}_N + \left(\frac{i}{2} f_1 \tau_1 - \frac{1}{2} f_2 \tau_2 \right) - f_3 \tau_3 \xi + \left(\frac{i}{2} f_1 \tau_1 + \frac{1}{2} f_2 \tau_2 \right) \xi^2 \right) \\ &= \det \begin{pmatrix} \eta - f_3 \xi & \frac{i}{2} (f_1 + f_2 + f_1 \xi^2 - f_2 \xi^2) \\ \frac{i}{2} (f_1 - f_2 + f_1 \xi^2 + f_2 \xi^2) & \eta + f_3 \xi \end{pmatrix} \\ &= \eta^2 + \frac{1}{4} (f_1^2 - f_2^2) (1 + \xi^4) + \frac{1}{2} (f_1^2 + f_2^2 - 2f_3^2) \xi^2 = 0 \end{aligned} \quad (5.47)$$

となる．この中には先に見た積分定数 $c_{21}^2, c_{23}^2, c_{13}^2$ しか現れないので，これは確かに s に依らない方程式である．また，先のように k, K_k を用いて書くと

$$\eta^2 - \frac{K_k^2}{4} \left(k^2 (1 + \xi^4) - 2(2 - k^2) \xi^2 \right) = 0 \quad (5.48)$$

となり，特に， $k = 0$ のときは

$$\eta^2 + \frac{1}{4} \pi^2 \xi^2 = 0 \quad (5.49)$$

となる．一般に，軸対称の N -モノポールのスペクトル曲線は

$$\eta(\eta^2 + \pi^2\xi^2)(\eta^2 + 4\pi^2\xi^2)\cdots\left(\eta^2 + \left(\frac{N-1}{2}\right)^2\pi^2\xi^2\right) = 0 \quad (N = \text{odd}) \quad (5.50)$$

$$\left(\eta^2 + \frac{1}{4}\pi^2\xi^2\right)\left(\eta^2 + \frac{9}{4}\pi^2\xi^2\right)\cdots\left(\eta^2 + \left(\frac{N-1}{2}\right)^2\pi^2\xi^2\right) = 0 \quad (N = \text{even}) \quad (5.51)$$

となることが示される [13] .

5.2.2 TP_1

スペクトル曲線は複素変数による代数曲線であった．そのような曲線は，一般的には TP_1 という空間の曲線である．この空間は立体射影によって 3次元空間内の球表面と対応づけられ，3次元空間の回転や鏡映，反転に対応する変換も存在する．

R^3 の x_1 - x_2 平面を複素平面 $C : \zeta = u + iv$ と見なしたとき， R^3 上の原点を中心とした単位球面 $S : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ を考える．すると， S の極 $(0, 0, -1)$ を通る任意の直線 ℓ は， S とのもう 1つの交点 $P(x_1, x_2, x_3)$ と x_1 - x_2 平面との交点 $Q(u, v)$ の間に 1対1の対応をつける．すなわち， ℓ を x_1 - x_3, x_2 - x_3 平面にそれぞれ投影した直線の方程式は，それぞれ

$$x_3 = \frac{1}{u}x_1 - 1, \quad x_3 = \frac{1}{v}x_2 - 1 \quad \iff \quad u = \frac{x_1}{1+x_3}, \quad v = \frac{x_2}{1+x_3} \quad (5.52)$$

であるから，

$$\zeta = u + iv = \frac{x_1 + ix_2}{1+x_3} \quad (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1) \quad (5.53)$$

であり，これは S から $C \cup \{\infty\}$ への全単射となっている¹．このような写像を S から C への立体射影 (stereographic projection) という．立体射影の概念図を図 5.2 に示す．このように， S から C への立体射影において

$$\zeta = \frac{\zeta_1}{\zeta_0} = \frac{x_1 + ix_2}{1+x_3} \quad (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1) \quad (5.54)$$

と書くとき， ζ_0, ζ_1 を座標とする空間を 1次の実射影空間といい， P_1 と書く¹．また， ζ と

$$\eta = \zeta' \quad (\zeta \text{ の微分}) \quad (5.55)$$

を座標とする空間を P_1 の接空間といい， TP_1 と書く²．今までに出てきた空間を表 5.2 にまとめておく．

¹この対応において， C の外にある任意の無限遠点は， S の極 $(0, 0, -1)$ に集約される．このことを C の一点コンパクト化といい， $C \cup \{\infty\} \simeq S$ と書く．

¹ R^{n+1} の原点を通る直線全体の集合を n 次の実射影空間といい， P_n と書く．

²多様体 M 上の点 p における微分演算子全体の成すベクトル空間を M の p における接ベクトル空間といい， $T_p(M)$ と書く．

表 5.2: 各空間の種類と変数 .

R^3	P_1	TP_1
3次元ユークリッド空間	1次元実射影空間	P_1 の接空間
x_1, x_2, x_3	ζ_0, ζ_1	η, ζ

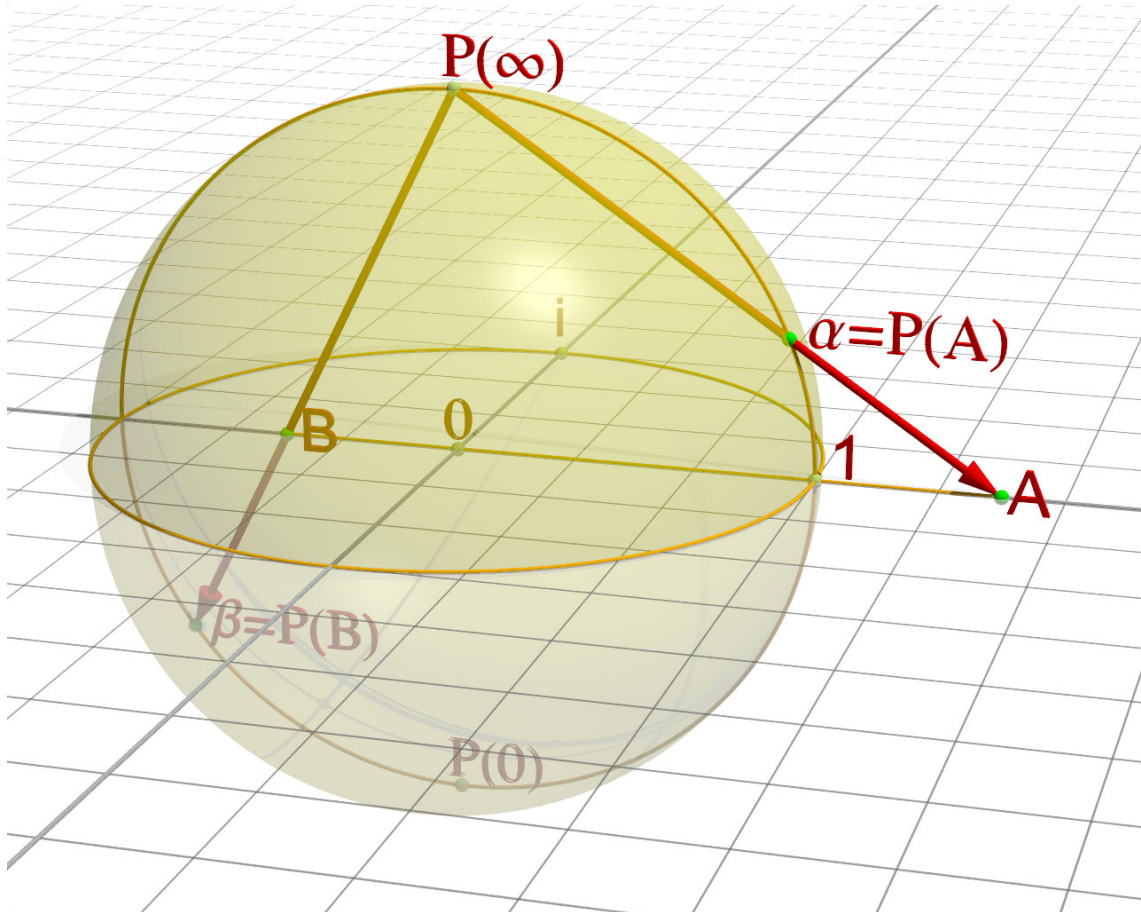


図 5.2: 立体射影の概念図 (http://en.wikipedia.org/wiki/Stereographic_projection より) .

(5.54) において, S における極周りの θ 回転は

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} x_1 \mapsto x_1 \cos(-\theta) - x_2 \sin(-\theta) \\ x_2 \mapsto x_1 \sin(-\theta) + x_2 \cos(-\theta) \end{cases} \\
 \iff & x_1 + ix_2 \mapsto (\cos \theta - i \sin \theta)(x_1 + ix_2) \\
 \iff & \zeta \mapsto e^{-i\theta} \zeta
 \end{aligned} \tag{5.56}$$

となる. ここで, $\zeta = \infty, 0$ に対応する S 上の点はそれぞれ極 $(0, 0, -1)$ とその対蹠点 $(0, 0, 1)$ であり, これらを通る直線は (5.56) の回転軸を表す. それゆえ, $\zeta = \infty, 0$ に対応する点を $\hat{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $-\hat{x}$ に移す分数変換

$$\zeta \mapsto \left(\zeta + \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3} \right) / \left(\zeta - \frac{x_1 + ix_2}{1 + x_3} \right) \tag{5.57}$$

は, (5.56) の回転軸を \hat{x} に移す変換であり,

$$\begin{aligned} \left(\zeta + \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3} \right) / \left(\zeta - \frac{x_1 + ix_2}{1 + x_3} \right) &\mapsto e^{-i\theta} \left(\zeta + \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3} \right) / \left(\zeta - \frac{x_1 + ix_2}{1 + x_3} \right) \\ \iff e^{i\theta/2} \frac{\zeta(1 - x_3) + (x_1 + ix_2)}{\zeta(1 + x_3) - (x_1 + ix_2)} &\mapsto e^{-i\theta/2} \frac{\zeta(1 - x_3) + (x_1 + ix_2)}{\zeta(1 + x_3) - (x_1 + ix_2)} \\ \iff \zeta &\mapsto \frac{(d + ic)\zeta + (b - ia)}{-(b + ia)\zeta + (d - ic)} \end{aligned} \quad (5.58)$$

$(1 - x_3^2 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + ix_2)(x_1 - ix_2))$ などに注意)

は \hat{x} 周りの θ 回転である. ただし

$$a = x_1 \sin \frac{\theta}{2}, \quad b = x_2 \sin \frac{\theta}{2}, \quad c = x_3 \sin \frac{\theta}{2}, \quad d = \cos \frac{\theta}{2} \quad (5.59)$$

であり, これらは明らかに

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1 \quad (5.60)$$

を満たす. この変換をメビウス変換 (Möbius transformation) といい, この公式をケーリー (Cayley) の公式という. ここで,

$$\zeta = \frac{\zeta_1}{\zeta_0} \quad (5.61)$$

と置くと, メビウス変換は

$$\begin{cases} \zeta_1 \mapsto (d + ic)\zeta_1 + (b - ia)\zeta_0 \\ \zeta_0 \mapsto -(b + ia)\zeta_1 + (d - ic)\zeta_0 \end{cases} \quad (5.62)$$

という, 行列式が 1 の斉次線型変換と見ることもできる. また, \mathbb{TP}_1 において, $\eta = \zeta'$ であるから, η のメビウス変換は

$$\begin{aligned} \eta = \zeta' &\mapsto \left(\frac{(d + ic)\zeta + (b - ia)}{-(b + ia)\zeta + (d - ic)} \right)' \\ &= \frac{(d + ic)\zeta'}{-(b + ia)\zeta + (d - ic)} + \frac{(d + ic)\zeta + (b - ia)}{(-(b + ia)\zeta + (d - ic))^2} (b + ia)\zeta' \\ &= \frac{-(d + ic)(b + ia)\zeta\zeta' + (d + ic)(d - ic)\zeta' + (b + ia)(b + ia)\zeta\zeta' + (d - ic)(b + ia)\zeta'}{(-(b + ia)\zeta + (d - ic))^2} \\ &= \frac{\eta}{(-(b + ia)\zeta + (d - ic))^2} \quad (a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1) \end{aligned} \quad (5.63)$$

となり, 結局, メビウス変換は

$$\zeta \mapsto \frac{(d + ic)\zeta + (b - ia)}{-(b + ia)\zeta + (d - ic)}, \quad \eta \mapsto \frac{\eta}{(-(b + ia)\zeta + (d - ic))^2} \quad (5.64)$$

となる. さらに, メビウス変換以外の

$$I_{12} : (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_2, -x_3), \quad (x_1 - x_2 \text{ 平面についての鏡映})$$

$$\begin{aligned}
I_{23} &: (x_1, x_2, x_3) \mapsto (-x_1, x_2, x_3), & (x_2-x_3 \text{ 平面についての鏡映}) \\
I_{31} &: (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, -x_2, x_3), & (x_3-x_1 \text{ 平面についての鏡映}) \\
I_O &: (x_1, x_2, x_3) \mapsto (-x_1, -x_2, -x_3) & (\text{原点についての反転})
\end{aligned} \tag{5.65}$$

のような変換も，それぞれ (5.54) に作用させて

$$\begin{aligned}
I_{12}(\zeta) &= \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3} = \frac{(x_1 + ix_2)(1 + x_3)}{1 - x_3^2} = \frac{(x_1 + ix_2)(1 + x_3)}{x_1^2 + x_2^2} = \frac{1 + x_3}{x_1 - ix_2} = \frac{1}{\bar{\zeta}}, \\
I_{23}(\zeta) &= \frac{-x_1 + ix_2}{1 + x_3} = -\bar{\zeta}, \quad I_{31}(\zeta) = \frac{x_1 - ix_2}{1 + x_3} = \bar{\zeta}, \quad I_O(\zeta) = \frac{-x_1 - ix_2}{1 - x_3} = -\frac{1}{\zeta}
\end{aligned} \tag{5.66}$$

を得て，さらにこれらの微分を取ることで，

$$\begin{aligned}
I_{12}(\eta, \zeta) &= \left(-\frac{\eta}{\bar{\zeta}^2}, \frac{1}{\bar{\zeta}} \right), \quad I_{23}(\eta, \zeta) = (-\bar{\eta}, -\bar{\zeta}), \\
I_{31}(\eta, \zeta) &= (\bar{\eta}, \bar{\zeta}), \quad I_O(\eta, \zeta) = \left(\frac{\eta}{\bar{\zeta}^2}, -\frac{1}{\bar{\zeta}} \right)
\end{aligned} \tag{5.67}$$

となる (変換後も $\zeta' = \eta$ に注意) .

最後に，一般に \mathbb{TP}_1 の曲線は

$$P(\eta, \zeta) = \eta^k + \eta^{k-1}a_1(\zeta) + \cdots + \eta a_{k-1}(\zeta) + a_k(\zeta) = 0 \tag{5.68}$$

と表される . ただし , $a_r(\zeta)$ ($1 \leq r \leq k$) は少なくとも $2r$ 次の ζ についての多項式である . このとき , \mathbb{TP}_1 上の向きづけられた曲線の向きを変える変換 τ は

$$\tau(\eta, \zeta) = \left(-\frac{\bar{\eta}}{\bar{\zeta}^2}, -\frac{1}{\bar{\zeta}} \right) \tag{5.69}$$

となる . ここで , (5.68) に τ 不変性を課すと , まず

$$\begin{aligned}
&\tau(P(\eta, \zeta)) \\
&= \left(-\frac{\bar{\eta}}{\bar{\zeta}^2} \right)^k + \left(-\frac{\bar{\eta}}{\bar{\zeta}^2} \right)^{k-1} a_1\left(-\frac{1}{\bar{\zeta}} \right) + \cdots + \left(-\frac{\bar{\eta}}{\bar{\zeta}^2} \right) a_{k-1}\left(-\frac{1}{\bar{\zeta}} \right) + a_k\left(-\frac{1}{\bar{\zeta}} \right) = 0
\end{aligned} \tag{5.70}$$

となる . これを元に戻すには , 全体の複素共役をとって $(-1)^r \zeta^{2r}$ を掛ければよいから , 任意の r に対し

$$a_r(\zeta) = (-1)^r \zeta^{2r} \overline{a_r\left(-\frac{1}{\bar{\zeta}} \right)} \tag{5.71}$$

が条件となるが , これはスペクトル曲線における Reality の条件 (5.44) と一致する .

5.2.3 対称性を持つスペクトル曲線

\mathbb{TP}_1 での種々の変換に対して不変な曲線が考えられる . そのような曲線を見つけるには , 最も一般的な曲線の形を仮定し , それらの変換に対する不変性を課すことで係数を決めて行く .

