

2013 年度修士学位論文

**超幾何を用いた摂動的超弦理論の定式化と  
不定性の固定**

A Formulation of the Superstring  
Perturbation Theory with Supergeometry and  
Fixing of Its Ambiguities

大森 寛太郎

東京大学理学系研究科物理学専攻



## 概要

本修士論文では、超幾何 (supergeometry) を用いた共形ゲージにおける RNS 超弦理論の摂動的散乱振幅の定式化を行う。超幾何を用いた定式化は新しいものではないが、近年超幾何の言葉が散乱振幅の不定性の固定及び系統的な解析に有用である事が指摘されており、このことのレビューが本論文の主な目的である。超幾何、とくに超リーマン面とその超モジュライ空間を用いて散乱振幅を書き下し、散乱振幅の定義に関する不定性やその他の困難が超モジュライ空間の境界の構造を起源としている事を指摘し、それに基づいて適切な処置を述べる。また、同様に超モジュライ空間の境界についての考察から得られる BRST アノマリーについての関係式および Ward 高橋恒等式についても触れる。

# Contents

1. イントロダクション	6
2. 超多様体論	11
2.1. 超多様体	11
2.2. 超多様体上の積分	12
2.3. 複素超多様体の実構造	14
3. $\mathcal{N} = 1$ 超重力、超リーマン面、超モジュライ空間	16
3.1. リーマン面とモジュライ空間	16
3.2. 2次元 $\mathcal{N} = 1$ 超重力と超リーマン面	18
3.3. 超モジュライ空間	19
3.4. 点付き超リーマン面とそのモジュライ空間	20
3.4.1. NS 点付き超リーマン面	20
3.4.2. R 点付き超リーマン面	21
3.4.3. 点付き超リーマン面の超モジュライ空間	22
3.5. ヘテロティック世界面	24
3.6. Type II 世界面	25
4. 散乱振幅	27
4.1. 超重力との結合と真空振幅	27
4.2. 頂点入り散乱振幅	29
4.3. 弦理論の伝搬関数	32
4.4. 超リーマン面の退化と SCFT の相関関数の発散	35
4.5. 相関関数のカイラル因子化と GSO 射影	38
4.5.1. ボゾン弦理論のカイラル因子化	38
4.5.2. 超弦理論の NS 頂点演算子を含む相関関数のカイラル因子化 (偶スピン構造)	41
4.5.3. GSO 射影の選択	44
4.6. ピクチャ変更演算子形式	45
4.7. 散乱振幅の因子化と超モジュライ空間の non-projectedness	47
5. 赤外正則化	51
5.1. 特殊型退化と超モジュライ空間の cs 構造	51
5.2. アノマラス $U(1)$ 模型における超モジュライの不定性	54
5.3. 有限くりこみ	57
5.4. BRST 対称性と BRST アノマリー	60
5.5. 時空の超対称性	64
5.5.1. Ward 高橋恒等式	64
5.5.2. 超対称代数	66

5.6. 超対称性を仮定したタッドポール消滅の証明 . . . . .	67
<b>6. Feynman <math>i\epsilon</math> 処方</b>	<b>69</b>
6.1. 一般型退化と発散 . . . . .	69
6.2. 一般型退化と Wick 逆回転 . . . . .	70
6.3. 閉弦理論での Feynman $i\epsilon$ 処方 . . . . .	74
<b>7. 結論と展望</b>	<b>75</b>
7.1. 本論文の簡単なまとめ . . . . .	75
7.2. 展望 . . . . .	75
<b>A. non-projected 複素超多様体上の積分の具体例</b>	<b>77</b>
<b>B. 一般の SCFT による超弦理論の構成</b>	<b>80</b>
B.1. カイラル頂点演算子と共形場 . . . . .	80
B.2. トーラス振幅とモジュラー不変性 . . . . .	82
B.3. 高種数の共形ブロックと超弦理論 . . . . .	85

# 1. イントロダクション

近年の超弦理論の研究は、超弦理論の非摂動的な側面に着目したものが多く、一方で、摂動論についての研究は盛んであるとは言いがたい。しかしながら、摂動論は弦理論において重力を排除する事なしに最も厳密に議論できるべき土台であり、これの整備は非摂動的定式化及び非摂動的効果の研究にも洞察を与えると期待される。本修士論文では、超弦理論の摂動論をより厳密に議論できるよう、摂動論の定義の微妙な点を整理し、適切な処理をまとめたい。

共形ゲージにおける Ramond-Neveu-Schwarz (RNS) 超弦理論は [1] によって定式化された。時空平坦背景における RNS 超弦理論ではボソン弦理論の埋め込みを表す自由ボソン  $X$  の成す共形場理論 (CFT) に重み  $1/2$  の  $\psi$  CFT を加えて世界面の超対称性を持つ超共形場理論 (SCFT) を考える。この CFT は超場  $\mathcal{X} = X + \theta\psi$  を用いて表すこともできる。この  $\mathcal{X}$  SCFT は超カレント  $T_F = \psi_\mu \partial_z X^\mu$  を持つ。

物質場を超対称化したことに伴いゴーストも超対称化される。 $bc$  ゴースト系の超対称パートナーである  $\beta\gamma$  ゴースト系は bosonic なゴースト系であり、通常の fermionic な  $bc$  ゴースト系や Yang-Mills 理論のゴースト系とは取り扱いが異なる。 $\beta\gamma$  系のゴースト数を合わせるためにピクチャ変更演算子 (picture changing operator, PCO) と呼ばれる  $\beta\gamma$  系ゴースト数を持つ演算子  $Y(q) = \delta(\beta(q))T_F(q)$  を余計に挿入する必要がある。[1] では PCO の挿入は ad hoc な物に見えるが、[2] は PCO の挿入は世界面の gravitino 背景を考えることで自然に導くことができることを指摘し、世界面の超重力背景を考えることの重要性が明らかにされた。

RNS 超弦理論の世界面理論として使われる 2 次元超共形場理論 (SCFT) は自然に 2 次元の  $\mathcal{N} = (1, 0)$  又は  $\mathcal{N} = (1, 1)$  超重力理論と結合する。超対称性の型はヘテロティック理論を考えるか Type II 理論を考えるかによる。(本論文では基本的に向きづけられた閉弦理論のみを考える。) 超重力理論には重力の他に超対称パートナーである gravitino があり、これらはともに SCFT の背景として振る舞う。 $\beta\gamma$  系は超重力理論の局所的超対称性をゲージ固定するゴースト系である。

ボソン弦理論は共形非同値な重力背景のなす空間 (モジュライ空間) 上での積分を含んだ。RNS 超弦理論では同様に超共形非同値な超重力背景のなす空間 (超モジュライ空間) についての積分を含む。超モジュライは重力背景に対応する Grassmann 偶なモジュライと gravitino 背景に対応する Grassmann 奇なモジュライがある。PCO  $Y(q)$  の挿入は gravitino 背景をデルタ関数型にゲージ固定した上で奇モジュライについての積分を行うことで得られる。

[2] は [1] の定式化には問題点 (spurious singularity) がある事も指摘している。この論文以後、RNS 超弦理論のより正確な定義を巡って研究がなされた ([3,4] 等)。また、[5-7] 等では超重力背景つき 2 次元面の数学的定式化である超リーマン面の理論を使って RNS 超弦理論を表し、散乱振幅を計算することが試みられている。

超リーマン面は複素座標  $z$  の他に fermionic 座標  $\theta$  をもち、これらの局所座標  $(z|\theta)$  を持つパッチたちの貼り合わせによって定義される。座標  $(z|\theta)$  を持つパッチと  $(z'|\theta')$  を持

つパッチの貼り合わせにおいて、 $z$  と  $\theta$  は

$$z' = z + \eta\theta \quad (1.0.1)$$

のように混ざり合っただけ。混ざり合いの係数  $\eta$  が gravitino 背景に対応する。

超モジュライ空間も局所複素座標  $m_i$  の他に fermionic な座標  $\eta_\sigma$  をもつような一般化された多様体 (超多様体) として表される。 $m_i$  が計量背景、 $\eta_\sigma$  が gravitino 背景に対応する。

超幾何を用いた定式化では、gravitino 背景のゲージ固定はデルタ関数型にとらなくてよい。D'Hoker-Phong による 2 ループ振幅の一連の研究 ([6-9] 等) では PCO 形式ではなくリーマン面の周期行列の超アナログである超周期行列を用いて解析を行っている。

1990 年代半ばごろに非摂動的効果の研究が盛り上がり、超弦理論の摂動論の研究はあまりなされなかったが、近年、E.Witten らによる一連の論文 [10-13] によって RNS 超弦理論のより適切な定義が得られた。これらの論文も D'Hoker-Phong による一連の論文同様に RNS 超弦理論を超リーマン面、超幾何の言葉を積極的に使っている。特に [12] は (すでに [5] 等で指摘されていたことではあるが) RNS 超弦理論の高次振幅の記述には超幾何が必要不可欠であることを数学的に証明している。

これらの発展をうけて、本修士論文では RNS 超弦理論の超リーマン面、超幾何を用いた定式化と、それに関連する諸事項をレビューする。本論文の主なテーマは

- 超幾何の言葉を用いた RNS 超弦理論の定式化 (4.2 節まで、4.5 節)
- 超リーマン面の退化と SCFT の相関関数の発散 (4.3 節、4.4 節)
- PCO 形式と超モジュライ空間の non-projectedness (4.6 節、4.7 節)
- 赤外正則化の不定性および赤外正則化を考慮する事により導かれる事 (5 章)
- Feynman  $i\epsilon$  処方 (6 章)

である。

以下、これらを短く紹介する。

#### • 超幾何の言葉を用いた RNS 超弦理論の定式化

Witten による定式化が [5] 等の以前の定式化と大きく違うのは、複素超多様体の実構造 (本文では cs 構造と呼ぶ) の取り扱いを丁寧に行っている点である。通常の複素多様体においては対応する実多様体は明確であるが、複素超多様体における類似した概念 (本論文では cs 構造と呼ぶ) は一意ではない。cs 構造の取扱いは赤外正則化の不定性の除去に重要であるため、本論文でも 2 章で複素超多様体とその cs 構造についての解説する。

3 章では超リーマン面とその上の頂点、および超モジュライ空間について定義し基本的な性質を述べる。また超弦理論の世界面作用に付いても簡単に述べる。

4 章における超幾何をもちいた定式化の説明では、gravitino 背景のゲージ固定の仕方は指定せずに一般性を持たせて議論する。3 ループ以上の高次振幅を一般に実際に計算する手法は未発見のため、なるべく一般性を持たせた定式化をしておくことが望ましい。

#### • (超) リーマン面の退化と (S)CFT の相関関数の発散

(Deligne-Munford コンパクト化された) モジュライ空間には図 1.1 のように潰れた部分を持つリーマン面に対応する点がある。このような点の集まりの事を本論文では退化因子 (コンパクト化因子) と呼ぶ。

退化因子の上ではリーマン面の特異性からモジュライ積分の被積分関数、つまり (S)CFT の相関関数が発散する。この発散は場の理論における伝搬関数  $\frac{1}{k^2+m^2}$  の極による発散に対応する。

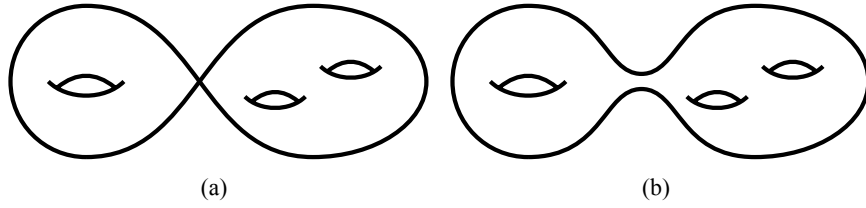


図 1.1.: (a) 潰れた点を持つ (退化した) リーマン面, (b) ほぼ退化したリーマン面

伝搬関数の極による発散は質量  $m$  が 0 かどうかで対処が異なる。  $m = 0$  の場合、この発散は赤外発散であり、赤外のカットオフを導入する必要がある。このような発散がおこる退化因子を特殊型退化因子と呼ぶ事にする。  $m \neq 0$  の場合は極の避け方を Feynman  $i\epsilon$  処方によって指定しなければならない。このような発散がおこる退化因子を一般型退化因子と呼ぶ事にする。

●PCO 形式と超モジュライ空間の non-projectedness

超モジュライ空間の座標には Grassman 偶のもの  $m_i$  と奇のもの  $\eta_\sigma$  があると述べた。これらは大雑把にはそれぞれ計量背景と gravitino 背景に対応するが、それほど単純ではない。

超モジュライ空間は座標  $(m_i | \eta_\sigma)$  で表されるパッチを貼り合わせて定義される。貼り合わせ関数は

$$m'_1 = m_1 + \eta_1 \eta_2 \tag{1.0.2}$$

のように fermionic な座標の偶数次多項式と bosonic な座標を混ぜてもよい。このような貼り合わせは世界面の超対称変換が計量背景と gravitino 背景を混ぜ合わせることに起因する。このような貼り合わせがあると、超モジュライ空間上で大域的に計量背景と gravitino 背景を分けて取り扱う事ができない。

超多様体  $M$  が (1.0.2) のような  $m$  と  $\eta$  を混ぜる貼り合わせを使わずにパッチに分解できるとき、  $M$  は projected であると呼ぶ。複素超多様体は一般には projected ではなく、 [12] は高種数の超モジュライ空間は一般に projected でないことを示した。

PCO 形式は計量背景と gravitino 背景を別々に取り扱える事を暗に仮定しているため、一般には PCO 形式を超モジュライ上大域的に使うことはできない事になる。ただし、考えられる散乱振幅によっては、この問題は回避されることがあることを共著者と [14] で示した。

現在存在する RNS 超弦の散乱振幅の計算手法は (超周期行列を使う方法も含めて) 超モジュライの projectedness を暗に仮定してしまっているため高種数の振幅の具体的な計算方法は ([14] にあるような特殊例を除いて) 未開拓である。

●赤外正則化の不定性および赤外正則化を考慮する事により導かれる事

零質量粒子の極に起因する赤外発散がモジュライ空間上の特殊型退化因子の上で起こるが、この発散の正則化は一意に定まらない。この不定性は [3,4] 等で議論されている物と同一であり、また、超モジュライ空間の cs 構造の不定性として捉えることができる。さらに、退化因子付近の実構造を指定する事によって (時空モジュライの有限りこみを除いて) 固定する事ができる [10]。

この cs 構造の固定はヘテロティック理論の場合には大雑把には以下のようにして行われる。退化しかけている超リーマン面には「縫い合わせパラメタ」  $q, \bar{q}$  が定義される。これらはそれぞれ正則側の SCFT と反正則側の CFT のモジュライに対応するパラメタである。  $q\bar{q}$  は退化しかけている部分の首の太さを表し、  $\bar{q} = 0$  が完全に対応している状態に対応する。これらは超モジュライの退化因子の周りの bosonic 座標になっている。



正則側の縫い合わせパラメータ  $q$  と反正則側の縫い合わせパラメータ  $\tilde{q}$  は  $q = \tilde{q} + \text{冪零項}$  のように関係づいている。ここで冪零項は  $\eta_1 \eta_2$  のように  $\eta$  たちの偶数次の項からなる。冪零項の形を指定する自然な方法は存在せず、このことが超モジュライの cs 構造の不定性と呼ばれる。退化因子の直上では  $\tilde{q} = 0$  であるが、 $q$  は冪零項の分だけ非零であってよく、超弦理論の散乱振幅は直上での  $q$  の値に依存してしまう。そこで、cs 構造の固定を直上で  $q = 0$  となる、という条件によって行う。これにより、[2,3] 等で問題とされていた不定性は固定される。

カラビヤウコンパクト化した  $SO(32)$  ヘテロティック超弦理論の振幅においてこの不定性は重要になり、超モジュライ空間の言葉を用いた不定性の固定により正しい結果を得る事ができる [11,15]。

上記の不定性の固定をしたあと、あるいはボソン弦理論においても、赤外正則化にはまだ不定性がのこる。この不定性は時空のモジュライ (零ポテンシャルスカラー場) の真空期待値に対する有限くりこみとして解釈できるため、理論自体の不定性を意味しない。

赤外正則化のカットオフに伴い、(超)モジュライ空間には境界ができ、モジュライ空間上の全微分の積分は境界項を出す。このため、BRST 対称性は自明ではなく、BRST 対称性に量子補正を加えなければならない可能性がある。また、BRST 対称性の議論と同様の議論から、時空の超対称性に関する Ward 高橋恒等式を導く事ができる。

#### • Feynman $i\epsilon$ 処方

on-shell ループ振幅を定義するためには、ループ積分において伝搬関数の極の避け方を指定しなければならない。点粒子の場の理論においては、ミンコフスキ符号の伝搬関数に Feynman の  $i\epsilon$  処方

$$\frac{-i}{k_i^2 + m_i^2} \rightarrow \frac{-i}{k_i^2 + m_i^2 - i\epsilon} \quad (1.0.3)$$

を行う事により簡便にこれを行う事ができる。共形ゲージの RNS 超弦理論では、散乱振幅の中で伝搬関数を分離する事ができないため、別の処方を取る必要がある。

共形ゲージの RNS 超弦理論では世界面は通常ユークリッド計量が入っているとして扱われる。これは、場の理論において、虚時間に対応した Schwinger パラメータ  $\mathfrak{s}_i$

$$\frac{1}{k_i^2 + m_i^2} = \int_0^\infty d\mathfrak{s}_i e^{-(k_i^2 + m_i^2)\mathfrak{s}_i} \quad (1.0.4)$$

を使う事と同等である。特に、退化因子付近では縫い合わせパラメータを  $q$  として  $\mathfrak{s} = -\log |q|$  は Schwinger パラメータとして振る舞う。

場の理論では虚時間 Schwinger パラメータ  $\mathfrak{s}_i$  を一斉に実時間 Schwinger パラメータ  $s_i = i\mathfrak{s}_i$  に Wick 逆回転する事ができる。一方、弦理論のモジュライパラメータすべてを Wick 逆回転してローレンツ計量の理論にする事はできない (リーマン面にローレンツ計量は入らない)。そこで、モジュライ空間の各退化因子付近で縫い合わせパラメータに対応する  $\mathfrak{s}$  のみを「虚数に曲げる」事によって Wick 逆回転を行う。この操作はモジュライ積分の積分経路を変更する事に対応する。変更された後の積分経路はノンコンパクトになってしまうため、収束因子として  $i\epsilon$  を導入する必要がある、以上の操作が場の理論における Feynman  $i\epsilon$  処方と同等であることを確認できる。 [13]。

#### • 本論文の主張のまとめ

結局、超弦理論の散乱振幅は

$$\mathcal{A} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\widetilde{\mathfrak{M}}_{cs}} \sum_{s, \bar{s}} N_{s, \bar{s}} \omega_{s, \bar{s}} e^{-\Phi \varepsilon}$$

$$\omega_{s, \bar{s}} = \alpha_s \wedge \tilde{\alpha}_{\bar{s}} \quad (1.0.5)$$

のようにかける。 $\alpha_s, \tilde{\alpha}_{\bar{s}}$  はそれぞれ正則側、反正則側の(超)共形ブロックであり、正則形式、反正則形式である。超モジュライ空間の non-projectedness より、このような因子化(カイラル因子化)を保ったまま奇モジュライを積分する事はできない。

$\mathfrak{M}_{cs}$  は前述した cs 構造の固定を行った超モジュライ空間、 $\widetilde{\mathfrak{M}}_{cs}$  はそれをさらに Feynman  $i\varepsilon$  処方のために変形した空間である。カイラル因子化はこの変形された  $\widetilde{\mathfrak{M}}_{cs}$  上の被積分関数を定めるためにも必要である。 $e^{-\Phi \varepsilon}$  は非コンパクトな空間  $\widetilde{\mathfrak{M}}_{cs}$  上の積分を収束させるための収束因子であり、収束パラメタ  $\varepsilon$  は (1.0.3) の  $\varepsilon$  とほぼ対応する。

(1.0.5) は(本文で詳述するいくつかの条件の下で)全次数で不定性や処理不能な発散を含まず、超弦理論についてのより厳密な理解の土台を提供すると信じていることができる。高次種数における実際の計算には(主に non-projectedness に起因する)困難が存在する。

● 本論文で扱わない事

本論文では開弦理論, 向き付け不可能理論は基本的にいくつかの例で挙げる以外は取り扱わない。詳しくは [10] の 9 章にある。また、扱う振幅は on-shell のみであり、取り扱う頂点演算子は(超)共形対称性を尊重する

$$c\delta(\gamma)\hat{c}V_{\text{mat}} \quad (1.0.6)$$

のような形の演算子(本論文では共形演算子と呼ぶ)に限る。さらに、5.1 節で述べるように有質量状態の散乱振幅は直接はとり扱えない。

本論文ではリーマン面の因子や直線束などの基本知識は仮定する。モジュライ空間については必要最低限のレビューを行う。また、(超)弦理論の摂動的計算については [16] 及び [17]12 章まで程度の知識を仮定する。

## 2. 超多様体論

この章では、超多様体の定義と重要な事項についてまとめる。特に、複素超多様体上の積分の定義が微妙さを持つ事を説明する。超多様体についてのより詳細な記述は、[18,19]にある。

### 2.1. 超多様体

$n$ 次元多様体  $X$  はアトラス  $\{U_\alpha \subset \mathbb{R}^n\}$ ,  $X = \bigcup_\alpha U_\alpha$  を持ち、各パッチの重なり  $U_\alpha \cap U_\beta$  に対して  $C^\infty$  な貼り合わせ関数  $f_{\beta\alpha} : U_\alpha \rightarrow U_\beta$  で貼り合わさるような空間であった。

超多様体はこの定義を超空間に単純に拡張したものである<sup>1</sup>。まず、 $p|q$ 次元ユークリッド空間  $\mathbb{R}^{p|q}$  を  $p$ 個の bosonic (grassmann even) な座標  $x_i$  と  $q$ 個の fermionic (grassmann odd) な座標  $\theta_\mu$  ( $\theta_\mu \theta_\nu = -\theta_\nu \theta_\mu$ ) を持つ空間  $\mathbb{R}^{p|q} := \{(x_1 \dots x_p | \theta_1 \dots \theta_q)\}$  として定義する。

$p|q$ 次元超多様体とはこの超ユークリッド空間  $\mathbb{R}^{p|q}$  の部分集合たち  $\{U_\alpha \subset \mathbb{R}^{p|q}\}$  を貼り合わせたものである。ただし、超ユークリッド空間や超多様体の部分集合と言った時は fermionic 方向にはバウンドされていないと約束する。c などの記号も同様の意味とする。

パッチ  $U$  の座標  $(x|\theta)$  とパッチ  $U'$  の座標  $(x'|\theta')$  は貼り合わせ関数

$$x'_i = f_i(x|\theta) \quad (2.1.1)$$

$$\theta'_\mu = \psi_\mu(x|\theta) \quad (2.1.2)$$

により貼り合わさる。ここで、 $f$  は bosonic な関数、 $\psi$  は fermionic な関数である。

「実な」超多様体には2種類ある。 $\theta$  で展開したときに、その定数項のみに対して実性を課した超多様体を cs 多様体<sup>2</sup>と呼ぶ。一方、 $f, \psi$  の全係数に対して実性を課したものを実超多様体と呼ぶ。

複素多様体の超アナログである複素超多様体の定義も同様である。各パッチを  $\mathbb{C}^{p|q}$  (定義は  $\mathbb{R}^{p|q}$  と同様である) の部分集合とし、貼り合わせ関数  $f, \psi$  が bosonic 座標に関して正則関数である (fermionic 座標  $\theta$  に関しては常に多項式なので、正則である) という条件を課せばよい。 $\mathbb{C}^{p|q}$  の座標  $(z|\theta)$  には「複素共役」に相当する概念はそのままでは定義されない。このことは後で重要になる。

超多様体  $X$  が与えられたとき、fermionic な座標をすべて無視して、bosonic な座標達の貼り合わせを  $f|_{\theta=0}$  で与えれば、通常が多様体  $X_{\text{red}}$  を得る事ができる。これを超多様体  $X$  の被約多様体と呼ぶ。cs 多様体, 実超多様体の被約多様体は実多様体、複素超多様体の被約多様体は複素多様体である。

超多様体  $S, \mathfrak{X}$  の間に射影  $\pi : \mathfrak{X} \rightarrow S$  があって、すべての  $s, s' \in S$  に対して

- すべての  $s \in S$  に対して  $X_s := \pi^{-1}(s)$  が超多様体

<sup>1</sup>数学的には、超多様体は非被約局所環付き空間として扱われることが多い [18]。この言葉では、超多様体は多様体の関数環を grassmann 数によって拡張した物として定義される。本論文では  $p|q$ 次元超多様体上の点と言った時は常に位相的点ではなく  $\mathbb{R}^{0|q}(\mathbb{C}^{0|q})$ -point の事であると約束し、 $\in$  等の記号を濫用する。

<sup>2</sup>cs は complex super の略であるが、複素超多様体 (complex supermanifold) とは別の概念である。

- すべての  $s, s'$  に対して  $X_{s,\text{red}} \simeq X_{s',\text{red}}$  (通常の  $C^\infty$  多様体としての同型)<sup>3</sup>

を満たす時、 $(S, \mathfrak{X}, \pi)$  を  $S$  上の超多様体の族と呼ぶ。また、ある  $s \in S$  の逆像  $X_s = \pi^{-1}(s)$  を  $S$  上の超多様体と呼ぶ。

$S$  のあるパッチを  $U$ 、その上の座標を  $s = (m_1, m_2 \dots | \eta_1, \eta_2 \dots)$  とすると、 $U$  上の超多様体  $X_s$  の貼り合わせ関数は

$$x'_i = f_i(x, m | \theta, \eta) \quad (2.1.3)$$

$$\theta'_\mu = \psi_\mu(x, m | \theta, \eta) \quad (2.1.4)$$

のように、 $U$  の座標に依存できる。 $f|_{\theta=\eta=0}$  を貼り合わせ関数と見る事で  $U_{\text{red}}$  上の多様体  $X_{s,\text{red}}$  を得る。

すべてのパッチ間のすべての bosonic な貼り合わせ関数  $f$  達が fermionic な座標  $\theta, \eta$  に依存しないとき、そのような ( $S$  上の) 超多様体 (およびそのような超多様体に同型な超多様体) を projected であると呼ぶ。超多様体  $M$  が projected であることは、射影

$$p : M \rightarrow M_{\text{red}} \quad (2.1.5)$$

が存在する事と等価である。

さらに、fermionic な貼り合わせ関数  $\psi$  が  $\theta$  について一次であるような projected 超多様体を split であると呼ぶ。多様体  $M$  上の実 (resp. 複素, 正則) ベクトルバンドル  $E$  のファイバー方向を fermionic であると思なしてできる (fermionic) ベクトル束を  $\Pi E$  とする。このようにして得られる超多様体は split 超多様体である。 $\Pi E$  には実 (resp. cs, 複素) 超多様体の構造が入る。 $\Pi E$  上の関数環は  $E$  の外積代数  $\Lambda^\bullet E = \bigoplus_{a=0}^{\text{rank} E} (\Pi E)^a$  と同型となる。逆に、split 超多様体はこの方法で得ることができる。このとき、 $\theta$  は  $\Pi E$  の (切断ではなく) 基底として変換するので、 $\psi_\mu$  は  $E^{-1}$  の変換則を定義している事に注意する。

さらに、すべての実超多様体、cs 多様体は split 超多様体と同型である [20]。このことは、 $C^\infty$  の意味では超多様体を調べる事は通常が多様体上のベクトルバンドルを調べる事と同じである事を示している。一方で、複素超多様体は (正則の意味では) split であるとも projected であるとも限らない。つまり、(2.1.5) の射影は  $C^\infty$  の意味では常に存在するが、正則の意味では存在するとは限らない。よって、複素超多様体は複素多様体上の正則ベクトル束よりも複雑な構造を持ちうる。この事が [1] の方法に困難をもたらす事を 4.7 節で見る。

## 2.2. 超多様体上の積分

超多様体の関数の積分は、局所的には bosonic 方向には通常積分、fermionic 方向には Grassmann 積分として定義される。

つまり、 $U \subset \mathbb{R}^{p|q}$  上の<sup>4</sup>関数  $F(x_1 \dots x_p | \theta_1 \dots \theta_q)$  の  $U$  上の積分は

$$\int_U \mathcal{D}[x|\theta] F(x|\theta) := \int_{\mathbb{R}^{p|q}} \mathcal{D}[x|\theta] \Theta_U(x) F(x|\theta) := \int_{\mathbb{R}^p} \prod_i dx_i (\Theta_U(x) F(x|\theta))|_{\theta\text{-full}} \quad (2.2.1)$$

<sup>3</sup>後に述べる Deligne-Munford コンパクト化を考える際には  $X_{s,\text{red}}$  には特異点を許す。その場合は代数多様体の言葉で定義するのが正確であるが本論文では略す。

<sup>4</sup> $U_{\text{red}}$  は閉集合であるとする。

と定義される。ここで、 $\mathcal{D}[x|\theta]$  は積分測度を表す形式的な記号、 $\Theta_U$  は  $U$  上の単関数、 $|_{\theta\text{-full}}$  は  $\theta_1\theta_2\cdots\theta_q$  の係数を表す。単関数を使った表式は座標変換に対する不変性のために必要であることをすぐあとでみる。

$\mathcal{D}[x|\theta]$  の座標変換に対する振る舞いは、

$$\mathcal{D}[x|\theta] = \text{Ber}\left(\frac{\partial T}{\partial T'}\right) \mathcal{D}[x'|\theta'] \quad (2.2.2)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial T'}\right) := \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x'} & \frac{\partial x}{\partial \theta'} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x'} & \frac{\partial \theta}{\partial \theta'} \end{pmatrix} \quad (2.2.3)$$

$$\text{Ber}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} := \text{Det}(A - BD^{-1}C)\text{Det}D^{-1} \quad (2.2.4)$$

である。

次元が  $p|q = 1|2$  の時に変換  $x' = x + \theta_1\theta_2$ ,  $\theta'_\mu = \theta_\mu$  の下で (2.2.1) が不変であることは、

$$\int_{U_{\text{red}}} dx F(x|\theta_1, \theta_2)|_{\theta\text{-full}} = \int_U \mathcal{D}[x|\theta] F(x|\theta_1, \theta_2) \quad (2.2.5)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{1|2}} \mathcal{D}[x|\theta] \Theta_U(x) F(x|\theta_1, \theta_2) \quad (2.2.6)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{1|2}} \mathcal{D}[x'|\theta] \Theta_U(x' - \theta_1\theta_2) F(x' - \theta_1\theta_2|\theta_1, \theta_2) \quad (2.2.7)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{1|2}} \mathcal{D}[x'|\theta] (\Theta_U(x') + \partial_{x'} \Theta_U(x') \theta_1\theta_2) (F(x'|\theta) - \partial_{x'} F(x'|\theta) \theta_1\theta_2) \quad (2.2.8)$$

$$= \int_{U_{\text{red}}} dx F(x|\theta_1, \theta_2)|_{\theta\text{-full}} + \int_{\mathbb{R}} dx' \partial_{x'} (\Theta_U(x') F(x'|\theta = 0)) \quad (2.2.9)$$

$$= \int_{U_{\text{red}}} dx F(x|\theta_1, \theta_2)|_{\theta\text{-full}} \quad (2.2.10)$$

と確かめられる。 $U$  上の積分を単関数を掛けた  $\mathbb{R}^{1|2}$  上の積分として表すことは、この不変性のために必要である。

後の便宜のために、超多様体上の微分形式も定義しておく。 $p|q$  次元超多様体  $M$  上のパッチ  $U$  の座標を  $(x_i|\theta_\mu)$  とする。 $m \leq q$  に対して  $U$  上の関数  $f(x_i|\theta_\mu)$  を使って

$$\omega_U = f(x_i|\theta_\mu) dx_1 \wedge dx_2 \cdots \wedge dx_m \delta(d\theta_1) \delta(d\theta_2) \cdots \delta(d\theta_q) \quad (2.2.11)$$

の用にかかれるものを  $U$  上の  $m|q$  次微分形式と呼ぶ。ここで、fermionic 座標に対する微分形式  $d\theta_\mu$  は互いに可換とし、形式的  $\delta$  関数は定数  $a$  に対して  $\delta(ad\theta) = \frac{1}{a} \delta(d\theta)$  を満たす ( $\frac{1}{|a|} \delta(d\theta)$  ではない) ものとして定義する。 $\omega_U$  達が座標変換で貼り合うとき、これを  $M$  上の  $m|q$  次微分形式と呼ぶ。<sup>5</sup> 外微分を

$$d = \sum_i dx_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_\mu d\theta_\mu \frac{\partial}{\partial \theta_\mu} \quad (2.2.12)$$

<sup>5</sup> 同様に  $n \leq q$  に対して  $m|n$  次微分形式も定義されるが、少々こみいり本論文では用いないため省略する。詳細は [19] を参照の事。

と定義すると、これは  $m|q$  次微分形式を  $m+1|q$  次微分形式に移す。

$p|q$  次元実又は cs 超多様体  $M$  上の  $p|q$  次微分形式 (体積形式) は  $\bigwedge_i dx_i \prod_\mu \delta(d\theta_\mu)$  (2.2.4) を満たすため、

$$\mathcal{D}[x|\theta] = \bigwedge_i dx_i \prod_\mu \delta(d\theta_\mu) \quad (2.2.13)$$

と置き換える事ができる。これと (2.2.1) により体積形式の積分が定義される。超多様体  $M$  の余次元  $r|0$  の部分多様体上での  $p-r|q$  次微分形式の積分も同様に定義される。また、 $p|q$  次元複素超多様体上の  $p|q$  次微分形式で (2.2.4) のように変換するものも (これをそのまま積分する事はできないが)  $\mathcal{D}[x|\theta]$  と書く事がある。この場合の  $\mathcal{D}[x|\theta]$  の微分形式による書き換えは実又は cs 超多様体の場合と同じである。

### 2.3. 複素超多様体の実構造

複素超多様体上の積分を定義するには、まず複素超多様体を実超多様体または cs 超多様体とみなす事が必要である。複素超多様体の実構造は、複素多様体の実構造のように自然なものが存在しない。この実構造の不定性が、超弦理論の摂動的散乱振幅の定義にも影響する事を 5 章で見る。

通常複素多様体  $M$  には、自然に実  $C^\infty$  多様体の構造が入る。これは、 $\mathbb{C}^n$  は自然に  $\mathbb{R}^{2n}$  と微分同相であり、またその同相のもとで正則写像は  $C^\infty$  写像だからである。

複素超多様体に対しては同様の議論は当てはまらない。複素数  $z$  からは、自然に実数二つの組  $(\frac{1}{2}(z+\bar{z}), \frac{1}{2i}(z-\bar{z}))$  を作る事ができるが、 $\mathbb{C}^{p|q}$  の fermionic 座標  $\theta_\mu$  には複素共役という概念が存在しないので、同様の構成はできない。

複素超多様体への一般化のために、複素多様体  $M$  の実構造  $M_{\text{real}}$  のより婉曲的な構成を述べる。まず、複素多様体  $N$  に反正則な対合  $\tau \curvearrowright N$ ,  $\tau^2 = \text{id}$  があるとする。 $N$  の  $\tau$  不変な部分集合  $N^\tau$  と交わる十分小さいパッチ  $U$  で、 $\tau$  が  $U$  に複素共役で作用するようなものをとれる。 $U^\tau$  は  $U$  の複素座標がすべて実になる部分集合なので、 $U^\tau$  たちは実関数で貼り合い、この貼り合わせによって  $N^\tau$  に実多様体の構造がはいる。ここで、 $N = M \times \bar{M}$  とおく。 $M \times \bar{M}$  の座標を  $(z, \bar{z})$  とすると、これに  $\tau : (z, \bar{z}) \mapsto (\bar{z}, z)$  と作用する  $M \times \bar{M}$  上の反正則対合  $\tau$  が存在する。上の構成より、 $(M \times \bar{M})^\tau = M_{\text{diag}} \subset M \times \bar{M}$  には実多様体の構造が入り、これは複素多様体  $M$  から自然に定義される実多様体  $M_{\text{real}}$  と同型である。

この構成を、次元複素超多様体  $X$  の場合に一般化したい。まず、fermionic 座標には複素共役の概念がないため、複素超多様体  $X$  の複素共役  $\bar{X}$  も存在しない。よって、 $\bar{X}$  の代わりに、 $\tilde{X} = \bar{X}_{\text{red}}$  を用いる。

特に、 $\tilde{X}$  の bosonic 次元は  $X$  と同じであるが、fermionic 次元 0 である。 $Y := X \times \tilde{X}$  上に反正則対合は定義できないので、対角部分多様体  $X_{\text{diag}}$  は定義できない。しかし、 $Y_{\text{red}} \supset X_{\text{red,diag}}$  は存在するので、 $X$  の実構造  $X_{\text{cs}}$  は  $X_{\text{cs,red}} = X_{\text{red,diag}}$  を満たしてほしい。よって、 $X_{\text{cs}} \subset Y$  が  $X_{\text{cs,red}} = X_{\text{red,diag}}$  かつ  $\text{odddim} X_{\text{cs}} = \text{odddim} Y$  を満たす部分 cs 多様体<sup>6</sup> である時、これを  $X$  の実構造 (あるいは、cs 構造) と呼ぶ事にする。通常多様体とは違い、この cs 構造は ( $\tilde{X}$  を固定しても) 一意に定まらない。

超弦理論の文脈では、散乱振幅を超モジュライ上の積分として定義するためにこの構成の更なる拡張が必要である。 $X_{\text{red}}$  が複素多様体  $X_0$  の被覆多様体であるとする。このとき、反正則側として使う複素超多様体  $\tilde{X}$  は  $\tilde{X}_{\text{red}}$  が  $\bar{X}_0$  の被覆であるような任意の複素

<sup>6</sup>複素多様体への cs 多様体の写像、およびそれが埋め込みである事はパッチ毎に定義できるため well-defined である。

超多様体でよいとする。  $p : X_{\text{red}} \times \tilde{X}_{\text{red}} \rightarrow X_0 \times \bar{X}_0$  を左右それぞれの成分に対する射影、  $X_{\text{diag}} \subset X_0 \times \bar{X}_0$  を対角部分、  $X_1 := p^{-1}(X_{\text{diag}})$  とする。  $X_1$  はまた  $X_0$  の被覆となる。  $X_{\text{red}}$  が  $a$  重被覆、  $\tilde{X}_{\text{red}}$  が  $b$  重被覆のとき、  $X_1$  は  $X_0$  の  $ab$  重被覆となる。<sup>7</sup>

この設定で、前段落と同様に  $Y := X \times \tilde{X}$  内に  $X_{\text{cs,red}} = X_1$   $\text{odddim} X_{\text{cs}} = \text{odddim} Y$  となるような cs 多様体  $X_{\text{cs}}$  を取る。本論文では、この  $X_{\text{cs}}$  のことも ( $Y = X \times \tilde{X}$  内の  $X_0$  を base とする)  $X$  の cs 構造と呼ぶ事にする。

$X_{\text{cs}}$  と  $Y$  の関係を局所座標によって表す。  $Y$  の局所複素座標を  $(z_1 \dots, z_p, \tilde{z}_1 \dots, \tilde{z}_p | \theta_1 \dots, \theta_q, \tilde{\theta}_1 \dots, \tilde{\theta}_q)$  とする。このとき、  $X_{\text{cs}}$  の局所座標  $(t_1 \dots, t_q, u_1 \dots, u_q | \xi_1 \dots, \xi_q, \zeta_1 \dots, \zeta_q)$  ( $t, u$  は実) であって

$$\begin{aligned} z_i &= t_i + iu_i + (\text{nilpot.}), & \tilde{z}_i &= t_i - iu_i + (\text{nilpot.}) \\ \theta_\mu &= \xi_\mu, & \tilde{\theta}_\nu &= \zeta_\nu \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

を満たすものをとれる。ここで、(nilpot.) は  $\theta_1 \theta_2$  などの冪零な Grassmann 偶な項を表している ( $z_i$  の冪零項と  $\tilde{z}_i$  の冪零項は勝手な異なった形を取ってよい)。この冪零項を自然に指定する方法はなく、この不定性が前述の cs 構造の不定性を表している。

$X_{\text{cs}}$  上の積分測度  $\mathcal{D}[t, u | \theta, \tilde{\theta}]$  は  $X, \tilde{X}$  上の微分形式  $\mathcal{D}[z | \theta], \mathcal{D}[\tilde{z} | \tilde{\theta}]$  を使って

$$\mathcal{D}[t, u | \theta, \tilde{\theta}] = -i (\mathcal{D}[z | \theta] \wedge \mathcal{D}[\tilde{z} | \tilde{\theta}]) \Big|_{X_{\text{cs}}} \quad (2.3.2)$$

