



# $\mathcal{N} = 1$ 超対称ゲージ理論の gravity デュアル

東京工業大学 大河内 豊

## 概要

4次元  $\mathcal{N} = 1$  の超対称ゲージ理論に対する gravity デュアルについて最近大きな進展が見られた。本稿は、これらの発展を紹介するレビュー article である<sup>1</sup>。

## 目次

1	はじめに	3
第 I 部 幾何学的な転移		3
2	Vafa のラージ $N$ デュアリティー	4
2.1	ラージ $N$ デュアリティーと gravity デュアル	4
2.2	Vafa のラージ $N$ デュアリティー	6
2.3	TypeIIB での記述	12
3	$\mathcal{N} = 1$ quiver 理論と幾何学的な転移	13
3.1	$\mathcal{N} = 1$ quiver 理論	13
3.2	$\mathcal{N} = 1$ ADE quiver 理論 (ノンモノドロミックな場合)	19
3.3	$\mathcal{N} = 1$ ADE quiver 理論 (モノドロミックな場合)	22
3.3.1	簡単な例	22
3.3.2	2 adjoint 場をもつ例	24
3.4	ラージ $N$ デュアリティー	24
3.5	重力サイド	25
3.5.1	ゲージカップリングの繰り込み	26
3.5.2	リーディングオーダーでの superpotential	27
3.6	Seiberg のデュアリティー	28
3.6.1	幾何学から得られるデュアリティー	28
3.6.2	場の理論からのチェック $k = 1$ case	31
3.7	$\beta$ 関数 と RG cascade	32
4	$X(k, G)$ の具体例	35
4.1	$X(k, A_1)$ case	35
4.1.1	Vafa のデュアリティーによる解析	35
4.1.2	場の理論からの解析	39
4.2	$X(k = 1, \hat{A}_1)$ Klebanov-Strassler case	43

<sup>1</sup>本稿は平成 13 年度東京工業大学理工学研究科に提出した修士論文に加筆、修正を施したものである。e-mail :ookouchi@th.phys.titech.ac.jp

4.3	$X(k, \hat{G}, \text{pure})$ D3 ブレーンのみを持つ場合 (conformal 対称性をもつ場合)	46
4.3.1	AdS/CFT 対応	46
4.3.2	$X(k = 1, \hat{A}_1, \text{pure})$ Klebanov-Witten case	48
<b>第 II 部 <math>G_2</math> ホロノミーを持つ多様体上での M 理論のダイナミクス</b>		<b>49</b>
<b>5</b>	<b>M 理論の SUSY コンパクト化と特殊ホロノミー多様体</b>	<b>49</b>
5.1	11 次元 SUGRA	49
5.2	SUSY バックグラウンド	50
5.3	スムーズ $G_2$ コンパクト化	52
5.4	Conical 特異性をもつ old $G_2$ 計量	53
<b>6</b>	<b>M 理論のダイナミクス</b>	<b>55</b>
6.1	$\mathbf{R}^3 \times \mathbf{S}^3$ 、 $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{CP}^2$ に共通な性質	56
6.1.1	ダイナミカルなモジュライ	56
6.1.2	対称性	56
6.2	$\mathbf{R}^3 \times \mathbf{S}^4$ 上の M 理論ダイナミクス	58
6.3	$\mathbf{R}^3 \times \mathbf{CP}^2$ 上の M 理論ダイナミクス	60
<b>7</b>	<b>M 理論による Vafa のデュアリティー</b>	<b>62</b>
7.1	トライアリティー	62
7.2	正則なオブザーバブル	64
7.3	$Y$ 上の cone における量子論的曲線	65
7.4	4 次元ゲージ理論	67
7.5	$Y_F$ 上の cone における量子論的曲線	68
7.6	TypeIIA への移行	70
<b>8</b>	<b>特異点上のカイラルフェルミオン</b>	<b>71</b>
8.1	ゲージアノマリー	72
8.2	ゲージ・重カアノマリー	73
<b>9</b>	<b>New <math>G_2</math> 計量</b>	<b>74</b>
9.1	Deformed conifold に対応する $G_2$ 計量	75
9.1.1	対称性と計量の ansatz	75
9.1.2	$G_2$ ホロノミーをもつ条件	75
9.1.3	パラメータを 1 つ持つ解	76
9.1.4	解の漸近的な振る舞い	77
9.2	Resolved conifold に対応する $G_2$ 計量	78
9.2.1	対称性と計量の ansatz	78
9.2.2	パラメータを 1 つ持つ解	78
9.2.3	解の漸近的な振る舞い	78
<b>10</b>	<b>終わりに</b>	<b>78</b>

A	Open-closed トポロジカルストリングデュアリティー	80
A.1	Open トポロジカルストリング	80
A.2	Closed トポロジカルストリング	80
A.3	デュアリティー	80
B	アフライン リー代数	81
C	巻きついたブレーンによる superpotential	83
D	RR フラックス による Partial SUSY Breaking	85
E	Conifold	86
E.1	Resolved conifold 上の Ricci 平坦 Kähler 計量	90
E.2	Deformed conifold 上の Ricci 平坦 Kähler 計量	92
E.3	コホモロジーとホモロジー	93

## 1 はじめに

ストリング理論の中での、場の理論の実現の仕方は、最近大きく変化してきている。弦理論から場の理論を出す従来の方法は、弦理論の中に含まれる massless 粒子を調べて、それらの 10 次元有効場の理論をつくり、それを Kaluza-Klein-reduction(KK-reduction) することで、次元の低い場の理論が実現されていた。しかしながら、D ブレーンという新しい物理的媒体をストリング理論に導入することで、新たな場の理論の実現が可能になった。それが D ブレーン上の有効理論である。D ブレーンはストリング理論におけるソリトンで、これを置くことはストリング理論において、異なる真空を考えていることに相当する。ストリング理論のパラメータを適当に調整すると、この D ブレーン上には有効理論としてゲージ理論が生じる。この意味でゲージ理論は、ストリング理論のひとつのセクターと見ることができる。この様にストリング理論の枠内でゲージ理論を実現することにより、t'Hooft によって提案されていたゲージ理論とストリング理論のデュアリティーがより実現しやすくなった。ストリング理論は重力の量子論なので非常に扱いにくい、パラメータの領域をうまく選んでやると古典重力が良い近似になるようにでき、ゲージ理論と古典重力の対応が実現される。

こうした対応はこれまで、さまざまな例によって実現されてきた [1][2][3]。中でも注目すべきものは、Maldacena による超対称性が入った CFT(conformal Field Theory) と AdS(Anti-de Sitter) 空間の対応である [4][5]。これは D3 ブレーンを置くことによって実現され、AdS 空間が古典重力側に対応する。この対応でのゲージ理論は、超対称性が  $\mathcal{N} = 4$  の理論であり、共形対称性を持っていたので量子効果の振り舞いはかなり制限されていた。しかしながら、実際に興味深いのは超対称性が  $\mathcal{N} = 1$  の理論であり、ごく最近多くの進展が見られた。この論文では超対称性が  $\mathcal{N} = 1$  の、4 次元ゲージ理論のゲージ理論/古典重力理論デュアリティーについて最近の発展を TypeII 理論及び M 理論の立場からまとめる。

## 第I部

# 幾何学的な転移

## 2 Vafaのラージ $N$ デュアリティー

### 2.1 ラージ $N$ デュアリティーと gravity デュアル

ラージ  $N$  デュアリティーは昔から知られているもので、まず始めにこの復習をする [5][6]。簡単のためにゲージ群としては  $U(N)$  で考える。ラージ  $N$  理論とは、この  $N$  を  $N \rightarrow \infty$  と考えた理論である。しかしながら、 $N$  を大きくとるといっただけでは、理論は厳密に定義されていないので、何を固定して  $N$  を大きくとるかを指定する必要がある。 $U(N)$  Super Yang-Mills(SYM) の特徴である漸近的自由性を保持して  $N \rightarrow \infty$  の極限を考えることは納得の行くものである。エネルギースケールに対するカップリングの変化を決めるのは、繰り込み群方程式

$$\mu \frac{dg_{YM}}{d\mu} = -\frac{11}{3} N \frac{g_{YM}^3}{16\pi^2} \quad (\text{pure YM}) \quad (1)$$

である。これは1ループでの式で、さらに高次のループからの寄与があるが、それは無視して考える。このスケールを変えないように  $N \rightarrow \infty$  をとるには

$$\lambda \equiv g_{YM}^2 N \text{ を固定して } N \rightarrow \infty \quad (2)$$

とすればよい。このとき固定した  $\lambda$  を 't Hooft カップリングという。

摂動的な領域 (カップリングが弱いところ) で、diagram の  $\lambda$  依存性がどの様になるかを調べてみる。't Hooft カップリングが非常に小さくて、但し  $N$  は非常に大きい、そういう領域で摂動的な展開を考える。カップリング  $g_{YM}$  と  $N$  の次数を数えるために、ラグランジアンを大まかに書くと次のようになる。

$$\mathcal{L} \sim Tr(d\Phi_i d\Phi_i) + g_{YM} c^{ijk} Tr(\Phi_i \Phi_j \Phi_k) + g_{YM}^2 d^{ijkl} Tr(\Phi_i \Phi_j \Phi_k \Phi_l) \quad (3)$$

ここで、 $\Phi$  は、ゲージ場や、adjoint の物質場、スカラー場、フェルミオンをまとめて書いたものとする。1項目は運動項であり、2、3項目の  $c^{ijk}$ 、 $d^{ijkl}$  は適当な定数である。今見たいのはカップリング定数の依存性であるから、2次の項の係数を1に規格化しておく、3次の項が Yang-Mills(YM) カップリングの1乗に比例している。重要なのは、YM でゲージ場と adjoint の matter だけが入っているような場合は、場の2次のところを運動項として1に規格化しておく、必ず3次のところが YM カップリングの1乗に比例していて、4次のところは YM カップリングの2乗に比例するということである。ゲージ不変性からそういう要請が決まってしまうということが重要である。しかしこのままでは、これからやりたい  $\lambda$  依存性が調べにくくなるので、場を rescale して考える。

$$\text{rescale : } \tilde{\Phi}_i = g_{YM} \Phi_i \quad (4)$$

すると、ちょうど YM のカップリング定数を全体にくくりだして、

$$\mathcal{L} \sim \frac{1}{g_{YM}^2} [Tr(\tilde{\Phi}_i \tilde{\Phi}_i) + c^{ijk} Tr(d\tilde{\Phi}_i d\tilde{\Phi}_j \tilde{\Phi}_k) + d^{ijkl} Tr(\tilde{\Phi}_i \tilde{\Phi}_j \tilde{\Phi}_k \tilde{\Phi}_l)] \quad (5)$$

と書ける。't Hooft カップリングと  $N$  をパラメータとしたいので、このカップリングを  $1/g_{YM}^2 = N/\lambda$  と書いておく。

これから、いろいろな Feynman グラフの  $\lambda$  依存性や  $N$  依存性について調べていく。ただし、厳密な Feynman ルールを書く必要はなく、 $\lambda$ 、 $N$  だけに注目して、後の具体的な  $1/p^2$  のプロパゲーターは無視する。

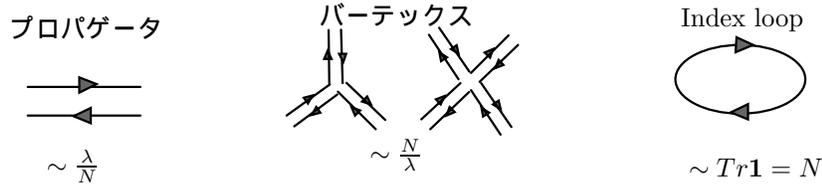


図 1: Feynman rule

プロパゲータは二重線で表わしているが、これは  $U(N)$  の行列になっていて 2 つ足を持っているので、その 1 つ 1 つの足を 2 本線で表しているのである。プロパゲータはラグランジアン の 2 次 の項 の逆数 である から  $\lambda/N$  の依存性を持つ。また、バーテックスには 3 次 の相互作用 と 4 次 の相互作用 があり、オーダーは係数の足がそのまま出てくるので、カップリング依存性は  $N/\lambda$  である。行列の足の一つ一つが一周してループをつくると、それは最終的には 1 のトレースになり、今は  $U(N)$  なので  $N$  となる。

これらを用いて、いろいろなグラフのカップリング依存性を見積もってみる。簡単のために真空グラフを考える。バーテックスの数を  $V$ 、プロパゲータの数を  $E$ 、index loop の数を  $F$  とすると、このようなグラフは次の依存性をもつ。

$$\sim \left(\frac{N}{\lambda}\right)^V \left(\frac{\lambda}{N}\right)^E N^F = N^{V-E+F} \lambda^{E-V} \quad (6)$$

$N$  の次数  $V - E + F$  はグラフの Euler 数になっている。Euler 数というのは、“頂点の数” 引く “辺の数” 足す “面の数” である。

この関係式を具体的な例で次に見ていく。図 2 のようなグラフを考えると、ループの数が 2 つあるので依存性は  $N^2$  である。Euler 数が 2 ということを見るには、このグラフに膜をつくって見ればよい。それは球面になり、その Euler 数は 2 であるから  $N$  のべきが 2 になっていたわけである。

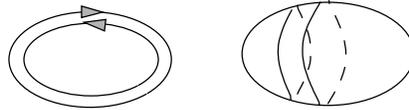


図 2: ループグラフ

この例は膜を張ると球面になる例で planar グラフと呼ばれる。これは Euler 数が一番大きい 2 のもので  $N$  を無限大に飛ばすと、このグラフのみが生き残る。つまり、 $1/N$  展開のリーディングのオーダーになっている。

次に non-planar の例を見ていく。3 はプロパゲータが 6 つ、バーテックスが 4 つ、ループの数が 1 つ、から構成されている。ループの数が 1 つというのは見えにくくなっているが、一筆で書けることに注意するとよく分かる。よってこのグラフは  $N$  の 0 乗の依存性を持つ。これは先ほどの  $N^2$  の依存性と比べてみると、 $N \rightarrow$  大のもとで十分に小さくなる。

本当は運動量依存性などもあり、それほど単純な話ではないが、カップリング定数依存性に関してはこのように評価することができる。つまり、 $N$  無限大の極限を考えると、planar グラフのみを評価してやればよい。

もっと一般のグラフ、例えば amplitude や分配関数などは、こうしたグラフを全部足し上げた形で表される。例えば分配関数は

$$Z \sim N^{2-2g} \sum_{n=0}^{\infty} C_{g,n}(\lambda)^n = \sum_{g=0}^{\infty} N^{2-2g} f_g(\lambda) \quad (7)$$

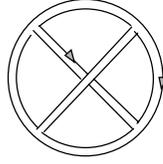


図 3: nonplaner グラフ

と表される。この (7) を用いて大まかにラージ  $N$  デュアリティーを考えてみると、 $\lambda$  が小さいところではゲージ理論がよい振る舞いをするが、 $\lambda$  が大きくなると  $n$  が十分に大きいものが支配的になる。 $n$  が大きいと  $n = E - V$  であるから、プロパゲータをなるべくたくさん使うグラフがよく効く。これは複雑なグラフであり、球面がきれいに張られたようなグラフになると思える。

もちろん、実際にストリングが見えているわけではなく、やはり穴のあいたダイアグラムを足し上げているだけであるが、非摂動的に完全に (7) を考えると、ジーナス展開になっているので何かストリング的な理論と対応がありそうである。さらに、 $N$  が十分に大きい領域は、対応するストリング理論のカップリングが小さい領域に対応し、この対応関係がより見やすくなると考えられる。

$\lambda$  が小さい領域ではゲージ理論的記述がよく、 $\lambda$  が大きい領域ではストリング理論的記述が対応するようなこの関係をラージ  $N$  デュアリティー (ゲージ理論/ストリング理論デュアリティー) という。次にこうしたデュアリティーに対し、パラメータの領域を適当に制限することで gravity デュアル (ゲージ理論/重力理論デュアリティー) が得られることを見てみる。

**ゼロスローブ極限** ストリング理論の低エネルギー極限としてゲージ理論を実現したとき、ゲージ理論のカップリング  $g_{YM}$  及びバルクのニュートン定数  $G_{10}$  は、ストリングカップリング  $g_s$  及びストリングの基本長  $l_s$  を用いて次のように表せる [21]。

$$\begin{aligned} g_{YM}^2 &= g_s \\ G_{10} &= g_s^2 l_s^8 \end{aligned} \quad (8)$$

さらにこの論文で主に考えたいラージ  $N$  デュアリティーでは、ブレーンの枚数に対応するもう一つのパラメータ  $N$  がある。これらのパラメータを調整してゲージ理論/ストリング理論デュアリティーが得られることを見てみる。ストリングの基本長を十分小さくもっていくと、ストリング理論の massive モードが十分に大きな mass を持ち、低エネルギーの振る舞いには寄与しなくなる。こうしたパラメータ領域に制限して  $g_s$  の変化を考えれば、massless 粒子のみを扱えばよくなる。D ブレーンを置いた場合には、ブレーン上に open ストリングからくるゲージ粒子が、バルクには closed ストリングからくる重力子が存在する。

$g_s \ll 1$  のときには  $G_{10} \simeq 0$  となり、バルクから decouple した理論が得られる。このときの YM カップリングは小さいので摂動的な振る舞いがよいが、強結合領域はもはや正しくない。こうした領域で何が起るかを、背後にあるストリング理論で見ると、 $g_s \gg 1$  となり  $G_{10} \neq 0$  なので重力による記述になり、また  $l_s \rightarrow 0$  であることから古典重力の記述になる。このようなゲージ理論と古典重力の対応を gravity デュアルと呼ぶ。

## 2.2 Vafa のラージ $N$ デュアリティー

これから見ていくラージ  $N$  デュアリティーを Vafa が提案するに到る背景をまず見てみる。

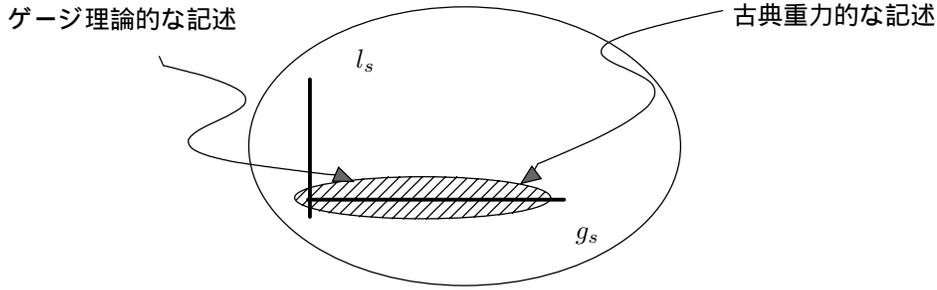
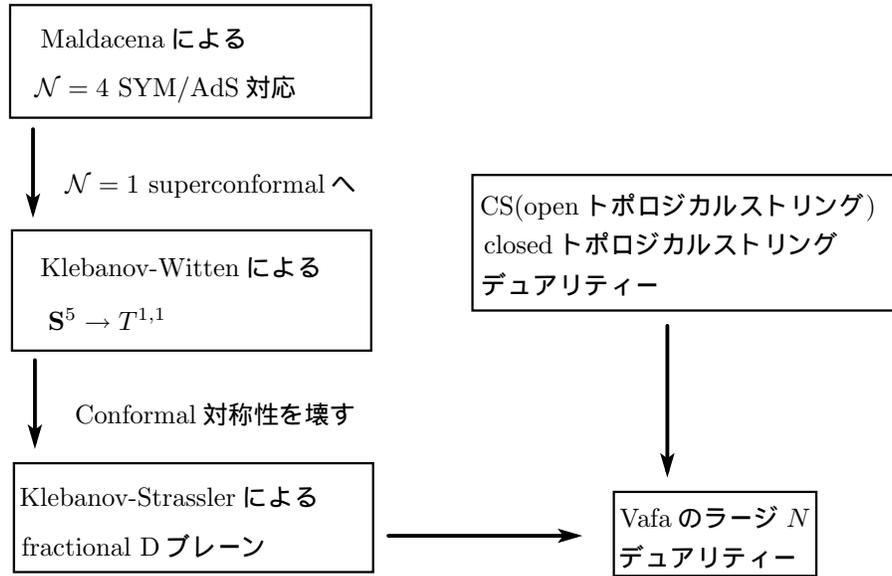


図 4: ストリング理論のモジュライ



Maldacena が提案した AdS/CFT 対応は超対称性が  $\mathcal{N} = 4$  の理論で、共形対称性を持っていた。この対応を応用して共形対称性を持たないような  $\mathcal{N} = 1$  の SYM を得る努力がなされた [8][9][10]。その手始めとして Klebanov-Witten[7] は  $AdS \times S^5$  であったものをより対称性が低い  $AdS \times T^{1,1}$  ( $T^{1,1}$  については付録 E を参照) にすることを提案し、超対称性が  $\mathcal{N} = 1$  の version を実現した。しかしながら、この場合でも matter の数が絶妙で conformal window とよばれる領域にあり、共形対称性を持っていた。これを壊すために Klebanov-Strassler[11] は D5 プレーンをつぶれる  $S^2$  に巻き付けることで内部空間にフラックスを導入した。これにより内部空間は deformed conifold になり、共形対称性が壊れたモデルとなった。Vafa のラージ  $N$  デュアリティーはまさにこのつぶれた  $S^2$  をブローアップして有限にしたものに対応する。これらの試みは、以下でまとめる Type IIB version の Vafa のデュアリティーに対応するものである。注意すべきことは、2 節では Type IIA version を論じるが、そこでは  $S^2$  と  $S^3$  の役割が入れかわったもので少し違っている点である。これら流れとは別に Gopakumar-Vafa によってやられていたのは、 $S^3$  上の  $SU(N)$  Chern-Simons 理論 (トポロジカル open ストリング) とトポロジカル closed ストリングのデュアリティーである [12]。このデュアリティーは conifold 転移を伴うものになっており、これが Vafa のデュアリティーでの conifold 転移の起源になっている。このトポロジカルなレベルでのラージ  $N$  デュアリティーを、Type II 理論で実現することで Vafa のラージ  $N$  デュアリティーになる。この open/closed トポロジカルストリングデュアリティー

は実際に Vafa のデュアリティーを見ていくときに必要なので付録 A でふれた。その中で重要な結果は

$$F_g^{open}(S) = F_g(t)^{closed}, \quad S = t \quad (9)$$

である。 $F_g^{closed}$  はジーナス  $g$  の closed トポロジカルストリング amplitude で  $F_g^{open}$  はジーナスが  $g$  でホール数が  $h$  の open トポロジカルストリング amplitude  $F_{g,h}$  をすべてのホールについて足し上げたものである。

$$F_g^{open}(S) = \sum_h F_{g,h} S^h \quad (10)$$

これらの二つの振幅が  $S = t$  という同一視によって一致することを (9) は示している。 $S$  は以下で見るゲージ理論サイド ( $t$  Hooft カップリングが小さい領域) における、グルーボール superfield ( $S \equiv Tr W^2$ ) であり、 $t$  は重力サイド ( $t$  Hooft カップリングが大きい領域) での  $S^2$  の面積である。これらを同一視するということは、重力サイドの  $S^2$  が有限サイズをもつのはゲージノが凝縮してグルーボール superfield が真空期待値をもったからと解釈することに相当する。以下ではこの関係を念頭において、Vafa が主張するラージ  $N$  デュアリティーについての導入を行なう。 $N = 1$  ではカップリングが running するが、それを重力サイドでどのように表せるのかは非自明なことで興味深いが、この節では最も単純な Vafa のデュアリティーを簡単に説明することにとどめ、3 節で一般化した場合において、この問題を見ていくことにする。

**Vafa のデュアリティー** Vafa が提案する [10] デュアリティーはゲージ理論と重力理論のデュアリティーで、2.1 節で見た一般論に対応するものである。TypeIIA 理論を deformed conifold(付録 E) 上で考え、その中にある  $S^3$  にブレンを巻き付ける。バルクから decouple させるために、ゼロスローブ極限を考え、ブレン上でゲージ理論を実現させる。この記述がよいのは、 $t$  Hooft カップリング  $\lambda$  が小さい場合である。 $\lambda$  が大きくなると、もはやこの描像は正しくなくなり、 $\lambda \gg 1$  ではストリング的な描像がよいものとなる。さらに Vafa が主張しているのはこのデュアリティーが幾何学的な変換 (conifold 転移) と捉えられるということである。TypeII 理論で conifold 転移というとブラックホール凝縮の話が思い出される [13]。conifold の特異点部分では有効理論が特異になるが、それは新たな massless 粒子 (ブラックホール) が生じるからであり、そこで相転移が起こっていた。しかし、この例と大きく違っている点は、フラックス (又はブレン) を内部空間に生じさせていることである。それゆえに相転移は起こらずスムーズに移り変わり、古典重力の情報からゲージ理論の性質を調べる事が可能となる。第 2 部では、このスムーズな移り変わりを M 理論の立場から見ていく。以下ではそれぞれのサイドについて見て、次にこのデュアリティーが正しい記述を与えるかを確認する。



図 5: TypeIIA ラージ  $N$  デュアリティー

**ゲージ理論サイド** TypeIIA 理論を次のノンコンパクトな CY 多様体上 (付録 E 参照) で考える。

$$f = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_4^2 = \rho \quad (11)$$

$x_i$  は複素数で  $\rho$  は実数。これは deformed conifold と呼ばれ、変数を実に限った空間は  $S^3$  で、虚数に限った空間は  $S^3$  の余接空間を走るので、全体として  $T^*S^3$  になっている。空間の中心には、つぶれないで残る  $S^3$  が存在し、その  $S^3$  に  $N$  枚の D6 ブレーンを部分的に巻きつけること考える。残りの 4 次元部分は Minkowski を満たすように置く。 $S^3$  のサイズを与える  $\rho$  が小さければ低エネルギーでは、ミンコフスキ - 空間のみを考えればよく、その上の有効理論は  $U(N)$  の 4 次元 SYM 理論と考えられる。TypeII 理論を CY 多様体にコンパクト化すると、後の節にまとめる表 3 より超対称性が  $\mathcal{N} = 2$  になることが知られている。さらに D ブレーンを巻き付けると超対称性は半分になり、 $\mathcal{N} = 1$  になる。リーディングオーダーで superpotential は

$$\frac{1}{g_s} \int d^2\theta SY \quad (12)$$

である (ボソニック部分については Born-Infeld 作用から分かる (49))。  $S$  はストリングカップリング  $g_s$  と field strength  $W$  を用いて  $S = g_s \text{Tr} W^2$  と定義される量で、以後グルーボール場と呼ぶことにする。  $Y$  は  $\mathcal{N} = 1$  のカイラル superfield で、そのスカラー成分は通常のゲージ理論のカップリングに対応する。

**重力理論サイド** このゲージ理論の gravity デュアルを調べていく。(9) を使いたいでジオメトリーとしてはブローアップした conifold を考える。TypeII 理論を Calabi-Yau 多様体にコンパクト化すると、残りの 4 次元部分には  $\mathcal{N} = 2$  の超対称性が生じる。ゲージ理論サイドは  $\mathcal{N} = 1$  であったので、超対称性を半分壊す必要がある (付録 D)。ブレーンが  $N$  枚巻きついていたので、それにデュアルなサイクルに RR-2form フラックスが生じているはずである。さらに NSNS 4, 6 form フラックスも加えておく。この必要性は後で見ることであるが、 $\mathcal{N} = 1$  の超対称性を保つバックグラウンド、及びカップリングの running を得るためである。2, 4, 6 form フラックスをそれぞれ  $F, G, G_6$  と書くと、このフラックスにより superpotential が生み出される (付録 D)。

$$g_s W = \int F \wedge k \wedge k + i \int G \wedge k + \int G_6 \quad (13)$$

$k$  は resolved conifold 上の Kähler 形式である。2 サイクルの複素面積  $t$  を用いると、4, 6 サイクルの体積は次のように表せることが知られている [10]。

$$\frac{\partial F_0}{\partial t}, \quad 2F_0 - t \frac{\partial F_0}{\partial t} \quad (14)$$

また、 $F, G, G_6$  のフラックスの総数を  $N, L, P$  とすると、上の式は次のように書き換えられる。

$$g_s W = N \frac{\partial F_0}{\partial t} + itL + P \quad (15)$$

これらのフラックスはすべてが独立なわけではなく、 $\mathcal{N} = 1$  の条件式 (付録 D)  $W = dW = 0$  から関係が付く。まずは  $\partial_t W = 0$  の条件を調べる。付録 A より ( $t$  の 2 次以下の多項式を  $P_2$  と書いた)

$$F_0(t) = \frac{1}{6}t^3 - \sum_{n>0} \frac{e^{-nt}}{n^3} + P_2(t) \quad (16)$$

であるので、この条件は次のようになる。

$$L = iNF_0'' = iN \left( \frac{3 \cdot 2}{6}t - \sum_{n>0} \frac{1}{n} e^{-nt} + P_2'' \right) \quad (17)$$

これを指数関数の肩に乗せると

$$e^{-iL} = \left( e^{(t - \sum \frac{1}{n} e^{-nt} + P_2'')} \right)^N \quad (18)$$

$P_2$  は  $t$  についての 2 次の多項式なので  $P_2''$  は何らかの定数となり、これを  $C \equiv e^{P_2''}$  と定義する。  $-\sum_{n>0}^{\infty} \frac{1}{n}(e^{-t})^n = \log(1 - e^{-t})$  なので

$$e^{-iL} = \left( C e^t e^{\log(1-e^{-t})} \right)^N = \left( C e^t (1 - e^{-t}) \right)^N = \left( C(e^t - 1) \right)^N \quad (19)$$

$C$  は後で分かることであるが  $C^{-1} \sim N g_s$ 。さらに、 $W = 0$  より

$$P = -N F_0' + N t F_0'' \quad (20)$$

したがって 4 つのパラメータ  $(N, L, P, t)$  は、独立なものが 2 つのみである。どれを独立なパラメータと取るかは自由であるが、ゲージ理論サイドでの意味がはっきりするものが望ましい。そこで  $(N, L)$  を独立なパラメータとして扱うことにする。 $N$  は巻きつけたブレーンの枚数でゲージ群の大きさを示す。一方  $L$  は次のような同一視をする。

$$iL = \frac{\rho}{g_s} = \frac{1}{g_{YM}^2} \quad (21)$$

つまり  $iL$  はゲージ理論サイドでカップリング定数と解釈するのである。これらのことを踏まえて (19) 式を書き換える。

$$\left( C(e^t - 1) \right)^N = e^{-\frac{\rho}{g_s}} \quad (22)$$

すると  $S^2$  のサイズ  $t$  は上の条件を満たすようなものでなければならない。またこの関係式から通常の gravity デュアルで見られる性質が読みとれる。つまり、't Hooft カップリング  $N g_{YM}^2 = N g_s \ll 1$  のとき、バックリアクションを無視した D ブレーン上の有効理論の記述がよい。 $N g_{YM}^2 = N g_s \gg 1$  のとき古典重力の記述がよい。このことから (21) の同一視が妥当なものと分かる。

$S = t \ll 1$  のリーディングオーダーでの一致 ブレーン上のゲージ理論において、 $S$  リーディングオーダーでの superpotential は

$$\frac{1}{g_s} \int d^2\theta SY \quad (23)$$

であった。高次の  $S$  は高階微分を含むので、この近似は低エネルギー極限に対応する。 $Y$  がダイナミカルな superfield である点が普通の  $\mathcal{N} = 1$  superYM と違う点である。しかしながら、この理論は慣れ親しんだものと違うが、 $\int d^2\theta (Tr W^2)^k$  の高次の微分項を無視する極限では、基本的な性質は  $\mathcal{N} = 1$  superYM の性質とほとんど同じである。そこで gravity デュアルを主張するにあたって、まずはこのような領域について正しい記述を与えるかを確認する。注意すべきことは、Vafa が主張している gravity デュアルはこの領域に限るものではないということである。 $\mathcal{N} = 1$  SYM で非常に重要な役割を果たすのはインスタントンであったが [14]、ここでも同様の効果が考えられる。ユークリッド D2 ブレーンインスタントンが  $S^3$  に巻きつく寄与である。このユークリッド D2 ブレーンインスタントンは、ゲージ理論から見ると点状のインスタントンに見える。この寄与による superpotential を付け加えると

$$W = \int d^2\theta \left( \frac{1}{g_s} SY + i N^2 \alpha e^{-Y/N} \right) \quad (24)$$

となる。ここで  $\alpha$  は  $\alpha \equiv e^{-Y_0/N}$  で bare カップリングに対応する量である。 $Y$  について integrate out すると  $\partial_Y W = 0$  より

$$Y = \log \left( \frac{S}{i N \alpha g_s} \right)^{-N} \quad (25)$$

これを (24) 代入して有効 superpotential を求めると次のようになる。

$$W_{eff}(S) = \frac{1}{g_s} \left( S \log \left( \frac{S}{iN\alpha g_s} \right)^{-N} + NS \right) \quad (26)$$

この superpotential が、Vafa の主張する重力サイドから得られるかを次に見ていく。

このような極限では  $F_0(t)$  は次のようになる。

$$-\sum_{n>0} \frac{e^{-nt}}{n} = \log(1 - e^{-t}) \quad (27)$$

これを  $t \ll 1$  の極限で考えると

$$\sum_{n>0} \frac{e^{-nt}}{n} \simeq -\log t \quad (28)$$

であり、2度積分して

$$\sum_{n>0} \frac{e^{-nt}}{n^3} \simeq \int_t^\infty dt \int_t^\infty dt (-\log t) = -\frac{1}{2} t^2 \log t \quad (29)$$

を得る。これを用いると

$$F_0(t) \rightarrow -\frac{1}{2} t^2 \log t + at^2 + bt + c \quad (30)$$

となり superpotential は次のように求まる。

$$W(t) = \frac{1}{g_s} (N\partial_t F_0(t) + \alpha t + \beta) = \frac{1}{g_s} (t \log t^{-N} + N \cdot t \text{ const} + N \cdot \text{const}) \quad (31)$$

したがってゲージ理論サイドの  $S$  と重力サイドの  $t$  を同一視すると、二つの記述は同じ superpotential を与える。これは Vafa が主張する重力サイドがゲージ理論の強結合領域について正しい記述を与えていることを示す。

これをさらに  $S$  で微分することで、真空について見てみる。  $\partial_S W = 0$  より

$$S = iNg_s e^{(-Y_0 + 2\pi i l)/N} \quad (32)$$

が得られ、これは次に示す通常の SYM における  $N$  個の真空と似ている。

$$Tr W^2 = iN\Lambda^3 e^{\frac{-1}{Ng_s^2 Y_M} + \frac{2\pi i l}{N}} \quad (33)$$

これらを比較すると  $Y_0$  が bare カップリング  $1/g_{YM}^2$  に対応していることが分かる。またこれを用いると (22) で  $C^{-1} \simeq Ng_s$  を示すことができる。(22) は  $t \ll 1$  で書くと

$$Ct = e^{-\frac{\rho}{Ng_s}} \quad (34)$$

一方で  $S = t$  を用いると (32) は

$$t = iNg_s e^{-\frac{Y_0}{N}} \sim Ng_s e^{-\frac{\rho}{Ng_s}} \quad (35)$$

これらの式を比較すると

$$C^{-1} \sim Ng_s \quad (36)$$

より一般的な対応 Vafa のデュアリティーは今見た  $S$  についてのリーディングオーダーのみならずさらに、高次の補正についても正しい主張である。ゲージ理論のリーディングオーダーでは superpotential (action) は (23) であった。これにユークリッド D2 インスタントンの効果を含めて (24) を考えたわけだが、実はこうしたインスタントンの効果を含めた一般的な superpotential がトポロジカルストリングと TypeII 理論の関係から求められている [10, 15]。

$$g_s W^{Gauge} = N \frac{\partial F_0^{open}}{\partial S} + \alpha S + \beta + N \mathcal{W}^{2g} \frac{\partial F_g^{open}}{\partial S} \quad (37)$$

$\alpha, \beta$  はトポロジカルストリングからは決定できない定数であり、 $\mathcal{W}$  は graviphoton field strength である。一方で重力サイドでも高次の補正があり、

$$g_s W^{gravity} = N \frac{\partial F_0^{closed}}{\partial t} + itL + N \mathcal{W}^{2g} \frac{\partial F_g^{closed}}{\partial t} \quad (38)$$

となる。これらを比較すると、 $S = t$  の同一視で完全に一致していることが分かる。

### 2.3 TypeIIB での記述

ある CY 多様体上の TypeIIA 理論は、その CY 多様体のミラー CY 上の TypeIIB 理論に等しいことが知られている [16]。このことより、今まで TypeIIA で考えてきたことは、TypeIIB 理論で考え直すことができる [10]。ミラーでは複素構造と Kähler 構造が入れ替わるので、resolved conifold と deformed conifold の役割が入れ替わり、 $S^3$  に巻きついていた D6 ブレーンの代わりに  $S^2$  に巻きつく D5 ブレーンを考えることになる。また、TypeIIA で偶数次元のフラックスを入れたが、これは TypeIIB では 3-form フラックス  $H_{RR}, H_{NS}$  を入れることに対応する。そしてこれらのフラックスによる superpotential は付録 D より

$$W = \frac{1}{g_s} \int \Omega \wedge [H_{RR} + \tau H_{NS}] \quad (39)$$

である。ここで  $\tau$  は TypeIIB の複素カップリング定数で、 $\Omega$  は CY の正則 3 形式である。TypeIIA と同じように、この積分は  $\mathcal{N} = 2$  のプレポテンシャル  $F_0$  によって書き換えられる。しかしながら、ここで注意すべきことがある。TypeIIA ではプレポテンシャルを計算するときに重要であった world sheet インスタントンの効果が、ミラーサイドではなくなっているということである。つまり古典的ジオメトリーがこの効果を既に含んでしまっているのである。それゆえに、古典的重力バックグラウンドを書き下すだけならば、TypeIIB での記述は非常に有用である。