例えば, x_3 軸周りの n 回転対称性の成す群 C_n の元は, $x = (0, 0, 1)$, $\theta = 2\pi/n$ として

$$a = b = 0, \quad c = \sin \frac{\pi}{n}, \quad d = \cos \frac{\pi}{n} \quad (5.72)$$

で, これらをケーリーの公式に代入して

$$\zeta \mapsto \frac{e^{\pi i/n}}{e^{-\pi i/n}} \zeta = e^{2\pi i/n} \zeta, \quad \eta \mapsto \frac{1}{(e^{-\pi i/n})^2} \eta = e^{2\pi i/n} \eta \quad (5.73)$$

となる. また, 同様に, x_3 軸周りの連続回転の成す群 C_∞ の元は

$$\zeta \mapsto e^{i\theta} \zeta, \quad \eta \mapsto e^{i\theta} \eta \quad (5.74)$$

となる. ただし, θ は実パラメーターである. それゆえ, \mathbb{TP}_1 の曲線 $P(\eta, \zeta) = 0$ は, 各項の次数を k で割った余りがみな等しければ C_k 不変であり, 特に各項の次数がすべて同じならば C_∞ 不変である. また, x_1 軸周りの π 回転は $x = (1, 0, 0)$, $\theta = \pi$ として

$$a = \sin \frac{\pi}{2} = 1, \quad b = c = 0, \quad d = \cos \frac{\pi}{2} = 0 \quad (5.75)$$

より

$$\zeta \mapsto \frac{-i}{-i\zeta} = \frac{1}{\zeta}, \quad \eta \mapsto \frac{\eta}{(-i\zeta)^2} = -\frac{\eta}{\zeta^2} \quad (5.76)$$

であり, C_n, C_∞ 不変な曲線がさらにこれらを満たせば D_n, D_∞ 不変である¹.

また, 軸対称なモノポールのスペクトル曲線は, 先に見たように

$$\eta \prod_{\ell=1}^m (\eta^2 + \ell^2 \pi^2 \zeta^2) = 0, \quad (k = 2m + 1 \text{ のとき}) \quad (5.77a)$$

$$\prod_{\ell=0}^m (\eta^2 + (\ell + \frac{1}{2})^2 \pi^2 \zeta^2) = 0 \quad (k = 2m + 2 \text{ のとき}) \quad (5.77b)$$

であるが, これは明らかに D_∞ 不変である.

一般に, ある変換に対して不変な曲線を求めるには, まず最も一般的な (5.68) に対称性を課して行き, 係数を減らして行けばよい. 例として, D_3 に対して不変な曲線を求めてみる. まず, 最初に仮定すべき曲線は

$$\begin{aligned} & \eta^3 + \eta(\alpha_4 \zeta^4 + \alpha_3 \zeta^3 + \alpha_2 \zeta^2 + \alpha_1 \zeta + \alpha_0) \\ & + (\beta_6 \zeta^6 + \beta_5 \zeta^5 + \beta_4 \zeta^4 + \beta_3 \zeta^3 + \beta_2 \zeta^2 + \beta_1 \zeta + \beta_0) = 0 \end{aligned} \quad (5.78)$$

である. これにまず Reality の条件を課すと, (関係式は 11 本出てくるが, 独立なものは 7 本で)

$$\begin{aligned} \alpha_4 &= \bar{\alpha}_0, & \alpha_3 &= -\bar{\alpha}_1, & \alpha_2 &= \bar{\alpha}_2, \\ \beta_6 &= -\bar{\beta}_0, & \beta_5 &= \bar{\beta}_1, & \beta_4 &= -\bar{\beta}_2, & \beta_3 &= \bar{\beta}_3 \end{aligned} \quad (5.79)$$

¹ D_n, D_∞ はそれぞれ C_n, C_∞ に裏返しに対称性を加えた群.

となる．次に， C_3 に対して不変になるためには，各項の次数が3で割り切れなければならない．それゆえ，(5.78) は，第1, 4, 7, 10, 13項のみが残り

$$\eta^3 + \alpha_2 \eta \zeta^2 - \bar{\beta}_0 \zeta^6 + \beta_3 \zeta^3 + \beta_0 = 0 \quad (5.80)$$

となる．ここで，Reality の条件より α_2, β_3 は実数であるが， β_0 は複素数である．ところが，任意の β_0 に対し，全体を $(\text{Arg } \beta_0)/3$ で回転させれば， β_0 は $|\beta_0|$ で置き換えられ，係数がすべて実数になる．それゆえ，(5.78) は $x_2 \mapsto -x_2$ の鏡映対称性を持つようになる．最後に， x_1 軸周りの π 回転を行うと

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{\eta}{\zeta^2}\right)^3 + \alpha_2 \left(-\frac{\eta}{\zeta^2}\right) \left(\frac{1}{\zeta}\right)^2 - |\beta_0| \left(\frac{1}{\zeta}\right)^6 + \beta_3 \left(\frac{1}{\zeta}\right)^3 + |\beta_0| = 0 \\ \iff & \eta^3 + \alpha_2 \eta \zeta^2 + |\beta_0| - \beta_3 \zeta^3 - |\beta_0| \zeta^6 = 0 \end{aligned} \quad (5.81)$$

で，これが元と一致するためには $\beta_3 = 0$ でなければならない．よって， D_3 不変な曲線の最も一般的な形は

$$\eta^3 + \alpha \eta \zeta^2 + \beta(\zeta^6 - 1) = 0 \quad (5.82)$$

である．ただし， α, β は任意の実数である．ここで，軸対称なモノポールのスペクトル曲線と一致させるには $\alpha = \pi, \beta = 0$ とすればよい．また，原点を中心とした x_1 - x_2 平面内の正三角形は D_3 の対称性を持つが，その頂点

$$(x_1, x_2, x_3) = \left\{ (a, 0, 0), \left(a \cos \frac{2\pi}{3}, a \sin \frac{2\pi}{3}, 0\right), \left(a \cos \frac{4\pi}{3}, a \sin \frac{4\pi}{3}, 0\right) \right\} \quad (5.83)$$

に十分離れた1-モノポールを配置したときのスペクトル曲線は

$$\{\eta - a(1 - \zeta^2)\} \{\eta - a\omega(1 - \omega\zeta^2)\} \{\eta - a\omega^2(1 - \omega^2\zeta^2)\} = 0 \quad (5.84)$$

となる．ただし， $\omega = e^{2\pi i/3}$ である．

5.2.4 不変2元形式

ζ_0, ζ_1 についての多項式

$$Q_r(\zeta_0, \zeta_1) = \zeta_0^r q_r(\zeta) \quad (5.85)$$

について考えてみる．ただし， q_r は r 以下の次数を持つ ζ の多項式である．ここで $Q_r(\zeta_0, \zeta_1)$ がメビウス変換に対して不変であると仮定すると， q_r は

$$q_r(\zeta) \mapsto \frac{q_r(\zeta)}{\{(b + ia)\zeta + (d - ic)\}^r} \quad (5.86)$$

と変換されなければならない．

$$\therefore Q_r(\zeta_0, \zeta_1) \mapsto \{(b + ia)\zeta_1 + (d - ic)\zeta_0\}^r \frac{q_r(\zeta)}{\{(b + ia)\zeta + (d - ic)\}^r}$$

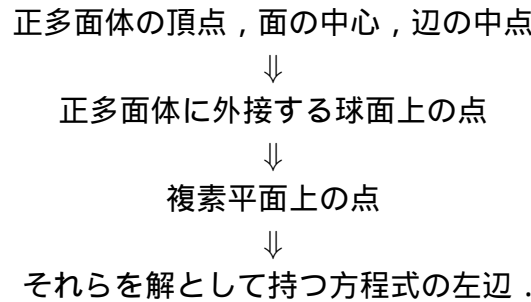
$$\begin{aligned}
 &= \zeta_0^r \{ - (b + ia)\zeta + (d - ic) \}^r \frac{q_r(\zeta)}{\{ - (b + ia)\zeta + (d - ic) \}^r} \\
 &= \zeta_0^r q_r(\zeta) = Q_r(\zeta_0, \zeta_1), \quad \square
 \end{aligned}
 \tag{5.87}$$

ここで，このような $q_r(\zeta)$ を用いた曲線

$$P(\eta, \zeta) = \eta^k + \eta^{k-2}q_4(\zeta) + \eta^{k-3}q_6(\zeta) + \cdots + q_{2k}(\zeta) = 0
 \tag{5.88}$$

のメビウス変換を考える．すると，各項から同じ因子 $\{ - (b + ia)\zeta + (d - ic) \}^{-2k}$ が出てくるので，この変換に対して曲線は不変に保たれる．すなわち，メビウス変換で不変となる曲線を探すには，メビウス変換で不変となる Q_r を探せばよい．このような Q_r を不変2元形式という．

先に正多面体回転群の群元を数え上げたが，それらの回転はすべて正多面体の頂点 (Vertices)，面の中心 (centres of Faces)，辺の中点 (mid-points of Edges) のいずれかの2点を通る直線を軸としていた．それゆえ，それらの点の情報を多項式に取り込ませれば，それらはその多面体の対称性についての情報も含むことになる．そこで，各正多面体の頂点，面の中心，辺の中点に対する多項式をそれぞれ $q_V^{(\text{tet})}$, $q_F^{(\text{tet})}$, $q_E^{(\text{tet})}$ などと書くことにする．これらの多項式を得るには，まず各正多面体にはそれらに外接する単位球が描けることに注意する．すると，その単位球の中心とそれらの点を通る直線を用いてそれらの点を単位球上に移すことができ，また，先に見た立体射影によりそれらの点を複素平面上に移すことができる．このとき，それらの点の座標に対する1次因子を掛け合わせたものはそれらの点を解として持つ方程式の左辺であり，それはその正多面体の情報を含んだ多項式である．すなわち，



各正多面体に対し，頂点はこのようにしてそのまま求める．また，面の中心や辺の中点を求めるときには，先に説明した双対を用いる．例えば，正4面体の面の中心は双対な正4面体の頂点，辺の中点は正8面体の頂点，正8面体の面の中心は双対な立方体の頂点に等しい．

まず，単位球に内接する各辺が座標軸と平行な立方体を考える．ここで，その8つの頂点の R^3 での座標は

$$\pm x_1 = \pm x_2 = \pm x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}
 \tag{5.89}$$

となり，それらの TP_1 での座標は

$$\zeta = \frac{\pm 1 \pm i}{\sqrt{3} \pm 1}
 \tag{5.90}$$

となる．ただし，複合はすべての組み合わせを用いる．このとき，このうちの4つは1つの正4面体の頂点を与え，他の4つはそれに双対な正4面体の頂点，すなわち元の正4面体の面の中心を与える．ゆえに，これらから適当な4つを選び1次因子を掛け合わせることで

$$\begin{aligned} q_V^{(\text{tet})} &= \left(\zeta - \frac{1+i}{\sqrt{3}+1} \right) \left(\zeta - \frac{-1-i}{\sqrt{3}+1} \right) \left(\zeta - \frac{1-i}{\sqrt{3}-1} \right) \left(\zeta - \frac{-1+i}{\sqrt{3}-1} \right) \\ &= \left\{ \zeta^2 - \left(\frac{1+i}{\sqrt{3}+1} \right)^2 \right\} \left\{ \zeta^2 - \left(\frac{1-i}{\sqrt{3}-1} \right)^2 \right\} = \zeta^4 + 2\sqrt{3}i\zeta^2 + 1 \\ &\quad \left(\left(\frac{1+i}{\sqrt{3}+1} \right)^2 + \left(\frac{1-i}{\sqrt{3}-1} \right)^2 = \frac{1}{4} \{ 2i(4-2\sqrt{3}) - 2i(4+2\sqrt{3}) \} = -2\sqrt{3}i \right), \end{aligned} \quad (5.91)$$

同様にして

$$q_F^{(\text{tet})} = \zeta^4 - 2\sqrt{3}i\zeta^2 + 1 \quad (5.92)$$

となる．また，これらを掛け合わせたものは立方体の頂点，すなわち正8面体の面の中心を与えるから，

$$q_F^{(\text{oct})} = q_V^{(\text{tet})} q_F^{(\text{tet})} = (\zeta^4 + 1)^2 + 12\zeta^4 = \zeta^8 + 14\zeta^4 + 1 \quad (5.93)$$

となる．

次に，正8面体を，その6つの頂点のうちの4つが複素平面の軸上になるように置く．すると，その頂点の TP_1 での座標は明らかに

$$\zeta = 0, \infty, \pm 1, \pm i \quad (5.94)$$

となる．これより， $q_V^{(\text{oct})}$ が求まるが，これらの点は正4面体の辺の midpoint でもあるので

$$q_V^{(\text{oct})} = q_E^{(\text{tet})} = \zeta(\zeta-1)(\zeta+1)(\zeta-i)(\zeta+i) = \zeta(\zeta^4-1) \quad (5.95)$$

となる（無限遠方の解はあらわには含まれず，その分次数が1つ下がる）．

それから，正20面体については，各頂点の TP_1 での座標は

$$\zeta = 0, \infty, \omega^\nu(\omega + \omega^4), \omega^\nu(\omega^2 + \omega^3), \quad (\nu = 0, 1, 2, 3, 4) \quad (5.96)$$

となる．ただし， ω は5の平方根で

$$\omega^\nu = 1, \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4} \pm i \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} \quad (5.97)$$

である（各べき乗に対応する複合は複素平面上に図を描いて確認すること）．これらより

$$\begin{aligned} q_V^{(\text{ico})} &= \zeta \cdot \prod_\nu (\zeta - \omega^\nu(\omega + \omega^4)) \cdot \prod_\nu (\zeta - \omega^\nu(\omega^2 + \omega^3)) \\ &= \zeta(\zeta^5 - (\omega + \omega^4)^5)(\zeta^5 - (\omega^2 + \omega^3)^5) = \zeta(\zeta^{10} + 11\zeta^5 - 1) \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{l} (\omega + \omega^4)^5 = 1 + 5\omega^3 + 10\omega + 10\omega^4 + 5\omega^2 + 1 = (-11 + 5\sqrt{5})/2 \\ (\omega^2 + \omega^3)^5 = 1 + 5\omega + 10\omega^2 + 10\omega^3 + 5\omega^4 + 1 = (-11 - 5\sqrt{5})/2 \end{array} \right) \quad (5.98)$$

となる．

残りの多項式を求めるには，ヘッシアン（ヘッセ形式）とヤコビアンを用いるとよい．例えば，各多項式を ζ_1, ζ_0 で表したものを \tilde{q}_V などと書くことにすれば， $\tilde{q}_V^{(\text{oct})}$ に対し，そのヘッシアン H は

$$\begin{aligned} H &= \begin{vmatrix} \partial_1^2 \tilde{q}_V^{(\text{oct})} & \partial_1 \partial_0 \tilde{q}_V^{(\text{oct})} \\ \partial_0 \partial_1 \tilde{q}_V^{(\text{oct})} & \partial_0^2 \tilde{q}_V^{(\text{oct})} \end{vmatrix} = 125 \begin{vmatrix} 4\zeta_1^3 \zeta_0 & \zeta_1^4 - \zeta_0^4 \\ \zeta_1^4 - \zeta_0^4 & -4\zeta_1 \zeta_0^3 \end{vmatrix} \\ &= -125(\zeta_1^8 + 14\zeta_1^4 \zeta_0^4 + \zeta_0^8) \end{aligned} \quad (5.99)$$

となり，この係数を除いたものが $\tilde{q}_F^{(\text{oct})}$ となっている．また， $\tilde{q}_V^{(\text{oct})}, \tilde{q}_F^{(\text{oct})}$ に対し，そのヤコビアン J は

$$\begin{aligned} J &= \begin{vmatrix} \partial_1 \tilde{q}_V^{(\text{oct})} & \partial_0 \tilde{q}_V^{(\text{oct})} \\ \partial_1 \tilde{q}_F^{(\text{oct})} & \partial_0 \tilde{q}_F^{(\text{oct})} \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} 5\zeta_1^4 \zeta_0 - \zeta_0^5 & \zeta_1^5 - 5\zeta_1 \zeta_0^4 \\ \zeta_1^7 + 7\zeta_1^3 \zeta_0^4 & \zeta_0^7 + 7\zeta_1^4 \zeta_0^3 \end{vmatrix} \\ &= -8(\zeta_1^{12} - 33\zeta_1^8 \zeta_0^4 - 33\zeta_1^4 \zeta_0^8 + \zeta_0^{12}) \end{aligned} \quad (5.100)$$

となり，この係数を除いたものが $\tilde{q}_E^{(\text{oct})}$ となっている． $\tilde{q}_F^{(\text{ico})}, \tilde{q}_E^{(\text{ico})}$ も同様にして求められる．このようにして得られる各多項式を表 5.3 に示す．

5.2.5 対称性を持つ Nahm データ

Nahm データ $T_i(s)$ は空間添え字 $i = 1, 2, 3$ を持つから，それらをまとめて1つのベクトル T と見ることができる．そのとき，各成分は $\text{su}(N)$ の元であるから， T は $\mathbb{R}^3 \otimes \text{su}(N)$ の元であり， \mathbb{R}^3 の基底を \hat{x}_i とすれば， $T = \hat{x}_i \otimes T_i(s)$ である．このように見ると，与えられた Nahm データ $T \in \mathbb{R}^3 \otimes \text{su}(N)$ に対し， $R \in \text{SO}(3)$ による \mathbb{R}^3 成分の回転が考えられる．ところが，Nahm データには Dirac 作用素の零モードの基底の取り方に対する自由度があるので， R に対応する適当な $M(R) \in \text{SU}(N)$ による基底の変換を同時に行うことで R の作用が打ち消されることがある．すなわち， T は

$$RT = M(R)TM(R)^{-1} \quad (5.101)$$

を満たす $M(R) \in \text{SU}(N)$ が存在する $R \in \text{SO}(3)$ に対して不変である．ただし， $R, M(R)$ はそれぞれ $R \otimes 1_N, 1_3 \otimes M(R)$ の略である．このような $R \in \text{SO}(3)$ の全体の集合を G とする．

例えば， $N = 1$ の場合，任意の回転に対して (5.101) は満たされるので，任意のモノポールは球対称性を持つ．また， $N = 2$ の任意のモノポールは， $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ の対称性，すなわち， 180° 回転の対称性を持つことが知られている．それゆえ，先に構成した 2-シンメトリックモノポールの場合， x_i 軸周りの 180° 回転に対して $M(R)$ に $i\tau_i$ を取ればよい．例えば， x_1

表 5.3: 正多面体に関する多項式 .

	q_V	q_F	q_E
正 4 面体	$\zeta^4 + 2\sqrt{3}i\zeta^2 + 1$	$\zeta^4 - 2\sqrt{3}i\zeta^2 + 1$	$\zeta(\zeta^4 - 1)$
正 8 面体	$\zeta(\zeta^4 - 1)$	$\zeta^8 + 14\zeta^4 + 1$	$\zeta^{12} - 33\zeta^8 - 33\zeta^4 + 1$
正 20 面体	$\zeta(\zeta^{10} + 11\zeta^5 - 1)$	$\zeta^{20} - 228\zeta^{15} + 494\zeta^{10} + 228\zeta^5 + 1$	$\zeta^{30} + 522\zeta^{25} - 10005\zeta^{20} - 10005\zeta^{10} - 522\zeta^5 + 1$

軸周りの 180° 回転の場合 , (5.101) の

$$(\text{左辺}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1 \\ -T_2 \\ -T_3 \end{pmatrix}, \quad (5.102)$$

$$(\text{右辺}) = i\tau_1 \frac{i}{2} \begin{pmatrix} f_1\tau_1 \\ f_2\tau_2 \\ -f_3\tau_3 \end{pmatrix} (-i\tau_1) = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} f_1\mathbf{1}_2 \\ f_2i\tau_3 \\ f_3i\tau_2 \end{pmatrix} \tau_1 = \begin{pmatrix} T_1 \\ -T_2 \\ -T_3 \end{pmatrix} \quad (5.103)$$

となる .