とあらわせるため、しばしば  $\mathcal{D}[t, u | \theta, \tilde{\theta}]$  のことを  $\mathcal{D}[z, \tilde{z} | \theta, \tilde{\theta}]$  と書く。

しかし、この  $X_{\text{cs}}$  の不定性は ( $\tilde{X}$  と  $X_0$  が固定されている限り)  $X_{\text{cs}}$  上の積分の値には影響しない。つまり、二つの cs 構造  $X_{\text{cs}}$  と  $X'_{\text{cs}}$  と  $Y$  上の ( $X_{\text{cs}}$  付近で定義された)  $2p|q + \tilde{q}$  次微分形式  $\omega$  が与えられたときに、

$$\int_{X_{\text{cs}}} \omega|_{X_{\text{cs}}} = \int_{X'_{\text{cs}}} \omega|_{X'_{\text{cs}}} \quad (2.3.3)$$

が成り立つ。

$\omega$  が発散を持つ (が広義積分可能である) 時は、この限りではない。  $\omega$  が  $\mathcal{D} \subset Y$  上で発散を持つとすると、  $\mathcal{D} \cap X_{\text{cs}}$  付近での cs 構造が積分値に影響をする。このことによる不定性が超弦理論の RNS 形式の散乱振幅に不定性をもたらす事を 5.1 節で見る。

<sup>7</sup>  $X_{\text{red}}, \tilde{X}_{\text{red}}$  の  $X_0$  への被覆に関する被覆変換群が共通な部分群を持っていると、  $X_1$  は同型な連結成分を複数持つ事になる。幾何学的にはこれらの連結成分のうち一つを取り出すのが綺麗であるが、記述が煩雑になるので本論文ではここでの定義に従う。

### 3. $\mathcal{N} = 1$ 超重力、超リーマン面、超モジュライ空間

超重力背景を伴った2次元曲面のことを超リーマン面と呼ぶ [21]。超重力背景の超共形同値類の空間を超モジュライ空間と呼び、これは複素超多様体となる。また、超リーマン面は超モジュライ空間上の超多様体として捉える事ができる。

#### 3.1. リーマン面とモジュライ空間

この節では通常のリーマン面およびそのモジュライ空間の簡単な説明と、ノーテーションの確認を行う。

複素構造付きのコンパクト2次元曲面をリーマン面と呼ぶ。本論文では主に閉リーマン面を扱う。リーマン面は図3.1のようにハンドルの数(種数)で分類される。

リーマン面の隣接するパッチ  $U_\alpha, U_\beta$  の複素座標を  $z_\alpha, z_\beta$  とすると、それらは正則関数で貼り合う:

$$z_\alpha = f_{\alpha\beta}(z_\beta). \quad (3.1.1)$$

リーマン面  $X$  の正則接ベクトル束を  $TX$  とかく。 $L^2 \simeq TX$  を満たす直線束  $L$  を一つ選ぶ事をスピン構造と呼び、選ばれた束をスピン束と呼び  $TX^{1/2}$  とかく。組  $(X, TX^{1/2})$  のことをスピン構造付きリーマン面と呼ぶ。

フェルミオン化されたスピン束の切断  $\psi \in \Gamma(X, \Pi TX^{1/2})$  はリーマン面上の右巻きマヨラナフェルミオンである。<sup>1</sup>種数  $g$  のリーマン面には非自明な1-サイクルが  $2g$  個あり、それぞれのサイクルを回るとフェルミオンは  $(-1)$  倍されるかされないかのどちらかの可能性があるため、種数  $g$  のリーマン面のスピン構造は  $2^{2g}$  個ある。さらに、スピン構造は  $\dim H^0(X, TX^{-1/2})$  の偶奇で分類される。偶奇のスピン構造はそれぞれ  $\frac{1}{2}(2^{2g} \pm 2^g)$  個ある。偶スピン構造同士、奇スピン構造同士は微分同相写像で移り変わる。

リーマン面の各パッチ  $U_\alpha$  上に標準的な計量  $g_\alpha = \frac{1}{2}dz_\alpha \otimes d\bar{z}_\alpha$  を与えると、 $g_\alpha$  たちは(3.1.1)で関数倍をのぞいて貼り合う。よって、複素構造は計量の共形同値類の一つをさだめる。逆に、共形構造があるとそこから複素構造をさだめる事ができる。

リーマン面上の(複素構造と上の意味で両立する)計量を  $g$  から  $g + \delta g$  に微小変形したとする。Beltrami 微分を  $\mu = \frac{1}{2}g^{z\bar{a}}\delta g_{a\bar{z}} \in \Omega^{(0,1)}(X, TX)$  ( $\Omega^{(a,b)}$  は  $(a, b)$  形式) と定義する。ベクトル  $\xi$  をパラメタとする一般座標変換は Beltrami 微分を  $\bar{\partial}\xi^z$  だけかえるので、共形構造の微小変形は  $H^1(X, TX)$  の元で表される。

後の比較のために、計量の変形を貼り合わせ関数の変形に書き換える。パッチ  $U_\alpha$  をとり、元の計量  $g$  から定まる複素座標  $z_\alpha^0$  を入れる。パッチたちは(3.1.1)のように  $g$  から決まる複素構造についての正則関数  $f_{\alpha\beta}(z_\beta^0)$  で貼り合わさる。ここで、Beltrami 微分  $\mu$  で表

<sup>1</sup>本論文では正則な(超)リーマン面に関する量のことを右巻きと呼ぶ。



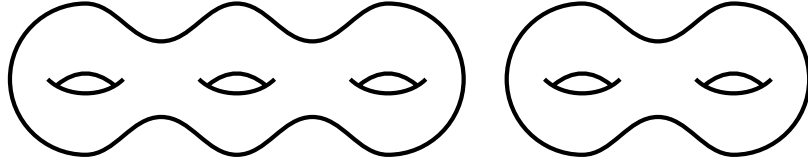


図 3.1.: リーマン面。種数により分類される。

される計量の変形を行ったとする。計量の変化分を貼り合わせ関数に押し付けるために、

$$\mu|_{U_\alpha} = \bar{\partial}\xi_\alpha(z_\alpha^0, \bar{z}_\alpha^0) \quad (3.1.2)$$

を  $U_\alpha$  上で局所的に解き、その解  $\xi_\alpha$  をつかって座標変換

$$z_\alpha^0 \mapsto z_\alpha \quad (3.1.3)$$

$$= e^{\xi_\alpha} z_\alpha^0 \quad (3.1.4)$$

を行う。  $\xi_\alpha, \xi_\beta$  を微小とすると、  $z_\alpha$  と  $z_\beta$  の貼り合わせは

$$z_\alpha = f_{\alpha\beta}(z_\beta) - \xi_\beta \partial f_{\alpha\beta}(z_\beta) + \xi_\alpha \quad (3.1.5)$$

となる。このように、複素構造の変形は、貼り合わせ関数を非正則関数でずらすことによって行われると見ることできる。

種数  $g$  のリーマン面の共形構造全体のなす空間を  $\mathcal{M}_g$  (しばしば種数は略して  $\mathcal{M}$  とする。) と書き、(リーマン面の)モジュライ空間と呼ぶ。  $\pi: \mathfrak{X} \rightarrow \mathcal{M}_g$  を種数  $g$  のリーマン面全体の族とし、  $s \in \mathcal{M}_g$  の逆像を  $X_s = \pi^{-1}(s)$  とさだめる。モジュライ空間には自然な複素多様体<sup>2</sup>の構造が入り、そのある 1 点における正則余接ベクトルの空間が  $T_s^* \mathcal{M}_g = H^1(X_s, TX_s)$  となる事が知られている。これはリーマン面の微小変形変形が  $H^1(X_s, TX_s)$  で表される事と整合している。

リーマン面であって、さらにリーマン面上の点を  $n$  個指定したもの  $(X, p_1, \dots, p_n \in X)$  を  $n$  点付きリーマン面と呼ぶ。  $n$  点付きリーマン面のモジュライ空間を  $\mathcal{M}_{g,n}$  と書く。  $\mathcal{M}_{g,n}$  は  $\mathcal{M}_g$  に  $X^n$  がファイバーした空間である。

$n$  点付き種数  $g$  のリーマン面の共形構造 + スピン構造の全体を  $\mathcal{M}_{n,g,\text{spin}}$  と書く。複素構造を固定するとスピン構造は  $2^{2g}$  個あるので、  $\mathcal{M}_{\text{spin}}$  は  $\mathcal{M}$  の  $2^{2g}$  重被覆である。  $\mathcal{M}_{\text{spin}}$  の連結成分は偶スピン構造からなる  $\mathcal{M}^+$  と奇スピン構造からなる  $\mathcal{M}^-$  の 2 つがある。偶スピン構造同士、奇スピン構造同士は微分同相写像で移り合うので、それぞれが連結成分を成す。

上で定義したモジュライ空間はどれも非コンパクトである。モジュライ空間上の積分を考えるためには、Deligne-Munford コンパクト化<sup>3</sup>  $\widehat{\mathcal{M}}$  を考えるのが便利である。これは、モジュライ空間に図 3.2 のような退化したリーマン面に対応する点を付け加える事に対応する。このような退化したリーマン面は、中間粒子が on-shell になるような領域に対応する (4.4 節参照)。

コンパクト化で付け加えられた部分  $\mathcal{D} = \widehat{\mathcal{M}} \setminus \mathcal{M}$  を退化因子と呼ぶ。退化因子は  $\widehat{\mathcal{M}}$  の複素余次元 1 の部分多様体になる。

図 3.2(a) のように 2 つの部分に分かれるような退化を分裂退化という。本論文では、分裂

<sup>2</sup>正確には、複素 orbifold の構造が入る。

<sup>3</sup>ここでのコンパクト化は数学用語であり、時空のコンパクト化とは関係ない。

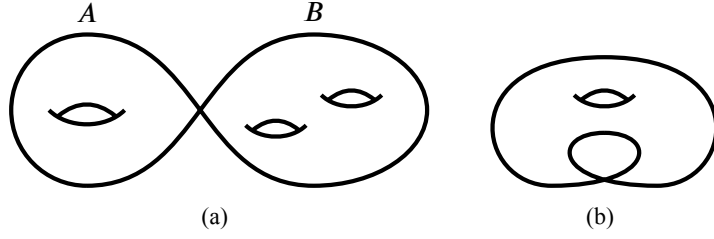


図 3.2.: 退化したリーマン面。(a) 分裂退化  $\mathcal{D}_{1,0,2,0}$ . (b) 非分裂退化  $\mathcal{D}_{\text{nonsep}}$ .

退化でわかれた 2 つの部分それぞれ A 部分、B 部分と呼ぶ事にする。退化点は A, B 両方に挿入された点のように振る舞うから、2 つの部分の (種数, 点の数) が  $(g_A, n_A), (g_B, n_B)$  になるような退化リーマン面たちの成す退化因子を  $\mathcal{D}_{g_A, n_A, g_B, n_B} \subset \mathcal{D}$  とすると、 $\mathcal{D}_{g_A, n_A, g_B, n_B} \simeq \widehat{\mathcal{M}}_{g_A, n_A+1} \times \widehat{\mathcal{M}}_{g_B, n_B+1}$  である。また、図 3.2(b) のように、2 つの部分に分かれない退化もあり、対応する退化因子を  $\mathcal{D}_{\text{nonsep}}$  とする。  $\mathcal{D}_{\text{nonsep}} \simeq \widehat{\mathcal{M}}_{g, n+2}$  である。<sup>4</sup>

### 3.2. 2次元 $\mathcal{N} = 1$ 超重力と超リーマン面

2次元超重力背景を持つ 2次元面を考える。ここで考える超重力は、 $\mathcal{N} = (1, 0)$  または  $(1, 1)$ 、つまり右巻きの gravitino を 1 つ含む物を考える。

スピン構造付きリーマン面  $X$  の上に、2d 右巻き gravitino 背景  $\chi = \chi_z^\theta \in \Omega^{(0,1)}(\Pi TX^{1/2})$  が与えられているとする。右巻き gravitino 背景は、超 Weyl 変換により  $\Omega^{(0,1)}(\Pi TX^{1/2})$  の元と思える。

超対称変換は、パラメータを  $\zeta \in \Gamma(X, \Pi TX^{1/2})$  として、

$$\chi \rightarrow \chi + \bar{\partial}\zeta \quad (3.2.1)$$

と作用するので、結局非同値な gravitino 背景は  $H^1(\Pi TX^{1/2})$  で表される。

超対称な理論を考えるには、超空間の定式化が便利である。そのため、計量の情報からリーマン面の複素構造を構成すると同様に  $X$  上の 0|1 次元スピノ束と gravitino 背景の組  $(X, \chi)$  から以下のように  $H^1(X, \Pi TX^{1/2})$  上の複素 1|1 次元超多様体を構成する。

$\Pi TX^{1/2}$  のパッチ  $U_\alpha$  上の座標  $(z_\alpha^0, \theta_\alpha^0)$  を取る。この座標は  $\Pi TX^{1/2}$  に自然に入る複素構造についての複素座標であるとする。この座標を split 座標と呼ぶ事にする。定義より、これらの座標は

$$z_\alpha^0 = f_{\alpha\beta}(z_\beta^0) \quad \theta_\alpha^0 := \sqrt{f'_{\alpha\beta}} \theta_\beta^0 \quad (3.2.2)$$

と変換する ( $\theta^0$  は  $TX^{1/2}$  の基底として、つまり  $TX^{-1/2}$  の切断として変換する)。

$(z_\alpha^0 | \theta_\alpha^0)$  には局所的超座標変換が、パラメータを  $\zeta_\alpha(z_\alpha^0, \bar{z}_\alpha^0)$  として

$$\begin{aligned} (z_\alpha^0 | \theta_\alpha^0) &\mapsto (z_\alpha | \theta_\alpha) \\ &= e^{\zeta_\alpha Q} (z_\alpha^0 | \theta_\alpha^0), \quad Q := \partial_\theta - \theta \partial_z \\ &= \left( z_\alpha^0 + \theta_\alpha^0 \zeta_\alpha \middle| \theta_\alpha^0 + \zeta_\alpha + \frac{1}{2} \theta_\alpha^0 \zeta_\alpha \zeta'_\alpha \right) \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

<sup>4</sup> Deligne-Munford コンパクト化では、 $\mathcal{D}_{0, n_A, g, n_B}$  は  $n_L \geq 3$  のみしか付け加えない。また、 $g = 1, n = 0$  の時は  $\mathcal{D}_{\text{nonsep}}$  も付け加えない。

と作用する。gravitino 背景の情報をパッチ間の貼り合わせに押し付けるために、各パッチ  $U_\alpha$  上で

$$\chi|_{U_\alpha} = \bar{\partial}\zeta_\alpha \quad (3.2.4)$$

を局所的に解き、これの解  $\zeta_\alpha(z_\alpha^0, \bar{z}_\alpha^0)$  をパラメータとして超座標変換 (3.2.3) を行う。

これにより、各パッチ上で超重力背景が平坦 ( $g = \delta, \chi = 0$ ) な座標  $(z_\alpha|\theta_\alpha)$  が得られる。このような座標を超共形座標と呼ぶ。超共形座標の貼り合わせは、(3.2.2),(3.2.3) から、

$$\begin{aligned} u_{\alpha\beta}(z_\beta) &= f_{\alpha\beta} - \sqrt{\partial_\beta f_{\alpha\beta}} \zeta_\beta \hat{\zeta}_\alpha \\ \zeta_{\alpha\beta}(z_\beta) &= \hat{\zeta}_\alpha - \sqrt{\partial_\beta f_{\alpha\beta}} \zeta_\beta - \frac{\sqrt{\partial_\beta f_{\alpha\beta}}}{2} \zeta_\beta \hat{\zeta}_\alpha \hat{\zeta}'_\alpha \\ \hat{\zeta}_\alpha(z_\beta) &= \zeta_\alpha(f_{\alpha\beta}(z_\beta)), \quad \hat{\zeta}'_\alpha(z_\beta) = \partial_\alpha \zeta_\alpha(f_{\alpha\beta}(z_\beta)) \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

を使って

$$\begin{aligned} z_\alpha &= u_{\alpha\beta} + \theta_\beta \zeta_{\alpha\beta} \sqrt{u'_{\alpha\beta}} \\ \theta_\alpha &= \zeta_{\alpha\beta} + \theta_\beta \sqrt{u'_{\alpha\beta} + \zeta_{\alpha\beta} \zeta'_{\alpha\beta}} \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

とかける。

(3.2.1) で移り合うような同値な gravitino 背景は  $\zeta$  をパラメータとした大域的超座標変換で移り合うから、結局 (3.2.6) は  $H^1(X, \Pi TX^{1/2})$  上の複素超多様体  $\Sigma$  を定める。これを ( $\mathcal{N} = 1$ ) 超リーマン面と呼ぶ。(各パッチで局所的な超座標変換を行ったために、 $\chi \neq 0$  に対応する超リーマン面は  $\Pi TX^{1/2}$  とは異なる超複素超多様体となることに注意する。) また、 $\chi = 0$  に対応するリーマン面  $\Pi TX^{1/2}$  は split であるので、split 超リーマン面と呼ぶ。split 超リーマン面は定義からスピン構造付きリーマン面と 1 対 1 対応する。

一般的な ( $H^1(X, \Pi TX^{1/2})$  上の) 1|1 次元複素超多様体の座標変換は (3.2.6) のように書くことはできない。よって、 $\mathcal{N} = 1$  超リーマン面は 1|1 次元超多様体のある特殊なクラスを成す。この座標変換は  $D_\theta = \partial_\theta + \theta \partial_z$  を関数倍をのぞいて不変にする。実際、

$$D_{\theta_\beta} = \left( \sqrt{u'_{\alpha\beta} + \zeta_{\alpha\beta} \zeta'_{\alpha\beta}} + \theta_\beta \zeta'_{\alpha\beta} \right) D_{\theta_\alpha} \quad (3.2.7)$$

となる。逆に、座標変換 (3.2.6) は  $D_\theta$  を関数をのぞいて不変にする変換であるとして特徴付けることができる [21]。

### 3.3. 超モジュライ空間

種数  $g$  の ( $\mathcal{N} = 1$ ) 超リーマン面の超共形同値類全体  $\mathfrak{M}_g$  を超モジュライ空間と呼ぶ。 $\mathfrak{M}$  の一点  $\Sigma_0$  を選ぶと、 $\Sigma_0$  の無限小変形は Beltrami 微分  $\mu \in H^1(\Sigma_{0,\text{red}}, T\Sigma_{0,\text{red}})$  に対応する bosonic な変形と gravitino 背景  $\chi \in H^1(\Sigma_{0,\text{red}}, \Pi T\Sigma_{0,\text{red}})$  を入れることに対応する fermionic な変形があるので、

$$T_{\Sigma_0}^* \mathfrak{M} = H^1(\Sigma_{0,\text{red}}, T\Sigma_{0,\text{red}}) \oplus H^1(\Sigma_{0,\text{red}}, \Pi T\Sigma_{0,\text{red}}) \quad (3.3.1)$$

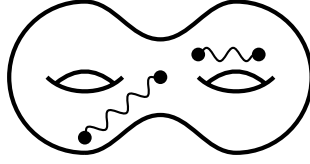


図 3.3.: 分岐付きリーマン面。分岐が閉じるためには、分岐点は偶数個でなければならない。

である。余接束が fermionic な成分をもつため、 $\mathfrak{M}$  は複素超多様体になる事がわかる。<sup>5</sup>

さらに、gravitino 背景を切った超リーマン面に対応する split 超リーマン面はスピン構造付きリーマン面と 1 対 1 対応するので、 $\mathfrak{M}_{\text{red}} = \mathcal{M}_{\text{spin}}$  となる。以上から、 $\mathfrak{M}$  は  $\mathcal{M}_{\text{spin}}$  上の  $H^1(\Sigma_{0,\text{red}}, \Pi T\Sigma_{0,\text{red}})$  をファイバーとする超多様体となる。 $\mathcal{M}_{\text{spin}}$  には連結成分  $\mathcal{M}_+, \mathcal{M}_-$  があるので、 $\mathfrak{M}$  にも連結成分  $\mathfrak{M}_+, \mathfrak{M}_-$  がある。

(3.3.1) から、 $\mathfrak{M}$  の次元は Riemann-Roch の定理等より計算できて [21]、 $g \geq 2$  のときには

$$\dim \mathfrak{M}_g - \dim \mathcal{G}_g = 3g - 3 | 2g - 2 \quad (3.3.2)$$

となる。 $\mathcal{G}_g$  は種数  $g$  超リーマン面の自己同型であり、 $\dim \mathcal{G}_0 = 2 | 1$ ,  $\dim \mathcal{G}_{1,\text{even}} = 1 | 0$ ,  $\mathcal{G}_{1,\text{odd}} = 1 | 1$ ,  $\dim \mathcal{G}_{g \geq 2} = 0$  である。種数 1 の超リーマン面の自己同型はスピン構造によって変わる。

超モジュライ空間は  $g \geq 5$  では (複素超多様体として) non-projected である [12]。このことは高種数での振幅計算に困難をもたらすことを 4.7 節で見る。

## 3.4. 点付き超リーマン面とそのモジュライ空間

超弦理論、あるいは超共形場理論の頂点演算子には NS 型と R 型の 2 種類がある。NS 型頂点演算子はそのまま超リーマン面上の点  $(z|\theta) \in \Sigma$  に対応する。一方 R 型頂点演算子は、フェルミオン場に対して分岐を導入するため、単純ではない。

### 3.4.1. NS 点付き超リーマン面

まず、ヘテロティック理論で NS 頂点演算子のみがある場合を考える。 $a$  番目の NS 頂点演算子  $V_a$  が世界面上の点  $(p_a, \bar{p}_a | \zeta_a) \in \Sigma_{\text{het}}$  に位置するとする。まず、split 超リーマン面を考え、 $V_a$  のみを含むパッチ  $U_a$  をとり、 $(p_a^0, \bar{p}_a^0 | \zeta_a^0) = (0, 0 | 0)$  となるような  $U_a$  の split 座標を取る。 $U_a$  上の超座標変換は  $V_a$  が  $U_a$  の原点にある事を変えないもののみを許す事にとすると、 $V_a$  の位置の情報を  $U_a$  とその周りのパッチとの貼り合わせに押し付ける事ができる。

超重力背景  $(g, 0)$  を  $(g + \delta g, \chi)$  にする事を考える。超座標変換が  $V_a$  の座標を変えないという条件は、 $\mu(p_a^0) = \chi(p_a^0) = 0$  と等価である。(  $\mu(z) = g^{z\bar{a}} \delta g_{a\bar{z}}$  は Beltrami 微分である。) そこで、twisted Beltrami 微分  $\hat{\mu}_a$  と twisted gravitino 背景  $\hat{\chi}_a$  を  $U_a$  上で

$$\hat{\mu}_a(z^0) = \mu_a(z^0)/z^0, \quad \hat{\chi}_a(z^0) = \chi_a(z^0)/z^0 \quad (3.4.1)$$

<sup>5</sup>通常のリーマン面のモジュライ空間  $\mathcal{M}$  の場合と同様、正確には複素超 orbifold である。特に、 $\mathcal{M}$  と共通した orbifold 構造に加えて、gravitino 背景を反転する大域変換  $\chi \rightarrow -\chi$  に付随する自己同型  $\eta \rightarrow -\eta$  によって割られている。

と定義すると、これは  $U_a$  上で正則である。さらに、すべての  $U_a$  上でこのように定義した  $\hat{\mu}_a, \hat{\chi}_a$  と頂点演算子を含まないパッチ上の  $\mu, \chi$  を貼り合わせてリーマン面上の大域的な場  $\hat{\mu}, \hat{\chi}$  を定義する。構成から、

$$\begin{aligned}\hat{\mu} &\in \Omega^{(0,1)}\left(\Sigma_{\text{red}}, T\Sigma_{\text{red}} \otimes \mathcal{O}\left(-\sum_a p_a\right)\right) \\ \hat{\chi} &\in \Omega^{(0,1)}\left(\Sigma_{\text{red}}, T\Sigma_{\text{red}}^{1/2} \otimes \mathcal{O}\left(-\sum_a p_a\right)\right)\end{aligned}\quad (3.4.2)$$

となる。 $\mathcal{O}\left(-\sum_a p_a\right)$  は Weil 因子  $-\sum_a p_a$  から決まるリーマン面上の直線束である。

### 3.4.2. R 点付き超リーマン面

R 型頂点演算子は、 $\Sigma$  の点  $(z|\theta)$  ではなく、 $0|1$  次元部分超多様体  $\{z = x\} \subset \Sigma$  に対応する。あるいは、被約リーマン面の点  $x \in \Sigma_{\text{red}}$  に対応すると言ってもよい。

R 型頂点演算子が  $x_1, x_2, \dots, x_{n_R} \in \Sigma_{\text{red}}$  にあるとき、図 3.3 のようにフェルミオン場  $\psi$  についての分岐が R 型頂点演算子たちの間に走る。

$x_i$  の周りの小さいパッチ  $U_i$  とその超共形座標  $(z_i, |\theta_i)$  を、 $z_i = 0$  が  $x_i$  を表すようにとる。さらに、R 型点を含まないパッチを  $U_\alpha$  とする。

fermionic な座標  $\theta_i$  はフェルミオンが分岐を持つ事に伴い分岐をもつ。座標が分岐を持つと取り扱いが難しいので、 $\hat{\theta}_i = \theta_i/\sqrt{z}$  とおき、分岐を吸収する。 $U_\alpha$  上ではそのまま  $\hat{\theta}_\alpha = \theta_\alpha$  とする。 $\hat{\theta}$  の座標変換に伴う変換性は、以下のように決まる。 $\theta_i$  の統計性のみを反転させたものを  $\theta_i^e, \hat{\theta}_i^e = \theta_i^e/\sqrt{z}$  とおく。 $\theta_i^{e2}$  は分岐を持たず、 $T\Sigma_{\text{red}}^{-1}$  の切断として振る舞う。よって、 $\hat{\theta}_i^{e2} = \theta_i^{e2}/z_i$  は  $\hat{\theta}_\alpha^{e2}$  と

$$\hat{\theta}_\alpha^{e2} = f'_{\alpha i} z_i \hat{\theta}_i^{e2} \quad (3.4.3)$$

と貼り合う。これは、 $\hat{\theta}_i^{e2} \in \Gamma(U_i \cup U_\alpha, T\Sigma_{\text{red}}^{-1} \otimes \mathcal{O}(x_i))$  を意味する。 $\hat{\theta}$  の定義域を同様の方法で  $\Sigma_{\text{red}}$  全体に延ばすと、 $\hat{\theta}^{e2} \in \Gamma(\Sigma_{\text{red}}, T\Sigma_{\text{red}}^{-1} \otimes \mathcal{O}(\sum_i x_i))$  となる。

$\theta$  と  $\hat{\theta}$  の関係を簡潔に表すために、各パッチ  $U_\alpha, U_i$  上の局所的な関数  $f_{R,\alpha}, f_{R,i}$  であつて、 $f_{R,\alpha}$  は  $U_\alpha$  上非零正則、 $f_{R,i}$  は  $z_i^0 = 0$  の周りで  $\frac{1}{z_i^0}$  であるものを取る。これらを用いて、形式的に

$$\theta = f_R \hat{\theta} \quad (3.4.4)$$

と表せる。この式は両辺を適当なパッチに制限したときに成り立つと解釈する。

よって、

$$\mathcal{L}^{-2} \simeq T\Sigma_{\text{red}}^{-1} \otimes \mathcal{O}\left(\sum_i x_i\right) \quad (3.4.5)$$

を満たす  $\Sigma_{\text{red}}$  上の直線束  $\mathcal{L}$  を一つ選ぶと、局所座標  $\hat{\theta}$  は  $\Pi\mathcal{L}^{-1}$  の局所切断と思う事ができる。 $\mathcal{L}$  の選び方を R 型点付きリーマン面  $\Sigma_{\text{red}}$  の一般化スピン構造と呼ぶ事にする。一般化スピン構造はスピン構造と同様に  $2^{2g}$  個ある。2 個以上の R 型点がある時には、すべての一般化スピン構造は微分同相で移り変わる。 $n_{\text{NS}}$  個の (通常) の点と  $n_R$  個の R 型点がついた一般化スピン構造付きリーマン面のモジュライ空間を  $\mathcal{M}_{n_{\text{NS}}, n_R, \text{g.spin}}$  とすると、これは連結であるので、 $\mathcal{M}_{n_{\text{NS}}+n_R, \text{spin}}$  とは異なる空間である。R 型点は一般化スピン構造の一

部分なので、 $\mathcal{M}_{n_R, g, \text{spin}}$  は  $\mathcal{M}_{\text{spin}}$  に  $\Sigma_{\text{red}}^{n_R}$  をファイバーした空間ではない。

R 型点付き超リーマン面は通常の超リーマン面と同様に gravitino 背景の情報を貼り合わせ関数に押し付ける事により定義される。ただし、R 型点がある時は gravitino 背景  $\chi$  も R 型点の周りで分岐を持つため、分岐を持たない twisted 場を  $\hat{\chi}|_{U_i} = \chi|_{U_i}/\sqrt{z_i^0}$  のようにさだめ、これらを貼り合わせたものを  $\hat{\chi} = f_R \chi$  とすると、 $\hat{\chi} \in \Omega^{(0,1)}(\Sigma_{\text{red}}, \Pi\mathcal{L})$  となる。

また、R 型点の位置  $x_i$  の情報も貼り合わせに押し付ける事にすると、NS 型の場合と同じように twisted Beltrami 微分  $\hat{\mu} \in \Omega^{(0,1)}(\Sigma_{\text{red}}, T\Sigma \otimes \mathcal{O}(-\sum_i x_i))$  が定義される。R 型点付き超リーマン面はこの  $\hat{\chi}$  背景を貼り合わせに押し付ける事で定義される。 $\hat{\chi}$  超対称性の元での同値類は  $H^1(\Sigma_{\text{red}}, \Pi\mathcal{L})$  で分類されるため、R 型点付き超リーマン面は  $H^1(\Sigma_{\text{red}}, \Pi\mathcal{L})$  上の超多様体となる。

$\theta$  座標でよく定義された演算子  $D_\theta$  を  $\hat{\theta}$  で書き直すと、

$$\begin{aligned} D_\theta &= \partial_\theta + \theta \partial_z = f_R D_{\hat{\theta}}^* \\ D_{\hat{\theta}}^* &= \partial_{\hat{\theta}} + \frac{1}{f_R^2} \hat{\theta} \partial_z \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

であるので、 $\hat{\theta}$  座標では  $D_\theta$  でなく  $D_{\hat{\theta}}^*$  がよく定義された演算子である。 $D_{\hat{\theta}}^{*2} = \frac{1}{f_R^2} \partial_z$  であるので R 点直上では  $D_{\hat{\theta}}^*$  は冪零である。 $\mathcal{N} = 1$  超リーマン面の構造は  $D_\theta^2 = \partial_z$  なる  $D_\theta$  が決めていることから、R 点付き超リーマン面とは有限個の点の上で  $\mathcal{N} = 1$  構造がつぶれる事を許すような  $\mathcal{N} = 1$  超リーマン面の一般化と言える。

### 3.4.3. 点付き超リーマン面の超モジュライ空間

NS 型  $p_a$  に、R 型が  $x_i$  にあるとして、以上の構成をまとめる。まず、各パッチに頂点が 1 つしか入らないような十分細かいパッチ  $\{U_\alpha\}$  をとる。各  $U_\alpha$  に対して二つの有理関数  $f_{0,\alpha}, f_{R,\alpha}^2$  をとる。ただし、

- $p_a \subset U_\alpha \Rightarrow f_{0,\alpha}$  は  $p_a$  に 1 位の極、 $f_{R,\alpha}^2$  は非零正則
- $x_i \subset U_i \Rightarrow f_{0,i}, f_{R,i}^2$  は  $x_i$  に 1 位の極
- $U_\alpha$  は頂点を含まない  $\Rightarrow f_{0,i}, f_{R,i}^2$  は非零正則

と振る舞うとする。 $f_{0,\alpha}, f_{R,\alpha}^2$  は各パッチ間で貼り合う必要はない。<sup>6</sup>さらに、 $f_{R,\alpha} = \sqrt{f_{R,\alpha}^2}$  とする。二乗根の分岐は untwisted な gravitino 背景に入っている分岐と同じに選び、分岐の上下で  $f_{R,\alpha}$  の位相が  $\pi$  食い違うように定義する。これらを用いて、 $\hat{\theta}$  は

$$\hat{\theta}|_{U_\alpha}(z) = f_{R,\alpha}(z)\theta(z), \quad (3.4.7)$$

twisted 超重力背景は

$$\hat{\mu}|_{U_\alpha}(z^0) = f_{0,\alpha}(z^0)\mu|_{U_\alpha}(z^0) \quad (3.4.8)$$

$$\hat{\chi}|_{U_\alpha}(z^0) = \frac{f_{0,\alpha}(z^0)}{f_{R,\alpha}(z^0)} \chi|_{U_\alpha}(z^0) \quad (3.4.9)$$

<sup>6</sup>これらは頂点たちの定める Cartier 因子と呼ばれる類の代表元である。

と定義される。twisted 超重力背景の属する空間は

$$\begin{aligned}\hat{\mu} &\in \Omega^{(0,1)}\left(\Sigma_{\text{red}}, T\Sigma_{\text{red}} \otimes \mathcal{O}\left(-\sum_a p_a - \sum_i x_i\right)\right) \\ \hat{\chi} &\in \Omega^{(0,1)}\left(\Sigma_{\text{red}}, \Pi\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}\left(-\sum_a p_a\right)\right)\end{aligned}\quad (3.4.10)$$

となる。超共形同値なものを同一視すると、

$$\begin{aligned}[\hat{\mu}] &\in H^1\left(\Sigma_{\text{red}}, T\Sigma_{\text{red}} \otimes \mathcal{O}\left(-\sum_a p_a - \sum_i x_i\right)\right) \\ [\hat{\chi}] &\in H^1\left(\Sigma_{\text{red}}, \Pi\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}\left(-\sum_a p_a\right)\right)\end{aligned}\quad (3.4.11)$$

が点付き超リーマン面の (点の移動も含めた) 変形の自由度である。\$f\_0, f\_R\$ の選び方の自由度は (3.4.11) の代表元の選び方に吸収できる。

\$n\_{\text{NS}}\$ 個の NS 型点と \$n\_{\text{R}}\$ 個の R 型点がついた超リーマン面のモジュライ空間を \$\mathfrak{M}\_{n\_{\text{NS}}, n\_{\text{R}}}\$ とすると、

$$\mathfrak{M}_{\text{red}, n_{\text{NS}}, n_{\text{R}}} = \mathcal{M}_{n_{\text{NS}}, n_{\text{R}}, \text{g.spin}} \quad (3.4.12)$$

$$T_p^* \mathfrak{M}_{n_{\text{NS}}, n_{\text{R}}} = H^1\left(\Sigma_{p, \text{red}}, T\Sigma_{p, \text{red}} \otimes \mathcal{O}\left(-\sum_a p_a - \sum_i x_i\right)\right) \oplus H^1\left(\Sigma_{p, \text{red}}, \Pi\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}\left(-\sum_a p_a\right)\right) \quad (3.4.13)$$

となる。ここから、次元は Riemann-Roch の定理より

$$\dim \mathfrak{M}_{n_{\text{NS}}, n_{\text{R}}} - \dim \mathcal{G}_{n_{\text{NS}}, n_{\text{R}}} = 3g - 3 + n_{\text{NS}} + n_{\text{R}} | 2g - 2 + n_{\text{NS}} + n_{\text{R}} / 2 \quad (3.4.14)$$

となる。\$\mathcal{G}\$ は点付き超リーマン面の自己同形群であり、点付きであっても \$\dim \mathcal{G}\_{g \geq 2} = 0\$ である。

\$\mathfrak{M}\_{n\_{\text{NS}}, n\_{\text{R}}=0}\$ は \$\mathfrak{M}\$ に \$\Sigma^{n\_{\text{NS}}}\$ がファイバーした空間であるが、\$\mathfrak{M}\_{n\_{\text{NS}}=0, n\_{\text{R}}}\$ は \$\Sigma^{n\_{\text{R}}}\$ をファイバーした空間ではない。この事は、R 型頂点演算子をリーマン面上で積分するという事は ill-defined であることを意味する。また、超対称性が破れる模型において時空の超対称性に付随する Word-Takahashi 恒等式を考える際にもこの事は重要になる (5.5 節)。

Deligne-Mumford コンパクト化は通常モジュライ空間と同様に存在する。\$\mathfrak{M}\_{n\_{\text{NS}}, n\_{\text{R}}}\$ のコンパクト化を \$\widehat{\mathfrak{M}}\_{n\_{\text{NS}}, n\_{\text{R}}}\$ と書く。超リーマン面には点の種類が NS と R の 2 種類あるため、退化に伴って現れる退化点が NS 点となるか、R 点となるかで退化の仕方にも 2 種類ある。

超モジュライ \$\widehat{\mathfrak{M}}\_g\$ の非分裂退化因子には、NS 非分裂退化因子と R 非分裂退化因子がある (点付きの場合も同様である)。NS 非分裂退化因子 \$\mathcal{D}\_{\text{nonsep}}^{\text{NS}}\$ は通常リーマン面のモジュライ空間と同様に

$$\mathcal{D}_{\text{nonsep}}^{\text{NS}} \simeq \widehat{\mathfrak{M}}_{g-1, n_{\text{NS}}=2} \quad (3.4.15)$$

である。\$\dim \mathfrak{M}\_g = 3g - 3 | 2g - 2\$, \$\dim \mathfrak{M}\_{g-1, n\_{\text{NS}}=2} = 3g - 2 | 2g - 2\$ であるから、これは確かに余次元 \$1 | 0\$ の部分多様体 (因子) になっている。

R 非分裂退化因子については、同様の事は成り立たない。 $\dim \mathfrak{M}_{g-1, n_R=2} = 3g - 3 | 2g - 1$  なので、 $\mathfrak{M}_{g-1, n_R}$  は余次元  $1|1$  である。そこで、R 非分裂退化因子  $\mathcal{D}_{\text{nonsep}}^R$  はある  $0|1$  次元ファイバー

$$\Pi : \mathcal{D}_{\text{nonsep}}^R \rightarrow \widehat{\mathfrak{M}}_{g-1, n_R=2} \quad (3.4.16)$$

として定義される。より詳しくは 4.4 節で述べる。

分裂退化の型は、A 側、B 側への点の分配を決めると決まる。例えば、 $\widehat{\mathfrak{M}}_g$  の退化因子には退化点が NS 点となる NS 分裂退化因子

$$\mathcal{D}_{g_A, g_B}^{\text{NS}} \simeq \widehat{\mathfrak{M}}_{g_A, n_{\text{NS}}=1} \times \widehat{\mathfrak{M}}_{g_B, n_{\text{NS}}=1} \quad (3.4.17)$$

がある。退化点が R 点となる R 分裂退化因子  $\mathcal{D}_{g_A, g_B}^R$  があつたとすると、(3.4.16) に類するファイバー

$$\Pi : \mathcal{D}_{g_A, g_B}^R \rightarrow \widehat{\mathfrak{M}}_{g_A, n_R=1} \times \widehat{\mathfrak{M}}_{g_B, n_R=1} \quad (3.4.18)$$

があることになるが、 $\widehat{\mathfrak{M}}_{n_R=1}$  は超リーマン面に入る R 点の数が偶数個である事に反するため、そのような退化は存在しない。非分裂退化は、退化点が 2 つ同時にできるため、NS 非分裂退化因子、R 非分裂退化因子の両方があり得る。

次に、R 点が 2 つついた超リーマン面の超モジュライ  $\mathfrak{M}_{n_R=2}$  の分裂退化因子を考える。右部分に R 点が 2 つともある場合は、退化点は NS でなければならない：

$$\mathcal{D}_{(g_A, n_R=0), (g_B, n_R=2)}^{\text{NS}} \simeq \widehat{\mathfrak{M}}_{g_A, n_{\text{NS}}=1} \times \widehat{\mathfrak{M}}_{g_B, n_{\text{NS}}=1, n_R=2}. \quad (3.4.19)$$

一方、A、B 部分に R 点が 1 つずつある場合は、退化点は R でなければならない：

$$\Pi : \mathcal{D}_{(g_A, n_R=1), (g_B, n_R=1)}^R \rightarrow \widehat{\mathfrak{M}}_{g_A, n_R=2} \times \widehat{\mathfrak{M}}_{g_B, n_R=2}. \quad (3.4.20)$$