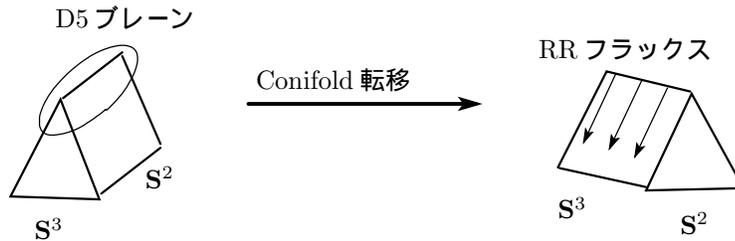


図 6: TypeIIB ラージ  $N$  デュアリティー

以下ではこの TypeIIB version を一般化していく。

### 3 $\mathcal{N} = 1$ quiver 理論と幾何学的な転移

この節では、2節で明らかになったラージ  $N$  デュアリティーをより複雑な多様体に適用して、 $\mathcal{N} = 1$  の quiver 理論におけるデュアリティーを探っていく。さらにこの quiver 理論は Seiberg のデュアリティーを持っていて、ラージ  $N$  デュアリティーが conifold 転移であったように、この場合も何らかの幾何学的な転移として表すことができる。その幾何学的転移が  $S^2 \rightarrow S^2$  であることを見た後に、これら 2 つの幾何学的な転移を統一的に見てみる [17]。

#### 3.1 $\mathcal{N} = 1$ quiver 理論

ここでは、始めに ADE 型の ALE 空間を複素平面上に fibration することで TypeII 理論をコンパクト化する 6 次元多様体を導入する。次にこの多様体に D プレーンを部分的に巻きつけたとき、D プレーン上で得られる場の理論はいったい何かを調べる。ADE 型の ALE 空間はリー代数の話と密接に結びついているので、デュアリティーがリー代数の言葉で表現される。

**ADE 型の ALE 空間** ALE 空間 (Asymptotically Locally Euclidean) とは、計量が漸近的に平坦に近づいていく空間のことである。ADE 型の ALE 空間を理解するために、まず原点に ADE 型の特異点をもつ空間を考える。これは  $C^2$  を  $\Gamma(SU(2))$  の離散群で割った空間で実現できる (表 1 参照)。さらにその空間は  $C^3$  に埋め込まれた超平面で表すこともできる。

表 1 ADE 特異性を持つ空間と  $SU(2)$  部分群

群	生成元	超曲面 $f$	特異性
cyclic	$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}, \alpha = e^{\frac{2\pi i}{r+1}}$	$x^2 + y^2 + z^{r+1} = 0$	$A_r$
dihedral	$\begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \beta = e^{\frac{\pi i}{r-2}}$	$x^2 + y^2 z + z^{r-1} = 0$	$D_r$
tetrahedral	$D_4, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \epsilon^7 & \epsilon^7 \\ \epsilon^5 & \epsilon \end{pmatrix}, \epsilon = e^{\frac{2\pi i}{8}}$	$x^2 + y^3 + z^4 = 0$	$E_6$
octahedral	$E_6, \begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & \epsilon^7 \end{pmatrix}, \epsilon = e^{\frac{2\pi i}{8}}$	$x^2 + y^3 + yz^3 = 0$	$E_7$
icosahedral	$-\begin{pmatrix} \eta^3 & 0 \\ 0 & \eta^2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\eta^2 - \eta^3} \begin{pmatrix} \eta + \eta^4 & 1 \\ 1 & -\eta - \eta^4 \end{pmatrix}, \eta = e^{\frac{2\pi i}{5}}$	$x^2 + y^3 + z^5 = 0$	$E_8$

これらの超平面  $f = 0$  で表される空間は、原点に特異点 ( $f = df = 0$ ) を持つ。これらの特異点をブローアップまたは deformation すると、有限のサイズをもつ  $S^2$  により特異性が解消される。ADE 型リー代数のランクの数  $r$  だけつづれない  $S^2$  ができる。これらの  $S^2$  は互いに交叉し、ちょうど対応するリー代数の Dynkin 図 (図 8) のようになっている。ADE 型 ALE 空間とは、この ADE 型の特異性を解消してスムーズにした空間のことである。以下では deformation によって特異性を解消した ALE 空間を考える。 $A_r$  について具体的に定義方程式を書く

$$f \equiv x^2 + y^2 + \prod_{i=1}^{r+1} (z + t_i(t)) \quad \sum t_i = 0 \quad (40)$$

である [18]。ここで  $t_i$  は deformation パラメータである。

**fibration** ADE 型の ALE 空間は複素 2 次元なので Calabi-Yau 3-fold を作るためにはもう 1 次元必要である。そこで複素平面 ( $t$  で表す) に fibration することを考える。fibration するというのは  $t_i$  を  $t$  の関数として表すということである (図 7)。これらの ADE 型 ALE 空間の fibration は 2 通りの場合に分けて考えることができる。

$$\begin{cases} \text{ノンモノドロミックな場合} : t_i(t) \text{ が 1 価関数} \\ \text{モノドロミックな場合} : t_i(t) \text{ が多価関数} \end{cases} \quad (41)$$

いずれの場合も全体のジオメトリーは同じであるが、モノドロミックな場合には、ループを回ると  $S^2$  の入れ替えが起こる。

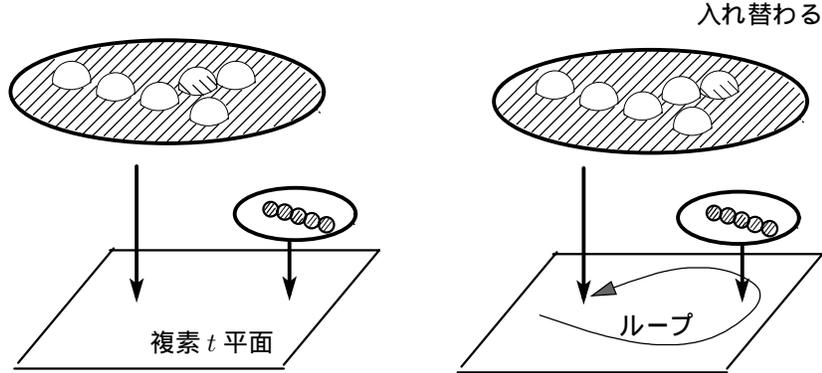


図 7: ADE 型 ALE 空間の fibration

$\mathcal{N} = 2$  quiver 理論 プレーンを巻きつける土台を構成したので、今度は Type IIB 理論を考え D3 プレーン、D5 プレーン worldvolume 理論を考える (D7 プレーンを含めた場合については [17])。D5 プレーンは非自明な  $S^2$  に部分的に巻きつけ、残りの部分は Minkowski を満たすものとする。D3 プレーンも Minkowski を満たすように置くとする。まずは D3 プレーンを含まないケースを考える。worldvolume 理論のスペクトルは quiver diagram によって表され、この場合は図 8 のようにジオメトリーの Dynkin 図そのものになっている [19][20]。非自明な  $S^2$  に  $N_i$  枚の D5 プレーンを巻きつけると、Dynkin 図の各ノードにはゲージ群  $U(N_i)$ 、adjoint カイラル superfield  $\Phi_i$  が対応し、ノードをつなぐラインには、bifundamental な chiral multiplet  $Q_{ij} : (N_i, \bar{N}_j)$  及び  $Q_{ji} : (\bar{N}_i, N_j)$  が対応する。今は  $\mathcal{N} = 2$  の SUSY があるのでボソンとフェルミオンは関係を持っていて quiver diagram が表しているのは superfield の情報になっている。これらの場はそれぞれ図 8 のように D プレーンにくっついている open ストリングからくる。 $i$  番目と  $i+1$  番目は  $S^2$  がくっついているので、またがっている open ストリングの長さは十分に短くなり低エネルギーでのこるが、 $i$  番目と  $i+2$  はくっついていないのでその分多くエネルギーをもち低エネルギーでは出てこない。

次に D5 プレーンはそのままで、D3 プレーンを  $N_0$  枚含めた場合を考える。この場合得られるゲージ群が少し変化してくる。worldvolume 理論のスペクトルを表す quiver diagram はアファイン Dynkin 図になる。その各ノードにはゲージ群  $U(\hat{N}_i)$ 、adjoint カイラル superfield  $\Phi_i$  が対応し、ノードをつなぐラインには、bifundamental なカイラル superfield  $Q_{ij} : (\hat{N}_i, \hat{N}_j)$  及び  $Q_{ji} : (\hat{N}_i, \hat{N}_j)$  が対応する。ただし  $\hat{N}_i = N_i + N_0 d_i, \hat{N}_0 = N_0$  で、 $d_i$  は Dynkin index とする。D3 プレーンの分だけゲージ群が変わり quiver diagram もアファインになった。それゆえ D3 プレーンを含めた場合をアファイン case、含まない場合をノンアファイン case、さらに D5 プレーンを全く含まない場合には pure アファイン case と呼ぶことにする。

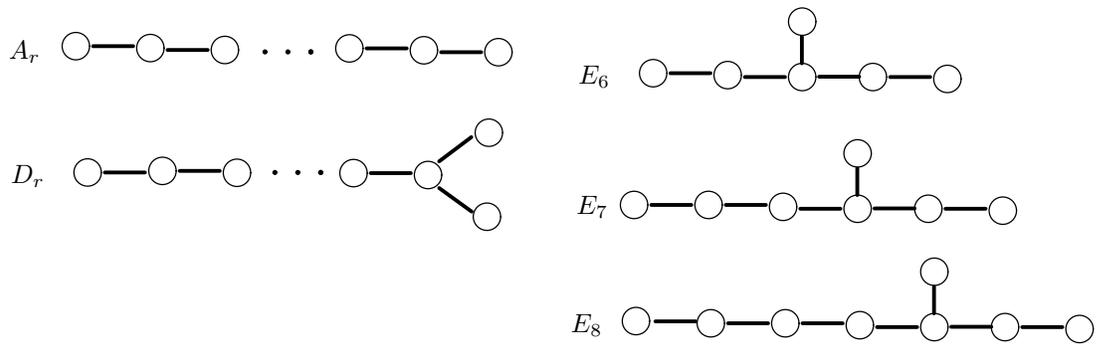


図 8: ADE 型 Dynkin 図

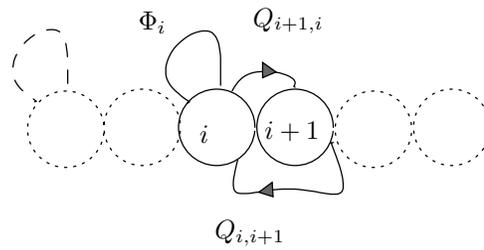


図 9: open ストリングからの物質場

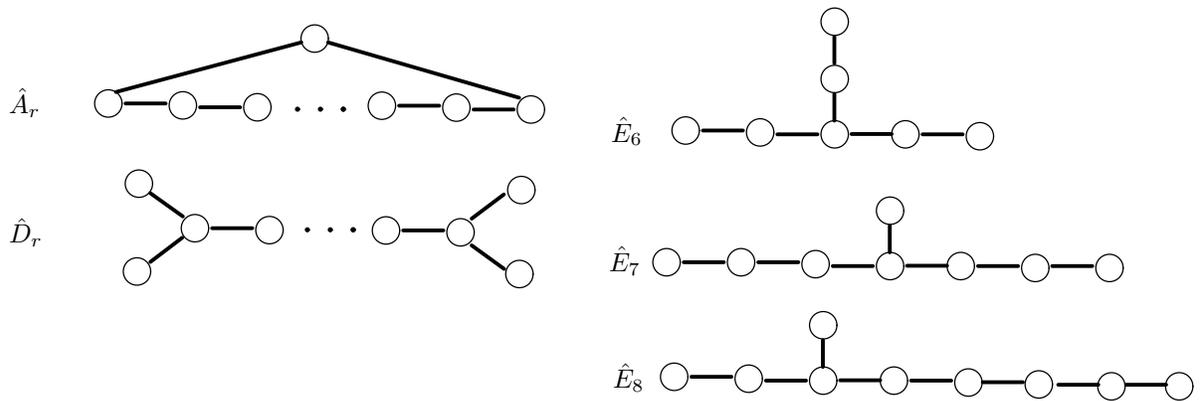


図 10: アファイン ADE 型 Dynkin 図

結局、超対称性が  $\mathcal{N} = 2$  でゲージ群が

$$G = \prod_{i=1}^r U(N_i) \quad \text{または} \quad \prod_{i=0}^r U(\hat{N}_i) \quad (42)$$

また、これらの場による superpotential が

$$W = \int d^2\theta \sum_{ij} s_{ij} \text{Tr} Q_{ij} \Phi_j Q_{ji} \quad (43)$$

のゲージ理論を得た。ここで  $s_{ij}$  はノード  $i$  と  $j$  の交叉行列でノードがつながっていないならばゼロでつながっていれば 1 又は  $-1$  をとる。

ゲージカップリング ゲージカップリングは以下で見るように、ストリングカップリング  $g_s$  及び “stringy volume”  $V_i = ((B_i^{NS})^2 + |\alpha_i|^2)^{\frac{1}{2}}$  によって

$$\frac{1}{(g_i^{YM})^2} = \frac{V_i}{g_s} \quad (44)$$

と与えられる。これらの量の定義は次式である。

$$\alpha_i = \int_{\mathbf{S}_i^2} \frac{dydz}{x}, \quad B_i^{NS} = \int_{\mathbf{S}_i^2} B \quad (45)$$

$\alpha$  は正則 2 形式を用いて表した  $\mathbf{S}^2$  の体積で正則体積と呼ばれる。これから複素化したゲージカップリングは

$$\tau_i = \theta_i + \frac{i}{(g_i^{YM})^2} = B_i^R + \frac{i}{g_s} (|\alpha_i|^2 + (B_i^{NS})^2)^{\frac{1}{2}} \quad (46)$$

一般に、D ブレーン上の有効理論は Born-Infeld 作用及び Chern-Simons 項によって記述される [21]。

$$\begin{aligned} S_{BI} + S_{CS} &= -\mu_5 \int d^6\xi \text{Tr} \left( e^{-\Phi} [-\det(G_{ab} + B_{ab} + 2\pi\alpha' F_{ab})]^{\frac{1}{2}} \right) \\ &+ i\mu_5 \int_{6dim} \text{Tr} \left( \exp(2\pi\alpha' F_2 + B_2) \wedge \sum_q C_q \right) \end{aligned} \quad (47)$$

今は、D5 ブレーンでありその worldvolume を  $\mathbf{R}^{1,3} \times \mathbf{S}^2$  と書くと (今の notation にするために  $C_2 \rightarrow B^{RR}, B_2 \rightarrow B^{NS}$  と書くことにする)、Chern-Simons 部分は次のようになる。

$$\begin{aligned} S_{CS} &\sim \int_{\mathbf{R}^{1,3} \times \mathbf{S}^2} \text{Tr} \left( (2\pi\alpha' F_2 + B_2^{NS}) \wedge (2\pi\alpha' F_2 + B_2^{NS}) \wedge B^{RR} + \dots \right) \\ &\sim \int_{\mathbf{R}^{1,3} \times \mathbf{S}^2} \text{Tr} \left( (F_2 + B_2^{NS}) \wedge (F_2 + B_2^{NS}) \wedge B^{RR} + \dots \right) \\ &\sim \int_{\mathbf{S}^2} B^{RR} \int_{\mathbf{R}^{1,3}} F_2 \wedge F_2 + \dots \end{aligned} \quad (48)$$

次に Born-Infeld について考える。 $\mathbf{S}^2$  については、サイズを十分に小さい場合を考え計量をゼロと近似する。

$$S_{BI} \sim \int_{\mathbf{R}^{1,3} \times \mathbf{S}^2} \text{Tr} \left( -e^{-\Phi} \left[ \det \begin{pmatrix} 0 & B^{NS} & \mathbf{0} \\ -B^{NS} & 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \eta + 2\pi\alpha' \mathbf{F} \end{pmatrix} \right]^{\frac{1}{2}} \right) \quad (49)$$

$e^{-\Phi_0} = (g_s)^{-1}$  であるので

$$\sim g_s^{-1} \int_{\mathbf{R}^{1,3} \times \mathbf{S}^2} Tr \left[ B^{NS} (\det(\eta + 2\pi\alpha' F))^{\frac{1}{2}} \right] \quad (50)$$

$(\det F)^{\frac{1}{2}} = \epsilon^{ijkl} F_{ij} F_{kl} = F \wedge *F$  より  $F$  についての項を  $S_{BI} + S_{CS}$  から集めると

$$g_s^{-1} \int_{\mathbf{S}^2} B^{NS} \int F \wedge *F + \int_{\mathbf{S}^2} B^{RR} \int F \wedge F \quad (51)$$

となり、 $\frac{1}{g_{YM}^2} = g_s^{-1} \int_{\mathbf{S}^2} B^{NS}$ ,  $\theta = \int_{\mathbf{S}^2} B^{RR}$  であることが読み取れる。したがって

$$\tau = \theta + \frac{i}{g_{YM}^2} = \int_{\mathbf{S}^2} B^{RR} + \frac{i}{g_s} \int_{\mathbf{S}^2} B^{NS} = \int_{\mathbf{S}^2} B^{RR} + \tau_s \int_{\mathbf{S}^2} B^{NS} \quad (52)$$

となる。

**deformation to  $\mathcal{N} = 1$**  さらに superpotential には fibration によって新たな項が付け加わる (付録 C)。簡単のために  $A_1$  case から考えていく。

$$f = x^2 + y^2 + (z + t_1)(z + t_2) = 0 \quad t_1 + t_2 = 0 \quad (53)$$

$\alpha \equiv t_1 - t_2$  とすると

$$f = x^2 + y^2 + z^2 + \alpha(t)^2 = 0 \quad (54)$$

となり、 $\alpha(t)$  としてどんな関数を持ってくるかで異なった 3-fold ができる。superpotential は付録 C より正則 3 形式の積分で表せるので、次のように書くことができる。

$$W(\Phi) = \int_{s(t)^2 \times I}^{I=\Phi} \omega \wedge dt = \int_I dt \int_{s(t)^2}^{I=\Phi} \omega = \int_I \alpha(t) dt \quad (55)$$

これより、fibration の仕方 (つまり  $\alpha$  の選び方) が直接 superpotential の形を決めていることが見て取れる。もし  $P(\Phi)$  という関数を superpotential に付け加えたいのならば  $\alpha(t)$  として

$$\alpha = \frac{dP(t)}{dt} \quad (56)$$

の形で fibration してやればよい。さらに一般の ADE について考えたければ、 $i$  番目の  $\alpha_i(t)$  に対して

$$\alpha_i = \frac{dP_i(t)}{dt} \quad (57)$$

の形で fibration してやればよい。ナイーブには  $\alpha(t)$  が多価関数の場合にもこれが成り立つように思えるが、そうではない。このことは superpotential が多価になることからみて取れる。実際モノドロミックな fibration をするとつぶれてしまう  $\mathbf{S}^2$  が出てくる。ゲージ群のカップリングは (44) で与えられたように、ストリング体積 (stringy volume) に比例している。そのためゲージカップリングが無限大になり worldvolume 理論としては、こうしたチャージを持たない場のみで構成されるべきである。結局ノンモノドロミックな場合の superpotential は次のようになる。

$$W = \int d^2\theta \left( \sum_{i,j} s_{ij} Tr Q_{ij} \Phi_j Q_{ji} + \sum_i Tr P_i(\Phi_i) \right) \quad (58)$$

上式で与えられた superpotential は非常に多くの case を含んでいる。\$P\_i\$ を多項式に制限してもかなり多くの理論が含まれている。

$$W = \int d^2\theta \left( \sum_{i,j} s_{ij} \text{Tr} Q_{ij} \Phi_j Q_{ji} + \sum_i \frac{g_i}{k+1} \text{Tr} \Phi_i^{k+1} \right) \quad (59)$$

このような superpotential を持つ理論を抽象的に表すために、[17] に従って \$X(k, G)\$ と書くことにする。\$G\$ は ADE 又はアファイン ADE 理論を表し、アファイン case のときは superpotential に次の制限がつく。

$$\sum_{i=0}^r d_i P_i(x) = 0 \quad (60)$$

これはアファイン case の imaginary ルートの性質からくるものである (付録 B)。もともとのジオメトリーには独立な \$S^2\$ が \$r\$ 個あったわけだがアファイン ノードに対応する \$S^2\$ を考えて、そこに \$\hat{N}\_0\$ 枚の D5 プレーンを巻きつけることを考えていたので、適当な線形結合をとるとゼロになる場合があるだろう。それを次の式が表している。(ただし \$d\_0 \equiv 1\$)

$$H_2 \left( \delta = e_0 + \sum_{i=1}^r d_i e_i = \sum_{i=0}^r d_i e_i \right) = 0 \quad (61)$$

つまり、imaginary ルートに対応するような \$S^2\$ がゼロになっている。これから

$$\int_{\delta} \omega = \sum_{i=0}^r d_i \int_{e_i} \omega = \sum_{i=0}^r d_i \alpha_i = 0 \quad (62)$$

となり、\$\alpha\_i(t) = P'\_i(t)\$ であったことを思い出すと (60) が得られる。

**X(k=1, G=\$\hat{A}\_1\$ pure)** これは Klebanov-Witten case[7] である。D5 プレーンは巻きついておらず D3 プレーンのみが \$N\_0\$ 枚巻きついている場合である。\$\hat{N}\_i = N\_0 d\_i\$。この理論は \$\mathcal{N} = 1\$ の superconformal 理論に流れ込む。これを一般化した case を 4.3 節でふれる。

**X(k=1, G=\$\hat{A}\_1\$)** これは Klebanov-Strassler[11] case である。Klebanov-Witten case に fractional プレーンを付け加えた case である。これについては、4.2 節でふれる。

**X(k=1, G)** これは Gubser-Nekrasov-Shatashvili case[22] である。

**X(k=1, G=\$A\_1\$)** これは Vafa case[10] であり、2 節で既に見た case である。

**X(k, G=\$A\_1\$)** これは Cachazo-Intriligator-Vafa case[23] であり、4.1 節でふれる

共形対称性を持つような理論では AdS/CFT 対応により、また conifold のような単純なジオメトリーのときにはその計量も知られていて、多くの定量的解析が可能となる。しかしながら今考えている状況はさらに一般的な場合であり、共形対称性もなければ計量も知られていないので定量的な解析は難しい。こうした状況にもかかわらず、Vafa は superpotential に注目することで、gravity デュアルの議論を可能にしている。こうした意味で、superpotential を用いた議論は、多くの場合に共通する骨格を浮き彫りにしたものと言える。

### 3.2 $\mathcal{N} = 1$ ADE quiver 理論 (ノンモノドロミックな場合)

ノンモノドロミックな場合の superpotential は既に見た (2.11)、(2.12) 式である。このような superpotential が付け加わると低エネルギーでは  $\Phi$  が期待値を持ち、それゆえ Higgs メカニズムにより対称性が破れると考えられる。運動方程式を作ると

$$\sum_j s_{ij} Q_{ij} Q_{ji} = \partial_i P_i(\Phi_i), \quad \Phi_i Q_{ij} = Q_{ji} \Phi_j \quad \text{for every } Q_{ij} \quad (63)$$

である。超対称性を保つ真空 (SUSY vacua) はこれらの方程式の解のうち複素ゲージ変換で移れるものを同一視したものである [26] (複素ゲージ変換での同一視が D-term 条件になっている)。以下ではこの真空の構造について見ていくが、結論は用意したジオメトリのリー代数の性質で簡潔になるので、先に結果だけまとめてみる。

ノンアファイン case D3 プレーンを含めないノンアファイン  $G = A, D, E$  quiver 理論の真空は  $G$  のポジティブルート  $\vec{\rho}_K \subset \Delta^+$  に対応して存在する。ここで  $K = 1, \dots, R_+$  で  $\Delta^+$  の次元である。このポジティブルートは単純ルートで次のように展開できる。

$$\vec{\rho}_K = \sum_{i=1} n_K^i \vec{e}_i \quad n_K^i \geq 0 \quad (64)$$

それぞれの  $\vec{\rho}_K$  に対して次式を満たす SUSY 理論のブランチがある。

$$P'_K(t) \equiv \sum_i n_K^i P_i^l = 0 \quad (65)$$

簡単のため、すべての  $W$  が  $k+1$  次の多項式であるとする。このとき、それぞれのポジティブルート  $\vec{\rho}_K$  に対して上の方程式の解は  $k$  個あるので、それらを  $t = a_{(p,K)}$ ,  $p = 1, \dots, k$ ,  $K = 1, \dots, R_+$  とラベルすることにする。それらの SUSY を保つ  $\phi_i$  が固有値  $a_{(p,K)}$  を  $n_K^i M_{(p,K)}$  重に含んでいるとき、Higgs メカニズムによってゲージ群は次のように破れる。

$$\prod_{i=1}^r U(N_i) \rightarrow \prod_{K=1}^{R_+} \prod_{p=1}^k U(M_{(p,K)}) \quad (66)$$

また、プレーンの枚数は保存するので

$$N_i = \sum_{K=1}^{R_+} \sum_{p=1}^k M_{(p,K)} n_K^i \quad (67)$$

が成り立ち、ゲージカップリングについては  $\prod_{i=1}^r U(N_i)$  についてのカップリング  $\alpha_i$  を用いて

$$\alpha_K = \sum_{i=1}^r n_K^i \alpha_i \quad (68)$$

と表せる。

アファイン case アファイン case もほとんど同じである。やはりポジティブルートに対して真空が存在する。アファインリー代数のポジティブルートは

$$\hat{\rho}_K : (\Delta, n^+), (\Delta^+, 0) \quad (69)$$

である。 $n^+$  は正整数、 $\Delta$  はすべてのルート。シンプルルートで展開すると次のように書ける。

$$\hat{\rho}_{\hat{K}} = \sum_{i=1} n_K^i \hat{e}_i \quad (70)$$

$$P'(\hat{\rho}_{\hat{K}}) \equiv \sum_i n_K^i P'_i = 0 \quad (71)$$

$$\prod_{i=0}^r U(\hat{N}_i) \rightarrow \prod_{\hat{K}} \prod_{p=1}^k U(M_{(p,\hat{K})}) \quad (72)$$

$$\hat{N}_i = \sum_{\hat{K}} \sum_{p=1}^k M_{(p,\hat{K})} n_K^i \quad (73)$$

$A_r, D_r$  case はダイレクトな計算が比較的簡単である [18] が、以下ではこのうちの  $A_r$  case のみを具体的に見ることにする。ここでの具体的な取り扱いが、後でモノドロミックな場合を考えるときに重要になってくる。 $E_6, E_7, E_8$  case はさらに複雑であり [28][29] に述べられている。

$A_r$  のブランチ この場合  $s_{ij} = \delta_{i,j+1} - \delta_{i,j-1}$  なので方程式 (63) は次のように書ける。

$$Q_{12}Q_{21} + P'_1(\Phi_1) = 0 \quad -Q_{21}Q_{12} + Q_{23}Q_{32} + P'_2(\Phi_2) = 0 \quad (74)$$

⋮

$$-Q_{r-1,r-2}Q_{r-2,r-1} + Q_{r-1,r}Q_{r,r-1} + P'_{r-1}(\Phi_{r-1}) = 0, \quad (75)$$

$$Q_{i,i+1}\Phi_{i+1} = \Phi_i Q_{i,i+1} \quad \Phi_{i+1}Q_{i+1,i} = Q_{i+1,i}\Phi_i \quad \text{for } i = 1, \dots, r-1. \quad (76)$$

これらの方程式は、異なるゲージ群の足をもつ場によって書かれているので、それを一つのゲージ群のみの足をもつ場で作られた式に書き換えたい。そこで“ $Q_{i,i+1}$  による conjugation” という操作を定義する。 $U(N_{i+1})$  に対する何らかの adjoint 場  $\mathcal{F}$  が与えられたとき、それを両側から  $Q_{i,i+1}$  で挟んだ  $Q_{i,i+1}\mathcal{F}Q_{i+1,i}$  を考える。もし  $\mathcal{F}$  が多項式ならばこの conjugation は非常に簡単なものになる。

$$Q_{i,i+1}\mathcal{F}(\Phi_{i+1})Q_{i+1,i} = \mathcal{F}(\Phi_i)Q_{i,i+1}Q_{i+1,i} \quad (77)$$

方程式 (74~ 76) を書き換えるために、 $j$  番目のノードに注目する。 $j$  のみの足をもった場は次の三つが考えられ、それらのみで方程式を構成したい。

$$\Phi_j, \quad Q_{j,j-1}Q_{j-1,j} \equiv Y_j, \quad Q_{j,j+1}Q_{j+1,j} \equiv X_j \quad (78)$$

ただし、 $Q_{1,0}Q_{0,1} \equiv Q_{r,r+1}Q_{r+1,r} \equiv 0$  と定義する。まず始めに  $Q_{1,2}Q_{2,1} + P'_1(\Phi_1) = 0$  を  $Q_{2,1}$  で conjugation し、

$$Q_{2,1}(Q_{1,2}Q_{2,1} + P'_1(\Phi_1))Q_{1,2} = 0 \quad (79)$$

$$Y_2Y_2 + P'_1(\Phi_2)Y_2 = 0 \quad (80)$$

これに (74) 第 2 式を代入する。

$$(X_2 + P'_2(\Phi_2))(X_2 + P'_2(\Phi_2) + P'_1(\Phi_2)) = 0 \quad (81)$$

さらにこれを  $Q_{3,2}$  で conjugation し (75) を代入する。この操作を  $Q_{4,3}, \dots$  と繰り返していき  $j-1$  番目のノードまで行くと

$$X_j(X_j + P'_{j-1}(\Phi_j))(X_j + P'_{j-2}(\Phi_j) + P'_{j-1}(\Phi_j)) \cdots (X_j + P'_1(\Phi_j) + \cdots + P'_{j-1}(\Phi)) = 0 \quad (82)$$

が得られる。これにはゲージ群の足が交じり合った場はなく、 $j$  番目のノードに対応する場  $X_j, Y_j, \Phi_j$  のみで書かれている。同様のことを最後の  $r$  番目のノードから  $j+1$  番目のノードまで行くと次式を得る。

$$Y_j(Y_j + P'_{j-1}(\Phi_j))(Y_j + P'_{j-2}(\Phi_j) + P'_{j-1}(\Phi_j)) \cdots (Y_j + P'_1(\Phi_j) + \cdots + P'_{j-1}(\Phi)) = 0 \quad (83)$$

最後にもう一つ独立な式があって、それは (75) を  $X, Y$  で書き換えたものである。

$$X_j + Y_j = P'_j(\Phi_j) \quad (84)$$

ここで  $P'_i(\Phi_j) = \alpha_i(\Phi_j) = t_i(\Phi_j) - t_{i+1}(\Phi_j)$  であることを思い出すと、 $X_j \rightarrow X_j + t_j$ ,  $Y_j \rightarrow Y_j - t_{j+1}$  とシフトした後、方程式は次のようになる。

$$\prod_{i=1}^j (X_j + t_i) = 0, \quad \prod_{i=j+1}^{r+1} (Y_j - t_i) = 0, \quad X_j + Y_j = 0 \quad (85)$$

この3つのオペレーター  $X, Y, \Phi$  は互いに可換であり同時対角化可能である。 $\Phi$  と  $X$  については (75) 第2式に左から  $Q_{i,i+1}$  を作用させると

$$Q_{i,i+1} \Phi_{i+1} Q_{i+1,i} = Q_{i,i+1} Q_{i+1,i} \Phi_i \quad (86)$$

を得る。これに (77) を用いると次式が得られ可換であることが分かる。

$$\Phi_i Q_{i,i+1} Q_{i+1,i} = Q_{i,i+1} Q_{i+1,i} \Phi_i \quad (87)$$

$$\Phi_i X_i = X_i \Phi_i \quad (88)$$

他も同様にして示すことができる。3つを同時対角化する固有ベクトルを  $\vec{v}$  と書くことにする。

$$\Phi_i \vec{v} = \phi \vec{v} \quad (89)$$

$$X_j \vec{v} = x_j \vec{v} \quad (90)$$

$$Y_j \vec{v} = y_j \vec{v} \quad (91)$$

(85) をこのような固有状態で考えると、 $X_i, Y_j$  などを  $x_i, y_j$  に置き換えたものになる。

$$(x_j + t_1)(x_j + t_2) \cdots (x_j + t_j) = 0 \quad (92)$$

$$(y_j - t_{j+1})(y_j - t_{j+2}) \cdots (y_j - t_{r+1}) = 0 \quad (93)$$

$$x_j + y_j = 0 \quad (94)$$

この第1式より  $x_j$  は  $\{-t_1, -t_2, \dots, -t_j\}$  のどれかに一致しなければならない。 $k$  という添字を  $k=1, \dots, j$  まで走るものとするれば  $x_j = -t_k$  と書くことができる。同様に  $l=j+1, \dots, r$  とすると  $y_j = t_l$  と書ける。また第3式から  $t_l - t_k = 0$  であり、これは  $P'$  をつかって次のように表せる。

$$P'_k + P'_{k+1} + \cdots + P'_{l-1} = t_k - t_{k+1} + t_{k+1} - t_{k+2} + \cdots + t_{l-1} - t_l \quad (95)$$

$$= t_k - t_l \quad (96)$$

これより

$$\sum_{m=k}^{l-1} P'_m = 0 \quad (97)$$

結局のところ3つあった方程式は、実質的にはこの1つの方程式で表わせることがわかった。これはノード  $j$  についてであったが、他のすべてのノードに対しても同様の方程式が得られ、全体としては  $r(r+1)$  個の方程式になる。そのどれかを満たす  $t$  がまさに superpotential を微分したものをゼロにする  $\Phi$  の期待値である。

次にこれがポジティブルートに対応していることをみて一般的に述べた結果を確かめてみる。 $A_r$  case のポジティブルートは

$$\rho = \sum_{s=n}^m e^s \quad (n \leq m) \quad (98)$$

で与えられる。これはシンプルルートをすべて1の係数でたしあげたものであり、ポジティブルートになっている。 $n, m$  は  $1 \sim r$  まで走るので、全部で  $r(r+1)$  個ありそれぞれが (97) から得られる方程式に対応したのものになっている。よって、既に見た一般的な結果はこの  $A_r$  case では成り立っていることが具体的に示された。

### 3.3 $\mathcal{N} = 1$ ADE quiver 理論 (モノドロミックな場合)

簡単のためノンアフィン case に限る。主に考えるのは1つのノードをのぞいた、他のすべてのノードは Weyl 変換される場合である。この場合モノドロミーを受けない1つのノードに対するブローアップモードがある。

#### 3.3.1 簡単な例

ADE 型の ALE 空間を複素平面に fibration するのであるがこのときモノドロミーがある場合を考える。言い換えると、 $t$  平面の中でループをつくって回るとき、Total ジオメトリーは元に戻るが個々の 2-サイクルに入れ替えが生じるような場合を考える。それらは、ADE 型のリー代数における Weyl 群による変換に対応する。もしモノドロミー群が完全な Weyl 群ならば不変な 2-サイクルは fibre ジオメトリーにはない。このことは、3-Fold ジオメトリー全体においても 2-サイクルがなく、ブローアップできないことを意味する。この場合には Calabi-Yau における 2-サイクルに巻き付く D5 プレーンを作ることができない。

しかしながら、部分的な 2-サイクルのみが変換されるような場合を考えることも可能である。この場合の簡単な例として、 $A_1$  が  $t$  平面に fibration された場合を考えてみる。

$$x^2 + y^2 + (z + t_1(t))(z + t_2(t)) = 0, \quad t_1 + t_2 = 0 \quad (99)$$

もし  $t_1(t)$  が  $t$  の 1 価関数ならば、既に見たノンモノドロミックな場合になる。しかしながら、 $t_1(t)$  が多価関数でブランチカットをもつならばそれはモノドロミックな場合である。次の関数は多価関数になっている。

$$t_1(t) = -t_2(t) = t^{n+\frac{1}{2}} \quad (100)$$

$t$  を原点の周りを 1 周させる  $t \rightarrow e^{2\pi i} t$  と、 $t_1$  と  $t_2$  が入れ替わる。これはまさに  $A_1$  の Weyl 変換になっている。

別な例として  $A_2$  ジオメトリー

$$x^2 + y^2 + (z - t_1(t))(z - t_2(t))(z - t_3(t)) = 0 \quad (101)$$

を考える。原点の周りを1周まわすと  $t_1$  は不変で  $t_2$  と  $t_3$  が入れ交わる。

$$t_1 \rightarrow bt = t_1 \quad (102)$$

$$t_2 \rightarrow -at + e^{\pi i} t^{n+\frac{1}{2}} = t_3 \quad (103)$$

$$t_3 \rightarrow -at - e^{\pi i} t^{n+\frac{1}{2}} = t_2 \quad (104)$$

この変換のもとで正則体積  $\alpha$  は次のように変換される。

$$\alpha(e_1) \rightarrow t_1 - t_3 = t_1 - t_2 + (t_2 - t_3) = \alpha(e_1) + \alpha(e_2) \quad (105)$$

$$\alpha(e_2) \rightarrow -(t_2 - t_3) = -\alpha(e_2) \quad (106)$$

したがって

$$e_1 \rightarrow e_1 + e_2 \quad (107)$$

$$e_2 \rightarrow -e_2 \quad (108)$$

$e_2$  の“ストリング体積 (stringy volume)”は (108) によってゼロになるために、これに巻き付いたブレーン上の有効理論はカップリングが発散する (44)。よって  $e_2$  についてのゲージ群の足はつぶされてしまって  $e_1$  または  $e_1 + \frac{1}{2}e_2$  のゲージ群の足のみが残るように、もともとの quiver 理論を考え直せばよい。Vafa はこの考えに基づいて、多くのモノドロミックな場合に対応するゲージ理論を調べている [18]。