より一般の場合には , まず $R^3 \otimes \text{su}(k)$ が k 次元の既約表現 $S^m V$ を用いて

$$S^2 V \otimes \text{End}_0(S^{k-1} V) \quad (5.104)$$

と書けることに注意する . ただし , End_0 はトレースが 0 の自己準同型写像である . このとき , $\text{End}_0(S^{k-1} V)$ は Clebsch-Gordan 分解を用いて

$$\begin{aligned} \text{End}_0(S^{k-1} V) &\cong S^{k-1} V \otimes S^{k-1} V \\ &\cong S^{2k-2} V \oplus S^{2k-4} V \oplus \dots \oplus S^2 V \end{aligned} \quad (5.105)$$

と $\text{SO}(3)$ の既約表現に分解される . すると ,

$$\text{so}(3) \cong S^2 V \rightarrow \text{End}_0(S^{k-1} V) \quad (5.106)$$

により $S^2 V$ が 1 次元の部分空間を作ることがわかる . また , このとき , Clebsch-Gordan 分解より

$$S^{2m} V \otimes S^2 V = S^{2m+2} V \oplus W^{2m} V \oplus S^{2m-2} V \quad (5.107)$$

も成り立つが , $S^m V$ が G に対して不変となる最小の次数は $2k$ なので , $S^{2k} V$ がもう 1 つの部分空間を与えることがわかる . それゆえ , G によって固定された $S^2 V \otimes \text{End}_0(S^{k-1} V)$ は 2 次元であり , $T_i(s)$ はその基底を用いて

$$T_i(s) = x(s)\rho_i + y(s)S_i \quad (5.108)$$

と書ける．ただし， $\rho_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathfrak{su}(N)$ は \mathbb{C}^N 上の $\mathfrak{so}(3)$ の表現で， S_i は $R^3 \otimes \mathfrak{su}(N)$ 内の K 不変な行列である．ここで，リー代数の交換関係が再びリー代数になることを用いると， $T_i(s)$ の交換関係は

$$\begin{aligned} [T_1, T_2] &= [x\rho_1 + yS_1, x\rho_2 + yS_2] \\ &= x^2[\rho_1, \rho_2] + xy([\rho_1, S_2] + [S_1, \rho_2]) + y^2[S_1, S_2] \end{aligned} \quad (5.109)$$

などとなる．このとき， ρ_i は $\mathfrak{so}(3)$ の表現であるから

$$[\rho_1, \rho_2] = 2\rho_3 \quad (5.110)$$

などとすればよい．ところが， S_i は $\mathfrak{so}(3)$ の表現とは限らないから，残りの交換関係は

$$[\rho_1, S_2] + [S_1, \rho_2] = \alpha\rho_3 + \beta S_3, \quad (5.111)$$

$$[S_1, S_2] = \gamma\rho_3 + \delta S_3 \quad (5.112)$$

などとなる．ただし， $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ は定数である．すると，Nahm 方程式は

$$\frac{dT_3}{ds} = \frac{dx}{ds}\rho_3 + \frac{dy}{ds}S_3 \quad (5.113)$$

$$\begin{aligned} [T_1, T_2] &= 2x^2\rho_3 + xy(\alpha\rho_3 + \beta S_3) + y^3(\gamma\rho_3 + \delta S_3) \\ &= (2x^2 + \alpha xy + \gamma y^2)\rho_3 + (\beta xy + \delta y^2)S_3 \end{aligned} \quad (5.114)$$

$$\therefore \frac{dx}{ds} = 2x^2 + \alpha xy + \gamma y^2, \quad \frac{dy}{ds} = \beta xy + \delta y^2 \quad (5.115)$$

となる．これらの係数 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ とスペクトル曲線は [19] で求められている．それらを用いると，例えば，正 4 面体の場合の Nahm 方程式とスペクトル曲線はそれぞれ

$$\frac{dx}{ds} = 2x^2 + \frac{1}{8}y^2, \quad \frac{dy}{ds} = -4xy, \quad \eta^3 - \frac{1}{2}(48x^2 + y^2)y\zeta(\zeta^4 - 1) \quad (5.116)$$

となる．ここで， x と $y = iv$ としたときの v は実数である．また，スペクトル曲線より $c = (48x^2 - v^2)v$ は実数の積分定数である．これらより x と y を消去して Nahm 方程式に代入すると，

$$-v'^2 = 16 \cdot \frac{1}{48} \left(\frac{c}{v} + v^2 \right) (-v^2) \iff 3v'^2 = v^4 + cv \quad (5.117)$$

となり，さらに $v = c^{1/3}w(u)^{-1}$ ， $u = c_1s + c_2$ と置くと

$$3 \left(-\frac{c^{1/3}}{w^2} c_1 w' \right)^2 = \frac{c^{4/3}}{w^4} + \frac{c^{4/3}}{w} \iff 12c^{-2/3} c_1^2 w'^2 = 4w^3 + 4 \quad (5.118)$$

となる．それゆえ， $c_1^{-1} = 2\sqrt{3}c^{-1/3}$ と置けば

$$x = \frac{c^{1/3}}{8\sqrt{3}} \frac{\wp'(u)}{\wp(u)}, \quad y = \frac{ic^{1/3}}{\wp(u)}, \quad s = 2\sqrt{3}c^{-1/3}u + K \quad (5.119)$$

となる。ただし、 \wp は $\wp'^2(u) = 4\wp^3(u) + 4$ を満たす Weierstrass の楕円関数であり、 K は定数である。このとき、 \wp は $u = \frac{2}{3}\omega_1, \frac{4}{3}\omega_1$ で 0 となるので、Nahm データが $s = 0, 2$ で単純極を持つようにするには

$$s = \frac{1}{\omega_1}(3u - 2\omega_1) \quad (5.120)$$

とすればよい。ただし、 ω_1 は \wp の周期で、

$$2\omega_1 = \int_{-1}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{t^3 + 1}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \quad (5.121)$$

である。

第6章 数値計算を用いた Nahm 構成法

前章で見たように、高いチャージを持つシンメトリックモノポールの Nahm データは解析的に求めることができる。ところが、Nahm 構成法の途中に出てくる Weyl 方程式は常微分方程式であるが連立微分方程式である。また、Nahm データには楕円関数のような複雑な関数が含まれている。それゆえ、高いチャージを持つシンメトリックモノポールを解析的に構成することはほぼ不可能である。しかし、数値計算を許容すればそれらを計算することは容易である。

6.1 基本的な数値計算

先に Nahm 構成法について解説したが、それにはいくつかの手順が含まれていた。それらは、解析的な取り扱いにおいては日常的な手順であった。しかし、数値計算においては、それら 1 つ 1 つがそれなりに行数のある伝統的で精練された手法である。

6.1.1 積分

関数の積分を数値的に計算するには、簡単には台形公式を用いればよい。しかし、似たような公式である Simpson の公式を用いた方がより正確な値となる。

格子点 x_i 上で定義された関数 $f(x_i) = f_i$ に対し

$$\int_{x_1}^{x_3} f(x) dx = h \left(\frac{1}{3} f_1 + \frac{4}{3} f_2 + \frac{1}{3} f_3 \right) + \mathcal{O}(h^5 f^{(4)}) \quad (6.1)$$

が成り立つ。ただし、 h は格子の刻み幅で、 $f^{(4)}$ は区間内のどこかで求めた f の 4 階微分の値である。これを Simpson の公式または Simpson 則という。積分公式は係数や必要な点の数によって様々な種類があるが、Simpson の公式は 3 点のみを用いて十分な精度を持つ安定した公式である。

Simpson の公式を格子点すべてについて行うことで

$$\int_{x_1}^{x_N} f(x) dx = h \left(\frac{1}{3} f_1 + \frac{4}{3} f_2 + \frac{2}{3} f_3 + \frac{4}{3} f_4 + \cdots + \frac{2}{3} f_{N-2} + \frac{4}{3} f_{N-1} + \frac{1}{3} f_N \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{N^4} \right) \quad (6.2)$$

を得る。これを拡張 Simpson 則という。ただし、 N は格子点数であり、この公式においては N は奇数 (区間数は偶数) でなければならない。

被積分関数が予め解析的にわかっている場合は、格子点数の採り方などを工夫して効率よく計算することができる [23]。しかし、被積分関数が格子点上で与えられているときは

(6.2) をそのまま適用しなければならない．そのときは，各項でいちいち係数を掛けて行くのでは効率が悪いので，多少の工夫が必要である．自分が作成した C 言語による Simpson の公式のプログラムを付録 B.13 に示す．

6.1.2 ラプラシアン

数値計算において，関数の微分は差分に置き換えられる．ラプラシアンの計算に必要な 2 階の差分は 1 階の差分を 2 回行えば得られる．しかし，それよりも 2 階の差分を直接計算の方が効率がよい．

格子点 x_i 上で定義された関数 $f(x_i) = f_i$ に対し，格子の刻み幅を Δx としたとき， x_i の周りでの $f(x_i)$ のテーラー展開

$$f_{i+1} = f(x_i + \Delta x) = f_i + \Delta x \left(\frac{df}{dx} \right)_i + \frac{\Delta x^2}{2!} \left(\frac{d^2f}{dx^2} \right)_i + \cdots, \quad (6.3)$$

$$f_{i-1} = f(x_i - \Delta x) = f_i - \Delta x \left(\frac{df}{dx} \right)_i + \frac{\Delta x^2}{2!} \left(\frac{d^2f}{dx^2} \right)_i + \cdots \quad (6.4)$$

の差と和を取ることで

$$\left(\frac{df}{dx} \right)_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2), \quad (6.5)$$

$$\left(\frac{d^2f}{dx^2} \right)_i = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2) \quad (6.6)$$

を得る．これらをそれぞれ 1 階の中央差分，2 階の中央差分という．また，差分を用いて微分を近似する方法を有限差分法 (finite difference method) という．差分を計算するには，計算したい点の他にその両隣の点を用いるので，与えられた関数の両端の点の差分は計算できない．それゆえ，与えられた関数に対し，差分法で計算される導関数は元の関数より 2 点少ない格子点上の関数となる．特に，配列を用いている場合は，その添え字と変数の対応が 1 つずつずれることに注意．

f が多変数関数の場合は，偏微分のとくと同じように，注目する添え字以外の添え字を固定して差分を行えばよい．特に，3 次元の格子点 (x_i, y_j, z_k) 上で定義された関数 $\varphi(x_i, y_j, z_k)$ の差分は， x, y, z 方向の格子点の刻み幅をそれぞれ $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ として

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_{i,j,k} = \frac{\varphi_{i+1,j,k} - 2\varphi_{i,j,k} + \varphi_{i-1,j,k}}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2), \quad (6.7)$$

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right)_{i,j,k} = \frac{\varphi_{i,j+1,k} - 2\varphi_{i,j,k} + \varphi_{i,j-1,k}}{\Delta y^2} + \mathcal{O}(\Delta y^2), \quad (6.8)$$

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right)_{i,j,k} = \frac{\varphi_{i,j,k+1} - 2\varphi_{i,j,k} + \varphi_{i,j,k-1}}{\Delta z^2} + \mathcal{O}(\Delta z^2) \quad (6.9)$$

となり，これらの和が $\varphi(x_i, y_j, z_k)$ のラプラシアンとなる． $\varphi(x_i, y_j, z_k)$ の 1 点でのラプラシアンを計算するには，その 1 点とその前後の 2 点 $\times 3$ の計 7 点 (7-point stencil) が必要となる．

格子点の各方向の刻み幅が等しく h であるときは、ラプラシアンにおける中央の点の和はまとめられ、 $1/h^2$ は外にくくりだすことができる。自分が作成した C 言語によるラプラシアンの計算のプログラムを付録 B.14 に示す。

6.1.3 同次方程式の解法

同次方程式を解くには、与えられた係数行列を階段行列に変形し、それより解空間の基底を求める。連立方程式を数値計算を用いて解く方法はいろいろあるが、ここではガウスの消去法を用いて計算する。その際、数値計算では小さな数で割ることは避けた方がよいので、方程式の行をその都度入れ換える必要がある。

未知数 n の同次連立方程式 $Ax = 0$ を解くには、まず A に対してガウスの消去法を行う。すると、 A の階数がわかり、解の自由度 $s = n - \text{rank } A$ もわかる。そのとき、 $s = 0$ ならば、 $Ax = 0$ は自明な解 $x = 0$ しか持たない。一方、 $s > 0$ ならば、 $Ax = 0$ は s 次元の解空間を作る。このとき、その基底を x_1, x_2, \dots, x_s とすると、 x は

$$x = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_s x_s \quad (6.10)$$

と書ける。ただし、 c_1, c_2, \dots, c_s は任意定数である。解空間の基底は、ガウスの消去法を行った後の行列から見出すことができる。

ガウスの消去法は、それ自体が既にアルゴリズムとなっているので、基本的には線形代数の教科書に載っている手順をそのままプログラムにすればよい。ただし、その途中に出てくる割り算には注意しなければならない。数値計算では有限の桁数しか扱えないので、0 に近い値で割り算を行うと誤差が大きくなる。そこで、連立方程式は行を入れ替えても解が変わらないことを用いて、適当に大きな係数を持つ行をその都度選んで計算する（解の成分の順序をその都度直すようにすれば列も入れ替えることができる [23]）。この操作を枢軸選択またはピボット選択 (pivot, 軸, 要) という。枢軸選択では、絶対値が最大の係数を持つ行を選ぶとよいことが知られている。自分が作成した C 言語によるガウスの消去法のプログラムを付録 B.8 に示す。

6.1.4 1 階線型連立微分方程式の解法

格子点上で定義された未知関数 $f(x_i) = y_i$ に対する 1 階線型連立微分方程式

$$\frac{dy_i}{dx} = f'(x_i, y_i) \quad (6.11)$$

において

$$\begin{aligned} k_1 &= hf'(x_n, y_n), \\ k_2 &= hf'\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right), \\ k_3 &= hf'\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right), \end{aligned}$$

$$k_4 = hf'(x_n + h, y_n + k_3) \quad (6.12)$$

としたとき,

$$y_{n+1} = y_n + \frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{3} + \frac{k_3}{3} + \frac{k_4}{6} + \mathcal{O}(h^5) \quad (6.13)$$

が成り立つ. ただし, h は格子の刻み幅である. これより, ある点 x_n での f の値 y_n がわかっているならば, それ以降の点の値は帰納的に求まる. このようにして微分方程式を解く方法を 4 次の Runge-Kutta 法という. 連立微分方程式の場合は, k_1, k_2, k_3, k_4 を未知関数ごとに用意すればよい (例えば, 各 k_1, k_2, k_3, k_4 をそれぞれ未知関数を区別する添え字を持つ配列にすればよい). また, 刻み幅の符号を負にすれば逆方向に解くこともできる.