超弦理論の文脈では、退化点の型の違いは退化に伴って現れる on-shell 粒子が NS 型であるか R 型であるかを反映している。より詳しくは 5 章でみる。

### 3.5. ヘテロティック世界面

ヘテロティック超弦理論は、世界面の  $\mathcal{N} = (1, 0)$  対称性を持つ弦理論として定義される。このため、右巻きモードについては  $\mathcal{N} = 1$  超リーマン面  $\Sigma_R$  上の理論、左巻きモードについては通常のリーマン面  $\Sigma_L = \bar{\Sigma}_{\text{red}}$  上の理論として振る舞う。よって、ヘテロティック弦理論の世界面  $\Sigma_{\text{het}}$  は  $\Sigma_R \times \Sigma_L$  内のある (任意の) cs 構造とする。 $\Sigma_{\text{het}}$  の座標を  $(t, u|\theta), \bar{z} = t - iu$  ととる。2.3 節で述べた通り、作用積分は cs 構造に依存しない。

$\Sigma_R \times \Sigma_L$  上の複素座標を  $(z, \bar{z}|\theta)$  とする。 $\Sigma_{\text{het}}$  上のスカラー超場を  $\mathcal{X}(z, \bar{z}|\theta) = X(z, \bar{z}) + \theta\psi(z, \bar{z})$ ,  $\Sigma_L$  上の spinor として振る舞う超場を  $\Lambda(z, \bar{z}|\theta) = \tilde{\lambda} + \theta F$  と定義する。

平坦背景でのヘテロティック超弦理論の物質場の作用は、

$$S_{\text{het, mat}} = \frac{1}{\pi} \int_{\Sigma_{\text{het}}} \mathcal{D}[t, u|\theta] \left( 2\eta_{\mu\nu} \tilde{\delta} \mathcal{X}^\mu D_\theta \mathcal{X}^\nu + \sum_{a=1}^{32} \Lambda_a D_\theta \Lambda_a \right) \quad (3.5.1)$$

とかける。Regge スロープ  $\alpha'$  は  $\alpha' = \frac{1}{2}$  とした。 $\eta_{\mu\nu}$ ,  $(\mu, \nu = 1 \dots, 10)$  は時空の平坦計量で



ある。 $F$  は off-shell 超対称性のための補助場であり、理論に影響しない。

また、右巻きゴーストの作用は、右巻きゴースト超場を  $B = \beta + \theta b, C = c + \theta \gamma$  とすると

$$S_{BC} = \frac{1}{\pi} \int_{\Sigma_{\text{het}}} \mathcal{D}[t, u | \theta] B \tilde{\partial} C \quad (3.5.2)$$

と定義する。左巻きゴーストの作用は、超場を  $\tilde{B} = \tilde{b} + \theta \tilde{f}, \tilde{C} = \tilde{c} + \theta \tilde{g}$  とすると

$$S_{\tilde{B}\tilde{C}} = \frac{1}{\pi} \int_{\Sigma_{\text{het}}} \mathcal{D}[t, u | \theta] \tilde{B} D_{\theta} \tilde{C} \quad (3.5.3)$$

とする。

ヘテロティック超弦理論の全体の作用を、 $S_{\text{het}} = S_{\text{het,mat}} + S_{BC} + S_{\tilde{B}\tilde{C}}$  と表す事にする。

右巻き面  $\Sigma_R$ , 左巻き面  $\Sigma_L$  に対応する(超)モジュライ空間をそれぞれ  $\mathfrak{M}_R, \mathfrak{M}_L$  とすると、ヘテロティック世界面に付随する超モジュライ空間は  $\mathfrak{M}_R \times \mathfrak{M}_L$  内の(スピン構造の付かない)リーマン面のモジュライ空間  $\mathcal{M}$  を base とする cs 構造  $\mathfrak{M}_{\text{cs}} \subset \mathfrak{M}_R \times \mathfrak{M}_L$  である。 $\mathfrak{M}_R$  は  $\mathcal{N} = 1$  超リーマン面の超モジュライであるが、 $\mathfrak{M}_L = \overline{\mathcal{M}}^7$  は通常の(反正則)リーマン面のモジュライ空間である事に注意する。 $\mathfrak{M}_{\text{het}}$  の(cs 多様体としての)次元は

$$\dim \mathfrak{M}_{\text{het}} = 6g - 6 + 2n_{\text{NS}} + 2n_R | 2g - 2 + n_{\text{NS}} + n_R/2 \quad (3.5.4)$$

である( $n_{\text{NS}}, n_R$  はそれぞれ NS 点、R 点の数)。

$R$  点が付いている場合、本来は散乱振幅の経路積分を  $R$  点付き世界面で表す事が望ましいと思われるが、 $R$  頂点演算子を含む高次の散乱振幅の計算方法は未開拓であるため、深入りせずに  $R$  頂点については従来通り  $\psi$ CFT のスピン演算子  $\theta_{\alpha}$  をふくむ相関関数として取り扱う。ただし、超ゴースト場の作用については 4.2 節で  $R$  点付きの場合の超共形構造  $D_{\theta}^*$  を使って表す。

### 3.6. Type II 世界面

Type II 世界面は世界面の  $\mathcal{N} = (1, 1)$  対称性を持つ。よって、右巻き  $\Sigma_R$ , 左巻き  $\Sigma_L$  ともに  $\mathcal{N} = 1$  超リーマン面をつかう。ヘテロティック世界面と同様に、Type II 世界面  $\Sigma_{\text{TypeII}}$  を  $\Sigma_R \times \Sigma_L$  内のある cs 構造として定義する。cs 構造の定義から、 $\Sigma_{\text{TypeII}}$  の座標  $(t, u | \theta, \tilde{\theta})$  であって、

$$z = t + iu + (\text{nilpot.}), \quad \tilde{z} = t - iu + (\text{nilpot.}) \quad (3.6.1)$$

となるものをとれる。

$\Sigma_R \times \Sigma_L$  上の複素座標を  $(z, \tilde{z} | \theta, \tilde{\theta})$  とする。 $\Sigma_{\text{TypeII}}$  上のスカラー超場を  $\mathcal{X}(z, \tilde{z} | \theta, \tilde{\theta}) =$

<sup>7</sup>左側フェルミオン  $\tilde{\lambda}$  が感じるスピン構造についての和は先にとることにする。つまり、超モジュライ積分の被積分関数はすでに  $\tilde{\lambda}$  のスピン構造についての和は取られていると了解する。左側には超リーマン面の構造はないので、スピン構造について先に和を取る事ができる。和の取り方は一意ではなく、取り方によって  $E_8 \times E_8$  理論、 $SO(32)$  理論、その他の非超対称な理論が作られる。和の取り方を変える事は、付録 B の考え方では左側 CFT を丸々取り替える事に対応する。

$X + \theta\psi + \tilde{\theta}\tilde{\psi} + \theta\tilde{\theta}F$  とすると、平坦背景での Type II 超弦理論の物質場の作用は

$$S_{\text{TypeII,mat}} = \frac{2}{\pi} \int_{\Sigma_{\text{TypeII}}} \mathcal{D}[t, u | \theta, \tilde{\theta}] \eta_{\mu\nu} D_\theta \mathcal{X}^\mu D_{\tilde{\theta}} \mathcal{X}^\nu \quad (3.6.2)$$

とかける。 $F$  は補助場である。

右巻きゴーストの作用は、超場を  $B = \beta + \theta b + \tilde{\theta} f_1 + \theta\tilde{\theta} f_2, C = c + \theta\gamma + \tilde{\theta} g_1 + \theta\tilde{\theta} g_2$  として

$$S_{BC} = \frac{1}{\pi} \int_{\Sigma_{\text{TypeII}}} \mathcal{D}[t, u | \theta, \tilde{\theta}] B D_{\tilde{\theta}} C \quad (3.6.3)$$

と定義する。 $f_1, f_2, g_1, g_2$  は補助場である。左巻きゴーストの作用  $S_{\tilde{B}\tilde{C}}$  も同様である。

Type II 超弦理論の全体の作用を  $S_{\text{TypeII}} = S_{\text{TypeII,mat}} + S_{BC} + S_{\tilde{B}\tilde{C}}$  と表す事にする。

Type II 世界面のモジュライ空間はヘテロティック世界面の場合と同様、 $\mathfrak{M}_R \times \mathfrak{M}_L$  内の  $\mathcal{M}$  を base とする cs 構造  $\mathfrak{M}_{\text{TypeII}} \subset \mathfrak{M}_R \times \mathfrak{M}_L$  である。Type II の場合は、 $\mathfrak{M}_R, \mathfrak{M}_L$  とともに超モジュライ空間である。 $\mathfrak{M}_{\text{TypeII}}$  の次元は、

$$\dim \mathfrak{M}_{\text{TypeII}} = 6g - 6 + 2N | 4g - 4 + 2n_{\text{NSNS}} + \frac{3}{2}n_{\text{NSR}} + \frac{3}{2}n_{\text{RNS}} + n_{\text{RR}} \quad (3.6.4)$$

となる ( $N$  は頂点の総数、 $n_{\text{NSR}}$  などはその型の頂点の数)。

$\mathfrak{M}_R, \mathfrak{M}_L$  それぞれに連結成分が 2 つずつあるので、2.3 節の cs 構造の定義から  $\mathfrak{M}_{\text{TypeII}}$  には連結成分 4 つある。これらの連結成分ごとに相対的な位相をとる自由度があり、これが GSO 射影の仕方と対応する。(4.5 節)

## 4. 散乱振幅

この章では超弦理論の散乱振幅を超モジュライ空間上の形式的な積分として定義する。ただし、4.1節、4.2節では主にゴーストの取り扱いを説明するために、10次元平坦背景中のヘテロティック理論、または Type II 理論について形式的に述べる。4.3節、4.4節では後の節、章で重要になる弦理論の伝搬関数についてまとめる。4.5節では平坦背景中の弦理論の散乱振幅のカイラル因子化について述べた後、Type II 理論の GSO 射影の指定について説明する。4.6節、4.7節では Picture changing operator (PCO) 形式とその適用限界について述べる。

### 4.1. 超重力との結合と真空振幅

ヘテロティック弦理論と  $\mathcal{N} = (1, 0)$  超重力との結合を考える。(3.5.1)は超リーマン面上の超共形座標で書かれているが、SCFT と 2次元超重力の結合をみるのには不便である。特に gravitino 背景との結合に興味があるので、split 座標  $(z^0|\theta^0)$  をとる。 $(z^0)$  は  $\Sigma_{\text{red}}$  の複素座標なので、計量背景は各パッチで平坦にみえ、貼り合わせに吸収されている。一方、gravitino 背景  $\chi(z^0)$  は各パッチ上で非零である。)

グラヴィティーノは2次元超座標変換に関するゲージ場であるから、(物質場とゴースト場両方を合わせた)SCFT の超カレント  $T_F$  と線形に結合する。右巻き超リーマン面  $\Sigma$  が split 超リーマン面  $\Sigma_0$  に gravitino 背景  $\chi$  を入れて作られるとすると、

$$S_{\text{het}}(\Sigma) = S_{\text{het}}(\Sigma_0) + S_{\chi}(\chi) \quad (4.1.1)$$

$$S_{\chi} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma_{\text{red}}} d^2 z^0 \chi T_F \quad (4.1.2)$$

となる。 $d^2 z^0 = -idz^0 d\bar{z}^0 = 2dtdu$  は  $\Sigma_{\text{red}}$  上実の測度である。座標に超座標変換不変でない条件を課した(計量背景のみゲージ固定した)ので、 $S_{\chi}$  は超対称な形をしていない。

Type II の場合は左巻き gravitino 背景  $\tilde{\chi}$  と左巻き超カレント  $\tilde{T}_F$  の結合

$$S_{\tilde{\chi}} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma_{\text{red}}} d^2 z^0 \tilde{\chi} \tilde{T}_F \quad (4.1.3)$$

がある。ここで、 $z^0, \bar{z}^0$  はそれぞれ右巻き、左巻き超リーマン面の split 座標である。

さらに、作用全体の超対称性の為に、

$$S_{\chi\tilde{\chi}} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_{\text{red}}} d^2 z^0 \chi \tilde{\chi} A \quad (4.1.4)$$

の形の項が必要となる。ここで、 $A$  は平坦背景の場合には  $A = \eta_{\mu\nu} \psi^{\mu} \tilde{\psi}^{\nu}$  となる。この項はスカラー QED にある「カモメ項」  $A_{\mu} A^{\mu} \phi \phi^{\dagger}$  の類似である。

結局、右巻き超リーマン面  $\Sigma_R$  が split 超リーマン面  $\Sigma_{R,0}$  に gravitino  $\chi$  を、左巻き超リー-

マン面  $\Sigma_L$  が split 超リーマン面  $\Sigma_{L,0}$  に gravitino  $\tilde{\chi}$  を入れて作られるとすると、

$$S_{\text{TypeII}}(\Sigma_R, \Sigma_L) = S_{\text{TypeII}}(\Sigma_{R,0}, \Sigma_{L,0}) + S_\chi(\chi) + S_{\tilde{\chi}}(\tilde{\chi}) + S_{\chi\tilde{\chi}}(\chi, \tilde{\chi}) \quad (4.1.5)$$

となる。

超共形対称性のゲージ固定は、コホモロジー  $H^1(\Sigma_{\text{red}}, T\Sigma_{\text{red}})$ ,  $H^1(\Sigma_{\text{red}}, T\Sigma_{\text{red}}^{1/2})$  から基底  $[\mu]_i, [\chi]_\sigma$  とそれらの代表元  $\mu_i, \chi_\sigma$  を選ぶ事に対応する。ここで、 $\chi_\sigma$  は bosonic であると約束する事にする。すると、Beltrami 微分  $\mu$ 、gravitino 背景  $\chi$  は超共形変換での同一視のもとで

$$\mu \simeq m_i \mu_i, \quad \chi \simeq \eta_\sigma \chi_\sigma \quad (4.1.6)$$

と展開できる。ここでのパラメータ  $(m|\eta)$  は  $T^*\mathfrak{M}$  の成分であるので、これを  $\mathfrak{M}$  の座標と思う事ができる。

ヘテロティック超弦理論の真空振幅を定義したい。 $b$  場及び  $\beta$  場には零モードが存在するため、振幅を定義するためにはこれらの零モードをうち消す項を挿入しなければならない。

$b \in \Gamma(\Sigma_{\text{red}}, \Pi T\Sigma_{\text{red}}^{-2})$ ,  $\beta \in \Gamma(\Sigma_{\text{red}}, T\Sigma_{\text{red}}^{-3/2})$  より、 $\mu b, \chi\beta \in \Pi\Omega^{(1,1)}(\Sigma_{\text{red}})$  であるから、ペアリング

$$\langle \mu | b \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma_{\text{red}}} d^2 z^0 \mu b \quad (4.1.7)$$

$$\langle \chi | \beta \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma_{\text{red}}} d^2 z^0 \chi \beta \quad (4.1.8)$$

を定義できる。このペアリングを使って零モードを相殺するのが自然である。

$b$  場の零モードの相殺は、ゲージ条件から決まる基底  $\mu_i$  を使って

$$\prod_{i=1}^{3g-3} \langle \mu_i | b \rangle \quad (4.1.9)$$

の挿入によって行う。 $\beta$  場はボソン場であるので、(4.1.9) の類似は

$$\prod_{\sigma=1}^{2g-2} \delta(\langle \chi_\sigma | \beta \rangle) \quad (4.1.10)$$

となる。零モードの相殺のためにデルタ関数を用いた。

以上より、平坦背景ヘテロティック弦理論の  $g$  ループ真空振幅は

$$\mathcal{A}_g := \int_{\mathfrak{M}_{\text{het},g}} \mathcal{D}[m_1 \cdots, m_{3g-3}, \tilde{m}_1 \cdots, \tilde{m}_{3g-3} | \eta_1 \cdots, \eta_{2g-2}] F(m, \tilde{m} | \eta) \quad (4.1.11)$$

$$F(m, \tilde{m} | \eta) := \int \mathcal{D}\Phi \prod_i \langle \mu_i | b \rangle \langle \tilde{\mu}_i | \tilde{b} \rangle \prod_\sigma \delta(\langle \chi_\sigma | \beta \rangle) e^{-S_{\text{het}}(\Sigma_{(m,\tilde{m}|\eta)})} \quad (4.1.12)$$

$$\Phi := (\mathcal{X}, \Lambda, B, C, \tilde{B}, \tilde{C}) \quad (4.1.13)$$

と定義される。 $\Sigma_{(m|\eta)}$  は  $\mathfrak{M}_{\text{het}}$  の座標  $(m, \tilde{m} | \eta)$  に対応する世界面である。 $\mathcal{D}\Phi$  は理論の中の(超重力背景以外の)すべての場についての経路積分を表す。ただし、ここでの表式は、

ゲージ固定条件  $\mu_i, \chi_\sigma$  が互いに独立である事を仮定している。ゲージ固定条件を相互に依存させる (例えば、 $\chi_\sigma$  の選び方を  $m$  にあらわに依存させる) 場合は、零モード相殺項に余分な項がつく [3]。

Type II の真空振幅の構成も同様である。 $\tilde{\beta}$  の挿入も入れて、

$$\mathcal{A}_g := \int_{\mathfrak{M}_{\text{TypeII},g}} \mathcal{D}[m_1 \cdots, m_{3g-3}, \tilde{m}_1 \cdots, \tilde{m}_{3g-3} | \eta_1 \cdots, \eta_{2g-2}, \tilde{\eta}_1 \cdots, \tilde{\eta}_{2g-2}] F(m, \tilde{m} | \eta, \tilde{\eta}) \quad (4.1.14)$$

$$F(m, \tilde{m} | \eta, \tilde{\eta}) := \int \mathcal{D}\Phi \prod_i \langle \mu_i | b \rangle \langle \tilde{\mu}_i | \tilde{b} \rangle \prod_\sigma \delta(\langle \chi_\sigma | \beta \rangle) \delta(\langle \tilde{\chi}_\sigma | \tilde{\beta} \rangle) e^{-S_{\text{TypeII}}(\Sigma(m, \tilde{m} | \eta, \tilde{\eta}))} \quad (4.1.15)$$

$$\Phi := (\mathcal{X}, B, C, \tilde{B}, \tilde{C}) \quad (4.1.16)$$

となる。

## 4.2. 頂点入り散乱振幅

頂点演算子がある場合に前節の議論を拡張したい。この節では、頂点の位置はすべて超モジュライとして扱う。これにより、NS 頂点と R 頂点を並列に取り扱う事ができる。

頂点がある場合、自然な超重力背景は (3.4.10) で与えられる。BRST 形式では、ゴースト場  $c, \beta$  は fermion 化されたゲージ変換パラメータとして導入されことを思い出すと、(3.4.10) のゲージ変換に伴うゴースト場は

$$\hat{c} \in \Gamma \left( \Sigma_{\text{red}}, \Pi T \Sigma \otimes \mathcal{O} \left( - \sum_a p_a - \sum_i x_i \right) \right) \quad (4.2.1)$$

$$\hat{\gamma} \in \Gamma \left( \Sigma_{\text{red}}, \mathcal{L} \otimes \mathcal{O} \left( - \sum_a p_a \right) \right) \quad (4.2.2)$$

となる。ただし  $p_a$  は NS 点の位置、 $x_i$  は R 点の位置を表す。さらに、ゴースト場の作用

$$S_{\hat{b}\hat{c}} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma_{\text{red}}} d^2 z^0 \hat{b} \tilde{\partial} \hat{c} \quad (4.2.3)$$

$$S_{\hat{\beta}\hat{\gamma}} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma_{\text{red}}} d^2 z^0 \hat{\beta} \tilde{\partial} \hat{\gamma} \quad (4.2.4)$$

を定義するために

$$\hat{b} \in \Gamma \left( \Sigma_{\text{red}}, \Pi T \Sigma^{-2} \otimes \mathcal{O} \left( \sum_a p_a + \sum_i x_i \right) \right) \quad (4.2.5)$$

$$\hat{\beta} \in \Gamma \left( \Sigma_{\text{red}}, T \Sigma^{-1} \otimes \mathcal{L}^{-1} \otimes \mathcal{O} \left( \sum_a p_a \right) \right) \quad (4.2.6)$$

とする必要がある。これらの直線束は (4.2.4) の被積分形式が  $\Sigma_{\text{red}}$  上の体積形式として正しく変換するように選んだ。これらを twisted ゴースト場と呼ぶ事にする。反正則 twisted ゴースト場  $\hat{c}, \hat{b}$  も同様に定義される。

twisted ゴースト場と通常のゴースト場の関係を述べる。3.4 節の  $f_0$  を使って

$$c' = \frac{1}{f_0} \hat{c}, \quad b' = f_0 \hat{b} \quad (4.2.7)$$

とすると、 $b', c'$  はもともとの  $bc$  ゴーストと同じ変換性を示す。ただし、この  $b'(z)$  は  $z = p_a, x_i$  で極を、 $c'(z)$  は  $z = p_a, x_i$  で零点をもつような場となっている。 $b', c'$  の頂点まわりでのこの振る舞いは、頂点に  $c$  の挿入があるときの振る舞いである。よって、

$$\int \mathcal{D}\hat{b}\mathcal{D}\hat{c} \prod_i \langle \hat{\mu}_i | \hat{b} \rangle \cdots e^{-S_{bc}} = \int \mathcal{D}b\mathcal{D}c \prod_i \langle \hat{\mu}_i | f_0 b \rangle \prod_a c(p_a) \prod_i c(x_i) \cdots e^{-S_{bc}} \quad (4.2.8)$$

という対応がある。この  $c$  の挿入は、物理的頂点演算子を BRST 同値類の中で  $c\tilde{c}V_{\text{mat},\beta\gamma}$  の形のものに選んだ時の  $bc$  系への依存性に対応する。

同様に 3.4 節の  $f_0, f_R$  を使って、

$$\gamma' = \frac{f_R}{f_0} \hat{\gamma}, \quad \beta' = \frac{f_0}{f_R} \hat{\beta} \quad (4.2.9)$$

とすると、 $\beta', \gamma'$  はもともとの  $\beta\gamma$  ゴーストと同じ変換性を示し、 $\beta', \gamma'$  の NS 頂点周りでの振る舞いは  $\beta\gamma$  系の  $\delta(\gamma)$  の挿入周りの振る舞いと、R 頂点周りでの振る舞いは  $\beta\gamma$  系のスピン演算子  $\Theta_{\beta\gamma}$  まわりの振る舞いと一致する。これは、NS 型頂点演算子を picture  $-1$  の  $c\tilde{c}\delta(\gamma)V_{\text{mat}}$  の形に、これは、R 型頂点演算子を picture  $-1/2$  の  $c\tilde{c}S_{\beta\gamma}V_{\text{mat}}$  の形に取ったことに対応する。

以上から、picture  $-1$  の NS 型頂点演算子、picture  $-1/2$  の R 型頂点演算子のゴーストへの依存性を場の定義に押し付けたものが twisted ゴースト場であると言う事ができる。

twisted ゴースト場は  $\hat{b}\hat{\mu}, \hat{\beta}\hat{\chi} \in \Pi\Omega^{(1,1)}(\Sigma_{\text{red}})$  をみたすため、twisted ゴースト場の挿入は

$$\prod_{i=1}^{\Delta_e} \langle \hat{\mu}_i | \hat{b} \rangle \langle \hat{\mu}_i | \hat{b} \rangle \prod_{\sigma}^{\Delta_o} \langle \hat{\chi}_{\sigma} | \hat{\beta} \rangle \quad (4.2.10)$$

となる。点付き超リーマン面の超モジュライの次元を  $\Delta_e | \Delta_o$  とした。3.4 節で見たように、

$$\begin{aligned} \Delta_e &= 3g - 3 + n_{\text{NS}} + n_{\text{R}} \\ \Delta_o &= 2g - 2 + n_{\text{NS}} + \frac{1}{2}n_{\text{R}} \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

である。

以上から、平坦背景でのヘテロティック超弦理論の散乱振幅は

$$\mathcal{A}_g := \int_{\mathfrak{M}_{\text{het},g,n_{\text{R}},n_{\text{NS}}}} \mathcal{D}[m_1 \cdots, m_{\Delta_e}, \tilde{m}_1 \cdots, \tilde{m}_{\Delta_e} | \eta_1 \cdots, \eta_{\Delta_o}] F(m, \tilde{m} | \eta) \quad (4.2.12)$$

$$F(m, \tilde{m} | \eta) := \int \mathcal{D}\Phi \prod_i^{\Delta_e} \langle \hat{\mu}_i | \hat{b} \rangle \langle \hat{\mu}_i | \hat{b} \rangle \prod_{\sigma}^{\Delta_o} \delta(\langle \hat{\chi}_{\sigma} | \hat{\beta} \rangle) \prod_a V_a^{\text{NS}} \prod_i V_i^{\text{R}} e^{-S_{\text{het}}(\Sigma(m, \tilde{m} | \eta))} \quad (4.2.13)$$

$$S_{\text{het}} := S_{\text{het,mat}} + S_{\hat{B}\hat{C}} + S_{\hat{\tilde{B}}\hat{\tilde{C}}} \quad (4.2.14)$$

$$\Phi := (\mathcal{X}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{\tilde{B}}, \hat{\tilde{C}}) \quad (4.2.15)$$

$V_a^{\text{NS}}, V_i^{\text{R}}$  は picture  $-1, -1/2$  の物質場の頂点演算子である。正確には、積分は  $\mathfrak{M}_{\text{het}}$  のコンパクト化  $\widehat{\mathfrak{M}}_{\text{het}}$  上で考える必要があるが、 $\widehat{\mathfrak{M}}_{\text{het}}$  の精密な定義は 5 章まで後回しとする。

以後、明らかな場合は  $\langle \hat{\mu} | \hat{b} \rangle$  など  $\langle \mu | b \rangle$  などと書く事がある。頂点演算子の定義の中で  $b, c, \beta, \gamma$  を使う場合はこれらは twist されていない場を指す事とする。

$S_{\widehat{B}\widehat{C}}$  は twisted ゴースト場の作用 (4.2.4) および twisted ゴースト場と gravitino との結合

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma_{\text{red}}} d^2 z^0 \hat{\chi} \hat{T}_F^g \quad (4.2.16)$$

を含めた作用である。ここで、 $\hat{T}_F^g$  は、通常の  $BC$  ゴーストの超カレントを  $b', c', \beta', \gamma'$  で書いたものを  $T_F^g = (\partial\beta')c' + \frac{3}{2}\beta'c' - 2b'\gamma'$  として

$$\hat{T}_F^g = \frac{f_R}{f_0} T_F^g \quad (4.2.17)$$

と定義される捻られた超カレントである。物質場の超カレントも同様に捻られたものが twisted gravitino 場と結合しているため、全体の超カレントと gravitino 背景の結合は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma_{\text{red}}} d^2 z^0 \hat{\chi} \hat{T}_F \\ \hat{T}_F = \frac{f_R}{f_0} T_F \end{aligned} \quad (4.2.18)$$

となる。

$$\widehat{B} = \hat{\beta} + \hat{\theta}\hat{b}, \widehat{C} = \hat{c} + \hat{\theta}\hat{\gamma} \text{ とすると}$$

$$\frac{1}{2\pi} S_{\widehat{B}\widehat{C}} = \int_{\Sigma} \mathcal{D}[z, \tilde{z} | \theta] \widehat{B} D_{\hat{\theta}}^* \widehat{C} \quad (4.2.19)$$

とまとまる。 $S_{\widehat{B}\widehat{C}}$  反正則 twisted ゴースト場の作用も同様である。

Type II への拡張はそのままである。反正則側の gravitino と  $\hat{\beta}\hat{\gamma}$  系を導入し、これらを結合させる。Type II の頂点は右巻き側と左巻き側で頂点の型が違う (NSR 型, RNS 型) ことが許されるため、twisted 場の捻られ方も左右で異なりうることに注意する。

$$\mathcal{A}_g := \int_{\mathfrak{M}_{\text{TypeII}, g, n_R, n_{\text{NS}}}} \mathcal{D}[m, \tilde{m} | \eta, \tilde{\eta}] F(m, \tilde{m} | \eta, \tilde{\eta}) \quad (4.2.20)$$

$$F(m, \tilde{m} | \eta) := \int \mathcal{D}\Phi \prod_i^{\Delta_e} \langle \hat{\mu}_i | \hat{b} \rangle \langle \hat{\mu}_i | \hat{b} \rangle \prod_{\sigma}^{\Delta_o} \delta(\langle \hat{\chi}_{\sigma} | \hat{\beta} \rangle) \prod_a V_a^{\text{NS}} \prod_i V_i^{\text{R}} e^{-S_{\text{TypeII}}(\Sigma(m, \tilde{m} | \eta))} \quad (4.2.21)$$

$$S_{\text{TypeII}} := S_{\text{TypeII}, \text{mat}} + S_{\widehat{B}\widehat{C}} + S_{\widehat{B}\widehat{C}} \quad (4.2.22)$$

$$\Phi := (\mathcal{X}, \widehat{B}, \widehat{C}, \widehat{\tilde{B}}, \widehat{\tilde{C}}) \quad (4.2.23)$$

となる。

この節の構成では挿入する演算子は (通常のゴースト場を使う定式化に書き換えると)

ヘテロティック理論では

$$\begin{aligned}\mathcal{V}^{\text{NS}} &= c\tilde{c}\delta(\gamma)V_{\text{mat}}^{\text{NS}} \\ \mathcal{V}^{\text{R}} &= c\tilde{c}\Theta_{\beta\gamma}V_{\text{mat}}^{\text{R}}\end{aligned}\tag{4.2.24}$$

の形をしている。この形は点付き超リーマン面の微小変形に自然に結合できる twisted ゴースト場の性質から決まっている。Type II 理論でも同様の形となる。この形の演算子を共形演算子と呼ぶとする。BRST 同値な演算子でこれら以外の形の物を使う際には散乱振幅を点付き (超) モジュライ上の積分として書く事ができず、別の取り扱いが必要となる [22,23]。本論文では共形演算子の挿入のみを考える事とする。

### 4.3. 弦理論の伝搬関数

この節では円筒上の散乱振幅を考えることによって弦理論の伝搬関数を計算する。これは 5 章,6 章で重要になる。

まず、場の理論の伝搬関数について簡単に述べる。場の理論の虚時間伝搬関数

$$\frac{1}{k^2 + m^2}\tag{4.3.1}$$

は虚時間 Schwinger パラメタ  $s$  を使って

$$\frac{1}{k^2 + m^2} = \int_0^\infty ds e^{-s(k^2+m^2)}\tag{4.3.2}$$

と書き直すことができる。Schwinger パラメタは Feynman ダイアグラムの内線の仮想的な長さとなせるから、これは弦理論におけるリーマン面のモジュライに対応する概念である。

まずボソン閉弦の場合に (4.3.2) の類似を計算する。円筒

$$\begin{aligned}ds^2 &= du^2 + d\hat{\phi}^2 \\ \hat{\phi} &= \phi - \alpha u \\ 0 \leq u \leq s, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi\end{aligned}\tag{4.3.3}$$

を考える。これは長さ  $s$  で角度  $\alpha$  捻られた円筒を表し、2 点付き球面と共形同値である。 $s$  は場の理論における Schwinger パラメタに対応する。複素モジュライ  $S$  を  $S = s + i\alpha$  と定める。

モジュライが  $s = s_0, \alpha = \alpha_0$  の時の複素座標を  $z = u + \hat{\phi}$ ,  $dzd\bar{z} = du^2 + d\hat{\phi}^2$  と取る。モジュライを  $\delta S = \delta s + i\delta\alpha$  だけずらした時の線素を  $ds'^2$ , モジュライ  $S$  に関する Beltrami 微分を  $\mu_S$  とすると

$$ds'^2 \propto |dz + \mu_S \delta S d\bar{z}|^2\tag{4.3.4}$$

が成り立つから、

$$\mu_S(z) = \tilde{\mu}_{\bar{S}}(\bar{z}) = \frac{1}{2s}\tag{4.3.5}$$



がわかる。よって、 $b$  ゴーストの挿入は

$$\langle \mu_S | b \rangle = b_0, \quad \langle \tilde{\mu}_S | \tilde{b} \rangle = \tilde{b}_0 \quad (4.3.6)$$

となる。 $b_0$  は  $b$  場の零モードである。さらに、物質場の経路積分の寄与は、(4.3.3) が虚時間  $s$  で  $\alpha$  回転する発展を表すことに注意すると、

$$e^{-s(L_0 + \tilde{L}_0) + i\alpha(L_0 - \tilde{L}_0)} \quad (4.3.7)$$

である。 $q = e^{-s + i\alpha}$  とすれば、伝搬関数、つまり円筒上の振幅は

$$b_0 \tilde{b}_0 \int d^2 q q^{L_0-1} \tilde{q}^{\tilde{L}_0-1} = \frac{2\pi \delta_{L_0 - \tilde{L}_0} b_0 \tilde{b}_0}{L_0} \quad (4.3.8)$$

$$d^2 q = -i dq d\tilde{q}$$

となる。

次にヘテロティック超弦理論の NS 伝搬関数を求める。NS 境界条件付き  $\mathcal{N} = (1, 0)$  超円筒は座標  $(z, \bar{z}|\theta)$ ,  $0 \leq \Re z \leq 1$  を

$$z \sim z + 2\pi i, \quad \theta \sim -\theta \quad (4.3.9)$$

で割った物で与えられる。よって、NS 境界条件付き超円筒上の gravitino 背景は

$$\chi(z^0) = -\chi(z^0 + 2\pi i) \quad (4.3.10)$$

を満たさなければならないが、これは常にゲージ変換

$$\chi \sim \chi + \partial_{z^0} y \quad (4.3.11)$$

によって 0 にできるため、NS 超円筒に奇モジュライはない。よって伝搬関数はボソン弦と変わらず、

$$\sum_{\text{spin str.}} b_0 \tilde{b}_0 \int d^2 q q^{L_0-1} \tilde{q}^{\tilde{L}_0-1} = \frac{2\pi \delta_{L_0 - \tilde{L}_0} b_0 \tilde{b}_0 \Pi_{\text{GSO}}}{L_0} \quad (4.3.12)$$

となる。ただし、4.4 節で後述するように、スピン構造の和によって GSO 射影  $\Pi_{\text{GSO}}$  がかかるため、これを含めた。

R 境界条件付き超円筒では同一視は

$$z \sim z + 2\pi i, \quad \theta \sim \theta + \eta \quad (4.3.13)$$

で行われる。ここで、 $\eta$  は gravitino 背景

$$\chi_\eta(z^0) = \eta \quad (4.3.14)$$

に対応する奇モジュライである。NS 超円筒とは  $\theta$  に対する境界条件が異なるため R 超円

筒には奇モジュライがある。gravitino 背景と  $\beta$  の結合は

$$\langle \chi_\eta | \beta \rangle = s\beta_0 \quad (4.3.15)$$

となる。

また、奇モジュライに伴い物質場の寄与はハミルトニアンに加えて超カレントと gravitino の結合が加わり、

$$e^{-s(L_0 + \tilde{L}_0 + \eta G_0) + i\alpha(L_0 - \tilde{L}_0 + \eta G_0)} \quad (4.3.16)$$

となる。これらを合わせて、R 超円筒の伝搬関数は

$$\begin{aligned} \sum_{\text{spin str.}} \int -i\mathcal{D}[q, \tilde{q} | \eta] b_0 \hat{b}_0 \delta(s\beta_0) q^{L_0 + \eta G_0 - 1} \tilde{q}^{\tilde{L}_0 - 1} &= \frac{2\pi G_0 \delta_{L_0 - \tilde{L}_0} b_0 \tilde{b}_0 \delta(\beta_0) \Pi_{\text{GSO}}}{L_0} \\ &= \frac{2\pi \delta_{L_0 - \tilde{L}_0} b_0 \tilde{b}_0 \delta(\beta_0) \Pi_{\text{GSO}}}{G_0} \end{aligned} \quad (4.3.17)$$

となる。NS 超円筒の場合と同様に  $\Pi_{\text{GSO}}$  を寄与に入れ、2行目では  $G_0^2 = L_0$  を用いた。(4.3.12) で  $L_0$  が Klein Gordon 伝搬関数のように振る舞ったように、(4.3.17) では  $G_0$  が Dirac 伝搬関数のように振る舞う。

Type II 理論への拡張はほぼそのままである。例えば境界条件が NSR の  $\mathcal{N} = (1, 1)$  超円筒に対応する伝搬関数は

$$\frac{2\pi \tilde{G}_0 \delta_{L_0 - \tilde{L}_0} b_0 \tilde{b}_0 \delta(\tilde{\beta}_0) \Pi_{\text{GSO}} \tilde{\Pi}_{\text{GSO}}}{L_0} \quad (4.3.18)$$

となる。反正則側の GSO 射影  $\tilde{\Pi}_{\text{GSO}}$  も含めた。

RR 超円筒の伝搬関数は注意が必要である。(4.3.18) とほぼ同様に

$$\frac{2\pi G_0 \tilde{G}_0 \delta_{L_0 - \tilde{L}_0} b_0 \tilde{b}_0 \delta(\beta_0) \delta(\tilde{\beta}_0) \Pi_{\text{GSO}} \tilde{\Pi}_{\text{GSO}}}{L_0} \quad (4.3.19)$$

となるが、これは場の理論の RR ゲージポテンシャルの伝搬関数とは対応しない。 $G_0$  が Dirac 伝搬関数に対応したことを使うと、零質量 RR 場に関する (4.3.19) の場の理論における類似は

$$\frac{\Gamma_{\alpha\alpha'}^\mu P_\mu \Gamma_{\beta\beta'}^\nu P_\nu}{p^2} \quad (4.3.20)$$

である。 $\Gamma$  は時空のガンマ行列、 $\alpha, \beta$  は (適当なカイラリティをもった) 時空のスピンル添字である。これは bispinor で表した零質量 RR ゲージ場の強さ  $\phi_{\alpha\beta}$  の伝搬関数  $\langle \phi_{\alpha\beta}(p) \phi_{\alpha'\beta'}(-p) \rangle$  と解釈できる。よって、(4.3.19) は RR ボソンの場の強さの伝搬関数を表している。このことは RR 場の picture  $(-1/2, -1/2)$  の頂点演算子が場の強さと結合することとも整合している。

Type II 理論において RR 場のゲージポテンシャルの伝搬関数は現れないため、RR 場はほかの場と場の強さを通じてのみ結合している。特に (閉弦理論の摂動論には) RR 場の電荷を持つ粒子は現れず、0 運動量では RR 場を含む相関関数は 0 となる。このため、5 章

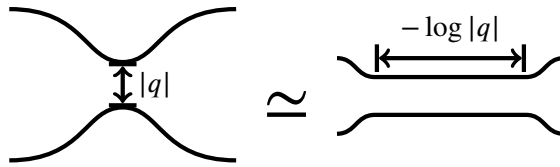


図 4.1.: リーマン面の退化はリーマン面の一部が無限に長いチューブになることと共形同値である。

で考えるタッドポールによる発散は NSNS 伝搬関数に関するものだけを考えれば良い。

#### 4.4. 超リーマン面の退化と SCFT の相関関数の発散

超弦理論における伝搬関数の極に伴う発散の現れ方を見る。

弦理論の伝搬関数 (4.3.8) は  $L_0 = 0$  で極を持つ。超弦理論においても同様である。これは場の理論における伝搬関数の極と丁度対応する。場の理論、弦理論どちらにおいても、内線粒子が on-shell になると伝搬関数が極を生じ、発散する。

(超) リーマン面において、on-shell 内部粒子による発散は (超) リーマン面の退化に対応しているため、これについて説明する。

まず、通常のリーマン面について考える。リーマン面の退化点周りのパッチ  $U$  は  $x, y$  を複素座標とする  $\mathbb{C}^2$  内の

$$(x - a)(y - b) = q \tag{4.4.1}$$

なる代数曲線で表される。ここで  $q$  はある複素数のパラメータであり、 $q = 0$  が完全に退化した状態を表す。これを縫い合わせパラメータと呼ぶ。 $q \neq 0$  では  $|q|$  が退化しかけている部分の太さを表している。モジュライ空間の退化因子周りでは、モジュライ空間の  $q$  を退化因子に垂直な方向の座標と見る事ができる。<sup>1</sup> $q = 0$  では  $(x, y = b)$  が退化して分かれた  $A$  部分の座標、 $(x = a, y)$  が  $B$  部分の座標になり、 $a$  が  $A$  側にとっての退化点の位置、 $b$  が  $B$  側にとっての退化点の位置となる。

このような退化は、4.3 節の伝搬関数と関係づく。退化点周りの座標  $x, y$  を

$$x - a = e^\rho, \quad y - b = qe^{-\rho} \tag{4.4.2}$$

$$\rho = u + i\phi \quad u, \phi \in \mathbb{R}, \quad \phi \sim \phi + 2\pi \tag{4.4.3}$$