例として次のような  $A_2 \rightarrow A_1$  case を考えてみる。この表し方は始めに  $A_2$  case を用意して、それからつぶれているゲージ群の足をつぶすことで  $A_1$  型のジオメトリーに対応するゲージ理論を構成することを意味する。

$$x^2 + y^2 + (z^2 + az + t)(z - t) = 0 \quad (109)$$

つまり

$$x^2 + y^2 + (z + t_1)(z + t_2)(z + t_3) = 0 \quad (110)$$

$t_1 = t, t_{2,3} = -\frac{a}{2} \pm \frac{\sqrt{a^2 - 4t}}{2}$  の場合である。 $A_2$  case なので bifundamental field がある。

$$Q_{12} \quad (N_1, \bar{N}_2) \quad (111)$$

$$Q_{21} \quad (N_2, \bar{N}_1) \quad (112)$$

$\Phi_2$  は真空期待値をとりそれが大きな値なので decouple して理論には関係してこない。ノード 1 についての方程式は  $X \equiv Q_{12}Q_{21}$  を用いて

$$X \equiv t_1 - t_2 \quad (113)$$

$$X(X + P'_2) = X(X + t_2 - t_3) = 0 \quad (114)$$

既に見たように  $t_1$  は  $t$  について1価関数だが、 $t_{2,3}$  は多価関数。このため  $X$  は1価関数でなく物理的に何らかの意味を持つ場とは考えにくい。そこで1価関数にするために  $\tilde{X} \equiv X + t_2$  を定義する。

$$\tilde{X} = \Phi_1 \quad (115)$$

$$\tilde{X}^2 + a\tilde{X} + \Phi_1 = 0 \quad (116)$$

$\Phi_1$  を消去して特異なジオメトリーを見てみると

$$\tilde{X}^2 + (a+1)\tilde{X} = 0 \quad (117)$$

これは真空のモジュライ空間であり superpotential を微分して得られると考えてよいので

$$W = Tr \left( \frac{\tilde{X}^3}{3} + (a+1) \frac{\tilde{X}^2}{2} \right) \quad (118)$$

結局、 $A_2$  quiver を用意して、そのうちノード 2 をつぶしたものに对应する quiver 理論は、adjoint 場  $\tilde{X}$  を持ちそれが superpotential  $W$  を持ったゲージ理論になる。この理論は  $A_1$  型のノンモノドロミックな場合からも構成でき、モノドロミックな場合を考える必要性がないように思えるが、次の例はノンモノドロミックな場合からは構成できないモデルになっている。

### 3.3.2 2 adjoint 場をもつ例

DE 型のモノドロミックな fibration によって、非常に興味深い 2 つの adjoint 場をもつゲージ理論が構成される [18]。その superpotential は

$$W = P_{p+2}(X) + P_{q+2}(Y) + P_{r+2}(X+Y) \quad (119)$$

である。 $X, Y$  は 2 つの adjoint 場であり、 $p, q, r$  は DE 型の Dynkin 図で 3 つの足を持つノードを取り除くと 3 つの部分に分かれるが、それぞれのノードの数 ( $E_7$  の場合は  $p=2, q=1, r=3$  である)。fibration の仕方としては、3 つの足を持つノードのみが変換を受けないようにしたものである。それ以外のノードはループを回ってくるとシャッフルされるために、つぶれた  $S^2$  になる。

この 2 つの adjoint 場をもつ例は超対称性をもつ場の理論のみでは扱い難いものである。その理由は  $\mathcal{N}=4$  の対称性があると adjoint 場は 3 つ入ってきてしまい、 $\mathcal{N}=2$  の対称性がある場合は adjoint 場は 1 つになってしまうからである。

ラージ  $N$  デュアリティーはこうした場合にでも、真空について詳しい考察を与えられるので非常に有用である。

## 3.4 ラージ $N$ デュアリティー

前節までで quiver 理論の幾何学的な構成とその Higgs ブランチを調べたが、このことをもう一度ブレーンの描像に注目しながらまとめてみる。ADE 型の ALE 空間にはブローアップされて有限のサイズをもった  $S^2$  が存在する。これを複素平面  $t$  に fibration して 6 次元多様体を構成した。次に D5 ブレーンを  $S^2$  に部分的に巻きつけることを考えた。adjoint 場  $\Phi_i$  の期待値はブレーンの位置を指定するので、 $\Phi_i$  が真空期待値を持っていないレベルではブレーンはどの  $t$  にある  $S^2$  に巻きついていてもよい。3.2 節ではこの  $\Phi_i$  の固有値としては  $t = a_{(p,K)}$  が可能であることを見た。つまり、もともと自由に動けたブレーンがこれらの点に振り分けられるということで、(66) のゲージ群の破れが起こる。 $M_{(p,K)}$  枚のブレーンが  $t = a_{(p,K)}$  にあるとすれば、ゲージ群は  $U(M_{(p,K)})$  である。その付近では superpotential は次のように近似でき

$$W_{a_{(p,K)}} = (t - a_{(p,K)})^2 \quad (120)$$

D ブレーン上の有効理論は

$$\mathcal{N} = 2 \text{ SYM} + W_{a_{(p,K)}} \quad (121)$$

となる。これは 2 節で説明した場合に一致している。局所的にジオメトリーは  $t' \equiv t - a_{(p,K)}$  を用いると

$$x^2 + y^2 + z^2 + t'^2 = 0 \quad (122)$$

と表されるので、これは conifold になっている事が分かる。よってこの局所的な conifold をブローアップした  $S^2_{(p,K)}$  から  $S^3_{(p,K)}$  への転移を 2 節と同様に考えることができ、これは Vafa のデュアリティーを一般の  $\mathcal{N} = 1$  アフライン ADE quiver 理論に拡張したものと見える。この場合でもやはり  $S^3_{(p,K)}$  のサイズをゲージ群  $U(M_{(p,K)})$  のグルーボール場と同一視する。

一般的なジオメトリーに対して、そのような deformation は次のように表すことができる。

$$x^2 + F(y, z, t_1(t), \dots, t_r(t)) = 0 \quad (123)$$

4 節で詳しくみる  $A_1$  case では deformation は次のように表せる。

$$x^2 + y^2 + z^2 + W'(t)^2 + g_{p-1}(t) = 0 \quad (124)$$

$W$  は  $p$  次の多項式で、 $g_{p-1}(t)$  は  $p-1$  次の多項式である。これらの deformation は  $p$  個のパラメータに依存していて、それらは理論のブランチを表すパラメータ (プレーンをさまざまな vacua にどう振り分けるか) と同一視される。このような非自明な  $S^3$  は  $kR_+$  個存在し、その 3 サイクルを  $A_{(p,K)}$  サイクルと呼ぶことにし、これとシンプレクティックペアをなすノンコンパクトな 3-サイクルを  $B_{(p,K)}$  サイクルと呼ぶことにする。それぞれの 3 サイクルの周期積分を、正則 3 形式  $\Omega$  を用いて次のように定義する。

$$\int_{A_{(p,K)}} \Omega \equiv S_{(p,K)} \quad , \quad \int_{B_{(p,K)}}^{\Lambda_0} \Omega \equiv \Pi_{(p,K)} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial S_{(p,K)}} \quad (125)$$

$B$  サイクルはノンコンパクトで積分が発散するのでカットオフ  $\Lambda_0$  を入れた。 $A$  についての周期積分から  $S_{(p,K)}$  は  $kR_+$  個の deformation パラメータで表される。これを逆に解けば deformation パラメータを  $S_{(p,K)}$  で書くことが形式的には可能であるが、実際には無限項のべき級数になってしまい近似的にのみ可能である。conifold 転移の後は D プレーンが消え、deformation によってできた  $A$  サイクルには、巻きついていたプレーンの数だけ RR フラックスが生じる。さらに  $B$  サイクルには NSNS-3form が生じる。これらのフラックスにより生じるポテンシャルは、付録 D より次のようになる。

$$W = \int H \wedge \Omega = \sum_{p=1}^k \sum_{K=1}^{R_+} \left( \int_{A_{(p,K)}} H \int_{B_{(p,K)}} \Omega - \int_{B_{(p,K)}} H \int_{A_{(p,K)}} \Omega \right) \quad (126)$$

$H = H_R + \tau H_{NS}$  は 3-サイクルから出ているフラックスであり、これを周期を用いて書き直すと次のようになる。

$$-\frac{1}{2\pi i} W = \sum_{p=1}^k \sum_{K=1}^{R_+} \left( M_{(p,K)} \Pi_{(p,K)} + \frac{\alpha_K}{2\pi i} S_{(p,K)} \right) \quad (127)$$

$H$  の  $B$  サイクルでの積分で定義した  $\alpha_K$  は、 $S_{(p,K)}$  を  $SU(M_{(p,K)})$  のグルーボール  $Tr(W_\alpha^2)_{(p,K)}$  と考えているので、その前の係数にあたる事から bare カップリング  $\frac{8\pi^2}{(g_0^{YM(K)})^2}$  と考えられる。

### 3.5 重力サイド

3.2 節では D5 プレーンを  $S^2$  に巻きつけることで、 $\mathcal{N} = 1$  のゲージ理論の構成をした。超対称性が  $\mathcal{N} = 1$  だと結合定数は running するが、重力理論サイドで、この振る舞いをどう実現できるのだろうか？これをまず始めに見てみて、次に重力サイドから得られる superpotential をリーディングのオーダーで具体的に表してみる。

### 3.5.1 ゲージカップリングの繰り込み

superpotential (126) はノンコンパクトなサイクルでの  $\Omega$  の周期積分を含んでいる。これらの周期は発散するのでカットオフ  $\Lambda_0$  が必要であった。これは long distance の発散 (IR) であり、ゲージ理論サイドの UV 発散に対応すべきものである。

Picard-Lefschetz の公式 [60] によると、 $\Lambda_0 \rightarrow e^{2\pi i} \Lambda_0$  のとき

$$\Delta\Pi_{(p,K)} = (\vec{\rho}_K \cdot \vec{\rho}_L) S_{(m,L)} \quad (128)$$

( $m = 1, \dots, k$ ) であるので、total での変化は次のように表せる。

$$\Delta\Pi_{(p,K)} = \sum_{L \in \Delta_+} (\vec{\rho}_K \cdot \vec{\rho}_L) \sum_{m=1}^k S_{(m,L)} \quad (129)$$

これから、 $\Pi_{(p,K)}$  の  $\Lambda_0$  依存性が特異な部分については分かる。

$$\Pi_{(p,K)} = \frac{1}{2\pi i} \left( \sum_{L \in \Delta_+} (\vec{\rho}_K \cdot \vec{\rho}_L) \sum_{m=1}^k S_{(m,L)} \right) \log(\Lambda_0) + \dots \quad (130)$$

$\dots$  はカットオフについて正則な部分。これを (126) に入れて見ると、この  $\log$  発散を吸収できる量は、カットオフ  $\Lambda_0$  を含んだ  $\alpha_K$  のみであることが分かる。そこで次の ansatz を用いて係数  $\beta$  がどのような形となるかを調べてみる。

$$\alpha_i = -\frac{8\pi^2}{(g_0^{YM(i)})^2} = \beta_i \log\left(\frac{\Lambda_i}{\Lambda_0}\right) \quad (131)$$

$i = 1, \dots, r$ 。それでは (126) の superpotential の  $\log$  発散の項を集めて見る。

$$-W_{divg} = \sum_{L \in \Delta_+} \sum_{m=1}^k S_{(m,L)} \left( \sum_{p=1}^k \sum_{K \in \Delta_+} M_{(p,K)} (\vec{\rho}_K \cdot \vec{\rho}_L) \log(\Lambda_0) + \alpha_L \right) \quad (132)$$

$$\alpha_L = -\sum_{p=1}^k \sum_{K \in \Delta_+} M_{(p,K)} (\vec{\rho}_K \cdot \vec{\rho}_K) \log(\Lambda_0) + \dots \quad (133)$$

$\dots$  はカットオフに依存しない部分。そして (131) を使うと

$$\beta_i = \sum_{K \in \Delta_+} \left( \sum_{p=1}^k M_{(p,K)} \right) (\vec{\rho}_K \cdot \vec{e}_i) = \sum_{j=1}^r C_{ij} \sum_{K \in \Delta_+} \left( \sum_{p=1}^k M_{(p,K)} \right) n_K^i = \sum_{j=1}^r C_{ij} N_j \quad (134)$$

と求まり、これはもともとの quiver 理論  $\coprod U(N_i)$  の一つのゲージ群  $U(N_i)$  に注目し、他のゲージ群の足をフレーバーとして考えて  $\beta_i$  を求めたものと完全に一致している [67][17]。

今までの議論から明らかなように、重力サイドでカップリングの running を与えるには、多様体がノンコンパクトでなければならない。ノンコンパクトであるので周期積分にカットオフを導入し、これをゲージ理論のサイドでは運動量のカットオフに対応するものと考え、またジオメトリーのスケール  $\mu$  をエネルギースケールと対応する量と考える。

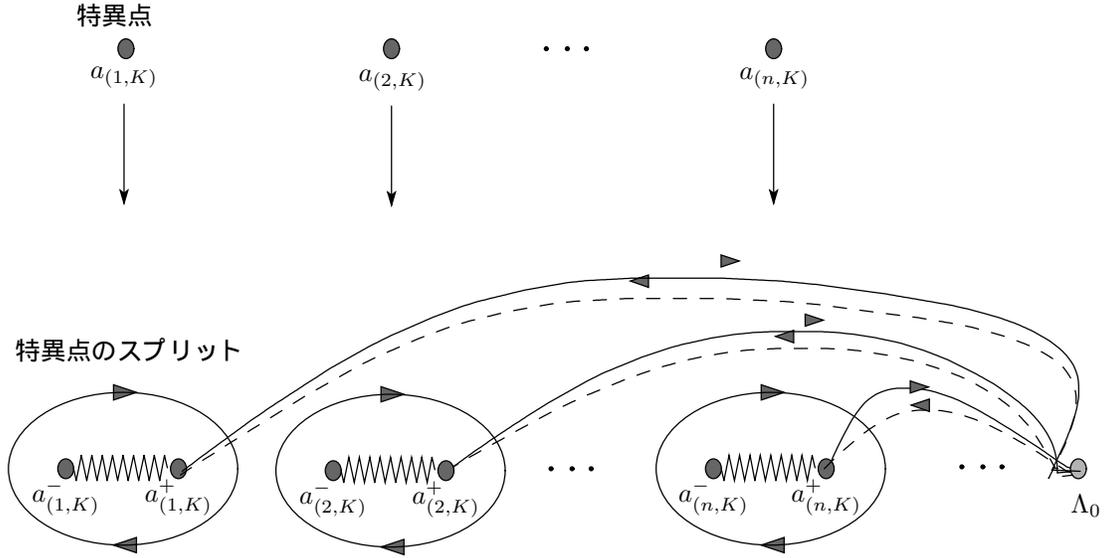


図 11: deformation による特異性の解消

### 3.5.2 リーディングオーダーでの superpotential

Exact である superpotential (126) を弱結合極限で考えてみる。これはダイナミカルなスケール  $\Lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, r$  が、superpotential によって与えられるスケールに比べて十分小さい場合である。幾何学的には、コンパクトな  $S^3$ 's が  $t$  平面のスプリットにくらべて十分小さいことを意味している。

この極限を見ていくために、いくつかの notation を導入する。deformation をゼロにすると  $kR_+$  個の特異点が生じるが、それは次式の解である。

$$W'_K \equiv \sum_{i=1}^r n_K^i W_i'(t) \equiv g_K \prod_{p=1}^k (t - a_{(p,K)}) = 0 \quad (135)$$

deformation により  $S^3$  が生じ、これらの特異点  $t = a_{(p,K)}$  は、2つにスプリットする。これらのスプリットした点を  $a_{(p,K)}^\pm$  と書くことにすると、弱結合極限は  $|a_{(p,K)}^+ - a_{(p,K)}^-| \ll |a_{(m,L)} - a_{(p,K)}|$  for all  $(p, K) \neq (m, L)$  と表すことができる。

$$W'_K = 0 \rightarrow W'_K - f_{(n-1)}^K \equiv \prod_{p=1}^k (t - a_{(p,K)}^+)(t - a_{(p,K)}^-) = 0 \quad (136)$$

周期積分は  $t$  についての積分を残した形で書くと、次のようになる。(詳細は 4.1 節の  $X(k, A_1)$  と同じなのでここでは、簡単に示すにとどめる)

$$S_{(p,K)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{a_{(p,K)}^-}^{a_{(p,K)}^+} \omega(\vec{\rho}_K) dt, \quad \Pi_{(p,K)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{a_{(p,K)}^+}^{\Lambda_0} \omega(\vec{\rho}_K) dt \quad (137)$$

$$\omega \equiv dt \sqrt{W'_K + f_{n-1}^K} \quad (138)$$

これを今考えたい弱結合の極限で近似すると、 $t = a_{(p,K)}$  の回りで Taylor 展開して

$$S_{(p,K)} = \frac{1}{2\pi i} W_K''(a_{(p,K)}) \int_{a_{(p,K)}^-}^{a_{(p,K)}^+} \sqrt{(t - a_{(p,K)})^2 - \mu_{eff}^K} dt \quad \mu_{eff} = -\frac{f_{n-1}^K + \dots}{W_K''(a_{(p,K)})} \quad (139)$$

と書くことができる。  $\mu_{eff} \rightarrow e^{2\pi i} \mu_{eff}$  についての Picard-Lefschetz 公式 [60] を用いると、対応するデュアルな周期の変化を求めることができる。  $\Delta\Pi_{(p,K)} = S_{(p,K)}$

$$\Pi_{(p,K)} = \frac{1}{2\pi i} S_{(p,K)} \log \frac{S_{(p,K)}}{W_K''(a_{(p,K)})} + \dots \quad (140)$$

次に  $a_{(q,L)}$  を、  $a_{(p,K)}$  の回りを一周させたとき、  $\Pi_{(p,K)}$  がどのように変化するかを Picard-Lefschetz の公式を用いて見てみると

$$\Delta\Pi_{(p,K)} = (\vec{\rho}_K \cdot \vec{\rho}_L) S_{(q,L)} \quad (141)$$

であるので、周期積分  $\Pi$  は

$$\begin{aligned} -2\pi i \Pi_{(p,K)} &= S_{(p,K)} \log \frac{S_{(p,K)}}{W_K''(a_{(p,K)})} \\ &+ \sum_{L \in \Delta^+} \sum_{m=1}^k (\vec{\rho}_K \cdot \vec{\rho}_L) S_{(q,L)} \log(a_{(p,K)} - a_{(q,L)}) + \dots \end{aligned}$$

となる。  $m, L$  はすべての  $(q, L) \neq (p, K)$  を走る。

結局リーディングオーダーでの superpotential は次のようになる。

$$\begin{aligned} W &= \sum_K \sum_{p=1}^k \left( S_{(p,K)} \log \frac{W_K''(a_{(p,K)})}{S_{(p,K)}} + \sum_L \sum_{m=1}^k \left( \sum_{i,j=1}^r C_{ij} n_K^i n_L^j \right) S_{(q,L)} \log \frac{1}{a_{(p,K)} - a_{(q,L)}} \right) \\ &+ \sum_K \left( \sum_{p=1}^k M_{(p,K)} \right) \sum_{i,j=1}^r (C_{ij} n_K^j \log \Lambda_i) \sum_L n_L^i \sum_{m=1}^k S_{(q,L)} + \dots \end{aligned}$$

### 3.6 Seiberg のデュアリティー

これまでは、Vafa のラージ  $N$  デュアリティーについて見てきた。このデュアリティーは conifold 転移を伴った幾何学的な変換であった。3.2 節で導入した quiver 理論には、さらに別の幾何学的変換を伴うデュアリティーがある。この場合は  $S^2 \rightarrow S^2$  の変換でこれは既に知られている、Seiberg のデュアリティー [32] に対応する [17][64]。

#### 3.6.1 幾何学から得られるデュアリティー

これから考えていくことは、2.1 節で構成した quiver 理論を幾何学的性質から見てみるということである。キーポイントとなるのは ‘ジオメトリーが与えられても、対応する quiver 理論は一意的でない’ ということである。この理由としては、ジオメトリーにおけるパラメータには ADE の単純ルートと関係を持つものがあるが、それらは Weyl 群の作用の分だけ任意性をもつからである。このことから次のことが言える。

“ 見た目にはかなり異なるいくつかのゲージ理論を得ることができ、それらはもともとにあるストリング理論が同じであるということから、互いに等価である。 ”

これは幾何学によるゲージ理論のデュアリティーの記述であり、そのデュアリティーは 1 つ 1 つが Weyl 群の元に対応している。Weyl 群は Weyl 鏡映によって生成され、その変換によるデュアリティーは Seiberg のデュアリティーであることが明らかになる。

$N_i$  枚のプレーンを  $S_i^2$  に部分的に巻きつけた理論が与えられ、それが Higgs メカニズムによって、プランチの縮重度が  $M_{(p,k)}$  であるように対称性を破ったとする。このとき、 $\vec{e}_{i_0}$  による Weyl 鏡映によって異なったポジティブルートの選択を考えたとき、さまざまな量がどう変換するかを調べてみる。

$$\text{Weyl 鏡映} : \vec{e}'_j = \vec{e}_j - (\vec{e}_j \cdot \vec{e}_{i_0})\vec{e}_{i_0} \quad (142)$$

$$\text{プレーンチャージ保存} : \sum_i N_i \vec{e}_i = \sum_i N'_i \vec{e}'_i \quad (143)$$

$$= \sum_{j \neq i_0} N'_j \vec{e}_j - \sum_{j \neq i_0} N'_j (\vec{e}_j \cdot \vec{e}_{i_0}) \vec{e}_{i_0} + N'_{i_0} \vec{e}_{i_0} - N'_{i_0} 2\vec{e}_{i_0} \quad (144)$$

よって

$$N_j = N'_j \quad (145)$$

$$N_{i_0} = -N'_{i_0} - \sum_{j \neq i_0} N'_j (\vec{e}_j \cdot \vec{e}_{i_0}) \quad (146)$$

Weyl 鏡映で新たに考えた単純ルートに巻きついているプレーンの枚数は

$$N'_j = \begin{cases} N_j & (j \neq i_0) \\ -N_{i_0} - \sum_{j \neq i_0} N_i (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_{i_0}) \equiv N_f - N_{i_0} & (j = i_0) \end{cases} \quad (147)$$

となる。 $N_f$  は今注目している  $U(N_{i_0})$  以外のゲージ群の足を足し上げたものである。

$$N_f = \sum_{i \neq i_0} (-\vec{e}_i \cdot \vec{e}_{i_0}) N_i \quad (148)$$

これを理解するために Cartan 行列に注目する。Cartan 行列は

$$C_{ij} = 2\delta_{ij} - |s_{ij}| = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j \quad (149)$$

と与えられるが、今は  $i \neq j$  の case なので

$$-\vec{e}_i \cdot \vec{e}_{i_0} = |s_{ii_0}| \quad (150)$$

となる。 $|s_{ii_0}|$  は Dynkin 図でつながっている 2 つのノードに対して 1 を、その他は 0 の値をとる量であり、フレーバーの数 ( $i_0$  以外のゲージ群の足) を考えるにはちょうどよい。これから

$$N_f = \sum_{i \neq i_0} |s_{ii_0}| N_i = \sum_{i \neq i_0} (-\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) N_i \quad (151)$$

が得られる。したがって  $\vec{e}_{i_0}$  で Weyl 鏡映したとき、ゲージ群は  $U(N_{i_0}) \rightarrow U(N_f - N_{i_0})$  と変換されるので Seiberg デュアリティーの変換になっている。

一方でカップリングや superpotential は次のように変換する。

$$\frac{1}{g_i^2} \rightarrow \frac{1}{g_i^2} - (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_{i_0}) \frac{1}{g_{i_0}^2} \quad (152)$$

$$W_i(\phi_i) \rightarrow W_i(\phi_i) - (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_{i_0}) W_{i_0}(\phi_i) \quad (153)$$

それぞれの量は  $S_i^2$  によって書かれているので、この変換は  $S_i^2 \rightarrow S_i^2 - (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_{i_0}) S_{i_0}^2$  からくるものである。

$$\frac{1}{g_{YM}^2} = \frac{((B_i^{NS})^{1/2} + |\alpha_i|^2)^2}{g_s} \quad (154)$$

$$\alpha_i = \int_{S_i^2} \frac{dydz}{x}, \quad B_i^{NS} = \int_{S_i^2} B \quad (155)$$

$$W_i(\phi_i) = \int_{S_i^2 \times I}^{t=\phi_i} \omega \wedge dt \quad (156)$$

IR においては、つまり superpotential のスケールよりも低いエネルギースケールでは、Higgs メカニズムにより対称性が壊れる。3.2 節からブランチはポジティブルート  $\vec{\rho}_k$  でラベルされるが、Weyl 鏡映のもとでそのポジティブルートは  $\vec{\rho}_k = \vec{e}_{i_0}$  をのぞいて置換されることになる。この  $\vec{e}_{i_0}$  は Weyl 鏡映のもとで、マイナス倍の自分自身にもどる。

$$\vec{e}'_{i_0} = \vec{e}_{i_0} - (\vec{e}_{i_0} \cdot \vec{e}_{i_0})\vec{e}_{i_0} = -\vec{e}_{i_0} \quad (157)$$

これより、変換前後のブランチの縮重度を調べる。ブレンチャージ保存及び (67) より

$$\sum_i \sum_{k=1}^{R_+} \sum_{p=1}^k M_{(p,k)} n_k^i \vec{e}_i = \sum_i \sum_{k=1}^{R_+} \sum_{p=1}^k M'_{(p,w_{i_0}(k))} n_k^i \vec{e}'_i \quad (158)$$

$$\sum_{k=1}^{R_+} \sum_{p=1}^k M_{(p,k)} \vec{\rho}_k = \sum_{k=1}^{R_+} \sum_{p=1}^k M'_{(p,w_{i_0}(k))} \vec{\rho}'_k \quad (159)$$

$\vec{\rho}_k = \vec{e}_{i_0}$  だとすると先にみた (157) から

$$\vec{\rho}_k \rightarrow \vec{\rho}'_k = -\vec{\rho}_k \quad (160)$$

となり、他のポジティブルートは入れ替わるだけなので結局

$$\begin{cases} M'_{(p,w_{i_0}(k))} = M_{(p,k)} & (k \neq \vec{e}_{i_0}) \\ M'_{(p,w_{i_0}(k))} = -M_{(p,k)} & (k = \vec{e}_{i_0}) \end{cases} \quad (161)$$

この最後の式から  $M_{p,w_{e_{i_0}}} = 0$  でなければマイナス倍になりおかしなことになる。これはこの場合にはデュアルの記述が使えないこと (意味のあるデュアルな理論が存在しないこと) を意味している。

この変換によるデュアルな理論は、どの様な理論かを見るために、(153) の superpotential の変換を行ってみる。変換後はゲージ群が変化するので、それに対応して場の持つ index も変わる。このことを表すために変換後の場を  $(\phi, \bar{Q}, Q, W) \rightarrow (\tilde{\phi}, \tilde{q}, q, \tilde{W})$  と書くことにする。

$$W_i(\phi_i) \rightarrow W_i(\tilde{\phi}_i) - (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_{i_0})W_{i_0}(\tilde{\phi}_i) \quad (162)$$

まずはじめに  $U(N_{i_0})$  の足をもつ項とそうでない項に分ける。

$$W = \sum_i [Tr \sum_j s_{ij} Q_{ij} Q_{ji} \phi_i + Tr W_i(\phi_i)] \quad (163)$$

$$= Tr \sum_j s_{i_0 j} Q_{i_0 j} Q_{j i_0} \phi_{i_0} + \sum_{i \neq i_0} [Tr \sum_j s_{ij} Q_{ij} Q_{ji} \phi_j] + W_{i_0}(\phi_{i_0}) + \sum_{j \neq i_0} W_j(\phi_j) \quad (164)$$

ここで  $[Q_{i_0 j}] \equiv \bar{Q}$ ,  $[Q_{j i_0}] \equiv Q$ ,  $\phi_{i_0} = \phi$ ,  $\phi_i = m$  と書くと

$$W = Tr \phi \bar{Q} Q + Tr m Q \bar{Q} + \sum_{i \neq i_0} Tr \sum_{j \neq j_0} s_{ij} Q_{ij} Q_{ji} \phi_j + W_{i_0}(\phi) + \sum_{j \neq i_0} W_j(m) \quad (165)$$

第 3, 5 項目は  $U(N_{i_0})$  のチャージを持たない場のみの項である。(162) の変換をこれに施すとどうなるかを見てみる。

$$\begin{cases} W_{i_0}(\phi_{i_0}) \rightarrow -W_{i_0}(\tilde{\phi}_{i_0}) \\ W_j(\phi_j) \rightarrow W_j(\tilde{\phi}_j) + W_{i_0}(\tilde{\phi}_j) \end{cases} \quad (166)$$

であるのでこれから (165) は

$$W \rightarrow Tr \tilde{\phi} \tilde{q} q + Tr m \tilde{q} \tilde{q} + \sum_{i \neq i_0} Tr \sum_{j \neq j_0} s_{ij} q_{ij} q_{ji} \tilde{\phi}_j \quad (167)$$

$$+ (-W_{i_0}(\tilde{\phi})) + \sum_{j \neq i_0} W_j(\tilde{\phi}_j) + \sum_{j \neq i_0} W_{i_0}(\tilde{\phi}_j) \quad (168)$$

となる。第 3, 5 項目はやはり  $U(N_{i_0})$  チャージを持たない場だけの項なので、これを落とす。

より具体的な場合として、 $k, G$  でラベルされる quiver 理論  $X(k, G)$  を考える。 $U(N_{i_0})$  のチャージを持つ場についての superpotential は次のように与えられる。

$$W = \frac{s}{k+1} \text{Tr} \phi^{k+1} + \text{Tr} \phi \bar{Q} Q + \text{Tr} m Q \bar{Q} \quad (169)$$

$$\begin{cases} Q_f^\alpha & : & N_f \times N_c \text{ 行列} \\ \bar{Q} Q & : & U(N_c) \text{ adjoint}, U(N_f) \text{ singlet} \\ Q \bar{Q} \equiv M & : & U(N_c) \text{ singlet}, U(N_f) \text{ adjoint} \end{cases} \quad (170)$$

$m$  はフレーバー空間の行列で、実際は隣り合ったノードの adjoint field の期待値によって与えられる。このポテンシャルに対して変換されたものは次のようになる。

$$\widetilde{W} = -\frac{s}{k+1} \text{Tr} \tilde{\phi}^{k+1} + \frac{s}{k+1} \text{Tr} m^{k+1} + \text{Tr} \tilde{\phi} \tilde{q} \bar{q} + \text{Tr} m \bar{q} q \quad (171)$$

これは幾何学からの予想といえるもので Vafa は、このような superpotential が実際に得られるのかを場の理論から  $k=1, k>1$  の場合で確かめた [17]。よって Weyl 鏡映によって生じる幾何学的な  $S^2 \rightarrow S^2$  の転移は Seiberg のデュアリティーであることが確かめられた。以下ではこのうち  $k=1$  の場合について具体的に見ていく。

### 3.6.2 場の理論からのチェック $k=1$ case

$k=1$  の場合  $\phi_i$  は massive で mass は  $s$  で与えられる。スケール  $\mu$  が  $\mu < s$  ならば、この場は integrate out される。したがって、この場合のデュアリティーというのは [32] のようになる。 $s$  を大として (169) の低エネルギー理論を考えると  $\mathcal{N}=1$ ,  $N_f$  フレーバーの SQCD で tree level の superpotential が

$$W_{elect} = -\frac{1}{2s} \text{Tr} (\bar{Q} Q)^2 + \text{Tr} m Q \bar{Q} \quad (172)$$

となる。

$N_f > N_c$  については [32] の SQCD 理論を  $U(N_f - N_c)$  のデュアルな理論にすることができ、そのときの superpotential は

$$W_{mag} = \frac{1}{\mu} M \bar{q} q - \frac{1}{2s} \text{Tr} M^2 + \text{Tr} m M \quad (173)$$

である。 $M$  は massive なので運動方程式により integrate out する。

$$M = s(\mu^{-1} \bar{q} q + m) \quad (174)$$

より

$$\begin{aligned} W_{mag} &= \frac{s}{\mu^2} \text{Tr} (\bar{q} q)^2 + \frac{s}{\mu} \text{Tr} m \bar{q} q - \frac{1}{2s} \text{Tr} s^2 (\mu^{-1} \bar{q} q + m)^2 + \text{Tr} m s (\mu^{-1} \bar{q} q + m) \\ &= \frac{s}{2\mu^2} \text{Tr} (\bar{q} q)^2 + \frac{s}{2} \text{Tr} m^2 + \frac{s}{\mu} \text{Tr} (m \bar{q} q) \end{aligned} \quad (175)$$

$\mu = s$  を考えると、この superpotential はまさに、(171) から massive adjoint  $\tilde{\phi}$  を integrate out して得られたものに一致する。実際 (171) で  $k=1$  とすると

$$\widetilde{W} = -\frac{s}{2} \text{Tr} \tilde{\phi}^2 + \frac{s}{2} \text{Tr} m^2 + \text{Tr} \tilde{\phi} \tilde{q} \bar{q} + \text{Tr} m \bar{q} q \quad (176)$$

運動方程式は

$$\tilde{\phi} = \frac{1}{s} q\bar{q} \quad (177)$$

であるのでこれを代入すると

$$\widetilde{W} = \frac{1}{2s} Tr(q\bar{q})^2 + \frac{s}{2} Tr m^2 + Tr m\bar{q}q \quad (178)$$

となる。

### 3.7 $\beta$ 関数 と RG cascade

$\beta$  関数 アファイン quiver 理論の  $\beta$  関数は

$$\beta_i = \sum_j C_{ij} \hat{N}_j = \vec{e}_i \cdot \vec{N} \quad (179)$$

$$= \sum_j C_{ij} (N_0 d_j + N_j) \quad (180)$$

$$= N_0 \sum_j C_{ij} d_j + \sum_j C_{ij} N_j \quad (181)$$

で与えられる。最後の式の第一項はアファイン case での関係式  $\sum_{i=0}^r d_i \vec{e}_i = 0$  よりゼロになる。また、理論は  $N_i \neq 0$  のときは conformal でないが、 $U(N_0)$  に対角的に埋め込まれた正則  $\beta$  関数はゼロになる。

$$\tau_D \equiv \sum_{i=0}^r d_i \tau_i = 0 \quad (182)$$

アファイン case での式  $\sum_{i=0}^r d_i \vec{e}_i = 0$  と  $\vec{\beta}$  の内積をとると  $\sum_{i=0}^r \beta_i d_i = 0$  を得る。これに (131) を考慮すると  $\tau_D = 0$  になることが分かる。

ゲージカップリングの running はよく知られているように

$$\frac{1}{g_i^2} = -\frac{\beta_i}{8\pi^2} \log\left(\frac{\Lambda_i}{\mu}\right) \quad (183)$$

で与えられる。(179) よりこの関係式を

$$\frac{1}{g_i^2} = \vec{e}_i \cdot \vec{x} \quad (184)$$

と書くことができる。 $\vec{x}$  は  $\mu$  も含めて  $\vec{e}_i$  以外の部分をまとめて書いたものである。ゲージカップリングの 2 乗は

$$\frac{1}{g_i^2} \geq 0 \quad (185)$$

であることに注意すると、この  $\vec{x}$  は付録 B のチャンバー (又は Coxeter Box) 内部を表すベクトルであると理解できる。つまり、すべての  $\vec{e}_i$  との内積が常に正となるルート空間の領域である。また、

$$\cdot \equiv \frac{d}{d(\log \mu)} \quad (186)$$

を用いて (184) を微分すると次式が得られる。

$$-\frac{dg_i^{-2}}{d(\log \mu)} = \vec{e}_i \cdot \dot{\vec{x}} \quad (187)$$

$$\beta_i = -8\pi^2 \vec{e}_i \cdot \dot{\vec{x}} \quad (188)$$

$\beta_i$  が得られたのは (183) をドットで微分してやると  $\dot{\beta}_i$  になるからである。 $\vec{x}$  をチャンバーの中の 1 つの粒子の位置と考える。(184) よりこの粒子の位置はゲージカップリングを与え、粒子の速度  $\dot{\vec{x}}$  は (188) より  $\beta$  関数に対応する。

チャンバーのカベは ( $g_i^{-2} = 0$ ) 単純ルート  $\vec{e}_i$  と一対一に対応し、 $\vec{e}_i$  はカベの法線ベクトルである。 $\vec{e}_i$  に対応するカベを “ $i$ ” とラベルし、粒子とカベ “ $i$ ” の間を  $N_i$  本の紐でつないでいると考える。チャンバーの中のある決まった 1 つの位置において、最もエネルギーが低くなるのは紐がカベに対して垂直になるときである。 $U(N_i)$  カップリング定数  $g_i^{-2}(\vec{x})$  は対応している紐の長さと思える。もし  $N_i = N_0 d_i$  ならば粒子に対しては全体で力は働かない。この場合には  $\beta$  関数は消えて  $\dot{\vec{x}} = 0$  となる。 $N_i \neq N_0 d_i$  ならば、全体で力が働く。全体で力は

$$\vec{F} = -\frac{1}{8\pi^2} N_i \vec{e}_i = -\frac{1}{8\pi^2} \vec{N} \quad (189)$$

によって与えられ、(188) より

$$\dot{\vec{x}} = \vec{F} \quad (190)$$

となる。もし巻きついたプレーンがあると理論は conformal でなくなり、粒子は  $\vec{F}$  の方へ動く。粒子はやがてカベにぶつかり跳ね返る。そこでは、そのカベに対応したゲージ群がデュアルなものに変換される。このデュアリティーは対応する単純ルートでの Weyl 鏡映に対応してくる。このとき、粒子は入射角と反射角が同じであるように跳ね返るのであるが、それは次の  $\beta$  関数の変換より見て取れる。

$$\beta'_i = \beta_i - (\vec{e}_k \cdot \vec{e}_i) \beta_k \quad (191)$$

この変換式に (188) を代入すると

$$\vec{e}_i \cdot \dot{\vec{x}}' = \vec{e}_i \cdot \dot{\vec{x}} - (\vec{e}_k \cdot \vec{e}_i) (\vec{e}_k \cdot \dot{\vec{x}}) \quad (192)$$