Runge-Kutta 法を用いるには初期条件 (境界条件) と導関数が必要である. 導関数は, 与えられた微分方程式が (6.11) の形であれば右辺をそのまま用いればよく, そうでなければ (6.11) の形に変形すればよい. また, 初期条件も, それが予め与えられていればその点から値を求めて行けばよい. しかし, 与えられていない場合は, まず解を適当な点の周りで級数展開する (連立微分方程式の場合はすべての解を級数展開する). 次に, それを与えられた微分方程式に代入して, 次数ごとに整理する. すると, 各次数の係数は 0 でなければならないから, それらを連立することで級数展開の係数のいくつかを求めることができる. 特に, 連立方程式の場合は, ある解のいくつかの係数を別の解の級数で表すことができる. そのようにすれば, 残ったいくつかのパラメーターをシューティングパラメーターとして, シューティングにより初期条件を求めることができる.

Runge-Kutta 法の 1 ステップに必要な計算は簡潔であるが, それは 1 つの解を求める際に何度も用いられるので, 特に注意して高速化しなければならない. 今回の用途に合わせて自分が高速化した C 言語による Runge-Kutta 法のコードを付録 B.4 に示す (一般的なプログラムは [23] を参照のこと).

6.2 数値計算を用いた Nahm 構成法

Nahm 構成法は, Nahm データが解析的に求まったとしても, 途中で解くべき Weyl 方程式が複雑になると解析的に行うことはできない. しかし, Weyl 方程式は 1 階の線型連立微分方程式なので, 数値的には Runge-Kutta 法で解くことができる. また, 内積やラプラシアンも数値計算で置き換えることができ, それらにより高いチャージを持つモノポールのエネルギー密度を求めることができる. 求めたエネルギー密度は Mathematica により可視化することができる.

6.2.1 全体的な流れ

Nahm データ $T_j(s)$ は与えられているとする. ただし, それはチャージ k のもの, すなわち, $k \times k$ 型の行列であるとする. また, s はモジュライ空間の座標で, スカラーであり, 実数 (C 言語的には double 型) である. このとき, Weyl 方程式は

$$\left(\mathbf{1}_{2k} \frac{d}{ds} + \mathbf{1}_k \otimes x_j \sigma_j + iT_j \otimes \sigma_j \right) \mathbf{v} = 0 \quad (6.14)$$

となる．ただし， 1_k は $k \times k$ の単位行列， σ_j は Pauli 行列， x_j は実空間の座標である．また， $m \times n$ 型の行列 A と $m' \times n'$ 型の行列 α に対し，それらのテンソル積 $A \otimes \alpha$ は $mm' \times nn'$ 型の行列で

$$A \otimes \alpha = \begin{pmatrix} A_{11}\alpha & A_{12}\alpha & \cdots & A_{1n}\alpha \\ A_{21}\alpha & A_{22}\alpha & \cdots & A_{2n}\alpha \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1}\alpha & A_{m2}\alpha & \cdots & A_{mn}\alpha \end{pmatrix} \quad (6.15)$$

である．ここで，(6.14) の各項をテンソル積を用いて 4 元数までバラすと，4 元数は 2×2 なので方程式全体は $2k \times 2k$ ，すなわち $2k$ 本の 1 階線型連立微分方程式となる．また，その解 v は $2k$ 成分を持つ列ベクトルとなる．

Weyl 方程式を数値的に解くには Runge-Kutta 法を用いればよいが，それには初期条件と導関数が必要である．まず，導関数は Weyl 方程式より明らかである．すると，Nahm データの条件より，Nahm データは両端で単純極となり，導関数も両端で発散することがわかる．ここで，Weyl 方程式が両端で発散しないためには，それらの点で $v = 0$ でなければならないので，そのようにすればよい．ところが，Runge-Kutta 法では特異点付近で解が収束しないので，両端付近の点も Runge-Kutta 法の終点とすることはできない．しかし，始点とすることは，終点と異なりその点から離れる向きに計算するので可能である．よって，行うべき Runge-Kutta 法は，それぞれの極の 1 歩先から中央に向かうものである．

次に，初期値問題を解いた後に，Runge-Kutta 法を用いて $s = 0$ から $s = 1$ までの解 $u_1(s), u_2(s), \dots, u_N(s)$ と $s = 2$ から $s = 1$ までの解 $u_{N+1}(s), u_{N+2}(s), \dots, u_{2N}(s)$ が求まったとする．ただし， N はそれぞれの極から求まる独立な解の数である．これらを $s = 1$ でつなげるには，一般にはシューティングを用いなければならない．しかし，今の場合，微分方程式の線形性より中央での線型結合の係数を適当に決めればよい．それには，まず $U = (u_1(1), u_2(1), \dots, u_{2N}(1))$ とし，これによる同次方程式

$$Uw = 0 \quad (6.16)$$

を解く．ここで， U は $2k \times 2N$ 型なので， w は $2N$ 個の成分 w_j を持つ列ベクトルである．また，Weyl 方程式は 2 つの独立な解を持つから， w は 2 種類存在するはずである．それらをそれぞれ $w^{(1)}, w^{(2)}$ とすると

$$Uw = \sum_{j=1}^{2N} w_j u_j(1) = 0 \iff \sum_{j=1}^N w_j u_j(1) = - \sum_{j=N+1}^{2N} w_j u_j(1) \quad (6.17)$$

であるから

$$v_\ell(s) = \begin{cases} \sum_{j=1}^N w_j^{(\ell)} u_j(s) & (0 \leq s \leq 1) \\ - \sum_{j=N+1}^{2N} w_j^{(\ell)} u_j(s) & (1 < s \leq 2) \end{cases} \quad (6.18)$$

は自動的に $s = 1$ でつながった解となる．このような $w^{(1)}, w^{(2)}$ を求めるには，まず U にガウスの消去法を行う．すると，正しい初期条件が選べていて $u_j(s)$ がすべて 1 次独立で

あれば

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & u'_{1N-1} & u'_{1N} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & u'_{2N-1} & u'_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & u'_{kN-1} & u'_{kN} \end{pmatrix} \quad (6.19)$$

という右の2行が残る形に変形でき、 $w^{(1)}$ 、 $w^{(2)}$ はそれぞれ

$$w^{(1)} = \begin{pmatrix} -u'_{1N-1} \\ \vdots \\ -u'_{kN-1} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w^{(2)} = \begin{pmatrix} -u'_{1N} \\ \vdots \\ -u'_{kN} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6.20)$$

と求まる (線形代数の教科書を参照のこと)。また、これより $N = k + 1$ でなければならず、それだけの初期条件をそれぞれ両端で探さなければならない。

初期条件を求めるには、解を両端で級数展開し、それらを Weyl 方程式に代入して、各次数の係数を 0 と置くことで解の級数展開の係数を求める。ここで、Weyl 方程式の係数は両端で発散するのでそのままでは級数展開できないが、それらは単純極なので、Weyl 方程式全体に s を掛けることで展開できる。そのようにしていくつかの級数展開の係数が求まれば、残った係数がシューティングパラメーターとなる。ところが、今の場合、異なるパラメーターの組をそれぞれの極で適当に N 組選べばよい。それらがそれぞれの極で N 個の独立な解を与えさえすれば、パラメーターはどのようなものを選んでも求まるヒッグス場は同じものになる。これらの作業には Mathematica を用いるとよい。

このようにして1次独立な2つの解 $v^{(1)}$ 、 $v^{(2)}$ が得られたとき、それらからヒッグス場を得るには、まずそれらを正規直交化しなければならない。ここで、モジュライ空間における2つのベクトル v_1, v_2 の内積 $\langle v_1, v_2 \rangle$ は

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \int_0^2 v_1^\dagger v_2 ds \quad (6.21)$$

で与えられる。このとき、 v_1, v_2 はベクトルであるから、被積分関数 $v_1^\dagger v_2$ は、 $2k$ 項の成分の積の和で、スカラーである。それらを積分するには Simpson の公式を用いればよい。ただし、内積は被積分関数が一般には複素数であるが、ノルムでは必ず実数となるので、高速化を考慮するならばこれらを使い分けるべきである。また、正規直交化を行うにはグラム-シュミットの正規直交化法を用いればよい。しかし、今の場合、正規直交化するベクトルは v_1 と v_2 の2つだけなので、単に v_2 を

$$v_2 - \frac{\langle v_1, v_2 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 \quad (6.22)$$

で置き換え、それぞれを規格化すればよい。内積、ノルムの計算、正規直交化を行うプログラムはそれぞれ付録 B.12, B.11, B.10 のようになる。

正規直交化されたゼロモードを改めて v_1, v_2 とすれば, 2×2 型の行列であるヒッグス場 Φ は

$$\Phi = i \begin{pmatrix} \langle (s-1)v_1, v_1 \rangle & \langle (s-1)v_1, v_2 \rangle \\ \langle (s-1)v_2, v_1 \rangle & \langle (s-1)v_2, v_2 \rangle \end{pmatrix} \quad (6.23)$$

で与えられる. これよりエネルギー密度を計算するには, まず

$$\|\Phi\|^2 = -\frac{1}{2} \text{tr} \Phi^2 \quad (6.24)$$

を計算する. ここで, Φ^2 はエルミート共役などを取らない単なる行列の積である. また, $\|\Phi\|^2$ は実数となるので, その3次元配列は double 型にし, 計算結果を代入するときは実成分のみを入れる. すると, エネルギー密度は

$$\varepsilon = \Delta \|\Phi\|^2 \quad (6.25)$$

で与えられる. ただし, Δ はラプラシアンであり, それは2階の中央差分を用いて計算すればよい.

最後に, エネルギー密度を可視化するには Mathematica を用いればよい. Mathematica の ListContourPlot3D という命令は, 3次元デカルト座標 x, y, z とその点における密度 $\varepsilon(x, y, z)$ の計4つの値のリストのリストを受け取って, 指定した等位面をグラフィックにして返す. これを用いるためのリストを作るには Import という命令を用いるとよい. Import は, テキストファイル (.txt) やデータファイル (.dat) を受け取り, その中身をリストにして返す. このとき, ファイル中の各行は1つのリスト, 1つの行中の半角ブランクはリストの区切りのコンマと解釈されるので, Cのプログラムからデータを書き出すときは各行に $x, y, z, \varepsilon(x, y, z)$ が半角ブランクを挟んで並ぶようにする. また, Import はカレントディレクトリの中のファイルしか認識しないので, Directory という命令を用いてカレントディレクトリを調べてそこにファイルを移すか, SetDirectory という命令を用いてカレントディレクトリをファイルが作成されるフォルダに移さなければならない. 各命令の詳しい使い方は Mathematica のヘルプのドキュメントセンターを参照のこと.

6.2.2 BPS モノポールのエネルギー密度

ヒッグス場を得るまでは Nahm 構成法の通りであるが, エネルギー密度を得るところは新しい事柄なので, 先に構成した BPS モノポールで練習してみる.

まず, BPS モノポールのヒッグス場を思い出すと

$$\begin{aligned} \Phi &= -i \frac{\sigma_i x_i}{2r^2} \left(\frac{2r}{\tan 2r} - 1 \right) = -i \frac{1}{2r^2} \left(\frac{2r}{\tan 2r} - 1 \right) \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & -x_3 \end{pmatrix} \\ \therefore \|\Phi\|^2 &= -\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4r^4} \left(\frac{2r}{\tan 2r} - 1 \right)^2 \cdot 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \right) = \frac{1}{4r^2} \left(\frac{2r}{\tan 2r} - 1 \right)^2 \end{aligned} \quad (6.26)$$

となる. これより, エネルギー密度は球座標のラプラシアンを用いて

$$\varepsilon = \nabla_r^2 \|\Phi\|^2 = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r \|\Phi\|^2) \quad (6.27)$$

と書ける．この計算は煩雑なので，Mathematica で予め

$$\text{trphi2}[r_] = \left(\text{Coth}[2r] - \frac{1}{2r} \right)^2; \quad (6.28)$$

として $\|\Phi\|^2$ を定義し，

$$\text{eps}[r_] = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r \text{trphi2}[r]) \quad (6.29)$$

として計算させればよい．ただし， ∂_r のような数学記号はパレットで入力する．このとき，

$$\begin{aligned} & \text{Plot}[\text{eps}[r], \{r, 0, 3\}, \text{PlotRange} \rightarrow \{0, 3\}] \\ & \text{Plot3D} \left[\text{eps} \left[\sqrt{x^2 + y^2} \right], \{x, -1.7, 1.7\}, \{y, -1.7, 1.7\}, \text{AxesLabel} \rightarrow \{x, y, \epsilon(x,y)\} \right] \\ & \text{ContourPlot3D} \left[\text{eps} \left[\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right], \{x, -1.7, 1.7\}, \{y, -1.7, 1.7\}, \{z, -1.7, 1.7\}, \right. \\ & \quad \left. \text{Contours} \rightarrow 0.2, \text{AxesLabel} \rightarrow \{x, y, z\} \right] \end{aligned} \quad (6.30)$$

とすれば，動径方向のエネルギー密度のグラフ， x - y 平面上のエネルギー密度の3D 高さグラフ，3次元空間内での等エネルギー面をそれぞれ書かせることができる．しかし，後の2つの命令だと得られるグラフィックが重くなるので，

$$\begin{aligned} & \text{ListPlot3D} \left[\text{Table} \left[\text{eps} \left[\sqrt{x^2 + y^2} \right], \{x, -1.7, 1.7, 0.2\}, \{y, -1.7, 1.7, 0.2\} \right], \right. \\ & \quad \left. \text{AxesLabel} \rightarrow \{x, y, \epsilon(x,y)\} \right] \\ & \text{ListContourPlot3D} \left[\text{Table} \left[\text{eps} \left[\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right], \{x, -1.7, 1.7, 0.2\}, \{y, -1.7, 1.7, 0.2\}, \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \{z, -1.7, 1.7, 0.2\} \right], \text{Contours} \rightarrow \{0.2\}, \text{AxesLabel} \rightarrow \{x, y, z\} \right] \end{aligned} \quad (6.31)$$

のようにリストにしてから描かせるとよい．また，BPS モノポールのエネルギー密度は原点で発散している（全区間で積分するときには消える）が，このようにして特異点を回避すれば Mathematica が補間してくれる．これらの命令を使って描かせた図は図 6.1 ~ 6.3 のようになる．

6.3 正4面体の対称性を持つモノポールの数値的な構成

前節で説明した方法を用いれば，先に説明した正多面体の対称性を持つモノポールを実際に数値的に構成することができる．この節では，正4面体の対称性を持つモノポールの数値的な構成を具体的に追ってみる．

6.3.1 Weyl 方程式と導関数

正4面体の対称性を持つモノポールの Nahm データは

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -z \\ 0 & \bar{z} & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\bar{z} \\ 0 & 0 & 0 \\ z & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_3 = \begin{pmatrix} 0 & z & 0 \\ -\bar{z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.32)$$

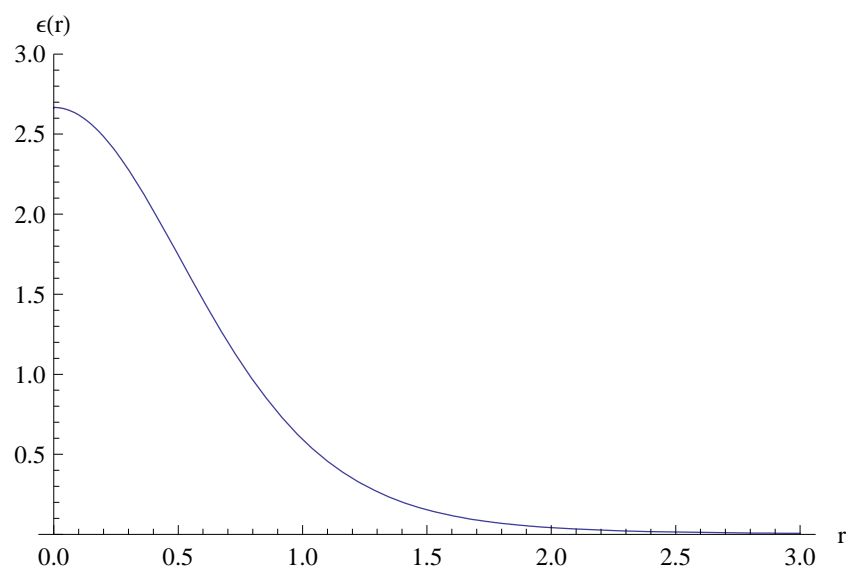


図 6.1: BPS モノポールの動径方向のエネルギー密度のプロット.