と座標変換する。パッチ  $U$  が (4.4.1) の  $|x - a| < 1$  かつ  $|y - b| < 1$  の部分で与えられるとすると、座標  $\rho$  では  $U$  は  $0 > u > \log |q|$  で与えられる。つまり、 $\rho$  座標では退化点周りは長さ  $-\log |q|$  の長いチューブに見える。よって、リーマン面の退化は、図 4.1 のように退化点に対応する部分が無限に長い円筒に置き換えられたものと共形同値である。

よって、場の理論との類推から、退化点を on-shell 粒子が通る際にモジュライの退化因子  $\mathcal{O}$  上では (S)CFT の相関関数に発散が起きうる。伝搬関数の極の留数は退化因子  $\mathcal{O}$  上の積分を定める。この積分の被積分関数のうち退化点を粒子  $\mathcal{O}$  が通る部分の寄与はもとの頂点演算子の挿入に加えて  $A$  部分の  $x = a$  に  $\mathcal{O}$ ,  $B$  部分の  $y = b$  に  $\bar{\mathcal{O}}$  をよけいに挿入して計算される相関関数である。 $\bar{\mathcal{O}}$  は  $\mathcal{O}$  の双対 ( $\langle \mathcal{O} \bar{\mathcal{O}} \rangle_{\mathbb{C}P^1} = 1$ ) である。

退化点を通る粒子の運動量を  $P$  とする。通常、 $P$  は generic には off-shell であり、ルー

<sup>1</sup>つまり、 $q$  は退化因子  $\mathcal{O}$  と  $\mathcal{M}$  の法束の切断である。

ブ運動量積分中<sup>2</sup>、または外線運動量を調節したときに on-shell となる。このような場合の退化を一般型退化と呼ぶ事にする。一般型発散を処理するために、Feynman  $i\epsilon$  処方によって極の避け方を指定しなければならない。これについては6章で見る。

一方、真空振幅を考える場合等、特殊な状況の分裂退化では分裂したリーマン面の片側に運動量を持った演算子の挿入がない場合がある。このような場合、退化点を通る粒子の運動量は常に0であり、零質量粒子にとってはこれは on-shell である。よってこのような退化に伴う発散は外線の運動量に関わらず発生し、また  $i\epsilon$  では処理できないため、別の処理が必要である。片側に1点しかない場合も同様に退化点を通る粒子は常に on-shell であり、この場合も赤外発散を生じる。このような退化を特殊型退化と呼ぶ。特殊型退化の正則化については5章で見る。

次に超リーマン面の退化を考える。超リーマン面の退化には退化点が NS 点になる NS 型退化と R 点になる R 型退化がある。まず NS 型退化を考える。

NS 型退化点周りのパッチ  $U$  は、 $(x|\theta), (y|\zeta)$  を超共形座標とする  $\mathbb{C}^{2|2}$  内の

$$\begin{aligned}(x-a)(y-b) &= -t^2 \\ (y-b)(\theta-\alpha) &= t(\zeta-\beta) \\ (x-a)(\zeta-\beta) &= -t(\theta-\alpha) \\ (\theta-\alpha)(\zeta-\beta) &= 0\end{aligned}\tag{4.4.4}$$

で決まる超代数曲線であると考え事ができる。この代数曲線は  $(y|\zeta)$  座標の演算子  $D_\zeta = \partial_\zeta + \zeta\partial_y$  が  $(x|\theta)$  座標の演算子  $D_\theta = \partial_\theta + \theta\partial_x$  と関数倍をのぞいて一致する(つまり  $(y|\zeta)$  から  $(x|\theta)$  への変換が  $\mathcal{N} = 1$  超共形変換になっている)という条件から決まる。実際、

$$D_\zeta = -\frac{x}{t}D_\theta\tag{4.4.5}$$

となる。

NS 退化点の縫い合わせパラメータ  $q_{\text{NS}}$  を

$$q_{\text{NS}} = -t^2\tag{4.4.6}$$

と決めると、これは通常のリーマン面の退化における  $q$  と同じ役割を果たす。NS 退化因子  $\mathfrak{D}^{\text{NS}}$  の  $\mathfrak{M}$  内での余次元は  $1|0$  であり、(4.4.4) の複素パラメータ  $q$  が  $\mathfrak{D}$  に垂直な方向の座標を表す。 $q = 0$  が完全に退化した状態を表し、このとき  $(x|\theta)$  が  $A$  側部分の座標、 $(y|\zeta)$  が  $B$  側部分の座標となる。 $(a|\alpha)$  が  $A$  側にとっての NS 退化点の位置、 $(b|\beta)$  が  $B$  側にとっての NS 退化点の位置であり、たしかに (4.4.4) の退化点が NS 点に見えることが確認できる。

縫い合わせパラメータ  $q_{\text{NS}}$  を一つ決めても、(4.4.4) のパラメータ  $t = \pm\sqrt{-q_{\text{NS}}}$  には  $\pm$  の自由度がある。この自由度は超リーマン面の構造に含まれるスピン構造に由来する。スピン構造は超リーマン面の構造の一部であり、超モジュライ上の積分のうちスピン構造についての和を先にとることは通常できないが、退化因子の寄与を考える際には NS 退化因子上の  $t$  の符号についての足し上げを先にとる事は意味がある。

これが GSO 射影に対応している。GSO 射影により、退化点を通る on-shell 粒子が制限される。理論のユニタリティは、発散の極の寄与が理論のスペクトルに含まれる on-shell 粒子からの寄与である事を要請するため、許される外線の頂点演算子は GSO 射影の取り

<sup>2</sup>6章で見るように、CFT の相関関数は内線運動量についての積分を暗に含む

方によって決まる。

NS 伝搬関数 (4.3.12) 節を通る状態は picture 数が  $-1$  の物に限る。このことは伝搬関数の極が対応する超モジュライの退化因子  $\mathcal{O}$  上の積分を正しく定めるためには退化点に挿入される演算子は picture 数  $-1$  でなければならない事から推測される。別の説明としては、picture 数  $p$  の状態、つまり

$$\begin{aligned}\beta_r |p\rangle &= 0 \text{ for } r > -p - 3/2 \\ \gamma_r |p\rangle &= 0 \text{ for } r \geq -p + 3/2\end{aligned}\tag{4.4.7}$$

は  $|p=1\rangle$  以外はある  $r > 0$  と  $k = 1, 2, \dots$  に対して  $\beta_r^k |p\rangle$  又は  $\gamma_r^k |p\rangle$  が非零となり  $L_0$  が下に非有界となってしまうため、伝搬関数が意味をなすためには伝搬する状態が picture 数  $-1$  でなければならないということもできる。<sup>3</sup>

次に R 退化を見る。R 退化点周りのパッチ  $U$  は、やはり  $(x|\theta), (y|\zeta)$  を超共形座標とする  $\mathbb{C}^{2|2}$  内の代数曲線

$$\begin{aligned}(x-a)(y-b) &= q_R(1-\zeta\eta) \\ \theta &= \pm i(\zeta + \eta)\end{aligned}\tag{4.4.8}$$

となる。この代数曲線は  $(y|\zeta)$  座標の演算子  $D_\zeta^* = \partial_\zeta + (y-b)\zeta\partial_y$  と  $D_\theta^* = \partial_\theta + (x-a)\theta\partial_x$  がよく貼り合わさるように決められている:

$$D_\zeta^* = \pm i D_\theta^*.\tag{4.4.9}$$

$q_R$  が縫い合わせパラメータ、 $x=a$  が  $A$  側からみた R 退化点の位置、 $y=b$  が  $B$  側から見た R 退化点の位置となる。 $\eta$  は R 型退化のみによけいに存在するパラメータであり、fermionic 縫い合わせパラメータと呼ぶ事にする。この  $\eta$  が (3.4.16), (3.4.18) などのファイバーを定義する。

NS 退化の場合と同様、(4.4.8) の符号  $\pm$  についての足し上げが GSO 射影を引き起こす。R 退化の場合、4.3 でみたように fermionic gluing パラメータ  $\eta$  についての積分を実行した後で退化点を通る R 型粒子の伝搬関数の寄与が得られる。

退化リーマン面はさらに退化する事ができる。3 点付き  $g=0$  面及び 1 点付き  $g=1$  面を縫い合わせてできる面を最大退化 (超) リーマン面と呼ぶ事にする。最大退化リーマン面は、図 4.2(a) 節のような  $\phi^3$  理論のファインマンダイアグラムと対応する。このようなダイアグラムをリーマン面のパンツ分解と呼ぶ。最大退化リーマン面はモジュライ空間のある 1 点  $p$  に対応する。 $p$  のパンツ分解の各内線 (退化点) を  $I = 1, \dots, 3g-3+n$  でラベルし、内線  $I$  を (4.4.1) のようにパラメータ  $q_I$  で正則化してできる滑らかなリーマン面を  $\mathcal{M}$  の座標  $(q_1, \dots, q_I)$  に対応させることで、 $\mathcal{M}$  の  $p$  近傍の座標が定まる。

超リーマン面のモジュライ空間に対しても同様の座標が定義できる。超リーマン面にはスピン構造が伴うので、超リーマン面の最大退化は図 4.2(b) のようなスピン構造付きパンツ分解に対応する。スピン構造付きパンツ分解は、各内線に R または NS のラベル、各ループに 0 か 1 のラベルを伴ったパンツ分解であり、R, NS, 0, 1 がフェルミオンの周期性を指定している。

あるスピン構造付きパンツ分解に対して、以下のようにパラメータを定義する。

- スピン構造付きパンツ分解の各内線に  $q_I$  を与える。

<sup>3</sup> [10] では  $\beta_\gamma$  系の経路積分の形式的な定義を用いての議論もされている。

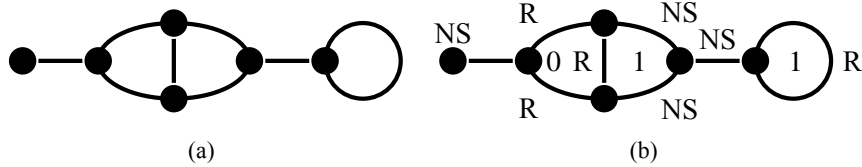


図 4.2.: (a)  $g = 3, n = 1$  点付きリーマン面のパンツ分解。(b)  $g = 3, n = 1$  点付きスピン構造付きリーマン面のパンツ分解。各内線に R か NS のラベル、各ループに 0, 1 のラベルを伴う。これらのラベルはフェルミオンの周期性を指定する。

- パンツ分解の頂点のうち、NS3 点付き球面に対応する頂点  $A$  には NS3 点球面の奇モジュライ  $\theta_A$  を与える。
- 長さ 1 でラベルが (R, 1) 以外のループ  $\mu$  (even スピン構造の 1 点付きトーラスに対応する) に対して奇モジュライ  $\theta_\mu$  を与える。
- 長さ 1 でラベルが (R, 1) のループ  $\alpha$  (odd スピン構造の 1 点付きトーラスに対応する) に対して奇モジュライ  $\eta_\alpha$  を与える。

以上のパラメータの集合 ( $\{q_I\}, \{\theta_A\}, \{\theta_\mu\}, \{\eta_\alpha\}$ ) に従って NS3 点球面、NS1 点 R2 点球面、NS1 点トーラスを縫い合わせる事によって滑らかな超リーマン面を一つ得る事ができる。よって、これらのパラメータがスピン構造付きパンツ分解に対応する最大退化点  $p \in \mathfrak{M}_{\text{red}}$  まわりの  $\mathfrak{M}$  の座標を定義する。この座標は付録 B で超共形ブロックの定義に用いる。

## 4.5. 相関関数のカイラル因子化と GSO 射影

振幅 (4.1.14), (4.2.20) の被積分関数  $F$  はモジュライの正則関数、反正則関数の積に因子化 (カイラル因子化) していない。(超)モジュライ空間の解析性を使うためには、因子化した形であることが望ましい。因子化は特に 6 章で必要となる。本節ではボソン弦の場合をレビューした後、その NS 演算子を含む超弦理論への拡張を結果を中心に述べる。超弦理論の相関関数を超リーマン面の幾何を使って簡潔に表すことは完全にはできていないため、<sup>4</sup>現在知られていることのさらに一部を述べるにとどめる。詳細は [6] にある。超アーベル微分や超周期行列については [19] も詳しい。

### 4.5.1. ボソン弦理論のカイラル因子化

因子化の障害になっているのはボソン場  $X^\mu$  の零モードと Type II 理論の場合は 2 次元 gravitino 背景の 2 次の結合 (4.1.4) である。

まずボソン弦理論について考える。モジュライの退化因子付近では散乱振幅の相関関数は伝搬関数 (4.3.8)

$$b_0 \tilde{b}_0 \int d^2 q q^{p^2+m^2-1} \tilde{q}^{p^2+\tilde{m}^2-1} \quad (4.5.1)$$

を含む。運動量  $p$  についての積分は (4.5.1) の因子化を壊す。(超)モジュライ上の複素構造を使った議論を行いたい場合は  $p$  積分を行う前の被積分関数を考える必要がある。こ

<sup>4</sup>R 頂点が入る場合はほぼ手が付いていない。NS 頂点のみを含む場合はこの節が参照している [6] にて調べられているが、この節及び 4.7 節で説明される事情により 3 ループ以上の計算に適用するには不十分である。

れは(S)CFTの共形ブロックを考えることに対応する。ただし、モジュラー不変性は $\rho$ 積分を行った後の相関関数に始めて現れるため、共形ブロックはモジュラー不変でないことに注意する。

種数 $g$ リーマン面 $\Sigma$ 上の26次元平坦背景中のボソン弦理論の物質場部分の経路積分は

$$\begin{aligned} Z_{\text{bos}} &= \int \mathcal{D}X \prod_i V_i e^{-S_{\text{bos}}} \\ S_{\text{bos}} &= \frac{1}{4\pi} \int \partial X_\mu \partial X^\mu d^2z \end{aligned} \quad (4.5.2)$$

である。物質場部分単体ではアノマリーのために共形不変でなく、Weyl因子 $\rho$  ( $d^2s = e^\rho |dz + \mu d\bar{z}|^2$ ) に対して

$$\begin{aligned} Z_{\text{bos}} &\propto e^{26S_L} \\ S_L &= \frac{1}{48\pi} \int d^2z (\partial\rho\bar{\partial}\rho + \mu^2 e^{2\rho} + R\rho) \end{aligned} \quad (4.5.3)$$

と依存する。 $\mu$ は適当なBeltrami微分、 $R$ は世界面のRicciスカラーであり、 $S_L$ はLiouville作用と呼ばれる。最終的にこの依存性はゴーストのアノマリーと相殺するため、以下では $\rho$ は固定して考える。頂点演算子は $V_i = e^{\rho k^2/2} e^{ik_i \cdot X}$ を考える。他の演算子はこの演算子に微分を施していくことによって得られる。

(4.5.2)は $X^\mu$ の零モードのためカイラル因子化をそのままではしない。 $X^\mu$ の零モードは $\oint_{A_I} \partial X^\mu \frac{dz}{2\pi}$ ,  $I = 1, 2, \dots, g$ で特徴づけられる。ここで $A_I$ は考えているリーマン面の1次サイクルの適当なsymplectic基底 $A_I, B_I$ で決まる $A$ サイクルである。 $X^\mu$ の零モードを固定するために純虚数のパラメタ $p_I^\mu$ を導入して(4.5.2)を

$$Z_{\text{bos}} = \int dp \int \mathcal{D}X \prod_{I,\mu} \delta\left(p_I^\mu - \oint_{A_I} \partial X^\mu \frac{dz}{2\pi}\right) \prod_i V_i e^{-S_{\text{bos}}} \quad (4.5.4)$$

と書きかえることができる。 $p$ はサイクル $A_I$ を通る(解析接続された)内線運動量と解釈できる。零モードを固定したことから $p$ 積分の被積分関数は適当な関数 $\mathcal{F}(p)$ で

$$\int \mathcal{D}X \prod_{I,\mu} \delta\left(p_I^\mu - \oint_{A_I} \partial X^\mu \frac{dz}{2\pi}\right) \prod_i V_i e^{-S_{\text{bos}}} = e^{26S_L} \mathcal{F}_{\text{mat}}(m, p_I) \bar{\mathcal{F}}_{\text{mat}}(\bar{m}, p_I) \quad (4.5.5)$$

とカイラル因子化する。この量はサイクル $A_I$ の指定に依存するためモジュラー不変ではないことに注意する。CFTの言葉では、 $\mathcal{F}(p_I)$ は種数 $g$ の共形ブロック、 $p_I$ は共形ブロックを指定するラベルと解釈することができる。 $X$ のCFTはスペクトラムが連続であるため共形ブロックのラベルも連続になる。

(4.5.5)を評価したい。内線運動量が $p_I$ となる $X$ の零モードは

$$X_0(z, \bar{z}, p_I) = \sum_I 2\pi p_I \left( \int_P^z \omega_I - \int_{\bar{P}}^{\bar{z}} \bar{\omega}_I \right) \quad (4.5.6)$$

とかける。ここで $P \in \Sigma$ はリーマン面上の固定された点、 $\omega_I \in \Omega^{(1,0)}(\Sigma)$ は $\Sigma$ 上のアーベ

ル微分で

$$\oint_{A_I} \omega_J = \delta_{IJ} \quad (4.5.7)$$

を満たす物である。また、周期行列  $\Omega_{IJ}$  を

$$\Omega_{IJ} = \oint_{B_I} \omega_J \quad (4.5.8)$$

で定める。周期行列はリーマン面のモジュライの情報を持ち、 $\Im\Omega_{IJ}$  は正定値である。(4.5.6) は  $\delta(p_I - \oint_{A_I} \partial X \frac{dz}{2\pi})$  の挿入のために  $A_I$  で非連続である。実際、 $z$  が  $B_K$  を一周回ると

$$X_0(z + B_K, \bar{z} + B_K, p_I) - X_0(z, \bar{z}, p_I) = \sum_I 2\pi i p_I \Im\Omega_{IK} \quad (4.5.9)$$

だけのモノドロミーを得る。

(4.5.5) の被積分関数への  $X_0$  の寄与は  $\int \omega_I \wedge \bar{\omega}_J = \Im\Omega_{IJ}$  から

$$\left| \exp \left( i\pi \sum_{I,J} p_I \Omega_{IJ} p_J + 2\pi i \sum_{I,i} p_I \cdot k_i \int_P^{z_i} \omega_I \right) \right|^2 \quad (4.5.10)$$

となる。ただし記号  $||$  は  $p_I$  についての複素共役を  $p_I^\dagger = p_I$  と見なして計算する事にする。これはもともと純虚数パラメタであった  $p_I$  を実変数に解析接続する事を意味する。<sup>5</sup>

$X_0$  からの量子揺らぎの部分はフェルミオン化できる。 $\mathfrak{bc}$  系を重み  $h_{\mathfrak{b}} = 1, h_{\mathfrak{c}} = 0, c = -2$  のカイラルなフェルミオン系として  $\Omega$  の正則関数  $Z_\Delta(\Omega)$  を

$$\left| \int \mathcal{D}\mathfrak{b}\mathcal{D}\mathfrak{c} \prod_{i=1}^g \mathfrak{b}(z_i) e^{-S_{\mathfrak{bc}}} \right|^2 = |\text{Det}(\omega_I(z_j)) Z_\Delta(\Omega)|^4 e^{-2S_L} \quad (4.5.11)$$

と定める。カイラルなフェルミオン系はアノマリーを除いてモジュライに正則に依存するから、 $Z_\Delta$  は well-defined である。 $\Sigma$  上のラプラシアン  $\Delta$  の零モードを無視した形式的な Pfaffian  $\text{Pf}'\Delta$  を用いて (アノマリーを無視して)

$$Z_\Delta^2 = \frac{2\pi \text{Pf}'\Delta}{(\text{Det} \langle \omega_I | \omega_J \rangle \int d^2z \sqrt{g})^{1/2}} \quad (4.5.12)$$

とかける。 $\text{Det} \langle \omega_I | \omega_J \rangle = \text{Det} \Im\Omega_{IJ}$  は  $\mathfrak{b}$  の零モードの規格化からくる。

頂点演算子の挿入がない場合の物質場の分配関数  $Z_{\text{bos},0}$  は  $\Delta$  の零モードを無視した形

<sup>5</sup> $p$  の取り扱いが [5] と多少異なるが結果は同じである。



式的な行列式  $\text{Det}'\Delta$  を使って

$$\begin{aligned} Z_{\text{bos},0} &= \left( \frac{\int d^2z \sqrt{g}}{4\pi^2 \text{Det}'\Delta} \right)^{13} \\ &= |Z_\Delta|^{-52} e^{26S_L} \int_{\mathfrak{R}} dp \left| \exp \left( i\pi \sum_{I,J} p_I \Omega_{IJ} p_J \right) \right|^2 \end{aligned} \quad (4.5.13)$$

とかける。 $\int_{\mathfrak{R}}$  は  $p$  積分及び記号  $||$  を  $p$  が実の所に解析接続してから取ることを意味する。よって、頂点演算子の挿入がない場合の共形ブロックは

$$\mathcal{F}_{\text{mat},0}(p, \Omega) = Z_\Delta^{-26} \exp \left( i\pi \sum_{I,J} p_I \Omega_{IJ} p_J \right) \quad (4.5.14)$$

となる。

頂点演算子  $V_i = e^{ik_i \cdot X}$  の挿入の寄与を考える。零モードへの寄与は (4.5.10) の通りである。 $V_i(z_i) V_j(z_j)$  の正則部分の寄与は  $\Sigma \times \Sigma$  上で多価双  $(\frac{k_i \cdot k_j}{2}, 0)$  形式のように振る舞う。このような多価形式はプライムフォーム  $E(z_i, z_j)$  を用いて  $E(z_i, z_j)^{k_i \cdot k_j}$  と一意的に表されることが知られている。結局、頂点演算子の入った場合の共形ブロックは

$$\mathcal{F}_{\text{mat}}(p, \Omega) = Z_\Delta^{-26} \exp \left( i\pi \sum_{I,J} p_I \Omega_{IJ} p_J + 2\pi i \sum_{I,i} p_I \cdot k_i \int_P^{z_i} \omega_I \right) \prod_{i < j} E(z_i, z_j)^{k_i \cdot k_j} \quad (4.5.15)$$

となる。頂点演算子の非零モード部分を  $\text{bc}$  系の演算子に置き換えて計算してもよい。

ゴーストの寄与も入った共形ブロックを  $\mathcal{F}$  とすると、ボソン弦理論の散乱振幅は

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_{\widehat{\mathcal{M}}} dm \int_{\mathfrak{R}} dp \mathcal{F}(m, p) \overline{\mathcal{F}}(\overline{m}, p) \\ \mathcal{F} &= Z_{\hat{b}\hat{c}} \mathcal{F}_{\text{mat}} \\ Z_{\hat{b}\hat{c}} &= \int \mathcal{D}\hat{b} \mathcal{D}\hat{c} \prod_i^{\Delta_c} \langle \hat{\mu}_i | \hat{b} \rangle e^{-S_{\hat{b}\hat{c}}} \quad (\text{up to anomaly}) \end{aligned} \quad (4.5.16)$$

となる。物質場とゴーストのアノマリーは相殺し、 $\int dp \mathcal{F} \overline{\mathcal{F}}$  はモジュライ上の関数を定める。ここでは立ち入らないが、フェルミオン系の共形ブロック  $Z_\Delta, Z_{\hat{b}\hat{c}}$  もプライムフォーム、テータ関数等を使って表すことができる。

#### 4.5.2. 超弦理論の NS 頂点演算子を含む相関関数のカイラル因子化 (偶スピン構造)

さて、(4.5.16) を超対称に拡張したい。偶スピン構造  $\delta$  付き超リーマン面  $\Sigma$  を考える。奇スピン構造については [6] にある。

周期行列の超リーマン面での類似を定義する。 $\Sigma$  上の (超) アーベル微分  $\omega \in H^{1,1}(\Sigma)$  (正則 1|1 形式) の線積分を定義する。 $\omega$  の  $\theta$  での展開を

$$\omega = \omega_+ + \theta \omega_z \quad (4.5.17)$$

と書くことにする。 $\omega_z$  の被約リーマン面  $\Sigma_{\text{red}}$  への引き戻し  $\omega_{z,\text{red}}$  は  $\Sigma_{\text{red}}$  上のアーベル微分である。 $(z|\theta)$  と  $(z'|\theta')$  を結ぶ線分上での  $\omega$  の線積分を

$$\int_{(z|\theta)}^{(z'|\theta')} \omega = \int_z^{z'} \omega_z + \theta' \omega_+(z') - \theta \omega_+(z) \quad (4.5.18)$$

と定める。パッチを跨ぐ場合は積分領域をパッチで区切り、パッチ毎にこの定義を適用する。<sup>6</sup>

$$D_{\theta'} \int_{(z|\theta)}^{(z'|\theta')} \omega = \omega \quad (4.5.19)$$

であることから線積分の類似となっていると言える。

世界面  $\Sigma$  の  $1|1$  次元 cs 部分超多様体であって、被約超多様体が被約リーマン面  $\Sigma_{\text{red}}$  の A, B サイクルの基底となるものを  $A_I, B_I$  と呼ぶ。超アーベル微分の基底  $\omega_I$  を

$$\int_{A_I} \omega_K = \delta_{IJ} \quad (4.5.20)$$

となるように取り、超周期行列を

$$\Omega_{IJ} = \int_{B_I} \omega_J \quad (4.5.21)$$

で定義する。これは(非自明であるが)対称行列である。超リーマン面超アーベル微分の個数は超モジュライの上で定数ではなく、超モジュライの余次元 1 以上の部分超多様体上で  $g$  個より多くなる(また、奇スピン構造に対応する連結成分では最低  $g+1$  個ある)[19]。以下の議論は超アーベル微分の個数が丁度  $g$  個である場合のみ正しい。種数 2 以下ではこれは常に正しい。

split 座標を使って  $\Omega$  の奇モジュライ依存性をあらわに書くと、

$$\Omega_{IJ} = \Omega_{\text{red},IJ} - \frac{i}{4\pi} \int_{\Sigma_{\text{red}}^2} d^2 y_0 d^2 w^0 \omega_I(w^0) \chi(w^0) S_\delta(w^0, y^0) \chi(y^0) \omega_J(y^0) \quad (4.5.22)$$

となる。 $\Omega_{\text{red},IJ}$  は  $\Sigma_{\text{red}}$  の周期行列、 $S_\delta$  は Szegő 核

$$S_\delta(y, w) = \frac{\vartheta[\delta] \left( \int_y^w \vec{\omega}, \Omega_{\text{red}}, \right)}{E(y, w) \vartheta[\delta](0, \Omega_{\text{red}})} \quad (4.5.23)$$

である( $\vartheta$  はテータ関数,  $\delta$  は偶スピン構造)。これは重み 1/2 の fermion の伝搬関数を表す。

(4.5.2) の類似は (Type II の場合)

$$\int \mathcal{D}\mathcal{X} \prod_{I,\mu} \delta \left( p_I^\mu - \oint_{A_I} D_\theta \mathcal{X}^\mu \frac{\delta(d\theta) dz}{2\pi} \right) \prod_i V_i e^{-S_{\text{TypeII}}} = e^{10S_{SL}} \mathcal{F}_{\text{mat}}(m, \eta, p_I) \tilde{\mathcal{F}}_{\text{mat}}(\tilde{m}, \tilde{\eta}, p_I) \quad (4.5.24)$$

<sup>6</sup> 超共形座標  $(z|\theta)$  では奇モジュライ依存性はすべて貼り合わせに押し付けていることに注意する。[6] の座標は本論文における split 座標  $(z^0|\theta^0)$  に対応し、split 座標を使う場合は超リーマン面上の量は gravitino 背景  $\chi$  にあらわに依存する。

となる。 $S_{SL}$  は超 Liouville 作用

$$S_{SL} = \frac{1}{48\pi} \int_{\Sigma} -i\mathcal{D}[z, \tilde{z}|\theta, \tilde{\theta}] \left( D_{\theta}\Phi D_{\tilde{\theta}}\Phi + 2i\mu(e^{i\sqrt{2}\Phi}) \right) \quad (4.5.25)$$

である。超 Weyl 変換のパラメタを  $\Phi = \rho + \theta\lambda$  とした。頂点演算子は  $V_i(z_i|\theta_i) = e^{\Phi\frac{k^2}{2}} e^{ik\cdot\mathcal{X}(z_i|\theta_i)}$  を考える。

零モードを除いた部分のカイラル部分は  $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}$  を多重項の成分とする  $\mathfrak{BC}$  系に等価である。 $\mathfrak{BC}$  系のボソニックな部分は丁度  $\psi\tilde{\psi}$  系の統計性を反転させたものである。ボソン弦理論の  $Z_{\Delta}$  の類似  $Z_{\Delta,\delta}$  を

$$\left| \int \mathcal{D}\mathfrak{B}\mathcal{D}\mathfrak{C} \prod_{i=1}^g \mathfrak{B}(z_i|\theta_i) e^{-S_{\mathfrak{BC}}} \right|^2 = |\text{Det}(\omega_I(z_j|\theta_j)) Z_{\Delta,\delta}(\Omega)|^4 e^{-2S_{SL}} \quad (4.5.26)$$

で定義する。ただし記号  $||$  に含まれる「複素共役」は各々の記号に  $\sim$  をつけることと約束する。

真空振幅の超共形ブロックはボソン弦と同様に

$$\mathcal{F}_{\text{mat},0}(p, \Omega) = Z_{\Delta,\delta}^{-10} \exp\left(i\pi \sum_{I,J} p_I \Omega_{IJ} p_J\right) \quad (4.5.27)$$

さらに、プライムフォームの超アナログである超プライムフォーム  $\mathcal{E}$  を定義できる。これは split 座標で

$$-\log \mathcal{E}_{\delta}(z^0|\theta^0, w_0|\zeta_0) = -\log E(z^0, w_0) + \theta\zeta S_{\delta}(z^0, w_0) + (\text{terms including } E, S \text{ and } \chi) \quad (4.5.28)$$

という形をする。(ここで、 $E, S$  の定義に使う周期行列は被約リーマン面のものである。) これは  $\mathcal{X} = X + \theta\psi$  のカイラルな伝搬関数を定義している。具体的な定義は複雑なので省略する。[6] の (5.30) にある。 $\chi$  を含む項は超カレントと  $\chi$  の結合 (4.1.2) の寄与である。これは  $(z|\theta) = (w|\zeta)$  で 1 位の零点を持つ多価双正則  $1/2|0$  形式を定める。

以上の超アナログを合わせると、10次元平坦背景上の超弦理論の超共形ブロックは

$$\mathcal{F}_{\text{mat}}(p, \Omega, \chi) = Z_{\Delta,\delta}^{-10} \exp\left(i\pi \sum_{I,J} p_I \Omega_{IJ} p_J + 2\pi i \sum_{I,i} p_I \cdot k_i \int_P^{(z_i|\theta_i)} \omega_I\right) \prod_{i<j} \mathcal{E}(z_i|\theta_i, z_j|\theta_j)^{k_i \cdot k_j} \quad (4.5.29)$$

となる。

散乱振幅はやはり

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_{\widehat{\mathfrak{M}}_{\text{TypeII}}} \mathcal{D}[m|\eta] \int_{\mathfrak{R}} dp \mathcal{F}(m, \eta, p) \overline{\mathcal{F}}(\tilde{m}, \tilde{\eta}, p) \\ \mathcal{F} &= Z_{\widehat{\mathfrak{B}\mathfrak{C}}} \widehat{\mathcal{F}}_{\text{mat}} \end{aligned} \quad (4.5.30)$$

とかける。

トーラスコンパクト化やより複雑な (S)CFT を使う場合は、(超) 共形ブロックは内線運動量  $p$  だけでなく離散的な複数の添字  $\{s\}$  をもつ。これはトーラスコンパクト化の場合はコンパクト方向への運動量及び巻き付き数を表す。この場合、散乱振幅は  $p$  積分の他に  $\{s\}$  に付いての和を含み、

$$\mathcal{A} = \int_{\widehat{\mathfrak{M}}_{\text{TypeII}}} \mathcal{D}[m|\eta] \int_{\mathfrak{R}} dp \sum_{\{s\}, \{\bar{s}\}} N_{\{s\}, \{\bar{s}\}} \mathcal{F}_{\{s\}}(m, \eta, p) \overline{\mathcal{F}}_{\{\bar{s}\}}(\tilde{m}, p) \quad (4.5.31)$$

のように表される。足し合わせの係数  $N_{\{s\}, \{\bar{s}\}}$  は相関関数がモジュラー不変になるように定められていなければならない。詳しくは付録 B で述べる。

### 4.5.3. GSO 射影の選択

Type II 理論においては GSO 射影の選び方に非一意性があり、いくつかの異なった弦理論を定義する。これは、GSO 射影の指定は超モジュライ空間の連結成分の間の相対的な位相の指定からくる。

(1, 1) 理論のモジュライ空間  $\mathfrak{M}_{\text{TypeII}}$  は四つの部分

$$\mathfrak{M}_{\text{TypeII}} = \mathfrak{M}_{\text{TypeII}}^{++} \sqcup \mathfrak{M}_{\text{TypeII}}^{+-} \sqcup \mathfrak{M}_{\text{TypeII}}^{-+} \sqcup \mathfrak{M}_{\text{TypeII}}^{--} \quad (4.5.32)$$

があるのだった。+, - は左右のスピン構造の偶奇を表す。よって、 $\mathfrak{M}_{\text{TypeII}}$  上の積分も

$$\int_{\mathfrak{M}_{\text{TypeII}}} = A \int_{\mathfrak{M}_{\text{TypeII}}^{++}} + B \int_{\mathfrak{M}_{\text{TypeII}}^{+-}} + C \int_{\mathfrak{M}_{\text{TypeII}}^{-+}} + D \int_{\mathfrak{M}_{\text{TypeII}}^{--}} \quad (4.5.33)$$

と分解する。 $A, B, C, D$  は各連結成分に付与することのできる相対的な係数を表す。<sup>7</sup>

1 ループ真空振幅のヒルベルト空間解釈およびユニタリティを保つためには、すべての種数、点の数について  $A, B, C$  は共通でなければならず、許される  $A, B, C$  の組み合わせは

$$\begin{aligned} (A, B, C, D) &= (+1, +1, +1, +1) && : \text{Type IIA} \\ (A, B, C, D) &= (+1, -1, -1, +1) && : \text{Type IIA}' \\ (A, B, C, D) &= (+1, +1, -1, -1) && : \text{Type IIB} \\ (A, B, C, D) &= (+1, -1, +1, -1) && : \text{Type IIB}' \end{aligned} \quad (4.5.34)$$

である。これらはスピン和の取り方が異なるため、GSO 射影の作用が異なる。ただし、TypeIIA と TypeIIA', TypeIIB と TypeIIB' のスペクトラムは適当な基底の変換で移り合うため、理論として等価である。TypeIIA と TypeIIB は実際にスペクトラムが非等価になるため、理論として非等価である。<sup>8</sup>

<sup>7</sup>ヘテロティック理論のモジュライ空間にも連結成分が2つあるが、これらの間の相対的な符号の取り替えは理論をかえない。

<sup>8</sup>ヘテロティック理論においても同様に  $\mathfrak{M}_{\text{het}}$  の二つの連結成分の間の相対的な  $\pm 1$  の係数をつけられるが、これらは等価になる。付録 B の定式化では CFT 側のカイラル代数は (自由フェルミオン代数ではなく) Virasoro 代数であるとしているので、Virasoro 加群および左右の貼り合わせを指定する段階でどのヘテロティック理論を取ったかが決まっている。実際の構成には CFT 側は自由フェルミオン代数を使うのが便利であり、自由フェルミオン代数の加群から Virasoro 加群を得る操作も GSO 射影と呼ぶ事がある。

世界面超対称性が  $\mathcal{N} = (1, 1)$  である理論は Type II 理論のほかに Type0 理論がある。Type IIA 理論は左右のスピン構造は独立であると見なすが、Type 0 理論では左右のスピン構造は等しく取る。 $\mathfrak{M}_{\text{TypeII}}$  は左右のスピン構造が独立であると見なして定義したため、特に  $\mathfrak{M}_{\text{TypeII}}^{++}$ ,  $\mathfrak{M}_{\text{TypeII}}^{--}$  は同型な連結成分をそれぞれ  $2^{g-1}(2^g + 1)$ ,  $2^{g-1}(2^g - 1)$  個持つ。Type 0 理論ではこれらの連結成分のうち左右のスピン構造が等しくなる部分に対応する連結成分  $\mathfrak{M}_{\text{Type0}}^{++}$ ,  $\mathfrak{M}_{\text{Type0}}^{--}$  のみで積分する。この場合も、積分の定義には連結成分ごとの相対的な係数

$$\int_{\mathfrak{M}_{\text{Type0}}} = A \int_{\mathfrak{M}_{\text{Type0}}^{++}} + B \int_{\mathfrak{M}_{\text{Type0}}^{--}} \quad (4.5.35)$$

があり得る。許される組み合わせは

$$\begin{aligned} (A, B) &= (+1, +1) && : \text{Type 0A} \\ (A, B) &= (+1, -1) && : \text{Type 0B} \end{aligned} \quad (4.5.36)$$

であり、これらは非等価である。

## 4.6. ピクチャ変更演算子形式

超リーマン面の幾何学をリーマン面と同程度に発達させることはできていないため、定式化全体をリーマン面の理論に帰着できるならば便利である。これは gravitino 背景のゲージ固定をデルタ関数の形に取ることにより行うことができ、ピクチャ変更演算子形式と呼ばれる。この節および 4.7 節で述べるようにこれは一般には問題を引き起こすが、低種数の場合および 4.7 節で述べるある例外的状況では正当な操作であり、[1] で展開されている定式化と一致するため、解説する。

被約リーマン面  $\Sigma_{\text{red}}$  の相異なる点  $q_\sigma$ ,  $\sigma = 1, \dots, \Delta_\sigma$  を選び、固定する。gravitino 背景の空間  $H^1(\Sigma_{\text{red}}, \Pi \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}(-\sum_a p_a))$  の基底と bosonic な代表元を

$$\begin{aligned} [\hat{\chi}_\sigma] &\in H^1\left(\Sigma_{\text{red}}, \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}\left(-\sum_a p_a\right)\right) \\ \hat{\chi}_\sigma &= \delta(z^0 - q_\sigma) \end{aligned} \quad (4.6.1)$$

と取り、この基底で gravitino 背景  $\chi$  を

$$\chi = \sum_\sigma \eta_\sigma \chi_\sigma \quad (4.6.2)$$

と展開する。Type II 理論では同様に反正則側の gravitino 背景の代表元を

$$\hat{\tilde{\chi}}_\sigma = \delta(\bar{z}^0 - \bar{q}_\sigma) \quad (4.6.3)$$

と取り  $\hat{\chi}$  をこの代表元で展開する。(4.6.1) で代表元を選ぶ操作は世界面超対称性のゲージ固定に対応していることに注意する。 $\eta_\sigma$  は超モジュライ  $\mathfrak{M}$  の奇座標 (奇モジュライ) と同一視されるのだった。

(4.2.18) はこのゲージ固定で

$$\begin{aligned} S_\chi &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma_{\text{red}}} dz^0 d\bar{z}^0 \hat{\chi} \hat{T}_F \\ &= \sum \frac{\eta_\sigma}{2\pi} \hat{T}_F(q_\sigma) \end{aligned} \quad (4.6.4)$$

となる。gravitino の 2 次項 (4.1.4) は  $q_\sigma$  と  $\tilde{q}_\sigma$  を異なるようにしておけば 0 となる。さらに、gravitino 背景と  $\hat{\beta}$  場の結合は

$$\delta(\langle \hat{\chi}_\sigma | \hat{\beta} \rangle) = 2\pi \delta(\hat{\beta}(p_\sigma)) \quad (4.6.5)$$

となる。

散乱振幅 (4.2.20) のうち奇モジュライ  $\eta$  に関する部分は (4.6.4) と (4.6.5) を合わせて

$$\begin{aligned} \int \prod_{\sigma}^{\Delta_o} 2\pi \delta(d\eta_\sigma) \delta(\hat{\beta}(q_\sigma)) e^{-\frac{\eta_\sigma}{2\pi} \hat{T}_F(q_\sigma)} &= \prod_{\sigma}^{\Delta_o} \delta(\hat{\beta}(q_\sigma)) \hat{T}_F(q_\sigma) \\ &= \prod_{\sigma}^{\Delta_o} \delta(\beta(q_\sigma)) T_F(q_\sigma) \end{aligned} \quad (4.6.6)$$