となる。これから  $\vec{e}_i$  を取り去って、 $\dot{\vec{x}}$  についての変換性にすると次式のようなになる。さらに、カベに垂直な成分と平行な成分に分解して考える。

$$\dot{\vec{x}}' = \dot{\vec{x}} - \vec{e}_k (\vec{e}_k \cdot \dot{\vec{x}}) \quad (193)$$

$$\dot{\vec{x}}'_\perp + \dot{\vec{x}}'_\parallel = \dot{\vec{x}}_\perp + \dot{\vec{x}}_\parallel - \vec{e}_k (\vec{e}_k \cdot \dot{\vec{x}}_\parallel) \quad (194)$$

$$= \dot{\vec{x}}_\perp + \dot{\vec{x}}_\parallel - \dot{\vec{x}}_\parallel (\vec{e}_k \cdot \vec{e}_k) \quad (195)$$

$$= \dot{\vec{x}}_\perp - \dot{\vec{x}}_\parallel \quad (196)$$

よってカベに垂直な成分のみがマイナス倍されていて、入射角度と同じ角度で反射されるこゝが分かる。

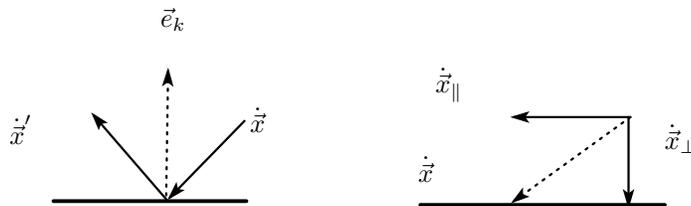


図 12: カベ “ $k$ ” での粒子の反射 (Seiberg デュアリティー)

もちろん、どのカベにぶつかるかは速度と初期位置の両方による。初期位置は  $U(\hat{N}_i)$  ゲージ群のスケール  $\Lambda_i$  によって決まる。

RG cascade アファイン version では Weyl 鏡映の並進部分 (付録 B) に対応するものとして、RG-cascade [11] が起こる。 $\hat{e}_0$  の Weyl 鏡映では付録 B より

$$\sigma_{\hat{e}_0} = \left( \bar{\sigma}_{\bar{\theta}} + k\check{\theta}, k, (e_i, \check{\theta}) - k \right) \quad (197)$$

と、与えられる。今のアファイン version では単純ルートは

$$\hat{e}_0 = \left( -\sum_{i=1}^r d_i e_i \equiv \theta, 0, 1 \right) \quad (198)$$

$$\hat{e}_i = (e_i, 0, 0) \quad (199)$$

なので  $\sigma_{\hat{e}_0}$  は

$$\begin{aligned} \sigma_{\hat{e}_0}(\hat{e}_i) &= \left( \bar{\sigma}_{\bar{\theta}}, 0, (e_i, \check{\theta}) \right) \\ &= \left( e_i - (e_i, \check{\theta})\bar{\theta}, 0, (e_i, \check{\theta}) \right) \\ &= \hat{e}_i + (e_i, \check{\theta})\hat{e}_0 \end{aligned} \quad (200)$$

と書くことができる。したがって、

$$\sum_{i=0}^r \hat{N}_i \hat{e}_i = \sum_{i=0}^r \hat{N}'_i \hat{e}'_i \quad (201)$$

により  $\hat{e}_0$  の係数を比較して  $\hat{N}_0 = N_0$  である事を使うと

$$\hat{N}_0 = \hat{N}'_0 + \sum_{i=1}^r \hat{N}_i (e_i, \check{\theta}) \quad (202)$$

$$\delta N_0 = -\sum_{i=1}^r \hat{N}_i (e_i, \check{\theta}) \quad (203)$$

となり、D3 プレーンが減少することが分かる。さらにそれは Weyl 鏡映の並進部分に対応していることが見て取れる。

(189) の方程式にしたがってチャンバー内を運動する粒子を追いかけることで、quiver 理論のダイナミカルな振る舞い (RG flow) を大まかに知ることがわかった。この粒子が " $i \neq 0$ " のカベで跳ね返るとき、それは Weyl 鏡映に対応しゲージ理論では Seiberg のデュアリティーが起こる。ときには、" $i = 0$ " のカベで跳ね返り RG cascade が起こる。こうした運動は初期値に依存するのであるが、その初期値はそれぞれのゲージ群がもつスケール  $\Lambda_i$  によって決まる。これを幾何学的に見ると非常に面白い。いくつかの、局所的に resolved conifold に見える多様体をはじめに考える。その各  $S^2_i$  の大きさが  $\Lambda_i$  によって与えられている。このジオメトリーに対して動径方向のスケールを変えていくのが RG flow である。この flow を考えていくとき、ある  $S^2$  が一度つぶれてしまうがその後別の  $S^2$  が膨らんでくる。これが Seiberg のデュアリティーである。

こうした flow は (189) にしたがって起こっていくわけであるが、最終的にどうなるのだろうか？ Seiberg のデュアリティーはゲージ群の大きさをどんどん小さくしていく。これが負になることはないので、各ゲージ群のデュアル変換は負になる一歩手前で終わる。そこで既にみたラージ  $N$  デュアリティーが起こると考えられる。よってはじめにあった  $S^2_i$  は flow によって何度か  $S^2 \rightarrow S^2$  の幾何学的変換を起こした後、 $S^2 \rightarrow S^3$  の conifold 転移をしてフラックスをもつデュアルな記述に転移すると見ることができる。このように quiver 理論の幾何学的転移を統一的に見ることができることは Vafa らによって示された [17]。



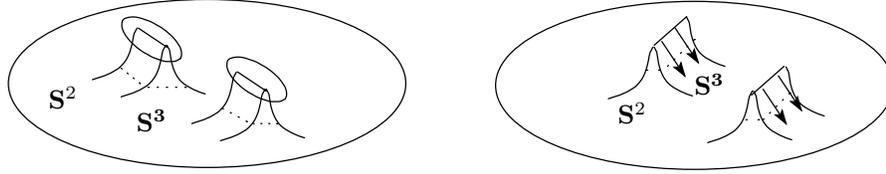


図 13: ラージ  $N$  デュアリティー

さらにこの  $S^3_i$  にデュアルな 3-サイクル から  $H_{NS}$  フラックスが生じる。これらのフラックスが存在するときの superpotential は 3 節で見たように

$$\begin{aligned} W &= \int_{CY} H \wedge \Omega \quad (H = H_r + \tau H_{NS}) \\ &= \int_{A_i} H \int_{B_i} \Omega - \int_{B_i} H \int_{A_i} \Omega \end{aligned} \quad (209)$$

で与えられる。ここで  $A_i = S^3_i$  で  $B_i$  はそのシンプレクティックデュアルであり、 $A_i \cap B_i = \delta_{ij}$  を満たす。これらのフラックスは、この superpotential を通して超対称性を  $\mathcal{N} = 2 \rightarrow \mathcal{N} = 1$  にする。よってラージ  $N$  デュアリティーで得られた理論は 4d  $\mathcal{N} = 1$  SUSY  $U(1)^n$  である。

周期  $S_i = \int_{A_i} \Omega$  はダイナミックな  $\mathcal{N} = 1$  カイラル superfield のグルーボール  $S_i = Tr_{SU(N_i)} W_\alpha W^\alpha$  と同一視する。この  $A_i$  についての周期積分を逆に解くことで deformation の係数を  $S_i$  によって書くことができる。一方もう一つの周期  $\Pi_i = \int_{B_i} \Omega = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial S_i}$  の  $\mathcal{F}$  は  $\mathcal{N} = 2$  のプレポテンシャルと解釈する。また  $\alpha_i$  は  $U(N)$  の bare カップリングであると解釈する  $\alpha_i \equiv \alpha_0$ 。

ゲージ理論的解釈 次に、このゲージ群に対するカップリングについて調べてみることにする。 $\mathcal{F}$  を  $\mathcal{N} = 2$  のプレポテンシャルと考えたことから、 $U(1)^n$  ゲージカップリングは次式で表せる。

$$\tau_{ij} = \frac{\partial \Pi_i}{\partial S_j} \Big|_{\langle S_i \rangle} = \frac{\partial^2 \mathcal{F}(S_i)}{\partial S_i \partial S_j} \Big|_{\langle S_i \rangle} \quad (210)$$

ここで、 $\langle S_i \rangle$  は  $W' = 0$  を解いて得られる  $S_i$  の期待値であり、(209) 式から

$$\sum_i N_i \tau_{ij} + \alpha_0 = 0 \quad (211)$$

という式が得られる。これは、 $U(1)$  ゲージカップリングが  $U(N)$  ゲージカップリングの  $\frac{1}{N}$  倍であることを意味しているので、 $\prod_i^n U(N_i)$  の対角的  $U(1)$  になっていることが分かる。

周期積分の具体的計算 デュアルなジオメトリーでは  $f_{n-1}(t)$  を加えることにより、 $W'(t)^2 = 0$  を満たす点  $t = a_i$  が  $W'(t)^2 + f_{n-1}(t) = 0$  を満たす点にスプリットする。一般的には重根ではないから、それを  $t = a_i^+, a_i^-$  と書くことにする。積分する 3-サイクル を  $t$  平面に射影して積分を行なう。  $t$  を固定したとすると、定義方程式 (206) より半径が  $|W'(t)^2 + f_{n-1}(t)|^{\frac{1}{2}}$  の  $S^2$  が得られて、それを積分するとき定数倍を無視するなら長さの次元にだけ注目すればよく、次式を得る。

$$\iint \frac{dt dx dy}{\sqrt{W'(t)^2 + f_{n-1}(t) + x^2 + y^2}} \sim dt \sqrt{W'(t)^2 + f_{n-1}(t)} \equiv \omega \quad (212)$$

よって周期積分は次のように書ける。

$$S_i = \pm \frac{1}{2\pi i} \int_{a_i^-}^{a_i^+} \omega \quad (213)$$

$$\Pi_i = \frac{1}{2\pi i} \int_{a_i^+}^{\Lambda_0} \omega \quad (214)$$

これらの周期積分を評価していくのであるが、始めに3節と同様にモノドロミーによって特異な部分を調べる。 $\Lambda_0 \rightarrow e^{-2\pi i} \Lambda_0$ のもとで $\Pi_i$ はつぎのような変化をする。

$$\Delta \Pi_i = -2 \left( \sum_{j=1}^n \pm S_j \right) \quad (215)$$

図14のように $\Lambda_0$ を一周させると、 $i$ 番目までの各ブランチカットを逆向きにまわるループが付け加わる。さらに注意すべきなのは図15の点線についてからも同じ寄与があることである。この点線の場合は位相が $\pi$ だけずれているのでマイナスがかかることに注意すると(215)式が得られる。

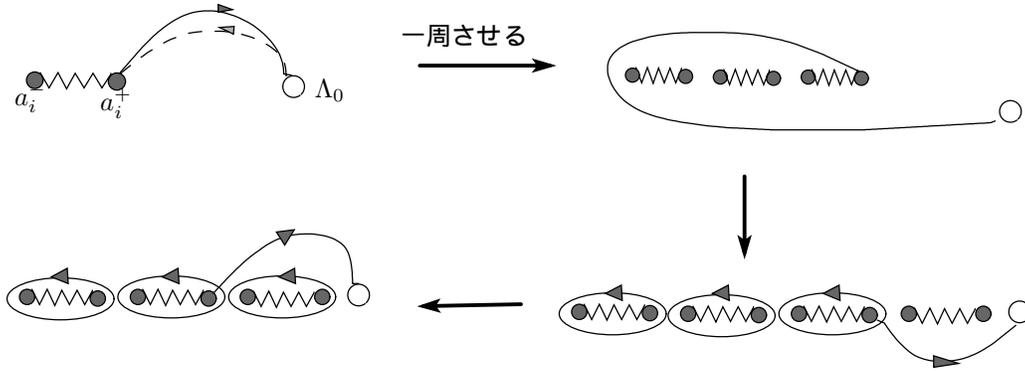


図14: モノドロミー変換  $\Lambda_0 \rightarrow e^{-2\pi i} \Lambda_0$

このモノドロミー変換から $\Pi_i$ の特異な $\Lambda_0$ 依存性が分かる。

$$\Pi_i = -\frac{2}{2\pi i} \left( \sum_{j=1}^n S_j \right) \log \Lambda_0 + \dots \quad (216)$$

$\dots$ は $\Lambda_0 \rightarrow e^{-2\pi i} \Lambda_0$ のもとで正則な部分。さらに詳しい $\Lambda_0$ 依存性を求めるために $t \gg a$ であるような領域を考え、 $t = \infty$ の周りで $\omega$ を展開する。十分遠方の $t$ で $a_i^\pm$ を眺めると、 $a_i^+$ と $a_i^-$ の差が小さく見えるので $a_i^\pm \rightarrow a_i$ と考えられる。これは $f_{n-1}$ が非常に小さくなることを意味している。

$$\omega = \sqrt{W'^2 + f_{n-1}} dt = W' \sqrt{1 + \frac{f_{n-1}}{W'^2}} \simeq W' + \frac{1}{2} \frac{f_{n-1}}{W'} \quad (217)$$

また

$$\frac{f_{n-1}}{W'} = \frac{b_{n-1}t^{n-1} + b_{n-2}t^{n-2} + \dots}{g_{n+1}t^n + g_n t^{n-1} + \dots} \simeq \frac{b_{n-1}}{g_{n+1}} \frac{1}{t} \quad (218)$$

ゆえに

$$\omega \simeq W' + \frac{b_{n-1}}{g_{n+1}} \frac{1}{t} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^2}\right) \quad (219)$$

これを用いて  $\Pi_i$  を積分する。

$$\begin{aligned}
\Pi_i &= \frac{1}{2\pi i} \int_{a_i^+}^{\Lambda_0} \omega = \frac{1}{2\pi i} \int_{a_i^+}^{\Lambda_0} \left( W' + \frac{b_{n-1}}{g_{n+1}} \frac{1}{t} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^2}\right) \right) dt \\
&= \frac{1}{2\pi i} \left[ (W(\Lambda_0) - W(a_i^+)) + \frac{b_{n-1}}{g_{n+1}} \log \frac{\Lambda_0}{a_i^+} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda_0^2}\right) \right] \\
&= W(\Lambda_0) + \frac{b_{n-1}}{2g_{n+1}} \log \Lambda_0 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda_0^2}\right) + \dots
\end{aligned} \tag{220}$$

$\dots$  は  $\Lambda_0$  に依存しない部分。これを先ほどの (216) 式と比較すると

$$b_{n-1} = -4g_{n+1} \sum_{j=1}^n S_j \tag{221}$$

となることが分かる。

次に  $\Pi_i$  の  $S_i$  依存性を考える。そのために  $\omega$  を  $t = a_i$  のまわりで展開する。 $W'(a_i) = 0$  なので

$$\begin{aligned}
\omega &\simeq \left[ W''(a_i)^2 (t - a_i)^2 + f_{n-1}(a_i) + f'_{n-1}(a_i)(t - a_i) + \frac{1}{2} f''_{n-1}(a_i)(t - a_i)^2 + \dots \right]^{\frac{1}{2}} \\
&= W''(a_i) \sqrt{(t - a_i)^2 + \frac{1}{W''^2}(f_{n-1} + \dots)} \\
&\equiv W''(a_i) \sqrt{(t - a_i)^2 - \mu_{eff}}
\end{aligned} \tag{222}$$

今の  $|a_i^+ - a_i^-| \ll |a_i - a_j|$  の近似では  $t' \equiv t - a_i$  で図を書くと次のようである (図 15)。

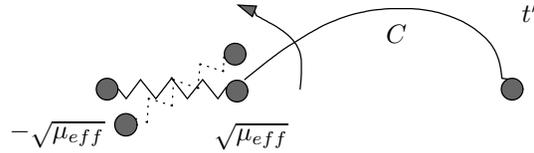


図 15: モノドロミー変換  $\mu_{eff} \rightarrow e^{2\pi i} \mu_{eff}$

この  $t'$  を用いて  $\Pi_i, S_i$  を書き表すと次式のようになる。

$$\Pi_i = \frac{1}{2\pi i} W''(a_i) \int_C \sqrt{t'^2 - \mu_{eff}} dt' \tag{223}$$

$$S_i = \frac{1}{2\pi i} W''(a_i) \int_{-\sqrt{\mu_{eff}}}^{\sqrt{\mu_{eff}}} \sqrt{t'^2 - \mu_{eff}} dt' \simeq W''(a_i) \mu_{eff} \tag{224}$$

この式に対して  $\mu_{eff} \rightarrow e^{2\pi i} \mu_{eff}$  とすると、図 15 のように半周するので

$$\int_{C'} = \int_C + \int_{-\sqrt{\mu_{eff}}}^{\sqrt{\mu_{eff}}} \tag{225}$$

となり、次の変換を得る。

$$\Delta \Pi_i = S_i \tag{226}$$

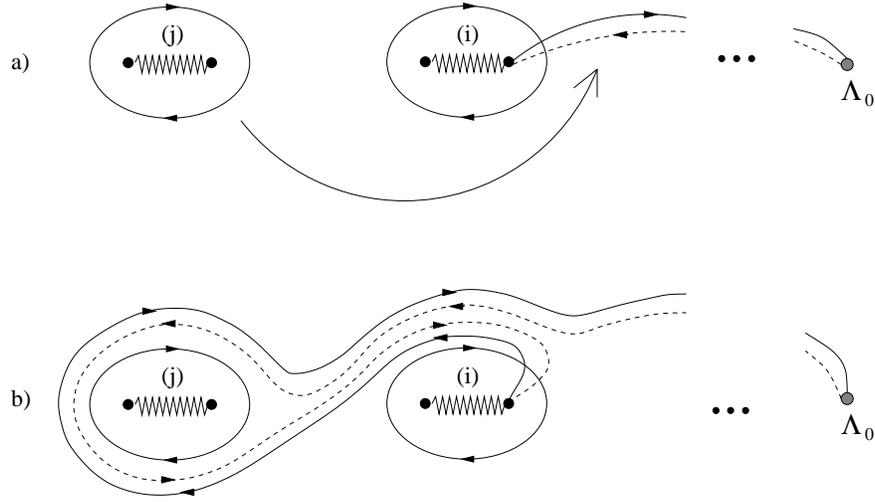


図 16: モノドロミー変換  $\Delta_{ij} \rightarrow e^{2\pi i} \Delta_{ij}$  ([23] より)

最後に、図 16 のように  $j$  番目の 3-Sphere を  $i$  番目の 3-Sphere の周りに回したときの  $\Pi_i$  の振る舞いを調べる。これは  $a_i$  を固定して、 $\Delta_{ij} \rightarrow e^{2\pi i} \Delta_{ij}$  ( $\Delta_{ij} \equiv a_i - a_j$ ) とすることに対応し、この操作のもとでの変化は  $\Delta \Pi_i = 2S_j$  である。

結局、モノドロミーの作用から分かる項を集めると、次のような寄与になることが分かる。

$$2\pi i \Pi_i = S_i \log \frac{S_i}{W''(a_i)} + 2 \sum_{j \neq i} S_j \log \Delta_{ij} - 2 \sum_{k=1}^n S_k \log \Lambda_0 + \dots \quad (227)$$

これを (209) 式に代入すると superpotential が得られる。

$$W_{eff} = \sum_{i=1}^n S_i \log \left( \frac{W''(a_i)^{N_i} \sum_{j \neq i} \Delta_{ij}^{-N_j} \Lambda^{2N}}{S_i^{N_i}} \right) + \dots \quad (228)$$

これはモノドロミーから決まる  $S_i$  についてのリーディングの項であり、さらに高次の補正が付け加わる。

#### 4.1.2 場の理論からの解析

ここでは、ラージ  $N$  デュアリティーによって得られた記述が、本当にゲージ理論の強結合領域を記述するデュアルな理論になっているのかを、場の理論の立場から確認する。具体的には superpotential とゲージカップリングについての一致を確かめる。方法としては  $\mathcal{N} = 2$  の Seiberg-Witten ジオメトリを利用する。今扱っている理論は  $\mathcal{N} = 1$  だが、それは  $\mathcal{N} = 2$  pure-YM を adjoint 場による古典 superpotential によって deform したものになっているので、このような方法が可能なのである。 $\mathcal{N} = 2$  の理論に  $W_{tree}$  を付け加えると、 $\mathcal{N} = 2$  のクーロンプラチの中で、massless 粒子が出てくる点以外ではもはや超対称性をもたなくなる。これは  $\mathcal{N} = 2$  の真空なら  $W_{tree}$  を加えた後でも D-term flatness 条件を満たすが、F-term flatness 条件を一般の点は満たさないからである。しかし massless 粒子が出る点では、superpotential に  $M(u)q\tilde{q}$  が付け加わるので F-term 条件を満たすことができる。このような massless 粒子はモノポール、ダイオンとして知られている [70]。そのような点では、これらの粒子を含めて考える必要があり、superpotential は次のようになる。

$$W = \sum_{k=1}^l M_k(u_r) q_k \tilde{q}_k + \sum_{p=1}^{n+1} g_p u_p \quad (229)$$

真空はこれから、次の F-flatness 条件を解いて得られる。

$$M_k(\langle u_p \rangle) = 0, \quad \sum_{k=1}^l \frac{\partial M_k(\langle u_p \rangle)}{\partial u_p} \langle q_k \tilde{q}_k \rangle + g_p = 0 \quad (230)$$

$k = 1, \dots, l$ 。これらを満たしている真空における superpotential の値は

$$W_{eff} = \sum_{p=1}^{n+1} g_p \langle u_p \rangle \quad (231)$$

である。 $\langle u_p \rangle$  は  $M_k(\langle u_p \rangle) = 0$  を満たし、モノポールが massless になる点を示している。先ほどの  $\Phi$  の期待値 (205) では massless フォトンが  $n$  コある。一方で  $\mathcal{N} = 2$  を deform する前は  $N$  個の massless フォトンがあったので、deformation によって  $N - n$  個のモノポールが生じ、 $N - n$  個の  $U(1)$  ゲージ群が閉じ込められる。それらの粒子は、異なったゲージ群に対応したもので互いに相互作用をしない。

結局まとめると、 $W_{tree}$  を  $\mathcal{N} = 2$  の理論に付け加えたとき、 $\langle u_p \rangle$  を求めるには  $\mathcal{N} = 2$  のクーロンプラチのうち  $N - n$  個のモノポールが massless になる点にのみ制限して  $W_{tree}$  を変分すればよい。

$$W = W_{tree} + \sum_{k=1}^{N-n} L_k M_k \quad (232)$$

$L_k$  はラグランジュの未定係数。これを変分して得られた運動方程式を解くと  $\langle u_r \rangle$  が  $g_r, \Lambda$  の関数として得られるので  $W_{exact}(g_r, \Lambda)$  が得られる。一方でラーゼ  $N$  デュアリティーから得られる superpotential は、(231) から分かるように  $S$  の関数であるので、両者を比較するためには  $S$  を integrate out する必要がある。

**3 次の superpotential における具体的比較** 場の理論を用いての計算は非常に困難であるので一般的に比較することは難しい。[23] では、superpotential が 3 次の場合の具体的な比較が、以下の 3 つのケースのみ計算されている<sup>2</sup>。トレースレスつまり古典的 superpotential の 1 次がゼロならばこれらの計算は 5 次までの場合実行できる。この事実から 4 次までの古典的 superpotential をもつ場合の  $SO/Sp$  ゲージ理論における比較も行なわれている [24]。

$$\begin{cases} U(3N) \rightarrow U(N) \times U(2N) \\ SU(5N) \rightarrow SU(3N) \times SU(2N) \times U(1) \\ SU(5N) \rightarrow SU(4N) \times SU(N) \times U(1) \end{cases} \quad (233)$$

tree での superpotential は

$$W = gu_3 + mu_2 + \lambda u_1 \quad (234)$$

で、2 つの古典解を  $a_1, a_2$  とし、superpotential を展開するパラメータ  $T$  を

$$T = \left( \frac{\Lambda}{\Delta} \right)^{\frac{2(N_1+N_2)}{N_1 N_2}}, \quad \Delta = a_1 - a_2 \quad (235)$$

とする。

$SU(3N) \rightarrow SU(N) \times SU(2N) \times U(1)$  superpotential は

$$W_{low} = \frac{m^3}{g^2} \pm 2g\Lambda^3 \quad (236)$$

であり 2 つの記述は一致している。

<sup>2</sup>mathematica を用いた計算は <http://www.th.phys.titech.ac.jp/ookouchi/indexj.html>

$SU(5N) \rightarrow SU(3N) \times SU(2N) \times U(1)$  superpotential は

$$W_{low} = W_{cl} + g\Delta^3 \left( 3T^2 - 2T^3 - 10T^5 + \frac{85}{3}T^6 - \frac{266}{3}T^7 + \dots \right) \quad (237)$$

であり 2 つの記述は一致している。

$U(5N) \rightarrow U(4N) \times U(N)$

$$W_{low} = W_{cl} + g\Delta^3 \left( 4T - 3T^2 - \frac{47}{6}T^3 - \frac{75}{2}T^4 + \dots \right) \quad (238)$$

であり 2 つの記述は一致している。

次にカップリングの比較をして見る。ここでもまた Seiberg-Witten ジオメトリーにおける  $\mathcal{N} = 2$  の曲線を使い、それに  $N - n$  個の massless モノポールをもつという制限を課す [71]。  $U(N)$  理論における曲線は

$$y^2 = P_N(x; u_r)^2 - 4\Lambda^{2N}, \quad P_N \equiv \det(x - \Phi) = \sum_{k=0}^N x^{N-k} s_k \quad (239)$$

であることが既に知られている。  $s_k$  は  $u_r$  と次式によって関係付けられている。

$$k s_k + \sum_{r=1}^k r u_r s_{k-r} = 0 \quad (240)$$

これに  $N - n$  個の massless モノポールをもつという制限を付け加えるには

$$P_N(x; \langle u_p \rangle)^2 - 4\Lambda^{2N} = (H_{N-n}(x))^2 F_{2n}(x) \quad (241)$$

とすればよい。  $(H_{N-n}(x))^2$  の部分が  $N - n$  個の重根を保証しているからである。  $n$  個の massless フォトンのうち  $U(N)$  のトレース部分に対応するものは理論の残りの部分とカップルしないので、始めのカップリングと同じものである。残りの  $n - 1$  個の光子は、次の曲線の周期行列によって与えられる。

$$y^2 = F_{2n}(x; g_p, \Lambda) \quad (242)$$

ラージ  $N$  デュアリティーによって得られたゲージカップリングと今得られたゲージカップリングの比較をして見る。もしラージ  $N$  デュアリティーによって得られた記述が本当にデュアルなものであるならば次の式が成り立つべきである。

$$g_{n+1}^2 F_{2n}(x) = W'(x)^2 + f_{n-1}(x) \quad (243)$$

$g_{n+1}$  が入っているのは、最高ベキの項が  $F_{2n}$  は  $x^{2n}$  であるのに対し、  $W'$  は  $g_{n+1}x^n$  になっているからである。以下ではこの等式が成り立つことを見ていくそこで、先ほどの拘束条件付きの superpotential(232) の変分を便宜上、少しちがった書き方で表すことにする。(241) は

$$(P_N - 2\Lambda)(P_N + 2\Lambda) = (H_{N-n})^2 F_{2n} \quad (244)$$

であり、モノポールが massless になる点では  $H_{N-n} = 0$  を満たす。このような  $x$  を  $p_i$ , ( $i = 1, \dots, N - n$ ) と書くことにする。この点では、左辺の  $(P_N - 2\Lambda)$  又は  $(P_N + 2\Lambda)$  がゼロになり、また double point なので微分した式もゼロになる。

$$\left. \frac{\partial}{\partial x} (P_N - 2\Lambda)(P_N + 2\Lambda) \right|_{x=p_i} = \left. (2H_{N-n}H'_{N-n}F_{2n} + (H_{N-n})^2 F'_{2n}) \right|_{x=p_i} = 0 \quad (245)$$

これより、 $\frac{\partial P_N}{\partial x} \Big|_{x=p_i} = 0$  となり、二つの条件を拘束条件とする superpotential は次のように書ける。

$$W = \sum_{r=1}^n g_r u_r + \sum_{i=1}^l \left[ L_i \left( P_N(x; u_r) \Big|_{x=p_i} - 2\epsilon_i \Lambda^N \right) + Q_i \frac{\partial}{\partial x} P_N(x; u_r) \Big|_{x=p_i} \right] \quad (246)$$

$\epsilon_i = \pm 1$  で、 $L_i, Q_i$  はラグランジュの未定係数である。 $W$  を  $p_i$  で微分して運動方程式を求めると

$$L_i \frac{\partial P_N(x; u_r)}{\partial x} \Big|_{x=p_i} + Q_i \frac{\partial^2}{\partial x^2} P_N(x; u_r) \Big|_{x=p_i} = 0 \quad (247)$$

となり、さらに  $Q_i$  についての運動方程式は

$$\frac{\partial}{\partial x} P_N(x; u_r) \Big|_{x=p_i} = 0 \quad (248)$$

である。これを (247) 式に代入すると

$$Q_i \frac{\partial^2 P_N}{\partial x^2} = 0 \quad (249)$$

が得られ、解としては  $Q_i = 0$  となる。そこで運動方程式の解の意味で  $\langle Q_i \rangle = 0$  と書くことにする。もちろん  $\frac{\partial^2 P_N}{\partial x^2} = 0$  となるような特別な  $g_r$  を考えることも可能だが、ここでは一般的な  $g_r$  について考えることにする。

次に、(246) 式を  $u_r$  で変分して  $u_r$  の運動方程式を考える。

$$0 = g_r + \sum_{i=1}^l \left[ L_i \frac{\partial P_N(x; u_r)}{\partial u_r} \Big|_{x=p_i} + Q_i \frac{\partial^2}{\partial x \partial u_r} P_N(x; u_r) \Big|_{x=p_i} \right] \quad (250)$$

運動方程式のレベルでは  $Q_i$  はゼロなので

$$0 = g_r + \sum_{i=1}^l L_i \frac{\partial P_N(x; u_r)}{\partial u_r} \Big|_{x=p_i} \quad (251)$$

が得られる。また、(239) 第 2 式より

$$\frac{\partial P_N(x; u_r)}{\partial u_r} \Big|_{x=p_i} = \frac{\partial}{\partial u_r} \sum_{k=0}^N P_i^{N-k} s_k = \sum_{k=0}^N P_i^{N-k} \frac{\partial s_k}{\partial u_r} \quad (252)$$

という関係式が得られるので、

$$0 = g_r + \sum_{i=1}^l \sum_{k=0}^N L_i P_i^{N-n} \frac{\partial s_k}{\partial u_r} \quad (253)$$

となる。(240) 式から  $s, u$  の関係が決まっているので、これを  $u_t$  で微分すると

$$\frac{\partial s_k}{\partial u_t} = -\frac{t}{k} s_{k-t} - \frac{1}{k} \sum_{r=1}^k r u_r \frac{\partial s_{k-r}}{\partial u_t} \quad (254)$$

を得るので、これらを用いると  $\mathcal{N} = 2$  の理論に付け加えられた superpotential  $W = \sum_{i=0}^{n+1} \frac{1}{r} g_r x^{n+1}$  は、次のように書ける (ただし、 $g_r = 0$   $r > n + 1$  と定義する)。

$$\begin{aligned} W' &= \sum_{r=1}^N g_r x^{r-1} \\ &= \sum_{r=1}^N \sum_{i=1}^l \sum_{j=0}^N L_i P_i^{N-j} s_{j-r} x^{r-1} \end{aligned} \quad (255)$$

ここで

$$\sum_{r=-\infty}^0 \sum_{i=1}^l \sum_{j=0}^N L_i P_i^{N-j} s_{j-r} x^{r-1} = \frac{1}{x} \sum_{i=1}^l \sum_{j=0}^N L_i P_i^{N-j} s_j + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad (256)$$

であることから

$$\begin{aligned} W' &= \sum_{r=-\infty}^N \sum_{i=1}^l \sum_{j=0}^N L_i P_i^{N-j} s_{j-r} x^{r-1} - \frac{1}{x} \sum_{i=1}^l \sum_{j=0}^N L_i P_i^{N-j} s_j + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right) \\ &= \sum_{r=-\infty}^N \sum_{i=1}^l \sum_{j=0}^N L_i P_i^{N-j} s_{j-r} x^{r-1} - \frac{1}{x} \sum_{i=1}^l L_i P_N(x; u_r) \Big|_{x=p_i} + \mathcal{O}(x^{-2}) \end{aligned} \quad (257)$$

と表せる。(246) の  $L_i$  についての条件を用いると

$$\begin{aligned} W' &= \sum_{r=-\infty}^N \sum_{i=1}^l \sum_{j=0}^N L_i P_i^{N-j} s_{j-r} x^{r-1} - \frac{1}{x} \sum_{i=1}^l L_i 2\epsilon_i \Lambda^N + \mathcal{O}(x^{-2}) \\ &= \sum_{r=-\infty}^N \sum_{i=1}^l \sum_{j=0}^N L_i P_i^{N-j} s_{j-r} x^{r-1} - \frac{2}{x} L \Lambda^N \quad (L = \sum_{i=1}^l L_i \epsilon_i) + \mathcal{O}(x^{-2}) \\ &= \sum_{i=1}^l \frac{P_N}{x - p_i} L_i - 2L \Lambda^N x^{-1} + \mathcal{O}(x^{-2}) \end{aligned} \quad (258)$$

となる。 $l-1$  次の多項式  $B_{l-1}(x)$  を次式により定義する。

$$\sum_{i=1}^l \frac{L_i}{x - p_i} = \frac{B_{l-1}(x)}{H_l(x)} \quad (259)$$

したがって、次の関係式が得られた。

$$W' + 2L \Lambda^N x^{-1} = B_{l-1}(x) \sqrt{F_{2N-2l}(x) + \frac{4\Lambda^{2N}}{H_l(x)^2}} + \mathcal{O}(x^{-2}) \quad (260)$$

$W'$  の最高ベキの項が  $g_{n+1}x^n$  なので、 $B_{l-1}$  は  $n - N + l$  のオーダーである。これは  $l \geq N - n$  を意味し、特に  $l = N - n$  のとき  $B_{N-n-1} = g_{n+1}$  である。このことを踏まえて (260) を 2 乗すると

$$g_{n+1}^2 F_{2n} = W'^2 + 4g_{n+1} L \Lambda^N x^{n-1} + \mathcal{O}(x^{n-2}) \quad (261)$$

を得る。これは示したかった関係式 (243) 式を再現しており、ゲージ理論とラージ  $N$  デュアリティーそれぞれから得られるカップリングは一致することがわかった。ただし  $f_{n-1} = 4g_{n+1} L \Lambda^N x^{n-1} + \mathcal{O}(x^{n-2})$  のオーダーでのチェックである。

## 4.2 $X(k=1, \hat{A}_1)$ Klebanov-Strassler case

Klebanov-Strassler による例 [68][11][18] はアファイン case の非常に簡単な  $X(k=1, \hat{A}_1)$  case になっている。 $\hat{N}_0 = N_0, \hat{N}_1 = N_0 d_0 + N_1 d_1$  であり、Dynkin index はこの場合  $d_0 = d_1 = 1$  であるので、 $\hat{N}_0 = N_0, \hat{N}_1 = N_0 + N_1$  となる。 $N_0$  は D3 プレーンの枚数、 $N_1$  は  $S^2 \rightarrow 0$  に巻きついている D5 プレーンの枚数を表す (fractional brane と言うこともある)。以下ではこれらを  $N, M$  とそれぞれ表すことにする。この場合のゲージ群は  $SU(\hat{N}_0) \times SU(\hat{N}_1) = SU(N) \times SU(N+M)$  であり、物質場は  $(N+M, \bar{N})$  表現の



図 17: アファイン  $\hat{A}_1$  case

カイラル superfield が 2 つ ( $A_1, A_2$ )、 $(\overline{N+M}, N)$  表現のカイラル superfield が 2 つ ( $B_1, B_2$ ) ある。 $S^2 \rightarrow 0$  では (44) より  $1/g_i^2 \rightarrow 0$  になり、漸近自由性からこれはエネルギースケール  $\mu$  が十分に小さくなることに対応する。よって superpotential のスケール  $m$  よりエネルギースケールが小さい場合を考えるので、場  $\Phi$  は integrate out されることになる。注意すべきこととしては、アファイン  $A_1$  Dynkin 図が

となっていて、二つのノード間に 2 本線が入っていることである。これにより一見 2 倍の数に思える場が入っている。superpotential は (59) より

$$W = Tr(\Phi(A_1 B_1 + A_2 B_2)) + Tr(\tilde{\Phi}(B_1 A_1 + B_2 A_2)) + \frac{m}{2} (Tr(\Phi^2) - Tr(\tilde{\Phi}^2)) \quad (262)$$

となる。アファイン case について  $\sum d_i \alpha_i = 0$ ,  $\alpha_i = P'_i$  という関係式があり、 $P_0 = \frac{m}{2} t^2$  とすると  $P_1$  は自動的に  $P_1 = -\frac{m}{2} t^2$  となる。これにより 3 項目のマイナスは生じている。 $\Phi, \tilde{\Phi}$  は massive なので integrate out すると、

$$W = \lambda_1 Tr(A_1 B_1 A_2 B_2 - A_1 B_2 A_2 B_1) = \lambda_1 Tr(A_i B_j A_k B_l) \epsilon^{ik} \epsilon^{jl} \quad (263)$$