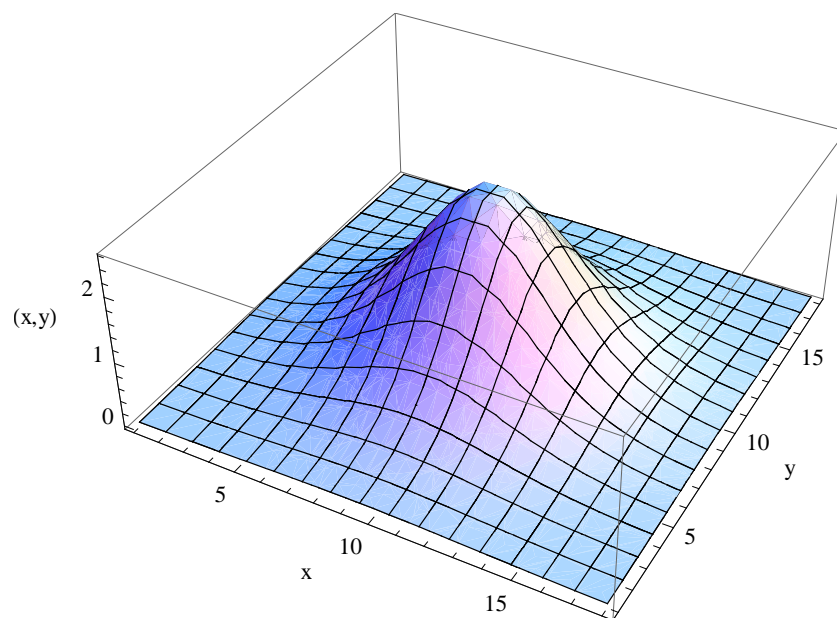


図 6.2: BPS モノポールの $x-y$ 平面上のエネルギー密度の 3D プロット.

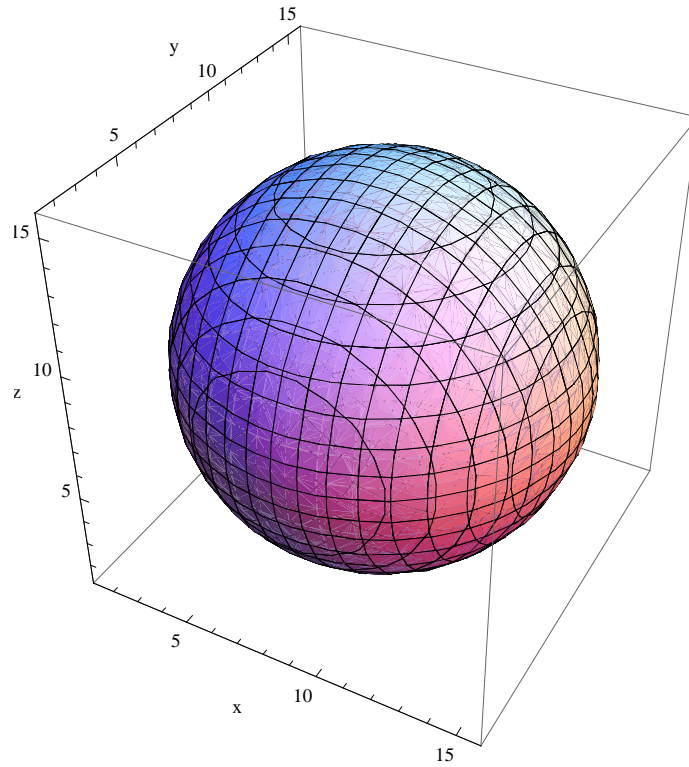


図 6.3: BPS モノポールの 3次元空間内での等エネルギー面 .

となる . ただし , z は s のみに依存する複素関数で

$$z(s) = \frac{\omega \wp'(\omega s)}{2\wp(\omega s)} + \frac{\sqrt{3}\omega}{\wp(\omega s)}, \quad \omega = e^{i\pi/6} \frac{\Gamma(1/6)\Gamma(1/3)}{12\sqrt{\pi}} \quad (6.33)$$

である . また , \wp は

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - 4 \quad (6.34)$$

を満たす Weierstrass の楕円関数である . ここで , Weierstrass の楕円関数は一般に

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3 \quad (6.35)$$

と書かれ , Mathematica での命令は $\text{WeierstrassP}[\omega s, \{g_2, g_3\}]$ という形である . 今の場合 , $g_2 = 0, g_3 = 4$ である . このとき , ω は z が $s = 0, 2$ で極となるように選ばれている . また , z の絶対値のグラフは区間で対称であり , Nahm データの条件通りに両端で極となっている (図 6.4) .

Nahm データを (6.14) に代入して (6.15) を用いて 4 元数ごとバラせば , Weyl 方程式は

$$v_1 + x_3 v_1 + (x_1 - ix_2)v_2 + izv_3 - \bar{z}v_6 = 0, \quad (6.36)$$

$$v_2 - x_3 v_2 + (x_1 + ix_2)v_1 - izv_4 + \bar{z}v_5 = 0, \quad (6.37)$$

$$v_3 + x_3 v_3 + (x_1 - ix_2)v_4 - i\bar{z}v_1 - izv_6 = 0, \quad (6.38)$$

$$v_4 - x_3 v_4 + (x_1 + ix_2)v_3 + i\bar{z}v_2 - izv_5 = 0, \quad (6.39)$$

$$\begin{aligned}
 \text{weyl}_4[s] &:= \partial_s d[s] - x_3 d[s] + (x_1 + ix_2) c[s] + izzzz[s] b[s] - i zz[s] e[s]; \\
 \text{weyl}_5[s] &:= \partial_s e[s] + x_3 e[s] + (x_1 - ix_2) f[s] + zz[s] b[s] + izzzz[s] d[s]; \\
 \text{weyl}_6[s] &:= \partial_s f[s] - x_3 f[s] + (x_1 + ix_2) e[s] - zz[s] a[s] + izzzz[s] c[s]; \\
 z[s] &:= \frac{\omega \text{WeierstrassPPrime}[\omega s, \{g_2, g_3\}]}{2 \text{WeierstrassP}[\omega s, \{g_2, g_3\}]} + \frac{\sqrt{3}\omega}{\text{WeierstrassP}[\omega s, \{g_2, g_3\}]}; \\
 \omega &:= e^{i\pi/6} \frac{\text{Gamma}[1/6] \text{Gamma}[1/3]}{12\sqrt{\pi}};
 \end{aligned} \tag{6.44}$$

と打ち込み，Weyl 方程式と z を定義する．次に，Weyl 方程式の6つの解を

$$\begin{aligned}
 n &:= 3; \\
 a[s] &:= \sum_{i=0}^n a_i s^i; b[s] := \sum_{i=0}^n b_i s^i; c[s] := \sum_{i=0}^n c_i s^i; d[s] := \sum_{i=0}^n d_i s^i; \\
 e[s] &:= \sum_{i=0}^n e_i s^i; f[s] := \sum_{i=0}^n f_i s^i;
 \end{aligned} \tag{6.45}$$

と打ち込み，級数展開の形で定義する．それから，Weyl 方程式を級数展開したいのであるが，多項式の中の式はあまり展開してくれないので， $zz[s]$ ， $zzzz[s]$ は予め級数の形で

$$\begin{aligned}
 zz[s] &:= \text{Normal}[\text{Series}[z[s], s, 0, n]]; \\
 zzz[s] &:= \text{Normal}[\text{Conjugate}[\text{Series}[z[s], s, 0, n]]]; \\
 zzzz[s] &:= \text{Simplify}[zzz[s], s \in \text{Reals}];
 \end{aligned} \tag{6.46}$$

と定義する．このようにすれば， $\text{weyl}_1[s]$ などは Series を用いて級数展開することができる．それを用いて見てみると，今の場合， n 次の項の係数には大体 $n + 1$ までの係数が含まれている．それゆえ， $\text{weyl}_1[s]$ などの各次数の係数を連立して解いて行くことで，低い次数のいくつかの係数を用いて高い次数の任意の係数を帰納的に表せるはずである．それには，Do を用いて

$$\begin{aligned}
 \text{Do}[\text{sol} = \text{Solve}[\{\text{SeriesCoefficient}[\text{Series}[s \text{weyl}_1[s], \{s, 0, n\}], j] == 0, \\
 \text{SeriesCoefficient}[\text{Series}[s \text{weyl}_2[s], \{s, 0, n\}], j] == 0, \\
 \text{SeriesCoefficient}[\text{Series}[s \text{weyl}_3[s], \{s, 0, n\}], j] == 0, \\
 \text{SeriesCoefficient}[\text{Series}[s \text{weyl}_4[s], \{s, 0, n\}], j] == 0, \\
 \text{SeriesCoefficient}[\text{Series}[s \text{weyl}_5[s], \{s, 0, n\}], j] == 0, \\
 \text{SeriesCoefficient}[\text{Series}[s \text{weyl}_6[s], \{s, 0, n\}], j] == 0\}, a_j, b_j, c_j, d_j, e_j, f_j]; \\
 \{a_j\} = a_j/.sol; \{b_j\} = b_j/.sol; \{c_j\} = c_j/.sol; \{d_j\} = d_j/.sol; \\
 \{e_j\} = e_j/.sol; \{f_j\} = f_j/.sol; , \{j, 0, n\}]
 \end{aligned} \tag{6.47}$$

と命令すればよい．また，求めた級数展開を見るには， $\text{Simplify}[\text{Normal}[\text{Series}[a[s], \{s, 0, 2\}]]]$ などと命令する．すると，今の場合

$$a[s] = \frac{1}{2} s (s (-e_1 (x_1 - 2ix_2) + d_1 (ix_1 + x_2)) + f_1 (-2 + sx_3) - 2ic_1 (-1 + sx_3))$$

$$\begin{aligned}
b[s] &= \frac{1}{2}s (s (f_1 (x_1 + 2ix_2) + c_1 (-ix_1 + x_2)) - 2id_1 (1 + sx_3) + e_1 (2 + sx_3)) \\
c[s] &= sc_1 + \frac{1}{2}is^2 (e_1x_1 + d_1 (ix_1 + x_2) + (2ic_1 - f_1) x_3) \\
d[s] &= sd_1 (1 + sx_3) + \frac{1}{2}s^2 (-c_1 (x_1 + ix_2) + i (f_1x_1 + e_1x_3)) \\
e[s] &= -\frac{1}{2}s (s (ic_1 (x_1 + ix_2) + f_1 (x_1 - 2ix_2)) + e_1 (-2 + sx_3)) \\
f[s] &= \frac{1}{2}s (s (d_1 (-ix_1 - x_2) - e_1 (x_1 + 2ix_2)) + f_1 (2 + sx_3))
\end{aligned} \tag{6.48}$$

となり, c_1, d_1, e_1, f_1 の計 4 つのパラメーターのみが残ることがわかる. ただし, 初期条件は $s = 0$ の 1 歩先なので, s には刻み幅を代入する. 後は, これらの式をプログラムに打ち込み, 4 種類の 4 つのパラメーターの組と刻み幅に対し, 4 種類の 6 成分の初期条件を返すような関数を作ればよい. そのようなプログラムは付録 B.5 のようになる.

$s = 0$ の周りではこのようにすればよいが, $s = 2$ の周りでは, Mathematica が WeierstrassP $[\omega 2, \{g_2, g_3\}]$ や WeierstrassPPrime $[\omega 2, \{g_2, g_3\}]$ をキリのいい値として見てくれないのでうまく級数展開できない. そのような場合には, 1 度それらの正確な値を調べ,

```

wp = Normal [Series [WeierstrassP [\omega s, {g2, g3}], {s, 2, 12}]] /.
  {WeierstrassP[2\omega, {0, 4}] -> x, WeierstrassPPrime[2\omega, {0, 4}] -> 2i} /. /.
  x -> 0; /.
wpp = Normal [Series [WeierstrassPPrime [\omega s, {g2, g3}], {s, 2, 12}]] /. /.
  {WeierstrassP[2\omega, {0, 4}] -> x, WeierstrassPPrime[2\omega, {0, 4}] -> 2i} /. /.
  x -> 0; /.
zz[s_] = Normal [Series [z[s] /. {WeierstrassP [\omega s, {g2, g3}] -> wp, /.
  WeierstrassPPrime [\omega s, {g2, g3}] -> wpp, {s, 2, 2}; /.
zzzz[s_] = Simplify [Conjugate [Normal [Series [z[s] /. {WeierstrassP [\omega s, {g2, g3}] -> wp, /.
  WeierstrassPPrime [\omega s, {g2, g3}] -> wpp, {s, 2, 2}, s \in Reals]; /.

```

のように置換しながら定義するとよい. $s = 2$ の場合も, $s = 0$ のときと同じように 4 つのパラメーターが残る. $s = 2$ での初期条件を求めるプログラムも付録 B.5 の中にある.

6.3.3 計算結果

前節と前々節の初期条件と導関数を用いて Lunge-Kutta 法を行うプログラムは付録 B.4 のようになる. また, これらと先に説明した手順をすべてプログラムにしたものが付録 B 全体である. これを走らせて得たエネルギー密度を先に説明した手順で可視化した結果を図 6.5 に示す¹².

¹最初に卒業論文に載せた図はもっとボリゴンチックだった. ListContourPlot3D の MaxPlotPoints オプションに気づいて今載せてあるようなきれいな図になったのは修士 1 年の 5 月頃である.

²そのままの EPS ファイルでは重すぎて PDF ファイルにすらならないので, dviout や GSview で表示したものを PrintScreen で bmp ファイルとして保存し, 改めて EPS に変換して載せている.

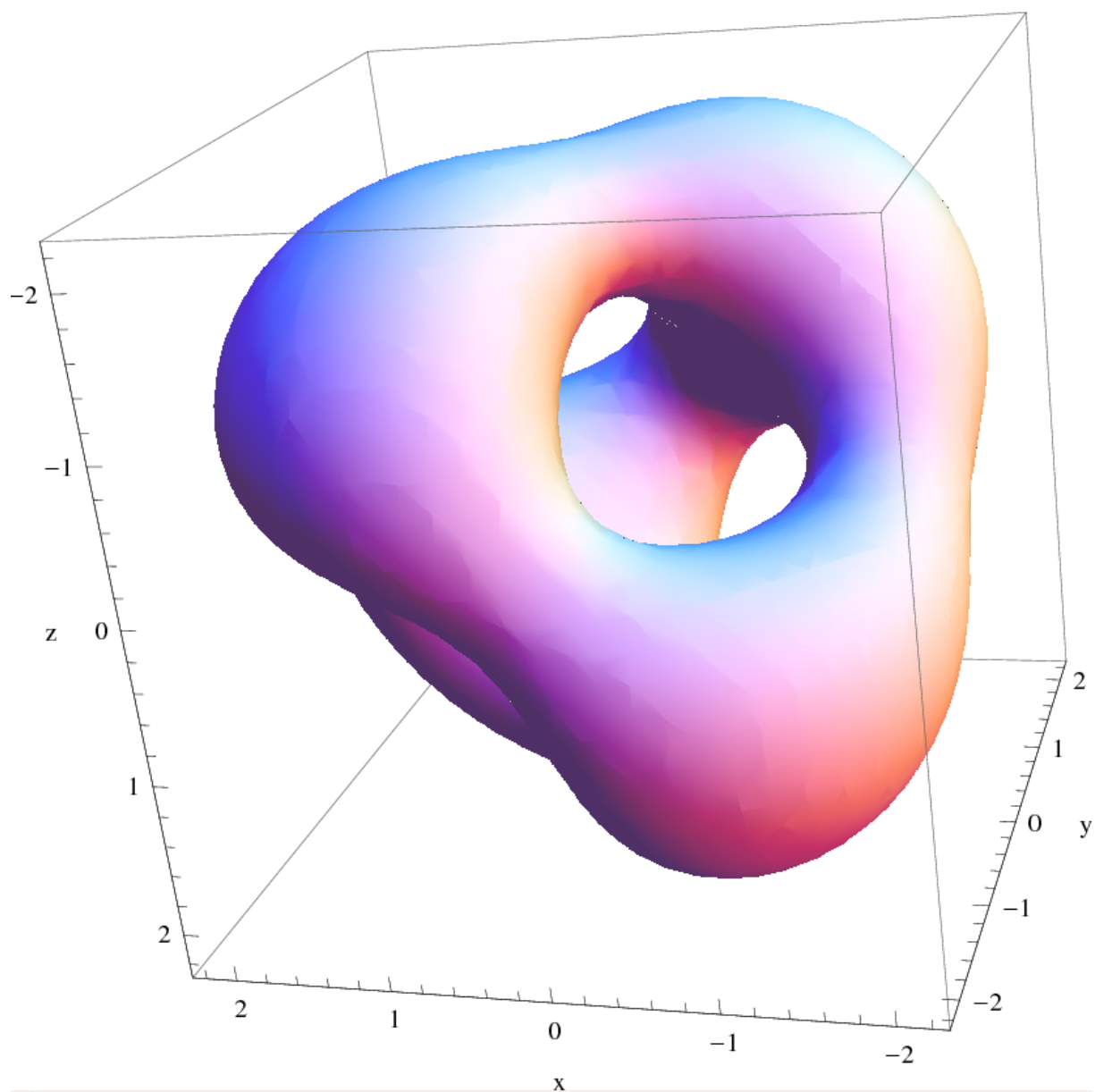


図 6.5: 正4面体の対称性を持つモノポールの等エネルギー面 ($\varepsilon = 0.20$) .

第7章 結び

7.1 まとめ

本論で述べたように、以前は ASD 条件と ansatz を用いて得られていたインスタントンとモノポールは ADHM/Nahm 構成法を用いてもそれぞれ得ることができ、その手順はそれぞれ以下ようになる：

ADHM 構成法

1. モジュライ空間において ASD である 0 次元ディラック作用素 Δ を求める .
2. Weyl 方程式 $\Delta V = 0$ の規格化されたゼロモード V を求める .
3. 実空間におけるインスタントンのゲージ場 A_μ は $A_\mu = V^\dagger \partial_\mu V$ で与えられる .