となる。つまり、奇モジュライに関する寄与は  $\Delta_o$  個のピクチャ変更演算子 (PCO)

$$Y(q_\sigma) = \delta(\beta(q_\sigma)) T_F(q_\sigma) \quad (4.6.7)$$

によって表される。相関関数は通常のリーマン面上で頂点演算子に加えて  $\prod_{\sigma} Y(q_\sigma)$  を挿入した  $X$  CFT 及び  $\psi$  CFT の相関関数となり、これは [1] の定式化と一致する。ピクチャ変更演算子は [1] では  $\beta\gamma$  系の電荷を合わせるために導入された。これが奇モジュライについての積分から得られると指摘したのは [2] である。

以上の議論は、 $[\delta(z^0 - q_\sigma)]$  が  $H^1(\Sigma_{\text{red}}, \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}(-\sum_a p_a))$  の基底を張ることを前提としていた。 $\delta$  は正確には  $\Sigma_{\text{red}}$  上の非自明な直線束の  $\delta$  関数型のサポートを持つ切断であるから、 $\delta$  切断たちが  $H^1$  の一次独立性元を定めるかどうかを検証する必要がある。

$[\delta(z^0 - q_\sigma)]$  が一次独立でないとは、ある複素数  $e_\sigma$ 、 $\sigma = 1, \dots, \Delta_o$  と  $y \in H^0(\Sigma_{\text{red}}, \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}(-\sum_a p_a))$  があって、

$$\sum_{\sigma} e_\sigma \delta(z^0 - q_\sigma) = \tilde{\delta}y(z^0) \quad (4.6.8)$$

を満たすことである。 $\tilde{\delta} \frac{1}{z} \propto \delta(z)$  を思い出すと、(4.6.8) の  $y$  は  $z^0 = q_\sigma$  で 1 位の極を持ち、他では正則である必要がある。よって、 $[\delta(z^0 - q_\sigma)]$  の一次独立性は

$$\dim H^0\left(\Sigma_{\text{red}}, \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}\left(-\sum_a p_a\right) \otimes \mathcal{O}\left(\sum_{\sigma} q_\sigma\right)\right) = 0 \quad (4.6.9)$$

と等価である。

$\Sigma_{\text{red}}$  上の直線束  $\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}(-\sum_a p_a) \otimes \mathcal{O}(\sum_{\sigma} q_\sigma)$  の次数は  $g-1$  である。次数  $g-1$  の直線束は generic には (ほとんどのリーマン面では) 正則切断を持たないが、一般にはモジュライ  $\mathcal{M}$  上の (複素) 余次元 1 の部分複素多様体に対応するリーマン面では正則切断を持つことが知られている。このような現象をコホモロジーのジャンプと呼ぶ。よって、 $\mathfrak{M}$  の

余次元 1|0 部分複素超多様体に対応する超リーマン面においてはゲージ固定条件 (4.6.1) は不正であり、 $q_\sigma$  にピクチャ変更演算子を挿入して相関関数を計算することはできない。実際ピクチャ変更演算子形式では物理的でない極 (spurious singularity) が出てしまうことが [2] で指摘されている。

解決策として、ゲージ固定 (4.6.1) が不正になる付近では PCO の挿入の位置をずらすことが考えられる。しかし、一般に  $\mathcal{M} \rightarrow \Sigma_{\text{red}}$  なる正則写像はないため、この操作はカイラル因子化をあからさまに破り、(数値計算によるのでなければ) よい解析の方法とは思えない。

$g = 0, 1$  では PCO 形式はモジュライ上大域的に正しい。また、高種数でも 4.7 節や [14] で説明されるように特殊な場合ではコホモロジーのジャンプが悪影響をもたらさず、spurious singularity が発生しないため PCO 形式をモジュライ上大域的に使える場合がある。

## 4.7. 散乱振幅の因子化と超モジュライ空間の non-projectedness

4.5 節 (又は付録 B) でみたように、散乱振幅は左右の (超) 共形ブロックをつかって

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_{\widehat{\mathfrak{M}}_{\text{cs}}} \int \prod_{I=1}^{\Delta_e} dp_i \sum_{\{s\}, \{\bar{s}\}} N^{\{s\}, \{\bar{s}\}} \omega_{\{s\}, \{\bar{s}\}} \\ \omega_{\{s\}, \{\bar{s}\}} &= \alpha \wedge \tilde{\alpha} \\ \alpha_{\{s\}} &= \mathcal{D}[m|\eta] \mathcal{F}_{\{s\}}(m, p|\eta) \\ \tilde{\alpha}_{\{\bar{s}\}} &= \mathcal{D}[\tilde{m}|\tilde{\eta}] \tilde{\mathcal{F}}_{\{\bar{s}\}}(\tilde{m}, p|\tilde{\eta}) \end{aligned} \quad (4.7.1)$$

のようにカイラル因子化するのだった。ここで、積分区間は  $\widehat{\mathfrak{M}}_R \times \widehat{\mathfrak{M}}_L$  内の cs 多様体である事を強調するために  $\widehat{\mathfrak{M}}_{\text{cs}}$  と表記した。カイラル因子化は、実際の振幅の解析や 6 章での Feynman  $i\epsilon$  処方 の定義において重要になる。

一方、ピクチャ変更演算子形式において、超弦理論の振幅は通常モジュライ  $\widehat{\mathcal{M}}$  上の積分として表されている。ピクチャ変更演算子形式での散乱振幅の表式は、ゲージ固定 (4.6.1) をした上で (4.7.1) において  $\eta$  積分を先に行い、 $\widehat{\mathfrak{M}}_{\text{red}} = \widehat{\mathcal{M}}_{\text{spin}}$  上の積分に落とすことで得られる。4.6 節で見たように、この操作は PCO の位置を固定したままではモジュライ空間上大域的に行うことはできない。PCO の位置をモジュライに依存させるとカイラル因子化を明確に破ってしまう。

では、よりよい gravitino 背景を選ぶ事によりカイラル因子化を保ったまま奇モジュライを先に積分することができるだろうか。つまり、超弦理論の散乱振幅を奇モジュライに依存しないなんらかの共形ブロック  $\mathcal{G}_{\{s\}}(m, p)$  を使って

$$\mathcal{A} = \int_{\widehat{\mathfrak{M}}_{\text{red}}} dm \int \prod_{I=1}^{\Delta_e} dp_i \sum_{\{s\}, \{\bar{s}\}} N^{\{s\}, \{\bar{s}\}} \mathcal{G}_{\{s\}}(m, p) \tilde{\mathcal{G}}_{\{\bar{s}\}}(\tilde{m}, p) \quad (4.7.2)$$

のように書き表せるだろうか。

この節ではモジュライの境界の問題は考えないので、以下モジュライのコンパクト化は考えずに  $\mathfrak{M}_{\text{cs}}$  について議論する。以降、(超) 共形ブロックの添字  $p, \{s\}, \{\bar{s}\}$  は固定して考え、これらの記号は略す。

奇モジュライについての積分を数学的に書き表す。 $\mathfrak{M}_{\text{cs}}$  が常にもつ cs 超多様体として

の  $\mathfrak{M}_{\text{red}}$  への射影

$$p_{\text{cs}} : \mathfrak{M}_{\text{cs}} \rightarrow \mathfrak{M}_{\text{red}} \quad (4.7.3)$$

をつかって  $\mathfrak{M}_{\text{red}}$  上の微分形式を押し出し

$$\omega' = p_{*,\text{cs}} \omega \quad (4.7.4)$$

によって定義できる。これは定義から

$$\int_{\mathfrak{M}} \omega = \int_{\mathfrak{M}_{\text{red}}} \omega' \quad (4.7.5)$$

を満たす。この操作が奇モジュライについての積分である。

(4.7.4) は因子化を保つだろうか。  $p_{\text{cs}}$  は  $\text{cs}$  超多様体としての射影であるから、この存在はカイラル因子化を保証しない。  $\alpha, \tilde{\alpha}$  はそれぞれ  $\mathfrak{M}_R, \mathfrak{M}_L$  (の  $\mathfrak{M}_{\text{cs}}$  付近) 上の微分形式であるから、  $\mathfrak{M}_R, \mathfrak{M}_L$  それぞれについて複素超多様体の射影

$$\begin{aligned} p_R : \mathfrak{M}_R &\rightarrow \mathfrak{M}_{R,\text{red}} \\ p_L : \mathfrak{M}_L &\rightarrow \mathfrak{M}_{L,\text{red}} \end{aligned} \quad (4.7.6)$$

が存在するならば、これらによる押し出し

$$\begin{aligned} \alpha' &= p_{R,*} \alpha \\ \tilde{\alpha}' &= p_{L,*} \tilde{\alpha} \end{aligned} \quad (4.7.7)$$

によって

$$\omega' = (\alpha' \wedge \tilde{\alpha}') \Big|_{\mathfrak{M}_{\text{cs,red}}} \quad (4.7.8)$$

と書ける。(4.7.6) は定義から正則性、反正則性を保つから、(つまり、  $\alpha$  は  $\mathfrak{M}_{R,\text{red}}$  上の正則 top 形式となるから)  $\omega'$  も因子化している。よって、問題は (4.7.6) の存在、つまり  $\mathfrak{M}_R, \mathfrak{M}_L$  の projectedness である。

$\omega'$  の因子化に超モジュライ空間の正則の意味での projectedness が必要である事は座標の貼り合わせを考えてもわかる。 $\eta$  による積分 (4.7.4) は  $\omega$  の  $\eta$  の次数に関する top 項を取ってくる事を意味する。しかし、  $\eta$  はあくまで局所座標であって、座標変換  $(m|\eta) \mapsto (m'|\eta')$  で

$$m'_1 = m_1 + \eta_1 \eta_2 \quad (4.7.9)$$

のように even 座標に odd 座標の偶数次が混ざる事があってよい。このような座標変換があると、  $\eta$  に関する最高次という概念は超モジュライ上大域的には意味を持たない。(4.7.9) のような貼り合わせを避けられるかどうか projectedness と対応している。

[12] は  $\mathfrak{M}_{g,n_{\text{NS}}^{\pm}, n_{\text{R}}=0}$  ( $\pm$  はスピン構造の偶奇を表した) が以下の場合に non-projected であることを証明している:

- $g \geq 2$  かつ  $g-1 \geq n \geq 1$ ,  $g$  が奇数の時は  $\pm$  両方、  $g$  が偶数のときは偶スピン構造の成分
- $n = 0$  かつ  $g \geq 5$  のとき。



[12] はさらに、 $n = 0, g \geq 3$  の場合、 $n \geq g \geq 2$  でモジュライのコンパクト化を考えた場合にも non-projectedness が予想されるとしている。

このことから、一般には (4.7.4) は因子化を壊す。つまり、超弦理論の振幅を CFT の (奇モジュライに依存しない) 左右の共形ブロックをつかって書き表す事はできない。正則の意味で non-projected な複素超多様体上の積分計算の具体例は付録 A にある。

この因子化の問題は考える振幅によっては特殊な場合には発生しない事を共著者と [14] で示した。正則な埋め込み

$$\begin{aligned} i_R &: \mathfrak{M}_{R,\text{red}} \rightarrow \mathfrak{M}_R \\ i_L &: \mathfrak{M}_{L,\text{red}} \rightarrow \mathfrak{M}_L \end{aligned} \quad (4.7.10)$$

は常に存在する。これらの埋め込みと  $\mathfrak{M}_{R,\text{red}}$  上の正則 top 形式  $\alpha_0$ ,  $\mathfrak{M}_{L,\text{red}}$  上の反正則 top 形式  $\tilde{\alpha}_0$  を使って

$$\omega = \left( i_R^* \alpha_0 \wedge \text{P.D.} \mathfrak{M}_{R,\text{red}} \wedge i_L^* \tilde{\alpha}_0 \wedge \text{P.D.} \mathfrak{M}_{L,\text{red}} \right) \Big|_{\mathfrak{M}_{\text{cs}}} \quad (4.7.11)$$

と書けているとき、 $p_* \omega$  は超モジュライの projectedness に依存せずに

$$p_* \omega = \left( \alpha_0 \wedge \tilde{\alpha}_0 \right) \Big|_{\mathfrak{M}_{\text{cs,red}}} \quad (4.7.12)$$

と因子化する。ここで、 $i_R^*, i_L^*$  は埋め込みによる引き戻し、 $\text{P.D.} \mathfrak{M}_{R,\text{red}}$  は  $\mathfrak{M}_R$  内での  $\mathfrak{M}_{R,\text{red}}$  のポアンカレ双対形式であり、任意の  $\mathfrak{M}_{R,\text{red}}$  上の体積形式  $\beta$  に対して

$$\int_{\mathfrak{M}_R} i_R^* \beta \wedge \text{P.D.} \mathfrak{M}_{R,\text{red}} = \int_{\mathfrak{M}_{R,\text{red}}} \beta \quad (4.7.13)$$

を満たす微分形式として定義される。(4.7.12) の因子化はポアンカレ双対のこの定義からほぼ自動的に従う。

$\text{P.D.} \mathfrak{M}_{R,\text{red}}$  は局所座標  $(m|\eta)$  の上では

$$\text{P.D.} \mathfrak{M}_{R,\text{red}} = \prod_{\sigma=1}^{\Delta_o} \eta_\sigma \delta(d\eta_\sigma) \quad (4.7.14)$$

と表される。また、この局所的な表式は任意の座標変換  $\eta'_\sigma = \psi_\sigma(m|\psi)$  に対して不変:

$$\prod_{\sigma=1}^{\Delta_o} \eta'_\sigma \delta(d\eta'_\sigma) = \prod_{\sigma=1}^{\Delta_o} \eta_\sigma \delta(d\eta_\sigma) \quad (4.7.15)$$

であることを示す事ができ、これを使って (4.7.13) を証明できる。

以上から、(4.7.11) の条件は

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(m|\eta) &= \mathcal{G}(m) \prod_{\sigma=1}^{\Delta_o} \eta_\sigma \\ \tilde{\mathcal{F}}(m|\eta) &= \tilde{\mathcal{G}}(m) \prod_{\sigma=1}^{\tilde{\Delta}_o} \tilde{\eta}_\sigma \end{aligned} \quad (4.7.16)$$

を満たす偶モジュライのみに依存する関数  $\mathcal{G}, \tilde{\mathcal{G}}$  が存在する事と等価である。

[14] は [24] の系が実際にこの条件を満たす事を確認し, [1] の手法に依拠した [24] の計算の正当性を保証した。

## 5. 赤外正則化

本章では、特殊型退化点に伴う赤外発散と、その正則化について述べる。

特殊型退化点における発散は BRST 対称性にアノマリーをもたらす危険があり、このことが弦理論の摂動論の適用可能範囲に制限をつける。また、特殊退化点周りでの超モジュライ空間の  $cs$  構造の非一意性は [2] で指摘された散乱振幅の不定性をもたらす。この不定性は、超モジュライ空間の  $cs$  構造に制限を設ける事によって固定する事ができる。さらに、 $cs$  構造を固定した後でもこの超モジュライ空間の座標変換に伴う赤外正則化の任意性は時空のモジュライに対する有限くりこみをもたらす。

時空の超対称性についても、BRST 対称性と同様のアノマリーが存在しえる。これがアノマラス  $U(1)$  模型におけるループ効果による超対称性の破れに対応する。

### 5.1. 特殊型退化と超モジュライ空間の $cs$ 構造

超弦の散乱振幅はモジュライ  $\widehat{\mathfrak{m}}_{cs}$  上の積分で表されるのだった。4.4 節で述べたように、被積分関数は  $\widehat{\mathfrak{m}}_{cs}$  の退化因子の上で発散している。この章では、特に特殊型の発散に起因する問題について述べる。

特殊型発散とは、外線の運動量関わらず常に発散していることをいう。特殊型発散は分裂退化の内、片側の点の数が  $0,1$  になっているものに対応する退化因子の上で起きる (図 5.1)。<sup>1</sup>

退化因子  $\mathcal{D}_{n_L=0}$  上の退化リーマン面の退化点を通る時空運動量  $P$  は  $A$  側に点の挿入がないために常に  $P=0$  であり、これは零質量状態の伝搬関数の極の発散を生じる。また、 $\mathcal{D}_{n_L=1}$  上の退化リーマン面に関しては、退化点を通る時空運動量  $P$  は  $A$  側に挿入されている唯一の演算子の運動量で決まる。挿入された演算子はすべて on-shell であることを仮定しているので、 $P$  も on-shell であり、極の発散を生じる。

$\mathcal{D}_{n_L=0}$  に対応する特殊退化は、図 5.1(a) のようにタッドポールの寄与を表す。このような退化は特に真空振幅に発散をもたらすため、時空の超対称性が存在するためにはタッドポールは全次数で消えている必要がある。このことは弦理論の定義に従って示されるべきであるが、高次においては flat, orbifold の場合の 2 ループ計算 [7, 15] があるのみである。

タッドポールが消えていない場合、摂動論を行うためには真空の再定義が必要となり、困難を生じる [25]。以後、時空の超対称性を仮定している文脈ではタッドポールはすべて消えているとして取り扱う。5.6 節で超対称性が破れていない事を仮定するとタッドポールの消滅を証明できる事を見る。弦理論の結合定数は  $\phi$  をディラトン期待値として  $g_s = e^\phi$  と表される事に注意すると、ディラトンのタッドポールの消滅 (つまり  $\phi$  のポテンシャルの 1 次項の消滅) は同時に真空エネルギーの消滅を意味する。

$\mathcal{D}_{n_L=1}$  に対応する特殊退化は質量くりこみ, 波動関数くりこみに対応する。この発散はループ 2 点関数の引き起こす質量くりこみによって tree の頂点演算子が on-shell でなく

<sup>1</sup>考えている量が on-shell 散乱振幅でなく、運動量を持たない演算子を挿入している場合はこの限りではない。また、外線の運動量を特殊値に調整して中間状態の極を直接計算しようとしている場合も同様である。

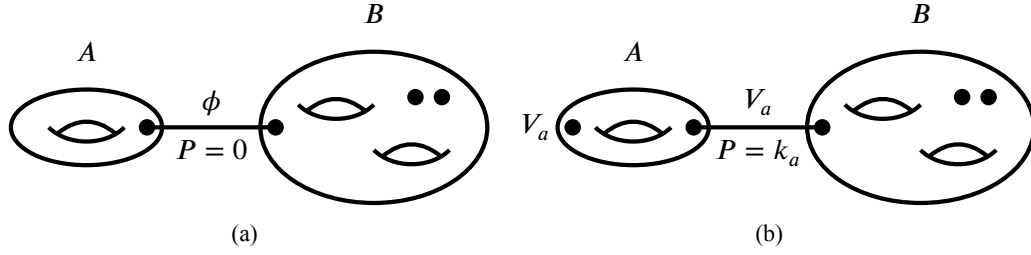


図 5.1.: on-shell 散乱振幅において特殊型発散を生じる退化。A 側が 0 点、または 1 点である。(a) デイラトンなどの零質量スカラー状態が退化点上を飛ぶとき、発散が生じる。(b) 退化点を飛ぶ状態  $\mathcal{O}$  (これは  $V_a$  やその他の演算子の和からなる) のうち、少なくとも挿入した演算子  $V_a$  (運動量  $k_a$ ) に対応する成分が退化点上で on-shell になり、発散を生じる。

なることと関係している。実際、質量くりこみのある粒子の挿入を含む散乱振幅は BRST アノマリーを伴ってそのままでは無矛盾でなくなる事を 5.4 節で見る。

$\mathcal{D}_{n_L=0} \simeq \widehat{\mathfrak{M}}_{\text{cs},g_A} \times \widehat{\mathfrak{M}}_{\text{cs},g_B,n_B}$  での発散を考える。ただし、退化は NS (Type II の時は NSNS) 型であるとする。<sup>2</sup>伝搬関数は縫い合わせパラメータを  $q = q_{\text{NS}}, \tilde{q} = \tilde{q}_{\text{NS}}$  として、

$$q^{L_0-1} \tilde{q}^{\tilde{L}_0-1} \quad (5.1.1)$$

であった。退化点を通る時空運動量は  $P = 0$  だから、デイラトンなどの零質量状態は on-shell で  $L_0 = \tilde{L}_0 = 0$  となる。よって、この特殊型退化のもたらす発散は

$$\mathcal{A}_{\text{sing}} = \int d^2q \frac{1}{q\tilde{q}} \int_{\widehat{\mathfrak{M}}_{\text{cs},g_A,1}} \omega_{g_A,\phi} \int_{\widehat{\mathfrak{M}}_{\text{cs},g_B,n_B+1}} \omega_{g_B,n_B+\phi} \quad (5.1.2)$$

と書く事ができる。ここで、 $\omega_{g_A}$  は種数  $g_A$  の零質量スカラー演算子  $V_\phi$  の一点関数が決める  $\widehat{\mathfrak{M}}_{\text{cs},g_A,1}$  上の体積形式である。 $\omega_{g_B,n_B+\phi}$  は同様に  $\mathcal{V}_\phi$  の双対演算子  $\bar{V}_\phi$  ( $\langle \bar{V}_\phi V_\phi \rangle_{\mathbb{C}\mathbb{P}^1} = 1$ ) および元から挿入していた演算子達が挿入された種数  $g_B$  の相関関数が決める  $\widehat{\mathfrak{M}}_{\text{cs},g_B+1}$  上の体積形式である。 $q, \tilde{q}$  による積分はそれらが  $\mathcal{D}$  の適当な近傍上の座標と解釈できる範囲で取る事にする。

タッドポールが消えるという仮定は

$$\int_{\widehat{\mathfrak{M}}_{\text{cs},g_A,1}} \omega_{g_A,\phi} = 0 \quad (5.1.3)$$

を意味する。一方、(5.1.2) の積分を  $q$  から順に行う事になると、発散している。よって、(5.1.2) は積分の順序に依存した条件つき収束をする広義積分である、ということになる。

質量くりこみからくる特殊型退化の発散も同様である。A 側に挿入された (on-shell) 状態を  $V_a$  とする。退化点を通る状態  $\bar{V}_b$  が tree で  $V_a$  と同じ質量、量子数である部分振幅から発散の寄与がある。 $\omega_{g_A,a,b}$  を種数  $g_A$  の  $V_a \bar{V}_b$  の 2 点相関関数から決まる  $\widehat{\mathfrak{M}}_{\text{cs},g_A,2}$  上の体積要素、 $\omega_{g_B,n_B+b}$  を種数  $g_B$  で元々の演算子に加えて  $\bar{V}_b$  を退化点に挿入して得られる相

<sup>2</sup>タッドポールはスカラーによって生成されるので、ヘテロティック理論では NS 型のみ考えれば良い。Type II 理論では RR 型退化もあり得るが、取り扱いは同様である。

関関数の決める  $\mathfrak{M}_{g_B, n_B+1}$  上の体積形式とすると、発散は

$$\mathcal{A}_{\text{sing}} = \sum_b \int d^2q \frac{1}{q\tilde{q}} \int_{\widehat{\mathfrak{M}}_{\text{cs}, g_A, 2}} \omega_{g_A, a, \bar{b}} \int_{\widehat{\mathfrak{M}}_{\text{cs}, g_B, n_B+1}} \omega_{g_B, n_B+b} \quad (5.1.4)$$

となる。和は前述の通りにとる。

今度も、 $V_a$  に質量くりこみがない事は

$$\int_{\widehat{\mathfrak{M}}_{\text{cs}, g_A, 2}} \omega_{g_A, a, \bar{b}} = 0 \quad (5.1.5)$$

を意味し、この場合 (5.1.4) は条件付き収束する広義積分となる。質量くりこみに関係する特別退化の場合は条件 (5.1.5) は挿入した演算子に依存する事に注意する。一般に、有質量状態は BPS でない限り質量くりこみを受けるので、この条件を満たさない。一方、超対称理論においてはツリーで零質量の状態のポテンシャルが生成される事は超対称性のため非常に難しい。このため、考察する散乱を零質量状態に限る。non-BPS な有質量状態は通常不安定なので、それらを外線を持つような S 行列は存在しない。よって、non-BPS でかつ安定な有質量状態を持たないような理論においては、この仮定をおいても一般性を失わない。<sup>3</sup>

この広義積分を定義するために、カットオフ  $\varepsilon$  を導入して  $q\tilde{q} \geq \varepsilon^2$  の部分のみ積分してから  $\varepsilon \rightarrow 0$  の極限を取る事にしたい。つまり、 $q\tilde{q} < \varepsilon^2$  で決まる特殊型退化因子  $\mathcal{D}$  の近傍  $\mathcal{D}_{<\varepsilon}$  を抜いたモジュライ空間を  $\widehat{\mathfrak{M}}_{\text{cs}, \geq \varepsilon} = \widehat{\mathfrak{M}}_{\text{cs}} \setminus \mathcal{D}_{<\varepsilon}$  として、散乱振幅を

$$\mathcal{A} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\widehat{\mathfrak{M}}_{\text{cs}, \geq \varepsilon}} \omega \quad (5.1.6)$$

のように定めたい。

このためには、 $q\tilde{q} \geq \varepsilon^2$  に意味をつけなければならない。 $q, \tilde{q}$  は  $\mathfrak{M}_{\text{cs}} \subset \mathfrak{M}_R \times \mathfrak{M}_L$  の特殊退化周りの座標であった。 $\tilde{q}$  は  $q$  の複素共役ではないので、 $q\tilde{q} \geq \varepsilon^2$  という式は厳密には ill-defined である。 $\mathfrak{M}_{\text{cs}}$  の定義を思い出すと、 $\mathfrak{M}_{\text{cs}}$  の実座標のうちの 2 つ  $t, u$  を

$$q = t + iu + (\text{nilpot.}) \quad \tilde{q} = t - iu + (\text{nilpot.}) \quad (5.1.7)$$

ととれる ((2.3.1) 式)。(ヘテロティック理論の場合は、 $\tilde{q} = t - iu$  と取るのが自然である。) よって、ill-defined な式  $q\tilde{q} \geq \varepsilon^2$  の代わりに  $t^2 + u^2 \geq \varepsilon^2$  によって  $\widehat{\mathfrak{M}}_{\text{cs}, \geq \varepsilon}$  を定める事ができる。

2.3 節で見たように、 $\mathfrak{M}$  の定義には (5.1.7) のように冪零項分の不定性があったのだった。<sup>4</sup> この不定性が (5.1.6) のような広義積分に影響するかどうかを見る。振幅の  $\mathcal{A}_{\text{sing}}$  をのぞいた部分への  $\mathcal{D}$  近傍の寄与は

$$\sum_{\substack{\mathcal{O} \\ h_{\mathcal{O}} > 0 \text{ or } \tilde{h}_{\mathcal{O}} > 0}} \int d^2q q^{h_{\mathcal{O}}-1} \tilde{q}^{\tilde{h}_{\mathcal{O}}-1} \int_{\widehat{\mathfrak{M}}_{\text{cs}, g_A, 1}} \omega_{g_A, \mathcal{O}} \int_{\widehat{\mathfrak{M}}_{\text{cs}, g_B, n_B+1}} \omega_{g_B, n_B+\mathcal{O}} \quad (5.1.8)$$

と書ける。ここで、 $\mathcal{O}$  は演算子の基底であって共形演算子であるもの、 $h, \tilde{h}$  は  $L_0, \tilde{L}_0$  の固有値、 $\omega_{g_A, \mathcal{O}}$  などは  $\mathcal{O} = V_{\phi}$  の時に準じる。

<sup>3</sup>non-BPS stable 状態の質量くりこみの取り扱いについては、[26] がある。

<sup>4</sup> $\mathfrak{M}_{\text{cs}}$  を一つ決めても、座標系  $t, u$  の取り方には任意性が残る。これについては 5.3 節で取り扱う。

さて、 $q$  を  $A$  部分の奇モジュライの 2 次で  $q + a\eta_1\eta_2$  とずらしたとする。このとき、(5.1.8) の  $h_\theta = 1, \tilde{h}_\theta = 0$  なる  $\theta$  の寄与は

$$\int d^2q d\tilde{q} \left( \frac{1}{\tilde{q}} \right) \int_{\widehat{\mathfrak{M}}_{\text{cs},g_A,1}} a\eta_1\eta_2 \omega_{g_A,\theta} \int_{\widehat{\mathfrak{M}}_{\text{cs},g_B,n_B+1}} \omega_{g_B,n_B+\theta} \quad (5.1.9)$$

だけずれる。 $\partial_q \frac{1}{\tilde{q}} = 2\pi\delta(q, \tilde{q})$  よりこれは 0 でない。

この不定性が、[2,3] 等で指摘された超弦理論の散乱振幅の不定性である。不定性を固定するために、超モジュライ  $\widehat{\mathfrak{M}}_{\text{cs}}$  の cs 構造を固定する必要がある。これについて、妥当であると思われる処方

$$q = \tilde{q} = 0 \quad \text{at } t = u = 0 \quad (5.1.10)$$

を課す事である。これを壊さないような  $q$  のシフト (例えば、 $q \rightarrow q + q\eta_1\eta_2$ ) は (5.1.9) のようなずれを起こさない。これは積分経路  $\widehat{\mathfrak{M}}_{\text{cs}}$  の定義の一部であり、作用等から直接決まる条件ではない。<sup>5</sup>

## 5.2. アノマラス $U(1)$ 模型における超モジュライの不定性

$\widehat{\mathfrak{M}}_{\text{cs}}$  の定義の不定性の影響が出る例として、[11] で取り上げられている模型がある。

この理論は、ヘテロティック  $SO(32)$  理論<sup>6</sup> を複素 3 次元カラビヤウ多様体  $Y$  でコンパクト化して得られる理論であり、ループ効果で超対称性が破れる理論として [28–30] で調べられていた。この節ではこの模型の超対称性の破れに伴う 1 ループでの質量のシフトの計算が  $\mathfrak{M}_{\text{het}}$  の定義の不定性の影響を受ける事を見る。<sup>7</sup>

まず、低エネルギー有効場の理論を使ってこの模型の期待される振る舞いを確認する。 $SO(32) \supset SU(3)$  をカラビヤウ多様体のホロノミーと同一視するようにコンパクト化を行うため、ゲージ対称性は  $SO(26) \times U(1)$  に破れる。この模型は  $U(1)SO(26)^2$  の形の三角アノマリーを持つが、このアノマリーは Green-Schwarz 機構によってキャンセルされているはずである。以後、この  $U(1)$  対称性のことをアノマラス  $U(1)$  と呼ぶが、アノマリーは実際には相殺しているので理論の矛盾を意味しない。

1 ループの Green-Schwarz 相互作用は、 $B$  を NS2 形式場として  $\int_{\mathbb{R}^{1,3} \times Y} B \wedge \text{Tr}_{SO(32)} F_{SO(32)}^4$  の形をする。4 次元理論にコンパクト化すると、この相互作用は

$$S_{\text{GS}} = \frac{k}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^{1,3}} B \wedge F_{U(1)}, \quad k = \frac{1}{6(2\pi)^3} \int_Y \text{Tr}_{SU(3)} F_{SU(3)}^3 \quad (5.2.1)$$

を作る。これに  $B$  の運動項  $\int H \wedge *H$  を加えてアーベル双対を取ると  $B$  の双対場  $a$  の運動項は

$$(da + kA)^2 \quad (5.2.2)$$

<sup>5</sup>一般に、経路積分の積分経路の指定はアプリアリに得られる物ではなく、理論の定義の一部と捉えるべきである。[27]

<sup>6</sup>正確にはゲージ群は  $Spin(32)/\mathbb{Z}_2$  であるが、摂動的な散乱振幅の計算ではゲージ群の大域構造は問題にならない。

<sup>7</sup>1 ループで質量シフトが出るので、2 ループ以上で質量シフトの起こる粒子を含む散乱振幅は計算できない。また、[11] にあるように 2 ループで真空振幅が生成されるため、3 ループ以上の計算には真空の再定義も必要となる。

の形になる。これを不変にするゲージ変換は、パラメータを  $\xi$  として

$$\delta A = -d\xi \quad \delta a = k\xi \quad (5.2.3)$$

であり、 $e^{ia}$  が電荷  $k$  の演算子として振る舞う。 $e^{ia}$  の期待値が 0 になることはないため、この  $U(1)$  ゲージ対称性は破れる。

$a$  は 10 次元 2 形式場から来ている事を思い出すと、これは 4 次元理論のディラトン多重項

$$S = e^{-2}\phi - ia + \dots \quad (5.2.4)$$

の虚部である。ディラトン多重項のケーラーポテンシャルはツリーでは

$$K_{\text{tree}}(S, S^\dagger) = -\log(S + S^\dagger) \quad (5.2.5)$$

である。超場  $S$  のゲージ変換は、コンポーネントのゲージパラメータ  $\xi$  を最低次コンポーネントとするカイラル超場を  $\Xi$  として

$$\delta S = -ik\Xi \quad (5.2.6)$$

であるため、(5.2.5) にはゲージ不変性を回復するような量子補正がはいり、

$$K(S, S^\dagger) = -\log(S + S^\dagger + kV) \quad (5.2.7)$$

の形にならなければならない。

この形のケーラーポテンシャルは、Fayet-Iliopoulos 項

$$\frac{k}{\Re S} V \quad (5.2.8)$$

を作るため、補助場  $D$  の期待値は

$$D = \frac{k}{\Re S} + \sum_a e_a |\rho_a|^2 = g_s^2 k + \sum_a e_a |\rho_a|^2 \quad (5.2.9)$$

となる。ここで、 $\rho_a$  は  $U(1)$  電荷を持つスカラー場、 $e_a$  をそのチャージとした。 $g_s = e^{\langle \phi \rangle}$  は結合定数である。よって  $D$  項ポテンシャルは

$$\frac{D^2}{2g_s^2} = \frac{k^2 g_s^2}{2} + \sum_a \frac{k e_a}{2} |\rho_a|^2 + \dots \quad (5.2.10)$$

となり、1 ループで  $\rho_a$  の質量が、2 ループで真空期待値が生成する。 $D$  項で電荷を持つフェルミオンの質量項は生成できないため、 $\rho_a$  の多重項の質量は 1 ループで分離する。

この節の残りでは  $\rho_a$  の質量が 1 ループで生成する事を超弦理論の計算から導く。

世界面カイラル超場のうち  $\mathbb{R}^{1,3}$  をターゲットにするものを  $\mathcal{X}^\mu$ ,  $Y$  をターゲットにするものを  $\mathcal{Y}^i, \mathcal{Y}^{\bar{i}}$ 、 $SO(26)$  に足を持つ反正規世界面フェルミオンの超場を  $\Lambda_T, SU(3)$  に足を持つ超場を  $\Lambda^i, H^{1,1}(Y)$  の代表元を  $\omega_{i,\bar{i}}^a, a = 1, \dots, h^{1,1}(Y)$  とする。

$SO(32)$  の随伴表現の  $U(1) \times SU(3) \times SO(26) \subset SO(32)$  の下での分解のうち、 $U(1)$  電荷を持つ  $(3, 26)^1$  表現に属するカイラル多重項のスカラー場  $\rho_T^a$  を考える。これは  $H^{1,1}(Y)$

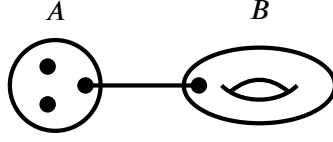


図 5.2.: (5.2.13) に関する特殊型退化。OPE からこの退化点を通る on-shell 状態は存在しないため発散はしないが、 $V_D$  が通る場合の寄与が超モジュライの cs 構造に依存する。

の次元の分だけある。 $\rho_T^a$  に対応する頂点演算子は

$$V_{T,k}^a(z, \bar{z}|\theta) = \Lambda_T \Lambda^i \omega_{i,i}^a D_\theta \mathcal{Y}^i \exp(k_\mu \mathcal{X}^\mu) \quad (5.2.11)$$

の形になる。また、 $\rho^{a\dagger}$  に対応する頂点演算子は

$$\bar{V}_{T,k}^a(z, \bar{z}|\theta) = \Lambda_T \Lambda^i \omega_{i,i}^a D_\theta \mathcal{Y}^i \exp(k_\mu \mathcal{X}^\mu) \quad (5.2.12)$$

である。

$\rho^a$  の 1 ループにおける質量生成を計算するためには、 $\rho\rho^\dagger$  の運動量 0 の散乱振幅

$$\mathcal{A}_1(V_{T,0} \bar{V}_{T',0}) = \int_{\mathfrak{M}_{\text{het}}} \frac{d^2\tau}{4\mathfrak{S}\tau} - i\mathcal{D}[z, \bar{z}|\theta_1, \theta_2] \langle V_T(z, \bar{z}|\theta_1) \bar{V}_{T'}(0, 0|\theta_2) \rangle_{g=1} \quad (5.2.13)$$

を計算すればよい。<sup>8</sup>ゴーストの寄与は自明になるため略した。 $V_T$  は  $V_{T,k=0}$  を、 $\tau$  は even スピン構造超トーラスのモジュライを表す。この振幅は時空パリティを保つため、odd スピン構造超トーラスの寄与はない。<sup>9</sup>

振幅 (5.2.13) は運動量 0 の演算子を挿入しているため、図 5.1 以外に、図 5.2 も特殊型退化になる。この特殊型退化に伴う不定性が重要になる。

(5.2.13) を計算するために、 $V_T \bar{V}_{T'}$  の OPE を考える。4次元で残っている超対称性が  $\mathcal{N} = 1$  のみであるとすると、関係する項は

$$\begin{aligned} V_T(z, \bar{z}|\theta_1) V_{T'}(0, 0|\theta_2) &\sim \frac{\delta_{TT'} V_D(0, 0)}{\bar{z}} + \mathcal{O}(1) \\ V_D &= J_{\bar{\lambda}} J_\psi \\ J_{\bar{\lambda}} &= g_{\bar{i}\bar{i}} \bar{\lambda}^{\bar{i}} \bar{\lambda}^{\bar{i}} \\ J_\psi &= g_{\bar{i}i} \psi^{\bar{i}} \psi^i \end{aligned} \quad (5.2.14)$$

である。 $g_{\bar{i}\bar{i}}$  は  $Y$  のケーラー計量、 $J_{\bar{\lambda}}$  はアノマラスな  $U(1)$  対称性のカレント、 $J_\psi$  は内部空間部分の  $\mathcal{N} = (2, 2)$  SCFT の  $U(1)_R$  対称性のカレントである。定数項にある演算子  $g_{\bar{i}\bar{i}} \partial Y^{\bar{i}} \partial Y^{\bar{i}} \theta_1 \theta_2$  は GSO 相殺によりスピン構造の和の後で寄与しない。このことは平坦カラビヤウオービフォールドの場合には標準的な議論により示す事ができる。一般のカラビヤウ多様体がターゲットの場合についての議論は [11] にある。

<sup>8</sup> [28, 30] では運動量  $k, k^2 \neq 0$  の off-shell 振幅を形式的に考えて  $k^2 \rightarrow 0$  の極限が正しい答えを出しうることを議論している。本論文、及び [11] では on-shell 振幅の定式化の中でも cs 構造の固定を考慮に入れる事によって正しい答えを系統的に得る事ができることを示す。

<sup>9</sup> odd スピン構造超トーラス寄与があるとすると、これは中間状態に (GSO 射影された) R 粒子が飛ぶ事を意味するが、R 粒子のスペクトラムは (GSO 射影のために) 時空のパリティをやぶっているため矛盾する。



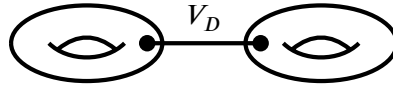


図 5.3.: アノマラス  $U(1)$  模型の 2 ループ真空振幅に寄与する特殊退化

結局、

$$\mathcal{A}_1(V_T \bar{V}_{T'}) = \delta_{TT'} \int_{\mathfrak{M}_{\text{het}}} \frac{d^2\tau}{4\mathfrak{S}\tau} - i\mathcal{D}[z, \bar{z}|\theta] \frac{1}{\bar{z}} \langle V_D \rangle_{g=1} \quad (5.2.15)$$

となる。(5.2.15) は一見  $\theta$  積分で消えるように見えるが、この式は (5.1.8) で  $h_\theta = 1, \tilde{h}_\theta$  とした時の形をしているため図 5.2 の特殊退化点周りの超モジュライ  $\mathfrak{M}_{\text{het}}$  の cs 構造の不定性の影響を受ける。

cs 構造の固定の式 (5.1.10) の  $q$  は超リーマン面の縫い合わせパラメータであった。図 5.2 が  $(z|\theta_1), (0, |\theta_2)$  に点がついた点付き超トーラスを表すためには、縫い合わせパラメータは  $A$  部分の超球面の自己同型  $OSP(1|2)$  で不変な形  $q = z - \theta_1\theta_2$  でなければならない。(5.1.10) の  $t, u$  は  $\bar{z} = t - iu$  と取るのが自然だから、 $\bar{z} = 0$  で  $z = \theta_1\theta_2$  となる。

よって、(5.2.15) の積分は退化点で  $z = \theta_1\theta_2$  である事を考慮に入れると、(5.1.9) で  $a = 1$  として

$$\mathcal{A}_1(V_T \bar{V}_{T'}) = 2\pi \int \frac{d^2\tau}{4\mathfrak{S}\tau} \langle V_D \rangle_{g=1} \quad (5.2.16)$$