が得られる。この操作が意味することは、各ノードに対応している場を理論から消しているので、ブローアップされていた  $S^2$  をつぶしたことに対応する。したがって巻きついていた D5 ブレーンは fractional ブレーンになり Klebanov-Strassler case に一致する。

[11] では重力サイドの具体的な計量が求められていて、Vafa による話をより実感できる。ここでは、Klebanov-Strassler による解の導出を簡単に見た後で、その解からゲージ理論サイドに対して何が言えるかを調べることにする。

ゲージ理論サイドには D3,5 ブレーンがあるので重力サイドには RR-3,5 form フラックスが存在する。さらに、3 節で見たようにカップリングの running を与える NS-NS フラックス  $H_3 = dB_2$  がある。

$$\frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{S^3} F_3 = M, \quad \frac{1}{(4\pi\alpha')^2} \int_{T^{1,1}} F_5 = N \quad (264)$$

Type IIB の SUGRA についての運動方程式は、

$$d(e^\phi * F_3) = F_5 \wedge H_3, \quad d(e^{-\phi} * H_3) = -g_s^2 F_5 \wedge F_3 \quad (265)$$

と Einstein 方程式である。この解を求めたいのであるが、一般には難しいので次の ansatz を置く。これは 3 節で見てきた状況を表している。まずフラックスにより歪められた時空は deformed conifold になり、RR フラックスは deformation によってできた  $S^3$  から生じ、さらに NS-NS フラックスはそのデュアルな 3 サイクルから生じるというものである。

$$F_3 = M (g^5 \wedge g^3 \wedge g^4 + d[F(\tau)(g^1 \wedge g^3 + g^2 \wedge g^4)]) \quad (266)$$

$$B_2 = g_s M [f(\tau) g^1 \wedge g^2 + k(\tau) g^3 \wedge g^4] \quad (267)$$

$$\mathcal{F}_5 = B_2 \wedge F_3 = g_s M^2 l(\tau) g^1 \wedge g^2 \wedge g^3 \wedge g^4 g^5 \quad (268)$$

$$ds_{10}^2 = h^{-\frac{1}{2}}(\tau) dx_n dx_n + h^{\frac{1}{2}}(\tau) ds_6^2 \quad (269)$$

$ds_6^2$  は deformed conifold の計量 (650) で、のこりは Minkowski になっており、ブレーン解に特徴的なワーブ factor が掛かった形となっていることが分かる。この ansatz のもとで運動方程式を書き変える。(265) 第

1 式は

$$(1 - F) \tanh^2\left(\frac{\tau}{2}\right) - F \coth^2\left(\frac{\tau}{2}\right) + 2h \frac{d}{d\tau}(h^{-1} F') = \alpha(k - f) \frac{l}{K^2 h \sinh^2 \tau} \quad (270)$$

$$(271)$$

となり、(265) 第 2 式は 2 つに分かれて

$$h \frac{d}{d\tau}(h^{-1} \coth^2\left(\frac{\tau}{2}\right) f') - \frac{1}{2}(f - k) = \alpha \frac{l(1 - F)}{K^2 h \sinh^2 \tau} \quad (272)$$

$$h \frac{d}{d\tau}(h^{-1} \tanh^2\left(\frac{\tau}{2}\right) k') + \frac{1}{2}(f - k) = \alpha \frac{lF}{K^2 h \sinh^2 \tau} \quad (273)$$

となる。Einstein 方程式については、この ansatz ではトレースを取ったもので十分であり [11]

$$\frac{1}{\sinh^2 \tau} \frac{d}{d\tau}(h' K^2(\tau) \sinh^2 \tau) = -\frac{\alpha}{4} \left[ \frac{(1 - F)^2}{\cosh^4\left(\frac{\tau}{2}\right)} + \frac{F^2}{\sinh^4\left(\frac{\tau}{2}\right)} + \frac{8(F')^2}{\sinh^2 \tau} \right] \quad (274)$$

となる。これらの解は [11] により次のように与えられている。

$$F(\tau) = \frac{\sinh \tau - \tau}{2 \sinh \tau}, \quad (275)$$

$$f(\tau) = \frac{\tau \coth \tau - 1}{2 \sinh \tau} (\cosh \tau - 1), \quad (276)$$

$$k(\tau) = \frac{\tau \coth \tau - 1}{2 \sinh \tau} (\cosh \tau + 1), \quad (277)$$

$$h(\tau) = \alpha \frac{2^{\frac{2}{3}}}{4} \int_{\tau}^{\infty} dx \frac{x \coth x - 1}{\sinh^2 x} (\sinh(2x) - 2x)^{\frac{1}{3}} \quad (278)$$

得られた計量には  $Z_2$  のアイソメトリー、つまり  $(\theta_1, \phi_1) \iff (\theta_2, \phi_2)$  の入れ替え対称性がある。これに対し  $\tau \rightarrow \infty$  では deformed conifold が conifold になるので

$$ds_6^2 = \frac{1}{2} \epsilon^{\frac{4}{3}} K(\tau) \left[ \frac{1}{3K^3(\tau)} (d\tau^2 + (g^5)^2) + \cosh^2\left(\frac{\tau}{2}\right) [(g^3)^2 + (g^4)^2] + \sinh^2\left(\frac{\tau}{2}\right) [(g^1)^2 + (g^2)^2] \right] \quad (279)$$

$$\rightarrow ds_{T^{1,1}}^2 = \frac{1}{9} (g^5)^2 + \frac{1}{6} \sum_{i=1}^4 (g^i)^2 = \frac{1}{9} \left( d\psi + \sum_{i=1}^2 \cos \theta_i d\phi_i \right)^2 + \frac{1}{6} (d\theta_i^2 + \sin^2 \theta_i d\phi^2) \quad (280)$$

$Z_2$  対称性は  $U(1)$  対称性になることが分かる。このゲージ理論的対応を考えたい。(263) の作用には次のような R-symmetry がある。

$$(A_1, A_2, B_1, B_2, \Lambda_1^{3N_+ - 2N}, \tilde{\Lambda}_1^{3N - 2N_+}, \lambda_1) = \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2M, -2M, 0 \right) \quad (281)$$

右辺はチャージを表している。この R-symmetry が計量のアイソメトリーに対応している。そこで量子効果によってこの R-symmetry がどうなるかを考えてみる。これがうまい具合に  $Z_2$  対称性を出すだろうか？  $SU(N) \times SU(N + M)$  のゲージ理論についてのダイナミクスは良く知られていないが、3 節で見た RG cascade が今の場合おこるのでこれに注目する。

5-form フラックス  $F_5$  は

$$F_5 = \mathcal{F}_5 + *F_5 \quad (282)$$

$$F_5 = B_2 \wedge F_3 = g_s M^2 l(\tau) g^1 \wedge g^2 \wedge g^3 \wedge g^4 \wedge g^5 \quad (283)$$

であり、先ほどの解 (275)~(278) を代入すると

$$l \equiv f(1 - F) + kF = \frac{\tau \coth \tau - 1}{2 \sinh \tau} (\sinh 2\tau - 2\tau) \quad (284)$$

となる。また、 $r^3 \sim e^2 e^\tau$  であるので  $\tau$  が大きいところでは

$$f \sim \frac{\tau}{2}, \quad k \sim \frac{\tau}{2}, \quad F \sim \frac{1}{2} \quad (285)$$

であり、次のように近似できる。

$$\mathcal{F}_5 \sim \text{vol}(T^{1,1}) g_s M^2 \log r = \text{vol}(T^{1,1}) g_s M^2 \log \frac{r}{\tilde{r}} \quad (286)$$

これは  $r$  を変えていったときに、D3 プレーンのチャージが減少していくことを意味しており、3.7 節で見た RG cascade の具体的な実現になっている。 $r \rightarrow r' = e^{-\frac{1}{g_s M^2} \text{vol}} r$  に変化したとき、D3 プレーンのチャージは  $M$  だけ減少する。この事実はゲージ理論サイドで、Seiberg のデュアリティーに対応していた  $SU(N+M) \times SU(N) \rightarrow SU(N) \times SU(N-M)$ 。したがって、このまま重力サイドで  $r$  を小さくしていくと、ゲージ理論サイドでは Seiberg のデュアリティーが繰り返され、ゲージ群の大きさがどんどん下がる。ゲージ群の大きさが負になることはないので、やがてこの変換は止まり  $SU(M+p) \times SU(p)$  のゲージ群に行き着く。ただし  $0 \leq p < M$ 。  $p = 0$  のときゲージ群は  $SU(M)$  になり、よく知られた  $\mathcal{N} = 1$  SYM になる。そこではインスタントンの効果で Affleck-Dine-Seiberg (ADS) potential が生み出され [14]、それにより  $M$  個の真空のみが許され、それらは互いに  $Z_{2M}$  対称性で移り変わっていた。この Potential により R-symmetry は  $Z_{2M}$  対称性になり、真空一つを決めることでさらに  $Z_2$  対称性に破れる。 $1 < p < M$  の場合も同様に考えられる。

したがって、重力の解で  $r$  が大きいところでの  $U(1)$  対称性が  $r$  が小さいところで  $Z_2$  に破れているのは、RG cascade によって D3 プレーンチャージが減らされた後に ADS-potential が生み出され、そのうちの一つの真空を取ったからと説明できる。このモデルの  $SO/Sp$  case については、横野さん、今井さんによってなされている [25]。

### 4.3 $X(k, \hat{G}, \text{pure})$ D3 プレーンのみを持つ場合 (conformal 対称性をもつ場合)

$d_i$  の重みでプレーンを巻きつけると、結局 D5 プレーンは巻きついていないことになる。このような case では、ジオメトリの  $S^2$  をつぶしたとしても問題は生じない (もし D5 プレーンを巻きつけていたなら、プレーンのテンションが無限大になってしまう)。よってこのような極限をとった場合は ADE 型の孤立特異性 (点状の特異点) 上に D3 プレーンを置いた場合に相当する。 $S^2$  がなくなるとインスタントンからの寄与がなくなり、量子効果によってジオメトリが変化することが起こらなくなり、理論は conformal 対称性を持つと考えられる。

#### 4.3.1 AdS/CFT 対応

ここでは、具体的に (58) の  $W_i(\phi_i)$  がすべて  $k$  次であるような場合を考える。

$$W_i(\phi_i) = \frac{s_i}{k+1} \text{Tr} \phi_i^{k+1} \quad (287)$$

まず始めに、この理論は IR で conformal fixed point を持つことの間接的証拠を見る。(58) の superpotential は、次のようにチャージを与えたとき  $U(1)_R$  対称性を持つ。

$$R(\phi) = \frac{2}{k+1}, \quad R(Q_{ij}) = \frac{k}{k+1} \quad (288)$$

ゲージノのチャージは  $+1$  とする。一般的にはインスタントン効果により  $U(1)_R$  対称性はアノマラスであるが

$$R(\Lambda_i^{\vec{e}_i \cdot \vec{N}}) = \frac{2}{k+1} (\vec{e}_i \cdot \vec{N}), \quad \vec{N} = \sum_{i=0}^r \vec{e}_i \hat{N}_i \quad (289)$$

のチャージがすべてゼロであれば  $U(1)_R$  対称性は保たれる。よく知られた  $SU(N)$  の場合で言えば、ADS-potential[14] の R チャージが 2 にならず、このポテンシャルが生み出されないことに相当する。いま考えているアファイン  $\hat{G}, \hat{N}_i = N_0 d_i$  case は (60) より、まさにこのような場合になっている。アノマリーのない  $U(1)_R$  対称性の存在は  $\mathcal{N} = 1$  superconformal 理論であるための必要条件なので、これを満たしていることから conformal IR fixed-point が有りそうである。そこでこのような fixed-point があるとして話を進めてしまうことにする。このような点でのカップリングをそれぞれ  $s_i^*, g_i^*, \lambda_{ij}^*$  と表すことにする。superconformal 理論では R チャージと場の次元  $\Delta$  に  $\Delta = \frac{3R}{2}$  という関係式が存在する [21]。

$$\Delta(\phi_i) = \frac{3}{k+1}, \quad \Delta(Q_{ij}) = \frac{3k}{2(k+1)} \quad (290)$$

2次元の場合と違って、4次元の CFT には 2 つセントラルチャージ ( $a, c$  と書く) が存在し、これを用いて R カレント  $R^\mu$  のアノマリー項を書き下すと、次のようになることが知られている [72][73]。

$$\langle \partial_\mu R^\mu \rangle_{g_{\mu\nu}, B_\mu} = \frac{c-a}{24\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\rho\lambda} R^{\mu\nu}{}_{\beta\gamma} R^{\rho\lambda\beta\gamma} + \frac{5a-3c}{9\pi^2} B_{\mu\nu} \tilde{B}^{\mu\nu} \quad (291)$$

ここで

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \quad (292)$$

であり、 $\tilde{\phantom{B}}$  は field strength のデュアルである。第一項は重力  $U(1)$  アノマリーであり、第 2 項は通常の軸性アノマリーである。これらの係数を評価するために三角 diagram を評価する。

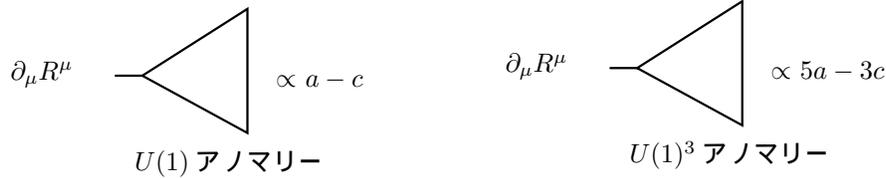


図 18: 三角 diagram

$$a - c = \frac{1}{16} \sum_{\psi} R(\psi), \quad 5a - 3c = \frac{9}{16} \sum_{\psi} R(\psi)^3 \quad (293)$$

ここで  $\sum_{\psi}$  は、すべてのフェルミオンについて R チャージを足し上げることを意味する。今は superfield  $(\Phi_i, V_i, Q_{ij})$  がありその中のフェルミオンはそれぞれ  $(\frac{2}{k+1} - 1, 1, \frac{k}{k+1} - 1)$  の R チャージをもつので

$$a - c = \frac{1}{16} \left( \sum_i \left( \frac{2}{k+1} - 1 \right) (N_i^2) + \sum_i N_i^2 + \sum_{\langle i, j \rangle} \left( \frac{k}{k+1} - 1 \right) 2N_i N_j \right) = 0 \quad (294)$$

$$5a - 3c = \frac{9}{16} \left( \sum_i \left( \frac{2}{k+1} - 1 \right)^3 N_i^2 + \sum_i N_i^2 + \sum_{\langle i, j \rangle} \left( \frac{k}{k+1} - 1 \right)^3 2N_i N_j \right) \quad (295)$$

となる。ただし  $|\Gamma_G| = \sum d_i^2 = \sum_{\langle ij \rangle} N_i N_j$  を用いた (ここで  $\langle \phantom{ij} \rangle$  は隣接するノードについての和の意味)。第一式は先ほどの話を再現している。これより IR fixed-point での CFT におけるセントラルチャージは

$$a = c = \frac{27k^2 N_0^2 |\Gamma_G|}{16(k+1)^3} \quad (296)$$

この CFT にデュアルなのは AdS 空間であると考えられる。この事を今求めたセントラルチャージをもとに確かめていく。CFT に対応する空間はスケール不変性があるので cone 計量を想定する。それゆえ特

異点付近では、 $ds_5^2$  を 5 次元の Einstein 計量とすると  $ds_6^2 = dr^2 + r^2 ds_5^2$  と書くことができる。 $X(k, \hat{G})$  の具体的な計量は知られていないが、AdS/CFT の関係式によると  $AdS_5 \times M_5$  バックグラウンドにデュアルな CFT において、セントラルチャージ  $c$  は  $M_5$  の体積によって

$$c \sim \frac{1}{Vol(M_5)} \quad (297)$$

と表せることが知られている [7]。比例係数は  $M_5$  を  $S^5$  で半径 1 にとったとき  $\mathcal{N} = 4$  の CFT になるようにとる。

$$c_{\mathcal{N}=4} = \frac{N_0}{4}, \quad Vol(S^5) = \pi^3 \quad (298)$$

したがって

$$c = \frac{N_0^2 \pi^3}{4 Vol(M_5)} \quad (299)$$

これより重力サイドの体積が計算できれば AdS/CFT 対応のチェックができる。

一般的な Calabi-Yau  $n$ -fold  $X$  で conical 特異性を持つものは、次のように表すことができる。

$$F(z_0, \dots, z_n) = 0, \quad F(\lambda^{w_0} z_0, \dots, \lambda^{w_n} z_n) = \lambda^d F(z_0, \dots, z_n) \quad (300)$$

この cone の base(これを  $B$  と書く) は実  $2n - 1$  次元であり、その体積は [38] により次のように与えられる。

$$Vol(B) = \frac{2d}{(n-1)! \prod w_i} \left( \frac{\pi(\sum w_i - d)}{n} \right)^n \quad (301)$$

この公式を考えたいケースに適用する。次元及びウェイトは ADE のそれぞれに対して、次の表 2 のようになる。

表 2 ADE 型特異性をウェイトの関係

$\Gamma$	$w_0$	$w_1$	$w_2$	$w_3$	$d$
$A_r$	1	$\frac{1}{2}(k+1)$	$\frac{1}{2}(k+1)$	$k$	$(r+1)k$
$D_r$	1	$(r-1)k$	$(r-1)k$	$2k$	$2(r-1)k$
$E_6$	1	$6k$	$4k$	$3k$	$12k$
$E_7$	1	$9k$	$6k$	$4k$	$18k$
$E_8$	1	$15k$	$10k$	$6k$	$30k$

これから体積を求めると

$$Vol(M_5) = \frac{4\pi^3(k+1)^3}{27k^2 |\Gamma_G|} \quad (302)$$

とまとめて書くことができ、これを (299) に代入すると、まさに場の理論で得られたセントラルチャージ (296) が再現されている。

#### 4.3.2 $X(k=1, \hat{A}_1, \text{pure})$ Klebanov-Witten case

$\text{pure}X(k=1, \hat{A}_1)$  の場合は既に知られている [7]。この場合は特異なジオメトリーが conifold なので、具体的な計量も分かっている。この case を Klebanov-Witten case の  $M \rightarrow 0$  の極限として見ていく。(267)~(269)

の ansatz においてこの極限をとると  $F_3 = B_2 = 0$  となり、Vafa の一般論から  $B_2$  がバックグラウンドにあることはカップリングが走ることに対応していたので、この場合カップリングは決まった値をもち running しない。よって強結合領域でダイナミカルに生成されていた superpotential も存在せず、計量は deformed conifold でなく、conifold(付録 E) になる。

$$ds^2 = H^{-\frac{1}{2}}(r) [-dt^2 + d\vec{x}^2] + H^{\frac{1}{2}}(r) [dr^2 + r^2 g_{ij} dx^i dx^j] \quad (303)$$

$r \rightarrow 0$  の Near-Horizon 極限では、これはまさに  $AdS \times T^{1,1}$  の計量である。Klebanov-Witten ではこの具体的形から、AdS/CFT のチェックをさまざまな量について行っている。

## 第 II 部

# $G_2$ ホロノミーを持つ多様体上での M 理論のダイナミクス

## 5 M 理論の SUSY コンパクト化と特殊ホロノミー多様体

第 2 部では、M 理論を用いて  $\mathcal{N} = 1$  の 4 次元理論を調べていくので、主に M 理論の低エネルギー有効理論である 11 次元 SUGRA を扱うことになる。そこで最初に 11 次元 SUGRA についての簡単な導入をし、次に SUSY を残すようなコンパクト化についてまとめる。 $G_2$  多様体は、4 次元理論に  $\mathcal{N} = 1$  の超対称性を持たせるために必要であるが、その多様体の特異点を持たないスムーズな場合についての振る舞いをしらべ、カイラルフェルミオンがスムーズな場合には存在しないことをみる。最後に 6、7 節で調べていく conical 特異性をもつ  $G_2$  多様体の計量とその基本性質について簡単にまとめる。[69][41]

### 5.1 11 次元 SUGRA

11 次元 SUGRA には場として、計量  $g$ 、4-form  $F_4 = dC_3$ 、gravitino  $\Psi$  が入っている [41][42]。これらを用いて構成した supersymmetric なラグランジアンは

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} e e_B{}^N e_A{}^M R_{MN}{}^{AB}(\omega) - \frac{1}{2} i e \bar{\Psi}_M \hat{\Gamma}^{MNP} D_N \left[ \frac{1}{2} (\omega + \tilde{\omega}) \right] \Psi_P \quad (304)$$

$$- \frac{1}{48} e F_{MNPQ} F^{MNPQ} + \frac{2}{(12)^4} e \epsilon^{M_1 \dots M_{11}} F_{M_1 \dots M_4} F_{M_5 \dots M_8} C_{M_9 \dots M_{11}} \quad (305)$$

$$+ \frac{3}{4(12)^2} e \left[ \bar{\Psi}_M \hat{\Gamma}^{MNPQ} \Psi + 12 \bar{\Psi}^W \hat{\Gamma}^{XY} \Psi^Z \right] (F_{WXYZ} + \tilde{F}_{WXYZ}) \quad (306)$$

である。ここで、 $e = \det e_M{}^A$ 、 $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \hat{\Gamma}_0$ 、 $D_M(\omega) = \partial_M - \frac{1}{4} \omega_M{}^{AB} \hat{\Gamma}_{AB}$ 。

$$\omega_{MAB} = \frac{1}{2} (-\Omega_{MAB} + \Omega_{ABM} - \Omega_{BMA}) + K_{MAB}, \quad (307)$$

$$K_{MAB} = \frac{i}{4} \left[ -\bar{\Psi}_N \hat{\Gamma}_{MAB}{}^{NP} \Psi_P + 2(\bar{\Psi}_M \hat{\Gamma}_B \Psi_A - \bar{\Psi}_M \hat{\Gamma}_A \Psi_B + \bar{\Psi}_B \hat{\Gamma}_M \Psi_N) \right], \quad (308)$$

$$\Omega_{MN}^A = 2\partial_{[N} e_{M]}^A, \quad (309)$$

$$\tilde{\omega}_{MAB} = \omega_{MAB} + \frac{i}{4} \bar{\Psi}_N \hat{\Gamma}_{MAB}{}^{NP} \Psi_P, \quad (310)$$

$$F_{MNPQ} = 4\partial_{[M} C_{NPQ]}, \quad (311)$$

$$\tilde{F}_{MNPQ} = F_{MNPQ} - 3\bar{\Psi}_{[M} \hat{\Gamma}_{NP} \Psi_{Q]} \quad (312)$$

$M, N, P, \dots$  は 11 次元時空の足で  $A, B, C, \dots$  は接空間の足である。また  $\epsilon_{MNP\dots}$  はテンソル密度でなく、テンソルであり

$$\epsilon_{12\dots 11} = e \quad (313)$$

の値をとる。 $\hat{\Gamma}$  は 11 次元のガンマ行列であり次の関係式を満たす。

$$\{\hat{\Gamma}_A, \hat{\Gamma}_B\} = -2\eta_{AB} \quad (314)$$

$$\hat{\Gamma}_{A_1\dots A_p} \equiv \hat{\Gamma}_{[A_1\dots A_p]} \quad (315)$$

$\eta_{AB}$  は接空間の計量である。

## 5.2 SUSY バックグラウンド

これらの場に対して超対称性を保つ真空を求めたい。それには次の条件を満たせばよいことが知られている。

$$\begin{cases} \text{ボソニックな場の運動方程式} \\ \text{フェルミオン場} \equiv 0 \Rightarrow \delta_{SUSY}(\text{ボソン}) = 0 \\ \delta_{SUSY}(\text{フェルミオン}) = 0 \end{cases} \quad (316)$$

このうち非自明なのは 3 番目の条件で、これに以下では注目していく。この方程式を SUSY パラメータ  $\epsilon$  に対する線型方程式とみなすと、SUSY Vacua の条件は次のように言い表すことができる。

$$\text{スーパーチャージの数} = \delta_{SUSY}\Psi = 0 \text{ の解の数} \quad (317)$$

バックグラウンドに  $(g, F)$  が存在しているとき、SUSY 変換は具体的に次のように書ける。

$$\delta_{SUSY}\Psi_M = D_M(\tilde{\omega})\epsilon + T_M^{PQRS}\tilde{F}_{PQRS}\epsilon \quad (318)$$

$$T^{SMNPQ} = \frac{-i}{144} \left( \hat{\Gamma}^{SMNPQ} - 8\hat{\Gamma}^{[MNP}g^{Q]S} \right) \quad (319)$$

フェルミオンがゼロなので、考えるべき運動方程式はボソニックのみである。

$$R_{MN} - \frac{1}{2}g_{MN}R = \frac{1}{3} \left[ F_{MPQR}F_N^{PQR} - \frac{1}{8}g_{MN}F_{PQRS}F^{PQRS} \right] \quad (320)$$

$$\nabla_M F^{MNPQ} = -\frac{1}{576}\epsilon^{M_1\dots M_8 NPQ} F_{M_1\dots M_4} F_{M_5\dots M_8} \quad (321)$$

次に M 理論を  $M_4 \times M_7$  にコンパクト化することを考える。そのために Freund-Rubin ansatz を採用する。それは 4 次元にのみ 4-form が存在するという仮定である。

$$g_{\mu\nu} = F_{\mu\nu\rho\sigma} = F_{\mu\nu\rho\sigma} = F_{\mu\nu\rho\sigma} = 0 \quad (322)$$

$$\begin{cases} F_{\mu\nu\rho\sigma} = 3m\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \\ F_{mnr s} \equiv 0 \end{cases} \quad (323)$$

$\mu, \nu = 0, 1, \dots, 3$  で  $m, n = 1, 2, \dots, 7$  とすると、 $F$  についての運動方程式は自明に満たされる。 $R$  についての運動方程式は 4 次元と 7 次元に分解できる。

$$\begin{cases} R_{\mu\nu} = -12m^2 g_{\mu\nu} \leftarrow M_4 \\ R_{mn} = 6m^2 g_{mn} \leftarrow M_7 \end{cases} \quad (324)$$

$M_4$  を最大の対称性をもつ空間に制限すると

$$\begin{cases} m \neq 0 & M_4 = \text{AdS}_4 \\ m = 0 & M_4 = \text{Minkowski} \end{cases} \quad (325)$$

となる。一方  $M_7$  の方は (324) より

$$\begin{cases} m \neq 0 & M_7 = \text{cosmological 定数が } \Lambda = 6m^2 \text{ の Einstein 多様体} \\ m = 0 & M_7 = \text{Ricci 平坦多様体} \end{cases} \quad (326)$$

となる。このようなバックグラウンドで、 $\delta\Psi_M = 0$  を満たすような解を見つけたい。そこで  $\epsilon = \chi \otimes \eta$  のように 11 次元スピノルを 4 次元のスピノルと 7 次元のスピノルに分け、11 次元のガンマ行列も 4 次元と 7 次元に分解して考える。

$$\hat{\Gamma}_A = (\gamma_\alpha \otimes \mathbf{1}, \gamma_5 \otimes \Gamma_a) \quad (327)$$

$$\{\gamma_\alpha, \gamma_\beta\} = -2\eta_{\alpha\beta}, \quad (328)$$

$$\{\Gamma_a, \Gamma_b\} = -2\delta_{ab} \quad (329)$$

$\alpha, \beta \dots$  は  $SO(1, 3)$  について接空間の足で  $a, b \dots$  は  $SO(7)$  について接空間の足である。(322),(323),(329) より  $D_M(\tilde{\omega}) + T_M^{PQRS} \tilde{F}_{PQRS}$  は 4 次元部分と 7 次元部分に分解される。

$$\begin{cases} D_\mu + me_\mu^\alpha \gamma_\alpha \gamma_5, & M = \mu \\ D_m - \frac{1}{2} me_m^a \Gamma_a, & M = m \end{cases} \quad (330)$$

よって  $\delta_{SUSY} \Psi_M = 0$  の条件は、次の方程式になる。

$$(D_\mu + me_\mu^\alpha \gamma_\alpha \gamma_5) \chi = 0, \quad M = \mu \quad (331)$$

$$(D_m - \frac{1}{2} me_m^a \Gamma_a) \eta = 0, \quad M = m \quad (332)$$

4 次元部分については最大の対称性を仮定しているので解の数は 4 つである。したがって

$$\text{スーパーチャージの数} = ((331) \text{ の方程式の解の数}) \times ((332) \text{ の方程式の解の数}) \quad (333)$$

$$= 4 \times n \quad (334)$$

となり、4 次元の SUSY は  $\mathcal{N} = n$  である。

7 次元に限らずさまざまな次元の多様体において covariantly constant spinor は、次の表 3 のように知られている [43]。

表 3 特殊ホロノミーと covariantly const spinor

次元	ホロノミー	ジオメトリー	covariantly const spinor
$4k + 2$	$SU(2k + 1)$	Calabi-Yau	$(1, 1)$
$4k$	$SU(2k)$	Calabi-Yau	$(2, 0)$
$4k$	$Sp(k)$	HyperKahler	$(k + 1, 0)$
7	$G_2$	Exceptional	1
8	$Spin(7)$	Exceptional	$(1, 0)$

これらのホロノミーは特殊ホロノミーとよばれ、covariantly const spinor が必ず存在していることが分かる。表にはスピノルのカイラリティを分けて書いてある。さらにその covariantly const spinor  $\psi$  を用いると次のような  $p$ -form を構成することができる。

$$\Phi^{(p)} = (\bar{\psi}\Gamma_{M_1\dots M_p}\psi)dx^{M_1} \wedge dx^{M_2} \wedge \dots \wedge dx^{M_p} \quad (335)$$

これらの  $p$ -form については次の関係式がある。

$$\nabla_M \Phi^{(p)} = 0 \quad , \quad d\Phi^{(p)} = 0 \quad (336)$$

つまり covariantly const closed  $p$ -form である。この  $p$ -form は、ある決まった  $p$  でのみゼロでない値をもつ。

$$G_2 \quad : \quad (\bar{\psi}\Gamma_{M_1\dots M_p}\psi) \neq 0 \iff p = 0, 3, 4, 7 \quad (337)$$

$$Spin(7) \quad : \quad (\bar{\psi}\Gamma_{M_1\dots M_p}\psi) \neq 0 \iff p = 0, 4, 8 \quad (338)$$

$$SU(2n) \quad : \quad (\bar{\psi}\Gamma_{M_1\dots M_p}\psi) \neq 0 \iff p = 2k, \dots, n \quad (k = 0, \dots, n) \quad (339)$$

$G_2$  は 4 つ存在しているが非自明なのは  $p = 3, 4$  の 2 つである。そのうち  $p = 4$  は 7 次元の Hodge デュアルで  $p = 3$  と結びつくので、実際独立なのは  $p = 3$  の場合のみである。 $\Phi^{(4)} = *\Phi^{(3)}$  であり、 $d\Phi^{(4)} = 0$  なので  $\Phi^{(3)}$  は closed であり、coclosed でもある。

### 5.3 スムース $G_2$ コンパクト化

$G_2$  多様体に 11 次元 SUGRA をコンパクト化すると、4 次元の  $\mathcal{N} = 1$  の理論が得られることがわかったが、ここでは単連結でスムーズな  $G_2$  多様体 [33] の場合に、出てくる massless 粒子を調べることにする [34]。単連結であるので  $b_1 = 0$  である。Poincaré のデュアリティーより  $b_6 = 0$ 。よってゼロでない Betti 数は

$$b_2 = b_5 \quad (340)$$

$$b_3 = b_4 \quad (341)$$

で、トポロジ的に非自明なのは 2 つのみである。 $\mu, \nu, \dots$  を 4 次元の足、 $m, n, \dots$  を 7 次元の足として 11 次元の場を分けて書いてみる。

$$g_{M,N} \quad \rightarrow \quad (g_{\mu\nu}, g_{\mu m}, g_{mn}) \quad (342)$$

$$C_{MNL} \quad \rightarrow \quad (C_{\mu\nu\rho}, C_{\mu\nu m}, C_{\mu mn}, C_{mnl}) \quad (343)$$

ここで、 $b_1 = 0$  より  $g_{\mu m} = C_{\mu\nu m} = 0$  である。4 次元で massless として残るのは、7 次元部分については調和形式になっているようなものである。

$$C_{\mu\nu m} = B_{\mu\nu} \otimes \omega_m \quad (344)$$

$$C_{\mu mn} = A_\mu \otimes \omega_{mn} \quad (345)$$

$$C_{mnl} = C \otimes \omega_{mnl} \quad (346)$$

$\omega$  は調和形式を表す。このようなモードに Klein-Gordon 演算子を作用させても

$$0 = \square_{11}[(4 \text{ 次元部分}) \otimes (7 \text{ 次元部分})] \quad (347)$$

$$= \square_4(4 \text{ 次元部分}) \otimes (7 \text{ 次元部分}) + (4 \text{ 次元部分}) \otimes \square_7(7 \text{ 次元部分}) \quad (348)$$

$$= \square_4(4 \text{ 次元部分}) \otimes (7 \text{ 次元部分}) \quad (349)$$

となる。調和  $p$  形式の数は  $b_p$  によって与えられるので (付録 E)、結局つぎの massless モードが得られることになる。

$$\begin{cases} \text{abelian vector multiplet ; } b_2 \text{ 個} \\ \text{chiral multiplet ; } b_3 \text{ 個} \end{cases} \quad (350)$$

この中に含まれるフェルミオンは non-chiral である。それはもともとの 11 次元 SUGRA が non-chiral であるので、それを KK reduction してもやはり右、左は同じように存在する。しかしながら、以下の節で見ていくように、スムーズという制限をはずして特異性を考えると、そこからカイラルフェルミオンが生じてくることを Witten は示した [48][59]。したがって現象論の観点からも、特異性をもつ  $G_2$  多様体上で M 理論を考えることは興味深いことである。

## 5.4 Conical 特異性をもつ old $G_2$ 計量

conical 特異性をもつ計量は

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (0 \leq r \leq \infty) \quad (351)$$

の形で表される。 $d\Omega^2$  は何らかの 6 次元多様体上の計量でこれを base 多様体  $Y$  と呼び、 $Y$  上の cone という言い方をする。具体的には、次の 3 つの場合の cone 計量が知られている [45][46]。

表 4 知られている例とその基本性質

多様体 $X$	$Y$ 上の cone	つづれるサイクル	ダイナミカルモジュライ	多様体の数
$\mathbf{R}^3 \times \mathbf{S}^4$	$\mathbf{CP}^3$	$\mathbf{S}^4$	$\Phi$	1
$\mathbf{R}^3 \times \mathbf{CP}^2$	$SU(3)/U(1)^2$	$\mathbf{CP}^2$	$\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$	3
$\mathbf{R}^4 \times \mathbf{S}^3$	$\mathbf{S}^3 \times \mathbf{S}^3$	$\mathbf{S}^3$	ナシ	3

以下では特異点をスムーズにした形での  $G_2$  計量を見る。もちろん、スムーズにしたときのパラメータをゼロにもっていけば厳密に cone になる。

$\mathbf{CP}^3$  上の cone における計量

$$ds^2 = \left(1 - \frac{a^4}{r^4}\right)^{-1} dr^2 + \frac{1}{4} r^2 \left(1 - \frac{a^4}{r^4}\right) |du^i + \epsilon_{ijk} A_j u_k|^2 + \frac{1}{2} r^2 d\Omega_4^2 \quad (a \leq r \leq \infty) \quad (352)$$

$\sum u_i^2 = 1$  で  $d\Omega_4^2$  は  $\mathbf{S}^4$  の計量である。 $r \rightarrow \infty$  で

$$ds^2 \rightarrow ds_\infty^2 \simeq dr^2 + r^2 \left( \frac{1}{4} |du^i + \epsilon_{ijk} A_j u_k|^2 + \frac{1}{2} d\Omega_4^2 \right) \quad (353)$$

$u_i$  は  $\mathbf{S}^2$  上の座標であり、 $A_\mu^j$  は  $\mathbf{S}^4$  上の  $SU(2)$  ゲージ場である。括弧の中は、 $\mathbf{S}^4$  上の  $\mathbf{S}^2$  バンドルになっており、それが  $\mathbf{CP}^3$  を構成している。また、 $r \rightarrow a$  では座標の取り方がよくないので取り替える。

$$\frac{dr^2}{1 - \frac{a^4}{r^4}} \simeq \frac{dr^2}{\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \left(1 + \frac{a}{r}\right) \left(1 - \frac{a}{r}\right)} \simeq \frac{adr^2}{4(r-a)} \equiv dR^2 \quad (354)$$

これより

$$R = \sqrt{a(r-a)} \quad , \quad r^2 \left(1 - \frac{a^4}{r^4}\right) = 4a(r-a) = 4R^2 \quad (355)$$

したがって  $r \rightarrow a$  での計量は

$$ds^2 \rightarrow ds_{r \rightarrow a}^2 \simeq dR^2 + R^2 (|du^i + \epsilon_{ijk} A_j u_k|^2) + \left( \frac{1}{2} a^2 + R^2 \right) d\Omega_4^2 \quad (356)$$

となり、 $R \rightarrow 0$  でもつぶれないで残っている  $S^4$  があることが第 3 項から分かる。その大きさは空間を滑らかにしたときの deformation パラメータ  $a$  になっているので、モジュライ空間で厳密に cone になる点つまり  $a = 0$  ではこのサイクルがつぶれる。このサイクルのことを表 4 にはつぶれるサイクルと書いている。ここで注意するのは、つぶれるとっているのは計量のモジュライパラメータ  $a$  の変化でつぶれるのであって、 $r \rightarrow a$  でつぶれているのではないということである。 $u_i$  は  $S^2$  上の座標であったことを思い出すと第 1, 2 項は  $S^2$  を埋めて  $\mathbb{R}^3$  になっていることが分かる。したがって全体のトポロジーは  $\mathbb{R}^3 \times S^4$  になっている。