Nahm 構成法

1. Nahm データの条件、特に Nahm 方程式

$$\frac{d}{ds} T_i(s) = \frac{i}{2} \varepsilon_{ijk} [T_j(s), T_k(s)] \quad (7.1)$$

を満たす Nahm データ $T_i(s)$ を求める .

2. Weyl 方程式

$$\left(\mathbf{1}_{2k} \frac{d}{ds} + \mathbf{1}_k \otimes x_j \sigma_j + iT_j \otimes \sigma_j \right) \mathbf{v} = 0 \quad (7.2)$$

の規格化されたゼロモード $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ を求める .

3. 実空間におけるモノポールのヒッグス場 Φ 、ゲージ場 A_i はそれぞれ

$$\Phi_{ab}(\mathbf{x}) = i \int_{-1}^1 s \mathbf{v}_a^\dagger(s) \mathbf{v}_b(s) ds, \quad A_{iab}(\mathbf{x}) = \int_{-1}^1 \mathbf{v}_a^\dagger(s) \partial_i \mathbf{v}_b(s) ds \quad (7.3)$$

で与えられる .

また、正多面体の対称性を持つモノポールを得るには以下のようにする：

対称性の導入

1. 正多面体の各点をそれに外接する単位球面に移す。
2. それらを立体射影を用いて複素平面上に移す。
3. それらを解として持つ方程式を求め、その左辺の多項式よりスペクトル曲線を求める。
4. そのスペクトル曲線より Nahm データの基底行列となる表現を求め、Nahm 方程式を解いて Nahm データを求める。
5. その Nahm データを用いて Nahm 構成法を行う。

さらに、Nahm 構成法を数値的に行う手順は以下のようなになる (表 7.1) :

数値計算による Nahm 構成法

1. Mathematica を用いて、特殊関数などを予め計算してプログラムに直接書き込む。
2. Mathematica を用いて、モジュライ空間の区間の両端付近における Weyl 方程式の解の級数展開の係数を求め、初期条件を求める。
3. 求めた初期条件と Runge-Kutta 法を用いて、Weyl 方程式をモジュライ空間の区間の両端から中央までそれぞれ解く。
4. ガウスの消去法を用いて、求めた 2 つの解が中央で一致する線型結合の係数を求め、解をつなげる。
5. グラム-シュミットの正規直交化法と Simpson の公式を用いて、求めた解を正規直交化し、ヒッグス場 Φ およびそのノルムの 2 乗 $\|\Phi\|^2 = \frac{1}{2} \text{tr} \Phi^2$ を求める。
6. 2 階の中央差分を用いて、エネルギー密度 $\varepsilon = \nabla^2 \|\Phi\|^2$ を求め、ファイルに書き出す。
7. Mathematica を用いて、求めたエネルギー密度のデータよりモノポールを可視化する。

表 7.1: Nahm 構成法の手順の数値計算への翻訳

Nahm 構成法	数値計算
Weyl 方程式を解く	⇒ Runge-Kutta 法
解を中央でつなげる	⇒ ガウスの消去法
正規直交化する	⇒ グラム-シュミットの正規直交化法
積分する	⇒ Simpson の公式
ラプラシアンをとる	⇒ 2 階の中央差分の和

7.2 結論

Nahm 構成法を数値的に行う際に用いるプログラミングの手法は学部生でもわかる程度のものであり、実際に構成することも、プログラミングと数値計算の基本的な知識があれば容易である。

7.3 今後の展望

本論の主題は，そもそもは [12] のような ADHM/Nahm 構成法の応用としてのシンメトリックカロロンなどについてであった．ところが，その中の対称性を扱う過程が，調べて見ると余りにも長く，それに時間を取られて新しい研究にまで行き着かなかった．しかし，本研究でモノポールやインスタントンの対称性や，ADHM/Nahm 構成法とそれにまつわる諸概念について理解が深まり，さらに，数値計算の手法もいくらか身につけることができた．修士からは，これらの知識を生かせるような，新しい研究テーマを見つけられるように勉強して行きたい．

7.4 謝辞

ソリトンについての知識や本研究のテーマ，研究のアドバイス，進路について等のご指導をいただいた澤渡先生に深く感謝いたします．特に，先生からいただいたモノポールの数値計算の薦めのアドバイスのおかげで，Nahm 構成法の具体的な手順をよく理解することができ，本研究も有意義なものになったと思います．また，一緒にゼミや卒業研究を行った澤渡研のメンバーと，アドバイスをいただいた先輩方にも深く感謝いたします．

付録A テンソルと行列の公式

A.1 クロネッカーのデルタ

定義

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n). \quad (\text{A.1})$$

性質と公式

$$\delta_{ij} = \delta_{ji}, \quad (\text{対称性}) \quad (\text{A.2})$$

$$T_i \delta_{ij} = T_j, \quad (\text{添え字の入れ換え}) \quad (\text{A.3})$$

$$\delta_{ij} = \delta_{ik} \delta_{kj}, \quad (\text{A.4})$$

$$\delta_{\mu\nu} = \delta_{\mu'\nu'} + \delta_{\mu 4} \delta_{\nu 4}, \quad (\text{A.5})$$

$$\delta_{ij} \delta_{ij} = n. \quad (\text{A.6})$$

ただし, $i, j = 1, 2, \dots, n$ で, T_j は任意のテンソル.

A.2 完全反対称テンソル

定義

$$\varepsilon_{p_1 p_2 \dots p_n} = \begin{cases} 1 & ((p_1, p_2, \dots, p_n) \text{ が偶置換のとき}) \\ -1 & ((p_1, p_2, \dots, p_n) \text{ が奇置換のとき}) \\ 0 & ((p_1, p_2, \dots, p_n) \text{ が置換でないとき}) \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

$(p_1, p_2, \dots, p_n = 1, 2, \dots, n).$

性質

$$\varepsilon_{p_1 \dots p_i \dots p_j \dots p_n} = \varepsilon_{p_1 \dots p_j \dots p_i \dots p_n}, \quad (2 \text{ つの異なる添え字について反対称}) \quad (\text{A.8})$$

$$\delta_{p_i p_j} \varepsilon_{p_1 \dots p_i \dots p_j \dots p_n} = 0, \quad (\text{同じ添え字が入ると } 0) \quad (\text{A.9})$$

$$S_{p_i p_j} = S_{p_j p_i} \Rightarrow S_{p_i p_j} \varepsilon_{p_1 \dots p_i \dots p_j \dots p_n} = 0, \quad (\text{対称テンソルにかかると } 0) \quad (\text{A.10})$$

$$\varepsilon_{p_1 \dots p_i \dots p_j \dots p_n} (T_{p_i p_j} - T_{p_j p_i}) = 2 \varepsilon_{p_1 \dots p_i \dots p_j \dots p_n} T_{ij}, \quad (\text{特に交換関係との積}) \quad (\text{A.11})$$

$$\varepsilon_{p_1 \cdots p_n} \varepsilon_{p_1 \cdots p_n} = n!, \quad (\text{積の縮約}) \quad (\text{A.12})$$

$$\varepsilon_{p_1 \cdots p_{n-1} n} = \varepsilon_{p_1 \cdots p_{n-1}}. \quad (n \text{ 階から } n-1 \text{ 階へ}) \quad (\text{A.13})$$

ただし, $S_{p_i p_j}, T_{p_i p_j}$ は任意のテンソル.

公式

$$\varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} = \delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}, \quad (\text{A.14})$$

$$\varepsilon_{ij} \varepsilon_{ik} = \delta_{jk}, \quad (\text{A.15})$$

$$\varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} = 2, \quad (\text{A.16})$$

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ilm} = \delta_{il} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}, \quad (\text{A.17})$$

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijl} = 2\delta_{kl}, \quad (\text{A.18})$$

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijk} = 6, \quad (\text{A.19})$$

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = 2(\delta_{\alpha\rho} \delta_{\beta\sigma} - \delta_{\alpha\sigma} \delta_{\beta\rho}), \quad (\text{A.20})$$

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\rho} = 6\delta_{\beta\rho}, \quad (\text{A.21})$$

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} = 24, \quad (\text{A.22})$$

$$\delta_{ij} \varepsilon_{klm} = \delta_{ik} \varepsilon_{jlm} + \delta_{il} \varepsilon_{kjm} + \delta_{im} \varepsilon_{klj}, \quad (\text{A.23})$$

$$\delta_{\mu\nu} \varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} = \delta_{\mu\alpha} \varepsilon_{\nu\beta\rho\sigma} + \delta_{\mu\beta} \varepsilon_{\alpha\nu\rho\sigma} + \delta_{\mu\rho} \varepsilon_{\alpha\beta\nu\sigma} + \delta_{\mu\sigma} \varepsilon_{\alpha\beta\rho\nu}, \quad (\text{A.24})$$

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{imn} \varepsilon_{jprq} = \delta_{mp} \varepsilon_{knq} + \delta_{nq} \varepsilon_{kmp} - \delta_{mq} \varepsilon_{knp} - \delta_{np} \varepsilon_{kmq}. \quad (\text{A.25})$$

A.3 't Hooft のイェータシンボル

定義

$$\eta_{\mu\nu}^{i(\pm)} = \varepsilon_{i\mu\nu 4} \pm (\delta_{i\mu} \delta_{\nu 4} - \delta_{i\nu} \delta_{\mu 4}). \quad (\text{A.26})$$

性質

$$\eta_{\mu\nu}^{i(\pm)} = -\eta_{\nu\mu}^{i(\pm)}, \quad (\text{空間添え字について反対称}) \quad (\text{A.27})$$

$$*\eta_{\mu\nu}^{i(\pm)} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \eta_{\alpha\beta}^{i(\pm)} = \pm \eta_{\mu\nu}^{i(\pm)}. \quad ((\text{A})\text{SD}) \quad (\text{A.28})$$

公式

$$\eta_{\mu\nu}^{i(\pm)} \eta_{\alpha\beta}^{i(\pm)} = \pm \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} + \delta_{\mu\alpha} \delta_{\nu\beta} - \delta_{\mu\beta} \delta_{\nu\alpha}, \quad (\text{A.29})$$

$$\eta_{\mu\nu}^{i(\pm)} \eta_{\mu\nu}^{j(\pm)} = 4\delta_{ij}, \quad (\text{A.30})$$

$$\eta_{\mu\nu}^{i(\pm)} \eta_{\mu\alpha}^{i(\pm)} = 3\delta_{\nu\alpha}, \quad (\text{A.31})$$

$$\eta_{\mu\nu}^{i(\pm)} \eta_{\mu\nu}^{i(\pm)} = 12, \quad (\text{A.32})$$

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\eta_{\rho\beta}^{i(\pm)} = \pm(\delta_{\mu\rho}\eta_{\nu\alpha}^{i(\pm)} + \delta_{\nu\rho}\eta_{\alpha\mu}^{i(\pm)} + \delta_{\alpha\rho}\eta_{\mu\nu}^{i(\pm)}), \quad (\text{A.33})$$

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\eta_{\alpha\beta}^{i(\pm)} = \pm 2\eta_{\mu\nu}^{i(\pm)}, \quad (\text{A.34})$$

$$\varepsilon_{ijk}\eta_{\mu\nu}^{i(\pm)}\eta_{\alpha\beta}^{j(\pm)} = \delta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta}^{k(\pm)} + \delta_{\nu\beta}\eta_{\mu\alpha}^{k(\pm)} - \delta_{\mu\beta}\eta_{\nu\alpha}^{k(\pm)} - \delta_{\nu\alpha}\eta_{\mu\beta}^{k(\pm)}, \quad (\text{A.35})$$

$$\varepsilon_{ijk}\eta_{\mu\nu}^{i(\pm)}\eta_{\mu\alpha}^{j(\pm)} = 2\eta_{\nu\rho}^{k(\pm)}. \quad (\text{A.36})$$

A.4 トレース

定義

$$\text{tr } A = \sum_i a_{ii}. \quad (\text{A.37})$$

ただし, $A = (a_{ij})$.

性質

$$\text{tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \text{tr } A + \mu \text{tr } B, \quad (\text{線形性}) \quad (\text{A.38})$$

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA), \quad (\text{可換性}) \quad (\text{A.39})$$

$$\text{tr}(A_1 A_2 \cdots A_n) = \text{tr}(A_2 \cdots A_n A_1) = \cdots, \quad (\text{循環律}) \quad (\text{A.40})$$

$$\text{tr}(U A U^{-1}) = \text{tr } A, \quad (\text{相似変換に対して不変}) \quad (\text{A.41})$$

$$\text{tr } \mathbf{1}_n = n. \quad (\text{A.42})$$

ただし, $A, B, A_1, A_2, \dots, A_n$ は次数が同じ任意の正方行列, λ, μ は任意の定数, $\mathbf{1}_n$ は n 次の単位行列.

A.5 Pauli 行列

定義

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.43})$$

性質と公式

$$\sigma_i^\dagger = \sigma_i, \quad (\text{エルミート}) \quad (\text{A.44})$$

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} \mathbf{1}_2 + i \varepsilon_{ijk} \sigma_k, \quad (\text{A.45})$$

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i \varepsilon_{ijk} \sigma_k, \quad (\text{交換関係}) \quad (\text{A.46})$$

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij} \mathbf{1}_2, \quad (\text{反交換関係}) \quad (\text{A.47})$$

$$\text{tr } \sigma_i = 0, \quad (\text{A.48})$$

$$\text{tr}(\sigma_i \sigma_j) = 2\delta_{ij}, \quad (\text{A.49})$$

$$\text{tr}(\sigma_i \sigma_j \sigma_k) = 2i \varepsilon_{ijk}. \quad (\text{A.50})$$

A.6 't Hooft 行列

定義

$$\eta_{\mu\nu}^{(\pm)} = \eta_{\mu\nu}^{i(\pm)} \sigma_i. \quad (\text{A.51})$$

性質

$$\eta_{\mu\nu}^{(\pm)} = -\eta_{\nu\mu}^{(\pm)}, \quad (\text{反対称行列}) \quad (\text{A.52})$$

$$\eta_{\mu\nu}^{(\pm)\dagger} = \eta_{\mu\nu}^{(\pm)}, \quad (\text{エルミート}) \quad (\text{A.53})$$

$$*\eta_{\mu\nu}^{(\pm)} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \eta_{\alpha\beta}^{(\pm)} = \pm \eta_{\nu\mu}^{(\pm)}, \quad ((\text{A})\text{SD}) \quad (\text{A.54})$$

$$\text{tr} \eta_{\mu\nu}^{(\pm)} = 0, \quad (\text{A.55})$$

$$\text{tr} (\eta_{\mu\nu}^{(\pm)} \eta_{\alpha\beta}^{(\pm)}) = \pm 2\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} + 2\delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta} - 2\delta_{\mu\beta}\delta_{\nu\alpha}, \quad (\text{A.56})$$

$$\text{tr} (\eta_{\mu\nu}^{(\pm)} \eta_{\mu\alpha}^{(\pm)}) = 6\delta_{\nu\alpha}, \quad (\text{A.57})$$

$$\text{tr} (\eta_{\mu\nu}^{(\pm)} \eta_{\mu\nu}^{(\pm)}) = 24, \quad (\text{A.58})$$

$$[\eta_{\mu\nu}^{(\pm)} \eta_{\alpha\beta}^{(\pm)}] = 2i(\delta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta}^{(\pm)} + \delta_{\nu\beta}\eta_{\mu\alpha}^{(\pm)} - \delta_{\mu\beta}\eta_{\nu\alpha}^{(\pm)} - \delta_{\nu\alpha}\eta_{\mu\beta}^{(\pm)}). \quad (\text{A.59})$$

公式

$$\begin{aligned} \eta_{\mu\nu}^{(\pm)} \eta_{\alpha\beta}^{(\pm)} &= (\pm \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} + \delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta} - \delta_{\mu\beta}\delta_{\nu\alpha}) \mathbf{1}_2 \\ &\quad + i\delta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta}^{(\pm)} + i\delta_{\nu\beta}\eta_{\mu\alpha}^{(\pm)} - i\delta_{\mu\beta}\eta_{\nu\alpha}^{(\pm)} - i\delta_{\nu\alpha}\eta_{\mu\beta}^{(\pm)}, \end{aligned} \quad (\text{A.60})$$

$$\eta_{\mu\nu}^{(\pm)} \eta_{\mu\alpha}^{(\pm)} = 3\delta_{\nu\alpha} \mathbf{1}_2 + 2i\eta_{\nu\alpha}^{(\pm)}, \quad (\text{A.61})$$

$$\eta_{\mu\nu}^{(\pm)} \eta_{\mu\nu}^{(\pm)} = 12 \cdot \mathbf{1}_2, \quad (\text{A.62})$$

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \eta_{\rho\beta}^{(\pm)} = \pm(\delta_{\mu\rho}\eta_{\nu\alpha}^{(\pm)} + \delta_{\nu\rho}\eta_{\alpha\mu}^{(\pm)} + \delta_{\alpha\rho}\eta_{\mu\nu}^{(\pm)}), \quad (\text{A.63})$$