となる。

$V_D$  が  $U(1)$  カレント達の積で書かれているため、 $\langle V_D \rangle_{g=1}$  は理論のスペクトルを元に計算する事ができ、アノマラス  $U(1)$  のアノマリー ( $\text{Tr}Q, Q$  は  $J_\lambda$  の電荷) に比例する事がわかる。このことから、 $V_D$  は「補助場  $D$  の頂点演算子」と思う事ができる。

以上より、 $\mathcal{A}_1(V_T \bar{V}_{T'})$  は非零であり、1 ループで  $\rho$  のカイラル多重項に質量分裂ができることがわかった。2 ループで真空振幅が生成される事については [11, 15] に計算がある。2 ループ真空振幅の計算では、図 5.2 の特殊退化で、退化点を  $V_D$  が通る部分からの寄与があり、場の理論での計算と同様に真空振幅が  $\langle V_D \rangle_{g=1}^2$  に比例することがわかる。

また、[11] では 5.5 節で議論する時空超対称性の Ward 高橋恒等式 (5.5.10) の goldstino の生成を表す項が 1 ループで非零になることも示されている。

### 5.3. 有限くりこみ

この節、及び次の節はボソン弦と超弦理論で取り扱いがほぼ変わらないため、簡単のためにボソン弦理論で議論する。

(5.1.6) は広義積分であるため、値は極限の取り方に依存する。ある退化因子  $\mathcal{D}$  周りの座標  $q, \tilde{q}$  に対する制限  $q\tilde{q} \geq \varepsilon^2$  は座標に依存した条件であるため、 $\varepsilon$  が定数であるという言明は座標依存であって、一般には  $\varepsilon$  は  $q$  やその他のモジュライに依存すると考えるべきである。<sup>10</sup> よって、(5.1.6) を定義する極限に「自然な」やり方は存在しない。<sup>11</sup> この節では極限の取り方による不定性は時空のモジュライのくりこみと波動関数くりこみによつ

<sup>10</sup>  $q$  が属する余法線ベクトル束は一般に自明化不可能なので、 $\mathcal{D}$  上大域的に切断を定義する事すらできない。  
<sup>11</sup> 時空理論のモジュライの区別可能な点 (例えば対称性が拡大する点) における理論を考えたい場合は、その対称性を保つような極限を選ぶなどしてある程度指定する事ができる。

て吸収できる事を見る。

あるタッドポールと関係する特殊型退化因子  $\mathcal{D}_{g_A, (g_B, n)} \simeq \widehat{\mathcal{M}}_{g_A, 1} \times \widehat{\mathcal{M}}_{g_B, n+1}$  を一つ固定して議論する。ただし、考えている  $n$  個の頂点演算子  $\mathcal{V}_i$  はすべて  $B$  側にあるとする。

$\mathcal{D}$  周りの  $\mathcal{D}$  に垂直な方向の座標  $q$  は  $\widehat{\mathcal{M}}_{g_A+g_B, n} \supset \mathcal{D}_{g_A, (g_B, n)}$  の正則余法線ベクトル束

$$\mathcal{N}_{g_A, (g_B, n)}^{-1} \rightarrow \mathcal{D}_{g_A, (g_B, n)} \quad (5.3.1)$$

の切断である。 $\tilde{q}$  も同様に反正則余法線ベクトル束  $\widetilde{\mathcal{N}}_{g_A, (g_B, n)}^{-1}$  の切断である。 $\mathcal{M}_{\geq \varepsilon}$  の定義は、 $\mathcal{N}^{-1}, \widetilde{\mathcal{N}}^{-1}$  上のエルミート計量  $h_{\mathcal{N}}, \tilde{h}_{\widetilde{\mathcal{N}}}$  を取って<sup>12</sup>、 $|q\tilde{q}| := h_{\mathcal{N}}(q)\tilde{h}_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\tilde{q}) \geq \varepsilon^2$  で行う。

法線束  $\mathcal{N}_{g_A, (g_B, n)}$  はある  $\widehat{\mathcal{M}}_{g_A, 1}, \widehat{\mathcal{M}}_{g_B, n+1}$  上の ( $g = g_A + g_B$  に依存しない) 直線束  $\mathcal{L}_{g_A}, \mathcal{L}_{g_B}$  によって

$$\mathcal{N}_{g_A, (g_B, n)} \simeq \mathcal{L}_A \boxtimes \mathcal{L}_B \quad (5.3.2)$$

と書ける [21]。 $\boxtimes$  は外部積を表す。このため、エルミート計量もそれぞれのエルミート計量の積  $h_{\mathcal{N}_{g_A, (g_B, n)}} = h_A h_B$  と取り、 $h_A$  や  $h_B$  は  $g = g_A + g_B$  には依存させないとするのが自然である。

(5.1.2) の寄与は局所的には

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\text{sing}} &= \sum_{\alpha} \int_{\Lambda^2 \geq q\tilde{q} \geq \varepsilon^2} d^2q \frac{1}{q\tilde{q}} \int_{\widehat{\mathcal{M}}_{g_A, 1}} \omega_{g_A, \phi_{\alpha}} \int_{\widehat{\mathcal{M}}_{g_B, n_B+1}} \omega_{g_B, n_B + \bar{\phi}_{\alpha}} \\ &\sim -4\pi \log \varepsilon \sum_{\alpha} \int_{\widehat{\mathcal{M}}_{g_A, 1}} \omega_{g_A, \phi_{\alpha}} \int_{\widehat{\mathcal{M}}_{g_B, n_B+1}} \omega_{g_B, n_B + \bar{\phi}_{\alpha}} \end{aligned} \quad (5.3.3)$$

と書ける。和は零質量粒子状態  $\phi_{\alpha}$  について取る。 $\phi_{\alpha}$  は実スカラー場とすると、 $\bar{\phi} = \phi$  となる。エルミート計量を  $\mathcal{M}_{g_A, 1}$  上の関数  $f_A$  と  $\mathcal{M}_{g_B, n+1}$  上の関数  $f_B$  を使って  $h_A \rightarrow e^{-f_A} h_{g_A}, h_B \rightarrow e^{-f_B}$  と (反正則側も同様に) 動かしたとすると、これは  $\varepsilon^2 \rightarrow \varepsilon e^{f_A + \tilde{f}_A + f_B + \tilde{f}_B}$  と同じであるから、(5.3.3) は

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{A}_g &= -4\pi \sum_{\alpha} \left( \int_{\widehat{\mathcal{M}}_{g_A, 1}} f'_A \omega_{g_A, \phi_{\alpha}} \int_{\widehat{\mathcal{M}}_{g_B, n_B+1}} \omega_{g_B, n_B + \phi_{\alpha}} + \int_{\widehat{\mathcal{M}}_{g_A, 1}} \omega_{g_A, \phi_{\alpha}} \int_{\widehat{\mathcal{M}}_{g_B, n_B+1}} f'_B \omega_{g_B, n_B + \phi_{\alpha}} \right) \\ &= -4\pi \sum_{\alpha} \int_{\widehat{\mathcal{M}}_{g_A, 1}} f'_A \omega_{g_A, \phi_{\alpha}} \int_{\widehat{\mathcal{M}}_{g_B, n_B+1}} \omega_{g_B, n_B + \phi_{\alpha}} \end{aligned} \quad (5.3.4)$$

となる。 $f' = f + \tilde{f}$  とし、タッドポールが消えるという仮定 (5.1.3) をつけた。

$$\Delta_{g_A} \phi_{\alpha} = -4\pi \int_{\widehat{\mathcal{M}}_{g_A, 1}} f'_A \omega_{g_A, \phi_{\alpha}} \quad (5.3.5)$$

とすると

$$\delta \mathcal{A}_g = \sum_{\alpha} \Delta_{g_A} \phi_{\alpha} \int_{\widehat{\mathcal{M}}_{g_B, n_B+1}} \omega_{g_B, n_B + \phi_{\alpha}} \quad (5.3.6)$$

<sup>12</sup>超弦理論を考えている際は、このエルミート計量は  $\mathcal{M}$  の奇モジュライに依存しないとする

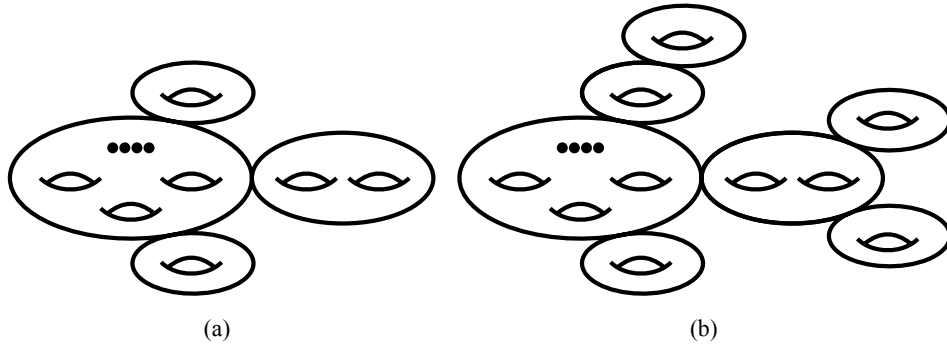


図 5.4.: (a) 複数のリーマン面に退化している状況。時空モジュライのくりこみに効くのは一つの部分に演算子が集まっているような退化である。(b) (a) がさらに退化した状態。

零運動量零質量粒子  $\phi_\alpha$  を含む相関関数は時空モジュライ  $\phi_\alpha$  による微分であると解釈できるから、

$$\delta \mathcal{A}_g = \sum_\alpha \Delta_{g_A} \phi_\alpha \frac{\partial}{\partial \phi_\alpha} \mathcal{A}_{g-g_A} \quad (5.3.7)$$

と書ける。

さらに  $\mathcal{L}_{g_A}$  上の計量をすべての  $g_A$  について一斉に替えたとすると、全次数を合わせた振幅  $\mathcal{A} = \sum_g g_s^{2g-2} \mathcal{A}_g$  は

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{A} &= \sum_\alpha \Delta \phi_\alpha \frac{\partial}{\partial \phi_\alpha} \mathcal{A} \\ \Delta \phi_\alpha &= \sum_g g_s^{2g-2} \Delta_g \phi_\alpha \end{aligned} \quad (5.3.8)$$

だけずれる。

ここまでの議論では退化が一つだけ起きている部分の寄与のみを考えてきた。図 5.4(a) のような退化からの寄与をすべて足すと、

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{A} &= \sum_k \frac{1}{k!} \left( \sum_\alpha \Delta \phi_\alpha \frac{\partial}{\partial \phi_\alpha} \right)^k \mathcal{A} \\ &= \exp \left( \sum_\alpha \Delta \phi_\alpha \frac{\partial}{\partial \phi_\alpha} \right) \mathcal{A} \end{aligned} \quad (5.3.9)$$

となる。これは  $\Delta \phi_\alpha$  をパラメータとする時空モジュライ上の座標変換である。さらに図 5.4(b) のような状況まで含めて考えると、時空モジュライの零運動量  $n$  点関数が全次数で消えているとき、つまりモジュライのポテンシャルが生成されない場合は  $\delta \mathcal{A}$  は  $\Delta \phi_\alpha$  の非線形な関数をパラメータとする時空モジュライ上の座標変換になる事が帰納的に示せる。

次に質量くりこみと関係した特殊退化について考える。取り扱いはタッドポールに関連したものと同じである。演算子  $V_a$  とその他の演算子を含む振幅を  $\mathcal{A}_a$  とし、退化の  $A$  部分に  $V_a$  が、 $B$  部分にそれ以外の演算子があるような特殊型分裂退化を考える。エルミー

ト計量の取り替えによる変化は

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{A}_a &= \sum_b Z_{a,b}\mathcal{A}_b \\ Z_{a,b} &= \sum_g g_s^{2g-2}(-4\pi) \int_{\widehat{\mathcal{M}}_{g,2}} f'_A \omega_{g_A, a, \bar{b}}\end{aligned}\quad (5.3.10)$$

となる。 $b$ の和は $a$ と同じ質量、量子数にある物理的状態の完全系について取る。これは行列 $Z$ による波動関数くりこみである。ほかの演算子も孤立して退化する状況も考えると、振幅に含まれるすべての外線に対して波動関数くりこみが行われる。

## 5.4. BRST 対称性と BRST アノマリー

超弦理論の S 行列が無矛盾であるためには、BRST exact な演算子  $\{Q_B, \mathcal{W}\}$  を含む S 行列が 0 である必要がある。時空理論としては、BRST null 状態の分離は時空のゲージ対称性を表している。本論文の定式化では  $\{Q_B, \mathcal{W}\}$  は共形演算子でなければならない。このとき、ゲージパラメータ  $\mathcal{W}$  は  $c$  や  $\gamma$  の微分を含まないように取る事ができる ([10] の Appendix B,C)。本節ではこの事を認めて、(主にボソン弦の場合について) $\{Q_B, \mathcal{W}\}$  の分離の形式的な説明と起こりうるアノマリーについて説明する。

CFT の相関関数を  $\langle \rangle$  で表す。モジュライ積分の被積分体積形式は

$$\begin{aligned}\omega &= \left\langle \{Q_B, \mathcal{W}\} \prod_a \mathcal{V}_a \omega_0 \right\rangle \\ \omega_0 &= \prod_i^{\Delta_e} \langle \mu_i | b \rangle m_i \prod_{\bar{i}}^{\Delta_e} \langle \tilde{\mu}_{\bar{i}} | \tilde{b} \rangle d\tilde{m}_{\bar{i}}\end{aligned}\quad (5.4.1)$$

であった。ここで  $\mathcal{V}_a$  は BRST 不変な共形演算子である。相関関数自体が  $Q_B$  不変だから、

$$\begin{aligned}\omega &= \left\langle \left\{ Q_B, \mathcal{W} \prod_a \mathcal{V}_a \prod_i^{\Delta_e} \langle \mu_i | b \rangle dm_i \right\} \right\rangle - \left\langle \mathcal{W} \{Q_B, \prod_a \mathcal{V}_a \prod_i^{\Delta_e} \langle \mu_i | b \rangle dm_i\} \right\rangle \\ &= - \left\langle \mathcal{W} \{Q_B, \prod_a \mathcal{V}_a \prod_i^{\Delta_e} \langle \mu_i | b \rangle dm_i\} \right\rangle \\ &= - \left\langle \mathcal{W} \prod_a \mathcal{V}_a \sum_j (-1)^{j-1} \langle \mu_j | T \rangle dm_j \prod_{i \neq j}^{\Delta_e} \langle \mu_i | b \rangle dm_i \right\rangle \\ &= -d\nu \\ \nu &= \left\langle \mathcal{W} \prod_a \mathcal{V}_a \nu_0 \right\rangle \\ \nu_0 &= \sum_j \prod_{i \neq j} \langle \mu_i | b \rangle dm_i \prod_{\bar{i}} \langle \tilde{\mu}_{\bar{i}} | \tilde{b} \rangle d\tilde{m}_{\bar{i}} + \sum_{\bar{j}} \prod_{i \neq \bar{j}} \langle \mu_i | b \rangle dm_i \prod_{\bar{i} \neq \bar{j}} \langle \tilde{\mu}_{\bar{i}} | \tilde{b} \rangle d\tilde{m}_{\bar{i}}\end{aligned}\quad (5.4.2)$$

となる。ここで  $\{Q_B, b\} = T$  を使った。 $\langle \mu | b \rangle$  などは  $\langle \hat{\mu} | \hat{b} \rangle$  などの略記である。d はモジュライ空間上の外微分演算子である。よって、BRST null 状態を含む振幅は

$$\int_{\widehat{\mathcal{M}}} \omega = - \int_{\widehat{\mathcal{M}}} d\nu \stackrel{?}{=} 0 \quad (5.4.3)$$

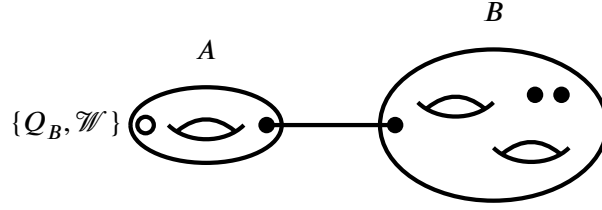


図 5.5.: BRST アノマリーに寄与する特殊型退化。

となり、形式的には消える。

(5.4.3) は退化因子の存在を考慮していない。タッドポールと質量くりこみがない事を仮定すると、図 5.1 のタイプの特殊型退化からの寄与はない。<sup>13</sup> (運動量が 0 でない)BRST null 状態の挿入を考えている時はこれらに加えて図 5.5 のタイプの退化の寄与がある。この特殊型退化の因子を  $\mathcal{D} \simeq \mathcal{M}_A \times \mathcal{M}_B$  とする。 $\omega$  の積分は  $\mathcal{D}$  の周りを  $\varepsilon$  でカットオフしたモジュライ空間  $\widehat{\mathcal{M}}_{\geq \varepsilon}$  で考えるべきだから

$$\begin{aligned} \int_{\widehat{\mathcal{M}}_{\geq \varepsilon}} \omega &= - \int_{\widehat{\mathcal{M}}_{\geq \varepsilon}} dv \\ &= - \int_{\partial \widehat{\mathcal{M}}_{\geq \varepsilon}} v \end{aligned} \quad (5.4.4)$$

の寄与がある。

$v$  が  $\mathcal{D}$  周りでどのような形をするかを調べる。 $\omega$  の  $\mathcal{D}$  周りでの特異な部分のふるまいは

$$\omega_{\text{sing}} = \sum_i d^2 q \frac{1}{q\tilde{q}} \wedge \omega_{A,i} \wedge \omega_{B,i} \quad (5.4.5)$$

と書けるのだった。ここで、 $\omega_{A,i}, \omega_{B,i}$  はそれぞれ  $\mathcal{M}_A, \mathcal{M}_B$  上の体積形式であり、退化点を物理的状態  $\mathcal{V}_i$  がとおる部分の寄与を表す。ここから、 $v$  の形は

$$\begin{aligned} v &= d^2 q \frac{1}{q\tilde{q}} \wedge \sum_i v_{A,i} \wedge \omega_{B,i} + d(q\tilde{q}^{-1})q^{-1}\tilde{q} \wedge v' + v_{\text{irrel}} \\ v_{A,i} &= \langle \mathcal{W} \mathcal{V}_i v_0 \rangle_{g_A} \\ dv_{A,i} &= -\omega_{A,i} \end{aligned} \quad (5.4.6)$$

と書ける。ここで  $v'$  は  $\mathcal{M}_A \times \mathcal{M}_B$  上のある体積形式であり、 $v_{\text{irrel}}$  は (5.4.4) に寄与しない部分とした。

第二項は (5.4.2) の  $j$  についての和のうちモジュライ  $q, \tilde{q}$  に伴う  $\langle \mu_q | b \rangle$  が欠けた部分の寄与である。よって散乱振幅の計算の際に使った伝搬関数  $b_0 \tilde{b}_0 q^{L_0-1} \tilde{q}^{\tilde{L}_0-1}$  から  $\langle \mu_q | b \rangle = q^{-1} b_0$  を省いた

$$(b_0 - \tilde{b}_0) q^{L_0-1} \tilde{q}^{\tilde{L}_0-1} (q + \tilde{q}) \quad (5.4.7)$$

がこの項を計算するのに使うべき伝搬関数である。

<sup>13</sup>質量くりこみが消えていない振幅については、物理的状態に対する BRST 変換に量子補正が入る。[31]

この伝搬関数の極がもたらす寄与を考える。A 部分に挿入される演算子を  $\mathcal{V}'$ , B 部分に挿入される演算子を  $\mathcal{V}$  とする。伝搬関数 (5.4.7) はゴースト数 1 だから  $\mathcal{V}'$  と  $\mathcal{V}^*$  ( $\mathcal{V}$  の双対演算子) はゴースト数が 1 異なる。双対演算子の定義  $\langle \mathcal{W}_j, \mathcal{W}_j^* \rangle_g = 1$  から演算子とその双対演算子のゴースト数の和は 4 であり、以上から  $\mathcal{V}, \mathcal{V}'$  のゴースト数の和は 5。さらに、伝搬関数の極を抜き出す演算子  $(b_0 - \tilde{b}_0) \delta_{L_0 - \tilde{L}_0} \Pi$  ( $\Pi$  は  $L_0 = 0$  への射影演算子) が BRST 不変である事から、 $\mathcal{V} \otimes \mathcal{V}'$  は BRST 不変。以上を満たす演算子で  $\mathcal{V}'$  が物理的演算子よりゴースト数が 1 多いものは

$$\mathcal{V} = c\tilde{c}V_{\text{mat}}, \quad \mathcal{V}' = c\tilde{c}(\partial c + \tilde{\partial}\tilde{c})V_{\text{mat}} \quad (5.4.8)$$

である。

結局、極の寄与は (5.4.6) の第二項の形になり、

$$\begin{aligned} v' &= \omega'_{A,i} \wedge \omega_{B,i} \\ \omega'_{A,i} &= \left\langle \mathcal{W} (c\tilde{c}(\partial c + \tilde{\partial}\tilde{c})V_{i,\text{mat}}) \prod_i \langle \mu_i | b \rangle dm_i \langle \tilde{\mu}_i | \tilde{b} \rangle d\tilde{m}_i \right\rangle_{g_A} \end{aligned} \quad (5.4.9)$$

となる。

以上から、BRST アノマリーは

$$\int_{\mathcal{M}_{\geq \varepsilon}} v = \int_{\mathcal{M}_A \times \mathcal{M}_B} \frac{d|q\tilde{q}|}{q\tilde{q}} \Big|_{\partial\mathcal{M}_{\geq \varepsilon}} \wedge \sum_i v_{A,i} \wedge \omega_{B,i} + \sum_i \int_{\mathcal{M}_A} \omega'_{A,i} \int_{\mathcal{M}_B} \omega_{B,i} \quad (5.4.10)$$

となる。 $\varepsilon$  が定数ととれずほかのモジュライに依存する事を考慮すると、 $\frac{d(q\tilde{q})}{q\tilde{q}} \Big|_{\partial\mathcal{M}_{\geq \varepsilon}}$  は  $\mathcal{M}_A \times \mathcal{M}_B$  上の非自明な 1 形式であるため、第一項は非零である。<sup>14</sup>

以上から、

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_B^g \mathcal{W} &:= \sum_i a_i \mathcal{V}_i \\ a_i &= -g_s^{2g} \int_{\mathcal{M}_g^*} \left( \left\langle \mathcal{W} c\tilde{c}(\partial c + \tilde{\partial}\tilde{c})V_{i,\text{mat}} \prod_i \langle \mu_i | b \rangle dm_i \langle \tilde{\mu}_i | \tilde{b} \rangle d\tilde{m}_i \right\rangle_{g_A} \right. \\ &\quad \left. + \left\langle \mathcal{W} \mathcal{V}_i \frac{d|q\tilde{q}|}{q\tilde{q}} \Big|_{\partial\mathcal{M}_{\geq \varepsilon}} v_0 \right\rangle_{g_A} \right) \end{aligned} \quad (5.4.11)$$

とすると

$$\mathcal{Q}_B(W) = \sum_g \mathcal{Q}_B^g \mathcal{W} \quad (5.4.12)$$

が S 行列から分離する。 $\mathcal{M}_g^*$  は  $\partial\mathcal{M}_{g+g', \geq \varepsilon} \sim \mathcal{M}_g \times \mathcal{M}_{g'} \times S^1$ <sup>15</sup> の成分と見なしたときの  $\mathcal{M}_g$  の事を指す。

null 状態の分離は時空のゲージ対称性を表していたから、この補正は時空のゲージ対

<sup>14</sup>第一項、第二項それぞれ単独では  $\mathcal{M}_A$  上の微分形式を正しく定義しないが、両者の和は定式化の共形不変性から正しい微分形式を作る事が保証される。

<sup>15</sup>正確には、退化因子同士が交わる部分では角 (境界の境界) ができるためこの同型は正しくない

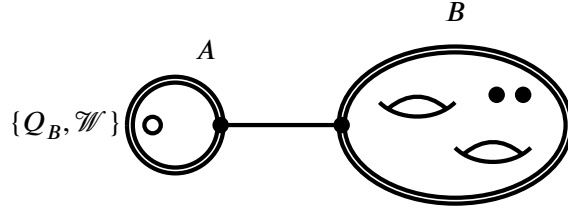


図 5.6.: 開弦閉弦理論における閉弦の BRST アノマリーに寄与する特殊型退化。二重線は開リーマン面の境界を表す。

称性に対する量子補正である。特に超対称性を保つような模型においてゲージ対称性を量子効果で破るような模型を得るのは非常に難しいため、(5.4.10) は多くの場合消えていると期待される。

本論文の範囲を超えるが、閉弦開弦理論における閉弦のゲージ変換は (5.4.12) の効果を受けていると解釈する事ができる。<sup>16</sup>図 5.5 の A 部分を円盤に置き換えた図 5.6 の状況を考える。 $\mathcal{W}$  を境界に押し付けて定義される演算子  $\mathcal{W}_{\text{open}} = \lim_{z \rightarrow \text{boundary}} \mathcal{W}(z)$  は (0 でなければ) ゴースト数の関係から開弦の頂点演算子と思える。また、この場合の BRST anomaly は (5.4.11) と異なり

$$Q_B^{\text{disk}} \mathcal{W} = \sum_i a_i \mathcal{V}_{i,\text{open}} \quad (5.4.13)$$

$$\begin{aligned} a_i &= - \langle \mathcal{W} \mathcal{V}_{i,\text{open}} \rangle_{\text{disk}} \\ &= - \langle \mathcal{W}_{\text{open}} \mathcal{V}_{i,\text{open}} \rangle_{\text{disk}} \end{aligned} \quad (5.4.14)$$

となる。これは  $\mathcal{W}$  のゴースト数が開弦の物理的状態演算子と等しい事からわかる。よって

$$\begin{aligned} Q_B^{\text{disk}} \mathcal{W} &= -\mathcal{W}_{\text{open}} \\ Q_B \mathcal{W} &= \{Q_B, \mathcal{W}\} - \mathcal{W}_{\text{open}} \end{aligned} \quad (5.4.15)$$

となる。

$\{Q_B, \mathcal{W}\}$  が閉弦 2 形式場  $B$  のゲージ変換を表しているとする、場の理論の言葉では

$$\begin{aligned} S_{B,A} &= \int \left( \frac{1}{g_s^2} dB \wedge *dB + \frac{1}{g_s} F' \wedge *F' \right) \\ F' &= dA + B \end{aligned} \quad (5.4.16)$$

なる理論のゲージ変換がゲージ変換のパラメータを 1 形式  $\lambda$  として  $\delta B = d\lambda, \delta A = -\lambda$  となり、Stueckelberg 機構によって  $B$  が質量を持つという事に対応している。ただしこの場合は変換への補正は  $g_s$  の零次であり、場の理論としてはゲージ対称性の破れは古典的な効果である。

<sup>16</sup>開弦閉弦理論におけるゲージ変換の破れはよく知られた現象であり、この段落の主張はこれがこの節で議論している BRST アノマリーと解釈する事ができるという事である。

## 5.5. 時空の超対称性

### 5.5.1. Ward 高橋恒等式

この節では時空の超対称性のループ補正および Ward-高橋恒等式を導き、5.2 節のモデルでの超対称性の破れが Ward-高橋恒等式と矛盾しない事をみる。

まず、通常のボソニックな対称性  $J$  を考える。これはゲージパラメータ  $\mathcal{W}$  の運動量  $0$  とおいた物である。これは世界面のカレントであって、頂点演算子  $V$  に

$$\delta V = \oint dz J(z) V(0) \quad (5.5.1)$$

と作用する。この対称性についての Ward 高橋恒等式は

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_i \delta V_i \prod_{j \neq i} V_j \right\rangle &= \left\langle \oint_{\gamma} dz J(z) \prod_i V_i \right\rangle \\ &= 0 \end{aligned} \quad (5.5.2)$$

となる。ここで  $\gamma$  はすべての頂点演算子の周りをまわる。モジュライ全体における積分を考慮せずに Ward 高橋恒等式を導けることは 5.4 節で議論した BRST アノマリーが運動量  $0$  のゲージパラメータについては起こりそうにない事を示している。<sup>17</sup>

時空の超対称性の場合には状況が異なる。時空の超対称性は時空ボソンと時空フェルミオンを入れ替えるため、時空超対称性は世界面カレントではなく  $R$  頂点演算子と関係している。 $R$  頂点演算子の位置は超リーマン面の構造の一部であり、 $R$  頂点演算子の位置について先に積分する事はできない。よって、時空の超対称性の Ward 高橋恒等式はモジュライ空間全体での積分を考慮した方法で導かなければならない。

運動量  $0$  のグラヴィティーノゲージパラメータ、つまりある時空超対称性の生成子を  $\mathcal{S}$  とする。平坦時空上のヘテロティック理論では、

$$\mathcal{S} = c \Theta_{\beta\gamma} \Theta_{\alpha} \quad (5.5.3)$$

である。 $\Theta_{\beta\gamma}$  は  $\beta\gamma$  型のスピン演算子、 $\Theta_{\alpha}$  は時空のスピン添字  $\alpha$  をもつ物質場のスピン演算子である。

$\mathfrak{M}_{cs}$  上の  $2\Delta_e - 1|\Delta_o + \tilde{\Delta}_o$  形式

$$\begin{aligned} v &= \left\langle \mathcal{S} \prod_i \mathcal{V}_i v_0 \right\rangle \\ v_0 &= \left( \sum_j \prod_{i \neq j} \langle \mu_i | b \rangle dm_i \prod_i \langle \tilde{\mu}_i | \tilde{b} \rangle d\tilde{m}_i + \sum_j \prod_i \langle \mu_i | b \rangle dm_i \prod_{i \neq j} \langle \tilde{\mu}_i | \tilde{b} \rangle d\tilde{m}_i \right) \prod_{\sigma} \delta(\langle \chi | \beta \rangle) \delta(d\eta_{\sigma}) \end{aligned} \quad (5.5.4)$$

を考える。 $\{Q_B, \mathcal{S}\} = 0$  なので、

$$dv = 0. \quad (5.5.5)$$

<sup>17</sup>退化リーマン面ではリーマン面上の積分経路の変更の議論が使えないため、赤外発散パラメータ  $\epsilon \rightarrow 0$  の極限は結局注意が必要であり、この節の残りで説明する手法のボソニック対称性の場合の類似が正確な議論となる。



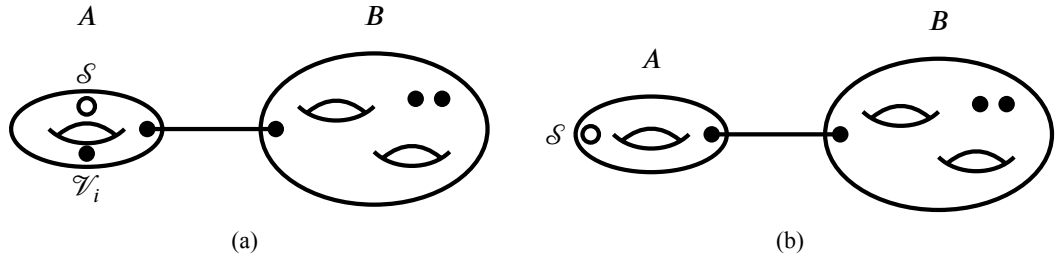


図 5.7.: 時空超対称性の Ward 高橋恒等式に寄与する特殊型退化。

よって、

$$0 = \int_{\mathfrak{M}_{cs, \geq \epsilon}} dv = \int_{\partial \mathfrak{M}_{cs, \geq \epsilon}} v \quad (5.5.6)$$

となる。

(5.5.6)の最右辺の積分について、寄与する境界は図 5.1 と図 5.7 に対応する退化因子である。 $\mathcal{S}$  の運動量が 0 であるため、5.4 節で考えた寄与 (図 5.7(b)) に加えて図 5.7(a) の寄与がある。タッドポールと質量くりこみが消えるという仮定をおいて図 5.7 のみを考える。

図 5.7(b) の寄与は 5.4 節で議論した。図 5.7(a) の寄与も 5.4 節と同様の議論により  $B$  部分に演算子

$$\begin{aligned} Q^{S, g_A} \mathcal{V}_i &= \sum_j a_{ij} \mathcal{V}_j \\ a_{ij} &= \int_{\mathfrak{M}_{cs, g_A}^*} \left\langle \mathcal{S} \mathcal{V}_i \mathcal{V}_j v_0 \frac{d|q\tilde{q}|}{q\tilde{q}} + \mathcal{S} \mathcal{V}_i (c\tilde{c}\tilde{d}\tilde{c} V_j^{\text{mat}}) \omega_0 \right\rangle_{g_A} \\ \omega_0 &= \prod_i^{\Delta_e} \langle \mu_i | b \rangle m_i \prod_{\tilde{i}}^{\Delta_e} \langle \tilde{\mu}_{\tilde{i}} | \hat{b} \rangle d\tilde{m}_{\tilde{i}} \prod_{\sigma}^{\Delta_o} \delta(\langle \chi_{\sigma} | \beta \rangle) \delta(d\eta_{\sigma}) \end{aligned} \quad (5.5.7)$$

を挿入したもので与えられる。ここで  $\mathcal{S}$  は R 型であるため、 $\mathcal{V}_j$  は  $\mathcal{V}_i$  とは逆の型になることに注意する。特に  $g_A = 0$  の寄与はツリーレベルの時空超対称変換

$$\begin{aligned} Q^{S, 0} \mathcal{V}_i &= \frac{1}{2\pi i} \oint dz S(z) \mathcal{V}_i(0) \\ cS &= \mathcal{S} \end{aligned} \quad (5.5.8)$$

の挿入で与えられる。このことから、 $Q^{S, g}$  は超対称変換への量子補正であるととらえる事ができる。全次数を合わせたの超対称変換を

$$Q^S \mathcal{V} = \sum_g g_s^g Q^{S, g} \mathcal{V} \quad (5.5.9)$$

と定義する。

以上から、(5.5.6) は (5.5.7), (5.4.11) を使って

$$\mathcal{A} \left( \sum_i (Q^S \mathcal{V}_i) \prod_{j \neq i} \mathcal{V}_j \right) - \mathcal{A} \left( (Q_B \mathcal{S}) \prod_i \mathcal{V}_i \right) = 0 \quad (5.5.10)$$

と書き表せる。頂点演算子  $\mathcal{V}$  による全オーダーの振幅を  $\mathcal{A}(\mathcal{V})$  と書いた。これが時空超対称性に関する Ward 高橋恒等式である。第 2 項が 0 であればこの式は超対称性の保存を意味する。第 2 項が 0 でなければこの式は  $\mathcal{Q}_B \mathcal{S}$  を goldstino とする超対称性の破れを表す。

Type IIB+D9 $\overline{\text{D9}}$  においてはバルクの超対称性が破れるが、この破れを 5.4 節後半と同様の議論により (5.5.10) によって表す事ができる。また、5.2 節の例においても 1 ループで (5.5.10) の第二項が非零になる事が確かめられている。[11, 15]。

### 5.5.2. 超対称代数

以上で超弦理論には fermionic な対称性が存在する事がわかった。場の理論によれば fermionic な対称性は超対称性しかない事がわかるが、世界面理論からも代数を導く事ができる。

そのためには  $\mathfrak{M}_{\text{cs}}$  上の  $2\Delta_e - 2|\Delta_0 + \tilde{\Delta}_0$  形式

$$\rho = \left\langle \mathcal{S}_\alpha \mathcal{S}_\beta \prod_i \mathcal{V}_i \rho_0 \right\rangle \quad (5.5.11)$$

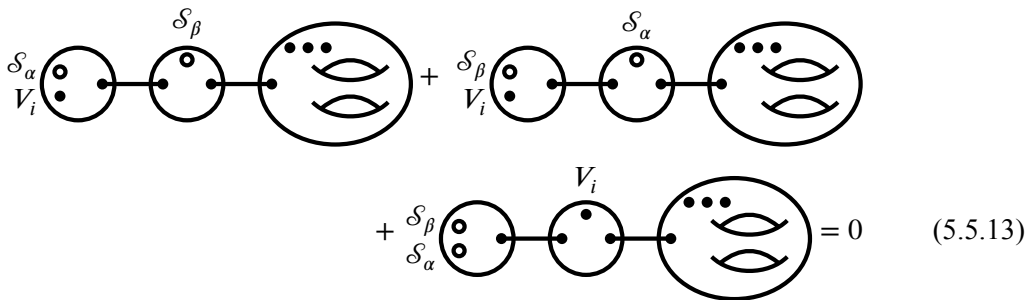
を考えれば良い。  $\rho_0$  は (5.5.4) の  $v_0$  と同様に  $dm, d\tilde{m}$  が体積形式より 2 つ足りない  $2\Delta_e - 2|\Delta_0 + \tilde{\Delta}_0$  形式である。

退化因子同士は交わるため、退化因子の周りを幅  $\varepsilon$  で取り除いた  $\mathfrak{M}_{\text{cs}, \geq \varepsilon}$  は角  $\partial^2 \mathfrak{M}_{\text{cs}, \geq \varepsilon}$  を持つ。  $d\rho = 0$  より

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathfrak{M}_{\text{cs}, \geq \varepsilon}} d(d\rho) \\ &= \int_{\partial^2 \mathfrak{M}_{\text{cs}, \geq \varepsilon}} \rho \end{aligned} \quad (5.5.12)$$

となる。

超対称性が破れていない事、つまり  $\mathcal{Q}_B \mathcal{S} = 0$  を仮定すると、(5.5.12) に寄与する  $\partial^2 \mathfrak{M}_{\text{cs}, \geq \varepsilon}$  の成分は Ward 高橋恒等式で消える部分を除いて



$$\begin{aligned} & \mathcal{S}_\alpha \mathcal{V}_i \mathcal{S}_\beta + \mathcal{S}_\beta \mathcal{V}_i \mathcal{S}_\alpha \\ & + \mathcal{S}_\beta \mathcal{S}_\alpha \mathcal{V}_i = 0 \end{aligned} \quad (5.5.13)$$

である。前 2 項がそれぞれ  $\mathcal{Q}_\beta^S \mathcal{Q}_\alpha^S \mathcal{V}_i$  と  $\mathcal{Q}_\alpha^S \mathcal{Q}_\beta^S \mathcal{V}_i$  をあらわすから、

$$\{\mathcal{Q}_\alpha^S, \mathcal{Q}_\beta^S\} = \mathcal{S}_\beta \mathcal{S}_\alpha \mathcal{V}_i \quad (5.5.14)$$

が言える。前小節と同様に (5.5.14) の左辺のリーマン面につながっている伝搬関数は  $b_0$  が一つ足りない (5.4.7) を表す。

(5.5.14) の左辺のリーマン面には  $\mathcal{S}$  が 2 つ挿入されているため、もう一つの演算子は物

理的な頂点演算子よりゴースト数が2つ多くなければならない。 $\mathcal{W}'_j$  をそのような演算子の完全系とすると、各  $j$  に対して  $\mathcal{W}$  があって、

$$\begin{aligned} \begin{array}{c} \delta_\beta \\ \circ \\ \delta_\alpha \\ \circ \end{array} \text{---} &= \sum_j a_j \mathcal{W}'_j \\ a_j &= \langle \delta_\alpha \delta_\beta \mathcal{W}'_j \rangle \end{aligned} \quad (5.5.15)$$

(5.4.7) の下の議論と同様に、 $\mathcal{W}$  と  $\mathcal{W}'$  のゴースト数の和は5、 $\mathcal{W} \otimes \mathcal{W}'$  はBRST不変である。さらに、いまは超弦理論を考えているので、4.4節で述べたように退化点を通るNS状態は picture -1 である。 $\mathcal{W}'$  のゴースト数が物理的演算子より2つ多いことを考慮すると、このような演算子は  $\mathcal{W}$  の運動量が0である時のみ存在して、ヘテロティック理論の場合

$$\mathcal{W}_\mu = c\delta(\gamma)D_\theta X^\mu, \quad \mathcal{W}'_\mu = c\tilde{c}\tilde{\delta}\tilde{c}^2\tilde{c}\delta(\gamma)D_\theta X^\mu \quad (5.5.16)$$

およびこれらの正則ゴーストと反正則ゴーストを入れ替えたものである。結局  $\mathcal{W}$  は時空の運動量を表すカレント  $D_\theta X^\mu$  で表される事がわかったため、 $\mathcal{Q}_\alpha^S$  たちは超対称代数をなす。ツリーレベルの寄与はナイーブに  $\delta_\alpha$  たちの OPE で決まる代数と一致する。