$SU(3)/U(1)^2$  上の cone における計量

$$ds^2 = \left( 1 - \frac{a^4}{r^4} \right)^{-1} dr^2 + \frac{1}{4} r^2 \left( 1 - \frac{a^4}{r^4} \right) |du^i + \epsilon_{ijk} A_j u_k|^2 + \frac{1}{2} r^2 d\Sigma_{CP^2}^2 \quad (a \leq r \leq \infty) \quad (357)$$

$\sum u_i^2 = 1$  で  $d\Sigma_{CP^2}^2$  は  $CP^2$  上の計量である。やはり  $u_i$  は  $S^2$  の座標であり、 $A_\mu^j$  は  $CP^2$  上の  $SU(2)$  ゲージ場である。括弧の中は  $CP^2$  上のファイバーになっており、それが  $SU(3)/U(1)^2$  を構成している。 $r \rightarrow \infty$  での振る舞いは次のようになる。

$$ds^2 \rightarrow ds_\infty^2 \simeq dr^2 + r^2 \left( \frac{1}{4} |du^i + \epsilon_{ijk} A_j u_k|^2 + \frac{1}{2} d\Sigma_{CP^2}^2 \right) \quad (358)$$

(354) と同じ座標の変換をして  $r \rightarrow a$  を見てみると

$$ds^2 \rightarrow ds_{r \rightarrow a}^2 \simeq dR^2 + R^2 (|du^i + \epsilon_{ijk} A_j u_k|^2) + \left( R^2 + \frac{1}{2} a^2 \right) \Sigma_{CP^2}^2 \quad (359)$$

となり、 $R \rightarrow 0$  でもつぶれないで残っている  $CP^2$  があることが第 3 項から分かる。ここでもその大きさはパラメータ  $a$  で表されているので  $a = 0$  ではこのサイクルがつぶれる。また、第 1, 2 項は同じように  $S^2$  を埋めて  $\mathbb{R}^3$  になっていることが分かる。したがって全体のトポロジーは  $\mathbb{R}^3 \times CP^2$  になっている。

$S^3 \times S^3$  上の cone における計量

$$ds^2 = \left( 1 - \frac{a^3}{r^3} \right)^{-1} dr^2 + \frac{1}{9} r^2 \left( 1 - \frac{a^3}{r^3} \right) \left( \sigma_i - \frac{1}{2} \Sigma_i \right)^2 + \frac{1}{12} r^2 \Sigma_i^2 \quad (360)$$

$\Sigma_i, \sigma_i$  は左不変な 1 形式で、次のように定義される。

$$g = e^{i\frac{\psi}{2}\tau^3} e^{i\frac{\theta}{2}\tau^1} e^{i\frac{\phi}{2}\tau^3} \in SU(2) \quad (361)$$

$$\frac{i}{2} \sigma^a \tau^a = g^{-1} dg \quad (362)$$

$$(\sigma^1 + i\sigma^2) = e^{i\phi} (d\theta - i \sin \theta d\psi), \quad \sigma^3 = d\phi + \cos \theta d\psi \quad (363)$$

$$d\sigma^a = \frac{1}{2} \epsilon^{abc} \sigma^b \wedge \sigma^c \quad (364)$$

$\tau_i$  はパウリ行列。 $\Sigma$  についても同様に定義する。 $SU(2)$  の左からの積  $g \rightarrow h_L g$  に対してこれは不変であることが (362) より分かる。

$r \rightarrow \infty$  のもとでは

$$ds^2 \rightarrow ds_\infty^2 \simeq dr^2 + r^2 \frac{1}{9} ((\sigma_i)^2 + (\Sigma_i)^2 - \sigma_i \Sigma_i) \quad (365)$$

となり cone 計量になっている。

次に  $r \rightarrow a$  での振る舞いを見るために座標を取り直す。

$$\frac{dr^2}{1 - \frac{a^3}{r^3}} \simeq \frac{adr^2}{3(r-a)} \equiv dR^2 \quad (366)$$

これより

$$R = \sqrt{\frac{4a}{3}(r-a)}, \quad \frac{1}{9}r^2 \left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right) = \frac{a}{3}(r-a) = \frac{R^2}{4} \quad (367)$$

$$ds^2 \rightarrow ds_{r \rightarrow a}^2 \simeq dR^2 + R^2 \left( \frac{1}{4}(\sigma_i + \frac{1}{2}\Sigma_i)^2 + \frac{3}{2}\Sigma_i^2 \right) + \frac{1}{12}a^2\Sigma_i^2 \quad (368)$$

$R \rightarrow 0$  でもつぶれないで残っている  $S^3$  があることが第 3 項から分かる。その大きさは空間を滑らかにしたときの deformation パラメータ  $a$  になっているので  $a = 0$  でこれはつぶれる。

計量が  $\Sigma_i, \sigma_i$  それぞれについて足し上げたような形でなく、cross term が入っていることは、次のように考えることができる。 $S^3 \times S^3$  に直積の計量を入れるとジオメトリの対称性は大きなものになるが、cross term を入れることですこしねじって (twist するという) 対称性を落としたものが今の計量である。この例の様に  $S^3$  が 2 つ入っていると、次のような面白いことがおこる [36]。

$S^3 \times S^3$  上の cone なので、トポロジーとしては  $S^3 \times \tilde{S}^3 \times \mathbf{R}_+$  である。 $S^3$  を  $\mathbf{R}_+$  で埋めて  $\mathbf{R}^4$  にできるが、その方法は 2 つある。 $S^3 \times \mathbf{R}^4$  と  $\tilde{S}^3 \times \mathbf{R}^4$  である。これを  $Z_N$  などで割ることを考えると、2 つのケースが異なってくる。

$$S^3 \times \tilde{\mathbf{R}}^4 \mapsto S^3 \times \frac{\tilde{\mathbf{R}}^4}{Z_n} \quad (369)$$

$$\tilde{S}^3 \times \mathbf{R}^4 \mapsto \frac{\tilde{S}^3}{Z_n} \times \mathbf{R}^4 \quad (370)$$

$\frac{\mathbf{R}^4}{Z_n}$  は Taub-NUT 空間と呼ばれるもので、原点に特異点を持ち  $N$  枚の D6 ブレーンを表す。一方  $\frac{\tilde{S}^3}{Z_n}$  はレンス空間と呼ばれるもので、特異点はなく RR フラックスを持つ  $S^2$  (モノポール) を表すものである。7 節で見ていくが、この違いが M 理論でのフロップ [36] と TypeIIA での Vafa のラージ  $N$  デュアリティーを関係付けるときに重要になる。

## 6 M 理論のダイナミクス

この節では、11 次元 SUGRA を  $\mathbf{R}^4 \times X_i$  上で (以後  $X_i$  は  $G_2$  多様体を示す) 見ていく [35]。前節で見たように  $G_2$  多様体に M 理論をコンパクト化すると covariant const spinor が 1 つ存在するので、低エネルギー有効理論は 4 次元  $\mathcal{N} = 1$  の理論になる。5 節でまとめた計量には、特異性を表すパラメータ  $a$  が入っていたが、その揺らぎが M 理論のダイナミクスの理解に重要な役割を果たす。以下では、この特異性により生じる新たな性質に注目していく。M 理論を SUGRA と近似できるのは、M 理論の基本的なスケール ( $\alpha'_M$  と書く) に対して、曲率が十分に小さい場合、すなわち曲がり具合が緩やかな場合である。今の場合 conical 特異性を持っていて、その特異性は  $a$  によって表されていたので  $\alpha'_M \ll a$  を満たすとき古典近似が有効である。しかしながら、 $\alpha'_M \sim a$  の場合にはもはや古典近似は有効でなく、量子効果を考慮しなければならない。このような領域で何が起るかを知るには正則性を用いることが有効で、実際以下ではこの正則性を用いて M 理論の  $G_2$  多様体ダイナミクスを調べる。

## 6.1 $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^3$ , $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{CP}^2$ に共通な性質

ここでは最初の2つのケース (352), (357) に共通の議論をする。いずれも4次元多様体上の  $\mathbb{R}^3$  バンドル [45] になっており、多くの共通の性質を持つ [35]。

### 6.1.1 ダイナミカルなモジュライ

計量 (352) 式に対して、パラメータ  $a$  を動かす揺らぎを考えたいのであるが、後の2つのケースについても全く同様な議論ができるので、次のような計量で考えることにする。

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \left(\frac{a}{r}\right)^n} + r^2 \left(1 - \left(\frac{a}{r}\right)^n\right) (\dots) + r^2 (\dots) \quad (371)$$

この計量に対して、 $a$  の微小変位を  $\delta g_{ij}$  と表すことにする。この揺らぎが4次元理論から見てダイナミカルなものかを見るために、ノルムが有限かどうかを調べる。

$$|\delta g|^2 = \int_X d^7x \sqrt{g} g^{ii'} g^{jj'} \delta g_{ij} \delta g_{i'j'} \quad (372)$$

$r \rightarrow \infty$  での振る舞いは

$$\delta g_{ij} \sim \mathcal{O}(r^{2-n}) \quad g^{ij} \sim \mathcal{O}(r^{-2}) \quad d^7x \sqrt{g} \sim \mathcal{O}(r^6 dr) \quad (373)$$

なので

$$|\delta g|^2 = \int r^{6-2n} \sim \mathcal{O}(r^{7-2n}) \quad (374)$$

のオーダーとなる。したがって、 $n \geq 4$  ならば有限、 $n < 4$  ならば発散することが分かる。(352), (357) では  $n = 4$  で有限の場合である。このような揺らぎは有限のエネルギーで生じることができ、4次元有効理論からは、スカラー場として見なせる。

### 6.1.2 対称性

M 理論を  $G_2$  多様体にコンパクト化したときのダイナミクスを調べたいのであるが、そのとき対称性と正則性が重要な役割を果たす。ここではそのうちの対称性について調べていく。対称性には大きく分けて2種類ある。一つは計量からくる幾何学的な対称性で、もうひとつは 3form-field (以後 C-field と呼ぶ) からくる対称性である。

**幾何学的な対称性** まずは幾何学的な対称性の議論をする。 $X$  の対称性はその向き (orientation) を保つものと、そうでないものがある。 $X$  が向きを変えるときには、basis になっている  $Y$  の向きも変わらなければならない。

向きを変えるような対称性は、4次元有効理論では R-symmetry と解釈できる。その理由を理解するために、 $G_2$  の構造を保ち  $X$  の向きを変えるようなオーダー2の対称性のみを取り出して考えてみる。5節で見たように、11次元 SUGRA には gravitino  $\Psi$  があった。これを4次元部分  $\psi^{(4)}$  と7次元部分  $\eta^{(7)}$  に分ける。

$$\Psi = \psi^{(4)} \otimes \eta^{(7)} \quad (375)$$

11次元のスピンルは Majorana スピンルで実である。これを用いて、4次元スピンルはカイラリティーが異なるものに対して、反対の変換を示したい (R-symmetry はカイラリティーが逆のものに対して

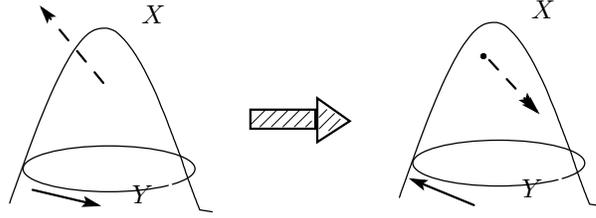


図 19: 向きを変える  $X$  の変換

反対の位相変換を行なう対称性)。あるスピノルについての位相変換が与えられたとき、逆のカイラリティーをもつスピノルの変換性は複素共役をとったものである。

今考えているのは、 $G_2$  多様体の向きを変えるオーダー 2 の変換 (これを  $T$  と書く) である。 $\eta^{(7)}$  に 2 回作用させると  $X$  の向きを 2 回変えるのでスピノルは  $-1$  を出す。

$$T^{(7)} \cdot T^{(7)} \eta^{(7)} = -\eta^{(7)} \quad (376)$$

よってその固有値は  $\pm i$  である。

$$T^{(7)} \eta^{(7)} = \pm i \eta^{(7)} \quad (377)$$

この変換性を考慮して、11 次元の Majorana スピノルについての変換を行なう。

$$T^{(11)} \Psi = T^{(4)} \psi^{(4)} \otimes T^{(7)} \eta^{(7)} = T^{(4)} \psi^{(4)} \otimes \pm i \eta^{(4)} \quad (378)$$

実の  $\Psi$  を変換した後もまた実なので、左辺は実である。これを満たすためには  $\eta^{(7)}$  から出た  $\pm i$  を打ち消すように  $T^{(4)} \psi^{(4)}$  は変換しなければならない。よって  $T^{(4)} = ai$ 、 $a$  は何らかの実数。さらに  $T^{(11)}$  を二回行なったとき  $(T^{(11)})^2 \Psi = \Psi$  となることから、 $a$  は  $\pm 1$  でなければならない。

$$T^{(4)} \psi^{(4)} = \pm i \psi^{(4)} \equiv e^{i\alpha} \psi^{(4)} \quad (379)$$

さらに、カイラリティーが逆のものについての変換を知るために  $\Psi^* = (\psi^{(4)})^* \otimes (\eta^{(7)})^*$  に対して  $T^{(11)}$  を行なう。

$$\begin{aligned} T^{(11)} \Psi^* &= T^{(4)} (\psi^{(4)})^* \otimes T^{(7)} (\eta^{(7)})^* = T^{(4)} (\psi^{(4)})^* \otimes \mp i (\eta^{(7)})^* \\ &\equiv \mp i e^{i\alpha} (\psi^{(4)})^* \otimes (\eta^{(7)})^* \end{aligned} \quad (380)$$

一方で  $(T^{(11)} \Psi^*)^* = T^{(11)} \Psi$  なので (378), (380) より

$$e^{i\alpha} = e^{-i\alpha} \quad (381)$$

となり、カイラリティーが逆のものは反対符号をもった位相変換をする。したがって R-symmetry と見なせる。

一般的に R-symmetry を考えるときには、カイラル superfield  $\Phi_i$  に対して

$$\Phi_i = e^{i\alpha Q_i} \Phi_i \quad (382)$$

と変換させる。 $Q_i$  は  $\Phi$  の R チャージ。このとき superpotential が次のように変換すれば  $\int d^2\theta$  からくる寄与と打ち消して R-symmetry 不変になる。

$$W(\Phi_i) \rightarrow W(\Phi'_i) = W(e^{i\alpha Q_i} \Phi_i) = e^{i2\alpha} W(\Phi_i) \quad (383)$$

今の場合  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  と選んだ場合の R-symmetry に対応していて、この変換のもとで superpotential がマイナスを出す。一方で向きを変えない  $X$  の対称性は、今見たオーダー 2 の変換を伴わないので R-symmetry ではない。実際の計量 (352),(357) がもつ R-symmetry に次の変換がある。

$$\tau : u \rightarrow -u \quad (384)$$

この変換では  $a$  は不変であるが、これは 4 次元有効理論では  $|\Phi|$  が不変であることに対応する。なぜなら、後でみる (389) でカイラル superfield  $\Phi$  は与えられ、 $a$  はその大きさ  $V \sim a^4$  を与えるからである。よって  $\Phi \rightarrow e^{i\alpha}\Phi$  と変換する ( $\alpha$  は何らかの定数)。これも後で見ることであるが、有効理論にはさらに C-field のゲージ変換からくる  $U(1)$  対称性がある。これら 2 つの変換に対して、 $\Phi$  の電荷を次のように与えれば 2 つの変換を同時に施した時に、 $\Phi$  を動かさないようにできる。

$$\begin{cases} U(1)_R & : \quad \Phi \rightarrow e^{i\frac{\pi}{2}}\Phi \\ U(1)_C & : \quad \Phi \rightarrow e^{-i\frac{\pi}{2}}\Phi \end{cases} \quad (385)$$

これらは有効理論がもつ対称性であり、これらの変換を同時に行なったとすると

$$\int d^2\theta W(\Phi) = \int d^2\theta e^{i2\frac{\pi}{2}} W(e^{i\frac{\pi}{2}} e^{-i\frac{\pi}{2}}\Phi) = - \int d^2\theta W(\Phi) \quad (386)$$

が成立する。一つ目の等号は理論が 2 つの変換で不変という性質によるものである。したがって有効理論の superpotential はゼロになる。このことは、 $X$  の 3 次のコホモロジーがゼロであることに矛盾していない。 $X$  は連続的に空間を縮めていくと“ボルト”の  $S^4$  又は、 $CP^2$  になるが、これらの 3 次の Betti 数は付録 E よりゼロである。これより  $X$  には membrane インスタントンが巻きつく 3 サイクルがないので、superpotential が生み出されることはない。

C-field からの対称性 次に C-field からくる対称性について見ていく。通常のゲージ理論と同様に、大域的対称性を考えることができる。無限遠での場を変えない生成元によって、生成されるゲージ変換が大域的対称性である。M 理論において C-field の変換は 2 形式  $\Lambda$  によって  $\delta C = d\Lambda$  と表せるので、大域的対称性の生成元は無限遠 (すなわち  $Y$ ) で  $d\Lambda = 0$  を満たすものと言える。つまり調和 2 形式。4 次元有効理論から見ると、この C-field からくる大域的対称性は  $H^2(Y; U(1)) \equiv K$  と表すことができる。ではこの  $K$  のどんな部分群が真空を不変にするだろうか？それは  $d\Lambda = 0$  が  $Y$  だけでなく  $X$  全体で成り立つことを意味する。よってこのような部分群  $L$  は  $L \equiv H^2(X; U(1))$  となる。では自発的に破れる対称性に対応する生成元はどうかけるか？ ( $K$  の元だが  $L$  の元でない  $\Lambda$ ) それを表すために  $\int_{R^3} \delta C$  という量に注目する。 $\delta C = d\Lambda$  より

$$\int_{R^3} d\Lambda = \int_{R^3} \delta C = \int_{S^2} \Lambda \quad (387)$$

$S^2$  は  $R^3$  の無限遠での球面であり、 $\Lambda$  が  $L$  の元ならば明らかに左辺はゼロとなる。一方それ以外はゼロでないので、結局  $K$  の元でかつ

$$\int_{S^2} \Lambda \neq 0 \quad (388)$$

を満たすものが自発的に破れた生成元である。このときの  $\delta C$  はゴールドストーンボソンと考えられ、これは  $a$  に対する揺らぎによって出てきたスカラーと組んで、カイラル superfield のスカラー成分をつくる。

## 6.2 $R^3 \times S^4$ 上の M 理論ダイナミクス

ダイナミクス 次にカイラル superfield  $\Phi$  のダイナミクスについて考える [35]。  $\Phi$  の形としては

$$\Phi = V e^i \int_{R^3} C \quad (389)$$

と考える。ここで  $V$  は  $X$  の center (ボルト) での  $S^4$  の体積で  $V \sim a^4$ 。既に見たように、幾何学的変換 (384) で  $|\Phi|$  は変換しない。また  $\Phi$  の偏角も以下で見ると変化しないので、この対称性は低エネルギーダイナミクスには効いてこない。さらに  $\mathbf{R}^4 \times X$  の  $\mathbf{R}^4$  を反転させるパリティ対称性があり、この対称性に対して  $\Phi \rightarrow \bar{\Phi}$  と変換する。11 次元  $\mathbf{R}^4 \times X$  のパリティ変換で 3-form  $C$  は  $C \rightarrow -C$  と変換するが、一方で  $\mathbf{R}^4$  のパリティ変換では  $\int_{\mathbf{R}^3}$  は変化しないので

$$\Phi = V e^{-i \int_{\mathbf{R}^3} C} \rightarrow V e^{i \int_{\mathbf{R}^3} (-C)} = \bar{\Phi} \quad (390)$$

となり、うまいこと 4 次元場  $\Phi$  のカイラリティーが変化するようなものになっている (これは  $\int_{\mathbf{R}^3} C$  が  $e$  の肩にあることの原因)。また、 $G_2$  多様体の  $\mathbf{R}^3$  のパリティ変換 (384) では、 $\int_{\mathbf{R}^3} \rightarrow -\int_{\mathbf{R}^3}$  と変換するので

$$\Phi = V e^{i \int_{\mathbf{R}^3} C} \rightarrow V e^{(-1)^2 i \int_{\mathbf{R}^3} C} = \Phi \quad (391)$$

となり、自明に作用している事が分かる。

したがって、M 理論のダイナミクスを理解する上で重要になるのが C-field からの対称性である。 $Y = \mathbf{CP}^3$  の例では  $H^2(Y; U(1)) = U(1)$  であるので対称性の群は  $K = U(1)$  である。一方で  $X$  は  $M = S^4$  に縮めることができ、 $H^2(S^4; U(1)) = 0$  であるので  $K$  は自発的にすべての対称性を壊す。また  $M$  の 2 次のホモロジー群は自明なので、 $Y$  の 2 次のホモロジー群は fibration  $Y \rightarrow M$  のファイバー  $S^2$  によって生み出される。 $K$  の生成元はしたがって

$$\int_{S^2} \Lambda \neq 0 \quad (392)$$

を満たす 2-form から得られる。前節で説明したように、このような  $\Lambda$  によって生み出される対称性は  $\int_{\mathbf{R}^3} C$  の値をシフトさせる。それゆえに、 $\Phi$  に次のように作用する。

$$\Phi \rightarrow e^{i\alpha} \Phi \quad (393)$$

これは  $K$  の自発的破れを明らかに示している。

SUGRA は  $|\Phi|$  が大 (つまり  $V$  が大) における信頼できるダイナミクスを与える。考えたいことは、対称性と正則性をつかって  $|\Phi|$  が小さい量子領域で何か起こるかを調べることである。この例では非常に明らかな考察ができる。無限遠で“回転”として作用する大域的対称性  $K = U(1)$  があるので、真空のモジュライ空間はジーンズゼロでなくてはならない。

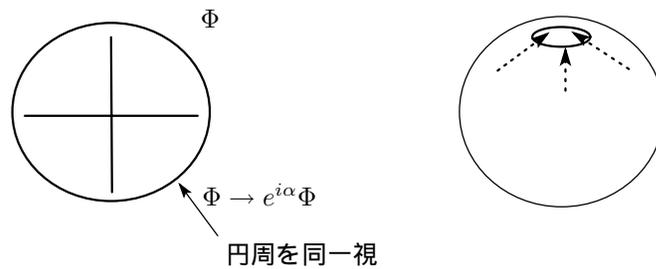


図 20: 真空のモジュライ空間

$\Phi$  が一般的な値のときは、

$$\Phi \rightarrow e^{i\alpha} \Phi \quad (394)$$

は破れた  $U(1)$  であるが、 $V \rightarrow 0$  では  $\Phi = 0$  となり、(394) 式が自明に満たされる。これは  $U(1)$  対称性が回復すると解釈できる。

### 6.3 $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{C}P^2$ 上の M 理論ダイナミクス

トライアリティの 2 番目の例として  $Y = SU(3)/T$  を考える [35]。ここで  $T = U(1) \times U(1)$  は  $SU(3)$  の maximal torus である。maximal torus とは、半単純リー群  $G$  の部分群で、そのリー代数がちょうど  $G$  の Cartan 部分代数になっているものを言う。

等質空間  $G$  を Lie 群、 $H$  を  $G$  の任意の部分群とすると、剰余空間  $G/H$  は微分構造を持ち多様体になり、これを等質空間という。その次元は  $\dim G/H = \dim G - \dim H$  である。具体的には、リー群  $G$  をもってきてその元  $g \in G$  に対して、 $h \in H$  により

$$g \simeq gh \quad (395)$$

の同一視を行うことで構成される。このような空間は明らかに  $G$  の対称性をもつ。 $g_0 \in G$  を左から作用させると、この等質空間は

$$g' \simeq g'h, \quad (g' \equiv g_0 \cdot g) \quad (396)$$

になり、 $g' \in G$  なので、作用させる前の空間と同じである。この他にもまだ等質空間の対称性はある。今度は右から  $g_0 \in G$  を作用させてみる。

$$gg_0 \simeq ghg_0 \iff g' \simeq g'g_0^{-1}hg_0 \quad (397)$$

ここで  $g' \equiv gg_0$  とした。これが前と同じ同一視になるためには

$$g_0^{-1}hg_0 \in H \quad (398)$$

であればよい。この関係を満たす  $g_0$  のことを、 $H$  を centralize する  $G$  の元という。このような元の中には明らかに  $H$  の元が含まれるが、等質空間において  $H$  の元というのは “1” に対応するので、これは自明な対称性である。よって  $H$  を centralize する対称性で自明でないものは  $H$  に含まれない  $G$  の元である。

これから見る  $SU(3)/T$  についてもまた幾何学的対称性から見ていく。興味深い非自明な対称性としては、 $U(1)^2$  を centralize する  $SU(3)$  の outer automorphism である。Weyl 群は Cartan 部分代数の基底に対する変換群であることを思い出すと、 $T$  を centralize する群はまさに Weyl 群  $W$  である。 $SU(3)$  の Weyl 群は 3 つの元の置換群  $\Sigma_3$  であり、以後トライアリティと呼ぶことにする。

$X$  がもつ幾何学的な対称性は (384) であり、 $Z_2$  である。よって  $X$  を決めてしまうと  $Y$  が持っていた対称性  $\Sigma_3$  は  $\Sigma_2 = Z_2$  に破れることが分かる。 $\Sigma_3$  の破れ方で 3 つの異なる多様体 (これらを  $X_1, X_2, X_3$  と書く) ができる。

3 つの多様体はいずれも  $Y$  で  $\Sigma_3$  を持っているが、 $X$  全体では非対称になっており、その非対称のパターンが 3 つあることが分かる (図 21 参照)。

これらの違いを具体的に表現するために、C-field からくる対称性を見ていく。 $U(1)$  係数をもつ 1,2 次のコホモロジーはゼロなので

$$H^2(Y; U(1)) = H^1(T; U(1)) = U(1) \times U(1) \quad (399)$$

一方で、 $X$  は  $\mathbb{C}P^2$  に可縮なので  $H^2(\mathbb{C}P^2; U(1)) = U(1)$  である。それゆえ、C-field からくる大域的対称性  $U(1) \times U(1)$  は自発的に  $L = U(1)$  に破れる。それでは、 $X_i$  においてどんな部分群が残るか?  $U(1) \times U(1)$

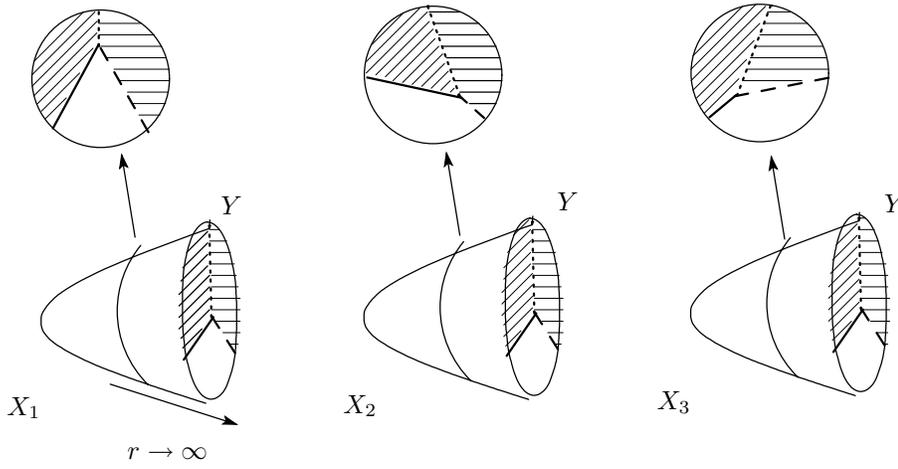


図 21: 3つの可能な多様体の概念図

の生成元を  $\alpha, \beta$  とすると任意の元は

$$U(1) \times U(1) : g = e^{i\phi\alpha} \cdot e^{i\theta\beta} \quad (400)$$

と書ける。破れた後で残る生成元は、一般にこれらの線形結合で書ける。また  $X_i$  で残る生成元はそれぞれ違うので、それらを

$$w_1 = a_1\alpha + b_1\beta \quad (401)$$

$$w_2 = a_2\alpha + b_2\beta \quad (402)$$

$$w_3 = a_3\alpha + b_3\beta \quad (403)$$

と書くことにする。これらは  $\Sigma_3$  の変換で互いに入れ替わるので

$$w_1 + w_2 + w_3 = 0 \quad (404)$$

の関係を満たすことが分かる。各  $X_i$  には壊れた  $U(1)$  があり、それに対応してゴールドストンボソンが生じる。これは1つめの例と同じで、計量の揺らぎと組んでカイラル superfield のスカラーを構成する。 $X_i$  ごとに壊れた  $U(1)$  は違っているので、 $X_i$  ごとに違ったカイラル superfield  $\Phi_i$  が存在する。

$$\Phi_i = V e^{i \int_{R^3} C(w_i)} \quad (405)$$

また、 $\Sigma_3$  のうちで壊れていない  $Z_2$  は、それぞれの  $X_i$  における作用という意味で、

$$\tau_i ; u \rightarrow -u \quad (406)$$

と書くことにする。この変換は  $\Phi_i$  に対して

$$\Phi_i = V e^{i \int_{R^3} C} \rightarrow V e^{(-1)^2 i \int_{R^3} C} = \Phi_i \quad (407)$$

と自明に作用するので、その位相部分であるゴールドストンボソンにも自明に作用する。それゆえ  $\tau_i$  は破れた対称性をそのまま保つが、破れていない対称性に対しては

$$\tau_i(w_i) = -w_i \quad (408)$$

と作用する。

ダイナミクスとその仮定 3つの古典的時空  $X_i$  において破れていない対称性が異なっていることは、相転移なしにスムーズに結ばれることはないことを意味している。そこで相転移を通してこれらが連続的に結ばれると考えていく。理論としては、真空のブランチを3つ持つものでなくてはならない。そのうちの  $i$  番目のブランチ ( $i = 1, 2, 3$ ) では1つのカイラル superfield  $\Phi_i$  が存在し、3つのブランチは  $\Sigma_3$  のもとで入れ替わる。さらに、大域的  $U(1) \times U(1)$  対称性があり、自発的に  $U(1)$  に対称性が破れる。 $\Sigma_3$  は  $U(1) \times U(1)$  に対して、 $SU(3)$  の Weyl 群のように作用する。そして、破れていない対称性の生成元は全部足してゼロになる。

有効理論でこれらの関係を再現することを考える。そのために superpotential を次のように取ってみる。

$$W(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) = \lambda \Phi_1 \Phi_2 \Phi_3 \quad (409)$$

これが  $\Sigma_3$  の下で不変なのは明らか。  $K = U(1) \times U(1)$  の下では  $\Phi_i \rightarrow e^{i\theta_i} \Phi_i$ ,  $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 0$  と変換するので、これについても不変である。また古典近似において真空は単に  $W$  の極値で与えられるので

$$0 = \Phi_2 \Phi_3 = \Phi_3 \Phi_1 = \Phi_1 \Phi_2 \quad (410)$$

より  $\Sigma_3$  によって置換される3つのブランチが存在する。 $i$  番目のブランチにおいて  $\Phi_i$  は nonzero で他の  $\Phi$  は massive である。これらの3つのブランチは原点の特異点でつながっている。したがって、ひとつのブランチから他のブランチへ相転移を通して移る事が再現できている。

$\Phi_1 \neq 0$  のブランチでは、破れていない  $U(1)$  は

$$\Phi_1 \rightarrow \Phi_1, \quad \Phi_2 \rightarrow e^{i\theta} \Phi_2, \quad \Phi_3 \rightarrow e^{-i\theta} \Phi_3 \quad (411)$$

と変換するので、対角的行列  $w_1 = \text{diag}(0, 1, -1)$  によって生成される。その他のブランチでの生成元  $w_2, w_3$  も同様に考えられて

$$w_1 + w_2 + w_3 = 0 \quad (412)$$

が成り立つことが分かる。さらに  $\Sigma_3$  の非自明な元は、たとえばファーストブランチでは  $\Phi_2$  と  $\Phi_3$  を入れ替えるものである。これは  $w_1$  を  $-w_1$  にマップするので (408) を再現している。

## 7 M理論による Vafa のデュアリティー

この節では、2節で説明した Vafa のラージ  $N$  デュアリティーを、M理論に持ち上げた場合の例を見ていく [35][36]。Vafa のラージ  $N$  デュアリティーは deformed conifold のバックグラウンドの他に RR フラックスが入っていた。M理論にこのバックグラウンドを持ち上げると、フラックスは KK モノポールのように 11次元の重力に吸収され、重力のみを用いて議論することができ非常に都合がよくなる。

### 7.1 トライアリティー

Vafa のデュアリティーは、(360) 上での M理論のダイナミクスにより調べる事ができる。この例では幾何学的な対称性が非常に重要となる。計量は2つの左不変1形式で書かれているので明らかに  $SU(2)^2$  対称性を持つ。さらに右からの積に対しても、2つの1形式  $\sigma_i, \Sigma_i$  が同じように変換すれば、計量は不変であることが分かるので、 $SU(2)^3$  対称性を持つことが分かる。また (357) の場合と同様にトライアリティー  $\Sigma_3$  を持つが、その対称性を見やすくするために、次のような量を導入する。

$a, b, c$  を  $SU(2)$  の3つの元とし、次の関係式を満たすものとする。

$$abc = 1 \quad (413)$$

$SU(2)^3$  の作用はそれぞれ次のように定義する。

$$a \rightarrow uav^{-1} \quad b \rightarrow vaw^{-1} \quad c \rightarrow wau^{-1} \quad (414)$$

ここで  $u, v, w \in SU(2)$ 。これらを用いて (360) を書き換えると、

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \left(\frac{a}{r}\right)^3} + \frac{r^2}{72} \left(1 - \left(\frac{a}{r}\right)^3\right) (2da^2 - db^2 + 2dc^2) + \frac{r^2}{24} db^2 \quad (415)$$

となる。ここで  $da^2 \equiv -Tr(a^{-1}da)^2$  とした。これは 3 つの  $SU(2)$  対称性を対等の形で書き換えたものであり、もとの形に戻すには

$$\sigma_i = -\frac{i}{2} Tr(\tau_i a^{-1} da) \quad , \quad \Sigma_i = -\frac{i}{2} Tr(\tau_i b d(b)^{-1}) \quad (416)$$

と置けばよい。ここで  $\tau_i$  はパウリ行列であり、 $c$  については条件式 (414) から  $c = b^{-1}a^{-1}$  である。このような  $a, b, c$  に対して、次のトライアリティ変換が定義できる。 $a, b, c$  に対する巡回置換  $\beta$

$$\beta : (a, b, c) \rightarrow (b, c, a) \quad (417)$$

及びフリップと呼ばれる変換  $\alpha$

$$\alpha : (a, b, c) \rightarrow (c^{-1}, b^{-1}, a^{-1}) \quad (418)$$

を定義する。これら 2 つの変換は次の関係をもち、トライアリティ群  $\Sigma_3$  を生成する。

$$\alpha^2 = \beta^2 = 1 \quad , \quad \alpha\beta\alpha = \beta^{-1} \quad (419)$$

この変換を具体的に (415) に作用させれば分かるように、厳密にトライアリティがあるのは  $r \rightarrow \infty$  (又は  $a \rightarrow 0$ ) であって、その他では  $\Sigma_2$  に破れている。よって 3 つの異なった  $X$  (それを  $X_1, X_2, X_3$  と書く) が存在する。

次に  $a$  の揺らぎについて見てみる。(415) は (371) において  $n = 3$  とした場合であり、そのノルムは発散してしまい、4次元有効理論からはカップリング定数として解釈すべきものになる。そういった意味でこれは理論のモジュライであり、真空のモジュライと解釈できた (352)、(357) とは大きく異なる点である。さらに  $X, Y, S^3$  いずれも 2 次のコホモロジーがゼロなので、C-field からの対称性はない。よって  $\int C$  は定数で、4次元有効理論からは  $\theta$  として解釈できる。これらは合わせて複素パラメータになる。また真空をパラメトライズする量、つまりダイナミカルなカイラル superfield がないということは、真空が唯一であると言える

今の場合  $Y = S^3 \times S^3$  であるが、これを  $SU(2)^3/SU(2)$  と見ることにする。つまり  $(g_1, g_2, g_3) \in SU(2)^3$  に対してつぎの同一視を行ったものとする。

$$(g_1, g_2, g_3) \simeq (g_1 h, g_2 h, g_3 h) \quad (420)$$

$SU(2)$  の  $i$  番目のコピーに対応する 3 サイクルを  $D_i$  と書くことにすると、 $Y$  の 3 次の Betti 数は (659) より 2 なので、 $D_i$  は何か一つの関係式によって結ばれることになる。 $Y$  におけるトライアリティを考慮すると、この関係式は次のようになる。

$$D_1 + D_2 + D_3 = 0 \quad (421)$$

(414) で定義した  $a, b, c$  でこれを記述するなら ( $a = g_2 g_3^{-1}, b = g_3 g_1^{-1}, c = g_1 g_2^{-2}$ )、 $D_1$  は  $a = 1 = bc$  と書ける。他はこれを巡回置換したものである。

次に、この  $Y$  で cone をつくった  $X$  について見ていく。 $X_i$  は  $r$  が小さいところで見ると、 $\mathbb{R}^4 \times S^3$  なので 3 次の Betti 数は (656) より 1 である。それゆえに  $X_i$  のホモロジーにおいて  $D_i$  はもう一つの関係式を