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \eta_{\alpha\beta}^{(\pm)} = \pm 2\eta_{\mu\nu}^{(\pm)}. \quad (\text{A.64})$$

A.7 4元数

定義

$$q = q_\mu e_\mu = q_4 \mathbf{1}_2 - iq_j \sigma_j = \begin{pmatrix} q_4 - iq_3 & -q_2 - iq_1 \\ q_2 - iq_1 & q_4 + iq_3 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.65})$$

ただし, $q_\mu \in \mathbb{R}^4$. また,

$$e_\mu = \delta_{\mu 4} \mathbf{1}_2 - i\delta_{\mu j} \sigma_j. \quad (\text{4元数の2次行列表現における基底行列}) \quad (\text{A.66})$$

性質

$$e_1 = -i\sigma_1, \quad e_2 = -i\sigma_2, \quad e_3 = -i\sigma_3, \quad e_4 = \mathbf{1}_2, \quad (\text{A.67})$$

$$e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = -\mathbf{1}_2, \quad e_4^2 = \mathbf{1}_2, \quad (\text{複素数の拡張}) \quad (\text{A.68})$$

$$e_\mu^\dagger = \delta_{\mu 4} \mathbf{1}_2 + i\delta_{\mu j} \sigma_j, \quad (\text{エルミート共役}) \quad (\text{A.69})$$

$$q^\dagger q = qq^\dagger = |q|^2 \mathbf{1}_2. \quad (4 \text{元数の2乗は Real}) \quad (\text{A.70})$$

公式

$$e_\mu^\dagger e_\nu = \delta_{\mu\nu} \mathbf{1}_2 + i\eta_{\mu\nu}^{(+)}, \quad e_\mu^\dagger e_\nu - e_\nu^\dagger e_\mu = 2i\eta_{\mu\nu}^{(+)}, \quad (\text{A.71})$$

$$e_\mu e_\nu^\dagger = \delta_{\mu\nu} \mathbf{1}_2 + i\eta_{\mu\nu}^{(-)}, \quad e_\mu e_\nu^\dagger - e_\nu e_\mu^\dagger = 2i\eta_{\mu\nu}^{(-)}. \quad (\text{A.72})$$

付録B プログラムのコード

B.1 main関数

```
void tetinipara(Complex **para);
void mkzlst2(Complex **z);
void get_u(int P,int nini,int ncomp,double h,double hh,double h6,
           double x1,double x2,double x3,Complex **z,Complex **para,
           Complex ***u,Complex **ut,Complex **du,Complex **dum,Complex **dut);
void get_v(int P,int nini,int ncomp,Complex ***u,Complex **u1,
           Complex **w,Complex **v1,Complex **v2);
void get_phiabs2(int P,double h,int nini,int ncomp,Complex **v1,
                 Complex **v2,Complex *v1v2,double *vv,Complex **sv,Complex **phi,
                 double *phiabs2);
void Lap3DCar(int N,double h,double ***u,double ***d2u);

void main(void)
{
    /* 設定すべきパラメーター*/
    int    P=50;      /* P: モジュライ空間の区間数
                       (途中で Simpson の公式を使うから must 偶数) */
    int    M=31;      /* M: 実空間の区間数*/
    double range=2.5; /* 実空間における原点から格子の端までの距離*/

    /* tetramono のパラメーター*/
    int    ncomp=5;   /* Weyl 方程式の解ベクトルの成分の数
                       (4 元数もバラすから偶数)-1 */
    int    npara=3;   /* Runge-Kutta の出発点付近でテーラー展開しても
                       解けずに残るパラメーターの数-1 */

    /* その他の宣言*/
    int    nini=ncomp+2; /* Runge-Kutta の際の初期条件と出発点の合計
                       (0 ~ が s=0 からで ~ が s=2 からの)
                       neq+1 との差が (=Weyl 方程式の解の数) になるはずだからこうなる*/
    Complex **para; para=cmatrix(0,nini,0,npara);
    /* 初期条件のパラメーター*/
```

```
Complex **z;    z=cmatrix(0,1,0,P);
    /* 微分中のsにしか依らない係数のリスト*/
int    ix1,ix2,ix3,ini,icom; /* ループ変数 */
double h=2.0/(double)P; /* モジュライ空間の刻み幅
    モジュライ空間の区間は.0から.0 */
Complex ***u;    u=ctensor(0,nini,0,ncomp,0,P/2);
    /* Runge-Kutta法で求めた解*/
double hh=h*0.5;
double h6=h/6.0;
Complex **ut;    ut=cmatrix(0,nini,0,ncomp);
Complex **du;    du=cmatrix(0,nini,0,ncomp);
Complex **dum;   dum=cmatrix(0,nini,0,ncomp);
Complex **dut;   dut=cmatrix(0,nini,0,ncomp);
    /* Runge-Kutta法に必要な変数*/
double dx=2.0*range/(double)M; /* 実空間の刻み幅*/
double xrange=range+dx;
    /* 後で中央差分を取るから周り大きな範囲で計算する*/
int    M2=M+2;
Complex **u1;    u1=cmatrix(0,ncomp,0,nini);
Complex **w;     w=cmatrix(0,1,0,nini);
Complex **v1;    v1=cmatrix(0,ncomp,0,P);
Complex **v2;    v2=cmatrix(0,ncomp,0,P);
    /* Weyl方程式の正規直交化したつの解*/
Complex *v1v2;   v1v2=cvector(0,P);
double *vv;      vv=dvector(0,P);
Complex **sv;    sv=cmatrix(0,ncomp,0,P);
Complex **phi;   phi=cmatrix(0,1,0,1);
    /* ヒッグス場*/
double ***phiabs2; phiabs2=dtensor(0,M2,0,M2,0,M2);
    /* ヒッグス場のノルム*/
double ***eps;   eps=dtensor(0,M,0,M,0,M); /* エネルギー密度*/
/* phiabs2のラプラシアン(2階の中央差分)だから境界の分が減る*/
FILE *fp;
if((fp=fopen("tetout.dat","w+"))==NULL){
    printf("ファイルが開けなかったぜっ!!\n\n");
    exit(1);
}

/* 初期条件のパラメーターを代入*/
tetinipara(para);
```

```

/* derivs の中の z(s) を計算してリストにする*/
mkzlst2(z);

// phiabs2 を得る
printf("ヒッグス場を計算中: %d / %d ...",1,M2+1);
ix1=0;
for(ix2=0;ix2<=M2;ix2++) for(ix3=0;ix3<=M2;ix3++){
    get_u(P,nini,ncomp,h,hh,h6,-xrange+dx*(double)ix1,
        -xrange+dx*(double)ix2,-xrange+dx*(double)ix3,
        z,para,u,ut,du,dum,dut);
    get_v(P,nini,ncomp,u,u1,w,v1,v2);
    get_phiabs2(P,h,nini,ncomp,v1,v2,v1v2,vv,sv,phi,
        &phiabs2[ix1][ix2][ix3]);
}
for(ix1=1;ix1<=M2;ix1++){
    printf("完了\nヒッグス場を計算中: %d / %d ...",ix1+1,M2+1);
    for(ix2=0;ix2<=M2;ix2++) for(ix3=0;ix3<=M2;ix3++){
        get_u(P,nini,ncomp,h,hh,h6,-xrange+dx*(double)ix1,
            -xrange+dx*(double)ix2,-xrange+dx*(double)ix3,
            z,para,u,ut,du,dum,dut);
        get_v(P,nini,ncomp,u,u1,w,v1,v2);
        get_phiabs2(P,h,nini,ncomp,v1,v2,v1v2,vv,sv,phi,
            &phiabs2[ix1][ix2][ix3]);
    }
}

// phiabs2 のラプラシアンを取ることで eps を得る
printf("完了\nエネルギー密度を計算中...");
Lap3DCar(M2,dx,phiabs2,eps);

// エネルギー密度を書き出す
printf("完了\nデータを出力中...");
for(ix1=0;ix1<=M;ix1++) for(ix2=0;ix2<=M;ix2++) for(ix3=0;ix3<=M;ix3++)
    fprintf(fp,"%8.16e %8.16e %8.16e %8.16e\n",-range+dx*(double)ix1,
        -range+dx*(double)ix2,-range+dx*(double)ix3,eps[ix1][ix2][ix3]);
printf("完了\n\n----- ミ任務完了だぜっ!! ミ-----\a\n\n");
}

```

B.2 初期条件のパラメーター

```
void tetinipara(Complex **para)
{
    para[0][0]=Complex(2.0,1.0);
    para[0][1]=Complex(7.0,-4.0);
    para[0][2]=Complex(-8.0,2.0);
    para[0][3]=Complex(4.0,3.0);

    para[1][0]=Complex(-8.0,7.0);
    para[1][1]=Complex(-3.0,4.0);
    para[1][2]=Complex(-2.0,-2.0);
    para[1][3]=Complex(-5.0,1.0);

        省略

    para[7][0]=Complex(6.0,-9.0);
    para[7][1]=Complex(2.0,-6.0);
    para[7][2]=Complex(-0.0,-5.0);
    para[7][3]=Complex(5.0,-1.0);
}
```

B.3 zの表の作成

```
void mkzlst2(Complex **z)
{
    z[0][1]=Complex(-25.0000000052115837,0.0009550011269299);
    z[0][2]=Complex(-12.50000016677067991,0.00382000452444253);
        省略
    z[0][49]=Complex(-12.5008270578423559,21.6501575985608651);

    z[1][1]=Complex(-16.6666667062421306,0.0021487525371437);
    z[1][2]=Complex(-10.00000050894373069,0.00596875714415580);
        省略
    z[1][49]=Complex(-25.0002067638905579,43.3011508142221169);
}
```

B.4 Runge-Kutta 法で解を求める

```

void initialize(double x1,double x2,double x3,double h,
    Complex **para,Complex ***u);
void derivs(double x1,double x2,double x3,Complex z,
    Complex **ut,Complex **du);

void get_u(int P,int nini,int ncomp,double h,double hh,
    double h6,double x1,double x2,double x3,Complex **z,
    Complex **para,Complex ***u,Complex **ut,Complex **du,
    Complex **dum,Complex **dut)
{
    int ini,icomp,n,nini2=(nini+1)/2,nini0=nini2-1;

    /* 初期化 */
    initialize(x1,x2,x3,h,para,u);

    /* Runge-Kutta 法で解を求める (s=0 から) */
    for(n=1;n<P/2;n++){
        /* n=1 から */
        for(ini=0;ini<=nini0;ini++) for(icomp=0;icomp<=ncomp;icomp++)
            ut[ini][icomp]=u[ini][icomp][n];
        derivs(x1,x2,x3,z[0][n],ut,du); /* h*du=rk1 */
        for(ini=0;ini<=nini0;ini++) for(icomp=0;icomp<=ncomp;icomp++)
            ut[ini][icomp]+=hh*du[ini][icomp];
        derivs(x1,x2,x3,z[1][n],ut,dut); /* h*dut=rk2 */
        for(ini=0;ini<=nini0;ini++) for(icomp=0;icomp<=ncomp;icomp++)
            ut[ini][icomp]=u[ini][icomp][n]+hh*dut[ini][icomp];
        derivs(x1,x2,x3,z[1][n],ut,dum); /* h*dum=rk3 */
        for(ini=0;ini<=nini0;ini++) for(icomp=0;icomp<=ncomp;icomp++){
            ut[ini][icomp]=u[ini][icomp][n]+h*dum[ini][icomp];
            dum[ini][icomp]+=dut[ini][icomp]; /* h*dum=rk2+rk3 */
        }
        derivs(x1,x2,x3,z[0][n+1],ut,dut); /* h*dut=rk4 */
        for(ini=0;ini<=nini0;ini++) for(icomp=0;icomp<=ncomp;icomp++)
            u[ini][icomp][n+1]=u[ini][icomp][n]
                +h6*(du[ini][icomp]+dut[ini][icomp]+2.0*dum[ini][icomp]);
        /* 重みをつけて足す */
    }

    /* Runge-Kutta 法で解を求める (s=2 から) */
    h=-h; hh=-hh; h6=-h6; /* h を負にすれば逆走する */

```

```
for(n=1;n<P/2;n++){
    /* n=1 から */
    for(ini=0;ini<=nini0;ini++) for(icom=0;icom<=ncomp;icom++)
        ut[ini][icom]=u[ini+nini2][icom][n];
    derivs(x1,x2,x3,z[0][P-n],ut,du); /* h*du=rk1 */
    for(ini=0;ini<=nini0;ini++) for(icom=0;icom<=ncomp;icom++)
        ut[ini][icom]+=hh*du[ini][icom];
    derivs(x1,x2,x3,z[1][P-n-1],ut,dut); /* h*dut=rk2 */
    for(ini=0;ini<=nini0;ini++) for(icom=0;icom<=ncomp;icom++)
        ut[ini][icom]=u[ini+nini2][icom][n]+hh*dut[ini][icom];
    derivs(x1,x2,x3,z[1][P-n-1],ut,dum); /* h*dum=rk3 */
    for(ini=0;ini<=nini0;ini++) for(icom=0;icom<=ncomp;icom++){
        ut[ini][icom]=u[ini+nini2][icom][n]+h*dum[ini][icom];
        dum[ini][icom]+=dut[ini][icom]; /* h*dum=rk2+rk3 */
    }
    derivs(x1,x2,x3,z[0][P-n-1],ut,dut); /* h*dut=rk4 */
    for(ini=0;ini<=nini0;ini++) for(icom=0;icom<=ncomp;icom++)
        u[ini+nini2][icom][n+1]=u[ini+nini2][icom][n]
            +h6*(du[ini][icom]+dut[ini][icom]+2.0*dum[ini][icom]);
    /* 重みをつけて足す */
}
}
```


B.5 初期条件

```

void initialize(double x1,double x2,double x3,double s,Complex **para,
    Complex ***u)
{
    int ini,icomp;
    double sqrt3=sqrt(3.0);
    Complex I=Complex(0.0,1.0), /* 虚数単位*/
        ir3 =Complex(sqrt3, 1.0),
        ir3c=Complex(sqrt3, -1.0),
        mir3 =Complex( 1.0,-sqrt3);

    /* n=0 */
    for(icomp=0;icomp<=5;icomp++) for(ini=0;ini<=7;ini++)
        u[ini][icomp][0]=0.0; /* 一番端は0.0 */

    /* n=1(s=0からの) */
    for(ini=0;ini<=3;ini++){
        u[ini][0][1]=0.5*s*(
            s*(-para[ini][2]*Complex(x1,-2.0*x2)
                +para[ini][1]*Complex(x2,x1))
            +para[ini][3]*(-2.0+s*x3)
            -2.0*I*para[ini][0]*(-1.0+s*x3));
        u[ini][1][1]=0.5*s*(
            s*(para[ini][3]*Complex(x1,2.0*x2)
                +para[ini][0]*Complex(x2,-x1))
            -2.0*I*para[ini][1]*(1.0+s*x3)
            +para[ini][2]*(2.0+s*x3));
        u[ini][2][1]=s*(0.5*I*s*(
            para[ini][2]*x1
            +para[ini][1]*Complex(x2,x1)
            +(2.0*I*para[ini][0]-para[ini][3])*x3)
            +para[ini][0]);
        u[ini][3][1]=s*(0.5*s*(
            -para[ini][0]*Complex(x1,x2)
            +I*(para[ini][3]*x1+para[ini][2]*x3))
            +para[ini][1]*(1.0+s*x3));
        u[ini][4][1]=-0.5*s*(
            s*(I*para[ini][0]*Complex(x1,x2)
                +para[ini][3]*Complex(x1,-2.0*x2))
            +para[ini][2]*(-2.0+s*x3));
    }
}

```

```
    u[ini][5][1]=0.5*s*(
        s*(para[ini][1]*Complex(-x2,-x1)
            -para[ini][2]*Complex(x1,2.0*x2))
        +para[ini][3]*(2.0+s*x3));
}

/* n=1(s=2からの) */
s=-s; /* (2.0-s)-2.0=-s */
for(ini=4;ini<=7;ini++){
    u[ini][0][1]=s*(-0.25*s*(
        ir3*para[ini][2]*Complex(x1,-x2)
        -I*ir3c*para[ini][3]*Complex(x1,-2.0*x2)
        +(2.0*para[ini][0]-ir3*para[ini][1])*x3)
        +para[ini][0]);
    u[ini][1][1]=0.25*s*(
        -s*(2.0*para[ini][0]*Complex(x1,2.0*x2)
            +I*ir3*para[ini][1]*x2)
        +2.0*ir3*para[ini][2]*(1.0+s*x3)
        -I*ir3c*para[ini][3]*(2.0+s*x3));
    u[ini][2][1]=s*(-0.25*s*(
        ir3*para[ini][3]*x1
        +2.0*para[ini][2]*Complex(x1,-x2)
        +(-ir3c*para[ini][0]+2.0*para[ini][1])*x3)
        +para[ini][1]);
    u[ini][3][1]=s*(-0.25*s*(
        ir3c*para[ini][0]*x1
        +para[ini][1]*Complex(4.0*x1,2.0*x2)
        +(-4.0*para[ini][2]+ir3*para[ini][3])*x3)
        +para[ini][2]);
    u[ini][4][1]=s*(0.25*s*(
        -ir3c*para[ini][1]*Complex(2.0*x1,-x2)
        +ir3*para[ini][0]*Complex(2.0*x2,x1)
        -2.0*para[ini][3]*x3)
        +para[ini][3]);
    u[ini][5][1]=0.25*s*(
        -s*(ir3c*para[ini][2]*Complex(x1,-x2)
            +2.0*para[ini][3]*Complex(x1,2.0*x2))
        +mir3*para[ini][0]*(2.0+s*x3)
        +ir3c*para[ini][1]*(2.0+s*x3));
}
}
```