## 5.6. 超対称性を仮定したタッドポール消滅の証明

時空超対称性の Ward 高橋恒等式の簡単な応用として、 $g_0$  ループまで超対称性が破れていないこと、つまり

$$\mathcal{Q}_B^{S,g} \delta_\alpha = 0 \quad \text{for } g \leq g_0 \quad (5.6.1)$$

を仮定して、 $g_0 + 1$  次のタッドポールの消滅

$$\mathcal{A}_{g=g_0+1}(V_\phi) = 0 \quad (5.6.2)$$

を示す。ここで、 $\mathcal{V}_\phi$  は零質量 spin 0 場の (共形な) 零運動量頂点演算子である。

まず零質量頂点演算子  $\mathcal{V}_\psi$  であって

$$\mathcal{Q}_\alpha^S \mathcal{V}_\psi = \mathcal{V}_\phi \quad (5.6.3)$$

をみたす物が存在することを確認する。これは個々の理論において具体的に構成する事によって確かめられる。例えば  $\mathcal{V}_\phi$  を

$$\mathcal{V}_\phi = c\tilde{c}\delta(\gamma)\tilde{\delta}\mathcal{X}_\mu D_\theta \mathcal{X}^\mu \quad (5.6.4)$$

とする。この場合、 $\mathcal{V}_\psi$  は頂点演算子

$$\mathcal{V}_\psi = c\tilde{c}\delta(\gamma)\Gamma_\mu^{\alpha\beta}\tilde{\delta}\mathcal{X}^\mu\Theta_{\beta\gamma}\Theta_\beta \quad (5.6.5)$$

とすれば良い ( $\mathcal{Q}^S$  への量子補正がないことは仮定した)。 $\Theta_\beta$  は  $\mathcal{X}$  SCFT のスピン場である。

あるいは、 $\psi_\alpha$  を  $\phi$  の超対称パートナーとして世界面理論を  $\delta\mathcal{L} = \delta\phi V_\phi + \sum_\alpha \delta\psi_\alpha V_{\psi_\alpha}$  で摂動することを考えることによっても確かめられる。 $\delta\phi, \delta\psi_\alpha$  は時空の (零運動量の) 場

と同様に変換することになると、

$$\mathcal{Q}_\alpha^S \delta\phi = \delta\psi_\alpha, \quad \mathcal{Q}_\alpha^S \delta\psi_\beta = 0 \quad (5.6.6)$$

となる。この変換の元で、 $\delta\mathcal{L}$  は  $\mathcal{Q}^S$  不変になるはずであるから、

$$\mathcal{Q}_\alpha^S V_\phi = 0, \quad \mathcal{Q}_\alpha^S V_{\psi_\beta} = \delta_{\alpha\beta} V_\phi \quad (5.6.7)$$

となり、 $V_{\psi_\alpha}$  は (5.6.3) を満たす。

さて、 $g_0$  次までの  $\mathcal{Q}_B \delta$  とタッドポールがすべて消えていると仮定して、(5.5.6) の特別な場合

$$0 = \int_{\partial\mathfrak{M}_{cs, \geq \varepsilon}} \nu$$

$$\nu = \langle \delta V_\psi \nu_0 \rangle \quad (5.6.8)$$

を  $g_0 + 1$  次で考える。ただし今回は 5.5 節と異なり  $g_0 + 1$  次のタッドポールが消えていることは仮定せずに、これを示したい。

しかし、仮定から  $\partial\mathfrak{M}_{cs, \geq \varepsilon}$  のうち寄与するのは

$$= \mathcal{A}_{g_0+1}(V_\phi) \quad (5.6.9)$$

のみであることがわかるから、直ちに

$$\mathcal{A}_{g_0+1}(V_\phi) = 0 \quad (5.6.10)$$

が従う。よって帰納的に  $g_0 + 1$  次までのタッドポールはすべて消えている。

## 6. Feynman $i\epsilon$ 処方

この章では [13] に基づき一般型退化に伴う極を回避する方法を導入する。世界面理論の共形量子化では振幅は伝搬関数と相互作用係数の積に分離しない。このため第二量子化された点粒子の場の理論のような簡単な Feynman  $i\epsilon$  処方を行う事はできない。<sup>1</sup>Feynman  $i\epsilon$  処方はユニタリティ、光学定理を考察するには必須であるから、弦理論においても類似を構成する事は重要である。

弦理論の振幅に本質的に含まれる伝搬関数すべてを同時に  $i\epsilon$  だけずらすことはできないが、モジュライの退化因子付近では退化点に関する伝搬関数の寄与があらわであるため、モジュライの各退化因子付近でモジュライ積分を Wick 逆回転する事によりこの伝搬関数に対して  $i\epsilon$  処方を行うことができる。この操作をすべての退化因子に対して行うことにより正しい on-shell 振幅を得る事ができる。

### 6.1. 一般型退化と発散

退化点の縫い合わせパラメタを  $q, \tilde{q}$  として、モジュライの退化点周りでの積分

$$\int d^2q b_0 \tilde{b}_0 q^{L_0-1} \tilde{q}^{\tilde{L}_0-1} \sim 2\pi \frac{b_0 \tilde{b}_0 \delta_{L_0-\tilde{L}_0}}{L_0} \quad (6.1.1)$$

は極を  $L_0 = 0$  に持つのだった。5章であつかった特殊型退化を除いて、この極による発散が生じるのは外線運動量および内線運動量が特殊な値にあるときのみであつて、そのような退化を一般型退化と呼ぶ事にした。一般型退化による発散は、点粒子の場の理論におけるループ振幅の運動量積分

$$\int dk \frac{-i}{k_i^2 + m_i^2} \times \dots \quad (6.1.2)$$

が  $k_i^2 + m_i^2 = 0$  の極にあたる事による発散の類似である。点粒子の場合、極の回避は Feynman  $i\epsilon$  処方

$$\frac{-i}{k_i^2 + m_i^2} \rightarrow \frac{-i}{k_i^2 + m_i^2 - i\epsilon} \quad (6.1.3)$$

によればよい事が知られている。共形ゲージの弦理論において、共形不変な形で  $L_0$  を  $i\epsilon$  だけずらす事はできないため、別の方法を構築する必要がある。

<sup>1</sup>安直には 4.5 節で導入した内線運動量  $p_I$  に  $i\epsilon$  を加えるなどすれば良いように思えるが、 $p_I$  は A サイクルを通る運動量しか指定しないため B サイクルを通る伝搬関数の極を処理できないことから少なくともこれだけでは不十分である。この章で解説する方法では各退化因子付近で独立して処方を行えるためすべての伝搬関数の極を処理できる。

例として、ボソン開弦のタキオン四点振幅 (Veneziano 振幅)

$$\mathcal{A}_V(s, t) = \int_0^1 dx x^{-\alpha' s - 2} (1-x)^{-\alpha' t - 2} \quad (6.1.4)$$

を見る。\$s, t, u\$ を Mandelstam 変数とした。\$x = 1, 0\$ が退化点に対応し、\$s, t \ge -1/\alpha'\$ で被積分関数が発散している。実際、\$s, t = -1/\alpha'\$ は中間状態にタキオンが生成する閾値である。この例においては積分が収束する領域 \$\Re s, \Re t \le -1/\alpha'\$ から解析接続する事により \$\mathcal{A}\_V(s, t)\$ を定める事ができる。

ボソン閉弦のタキオン四点振幅 (Virasoro-Shapiro 振幅)

$$\mathcal{A}_{VS}(s, t) = \int_C d^2 z |z|^{-\frac{1}{2}\alpha' s - 4} |1-z|^{-\frac{1}{2}\alpha' t - 4} \quad (6.1.5)$$

は \$z = 0, 1, \infty\$ に極を持ち、\$s, t, u\$ すべてのチャンネルでタキオンが生成できる。積分が収束する領域 \$\Re s, \Re t, \Re u \le m^2 = -4/\alpha'\$ は \$s+t+u = 4m^2\$ と矛盾しないが、これはタキオンの質量が負であるからであって、励起状態たちの間の散乱振幅では収束する領域があるとは限らない。

積分が収束する領域から解析接続によって物理的な運動量の散乱振幅を定義する方法は多点高次振幅においては不可能になる。<sup>2</sup>また、解析接続による方法では散乱振幅の虚部の現れ方が非自明である。よって、共形ゲージの弦理論においても \$i\epsilon\$ の所在が明確になる形で Feynman \$i\epsilon\$ 処方を定義したい。

## 6.2. 一般型退化と Wick 逆回転

弦理論の振幅はモジュライ積分で表される。世界面のモジュライは世界面の (世界面計量で見た) 形を指定しているから、モジュライパラメタは点粒子の場の理論における Schwinger パラメタに対応しているのだった。

よって、弦理論との対応を明確にするために Feynman 伝搬関数を Schwinger パラメタ \$s\$ によって表す:

$$\frac{-i}{k_i^2 + m_i^2 - i\epsilon} = \int_0^\infty ds e^{-(k_i^2 + m_i^2 - i\epsilon)is}. \quad (6.2.1)$$

ユークリッド計量に Wick 回転すると

$$\frac{1}{k_i^2 + m_i^2} = \int_0^\infty d\mathfrak{s} e^{-(k_i^2 + m_i^2)\mathfrak{s}} \quad (6.2.2)$$

となる。この場合、右辺の積分は \$k\_i^2 + m\_i^2 > 0\$ で収束する。ここで虚時間 Schwinger パラメタを \$\mathfrak{s}\$ とした。

弦理論において、世界面計量は Euclid 符号、外線の時空運動量は Minkowski 符号でとるため、弦理論における (6.2.2) の類似は on-shell で発散している。点粒子ではそのような状況では Wick 逆回転をして (6.2.1) を使うことで発散を回避している。

<sup>2</sup>閉弦 1 ループ 4 点については [32] がある。この場合は積分領域をうまく分割し、分割した領域それぞれで収束範囲を見いだしてそこから解析接続を行っている。一般の場合に同様の手法を書き下すことは可能ではあるが煩雑になると思われる。

世界面上には光円錐を書く事ができないため、世界面計量を世界面全体でミンコフキ符号で取る事はできない。ただし、世界面が円筒または開弦の場合には帯であるときにはミンコフスキ計量が意味を持つ。そこで、世界面のうち長く伸びた円筒または帯の部分でのみ Wick 逆回転をおこないミンコフスキ計量を使う、ということができれば良さそうである。

まず点粒子の場の理論での類似を構成する。伝搬関数がつなぐ二つの相互作用点が近いとき  $\mathfrak{s} \simeq 0$  はユークリッド Schwinger パラメタ、ユークリッド伝搬関数が発散する付近  $\mathfrak{s} \rightarrow \infty$  では Wick 逆回転によりミンコフスキ Schwinger パラメタに移りたい。これを実現するためには、ミンコフスキ計量の伝搬関数を

$$\frac{-i}{k_i^2 + m_i^2 - i\epsilon} = \left( \int_0^{\mathfrak{s}_0} + \int_{\mathfrak{s}_0}^{\mathfrak{s}_0+i\infty} \right) d\mathfrak{s} e^{(k_i^2 + m_i^2 - i\epsilon)\mathfrak{s}} \quad (6.2.3)$$

と書き表すと良い。これは任意の  $\mathfrak{s}_0 \geq 0$  に対して成り立つ。積分経路は  $\mathfrak{s} \simeq 0$  と  $\mathfrak{s} \rightarrow \infty$  での振る舞いを変えない任意の経路に置き換えてよい。後の便利のために、さらに

$$\frac{-i}{k_i^2 + m_i^2 - i\hat{\epsilon}} = \left( \int_0^{\mathfrak{s}_0} + \int_{\mathfrak{s}_0}^{\mathfrak{s}_0+i\infty} \right) d\mathfrak{s} e^{(k_i^2 + m_i^2)\mathfrak{s}} e^{-\Phi(\mathfrak{s})\hat{\epsilon}} \quad (6.2.4)$$

と書きかえておく。ここで  $\epsilon \geq 0$ ,  $\Phi(\mathfrak{s})$  は  $\Re\Phi$  が  $\mathfrak{s} \rightarrow i\infty$  に伴ってほぼ線形に増加する任意の関数とし、 $\hat{\epsilon} \propto \epsilon$  である。

閉弦理論で同様の事をする。閉弦理論の一般型退化に伴う縫い合わせパラメタを  $q, \tilde{q}$  とし、座標  $q, \tilde{q}$  が有効であるのは  $|q\tilde{q}| \leq \Lambda^2$  の範囲であるとする。点粒子の Schwinger パラメタに対応するモジュライは  $\mathfrak{s} = -\frac{1}{2} \log |q\tilde{q}| \geq -\log \Lambda$  である。(6.2.3) と同様に  $\mathfrak{s}_0 \geq -\log \Lambda$  で積分を  $\mathfrak{s}$  の虚軸方向に曲げる。点粒子の場合と異なり、伝搬関数の Schwinger パラメタと呼べるものがあらわになるのはモジュライ空間の中で対応する退化因子の近傍のみであるため、モジュライ全体を Wick 逆回転する事はできない。さらに、(6.2.4) にあるような収束因子  $e^{-\Phi(\mathfrak{s})\hat{\epsilon}}$  により積分を収束させる。  $|q\tilde{q}| = \Lambda$  でほかのパッチと関数が貼り合わないといけなないので、 $\Phi(-\log \Lambda) = 0$  となる必要がある。

以上の手続きにより、(6.1.1) は

$$2b_0\tilde{b}_0\delta_{L_0-\tilde{L}_0} \left( \int_{-\log \Lambda}^{\mathfrak{s}_0} + \int_{\mathfrak{s}_0}^{\mathfrak{s}_0+i\infty} \right) d\mathfrak{s} e^{-2L_0\mathfrak{s}} e^{-\Phi(\mathfrak{s})\hat{\epsilon}} \sim \frac{-i2\pi b_0\tilde{b}_0\delta_{L_0-\tilde{L}_0}}{L_0 - i\hat{\epsilon}} \quad (6.2.5)$$

となり、 $\epsilon$  処方を行う事ができる。開弦理論においても同様に Schwinger パラメタ  $\mathfrak{s} = -\log q$  についての積分路を適当な所  $\mathfrak{s}_0$  で虚軸方向に曲げれば良い。

例として Veneziano 振幅(6.1.4) に対してこの処方を行う。  $x \sim 0$  での縫い合わせパラメタは  $x, x \sim 1$  での縫い合わせパラメタは  $1-x$  である。  $x \sim 0$  での Schwinger パラメタ  $\mathfrak{s} = -\log x$  についての積分路を  $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_0$  で曲げる。  $x_0 = e^{-\mathfrak{s}_0}$  とすると  $x$  についての積分路は  $|x| = x_0$  なる複素平面内の円を回り続ける事になる。  $x \sim 1$  についても同様に考えると、結局図 6.1 の積分路を  $\gamma$  として

$$\mathcal{A}_V(s, t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma} dx x^{-\alpha' s - 2} (1-x)^{-\alpha' t - 2} e^{-\Phi(x)\epsilon} \quad (6.2.6)$$

と定義できる。もとの積分路  $[0, 1]$  はコンパクトであったが、 $\gamma$  はノンコンパクトになる事に注意する。ここで、 $e^{-\Phi(x)\epsilon}$  は積分を収束させるための因子であり、 $\Phi(x)$  は図 6.1 の

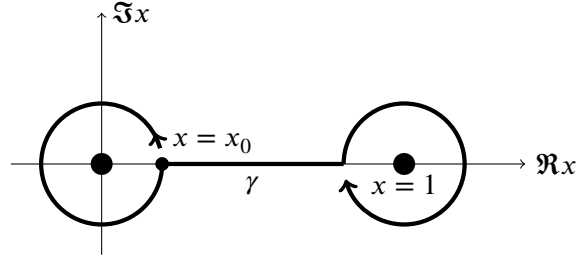


図 6.1.:  $i\epsilon$  処方をした Veneziano 振幅の積分路  $\gamma$ 。発散する点  $x=0, 1$  の近くの点で積分路を 90 度曲げ、以後は発散する点を中心に回り続ける。 $\gamma$  は  $x=0, 1$  に分岐を持つ  $\mathbb{C}$  の最大可換分岐被覆 (被覆群が可換であるうちで最大の分岐被覆) の中にある無限に長い直線である。

左側の円の上で  $\Phi(x) \sim -\arg x$ , 右側の円の上で  $\Phi(x) \sim -\arg(1-x)$  のように振る舞う関数 (例えば、 $i \log x(1-x)$ ) とする。極限值は  $\Phi$  の詳細には依存しない。

(6.2.5) を計算して、期待される分岐が得られることを示す。発散のうち、 $x=0$  のものに注目するため、積分範囲のうち  $x \leq \frac{1}{2}$  の部分を行った量

$$\mathcal{A}'_V(s, t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma, x \leq \frac{1}{2}} dx x^{-\alpha' s - 2} (1-x)^{-\alpha' t - 2} e^{-\Phi(x)\epsilon} \quad (6.2.7)$$

を考える。ここで、 $\Phi = i \log x(1-x)$  とおく。 $x=1$  付近の積分も以下と同様にしてできる。 $x=0$  における発散は  $s$  チャンネルの発散である。この発散に関係ない  $(1-x)^{-\alpha' t - 2}$  をテーラー展開する:

$$(1-x)^{-\alpha' t - 2 - i\epsilon} = \sum_n A_n(t, \epsilon) x^n, \quad A_n(t, \epsilon) = (-1)^n \frac{\Gamma(-\alpha' t - 1 - i\epsilon)}{\Gamma(-\alpha' t - 1 - n - i\epsilon)\Gamma(n+1)}. \quad (6.2.8)$$

$x^n$  の項を含む部分の積分は  $B_n = -\alpha' s - 2 + n$  として

$$\begin{aligned} A_n(t, \epsilon) \int_{\gamma, x \leq \frac{1}{2}} dx x^{B_n - i\epsilon} e^{-\Phi(x)\epsilon} &= A_n(t, \epsilon) \left( \int_{x_0}^{\frac{1}{2}} dx x^{B_n} + \int_{-\infty}^0 d\alpha i x_0^{B_n+1} e^{i\alpha(B_n+1)} e^{\alpha\epsilon} \right) \\ &= \frac{A_n(t, \epsilon)}{B_n + 1 - i\epsilon} 2^{-B_n - 1 + i\epsilon} \\ &\rightarrow \frac{A_n(t, 0)}{B_n + 1} 2^{-B_n - 1}, \quad \epsilon \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (6.2.9)$$

となる。 $\gamma$  の実軸以外の部分では  $x = x_0 e^{i\alpha}$  と変数変換した。極が正しい位置に出る事、 $\epsilon$  が確かに Feynman  $\epsilon$  パラメタの役割を果たしていることを確認できる。この計算は ( $A_n, \frac{1}{B_n+1}$  の極以外では)  $s$  が実であれば値によらず収束し、 $x_0$  の値には依存しない。また元の (6.1.4) が収束する範囲からの解析接続で得られる結果と一致する。よって、

$$\mathcal{A}'_V = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{B_n + 1} 2^{-B_n - 1} \quad (6.2.10)$$

となる。



次に、Virasoro-Shapiro 振幅 (6.1.5) について考える。まず、(6.1.5) を因子化した形で

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{\text{VS}}(s, t) &= \int_{\{\bar{z}=\bar{z}\} \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1} dz d\bar{z} F(z) F(\bar{z}) \\ F(z) &= z^{-\frac{1}{2}\alpha' s - 4} (1-z)^{-\frac{1}{2}\alpha' t - 4}\end{aligned}\quad (6.2.11)$$

と書いておく。\$z\$ は一つ目の \$\mathbb{C}\mathbb{P}^1\$, \$\bar{z}\$ は二つめの \$\mathbb{C}\mathbb{P}^1\$ の座標と見なす。

\$z \sim 0\$ の発散に注目する。\$z, \bar{z}\$ は \$\{\bar{z} = \bar{z}\}\$ 上では実数 \$\mathfrak{s}, \alpha\$ を用いて

$$z = e^{-\mathfrak{s} + i\alpha}, \quad \bar{z} = e^{-\mathfrak{s} - i\alpha} \quad (6.2.12)$$

と書ける。\$\mathfrak{s}\$ の積分路を \$\mathfrak{s} = \mathfrak{s}\_0, z^0 = e^{-\mathfrak{s}\_0}\$ で曲げる。曲げた先での Schwinger パラメタを \$\mathfrak{s} = \mathfrak{s}\_0 + is\$ とおくと、

$$z = z^0 e^{i(\alpha - s)}, \quad \bar{z} = z^0 e^{i(-\alpha - s)} \quad (6.2.13)$$

となり、特に \$\bar{z} \neq \bar{z}\$ となる。

発散点 \$z \sim 0, 1, \infty\$ でこの処方をおこなう事により定まる積分路を \$\gamma\$ とする。\$F(z)\$ は \$\mathbb{C}\mathbb{P}^1\$ 上多価であるため、\$F(z^0 e^{i(\alpha - s)}) \neq F(z^0 e^{i(\alpha - s - 2\pi i)})\$ である。\$F(z)\$ を一価にするような複素多様体は \$\mathbb{C}\mathbb{P}^1\$ の \$0, 1, \infty\$ に分岐を持つ最大可換分岐被覆 \$\widetilde{\mathbb{C}\mathbb{P}^1}\$ であるから、

$$\gamma \subset \widetilde{\mathbb{C}\mathbb{P}^1} \times \widetilde{\mathbb{C}\mathbb{P}^1} \quad (6.2.14)$$

となる。\$\gamma\$ はやはりノンコンパクトになる事に注意する。

結局、\$i\epsilon\$ 処方された Virasoro-Shapiro 振幅は

$$\mathcal{A}_{\text{VS}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma} dz d\bar{z} F(z) F(\bar{z}) e^{-\Phi(z, \bar{z})\epsilon} \quad (6.2.15)$$

と書かれる。\$\Phi(z, \bar{z})\$ は \$\mathfrak{s} \rightarrow i\infty\$ で \$|\mathfrak{s}|\$ に対して線形に振る舞うような関数とする。再び \$\Phi\$ の詳細は任意である。

\$z = 0\$ の発散を見る。\$\gamma\$ のうち \$z\bar{z} \leq Z^2\$ の部分で積分したものを考える。\$(1-z), (1-\bar{z})\$ の冪乗で書かれる項を展開すると、結局

$$\mathcal{A}_{AB} = \int_{\gamma, z\bar{z} \leq Z^2} dz d\bar{z} z^{A-i\epsilon} \bar{z}^{B-i\epsilon} \quad (6.2.16)$$

の形の積分を実行すれば良い。\$\alpha\$ についての積分が \$2\pi\delta\_{AB}\$ を出す以外は (6.2.9) と同様に計算する事ができ、

$$\mathcal{A}_{AB} = 4\pi\delta_{AB} \frac{Z^{2A+2-2i\epsilon}}{2(A+1-i\epsilon)} \quad (6.2.17)$$

となる。

### 6.3. 閉弦理論での Feynman $i\epsilon$ 処方

ボソン閉弦理論の一般の散乱振幅の場合に以上の処方を一般化する。弦理論の振幅は

$$\mathcal{A} = \int_{\widehat{\mathcal{M}}_{\text{diag}} \subset \widehat{\mathcal{M}}_R \times \widehat{\mathcal{M}}_L} dmd\tilde{m} \int dp_I N_{\{s\},\{\tilde{s}\}} \mathcal{F}_{\{s\}}(m, p_I) \mathcal{F}_{\{\tilde{s}\}}(\tilde{m}, p_I) \quad (6.3.1)$$

と書かれるのだった。ここで  $\mathcal{F}, \tilde{\mathcal{F}}$  は共形ブロック、 $\{s\}, \{\tilde{s}\}$  は共形ブロックを指定する添字の集合である。 $\mathcal{F}, \tilde{\mathcal{F}}$  は  $\widehat{\mathcal{M}}_R, \widehat{\mathcal{M}}_L$  上の一価関数ではない。左右の共形ブロックを  $N_{\{s\},\{\tilde{s}\}}$  で足し上げたもののみがモジュラー不変である。

ある一般型退化因子  $\mathcal{D}$  に注目し、 $\mathcal{D}$  に垂直な方向のモジュライを  $q, \tilde{q}$  とする。 $q, \tilde{q}$  は  $\widehat{\mathcal{M}}_{\text{diag}}$  上では実数  $\mathfrak{s}, \alpha$  を用いて

$$q = e^{-\mathfrak{s} + i\alpha}, \quad \tilde{q} = e^{-\mathfrak{s} - i\alpha} \quad (6.3.2)$$

と表せる。 $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_0 \geq -\log \Lambda$  で  $\mathfrak{s}$  についての積分路を虚軸方向に曲げる。

すべての一般型退化因子  $\mathcal{D}$  に対し、この処方を行う。特殊型退化因子については5章で議論した赤外正則化を行うものとする。一般型退化因子同士が交わる部分、つまりリーマン面が2つ以上の部分で退化するような場合については、関係するモジュライ  $q_i, \tilde{q}_i$  すべてについて積分路を曲げる。

こうして得られる積分路  $\widetilde{\mathcal{M}}$  は  $\widehat{\mathcal{M}}_R \times \widehat{\mathcal{M}}_L$  の一般型退化因子全体  $\cup \mathcal{D}$  を分岐とする最大可換分岐被覆  $\widetilde{\mathcal{M}}_R \times \widetilde{\mathcal{M}}_L$  内にあるノンコンパクトな部分多様体となる。 $i\epsilon$  処方を施した散乱振幅は

$$\mathcal{A} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\widetilde{\mathcal{M}}} dmd\tilde{m} \int dp_I N_{\{s\},\{\tilde{s}\}} \mathcal{F}_{\{s\}}(m, p_I) \mathcal{F}_{\{\tilde{s}\}}(\tilde{m}, p_I) e^{-\Phi(m, \tilde{m})\epsilon} \quad (6.3.3)$$

となる。 $\Phi$  はふたたび  $\widetilde{\mathcal{M}}$  上の積分が収束するように取る。

超弦理論への拡張はそのままである。超弦理論の散乱振幅は超モジュライ  $\widehat{\mathfrak{M}}_{\text{cs}} \subset \widehat{\mathfrak{M}}_R \times \widehat{\mathfrak{M}}_L$  上の積分により表されていた。ボソン弦の場合と同様、一般型退化因子  $\mathcal{D}$  の周りで積分路を曲げ、 $\widetilde{\mathfrak{M}}_{\text{cs}} \subset \widetilde{\mathfrak{M}}_R \times \widetilde{\mathfrak{M}}_L$  上で収束因子  $e^{-\Phi\epsilon}$  をつけて積分を行えば良い。

以上により、モジュライ積分の積分路を  $\widetilde{\mathfrak{M}}_{\text{cs}}$  に取り替え、収束因子  $e^{-\Phi\epsilon}$  を被積分関数にかける事により Feynman  $i\epsilon$  処方を行えることがわかった。この方法は SCFT の相関関数がカイラル因子化することのみに依存しており、元の形式的な積分が収束するような運動量が存在する必要はない。逆に、PCO 定式化などのカイラル因子化を壊す手続きとは共存できないため、カイラル因子化を保った計算手法の必要性を示唆している。

SCFT の相関関数の発散は  $\widetilde{\mathfrak{M}}_{\text{cs}}$  においては特殊型退化因子でしか発生しないため、5章で議論した赤外正則化は5章で仮定した通り特殊型退化因子のみにたいして行えば良い。

## 7. 結論と展望

### 7.1. 本論文の簡単なまとめ

本論文では、超幾何と超リーマン面の理論を説明した後、それらの言葉で RNS 超弦理論がどのように表されるか、それらの言葉を使う事が RNS 超弦理論にとってどのように有用であるかを解説した。

超モジュライ  $\mathfrak{M}$  は一般に non-projected であるが、超幾何の言葉を用いる事でカイラル因子化を保った形で散乱振幅を形式的には定義できた。ただし、本論文での超共形対称性を尊重した定式化が適用できるのは、5.1 節で見たように

- タッドポールがすべてのオーダーで消えている
- 質量くりこみを受ける状態に対応する頂点演算子を含まない

場合のみである。タッドポールがある場合は真空の再定義が、質量くりこみを受ける頂点演算子を直接取り扱うには off-shell の定式化が必要である。

また、 $\mathfrak{M}$  の退化因子付近での cs 構造の取り方に注意する事により、[2] 以来の問題であった赤外正則化の不定性を固定する事ができた。この処方は 5.2 節の模型において正しい境界項を再現した。

5 章の後半では cs 構造の固定の後も残る赤外正則化の非一意性に伴うくりこみ、及び BRST 演算子、時空超対称性変換への量子補正を取り扱った。BRST 演算子と時空超対称性変換への量子補正が(時空超対称性が保たれている限り)発生する可能性は低いが、本論文の定式化はそのことを自動的に保証しない。また、時空超対称性についての Ward 高橋恒等式を導出し、goldstino の生成により時空超対称性が破れうる事、および時空超対称性がタッドポールの消滅を場の理論とほぼ同様に保証する事を見た。

6 章では弦理論の共形ゲージ量子化において Feynman  $i\epsilon$  処方を行う方法を導入した。Schwinger パラメタに相当するモジュライの積分を虚軸方向に曲げる事により、実効的に Wick 逆回転を行う事ができ、 $i\epsilon$  は積分の収束因子として導入される。これにより on-shell 振幅を時空運動量の解析接続に頼ることなしに定義する事ができる。

### 7.2. 展望

本論文は定式化の解説が主で、具体的な計算については触れられなかった。これはそもそも高種数振幅の計算手法が未開拓であることによる。PCO 形式は 4.6 節にあるように高次振幅を解析するのには向かない。4.5 節に少し述べた超周期行列を使った計算も本質的に超モジュライ  $\mathfrak{M}$  の projectedness を仮定しており 3 ループ以上では超モジュライ上で大域的に使う事はできない。

超モジュライの projectedness を仮定しない計算手法を確立するには、超リーマン面上の関数論をより発達させる必要があるように思われる。特に超周期行列を拡張するような超モジュライの便利な座標が必要である。

本論文の定式化は超共形対称性を尊重し、on-shell 振幅のみをみつかった。しかし、前節で述べたように、この定式化の適用範囲には限界がある。off-shell の頂点演算子は(超)共形対称性を保たないため、off-shell 振幅を考えるためには本論文で取り扱った(超)モジュライ空間を考えるのでは不十分であり、頂点周りの座標の情報をもった(超)モジュライ空間を取り扱わなければならない。[26] は off-shell の振幅を形式的に取り扱い質量くりこみを論じている。

5章の後半でみた BRST アノマリーや Ward 高橋恒等式の議論はモジュライ空間の退化因子の構造のみに依存しているため、off-shell の定式化でもほぼ同様の議論が成り立つと期待される。特に弦の場の理論 (SFT) の文脈で確立している  $L_\infty$  代数の構造 [33] との類似があるように思われる。

また、Feynman  $i\epsilon$  処方が定義された事で、弦理論のユニタリティを議論する事ができるはずである。また、解析接続によっては振幅を定義できない場合に計算を行い、[32] にあるように  $n$  重分散関係を確かめるのも面白い。

RNS 以外の定式化との関係を考えるのも面白い。[34] は RNS 超弦理論と pure spinor 超弦理論 [35] との等価性の証明のために中間の定式化として「non-minimal RNS」なる定式化を提案している。[34] は RNS 超弦理論は PCO を使って論じており超モジュライの構造は考慮されていない。超モジュライ上の定式化は non-projectedness のために少なくとも単純には(カイラル因子化を保っては)モジュライ空間上の定式化と等価になり得ないため、この点を考察する事は重要に思われる。

大きな目標としては、SFT を超幾何の言葉で書き表すことが考えられる。本論文で強調したように、第一量子化には超幾何による定式化が重要である事から、第二量子化でも同様に超幾何が重要であることは自然である。Type II 理論に対しては [35] がある。

## 謝辞

本論文は筆者が東京大学大学院理学系研究科物理学専攻素粒子論研究室に修士課程学生として在学中に執筆し、また同専攻に修士論文として提出するものである。

同研究室松尾泰准教授には2年間指導教官としてご指南いただき、本論文の執筆に関しても多くの助言をしてくださった。ここに万謝の意を表す。また、同研究室立川裕二准教授にも多大なるご教示、ご示唆をいただいた事、深く感謝させていただく。同研究室のその他の皆様にも研究室の運営、本論文に関係することやしないことでの議論、日々の雑談で大変お世話になった。感謝の意を表す。

筆者は修士課程在学中に東京大学のフォトンサイエンス・リーディング大学院プログラムから金銭的な援助を受けており、これに感謝している。

最後に、日々筆者を暖かく見守り、生活をささえてくれた両親に感謝を述べ、謝辞にかえさせていただく。

## A. non-projected 複素超多様体上の積分の具体例

この付録では non-projected 複素超多様体の簡単な例と、その (ある実構造の) 上での積分について説明する。

$\mathbb{C}^{1|2}$  上に次のような  $\mathbb{Z}^2$  作用を考える:

$$\begin{aligned} (1, 0) : (z|\theta_1, \theta_2) &\mapsto (z + \tau + \alpha\theta_1\theta_2|\theta_1, \theta_2) \\ (0, 1) : (z|\theta_1, \theta_2) &\mapsto (z + 1|\theta_1, \theta_2) \end{aligned} \quad (\text{A.0.1})$$

ここで、 $\alpha, \tau$  は複素定数である。一種の超トーラス  $E$  をこの  $\mathbb{Z}^2$  作用によって

$$E = \mathbb{C}^{1|2}/\mathbb{Z}^2 \quad (\text{A.0.2})$$

で定義する。<sup>1</sup>この同一視は  $\alpha \neq 0$  の時  $z$  と  $\theta_1\theta_2$  を混ぜている。後で見るように、この事が  $E$  の non-projectedness を生み出す。後の議論のために  $E$  の基本領域  $F$  を図 A.1(a) のようにとり、 $F$  を図 A.1(b) のように分ける。

$E$  の実構造  $E_{\text{cs}} \in E \times \overline{E_{\text{red}}}$  を  $E_{\text{cs}} = \mathbb{R}^{2|*2}/\mathbb{Z}^2$  とおく。ここで、 $\mathbb{Z}^2$  の作用は

$$\begin{aligned} (1, 0) : (t_1, t_2|\theta_1, \theta_2) &\mapsto (t'_1, t'_2|\theta_1, \theta_2) = (t_1 + \Re\tau + \frac{\alpha}{2}\theta_1\theta_2, t_2 + \Im\tau - \sqrt{-1}\frac{\alpha}{2}\theta_1\theta_2|\theta_1, \theta_2) \\ (0, 1) : (t_1, t_2|\theta_1, \theta_2) &\mapsto (t_1 + 1, t_2|\theta_1, \theta_2). \end{aligned} \quad (\text{A.0.3})$$

と決めた。埋め込み  $i : E_{\text{cs}} \rightarrow E \times \overline{E_{\text{red}}}$  は標準的な埋め込み

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{2|*2} &\rightarrow \mathbb{C}^{1|2} \times \overline{\mathbb{C}} \\ (t_1, t_2|\theta_1, \theta_2) &\mapsto (t_1 + it_2, t_1 - it_2|\theta_1, \theta_2) \end{aligned} \quad (\text{A.0.4})$$

により決まる。

$f_1, f_2$  は  $f_{1,2}|_A(t_2) = f_{1,2}|_C(t_2)$  及び  $f_{1,2}|_B(t_1 + \Re\tau) = f_{1,2}|_D(t_1) + \frac{\alpha}{2}$  を満たす  $F$  上の任意関数を取り、 $E_{\text{cs}}$  の座標変換

$$\begin{aligned} \hat{t}_1 &= t_1 + f_1(t_1, t_2)\theta_1\theta_2 \\ \hat{t}_2 &= t_2 - \sqrt{-1}f_2(t_1, t_2)\theta_1\theta_2. \end{aligned} \quad (\text{A.0.5})$$

を行うと、この座標で  $\mathbb{Z}^2$  は

$$(\hat{t}_1, \hat{t}_2, \theta_1, \theta_2) \mapsto (\hat{t}_1 + \Re\tau, \hat{t}_2 + \Im\tau, \theta_1, \theta_2) \quad (\text{A.0.6})$$

<sup>1</sup>この超トーラスは  $\mathcal{N} = 1$  超リーマン面ではもちろんない。本文の文脈では、むしろ超モジュライ空間  $\mathfrak{M}$  の簡単な類似物と見なすべきである。

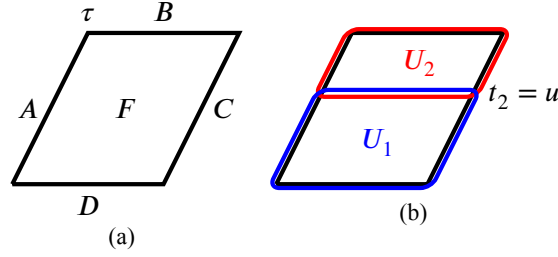


図 A.1.: (a)  $E$  の基本領域  $F$  をこのように取り、 $F$  の各辺を  $A, B, C, D$  と名付ける。(b)  $F$  を直線  $t_2 = u$  にそって二つの領域  $U_1, U_2$  に分割する。

と作用する。この作用は  $\hat{t}_{1,2}$  たちと  $\theta_1\theta_2$  を混ぜないため、 $(\hat{t}_1, \hat{t}_2 | \theta_1, \theta_2)$  は split している座標である。また、このとき  $f_1, f_2$  を正則に取る事はできない。このため、 $E$  は(正則の意味では)projected ではない。

$E_{cs}$  上の積分

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{E_{cs}} \omega \\
 \alpha &= \alpha \wedge \tilde{\alpha} \\
 \alpha &= (a + b\theta_1\theta_2)dz\delta(d\theta_1)\delta(d\theta_2) \\
 \tilde{\omega} &= d\tilde{z}
 \end{aligned} \tag{A.0.7}$$

を考える。 $a, b$  は定数とする。この積分は、局所座標による表示を見る限りでは、 $a$  の寄与はないように見える。まず、定義通り  $F$  を図 A.1(b) のようにパッチに分けて ( $B$  と  $D$  の貼り合わせを自明にして、 $t_2 = u$  上での貼り合わせを作用 (A.0.3) によって行う) 計算すると、

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{t_2 \leq u} (a + b\theta_1\theta_2)dt_1dt_2\delta(d\theta_1)\delta(d\theta_2) + \int_{t_2 \geq u} (a + b\theta_1\theta_2)dt'_1dt'_2\delta(d\theta_1)\delta(d\theta_2) \\
 &= \int_F (a + b\theta_1\theta_2)\Theta(u - t_2)dt_1dt_2\delta(d\theta_1)\delta(d\theta_2) + \int_F (a + b\theta_1\theta_2)\Theta(t_2 - u)dt'_1dt'_2\delta(d\theta_1)\delta(d\theta_2) \\
 &= \int_F (a + b\theta_1\theta_2)\Theta(u - t_2)dt_1dt_2\delta(d\theta_1)\delta(d\theta_2) \\
 &\quad + \int_F (a + b\theta_1\theta_2)\Theta(t'_2 + \frac{\alpha\sqrt{-1}}{2}\theta_1\theta_2 - u)dt'_1dt'_2\delta(d\theta_1)\delta(d\theta_2) \\
 &= \int_F (a + b\theta_1\theta_2)\Theta(u - t_2)dt_1dt_2\delta(d\theta_1)\delta(d\theta_2) \\
 &\quad + \int_F \left( (a + b\theta_1\theta_2)\Theta(t'_2 - u) + a\frac{\alpha\sqrt{-1}}{2}\theta_1\theta_2\delta(t'_2 - u) \right) dt'_1dt'_2\delta(d\theta_1)\delta(d\theta_2) \\
 &= \int_{F_{\text{red}}} bdt_1dt_2 + \int_{t_2=u} a\frac{\alpha\sqrt{-1}}{2}dt_1 \\
 &= b\Im\tau + \sqrt{-1}\frac{a\alpha}{2}.
 \end{aligned} \tag{A.0.8}$$

2.2 節で述べたようにパッチの切り分けを  $\Theta$  関数を使って処理している部分からの寄与

がある。結果、 $a$ が(A.0.3)の貼り合わせを通して積分に寄与している。 $E$ がsplitになる $\alpha = 0$ の場合は寄与しない。

次に、(A.0.5)の座標に移って同様の計算を繰り返すと、

$$\begin{aligned}
I &= \int_{E_{cs}} (a + b\theta_1\theta_2) dt_1 dt_2 \delta(d\theta_1) \delta(d\theta_2) \\
&= \int_{E_{cs}} (a + b\theta_1\theta_2)(1 - \partial_1 f_1 \theta_1 \theta_2) d\hat{t}_1 (1 + \sqrt{-1} \partial_2 f_2 \theta_1 \theta_2) d\hat{t}_2 \delta(d\theta_1) \delta(d\theta_2) \\
&= \int_{E_{cs}} (a + (b - a\partial_1 f_1 + \sqrt{-1} \partial_2 f_2) \theta_1 \theta_2) d\hat{t}_1 d\hat{t}_2 \delta(d\theta_1) \delta(d\theta_2) \\
&= \int_{E_{red}} (b - a\partial_1 f_1 + a\sqrt{-1} \partial_2 f_2) d\hat{t}_1 d\hat{t}_2 \\
&= b\Im\tau + \sqrt{-1} \frac{a\alpha}{2}.
\end{aligned} \tag{A.0.9}$$