もつ。  $X_i$  は  $SU(2)$  の  $i$  番目のコピーを埋めることで得られるので、その関係式は  $D_i = 0$  である。よって  $X_i$  におけるホモロジーは、  $D_{i-1} = -D_{i+1}$  の関係をもつ  $D_{i-1}$  と  $D_{i+1}$  によって生成される。  $(g_1, g_2, g_3)$  を用いて  $X_i$  を記述するには、中心でつづれるサイクルを埋めて  $\mathbb{R}^4$  にすればよい。つまり  $g_i$  が  $\mathbb{R}^4$  に値を取ると思い直せばよい。さらに  $h$  の右からの積で  $g_{i+1}$  又は  $g_{i-1}$  を 1 にしてしまうことができる。  $X_i$  の center (ボルト) では 3 次元球面が存在し、これを  $Q_i$  と書く。  $(g_1, g_2, g_3)$  を用いた  $X_i$  の記述では  $g_i$  は  $\mathbb{R}^4$  に値を取るとした。  $Q_i$  はまさに  $g_i = 0$  としたものと表現される。  $g_{i+1}$  又は  $g_{i-1}$  を 1 にするよう右から  $h$  を掛けることができる。  $g_i = 0$  は  $g_i = 1$  とホモトピックなので  $Q_i$  は  $\pm D_{i-1}$  と  $\mp D_{i+1}$  にホモログラスである。

後で必要になることであるが、  $Y$  を  $SU(2)$  の離散部分群で割った  $Y_\Gamma = \mathbb{S}^3/\Gamma \times \mathbb{S}^3$  についても古典的な関係を見ておく。  $Y$  は  $(g_1, g_2, g_3)$  に対して次の同一視を行ったものであるが

$$(g_1, g_2, g_3) \simeq (g_1 h, g_2 h, g_3 h) \quad h \in SU(2) \quad (422)$$

$Y_\Gamma$  はさらに次の同一視を行ったものである。

$$(g_1, g_2, g_3) \simeq (\gamma g_1, g_2, g_3) \quad \gamma \in \Gamma \quad (423)$$

このとき関係式 (421) は次のような式になる。

$$ND'_1 + D'_2 + D'_3 = 0 \quad (424)$$

$i > 1$  の  $D_i$  はこの同一視で  $D'_i \simeq \mathbb{S}^3 \in Y_\Gamma$  にうつるが、  $D_1$  は  $D'_1 = \mathbb{S}^3/\Gamma$  に  $N$  重に移される。  $g_i$  を埋めることによって得られる多様体  $X_{i,\Gamma}$  にはさらに、  $D'_i = 0$  の関係式がつく。それゆえ  $X_{2,\Gamma}$  のホモロジーは  $D'_2 = 0, D'_3 = -ND'_1$  の関係をもつ  $D'_1$  によって生成される。

## 7.2 正則なオブザーバブル

前節で見たように

$$\alpha_i \equiv \int_{D_i} C \quad ; \quad r \text{ に依存しない} \quad (425)$$

$D_i$  の半径は  $r$  に比例しているので  $C \sim \frac{1}{r^3}$  のオーダー。よってこの定数と組むべき計量の揺らぎは cone 計量からの相対的ずれが  $\mathcal{O}(\frac{1}{r^3})$  のオーダーの揺らぎであるべき。そのために (415) の計量を  $r \sim \infty$  付近で見してみる。新しい座標として

$$dy^2 \equiv \frac{dr^2}{1 - (\frac{a}{r})^3} \quad (426)$$

を用い、これを必要なオーダーで展開すると

$$y \equiv r - \frac{a^3}{4r^2} + \mathcal{O}(\frac{1}{r^5}) \quad (427)$$

としてよい。それゆえ、計量は次のようになる。

$$ds^2 = dy^2 + \frac{y^2}{36} \left( da^2 + db^2 + dc^2 - \frac{a^3}{4y^3} (f_1 da^2 + f_2 db^2 + f_3 dc^2) + \mathcal{O}(\frac{a^6}{y^6}) \right) \quad (428)$$

ただし、  $(f_1, f_2, f_3) = (1, -2, 1)$  とした。これに対して  $a, b, c$  の巡回置換を行なうことは、  $(f_1, f_2, f_3)$  の置換を行なうことと同じである。さらにこのオーダーでは、Einstein 方程式は線形になるので、これらの線形結合もまた同じ性質をもつ。よって

$$f_1 + f_2 + f_3 = 0 \quad (429)$$

を満たせばこのオーダーでは  $G_2$  ホロノミーをもつ計量の摂動になる。

また、(421) なので  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$  と古典的にはなるが、実際には membrane 補正が入り

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi \quad (430)$$

となる [35]。よって理論は (429)(430) の関係を持つ  $f_i, \alpha_i$  によってパラメトライズされる。

次に、トライアリティ  $\Sigma_3$  の作用について見ていく。  $a, b, c$  の巡回置換のもとで  $f_i, \alpha_i$  はやはり、巡回置換される。また (417)(418) で定義した  $\alpha, \beta$  に対しては

$$\beta : \begin{cases} (f_1, f_2, f_3) \rightarrow (f_2, f_3, f_1) \\ (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \rightarrow (\alpha_2, \alpha_3, \alpha_1) \end{cases} \quad (431)$$

$$\alpha : \begin{cases} (f_1, f_2, f_3) \rightarrow (f_3, f_2, f_1) \\ (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \rightarrow (-\alpha_3, -\alpha_2, -\alpha_1) \end{cases} \quad (432)$$

と変換する。符号が生じる原因はフリップによって  $Y$  の向きが変わったからである。それゆえ  $f_i, \alpha_j$  の正則な組は、  $k$  を適当な定数として  $kf_1 + i(\alpha_2 - \alpha_3), kf_2 + i(\alpha_3 - \alpha_1), kf_3 + i(\alpha_1 - \alpha_2)$  と表せる。  $\alpha_j$  は  $\text{mod } 2\pi$  で定義されているので次のような変数を定義すると便利である。

$$\eta_i = \exp\left(\left(\frac{2k}{3}\right)f_{i-1} + \left(\frac{k}{3}\right)f_i + i\alpha_i\right) \quad (433)$$

$\alpha's, f's$  の正則関数で  $\alpha$  の  $2\pi$  のシフトで不変なものは、すべてこの  $\eta's$  の関数で書くことができる。これらの  $\eta's$  は独立でなく、(429)(430) により

$$\eta_1 \eta_2 \eta_3 = -1 \quad (434)$$

を満たす。また  $f_i \rightarrow \pm\infty$  でなければ  $\eta_i$  は  $0, \infty$  にはならない。それゆえ、モジュライ空間の有限の点では  $\eta_i$  は  $\mathbb{C}^*$  (複素平面から原点を取り除いたもの) に値をとる。上の constraint により  $\eta_i$  はあわせて  $W \equiv \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$  に値をとる。それでは理論のモジュライ空間が (これを  $\mathcal{N}$  と書く) 古典的には  $W$  上の正則曲線になることを見てみる。古典的多様体  $X_2$  に対応するブランチ上では  $f_i$  は  $(1, -2, 1)$  であり、さらにこの多様体上では、 $\alpha_2 = 0$  である。また  $\eta_2 = 1$  であるので  $\eta_1 \eta_3 = -1$  となり、これは  $W$  における正則曲線を表す。これを一般的にすると古典的多様体  $X_i$  に対応するブランチ上で

$$\eta_i = 1, \quad \eta_{i-1} \eta_{i+1} = -1 \quad (435)$$

と書ける。  $a$  が大であれば曲率が小さいので古典近似がよくなり、ここでの議論が信頼できる。そこで  $a \rightarrow \infty$  の極限を考えてみる。この極限では  $f_{i\pm 1} \rightarrow +\infty, f_i \sim -2f_{i\pm 1}$  となるので、  $\eta_i$  は次のような値をとり、この点を  $P_i$  と書くことにする。

$$\eta_{i-1} \rightarrow \infty, \quad \eta_{i+1} \rightarrow 0 \quad (436)$$

しかしながらこれは古典的な curve であり量子補正を受ける。次にそれがどの様になるかを見ていく。

### 7.3 $Y$ 上の cone における量子論的曲線

正則性から M 理論のダイナミクスを理解するために、特異性を知る必要がある。今の case では、特異性は  $f_i$  が  $\pm\infty$  に発散するときに生じる。つまり  $\eta_i$  がゼロ点かポールをもつ場合である。  $P_i$  の付近では、

局所正則パラメータは、 $X_i$  上の membrane インスタントンと期待される。 $X_i$  のボルト  $Q_i$  に巻きついた membrane インスタントンの振幅は

$$u = \exp\left(-TV(Q_i) + i \int_{Q_i} C\right) \quad (437)$$

である。ここで  $T$  は membrane インスタントンのテンションで、 $V(Q_i)$  はボルトの体積である。(436) より  $P_i$  では  $\eta_{i-1}$  はポールをもち、 $\eta_{i+1}$  はゼロ点をもつことが分かる。そのオーダーを決めるために  $P_i$  付近で  $\eta_{i-1} \sim u^s$  ,  $\eta_{i+1} \sim u^t$  と展開して考える。この正の定数  $u, t$  を決めるには、 $\eta_{i\pm 1}$  と  $u$  の位相を比較すればよい。

$$\text{Arg}(\eta_{i-1}) = \int_{D_{i-1}} C \sim \text{Arg}(u^s) \quad (438)$$

$$\text{Arg}(\eta_{i+1}) = \int_{D_{i+1}} C \sim \text{Arg}(u^t) \quad (439)$$

$$\text{Arg}(u) = \int_{Q_i} C \quad (440)$$

一方、7.1 節で見たように  $Q_i$  は  $D_{i\pm 1}$  にホモロガスなので

$$\text{Arg}(u) = \text{Arg}(\eta_{i\pm 1}) \rightarrow s = t = 1 \quad (441)$$

となり、ポール及びゼロ点のオーダーが決まる。

表 5 正則曲線の特異点とゼロ点

	$P_1$	$P_2$	$P_3$
$\eta_1$	1	$\infty$	0
$\eta_2$	0	1	$\infty$
$\eta_3$	$\infty$	0	1

これで量子論的な  $\mathcal{N}$  を記述するために十分な情報が得られた。つまり  $\eta_i$  は  $P_{i+1}$  でシンプルポールをもち、 $P_{i-1}$  でシンプルゼロを持ち、ほかにはポールもゼロ点もない。ちょうど 1 つずつポールとゼロ点をもつ正則関数が存在することは、 $\mathcal{N}$  がジーンズゼロであることを意味している。トライアリティーを見やすくするために、補助的なパラメータ  $t$  を導入して考えることにし、 $P_i$  が  $t^3 = 1$  を満たすようにパラメトライズする。これを用いると  $\Sigma_3$  は次のように生成される。

$$t \rightarrow \omega t, \quad \omega = \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right) \quad (442)$$

$$t \rightarrow \frac{1}{t} \quad (443)$$

$P_i$  の位置を  $t = \omega^{i+1}$  としてしまうと  $\eta_i$  は、 $P_i$  で 1 となり、 $P_{i+1}$  ではシンプルポール、 $P_{i-1}$  ではシンプルゼロを持つ。よって

$$\eta_i = -\omega \frac{t - \omega^i}{t - \omega^{i-1}} \quad (444)$$

となる。これは期待した関係式

$$\eta_1 \eta_2 \eta_3 = -1 \quad (445)$$

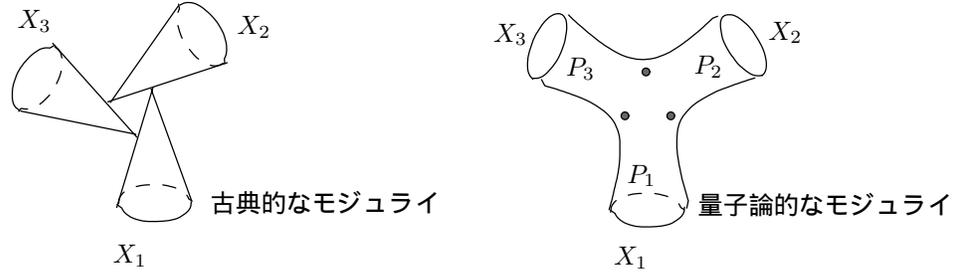


図 22: 古典及び量子モジュライ空間

を満たしている。

古典的モジュライ空間は (435) より、3つのブランチをもち、そのうち2つのブランチは1点で交わるこ  
とが分かる。例えば  $\eta_1 = 1$  のブランチは  $\eta_2 = 1$  のブランチに  $\eta_1 = \eta_2 = 1, \eta_3 = -1$  の1点で交わる。一方  
で量子論的モジュライ空間は、ジーナスがゼロで3つの点  $P_i$  を含む  $W$  上の正則曲線である。これらを図  
22に示した。 $P_i$  は  $\eta_{i-1}$  が  $\infty$  になる点なので、曲線が無限に伸びている。その先のほうは古典的な記述が  
信頼でき、 $\mathbf{R}^4 \times X_i$  上の4次元  $\mathcal{N} = 1$  有効理論になる。スムーズなモジュライ空間の存在はこれらの3つ  
( $i = 1, 2, 3$ ) の有効理論がスムーズに結びつくことを示す。

#### 7.4 4次元ゲージ理論

前節で見た base  $Y$  のオービフォールド  $Y_\Gamma = (\mathbf{S}^3 \times \mathbf{S}^3)/\Gamma$  上の cone を考える。

$$(g_1, g_2, g_3) \simeq (g_1 h, g_2 h, g_3 h) \quad h \in SU(2) \quad (446)$$

これに対してオービフォールドをつくるのであるが、 $\Gamma$  は  $g_1$  に作用するものとする。 $G_2$  ホロノミーをもつ  
多様体  $X_{i,\Gamma}$  は、残った  $SU(2)$  のうちの、どちらかを埋めることで作ることができる。

$g_1$  を埋めた場合

$$X_{1,\Gamma} = (g_1, g_2, g_3) \simeq (g_1 h, g_2 h, g_3 h) = (g'_1, g'_2, 1) = \mathbf{R}^4/\Gamma + \mathbf{S}^3 \quad (447)$$

代表元の取り方を  $g_3 = 1$  になるように  $h$  を選んだ。(これを  $g_3$  を gauge away するという)

$g_2$  を埋めた場合

$$X_{2,\Gamma} = (g_1, g_2, g_3) \simeq (g_1 h, g_2 h, g_3 h) = (g'_1, g'_2, 1) = \mathbf{S}^3/\Gamma + \mathbf{R}^4 \quad (448)$$

$g_3$  を埋めた場合

$$X_{3,\Gamma} = (g_1, g_2, g_3) \simeq (g_1 h, g_2 h, g_3 h) = (g'_1, 1, g'_3) = \mathbf{S}^3/\Gamma + \mathbf{R}^4 \quad (449)$$

$\mathbf{R}^4/\Gamma$  は ADE 型の特異性を持ち、このような  $G_2$  多様体上で M 理論を考えると、effective には ADE 型  
のゲージ群をもつ4次元 superYM が得られる。 $\mathbf{S}^3/\Gamma$  は原点を含まないので特異性がないために、ゲージ  
群の拡大がおこらない。前節のように、これらがスムーズに結びつくならば、4次元 superYM の非摂動的  
領域の振る舞いが、別の多様体  $X_{2,\Gamma}$  又は  $X_{3,\Gamma}$  上の M 理論から理解されることになる。次節で見るように、  
実際これらはスムーズに結びつき、以下のような物理的考察がなされている。

ももとの多様体  $X_2, X_3$  に、supergravity field についての normalizable ゼロモードがないので、特異性  
をもたない  $X_{2,\Gamma}$  又は  $X_{3,\Gamma}$  を作っても、やはり normalizable ゼロモードはない。それゆえに massless 粒子

がない(これを mass gap があるという)。 $X_{1,\Gamma}$  上の理論は、この理論とスムーズに結びつくので、途中で何らかの massless 粒子を生じることなく移り変わる。したがって ADE 型のゲージ群をもつ 4 次元 superYM は mass gap を持つことが分かる。さらに、カイラル対称性の破れや confinement についての考察が Acharya によってなされている [58][57]。

7.1 節で見たようにモジュライ空間  $X_{i,\Gamma}$  は 4 次元の観点からすると massless 粒子の真空期待値というよりは、カップリング定数という意味をもつ。これからやることは、こうしたカップリングをパラメトライズする Riemann 面  $\mathcal{N}_\Gamma$  を記述することである。そしてこれによりスムーズにつながっていることが示される。

## 7.5 $Y_\Gamma$ 上の cone における量子論的曲線

7.1 節で 3-サイクル  $D'_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) を定義した。これは  $Y_\Gamma$  のホモロジーを生成し、一つの関係式を持っていた。

$$ND'_1 + D'_2 + D'_3 = 0 \quad (450)$$

ここで  $N$  は  $\Gamma$  の次数である。無限遠での C-field の周期

$$\alpha'_i = \int_{D'_i} C \quad (451)$$

は、次の関係をもつ。

$$N\alpha'_1 + \alpha'_2 + D\alpha'_3 = N\pi \quad (452)$$

7.2 節で見たように、この  $\alpha'_i$  は  $f_i$  と組んで正則なオブザーバブルを構成した。この  $f_i$  は、計量 (428) に出てきたものである。この計量が、 $SU(2)^3 \times \Sigma_3$  不変であったことを思い出すと、 $\Gamma$  の作用で影響を受けず ( $\Gamma \in SU(2)$  なので)、この場合も同じ  $f_i$  を用いて正則なオブザーバブルが構成される。これを構成するために、 $Y_\Gamma$  を  $N$  回カバーする  $Y$  を用いるとよい。C-field を  $Y$  に引き戻すと、その周期積分は  $\alpha_i = \int_{D'_i} C$  となり次のような関係をもつ。

$$\alpha_1 = N\alpha'_1, \quad \alpha_i = \alpha'_i \quad \text{for } i > 1 \quad (453)$$

なぜなら、 $D_1$  は  $ND'_1$  に射影され、 $D_i$  は  $D'_i$  に射影されるからである。よって正則な組は、この関係式を 7.2 節の関係式に代入すれば得られる。つまり、 $kf_1 + i(\alpha'_2 - \alpha'_3), kf_3 + i(\alpha'_1 - \alpha'_2), kf_2 + i(\alpha'_3 - \alpha'_1)$  である。一価の正則関数は

$$\eta_1 = \exp\left(\frac{2k}{3N}f_3 + \frac{k}{3N}f_1 + i\alpha'_1\right) \quad (454)$$

$$\eta_i = \exp\left(\frac{2k}{3}f_{i-1} + \frac{k}{3}f_i + i\alpha'_i\right) \quad \text{for } i > 1 \quad (455)$$

であり、これらは次の関係をもつ。

$$\eta_1^N \eta_2 \eta_3 = (-1)^N \quad (456)$$

$g_2, g_3$  の交換としての  $Z_2$  対称性は、この場合次のように作用する。

$$(\eta_1, \eta_2, \eta_3) \rightarrow (\eta_1^{-1}, \eta_3^{-1}, \eta_2^{-1}) \quad (457)$$

また、空間のパリティ変換からくる反正則な対称性は、次のように作用する。

$$\eta_i \rightarrow \bar{\eta}_i \quad (458)$$

$X_{i,\Gamma}$  を古典的極限としてもつ  $\mathcal{N}_\Gamma$  上の点を  $P_i$  とする。 $X_{i,\Gamma}$  上では  $D'_i$  を埋めてしまっているため  $\alpha'_i = 0$  である。6.1 節での議論から、 $P_i$  では  $\eta_i = 1$ 。 $P_i$  の近くでは  $f'_s$  は  $\pm\infty$  に発散するので  $\eta_{i-1}$  はポールをもち、 $\eta_{i+1}$  はゼロ点をもつ。しかしながら、この場合、それらのオーダーが変わってくる。 $i > 1$  については、6.3 節と全く同様にできる。 $X_{i,\Gamma} = \mathbf{S}^3/\Gamma + \mathbf{R}^4$  の center は  $Q'_i \simeq \mathbf{S}^3/\Gamma$  の 3-サイクルである。membrane インスタントンの振幅は

$$u = \exp\left(-TV(Q'_i) + i \int_{Q'_i} C\right) \quad (459)$$

で、これは  $P_i$  での local パラメータである。 $X_{i,\Gamma}$   $i > 1$  においてサイクル  $D'_1$  は  $\pm Q'_i$  に可縮である。符号は向きによる。それゆえ、 $P_i$  付近において  $\alpha'_1 = \pm \int_{Q'_i} C$  である。その偏角が局所パラメータに  $\pm 1$  倍したのものになっているので、 $\eta_1$  は  $P_2, P_3$  でシンプル zero かシンプルポールをもつ。 $\eta_1$  が  $P_2$  でポールを  $P_3$  で zero 点を持つことを知っているため完全に決まる。

もし、 $f_i$  が  $\pm\infty$  に発散する点が  $P_i$  のみであるならば、 $\eta_1$  がちょうど一つずつシンプルゼロ、シンプルポールをもつ。一つのゼロ点、一つのポールをもつ正則関数の存在により、 $\mathcal{N}_\Gamma$  はジーナスがゼロであることが分かる。それゆえ  $\mathcal{N}_\Gamma$  を無限遠点を含めた複素  $\eta_1$  面 であると考えことにする。7.3 節においてトライアリティを manifest にするために補助的変数  $t$  を導入した。しかし、今の場合はトライアリティはないのでモジュライ空間をパラメトライズする変数は  $\eta_1$  で考えることにする。大域的対称性 (457),(458) は  $\eta_1$  に対して  $\eta_1 \rightarrow \eta_1^{-1}, \eta_1 \rightarrow \bar{\eta}_1$  と作用する。 $P_i$  はそれぞれ  $\eta_1 = 1, \infty, 0$  となる点である。

$P_2$  付近では  $\eta_1^N \eta_3 = (-1)^N$ 、 $P_3$  付近では  $\eta_1^N \eta_2 = (-1)^N$  なので、 $P_2$  で  $\eta_3$  はオーダー  $N$  のゼロ点をもち、 $P_3$  で  $\eta_2$  はオーダー  $N$  のポールをもつ。 $P_1$  では何が起こるだろうか？ $P_1$  で  $\eta_2$  はゼロ点  $\eta_3$  はポールを持つことを既に知っているがそのオーダーを知る必要がある。 $X_{1,\Gamma} = \mathbf{S}^3 \times \mathbf{R}^4/\Gamma$  の center での  $\mathbf{S}^3$  を  $Q'_1$  とすると (459) で定義されている membrane インスタントンの振幅  $u$  は曲線  $\mathcal{N}_\Gamma$  の  $P_1$  付近でのよい局所パラメータではない。実際、この特異なジオメトリーにおける membrane インスタントンは 4D,ADE 群、superYM における点状の YM インスタントンに等価である。カイラル対称性の破れは、ゲージノ凝縮が  $u^{\frac{1}{h}}$  に比例することを意味している。それゆえに量子論的な真空をパラメトライズする局所パラメータは  $u^{\frac{1}{h}}$  である。 $\mathcal{N}_\Gamma$  はそのような曲線であることを既に議論したので  $u^{\frac{1}{h}}$  は  $\mathcal{N}_\Gamma$  の  $P_1$  付近でのよい局所パラメータである。7.3 節と同様の理由により  $P_1$  付近で  $\eta_2, \eta_3$  は  $\pm u^{\frac{1}{h}}$  に比例する。したがってそれらは局所パラメータの  $\pm h$  のべきに比例し、最終的に、 $\eta_2$  は  $P_1$  でオーダー  $h$  のゼロ点をもち、 $\eta_3$  は  $P_1$  でオーダー  $h$  のポールをもつ。結果をまとめると表 6 のようになる。

表 6 正則曲線の特異点とゼロ点

	$P_1$	$P_2$	$P_3$
$\eta_1$	1	$\infty$	0
$\eta_2$	$0^h$	1	$\infty^N$
$\eta_3$	$\infty^h$	$0^N$	1

この情報から具体的な関数の形を考えていく。 $\eta_2$  を  $\eta_1$  の関数として求めることを考える。 $\eta_2$  は  $P_1(\eta_1 = 1)$  でオーダー  $h$  のゼロ点をもち、 $P_3(\eta_1 = 0)$  でオーダー  $N$  のポールをもつ。さらに  $P_2(\eta_1 = \infty)$  で 1 となる。もし、 $h = N$  であるならばさらに想定することができて、このときは、ゼロ点、ポールともに一つずつであるという簡単な状況を想定できるが、 $h \neq N$  ならば余分な特異点を考えなければならない。

$SU(N)$  の場合  $h$  及び  $\Gamma$  のオーダーがともに  $N$  なので、この場合をまずは考えることにする。 $\eta_2, \eta_3$  はこ

の場合一意的に決定できて次のようになる。

$$\eta_2 = \eta_1^{-N}(\eta_1 - 1)^N \quad (460)$$

$$\eta_3 = (1 - \eta_1)^{-N} \quad (461)$$

この曲線は期待したすべての性質をもつ。例えば  $\eta_1^N \eta_2 \eta_3 = (-1)^N$ 。また  $\eta_1 \rightarrow \eta_1^{-1}$  のもとで  $\eta_2 \rightarrow \eta_2^{-1}$ ,  $\eta_3 \rightarrow \eta_3^{-1}$  にマップする。これは (457) から期待されたことである。最後に  $\eta_1 \rightarrow \bar{\eta}_1$  のもとで  $\eta_i \rightarrow \bar{\eta}_i$ ,  $i > 1$  にマップする。これは (458) から期待されたことである。

## 7.6 TypeIIA への移行

Vafa のラージ  $N$  デュアリティーとの関係を見るために、 $\Gamma = SU(2) = Z_N$  の場合に制限して考える。M 理論から TypeIIA 理論へ移行するには、11 次元方向の  $S^1$  を指定する必要がある。これには多くの可能性があるが、ここでは  $Z_n \in U(1) \in SU(2)$  と取ることにする。(447) では、 $\Gamma$  は  $g_1$  に作用していた。 $g_1$  を埋めた場合の  $X_1$  で、この 11 次元方向の  $S^1 \rightarrow 0$  を考えて 10 次元にする。

$$X_1 = (g_1, g_2, g_3) \mapsto \frac{\mathbf{R}^4}{U(1)} \times \mathbf{S}^3 \quad (462)$$

$\mathbf{R}^4/U(1) \simeq \mathbf{R}^3$  は原点に特異性をもつ。これは、残りの次元  $\mathbf{R}^{1,3} \times \mathbf{S}^3$  に D ブレーンがあると解釈できる。7 次元なので D6 ブレーンが一枚  $\mathbf{S}^3$  に巻きついている描像になる。 $Z_N$  で割った  $X_{1,\Gamma}$  の場合は、 $N$  枚の D6 ブレーンがあると解釈できる。全体としては、 $\mathbf{S}^3$  上の  $\mathbf{R}^3$  ファイバーバンドルとなり、これは deformed conifold である。

一方、 $g_2, g_3$  を埋めた場合は、具体的に計量 (360) を KK reduction して見る事ができる [36]。

$$X_{2,3} = (g_1, g_2, g_3) \mapsto \frac{\mathbf{S}^3}{U(1)} \times \mathbf{R}^4 \quad (463)$$

KK reduction をするために、新しい 1 形式  $\hat{\Sigma}^a$  を使って、次のように書きかえる。

$$\Sigma^a = \hat{\Sigma}^a + n^a d\tilde{\psi} \quad n^a n^a = 1 \quad (464)$$

これを (360) に代入する。

$$\begin{aligned} ds_{11}^2 &= dx_E^2 + \alpha^2 dr^2 + \gamma^2 (\hat{\sigma}^a)^2 + \beta^2 (\sigma^a + \frac{1}{2} \hat{\Sigma}^a)^2 \\ &\quad + \left( \gamma^2 + \frac{\beta^2}{4} \right) \left( d\tilde{\psi}^2 + \left( n^a \hat{\Sigma}^a - \frac{\beta^2}{2(\gamma^2 + \frac{\beta^2}{4})} n^a \sigma^a \right) \right)^2 \\ &\quad - \left( \gamma^2 + \frac{\beta^2}{4} \right) \left( n^a \hat{\Sigma}^a - \frac{\beta^2}{2(\gamma^2 + \frac{\beta^2}{4})} n^a \sigma^a \right)^2 \end{aligned}$$

ここで  $\alpha^{-2} \equiv 1 - \frac{a^3}{r^3}$ ,  $\beta^2 \equiv \frac{r^2}{9} (1 - \frac{a^3}{r^3})$ ,  $\gamma^2 \equiv \frac{r^2}{12}$  と置いた。

ところで今は、 $Z_N$  で割った空間を考えているので、 $\tilde{\psi}$  は  $0 \sim \frac{2\pi}{N}$  までしか動かない。そこで  $2\pi$  まで取るような変数を定義する  $N\tilde{\psi} = \psi'$ 。この新しい変数で書き換え、あらためて  $\psi'$  を  $\tilde{\psi}$  とおくと、計量は次のようになる。

$$\begin{aligned} ds_{11}^2 &= dx_E^2 + \alpha^2 dr^2 + \gamma^2 (\hat{\Sigma}^a)^2 + \beta^2 (\sigma^a + \frac{1}{2} \hat{\Sigma}^a)^2 \\ &\quad + \frac{1}{N^2} \left( \gamma^2 + \frac{\beta^2}{4} \right) \left( d\tilde{\psi}^2 + N \left( n^a \hat{\Sigma}^a - \frac{\beta^2}{2(\gamma^2 + \frac{\beta^2}{4})} n^a \sigma^a \right) \right)^2 \\ &\quad - \left( \gamma^2 + \frac{\beta^2}{4} \right) \left( n^a \hat{\Sigma}^a - \frac{\beta^2}{2(\gamma^2 + \frac{\beta^2}{4})} n^a \sigma^a \right)^2 \end{aligned}$$

これから、通常の KK-reduction したときの式と比較し、次式を得る。

$$H \equiv e^{\frac{4}{3}\phi} = \frac{1}{N^2} \left( \gamma^2 + \frac{\beta^2}{4} \right) \quad (465)$$

$$A_1 \equiv A_\mu dx^\mu = N \left( n^a \hat{\Sigma}^a - \frac{\beta^2}{2(\gamma^2 + \frac{\beta^2}{4})} n^a \sigma^a \right) \quad (466)$$

$$G_{\mu\nu}^{(10)} dx^\mu dx^\nu = dx_E^2 + \alpha^2 dr^2 + \gamma^2 (\hat{\Sigma}^a)^2 + \beta^2 (\sigma^a + \frac{1}{2} \hat{\Sigma}^a)^2 - e^{\frac{4}{3}\phi} A_1^2 \quad (467)$$

これを 10 次元の標準的な計量にするためには Weyl rescale をする必要がある。

$$ds_{str}^2 = e^{\frac{2}{3}\phi} \left[ dx_E^2 + \alpha^2 dr^2 + \gamma^2 (\hat{\Sigma}^a)^2 + \beta^2 (\sigma^a + \frac{1}{2} \hat{\Sigma}^a)^2 - e^{\frac{4}{3}\phi} A_1^2 \right] \quad (468)$$

6 次元部分は resolved conifold になっていて、そこに RR 2-form が  $N$  本生じている。

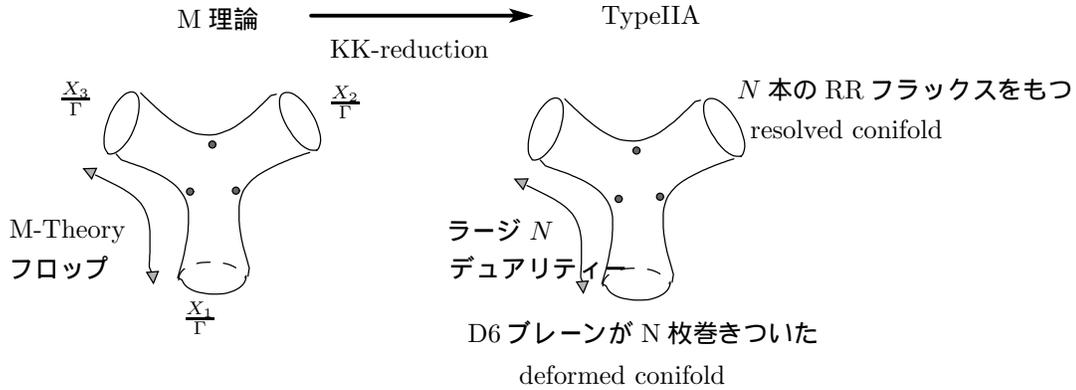


図 23: M フロップとラージ  $N$  デュアリティーの関係

最後に酒井忠勝さん達による [47] について触れてみたい。この節で見えてきたのは、 $X_{1,\Gamma} = S^3 \times \mathbb{R}^4 / \Gamma$  のように、どちらか一方を  $SU(2)$  の離散部分群で割った  $G_2$  多様体であった。[47] では、さらに別の離散部分群  $\Gamma_2$  で割って、 $S^3 / \Gamma_2 \times \mathbb{R}^4 / \Gamma_1$  上の M 理論ダイナミクスを調べている。 $\Gamma_2$  で割っていることによ新たな特異点が生じ、ゲージ群がもう一つ生じる。これは 3 節で見た一般的な場合の  $A_2$  case を思い起こさせる。更に [47] では、Wilson ラインを入れることで、ゲージ群が  $SU(N) \rightarrow \prod SU(N_i)$   $N = \sum_i N_i$  に破れることを論じている。これは 3 節で見たヒッグスメカニズムに相当している。これらを考慮すると Wilson ラインを入れた相と入れてない相がスムーズにつながるならば、3 節の一般的な Vafa のデュアリティーを M 理論の立場から見る事が可能になりそうである。具体的な実現には至っていないが、非常に興味深い話である。

## 8 特異点上のカイラルフェルミオン

この節の内容は Vafa のラージ  $N$  デュアリティーとは直接は関係ないが、ある種の特異性を持つ  $G_2$  多様体から、カイラルフェルミオンが生じることを見る。これは、Witten によって、アノマリーが相殺する条件から求められた [48]。話を簡単にするために、 $G_2$  多様体  $X$  が conical 孤立特異点のみを持つ場合を考え

る。\$X\$ は特異点以外ではスムーズで、特異点の付近では次のような cone 計量を持つとする。

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (469)$$

このような特異点を \$P\_\alpha \in X \ \alpha = 1 \cdots s\$ と表すことにし、\$X\$ から \$P\_\alpha\$ の近傍を取り除いたものを \$X'\$ と表すことにする。図 23 に示すように \$X'\$ はバウンダリー \$Y\_\alpha\$ を持つ。

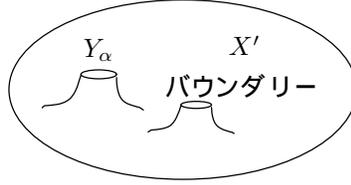


図 24: 特異点を切り取った \$G\_2\$ 多様体

以下では Witten[48] にしたがって、特異性からくるアノマリーを見ていく。そのとき特異点上での積分を考えることになるが、これは well defined でないので、特異点の部分を小さく切り取った \$X'\$ 上での積分を考え、そのバウンダリーからくる効果の特異点によって生じた寄与と考えていく。

## 8.1 ゲージアノマリー

11 次元 SUGRA (306) の Chern-Simons 作用をゲージ変換して見る。

$$\frac{I}{2\pi} = \frac{1}{6(2\pi)^3} \int_M C \wedge dC \wedge dC \quad (470)$$

ゲージ変換は \$C \to C + d\epsilon\$ に対して \$\epsilon\$ を調和形式としたものであり、この変換による action の変化分は

$$\frac{\delta I}{2\pi} = \frac{1}{6(2\pi)^3} \int_M d\epsilon \wedge G \wedge G \quad G \equiv dC \quad (471)$$

である。これに部分積分を行なうと次のようになる。

$$= \frac{1}{6(2\pi)^3} \sum_\alpha \int_{R^4 \times Y_\alpha} \epsilon \wedge G \wedge G \quad (472)$$

5.3 節で見たように調和形式 \$\omega\$ を用いると

$$\epsilon = \epsilon^{(i)} \omega_i \quad (473)$$

$$C = A^{(i)} \wedge \omega_i + \cdots \quad (474)$$

$$G = dC = dA^{(i)} \wedge \omega_i + \cdots \quad (475)$$

と書く事ができ、これを代入すると次式が得られる。

$$= \frac{1}{6(2\pi)^3} \sum_\alpha \int_{R^4} \epsilon^{(i)} F^{(j)} \wedge F^{(k)} \int_{Y_\alpha} \omega_i \wedge \omega_j \wedge \omega_k \quad (476)$$

これから \$\alpha\$ 番目の特異点からの寄与を取り出すと次のようになる。

$$\frac{\delta_\alpha I}{2\pi} = \frac{1}{6(2\pi)^3} \int_{R^4} \epsilon^{(i)} F^{(j)} \wedge F^{(k)} \int_{Y_\alpha} \omega_i \wedge \omega_j \wedge \omega_k \quad (477)$$

このアノマリーを相殺するために、特異点にチャージ \$q\_i^\sigma\$ のカイラル superfield \$\Phi^\sigma\$ があると想定してみる。ゲージ群は調和 2 形式の次元だけ存在しているので、それぞれのゲージ群をラベルする \$i\$ がチャージに

は付いている。一般的には、特異点ごとに異なるカイラル superfield を考えるべきなので、添え字に  $\sigma$  が付いている。このときカイラルフェルミオンから、次のようなアノマリーが生じることは場の理論で既に知られている。

$$\frac{\delta_\alpha I}{2\pi} = -\frac{1}{6(2\pi)^3} \int_{R^4} \epsilon^{(i)F^{(j)}} \wedge F^{(k)} \sum_\sigma q_i^\sigma q_j^\sigma q_k^\sigma \quad (478)$$

よってこれらが互いに打ち消し合うためには、チャージが次の条件式を満たす必要がある。

$$\sum_\sigma q_i^\sigma q_j^\sigma q_k^\sigma = \int_{Y_\alpha} \omega_i \wedge \omega_j \wedge \omega_k \quad (479)$$

また、

$$\sum_\alpha \int_{Y_\alpha} w_i \wedge w_j \wedge w_k = \int_{X'} d(w_i \wedge w_j \wedge w_k) = 0 \quad (480)$$

よりさらに条件式が得られる。

$$\sum_\alpha \sum_{\sigma \in T_\alpha} q_i^\sigma q_j^\sigma q_k^\sigma = 0 \quad (481)$$