B.6 導関数

```
void derivs(double x1,double x2,double x3,Complex z,
  Complex **ut,Complex **du)
{
  int ini;
  Complex I=Complex(0.0,1.0), /* 虚数単位 */
    zc=Complex(z.real,-z.imag), /* zの複素共役 */
    iz =I*z,
    izc=I*zc,
    xp=Complex(x1, x2),
    xm=Complex(x1,-x2);

  for(ini=0;ini<4;ini++){
    du[ini][0]=-x3*ut[ini][0]-xm*ut[ini][1]
      -iz *ut[ini][2]+ zc*ut[ini][5];
    du[ini][1]= x3*ut[ini][1]-xp*ut[ini][0]
      +iz *ut[ini][3]- zc*ut[ini][4];
    du[ini][2]=-x3*ut[ini][2]-xm*ut[ini][3]
      +izc*ut[ini][0]+iz *ut[ini][5];
    du[ini][3]= x3*ut[ini][3]-xp*ut[ini][2]
      -izc*ut[ini][1]+iz *ut[ini][4];
    du[ini][4]=-x3*ut[ini][4]-xm*ut[ini][5]
      - z *ut[ini][1]-izc*ut[ini][3];
    du[ini][5]= x3*ut[ini][5]-xp*ut[ini][4]
      + z *ut[ini][0]-izc*ut[ini][2];
  }
}
```

B.7 解を中央でつなげる

```

void gauss(Complex **u,int row,int col);

void get_v(int P,int nini,int ncomp,Complex ***u,Complex **u1,
           Complex **w,Complex **v1,Complex **v2)
{
    int ini,icomp,n,l;

    /* u の n=P/2(s=1) での値を u1 にコピーする*/
    for(ini=0;ini<=nini;ini++) for(icomp=0;icomp<=ncomp;icomp++)
        u1[icomp][ini]=u[ini][icomp][P/2];
    /* gauss で u1 の値は変更されるので gauss の後は元の u を使う*/

    /* u1 に Gauss の消去法を行う*/
    gauss(u1,ncomp+1,nini+1);

    /* 線型結合の定数を求める*/
    for(icomp=0;icomp<=ncomp;icomp++) for(l=0;l<=1;l++)
        w[l][icomp]=-u1[icomp][ncomp+1+l];
    w[0][ncomp+1]=1.0; w[0][ncomp+2]=0.0;
    w[1][ncomp+1]=0.0; w[1][ncomp+2]=1.0;
    /* (ncomp+1) × (nini+1) 行列の u1 の左は (ncomp+1) × (ncomp+1) の
    単位行列のハズだから, 残りの成分の列ベクトル × に -1 を掛けて
    下にそれぞれ, 0 と, 1 をつけた nini+2 成分の列ベクトル × が解空間の基底
    s=0, 2 からの解についてこれによる線型結合を取ればこれらは自動的に
    s=1 で一致する */

    /* v1, v2 に代入する*/
    for(icomp=0;icomp<=ncomp;icomp++){
        for(n=0;n<=P/2-1;n++){
            ini=0;
            v1[icomp][n]=w[0][ini]*u[ini][icomp][n];
            v2[icomp][n]=w[1][ini]*u[ini][icomp][n];
            for(ini=1;ini<=(nini+1)/2-1;ini++){
                v1[icomp][n]+=w[0][ini]*u[ini][icomp][n];
                v2[icomp][n]+=w[1][ini]*u[ini][icomp][n];
            }
            /* ini での線型結合 (w1u1+w2u2+w3u3+w4u4) */
        }
        for(n=P/2+1;n<=P;n++){

```

```

ini=(nini+1)/2;
v1[icomp][n]=-w[0][ini]*u[ini][icomp][P-n];
v2[icomp][n]=-w[1][ini]*u[ini][icomp][P-n];
for(ini=(nini+1)/2+1;ini<=nini;ini++){
    v1[icomp][n]+=-w[0][ini]*u[ini][icomp][P-n];
    v2[icomp][n]+=-w[1][ini]*u[ini][icomp][P-n];
}
/* ini での線型結合 (-w5u5-w6u6-w7u7-w8u8) */
/* s=1 では uw=0 より
    w1u1+w2u2+w3u3+w4u4=-w5u5-w6u6-w7u7-w8u8
    だから一致する*/
}
ini=0;
v1[icomp][P/2]=w[0][ini]*u[ini][icomp][P/2];
v2[icomp][P/2]=w[1][ini]*u[ini][icomp][P/2];
for(ini=1;ini<=(nini+1)/2-1;ini++){
    v1[icomp][P/2]+=w[0][ini]*u[ini][icomp][P/2];
    v2[icomp][P/2]+=w[1][ini]*u[ini][icomp][P/2];
}
}
/* s=1 での線型結合で s=0,2 それぞれの解を合わせれば s=1 で繋がる
解が得られる*/
}

```

B.8 同次方程式の解法

```
void swap(Complex *a,Complex *b);
double abs2(Complex z);

void gauss(Complex **a,int row,int col)
/* 2次元配列 a とその型 row,col を受け取って a にガウスの消去法を行う関数 */
{
    int idgr,idgc,irw,icl,piv;

    idgr=0; idgc=0;
    while((idgr<row)&&(idgc<col)){
        /* 枢軸選択 */
        piv=idgr;
        for(irw=idgr+1;irw<row;irw++)
            if(abs2(a[irw][idgc])>abs2(a[piv][idgc])) piv=irw;
        if(abs2(a[piv][idgc])==0){
            idgc++; continue;
        }
        if(piv-idgr) for(icl=idgc;icl<col;icl++)
            swap(&a[idgr][icl],&a[piv][icl]);

        /* 消去 */
        for(icl=idgc+1;icl<col;icl++)
            a[idgr][icl]=a[idgr][icl]/a[idgr][idgc];
        a[idgr][idgc]=1.0;
        for(irw=0;irw<idgr;irw++){
            for(icl=idgc+1;icl<col;icl++)
                a[irw][icl]=a[irw][icl]-a[idgr][icl]*a[irw][idgc];
            a[irw][idgc]=0.0;
        }
        for(irw=idgr+1;irw<row;irw++){
            for(icl=idgc+1;icl<col;icl++)
                a[irw][icl]=a[irw][icl]-a[idgr][icl]*a[irw][idgc];
            a[irw][idgc]=0.0;
        }
        idgr++; idgc++;
    }
}

void swap(Complex *a,Complex *b)
```

```
/* 複素数型のポインタ a,b を受け取って a と b の値を入れ替える関数 */  
{  
    Complex temp; temp=*a; *a=*b; *b=temp;  
}
```

```
double abs2(Complex z)  
/* 複素数 z を受け取ってその絶対値の 2 乗を返す関数 */  
{  
    return z.real*z.real+z.imag*z.imag;  
}
```

B.9 $\|\Phi\|^2$ を求める

```

void othnml2v(int N,int ncomp,double h,Complex **v1,Complex **v2,
    Complex *v1v2,double *vv);
Complex iprdcvf(int ncomp,int N,double h,Complex **v1,Complex **v2,
    Complex *v1v2);
double nrm2cvf(int ncomp,int N,double h,Complex **v,double *vv);

void get_phiabs2(int P,double h,int nini,int ncomp,Complex **v1,
    Complex **v2,Complex *v1v2,double *vv,Complex **sv,Complex **phi,
    double *phiabs2)
{
    int icomp,n; double sm1; Complex I=Complex(0.0,1.0);
    /* I: 虚数単位*/

    /* v1 と v2 の正規直交化*/
    othnml2v(P,ncomp,h,v1,v2,v1v2,vv);

    /* phi を求める (phi の (i,j) 成分は<i(s-1)vi,vj>) */
    /* 1行目*/
    for(n=0;n<=P;n++){
        sm1=h*(double)n-1.0; /* s=h*n */
        for(icmp=0;icmp<=ncomp;icmp++){
            sv[icmp][n]=sm1*v1[icmp][n];
        }
        phi[0][0]=I*iprdcvf(P,ncomp,h,sv,v1,v1v2);
        phi[0][1]=I*iprdcvf(P,ncomp,h,sv,v2,v1v2);
        /* 2行目*/
        for(n=0;n<=P;n++){
            sm1=h*(double)n-1.0;
            for(icmp=0;icmp<=ncomp;icmp++){
                sv[icmp][n]=sm1*v2[icmp][n];
            }
            phi[1][0]=I*iprdcvf(P,ncomp,h,sv,v1,v1v2);
            phi[1][1]=I*iprdcvf(P,ncomp,h,sv,v2,v1v2);

            /* phiabs を求める*/
            *phiabs2=-0.5*(phi[0][0]*phi[0][0]+phi[0][1]*phi[1][0]
                +phi[1][0]*phi[0][1]+phi[1][1]*phi[1][1]).real;
        }
    }
}

```


B.10 正規直交化

```
Complex iprdcvf(int N,int ncomp,double h,Complex **v1,Complex **v2,
    Complex *v1v2);
double nrm2cvf(int N,int ncomp,double h,Complex **v,double *vv);

void othnml2v(int N,int ncomp,double h,Complex **v1,Complex **v2,
    Complex *v1v2,double *vv)
{
    int icomp,n;
    Complex temp1=-iprdcvf(N,ncomp,h,v1,v2,v1v2)
        /nrm2cvf(N,ncomp,h,v1,vv),temp2;

    for(n=0;n<=N;n++) for(icmp=0;icmp<=ncomp;icmp++)
        v2[icmp][n]+=temp1*v1[icmp][n]; /* v1 と v2 の直交化*/

    temp1=sqrt(nrm2cvf(N,ncomp,h,v1,vv));
    temp2=sqrt(nrm2cvf(N,ncomp,h,v2,vv));
    for(n=0;n<=N;n++) for(icmp=0;icmp<=ncomp;icmp++)
    {
        v1[icmp][n]=v1[icmp][n]/temp1; /* v1 の正規化*/
        v2[icmp][n]=v2[icmp][n]/temp2; /* v2 の正規化*/
    }
}
```

B.11 ノルム

```
double simp(int N,double h,double *f);

double nrm2cvf(int N,int ncomp,double h,Complex **v,double *vv)
{
    int icomp,n;

    for(n=0;n<=N;n++){
        vv[n]=v[0][n].real*v[0][n].real+v[0][n].imag*v[0][n].imag;
        for(icomp=1;icomp<=ncomp;icomp++)
            vv[n]+=v[icomp][n].real*v[icomp][n].real
                +v[icomp][n].imag*v[icomp][n].imag;
    }

    return simp(N,h,vv);
}
```

B.12 ユニタリー内積

```
Complex simpc(int N,double h,Complex *f);

Complex iprdcvf(int N,int ncomp,double h,Complex **v1,Complex **v2,
    Complex *v1v2)
{
    int icomp,n;

    for(n=0;n<=N;n++){
        v1v2[n]=Complex(v1[0][n].real,-v1[0][n].imag)*v2[0][n];
        for(icomp=1;icomp<=ncomp;icomp++)
            v1v2[n]+=Complex(v1[icomp][n].real,-v1[icomp][n].imag)
                *v2[icomp][n];
    }

    return simpc(N,h,v1v2);
}
```

B.13 Simpson の公式

```
double simp(int N,double h,double *f)
/* 区間数 N , 刻み幅 h , 格子点上で定義された関数値 f [n] を受け取って
Simpson の公式による積分値を返す関数 */
{
    int n; double s=0.0;

    for(n=1;n<=N-1;n+=2) s+=f [n]; /* 4/3 の分 */
    s+=s;
    for(n=2;n<=N-2;n+=2) s+=f [n]; /* 2/3 の分 */
    return (s+s+f [0]+f [N])*h*0.3333333333333333; /* 1/3 の分 */
}
```

```
Complex simpc(int N,double h,Complex *f)
/* simp の複素関数バージョン */
{
    int n; Complex s=0.0;

    for(n=1;n<=N-1;n+=2) s+=f [n]; /* 4/3 の分*/
    s+=s;
    for(n=2;n<=N-2;n+=2) s+=f [n]; /* 2/3 の分*/
    return (s+s+f [0]+f [N])*h*0.3333333333333333; /* 1/3 の分*/
}
```

B.14 ラプラシアン

```
void Lap3DCar(int N,double h,double ***u,double ***d2u)
/* 区間数 N , 刻み幅 h , 3次元格子点上で定義された関数値 u[ix,iy,iz] ,
導関数を入れる配列 d2u[ix,iy,iz] を受け取って2階の中央差分を用いて
計算したラプラシアンを d2u に入れる関数 */
{
    int ix,iy,iz; double hh=1.0/(h*h);

    for(ix=1;ix<=N-1;ix++) for(iy=1;iy<=N-1;iy++)
    for(iz=1;iz<=N-1;iz++) d2u[ix-1][iy-1][iz-1]
        =(u[ix-1][iy][iz]+u[ix][iy-1][iz]+u[ix][iy][iz-1]
        +u[ix+1][iy][iz]+u[ix][iy+1][iz]+u[ix][iy][iz+1]
        -6.0*u[ix][iy][iz])*hh;
}
```


参考文献

- [1] R. Rajaraman, Solitons and Instantons, North-Holland personal library.
- [2] N. Manton and P. Sutcliffe, Topological Solitons, Cambridge Monographs on mathematical physics.
- [3] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. S. Schwartz, Yu. S. Tyupkin, Pseudoparticle solutions of the Yang-Mills equations, Phys. Lett. 59 B (1975) 85.
- [4] T. T. Wu, C. N. Yang, Concept of nonintegrable phase factors and global formulation of gauge fields, Phys. Rev. D12 12 (1975) 3845.
- [5] J. J. Giambiagi, K. D. Rothe, Regular N-instanton fields and singular gauge transformations, Nucl. Phys. B129 (1977) 111.
- [6] E. Witten, Some exact multipseudoparticle solutions of classical Yang-Mills theory, Phys. Rev. Lett. 38 (1977) 121.
- [7] E. クライツィグ 著 丹生慶四郎 訳 技術者のための高等数学 複素関数論 培風館.
- [8] M. F. Atiyah, N. J. Hitchin, V. G. Drinfeld, Yu. I. Manin, Construction of instantons, Phys. Lett. A65 3 (1978) 185.
- [9] 浜中 真志 ADHM/Nahm 構成法とその双対性.
- [10] B. J. Harrington and H. K. Shepard, Periodic Euclidean solutions and the finite-temperature Yang-Mills gas, Phys. Rev. D17 8 (1978) 2122.
- [11] 森口繁一・宇田川 久・一松信 著 岩波 数学公式 級数・フーリエ解析 岩波書店.
- [12] R. S. Ward, Symmetric calorons, Phys. Lett. B 582 (2004) 203.
- [13] N. J. Hitchin, On the Construction of Monopoles, Comm. Math. Phys. 89 (1983) 145.
- [14] W. Nahm, Self-Dual Monopoles and Calorons, in : Springer Lecture Notes in Phys., vol. 201, 1984, pp. 189-200.
- [15] M. K. Prasad and C. M. Sommerfield, Exact classical solution for the 't Hooft monopole and the Julia-Zee dyon, Phys. Rev. Lett. 35, 760 (1975).

- [16] S. A. Brown, H. Panagopoulos and M. K. Prasad, Two separated SU(2) Yang-Mills-Higgs monopoles in the Atiyah-Drinfeld-Hitchin-Manin-Nahm construction, Phys. Rev. D26 854 (1982).
- [17] Atsushi Nakamura and Jun Sakaguchi, Multicalorons revisited, J. Math. Phys. **51**, 043503 (2010).
- [18] 吉川 圭二 理工系の基礎数学9 群と表現 岩波書店.
- [19] N. J. Hitchin, N. S. Manton and M. K. Murray, Symmetric monopoles, Nonlinearity 8 661 (1995).
- [20] Klein F 1913 Lectures on the icosahedron (London : Kegan Paul)
(F. クライン 著 関口 二郎 訳 シュプリンガー数学クラシックス 正 20 面体と5次方程式 シュプリンガー・フェアラーク東京) .
- [21] 戸田盛和 日評数学選書 楕円関数入門 日本評論社.
- [22] C. J. Houghton and P. M. Sutcliffe, Tetrahedral and Cubic Monopoles, Comm. Math. Phys. 180 (1996) 343.
- [23] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery 丹慶勝市・奥村晴彦・佐藤俊朗・小林誠 訳 Numerical Recipes in C [日本語版] 技術評論社.
- [24] 村上 正康・佐藤 恒雄・野澤 宗平・稲葉 尚志 共著 教養の線形代数 培風館.