となり同じ結果を得る。この計算は射影

$$p : E_{cs} \rightarrow E_{red} \tag{A.0.10}$$

による $\omega$ の押し出し $p_*\omega$

$$p_*\omega = (b - a\partial_1 f_1 + a\sqrt{-1} \partial_2 f_2) d\hat{t}_1 d\hat{t}_2 \tag{A.0.11}$$

となることを示している。このように、nonholomorphicな射影は $\omega$ の正則性を保たない。<sup>2</sup>以上の事から、一般に複素超多様体上の積分は局所複素座標で見た時の奇座標の最高次以外の項も寄与する事がわかる。

---

<sup>2</sup> $f_{1,2} = t_2 \frac{\alpha}{2\Im\tau}$ と選ぶと $\omega$ を $E_{red}$ 上の正則形式と反正則形式の積に書く事はできるが、その場合でもそれらの因子化した形式を $\alpha, \tilde{\alpha}$ からどう構成するかは具体的な計算によらずには明らかではない。

## B. 一般の SCFT による超弦理論の構成

この付録では一般の (anti) chiral な SCFT, CFT の場合にモジュラー不変量であるための条件、および GSO 射影の取り入れ方について説明する。モジュラー不変量の具体的な構成については述べない。SCFT のカイラル頂点演算子については [36–39], SCFT 及び CFT のモジュラー不変量については、[40–42], GSO 射影については [43] 等の文献がある。

### B.1. カイラル頂点演算子と共形場

まず、 $\mathcal{N} = (1, 0)$  ヘテロティック理論で右側 (正則側) が一般の抽象的な  $\mathcal{N} = 1$  SCFT  $\mathcal{T}$ , 左側が一般の CFT  $\tilde{\mathcal{T}}$  である場合を考える。この章の議論では、時空の超対称性は課さない。一般論を展開するために、SCFT 側の chiral algebra は超 Virasoro, CFT 側は Virasoro であるとする。<sup>1</sup> $\mathcal{T}, \tilde{\mathcal{T}}$  のセントラルチャージはそれぞれ  $c = 15, \tilde{c} = 26$  とする。さらに SCFT  $\mathcal{T}$  には  $G_r$  と反交換し  $L_m$  と交換する演算子  $(-1)^F$  がある。

$\mathcal{T}_R$  の NS superconformal primary  $V_a^{\text{NS}}(p)$  の作る超 Virasoro module を  $\mathcal{V}_a^{\text{NS}}(p)$ , R superconformal primary  $V_i^{\text{R}}(p)$  の作る超 Virasoro module を  $\mathcal{V}_i^{\text{R}}(p)$ ,  $\mathcal{T}_L$  の conformal primary  $\tilde{V}_a(p)$  の Virasoro decendant の空間を  $\tilde{\mathcal{V}}_a(p)$  とする。ここで、 $i, a$  は内部 CFT の primary 及び noncompact 部分の振動レベルを指定する離散的なラベル、 $p$  は noncompact 部分の CFT の運動量部分を指定する連続的なパラメータとする。4.2 節で取り扱ったような平坦背景部分の理論の相関関数は、内線運動量に相当するパラメータ  $p$  を conformal block の添字に持つ chiral な自由 SCFT, CFT の相関関数を組み合わせて書く事ができる [2, 5]。ここでは、記号の簡略のために  $p$  も添字  $a$  等に含める。あるいは、 $p$  を固定して議論していると思っても良い。超 Virasoro module を  $(-1)^F$  の固有値で  $\mathcal{V}_a^{\text{NS}, \pm}, \mathcal{V}_i^{\text{R}, \pm}$  と分ける。(超)Virasoro module たちを合わせたものを  $\mathcal{V}, \tilde{\mathcal{V}}$  とする。

$\mathcal{T}_R, \mathcal{T}_L$  の module の intertwiner 達 (のある基底) を

$$\begin{aligned}
 t_{s_{b,c}}^{(a)}(\theta) &: \mathcal{V}_a^{\text{NS}*} \otimes \mathcal{V}_b^{\text{NS}} \otimes \mathcal{V}_c^{\text{NS}} \rightarrow \mathbb{C}^{1|1} \\
 u_{s_{i,j}}^{(a)} &: \mathcal{V}_a^{\text{NS}*} \otimes \mathcal{V}_i^{\text{R}} \otimes \mathcal{V}_j^{\text{R}} \rightarrow \mathbb{C} \\
 u_{s_{a,j}}^{(i)} &: \mathcal{V}_i^{\text{R}*} \otimes \mathcal{V}_a^{\text{NS}} \otimes \mathcal{V}_j^{\text{R}} \rightarrow \mathbb{C} \\
 u_{s_{j,a}}^{(i)} &: \mathcal{V}_i^{\text{R}*} \otimes \mathcal{V}_j^{\text{R}} \otimes \mathcal{V}_a^{\text{NS}} \rightarrow \mathbb{C} \\
 \tilde{t}_{s_{b,\tilde{c}}}^{(\tilde{a})} &: \tilde{\mathcal{V}}_{\tilde{a}}^* \otimes \tilde{\mathcal{V}}_b \otimes \tilde{\mathcal{V}}_{\tilde{c}} \rightarrow \mathbb{C}
 \end{aligned} \tag{B.1.1}$$

と表記する。 $*$  は双対を表し、 $s_{b,c}^{(a)} = 1, \dots, N_{b,c}^a, s_{i,j}^{(a)} = 1, \dots, N_{i,j}^a$  は超 Virasoro module の間の intertwiner (フュージョン則) のラベルを表す。 $\tilde{s}_{b,\tilde{c}}^{(\tilde{a})} = 1, \dots, \tilde{N}_{b,\tilde{c}}^{\tilde{a}}$  も同様に  $\mathcal{T}_L$  のフュージョン則を表す。NS 超 Virasoro module には conformal weight  $\Delta$  の Virasoro module

<sup>1</sup>より広い代数を chiral algebra として扱いたい場合は、パンツ分解の内線の付加構造として chiral algebra 中の余分な対称性のチャージを付与する必要がある。



と  $\Delta + 1/2$  の Virasoro module が含まれるため、intertwiner が conformal weight と  $(-1)^F$  を保存するように Grassmann 奇な双対スピノル  $\theta$  を導入し、intertwiner はこれに依存するとした。

以後、 $s \binom{a}{b,c}$  等を  $s$  等に略す事がある。その際、 $s$  の type を  $a(s) := a, l(s) := b, r(s) := c$  と表す。

$\mathcal{T}_R$  のカイラル頂点演算子を

$$\Phi_{s \binom{a}{b,c}}(z|\theta) := z^{\Delta_a - \Delta_b - \Delta_c} t_{s \binom{a}{b,c}}(\sqrt{z}\theta) \quad (\text{B.1.2})$$

$$\Psi_{s \binom{a}{i,j}}(z) := z^{\Delta_a - \Delta_i - \Delta_j} u_{s \binom{a}{i,j}} \quad (\text{B.1.3})$$

と定義する。 $\theta$  の前の係数は  $\Phi$  の  $\theta$  展開の各成分の共形ウェイトの差からくる。これらはプライマリ場たちの球面三点関数

$$\lim_{y \rightarrow \infty} y^{2\Delta_a} \langle V_a^{\text{NS}}(y|0) V_b^{\text{NS}}(z|\theta) V_c^{\text{NS}}(0|0) \rangle_{\mathbb{CP}^1, s \binom{a}{b,c}} \quad (\text{B.1.4})$$

等を定義する。 $\Phi$  が  $\theta$  に依存する事は、NS3 点の種数 0 超リーマン面は (1 つの NS 演算子の奇方向の位置に対応する) 奇モジュラス  $\theta$  を持つことと無矛盾である。

$\mathcal{T}_L$  のカイラル頂点演算子を同様に

$$\tilde{\Phi}_{\tilde{s} \binom{\tilde{a}}{\tilde{b},\tilde{c}}}(\tilde{z}) := \tilde{z}^{\tilde{\Delta}_{\tilde{a}} - \tilde{\Delta}_{\tilde{b}} - \tilde{\Delta}_{\tilde{c}}} \tilde{t}_{\tilde{s} \binom{\tilde{a}}{\tilde{b},\tilde{c}}} \quad (\text{B.1.5})$$

とする。

簡略のために、 $r(s_1) = a(s_2) = c$  なる  $s_1, s_2$  に対して、 $t_{s_1}$  と  $t_{s_2}$  の積  $\underline{\otimes}_q$  を

$$t_{s_1} \underline{\otimes}_q t_{s_2} = \sum_{I_c: a \text{ basis of } \mathcal{V}_c} t_{s_1} |I_c\rangle \langle I_c| q^{L_0 - \frac{c}{24}} |I_c\rangle \langle I_c| t_{s_2} : \mathcal{V}_{a(s_1)}^* \otimes \mathcal{V}_{l(s_1)} \otimes \mathcal{V}_{l(s_2)} \otimes \mathcal{V}_{r(s_2)} \rightarrow \mathbb{C} \quad (\text{B.1.6})$$

と定義する。 $\langle I_c|, |I_c\rangle$  は  $I_c$  方向への射影と見る。 $r(s_1) = a(s_2) = c$  で  $c$  が NS 型であるような  $u_{s_1}, u_{s_2}$  の積  $\underline{\otimes}_q$  や  $t_{s_1}, u_{s_2}$  の積も  $\underline{\otimes}_q$  も同様に定める。間に飛ぶ状態が R 型であるような  $u_{s_1}, u_{s_2}, r(s_1) = a(s_2) = i$  に対しては、積  $\underline{\otimes}_{q,\eta}$  を

$$u_{s_1} \underline{\otimes}_{q,\eta} u_{s_2} = \sum_{I_i: a \text{ basis of } \mathcal{V}_i} u_{s_1} |I_i\rangle \langle I_c| q^{L_0 + \eta G_0 - \frac{c}{24}} |I_c\rangle \langle I_i| u_{s_2} : \mathcal{V}_{a(s_1)}^* \otimes \mathcal{V}_{l(s_1)} \otimes \mathcal{V}_{l(s_2)} \otimes \mathcal{V}_{r(s_2)} \rightarrow \mathbb{C} \quad (\text{B.1.7})$$

と定める。この場合、伝搬する状態が R 型なので、伝搬関数が奇モジュライに依存できる。

球面 NS4 点, NS2 点 R2 点, R4 点の超共形ブロックをそれぞれ

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{s_1, s_2}(z_1, z_2 | \theta_1, \theta_2) &= \Phi_{s_1}(z_1 | \theta_1) \underline{\otimes}_1 \Phi_{s_2}(z_2 | \theta_2) \\ \mathcal{G}_{s_1, s_2}(z_1, z_2 | \theta_1) &= \Phi_{s_1}(z_1 | \theta_1) \underline{\otimes}_1 \Psi_{s_2}(z_2) \\ \mathcal{H}_{s_1, s_2}(z_1, z_2) &= \Psi_{s_1}(z_1) \underline{\otimes}_1 \Psi_{s_2}(z_2) \end{aligned} \quad (\text{B.1.8})$$

と定義する。 $s$  達の型は適当なものを取る。CFT 側  $\mathcal{T}_L$  の共形ブロック  $\tilde{\mathcal{F}}$  も同様に定義

する。

NS4 点共形ブロックの s-t チャンネル変換に対応する係数を<sup>2</sup>

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{s_1, s_2}(z_1, z_2 | \theta_1, \theta_2) &= \sum_{\substack{l(s_3)=r(s_2), a(s_3)=a(s_1) \\ l(s_4)=l(s_1), r(s_4)=l(r_2)}} F_{s_1, s_2}^{s_3, s_4} \Phi_{s_3}(-z_2 | -\theta_2) \otimes_1 \Phi_{s_4}(z_{12} | \theta_{12}) \\
\mathcal{G}_{s_1, s_2}(z_1, z_2 | \theta) &= \sum_{\substack{l(s_3)=r(s_2), a(s_3)=a(s_1) \\ l(s_4)=l(s_1), r(s_4)=l(r_2)}} G_{s_1, s_2}^{s_3, s_4} \Psi_{s_3}(-z_2) \otimes_{1, -i\theta} \Psi_{s_4}(z_1 - z_2) \\
\mathcal{H}_{s_1, s_2}(z_1, z_2) &= \sum_{\substack{l(s_3)=r(s_2), a(s_3)=a(s_1) \\ l(s_4)=l(s_1), r(s_4)=l(r_2)}} H_{s_1, s_2}^{s_3, s_4} \Psi_{s_3}(-z_2) \otimes_1 \Psi_{s_4}(z_1 - z_2) \quad (\text{B.1.9})
\end{aligned}$$

とする。<sup>3</sup>ただし、 $z_{12} = z_1 - z_2 - \theta_1 \theta_2$ ,  $\theta_{12} = \theta_1 - \theta_2$  である。右辺の引数は 3 点付き超球面を (4.4.4), (4.4.8) で貼り合わせてできる 4 点付き超球面に左辺の 4 点ブロックが乗っている 4 点超球面と一致するように定めた。

さて、左右の理論の貼り合わせを考える。 $\mathcal{T}_R, \mathcal{T}_L$  を貼り合わせた理論  $\mathcal{T}$  の NS 共形場, R 共形場を

$$\begin{aligned}
\phi_{a, \bar{a}}(z, \bar{z} | \theta) &= \sum_{l(s)=a, l(\bar{s})=\bar{a}} d_{s, \bar{s}} \Phi_s(z | \theta) \tilde{\Phi}_{\bar{s}}(\bar{z}) \\
\psi_{i, \bar{a}}(z, \bar{z}) &= \sum_{l(s)=i, l(\bar{s})=\bar{a}} e_{s, \bar{s}} \Psi_s(z) \tilde{\Phi}_{\bar{s}}(\bar{z}) \quad (\text{B.1.10})
\end{aligned}$$

とする。

係数  $d, e$  は種々の無矛盾性条件を満たさなければならない。一つ目の条件は、s-t 変換での不変性である。NS4 点関数に関してはこれは

$$\begin{aligned}
d_{s_1, \bar{s}_1} d_{s_2, \bar{s}_2} &= \sum_{s_3, s_4, \bar{s}_3, \bar{s}_4} F_{s_1, s_2}^{s_3, s_4} \tilde{F}_{\bar{s}_1, \bar{s}_2}^{\bar{s}_3, \bar{s}_4} d_{s_3, \bar{s}_3} d_{s_4, \bar{s}_4} \\
d_{s_1, \bar{s}_1} e_{s_2, \bar{s}_2} &= \sum_{s_3, s_4, \bar{s}_3, \bar{s}_4} G_{s_1, s_2}^{s_3, s_4} \tilde{F}_{\bar{s}_1, \bar{s}_2}^{\bar{s}_3, \bar{s}_4} e_{s_3, \bar{s}_3} e_{s_4, \bar{s}_4} \\
e_{s_1, \bar{s}_1} e_{s_2, \bar{s}_2} &= \sum_{s_3, s_4, \bar{s}_3, \bar{s}_4} H_{s_1, s_2}^{s_3, s_4} \tilde{F}_{\bar{s}_1, \bar{s}_2}^{\bar{s}_3, \bar{s}_4} e_{s_3, \bar{s}_3} e_{s_4, \bar{s}_4} \quad (\text{B.1.11})
\end{aligned}$$

となる。和は正しい型の  $s$  達について取る。これは  $\phi_{a, \bar{a}}, \psi_{a, \bar{a}}$  たちの間の 4 点関数が well-defined である事を要求する。

<sup>2</sup> $\mathcal{T}_R, \mathcal{T}_L$  は chiral な SCFT, CFT として無矛盾である事を前提としているので、F 達はペンタゴン関係式などの chiral な (S)CFT の無矛盾性からくる関係式は満たすと仮定している。

<sup>3</sup>F の well-definedness については立ち入らない。有理 (S)CFT の添字については問題ない。

## B.2. トーラス振幅とモジュラー不変性

次に、トーラス振幅を調べる。R セクターのトーラス 1 点関数を

$$\begin{aligned}\chi_{i,s(a,i)}^{\text{R},0}(\tau|\theta) &= \text{Tr}_{\mathcal{Z}_i^{\text{R}}} q^{L_0+2\sqrt{2\pi i}\theta G_0-\frac{c}{24}} \Psi_{s(a,i)}(z=1) \\ \chi_{i,s(a,i)}^{\text{R},1}(\tau|\eta) &= \text{Tr}_{\mathcal{Z}_i^{\text{R}}} q^{L_0+\sqrt{2\pi i}\eta G_0-\frac{c}{24}} (-1)^F \Psi_{s(a,i)}(z=1),\end{aligned}\quad (\text{B.2.1})$$

NS セクターのトーラス 1 点関数を

$$\begin{aligned}\chi_{a,s(b,a)}^{\text{NS},0}(\tau|\theta) &= \text{Tr}_{\mathcal{Z}_a^{\text{NS}}} q^{L_0-\frac{c}{24}} \Phi_{s(a)}(z=1|\sqrt{2\pi i}\theta) \\ \chi_{a,s(b,a)}^{\text{NS},1}(\tau|\theta) &= \text{Tr}_{\mathcal{Z}_a^{\text{NS}}} q^{L_0-\frac{c}{24}} (-1)^F \Phi_{s(a)}(z=1|\sqrt{2\pi i}\theta),\end{aligned}\quad (\text{B.2.2})$$

と定義する。 $q = e^{2\pi i\tau}$  である。特に、挿入される演算子が 1 のときこれらは指標  $\chi_i^{\text{R},\pm} := \chi_{i,s(0,i)}^{\text{R},\pm}$ ,  $\chi_a^{\text{NS},\pm} := \chi_{a,s(0,i)}^{\text{NS},\pm}$  になる。また、CFT 側のトーラス 1 点関数を

$$\tilde{\chi}_{\tilde{a},\tilde{s}(\tilde{a})}(\tilde{\tau}) = \text{Tr}_{\tilde{\mathcal{Z}}_{\tilde{a}}} \tilde{q}^{\tilde{L}_0-\frac{\tilde{c}}{24}} \tilde{\Phi}_{\tilde{s}(\tilde{a})}(z=1) \quad (\text{B.2.3})$$

とする。

これらの 1 点関数はトーラスの 4 つのスピンの構造それぞれに対応している。 $\chi^{\text{R},+}$  は odd なスピンの構造、それ以外は even なスピンの構造に対応する。これらのスピンの構造を ( $b = \text{NS}, \# = 1$ ) などと表す事にする。超トーラス 1 点関数  $\chi$  の引数  $\theta, \eta, \tau$  は

$$(w|\theta) \simeq (w+1|\theta) \simeq (w+\tau|\pm\theta) \quad (\text{B.2.4})$$

で表される even スピンの構造超トーラスや

$$(w|\theta) \simeq (w+1|\theta) \simeq (w+\tau-\eta\theta|\theta+\eta) \quad (\text{B.2.5})$$

で表される odd スピンの構造超トーラスに点 ( $w=0|\theta$ ) がついた点付き超トーラスのモジュライを表している。右辺の intertwiner の引数や縫い合わせパラメータは 3 点付き超球面の  $z=0$  と  $z=\infty$  で縫い合わせたときにこれらの超トーラスが得られるように選んだ。

$\mathcal{N} = 1$  超トーラスは odd スピンの構造の時のみ奇モジュライ、奇自己同型の連続自由度を一つずつ持つので奇モジュライ依存性  $\eta$  を持ち、NS vertex の奇方向  $\theta$  への依存性はない。一方、even スピンの構造の 1 点付き超トーラスは超トーラス由来の奇モジュライはないが、NS vertex の奇方向に対応する奇モジュライ  $\theta$  を持つ。<sup>4</sup> $\theta$  と  $\eta$  はモジュラー群の作用に対する振る舞いが異なる。このため、スピンの構造によってトーラスに与える奇パラメータが異なる。

<sup>4</sup>odd スピンの構造の超トーラスの奇自己同型の取り扱いが微妙である [21,44]。奇自己同型を生成する Grassmann 数  $\delta$  は  $\alpha\delta = 0$  を満たすとする必要がある。

even スピン構造たちは混ざるため、モジュラー群の作用  $S, T$  はこれらの指標を混ぜる:

$$\begin{aligned}\chi_{a,s}^{\text{NS},1}(\tau|\theta) &= \sum_{i,s'} S_{a,s}^{i,s'} \chi_{i,s'}^{\text{R},1}(-1/\tau|\theta/\sqrt{\tau}) \\ \chi_{a,s}^{\text{NS},0}(\tau|\theta) &= \chi_{a,s}^{\text{NS},1}(\tau+1|\theta) \\ \chi_{a,s}^{\text{NS},0}(\tau|\theta) &= \sum_{b,s'} \hat{S}_{a,s}^{b,s'} \chi_{b,s'}^{\text{NS},0}(-1/\tau|\theta/\sqrt{\tau}).\end{aligned}\quad (\text{B.2.6})$$

odd スピン構造は 1 つしかないため、それら自身の間で変換する:

$$\chi_{i,s}^{\text{R},1}(\tau|\eta) = \sum_{j,s'} \tilde{S}_{i,s}^{j,s'} \chi_{j,s'}^{\text{R},1}(-1/\tau|\eta/\tau^{3/2}) \quad (\text{B.2.7})$$

左右貼り合わせた理論のトーラス NS1 点関数は、トーラスのスピン構造が  $(b = \text{NS}, \# = 1)$  の時

$$\begin{aligned}Z_{a,\bar{a}}^{\text{NS},1}(\tau, \bar{\tau}|\theta) &= \text{Tr}_{\mathcal{H}_{\mathbb{Z}^2/\text{NS} \otimes \mathbb{Z}^2}} q^{L_0 - \frac{c}{24}} \bar{q}^{\tilde{L}_0 - \frac{\bar{c}}{24}} \phi_{a,\bar{a}}(0, 0|\sqrt{2\pi i}\theta) \\ &= \sum_{s,\bar{s}} d_{s,\bar{s}} \chi_{a,s}^{\text{NS},1}(\tau|\theta) \tilde{\chi}_{\bar{a},\bar{s}}(\bar{\tau})\end{aligned}\quad (\text{B.2.8})$$

となる。ほかの even スピン構造についても同様である。スピン構造が  $(b = \text{R}, \# = 1)$  のときは、

$$\begin{aligned}Z_{i,\bar{a}}^{\text{R},1}(\tau, \bar{\tau}|\eta) &= \text{Tr}_{\mathcal{H}_{\mathbb{Z}^2/\text{R} \otimes \mathbb{Z}^2}} q^{L_0 + \sqrt{2\pi i}\eta G_0 - \frac{c}{24}} \bar{q}^{\tilde{L}_0 - \frac{\bar{c}}{24}} \psi_{i,\bar{a}}(0, 0) \\ &= \sum_{s,\bar{s}} e_{s,\bar{s}} \chi_{a,s}^{\text{R},1}(\tau|\eta) \tilde{\chi}_{\bar{a},\bar{s}}(\bar{\tau})\end{aligned}\quad (\text{B.2.9})$$

となる。

これらはスピン構造を保つモジュラー変換で不変でなければいけないから、

$$\begin{aligned}d_{s,\bar{s}} &= \sum_{s',\bar{s}'} S_s^{s'} \tilde{S}_{\bar{s}}^{\bar{s}'} e_{s',\bar{s}'} \\ d_{s,\bar{s}} &= \sum_{s',\bar{s}'} \hat{S}_s^{s'} \tilde{S}_{\bar{s}}^{\bar{s}''} d_{s',\bar{s}'} \\ e_{s,\bar{s}} &= \sum_{s',\bar{s}'} \tilde{S}_s^{s'} \tilde{S}_{\bar{s}}^{\bar{s}'} e_{s',\bar{s}'}\end{aligned}\quad (\text{B.2.10})$$

が必要である。

特に、トーラス 0 点をみると、

$$\begin{aligned}Z^{\text{NS},1} &:= Z_{0,0}^{\text{NS},1} = \sum_{b,\bar{b}} d_{s_{(0,b)},\bar{s}_{(0,\bar{b})}} \chi_b^{\text{NS},1} \tilde{\chi}_{\bar{b}} \\ Z^{\text{R},1} &:= Z_{0,0}^{\text{R},1} = \sum_{i,\bar{b}} e_{s_{(0,i)},\bar{s}_{(0,\bar{b})}} \chi_i^{\text{R},1} \tilde{\chi}_{\bar{b}}\end{aligned}\quad (\text{B.2.11})$$

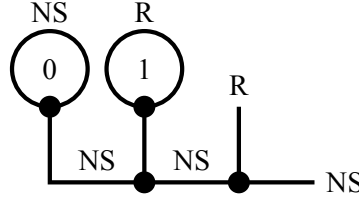


図 B.1.: 種数2,2点付きリーマン面のスピン構造付きパンツ分解。1点付きトーラスと3点付き球面の縫い合わせのみで構成される。この形のパンツ分解に対しては、トーラス部分のスピン構造を決めると全体のスピン構造が定まる。

等となる。よって、両側貼り合わせた non-chiral  $\mathcal{N} = (1, 0)$  SCFT  $\mathcal{T}$  の状態空間を

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\text{mat}}^{\text{NS}} &= \bigoplus_{a, \hat{a}} d_{s_{(0,a)}, \bar{s}_{(0,\hat{a})}} \mathcal{V}_a^{\text{NS}} \otimes \widetilde{\mathcal{V}}_{\hat{a}} \\ \mathcal{H}_{\text{mat}}^{\text{R}} &= \bigoplus_{i, \hat{a}} e_{s_{(0,i)}, \bar{s}_{(0,\hat{a})}} \mathcal{V}_i^{\text{R}} \otimes \widetilde{\mathcal{V}}_{\hat{a}}\end{aligned}\quad (\text{B.2.12})$$

と定義すれば、(B.2.11) を状態空間のトレースとして

$$\begin{aligned}Z_{\text{mat}}^+ &= Z_{\text{mat}}^{\text{NS}, \#} = \text{Tr}_{\mathcal{H}_{\text{mat}}^{\text{NS}}} q^{L_0 - \frac{c}{24}} \bar{q}^{\tilde{L}_0 - \frac{\tilde{c}}{24}} (-1)^{\#F} \\ Z_{\text{mat}}^- &= Z_{\text{mat}}^{\text{R}, \#} = \text{Tr}_{\mathcal{H}_{\text{mat}}^{\text{R}}} q^{L_0 - \frac{c}{24}} \bar{q}^{\tilde{L}_0 + \# \sqrt{2\pi i} \eta G_0 - \frac{\tilde{c}}{24}} (-1)^{\#F}\end{aligned}\quad (\text{B.2.13})$$

とかける。 $Z^+$  は even スピン構造超トーラスのモジュライ  $\mathfrak{M}_{g=1}^+$  全体の有理関数に解析接続される。

### B.3. 高種数の共形ブロックと超弦理論

高種数の共形ブロックを定義する。まず、ヘテロティック世界面のモジュライ空間  $\mathfrak{M}_{\text{het}}$  の最大退化点  $p$  をひとつ選ぶ。ここでは、図 B.1 の形のスピン構造付きパンツ分解に対応する点を選んだとする。このような形のパンツ分解はループが1点付きトーラス部分にしかないため、スピン構造と共形ブロックの対応が見やすい。

パンツ分解のループ以外の各 NS 内線に縫い合わせパラメータ  $q$ , 各トーラス部分に対応するモジュライ  $\tau, \theta$  または  $\tau, \eta$  を与えると、これらのパラメータ達  $(\{q\}, \{\tau\} | \{\theta\}, \{\eta\})$  はこの最大退化点の周りの正則な局所座標を張るのだった。各1点付きトーラス、3点付き球面にフュージョン係数  $\{s_i\}$  を指定し、これらに対応する超共形ブロックたちをパラメータ  $(\{q\}, \{\tau\} | \{\theta\}, \{\eta\})$  で縫い合わせることによって、高種数のプライマリー場たちの間の超共形ブロック

$$\mathcal{F}_{\{s_i\}}(\{q\}, \{\tau\} | \{\theta\}, \{\eta\}) \quad (\text{B.3.1})$$

を定義する。反正則側の共形ブロック

$$\widetilde{\mathcal{F}}_{\{s_i\}}(\{\bar{q}\}, \{\bar{\tau}\}) \quad (\text{B.3.2})$$

も同様に定義する。

左右の共形ブロックの貼り合わせは、各1点付きトーラス、3点付き球面に割り当てら

れた融合係数  $s_i$  ごとに  $d_{s_i, \tilde{s}_i}$  や  $d_{\tilde{s}_i, s_i}$  を使って貼り合わせる。例えば、すべての融合係数が NS3 点に伴うものときは、

$$N_{\{s_i\}, \{\tilde{s}_i\}} = \prod_i d_{s_i, \tilde{s}_i} \quad (\text{B.3.3})$$

として、この  $N$  をつかって  $\mathcal{F}, \tilde{\mathcal{F}}$  の貼り合わせを

$$\prod_{\{s_i\}, \{\tilde{s}_i\}} N_{\{s_i\}, \{\tilde{s}_i\}} \mathcal{F}_{\{s_i\}} \tilde{\mathcal{F}}_{\{\tilde{s}_i\}} \quad (\text{B.3.4})$$

と定義する。ただし、和は外線のラベルにあったものについてとる。 $d$  が 1 ループ共形ブロックと球面 4 点共形ブロックのモジュラー不変性を満たす時には、 $N$  による貼り合わせはスピン構造付きパンツ分解を保つモジュラー変換に対して不変となる。 $e$  が混ざる場合も同様である。

以上から、超弦理論の散乱振幅を定義する。外線が superconformal weight  $(1/2, 1)$  の NS superprimary vertex, あるいは conformal weight  $(5/8, 1)$  の R superprimary vertex であって、GSO 射影の元で偶であるような (超) 共形ブロック  $\mathcal{F}, \tilde{\mathcal{F}}$  を考える。これらと (超) ゴーストの寄与を合わせて、

$$\begin{aligned} \alpha_{\{s\}} &:= \mathcal{D}[m|\eta] \mathcal{F}_{\{s\}}(m|\eta) \int \mathcal{D}\hat{B} \mathcal{D}\hat{C} \prod_i \langle \mu_i | b \rangle \prod_\sigma \delta(\langle \chi_\sigma | \beta \rangle) e^{-S_{\hat{B}\hat{C}}(\Sigma(m, \tilde{m}|\eta))} \\ \tilde{\alpha}_{\{\tilde{s}\}} &:= dm \tilde{\mathcal{F}}_{\{\tilde{s}\}}(\tilde{m}) \int \mathcal{D}\hat{B} \mathcal{D}\hat{C} \prod_i \langle \tilde{\mu}_i | \tilde{b} \rangle e^{-S_{\hat{B}\hat{C}}(\Sigma(m, \tilde{m}|\eta))} \end{aligned} \quad (\text{B.3.5})$$

を定義すると、これらはそれぞれ  $\mathfrak{M}_R, \mathfrak{M}_L$  の最大退化点  $p$  周りの有理  $\Delta_e | \Delta_o$  形式、反有理  $\Delta_e$  形式を定める。これらは、解析接続により  $\mathfrak{M}_R, \mathfrak{M}_L$  の普遍被覆上の形式に伸びる。左右を貼り合わせて、超弦理論の散乱振幅を

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int dp_I \int_{\mathfrak{M}_{\text{het}}} \omega(p_i) \\ \omega(p_i) &= \sum_{\{s\}, \{\tilde{s}\}} N_{\{s\}, \{\tilde{s}\}} \omega_{\{s\}, \{\tilde{s}\}}(p_i) \\ \omega_{\{s\}, \{\tilde{s}\}} &= \alpha_{\{s\}}(p_i) \wedge \tilde{\alpha}_{\{\tilde{s}\}}(p_i) \end{aligned} \quad (\text{B.3.6})$$

と定義する。ノンコンパクト部分のプライマリを表す連続的な添字  $p$  を離散的な添字  $s$  と分離して書いた。 $\omega$  は貼り合わせた相関関数のモジュラー不変性から  $\mathfrak{M}_{\text{het}}$  上の体積形式となる。散乱振幅を twisted ゴースト場を使って定義したため、平坦背景の場合と同様この定式化は  $\mathcal{V}^{\text{NS}} = c\tilde{c}\delta(\gamma)V^{\text{NS}}, \mathcal{V}^{\text{R}} = c\tilde{c}SV^{\text{R}}$  の形の頂点演算子を使うことと同等である。

以上の構成から、一般の SCFT による構成においても伝搬関数が

$$q^{L_0-1} \tilde{q}^{\tilde{L}_0-1} b_0 \tilde{b}_0 \Pi_{\text{GSO}} \quad (\text{B.3.7})$$

となることが理解できる。 $\Pi_{\text{GSO}}$  はやはり  $\int_{\mathfrak{M}_{\text{het}}}$  の中に組み込まれているスピン和から現れる。

$\mathcal{N} = (1, 1)$  理論の場合も同様に一般の左右の SCFT とモジュラー不変な貼り合わせ係数を用いて超弦理論を構成できる。

# Bibliography

- [1] D. Friedan, S. H. Shenker, and E. J. Martinec, “Covariant Quantization of Superstrings,” *Phys.Lett.* **B160** (1985) 55.
- [2] E. P. Verlinde and H. L. Verlinde, “Multiloop Calculations in Covariant Superstring Theory,” *Phys.Lett.* **B192** (1987) 95.
- [3] J. J. Atick, J. M. Rabin, and A. Sen, “An Ambiguity in Fermionic String Perturbation Theory,” *Nucl.Phys.* **B299** (1988) 279.
- [4] J. J. Atick, G. W. Moore, and A. Sen, “CATOPTRIC TADPOLES,” *Nucl.Phys.* **B307** (1988) 221.
- [5] E. D’Hoker and D. Phong, “The Geometry of String Perturbation Theory,” *Rev.Mod.Phys.* **60** (1988) 917.
- [6] E. D’Hoker and D. Phong, “Conformal Scalar Fields and Chiral Splitting on Superriemann Surfaces,” *Commun.Math.Phys.* **125** (1989) 469.
- [7] E. D’Hoker and D. Phong, “Two loop superstrings 4: The Cosmological constant and modular forms,” *Nucl.Phys.* **B639** (2002) 129–181, [arXiv:hep-th/0111040](#) [hep-th].
- [8] E. D’Hoker and D. Phong, “Two loop superstrings. 1. Main formulas,” *Phys.Lett.* **B529** (2002) 241–255, [arXiv:hep-th/0110247](#) [hep-th].
- [9] E. D’Hoker and D. Phong, “Two loop superstrings. 3. Slice independence and absence of ambiguities,” *Nucl.Phys.* **B636** (2002) 61–79, [arXiv:hep-th/0111016](#) [hep-th].
- [10] E. Witten, “Superstring Perturbation Theory Revisited,” [arXiv:1209.5461](#) [hep-th].
- [11] E. Witten, “More On Superstring Perturbation Theory,” [arXiv:1304.2832](#) [hep-th].
- [12] R. Donagi and E. Witten, “Supermoduli Space Is Not Projected,” [arXiv:1304.7798](#) [hep-th].
- [13] E. Witten, “The Feynman  $i\epsilon$  in String Theory,” [arXiv:1307.5124](#) [hep-th].
- [14] K. Ohmori and Y. Tachikawa, “Notes on reductions of superstring theory to bosonic string theory,” *JHEP* **1308** (2013) 024, [arXiv:1303.7299](#) [hep-th].
- [15] E. D’Hoker and D. H. Phong, “Two-loop vacuum energy for Calabi-Yau orbifold models,” *Nucl.Phys.* **B877** (2013) 343–400, [arXiv:1307.1749](#).
- [16] J. Polchinski, *String theory. Vol. 1: An introduction to the bosonic string*. Cambridge, UK: Univ. Pr., 1998.

- [17] J. Polchinski, *String theory. Vol. 2: Superstring theory and beyond*. Cambridge, UK: Univ. Pr., 1998.
- [18] P. Deligne, P. Etingof, D. Freed, L. Jeffrey, D. Kazhdan, *et al.*, “Quantum fields and strings: A course for mathematicians. Vol. 1, 2,”.
- [19] E. Witten, “Notes On Supermanifolds and Integration,” arXiv:1209.2199 [hep-th].
- [20] M. Batchelor, “The structure of supermanifolds,” *Transactions of the American Mathematical Society* **253** (1979) 329–338.
- [21] E. Witten, “Notes On Super Riemann Surfaces And Their Moduli,” arXiv:1209.2459 [hep-th].
- [22] J. Polchinski, “Factorization of Bosonic String Amplitudes,” *Nucl.Phys.* **B307** (1988) 61.
- [23] P. C. Nelson, “Covariant Insertion of General Vertex Operators,” *Phys.Rev.Lett.* **62** (1989) 993.
- [24] I. Antoniadis, E. Gava, K. Narain, and T. Taylor, “Topological amplitudes in string theory,” *Nucl.Phys.* **B413** (1994) 162–184, arXiv:hep-th/9307158 [hep-th].
- [25] W. Fischler and L. Susskind, “Dilaton Tadpoles, String Condensates and Scale Invariance,” *Phys.Lett.* **B171** (1986) 383.
- [26] R. Pius, A. Rudra, and A. Sen, “Mass Renormalization in String Theory: Special States,” arXiv:1311.1257 [hep-th].
- [27] E. Witten, “Analytic Continuation Of Chern-Simons Theory,” arXiv:1001.2933 [hep-th].
- [28] M. Dine, N. Seiberg, and E. Witten, “Fayet-Iliopoulos Terms in String Theory,” *Nucl.Phys.* **B289** (1987) 589.
- [29] M. Dine, I. Ichinose, and N. Seiberg, “F Terms and d Terms in String Theory,” *Nucl.Phys.* **B293** (1987) 253.
- [30] J. J. Atick, L. J. Dixon, and A. Sen, “String Calculation of Fayet-Iliopoulos d Terms in Arbitrary Supersymmetric Compactifications,” *Nucl.Phys.* **B292** (1987) 109–149.
- [31] A. Sen, “Mass Renormalization and BRST Anomaly in String Theories,” *Nucl.Phys.* **B304** (1988) 403–416.
- [32] E. D’Hoker and D. Phong, “The Box graph in superstring theory,” *Nucl.Phys.* **B440** (1995) 24–94, arXiv:hep-th/9410152 [hep-th].
- [33] B. Zwiebach, “Closed string field theory: Quantum action and the B-V master equation,” *Nucl.Phys.* **B390** (1993) 33–152, arXiv:hep-th/9206084 [hep-th].
- [34] N. Berkovits, “Covariant Map Between Ramond-Neveu-Schwarz and Pure Spinor Formalisms for the Superstring,” arXiv:1312.0845 [hep-th].



- [35] N. Berkovits, “Super Poincare covariant quantization of the superstring,” *JHEP* **0004** (2000) 018, arXiv:hep-th/0001035 [hep-th].
- [36] Z. Qiu, “Supersymmetry, Two-dimensional Critical Phenomena and the Tricritical Ising Model,” *Nucl.Phys.* **B270** (1986) 205–234.
- [37] E. B. Kiritsis and G. Siopsis, “Operator Algebra of the N=1 Super Wess-Zumino Model,” *Phys.Lett.* **B184** (1987) 353.
- [38] D. Chorazkiewicz and L. Hadasz, “Braiding and fusion properties of the Neveu-Schwarz super-conformal blocks,” *JHEP* **0901** (2009) 007, arXiv:0811.1226 [hep-th].
- [39] D. Chorazkiewicz, L. Hadasz, and Z. Jaskolski, “Braiding properties of the N=1 super-conformal blocks (Ramond sector),” *JHEP* **1111** (2011) 060, arXiv:1108.2355 [hep-th].
- [40] J. Cohn and D. Friedan, “Super Characters and Chiral Asymmetry in Superconformal Field Theory,” *Nucl.Phys.* **B296** (1988) 779.
- [41] L. Alvarez-Gaume, G. W. Moore, and C. Vafa, “Theta Functions, Modular Invariance and Strings,” *Commun.Math.Phys.* **106** (1986) 1–40.
- [42] G. W. Moore and N. Seiberg, “Polynomial Equations for Rational Conformal Field Theories,” *Phys.Lett.* **B212** (1988) 451.
- [43] N. Seiberg and E. Witten, “Spin Structures in String Theory,” *Nucl.Phys.* **B276** (1986) 272.
- [44] J. M. Rabin, “Superelliptic curves,” arXiv:hep-th/9302105 [hep-th].