この関係式を、既に 5.4 節で見た例をもとに評価してみる。(352) では  $Y = \mathbb{C}P^3$  であり、(670) より第 2Betti 数は 1 である。それゆえ 2 次のコホモロジー群は、1 つの 2 形式  $w$  によって生成され、(480) より  $\int_Y w^3 = 0$  となる。アノマリー相殺の条件 (479) から、この  $G_2$  多様体にはチャージが  $\sum_\sigma (q^\sigma)^3 = 1$  のカイラルフェルミオンが存在すべきである。既に見たように、この  $G_2$  多様体には、チャージが 1 のカイラル superfield が一つ存在し (394) この条件を満たしていることが分かる。つまり、 $G_2$  計量の特異性を表すパラメータの揺らぎと、 $C$  field の対称性が破れたことによるゴールドストーンボソンが組んで、スカラー場を作ったものは右、左が対等には存在せずにカイラルであることが、このアノマリー相殺の条件から結論付けられた。また (360) では  $Y = \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$  であり、(656) より第 2Betti 数はゼロである。よってカイラルフェルミオンは生じないが、このことは表 4 より、ダイナミカルなカイラル superfield が存在しないことと合致している。この 2 つの例からも分かるように、conical 特異点を持つすべての  $G_2$  多様体にカイラルフェルミオンが存在するわけではない。

## 8.2 ゲージ・重力アノマリー

今度は、ゲージ・重力アノマリーについて見ていく。11 次元 SUGRA の作用 (ボソニック) は (306) であるが、これは最低次のものであり、高次の微分を含むような次の補正項がある。

$$\frac{I'}{2\pi} = -\frac{1}{48} \int_M \frac{C}{2\pi} \wedge \left( p_2 - \frac{p_1^2}{4} \right) \quad (482)$$

ここで  $p_1, p_2$  は Riemann テンソルの微分形式で Pontrjagin 類である。具体的に書き下してみると

$$I' = -\frac{1}{384\pi^4} \int_M C \wedge \left( -\frac{1}{8} \text{Tr} R^4 + \frac{1}{32} (\text{Tr} R^2)^2 \right) \quad (483)$$

となる。このような項が生じる理由として、2 つのことが [27] に述べられている。一つには 11 次元方向の  $S^1$  で dimensional reduction をすると  $B \wedge X_8$  型の相互作用を導くことである。この相互作用は TypeIIA 理論の 1 ループの効果により得られる。さらにその 1 ループでの計算は exact なので、11 次元においてそのような相互作用がなくてはならない。もう一つの理由としては 5 ブレーン world-volume における 1 ループアノマリーを相殺するためである。

この相互作用項に対して、先ほどと同様にゲージ変換 ( $C \mapsto C + d\epsilon$ ) をする。

$$\frac{\delta I'}{2\pi} = -\frac{1}{48} \int_M \frac{d\epsilon}{2\pi} \wedge \left( p_2 - \frac{p_1^2}{4} \right) \quad (484)$$

$$= -\frac{1}{48} \int_{\partial M} \frac{\epsilon}{2\pi} \wedge \left( p_2 - \frac{p_1^2}{4} \right) + \frac{1}{48} \int_M \frac{\epsilon}{2\pi} \wedge d \left( p_2 - \frac{p_1^2}{4} \right) \quad (485)$$

$$= -\frac{1}{48} \sum_{\alpha} \int_{R^4 \times Y_{\alpha}} \frac{\epsilon}{2\pi} \wedge \left( p_2 - \frac{p_1^2}{4} \right) \quad (486)$$

$R^4$  での重力アノマリーを求めるために、この式を  $R^4 \times X$  の形を保つ計量の揺らぎで考えたい。そこで  $R^4$ 、 $X$  のそれぞれの第 1Pontrjagin 類を考える。' は  $R^4$ 、'' は  $X$  を表すとする。

$$p_1 = p'_1 + p''_1, \quad p_2 = p'_2 + p''_2 \quad (487)$$

$R^4$ 、 $X$  は 4次元であり  $p'_1, p''_1$  は 4-form なので、それ以上の form は作れず、 $p'_2, p''_2$  などはない。よって、 $p_2 = p'_2 + p''_2$  となる。これより

$$p_2 - \frac{p_1^2}{4} = \frac{1}{2} p'_1 \wedge p''_1 \quad (488)$$

が成り立ち、次式を得る。

$$\frac{\delta_{\alpha} I}{2\pi} = \frac{1}{96} \int_{R^4 \times Y_{\alpha}} \epsilon^{(i)} \frac{\omega_i}{2\pi} \wedge p'_1 \wedge p''_1 = \frac{1}{96} \int_{R^4} \frac{\epsilon^{(i)}}{2\pi} p'_1 \int_{Y_{\alpha}} \omega_i \wedge p''_1 \quad (489)$$

このアノマリーがカイラルフェルミオンからの寄与と相殺するためには、次の条件を満たす必要がある。

$$\sum_{\sigma} q_i^{\sigma} = \frac{1}{4} \sum_{\alpha} \int_{Y_{\alpha}} \omega_i \wedge p''_1 = \frac{1}{4} \int_{X'} d(\omega_i \wedge p''_1) = 0 \quad (490)$$

この条件についても、既に知られた  $G_2$  多様体で評価してみる。(352) では  $Y = \mathbb{C}P^3$  であり、第 1,2 Chern 類は  $c_1 = 4w, c_2 = 6w^2$ 。これより第 1Pontrjagin 類は  $p''_1 = 4w^2$  となり、(490) に代入すると

$$\sum_{\sigma} q_i^{\sigma} = 1 \quad (491)$$

となる。この  $G_2$  多様体は、チャージ 1 のカイラル superfield を 1 つ持っていたので、この条件式が満たされていることが分かる。

## 9 New $G_2$ 計量

M 理論から TypeIIA 理論に移行するときは、11 次元方向の  $S^1$  に対して  $S^1 \rightarrow 0$  の極限を考える。 $S^1$  の半径  $R$  は、TypeIIA のカップリングと  $R \propto g_s^{\frac{2}{3}}$  の関係を持つので、その半径を自由に動かせることがのぞましい。(352),(357),(360) の計量は、漸近的に発散した半径になっているので、実際は TypeIIA の強結合領域のみでの話であった。よって、すべての領域で考えるためには、有限の半径を持つような  $G_2$  多様体が必要となる。(360) の計量は、特異点を滑らかにするパラメータ  $a$  1 つのみを含んでいた。以下ではこの計量に対応するものでパラメータを 2 つ含む解を考える [44][49][50][51]。(360) は  $SU(2)^3$  の対称性を持っていたが、この要請は強すぎるので、これをさらに弱くすることで、2 パラメータの解を作ることを考える。実際には、2 パラメータの解は与えられておらず、2 パラメータの方程式を満たす 1 パラメータの解のみ具体的に与えている。しかし、それらは、漸近的に有限の  $S^1$  をもつ解になっている。

## 9.1 Deformed conifold に対応する $G_2$ 計量

### 9.1.1 対称性と計量の ansatz

ここでは、deformed conifold の  $S^3$  に  $N$  枚の D6 ブレーンが巻きつけた TypeIIA 理論を、M 理論に持ち上げた場合に対応する  $G_2$  計量を見る [50]。deformed conifold は、 $C^4$  中の超曲面で表される (付録 E)。

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 = r \quad r \in \mathbf{R} \quad (492)$$

この方程式は明らかに  $SO(4) \sim SU(2) \times SU(2)$  の対称性を持ち、さらに  $r = 0$  では位相変換  $z_i \rightarrow e^{i\alpha} z_i$  の  $U(1)$  対称性をもつ。しかしこの対称性は  $r \neq 0$  で  $Z_2$  対称性  $z_i \rightarrow -z_i$  に破れる。よって deformed conifold は  $SU(2) \times SU(2) \times Z_2$  対称性をもつと考えられる。さらに M 理論に持ち上げるときに、11 次元方向の  $S^1$  に対する translation からくる  $U(1)$  対称性があるので、ansatz として課すべき対称性は  $SU(2) \times SU(2) \times U(1) \times Z_2$  である。これを実現するために、左不変 1 形式を 2 つ用意する。

$$d\sigma_a = -\frac{1}{2}\epsilon_{abc} \sigma_b \wedge \sigma_c \quad d\Sigma_a = -\frac{1}{2}\epsilon_{abc} \Sigma_b \wedge \Sigma_c \quad (493)$$

これを用いて計量を構成すれば自然に  $SU(2)_L \times \widetilde{SU}(2)_L$  の対称性を持つことになる。さらに  $U(1)$  対称性を持たせる必要があるが、これは  $SU(2)_R \times \widetilde{SU}(2)_R$  の対角的な  $U(1)$  と考える。 $U(1)_R^{diag}$  は次の様な変換である。

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix} \quad (494)$$

( $\Sigma_1, \Sigma_2$ ) についても同様に変換させる。また、 $Z_2$  対称性は 2 つの左不変 1 形式の入れ替え対称性と考える。

$$Z_2: \quad \sigma_a \iff \Sigma_a \quad (495)$$

満たすべき対称性が分かったので、最も一般的な計量の ansatz を置く。

$$ds^2 = \sum_{a=1}^7 e^a \otimes e^a \quad (496)$$

$$\begin{aligned} e^1 &= A(r)(\sigma_1 - \Sigma_1), & e^2 &= A(r)(\sigma_2 - \Sigma_2), \\ e^3 &= D(r)(\sigma_3 - \Sigma_3), & e^4 &= B(r)(\sigma_1 + \Sigma_1), \\ e^5 &= B(r)(\sigma_2 + \Sigma_2), & e^6 &= C(r)(\sigma_3 + \Sigma_3), \\ e^7 &= dr/C(r) \end{aligned} \quad (497)$$

### 9.1.2 $G_2$ ホロノミーをもつ条件

この ansatz に  $G_2$  ホロノミーの条件を課す。5.2 節で見たように、 $G_2$  多様体の条件として closed, coclosed 3-form の存在があった。しかしそれは  $G_2$  多様体であるための必要条件でしかなく、 $Hol(g) \supseteq G_2$  であることを言っているだけだが、 $b_1(X) = 0$  のときは  $Hol(g) = G_2$  を保証する [49]。

$$d\Phi = d*\Phi = 0 \quad (498)$$

$$\Phi = \frac{1}{3!}\psi_{abc}e^ae^be^c \quad (499)$$

$\psi_{abc}$  は Octonion の構造定数で完全反対称であり、次の様に規格化する。

$$\psi_{abc} = +1 \quad , \quad (a, b, c) = \{(123), (147), (165), (246), (257), (354), (367)\} \quad (500)$$

同様に、このデュアルである 4 形式は

$$*\Phi = \frac{1}{4!} \psi_{abcd} e^a e^b e^c e^d \quad (501)$$

$$\psi_{abcd} = +1 \quad , \quad (a, b, c, d) = \{(4567), (2356), (2374), (1357), (1346), (1276), (1245)\} \quad (502)$$

これらを用いると、(498) は次のような微分方程式になる。(501) からは、本質的に同じ方程式のみが得られる。

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dr} &= \frac{1}{4} \left[ \frac{B^2 - A^2 + D^2}{BCD} + \frac{1}{A} \right] \\ \frac{dB}{dr} &= \frac{1}{4} \left[ \frac{A^2 - B^2 + D^2}{ACD} - \frac{1}{B} \right] \\ \frac{dC}{dr} &= \frac{1}{4} \left[ \frac{C}{B^2} - \frac{C}{A^2} \right] \\ \frac{dD}{dr} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{A^2 + B^2 - D^2}{ABC} \right] \end{aligned} \quad (503)$$

またこの方程式系には次の  $Z_2$  対称性がある。

$$Z_2 : \begin{cases} r \rightarrow -r \\ A \iff B \\ D \iff -D \end{cases} \quad (504)$$

### 9.1.3 パラメータを 1 つ持つ解

方程式の解として次のものがある。

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\sqrt{12}} \sqrt{(r-3/2)(r+9/2)} \\ B &= \frac{1}{\sqrt{12}} \sqrt{(r+3/2)(r-9/2)} \\ C &= \sqrt{\frac{(r-9/2)(r+9/2)}{(r-3/2)(r+3/2)}} \\ D &= r/3 \end{aligned} \quad (505)$$

これを用いて 1 パラメータをもつ解の family を求めたい。(505) は (503) の解なのでそれを rescale したもののまた解になっている。そこでこれを  $r \rightarrow r/r_0$  と rescale する。

$$ds^2 = \sum_{a=1}^7 e^a \otimes e^a \quad (506)$$

$$\begin{aligned} e^1 &= A(r)(\sigma_1 - \Sigma_1) \quad , \quad e^2 = A(r)(\sigma_2 - \Sigma_2) \quad , \\ e^3 &= D(r)(\sigma_3 - \Sigma_3) \quad , \quad e^4 = B(r)(\sigma_1 + \Sigma_1) \quad , \\ e^5 &= B(r)(\sigma_2 + \Sigma_2) \quad , \quad e^6 = r_0 C(r)(\sigma_3 + \Sigma_3) \quad , \\ e^7 &= dr/C(r) \end{aligned} \quad (507)$$

ここで

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{\sqrt{12}} \sqrt{(r-3r_0/2)(r+9r_0/2)} \\
B &= \frac{1}{\sqrt{12}} \sqrt{(r+3r_0/2)(r-9r_0/2)} \\
C &= \sqrt{\frac{(r-9r_0/2)(r+9r_0/2)}{(r-3r_0/2)(r+3r_0/2)}} \\
D &= r/3
\end{aligned} \tag{508}$$

ただし、Ricci 平坦になるのは  $r_0 \geq 9r_0/2, r_0 \leq -9r_0/2$  の場合で、これらは (504) の  $Z_2$  対称性で結びついている。よってここでは  $r_0 \geq 9r_0/2$  の場合を考えることにする。

#### 9.1.4 解の漸近的な振る舞い

得られた計量の漸近形を見てみる。 $r \rightarrow \infty$  で  $C \rightarrow 1$ 、他は発散しているので  $e^6$  の方向は有限になり、これを 11 次元の方向の circle と考える。この計量は Taub-NUT 計量に良く似たものになっている。circle が有限であるので TypeIIA カップリングが有限の場合 ( $R \propto g^{2/3}$ ) である。

$$ds^2 = A^2((g^1)^2 + (g^2)^2) + B^2((g^3)^2 + (g^4)^2) + D^2(g^5)^2 + r_0^2 C^2(g^6)^2 + dr^2/C^2 \tag{509}$$

ここで  $g^1, \dots, g^6$  は次のように定義する。

$$\begin{aligned}
g^1 &= E^1 - E^3, & g^2 &= E^2 - E^4, & g^3 &= E^1 + E^3, & g^4 &= E^2 + E^4, & g^5 &= E^5 \\
g^6 &= d\psi_2 + \cos \theta_1 d\phi_1 - \cos \theta_2 d\phi_2
\end{aligned} \tag{510}$$

$$\begin{aligned}
E^1 &= -\sin \theta_1 d\phi_1 \\
E^2 &= d\theta_1 \\
E^3 &= \cos \psi_1 \sin \theta_2 d\phi_2 - \sin \psi_1 d\theta_2 \\
E^4 &= \sin \psi_1 \sin \theta_2 d\phi_2 + \cos \psi_1 d\theta_2 \\
E^5 &= d\psi_1 + \cos \theta_1 d\phi_1 + \cos \theta_2 d\phi_2
\end{aligned} \tag{511}$$

よって計量の漸近形は次のように書かれる。

$$ds^2 = dr^2 + r^2 \left( \frac{1}{9} \left( d\psi_1 + \sum_{i=1}^2 \cos \theta_i d\phi_i \right)^2 + \frac{1}{6} \sum_{i=1}^2 (d\theta_i^2 + \sin^2 \theta_i d\phi_i^2) \right) + r_0^2 (g^6)^2 \tag{512}$$

これは特異性をもつ conifold 上の  $U(1)$  バンドルになっている。cone の base は等質空間  $T^{1,1} = (SU(2) \times SU(2))/U(1)$  上の Einstein 計量で書かれる。ここでの  $U(1)$  は対角的に  $SU(2) \times SU(2)$  に入っている  $U(1)_R^{diag}$  である。

一方で  $r \sim 9r_0/2$  付近では

$$ds^2 \sim d\rho^2 + \frac{9}{4} r_0^2 ((g^1)^2 + (g^2)^2 + (g^5)^2) + \frac{\rho^2}{16} ((g^3)^2 + (g^4)^2 + (g^6)^2) \tag{513}$$

$\rho^2 = 8r_0(r - 9r_0/2)$  となる。サイズが有限の  $S^3$  があり、トポロジ的には  $\mathbf{R}^4 \times S^3$  になっていることが分かる。またこの極限では  $A = D, C = B/r_0$  になっているので、対称性が  $SU(2) \times SU(2) \times SU(2) \times Z_2$  に拡大していることが分かる。よってこの極限では既に見た漸近的に cone になっている例 (360) に近づく。

## 9.2 Resolved conifold に対応する $G_2$ 計量

### 9.2.1 対称性と計量の ansatz

ここでは 11 次元の半径  $R$  がゼロになる極限で、resolved conifold になるような場合の計量を考える [49]。ansatz としては  $SU(2) \times SU(2) \times U(1)$  で  $Z_2$  の対称性は除いている。

$$ds_7^2 = dt^2 + a^2 ((\Sigma_1 + g\sigma_1)^2 + (\Sigma_2 + g\sigma_2)^2) + b^2 (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) + c^2 (\Sigma_3 + g_3\sigma_3)^2 + f^2 \sigma_3^2 \quad (514)$$

$$\begin{aligned} e^1 &= a(\Sigma_1 + g\sigma_1), & e^2 &= a(\Sigma_2 + g\sigma_2), \\ e^3 &= c(\Sigma_3 + g_3\sigma_3), & e^4 &= b\sigma_1, \\ e^5 &= b\sigma_2, & e^6 &= f\sigma_3, \\ e^7 &= dt \end{aligned} \quad (515)$$

$G_2$  計量を保証するために 3 形式が closed、coclosed の条件式 (498) を考える。

$$g = -\frac{a f}{2b c}, \quad g_3 = -1 + 2g^2 \quad (516)$$

$$\dot{a} = -\frac{c}{2a} + \frac{a^5 f^2}{8b^4 c^3}, \quad \dot{b} = -\frac{c}{2b} - \frac{a^2 (a^2 - 3c^2) f^2}{8b^3 c^3} \quad (517)$$

$$\dot{c} = -1 + \frac{c^2}{2a^2} + \frac{c^2}{2b^2} - \frac{3a^2 f^2}{8b^4}, \quad \dot{f} = -\frac{a^4 f^3}{4b^4 c^3} \quad (518)$$

### 9.2.2 パラメータを 1 つ持つ解

この場合も方程式 (518) の完全な一般解は求められていないが、1 パラメータをもつ解の family は求められている。

$$ds^2 = h^{-\frac{1}{3}} dr^2 + \frac{1}{6} r^2 f^{-\frac{1}{3}} \left[ \left( \Sigma_1 + \frac{k}{r} \sigma_1 \right)^2 + \left( \Sigma_2 + \frac{k}{r} \sigma_2 \right)^2 \right] \quad (519)$$

$$+ \frac{1}{9} r^2 h^{-\frac{1}{3}} \left[ \Sigma_3 + \left( -1 + \frac{2k^2}{r^2} \right) \sigma_3 \right]^2 + \frac{1}{6} r^2 h^{\frac{2}{3}} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) + \frac{4}{9} k^2 h^{\frac{2}{3}} \sigma_3^2 \quad (520)$$

### 9.2.3 解の漸近的な振る舞い

$r \rightarrow \infty$  ではこの計量は

$$\begin{aligned} ds^2 \rightarrow ds^2 &= dr^2 + r^2 \left[ \frac{1}{6} \sum_{i=1}^2 (\Sigma_i^2 + \sigma_i^2) + \frac{1}{9} (\Sigma_3 - \sigma_3)^2 \right] + \frac{4}{9} k^2 \sigma_3^2 \\ &= dr^2 + r^2 \left( \frac{1}{9} \left( d\psi_1 + \sum_{i=1}^2 \cos \theta_i d\phi_i \right)^2 + \frac{1}{6} \sum_{i=1}^2 (d\theta_i^2 + \sin^2 \theta_i d\phi_i^2) \right) + \frac{4}{9} k^2 \sigma_3^2 \end{aligned} \quad (521)$$

となり、有限の半径をもつ  $S^1$  と conifold になっていることが分かる。

## 10 終わりに

第 1 部では、TypeII 理論における Vafa のラージ  $N$  デュアリティーをまとめた。そこでは、ブローアップした Calabi-Yau 多様体に D5 ブレーンを巻きつけることで、4 次元のゲージ理論を実現した。このと

き巻きつけるジオメトリーに、ADE 型の ALE 空間を複素平面に fibration したものをを用いると、これが  $\mathcal{N} = 1$  の quiver 理論になることがわかった。また fibration の仕方でも superpotential を調整することができ、かなり多くのモデルが実現できることがわかった。2.2 節及び 4 節では、その superpotential が多項式である場合のいくつかの例を見た。そこでは adjoint 場が真空期待値をもつことにより対称性が破れた  $\prod U(N_i) \rightarrow U(N_1) \times U(N_2) \cdots U(N_n)$ 。これは  $N$  枚のブレーンを  $n$  個のブランチに振り分けたと考えられる。ラージ  $N$  デュアリティーでは、それぞれのブランチに巻きついているブレーンがなくなり、代わりに  $RR$  フラックスが生じる。このラージ  $N$  デュアリティーは、局所的に見れば conifold 転移になっていて、 $S^2 \rightarrow S^3$  の幾何学的転移が起こっていた。さらに、この他にも幾何学的な転移と捉えられる変換を quiver 理論は含んでおり、それが Seiberg のデュアリティーで  $S^2 \rightarrow S^2$  であることを見た。こうした幾何学的転移は統一的に見ることができ、リー代数のチャンパーを用いて直感的に理解することができた。

第 2 部では、Vafa のラージ  $N$  デュアリティーを M 理論に持ち上げた話についてまとめた。超対称性が  $\mathcal{N} = 1$  であるために、ホロノミーが  $G_2$  の多様体が必要になる。ここでの非常に重要な結果は、この Vafa の conifold 転移がスムーズに起こることが示されたことである。resolved conifold から deformed conifold に移るには、古典的には特異性をもつ conifold を経由することになるが、ブレーンが巻きついているために内部空間にフラックスが生じ、その効果でスムーズにこれらが移り変わるようになっていた。それゆえ、重力サイドでの振る舞いから、ゲージ理論の強結合領域でのダイナミクスが調べられるのである。このゲージ/重力デュアリティーを調べるために用いた  $G_2$  多様体は  $S^3 \times S^3$  上の cone であった。そのほかにもよく知られた  $G_2$  多様体があり、それらは、 $CP^3$ 、 $SU(3)/U(1)^2$  上の cone である。この  $G_2$  多様体の conical 特異点上には、カイラルフェルミオンが存在するという注目すべき性質があることもわかった。これはアノマリ相殺の条件から導かれた。

これら 3 つの例は、conical 特異点をもつ  $G_2$  多様体上の M 理論で起こることを、本質的に捉えるには十分であったが、いずれも漸近的に完全に cone になっていたために、11 次元方向をどの様にとったとしても、その半径が発散してしまった。11 次元方向の半径と TypeIIA 理論のカップリングとは、 $R \propto g_s^{\frac{2}{3}}$  の関係を持つために、これら 3 つのケースは、いずれもストリングカップリング無限大の領域での振る舞いを示したに過ぎない。そこで、すべての値のカップリングでの記述を行なうために、漸近的に有限の半径の  $S^1$  をもつ  $G_2$  多様体を構成する必要がある。6 節では  $S^3 \times S^3$  の場合に対応する  $G_2$  多様体の一般化を見た。しかしながら、この一般化もカイラルフェルミオンは含まないものであった。カイラルフェルミオンをもつのははじめの 2 つのケース (352)(357) である。この性質と  $S^3 \times S^3$  上の cone の性質を両方持つような  $G_2$  多様体を構成することができたなら、4 次元ゲージ理論を M 理論を用いて詳しく調べることが可能になり現象論的にも非常に興味深い。実際、 $G_2$  多様体を用いて 4 次元 GUT における Doublet-Triplet Splitting 問題が論じられている [40]。また 3 節で一般化した Vafa のラージ  $N$  デュアリティーに対応する M 理論的実現も非常に興味深い。こうした観点から、 $G_2$  ホロノミーをもつ 7 次元多様体のエンジニアリングが極めて重要な問題といえる。

## 謝辞

多くの貴重なアドバイスや指導をして下さった伊藤先生、坂井先生には深く感謝します。2 度にわたる集中講義を通して  $G_2$  多様体について初歩から教えて下さった名古屋大学の菅野浩明氏に深く感謝します。そして、この分野についての広い意見と多くのアドバイスをして下さった大阪大学の木村哲士さんに感謝します。また多くの議論に付き合っ下さった研究室の皆様ありがとうございました。

## A Open-closed トポロジカルストリングデュアリティー

### A.1 Open トポロジカルストリング

$S^3$  上のレベル  $k$  の  $SU(N)$  Chern-Simons(CS) ゲージ理論の分配関数は

$$Z^{N,k}(S^3) = \frac{1}{(N+k)^{\frac{1}{2}}} \prod_{j=1}^{N-1} \left[ 2 \sin\left(\frac{j\pi}{N+k}\right) \right]^{N-j} \quad (522)$$

である [12]。対数をとって自由エネルギーにして  $1/N$  展開する。

$$F^{CS} \equiv -\log Z^{N,k} = \sum_{g=0} N^{2-2g} F_g = N^2 F_0 + N^0 F_1 + \dots \quad (523)$$

$$N^2 F_0 = -\left(\frac{N}{\lambda}\right)^2 \left[ -\zeta(3) + \frac{i\pi^2}{6}\lambda - i\left(m + \frac{1}{4}\right)\pi\lambda^2 + \frac{i\lambda^3}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-in\lambda}}{n^3} \right] \quad (524)$$

$$N^0 F_1 = \frac{iB_1}{4}\lambda + \frac{B_1}{2} \ln(1 - e^{-i\lambda}) \quad (525)$$

$$N^{2-2g} F_g = \left(\frac{N}{\lambda}\right)^{2-2g} \left[ (-1)^{g-1} \chi_g \frac{2\zeta(2g-2)}{(2\pi)^{2g-2}} - \chi_g \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(\lambda + 2\pi n)^{2g-2}} \right] \quad (526)$$

また、Witten[37] より deformed conifold 上の  $N$  枚の 3 ブレーンが巻きついたときの open トポロジカルストリング理論がこの Chern-Simons 理論に等しいので

$$F^{CS} = F^{open} \quad (527)$$

である。

### A.2 Closed トポロジカルストリング

resolved conifold 上ではジーナスで展開した自由エネルギーは次のようになる。

$$\mathcal{F}_0 = \frac{1}{g_s^2} \left[ -\zeta(3) + \frac{\pi^2}{6}t + \frac{i\pi}{4}t^2 - \frac{t^3}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-2\pi nt}}{n^3} \right] \quad (528)$$

$$\mathcal{F}_1 = \frac{t}{24} + \frac{1}{12} \ln(1 - e^{-2\pi t}) \quad (529)$$

$$\mathcal{F}_g = g_s^{2g-2} \left[ (-1)^{g-1} \chi_g \frac{2\zeta(2g-2)}{(2\pi)^{2g-2}} - \frac{\chi_g}{(2g-3)!} \sum_{n=1}^{\infty} n^{2g-3} e^{-2\pi nt} \right] \quad (530)$$

$g_s, t$  はそれぞれストリングカップリング、 $S^2$  のサイズである。

### A.3 デュアリティー

CS 理論におけるパラメータは  $(\lambda, N)$  であり、closed ストリングでは  $(t, g_s)$  である。これらを次のように同一視すればそれぞれの自由エネルギーが一致することが分かる。

$$\begin{cases} t &= i\lambda \\ g_s &= i\frac{\lambda}{N} \end{cases} \quad (531)$$

さらに (527) より

$$F_g^{open} = F_g^{closed} \quad (532)$$

## B アフィン リー代数

Cartan-Weyl 基底 アフィン version のリー代数は単純リー代数とよく似ている。Cartan-Weyl 基底でのアフィン リー代数は次のよう [52]。

$$[H_0^i, H_n^j] = [K, H_n^i] = 0 \quad [H_0^i, D] = [K, D] = 0 \quad (533)$$

$$[H_0^i, E_n^\alpha] = \bar{\alpha}^i E_n^\alpha \quad [K, E_n^\alpha] = 0 \quad (534)$$

$$[D, E_n^\alpha] = n E_n^\alpha \quad [D, H_n^j] = n H_n^j \quad (535)$$

ここで  $g_{hor}$  をアフィン リー代数に含まれている単純リー代数とし、アフィン リー代数の水平部分群 (horizontal subgroup) と呼ぶ。また、この代数の Cartan 部分代数を  $H_0^i$  と書くことにする。アフィン リー代数  $g$  の Cartan 部分代数  $g_0$  は  $(H, K, D)$  によって張られる。

$$g_0 = \text{span}\{K, D, H_0^i | i = 1 \sim r\} \quad (536)$$

よってアフィンの場合、 $(H, K, D)$  に関してのルートによって代数が特徴付けられることになる。

$$(H, K, D) \text{ のルート} = \begin{cases} \alpha = (\bar{\alpha}, 0, n) & \bar{\alpha} \in \Phi(\bar{g}), n \in Z \\ \alpha = (0, 0, n) & n \in Z (n \neq 0) \end{cases} \quad (537)$$

$\bar{g}$  は単純リー代数でそのルートの集合を  $\Phi$  と書き、 $g$  の水平部分群のルート系と  $\bar{g}$  のルート系を次式により同一視する。

$$(\bar{\alpha}, 0, 0) \equiv \bar{\alpha} \quad (538)$$

次にポジティブルートを定義し、単純ルートの集合を取り出してみる。上で定義した同一視を考えればポジティブルートの集合は

$$\Phi_+ := \{\alpha = (\bar{\alpha}, 0, n) \in \Phi | n > 0 \text{ 又は } n = 0, \bar{\alpha} \in \Phi_+\} \quad (539)$$

表せる。ネガティブルートについては、 $\Phi$  から  $\Phi_+$  を引き去った  $\Phi_- = \Phi / \Phi_+$  で表せる。単純ルートについては

$$\alpha^{(i)} = (\bar{\alpha}^{(i)}, 0, 0) = \bar{\alpha}^{(i)} \quad i = 1 \sim r \quad (540)$$

$$\alpha^{(0)} = (-\bar{\theta}, 0, 1) = \delta - \bar{\theta} \quad (541)$$

ここで  $\bar{\theta}$  は  $\bar{g}$  の highest ルート

Weyl 群 単純リー群とのアナロジーからアフィン リー代数の Weyl 鏡映  $\sigma_\alpha$  を定義する。

$$\sigma_\alpha : \lambda \mapsto \sigma_\alpha(\lambda) = \lambda - (\lambda, \check{\alpha})\alpha \quad \check{\alpha} = \frac{2}{(\alpha, \alpha)}\alpha \quad (542)$$

$\check{\alpha}$  はコルートという。この変換全体は群をなし、Weyl 群とよび、 $W$  と書く。これは単純リー代数のときとよく似ている。 $W$  は単純ルートによる  $\sigma_{\alpha^{(i)}} (i = 0 \sim r)$  によって生成されこれらの鏡映はポジティブルートの入れ替えに相当する。

新しい特徴としては imaginary ルートに関係して生じる。任意の real ルート  $\alpha$  に対して  $(\alpha, \delta) = 0$  なので、それによる Weyl 鏡映は

$$\sigma_\alpha(\delta) = \delta - (\delta, \alpha)\check{\alpha} = \delta \quad (543)$$

となる。よって imaginary ルートの集合

$$\Phi_i = \{n\delta | n \neq 0\} \quad (544)$$

に対して Weyl 鏡映は恒等変換になる。また real ルートに対しては real ルートに移る。

$$W(\Phi_r) = \Phi_r \quad (545)$$

ルート  $\alpha = (\bar{\alpha}, 0, n)$  及びウェイト  $\lambda = (\bar{\lambda}, k, m)$  で具体的に Weyl 鏡映 (B) を書いてみる。

$$\sigma_\alpha(\lambda) = \lambda - \frac{2}{(\alpha, \alpha)}(\lambda, \alpha)\alpha \quad (546)$$

$$= \left( \bar{\lambda} - (\bar{\lambda}, \check{\alpha})\bar{\alpha} - nk\check{\alpha}, k, m - (\bar{\lambda}, \check{\alpha})n - \frac{2}{(\alpha, \alpha)}n^2k \right) \quad (547)$$

$$= \left( \sigma_{\bar{\alpha}}(\bar{\lambda} + nk\check{\alpha}), k, m + \frac{1}{2k}\{(\bar{\lambda}, \bar{\lambda}) - (\bar{\lambda} + nk\check{\alpha}, \bar{\lambda} + nk\check{\alpha})\} \right) \quad (548)$$

この変換を見やすくするために、任意のルート  $\bar{\beta} \in \bar{\Phi}$  に対して、次のような並進  $t_{\bar{\beta}}$  を考える。

$$t_{\bar{\beta}} : \lambda = (\lambda, \bar{k}, m) \mapsto (\bar{\lambda} + k\bar{\beta}, k, m + \frac{1}{2k}\{(\bar{\lambda}, \bar{\lambda}) - (\bar{\lambda} + k\bar{\beta}, \bar{\lambda} + k\bar{\beta})\}) \quad (549)$$

この並進を用いると  $\sigma_\alpha(\lambda)$  は Weyl 鏡映と並進の部分に分けて書くことができる。

$$\sigma_\alpha(\lambda) = \bar{\sigma}_{\bar{\alpha}} \circ (t_{\bar{\alpha}})^n \quad (550)$$

つまり、始めに  $\lambda$  を  $t_{\bar{\alpha}}$  で  $n$  回並進し、次に単純リー代数の Weyl 鏡映を行なったことに相当している。結局、アファイン case の Weyl 鏡映  $\sigma_\alpha$  は  $\bar{g}$  のコルートの格子 (coroot lattice)  $\check{L}$  における何らかの  $\bar{\beta}$  によって

$$\sigma_\alpha = \bar{\sigma}_{\bar{\alpha}} \circ t_{\bar{\beta}} \quad (551)$$

$$W = \bar{W} \times T \quad (552)$$

と与えることができる。

$W$  は単純ルートによる鏡映  $w_{\alpha^{(i)}}$  によって生成される。しかしながらゼロ番目のルートの鏡映は単にルートの並べ替えでなく highest ルート方向の並進を引き起こすことが次式から見て取れる。

$$\sigma_{\alpha^{(0)}}(\lambda) = (\bar{\sigma}_{\bar{\theta}}(\bar{\lambda}) + k\check{\theta}, k, m + (\bar{\lambda}, \check{\theta}) - \check{k}) \quad (553)$$

したがって ルート格子、ウェイト格子において基本的な領域を考えることができる (これをチャンバー、または Coxeter box という)。  $w_{\alpha^{(1)}}$  は  $\alpha^{(1)}$  に垂直な面での鏡映なので、  $A_2$  case を考えると斜線の領域で白い部分がカバーできる。同様に  $\alpha^{(2)}$  での鏡映によりさらに領域は狭まる。

最後に  $\alpha^{(0)}$  による並進を考えると図 25 の斜線の有限の領域になる。ところで、Chamber の取り方は図に示した以外にもあるが dominant chamber といった場合 Dynkin component がすべて正となるような領域の取り方を意味する。

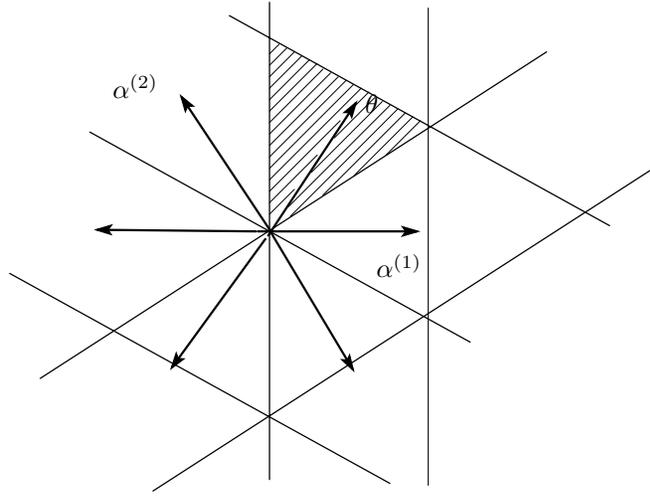


図 25: アファイン  $A_2$  のチャンバー

## C 巻きついたプレーンによる superpotential

**Minimal supersymmetric サイクル** ここでは、以下で用いる minimal supersymmetric サイクル (又は Special Lagrangian Submanifold) について簡単に述べる [53][65][66]。その定義は次の 3 つである ([53] の記述に従う)。

1. Calabi-Yau 多様体の部分多様体
2. その上では Kahler-form がゼロ
3. その上では正則  $n$  形式  $\Omega$  が実 (全体にかかる位相を除いて)。

1 と 2 は supersymmetric サイクル の条件で、3 は minimal の条件。これが minimal と呼ばれているのは以下による。一般の  $n$ -サイクル  $C$  に対して

$$V = \int_C |\Omega| \quad (554)$$

は体積を与える。minimal の条件を使うと  $\Omega$  は real なので

$$\int_C |\Omega| = \left| \int_C \Omega \right| \quad (555)$$

が成り立ち、これは体積が最小であることを示している。(一般的に SUSY サイクルは [65] にしたがって  $\Omega|_C \simeq \text{Vol}(C)$ ,  $\omega|_C = 0$  と定義される)

**superpotential** 簡単のため  $A_n$  型特異点をもつ CY 多様体について見ていく。

$$-P_m(z_1) + z_2^2 + \cdots + z_{n+1}^2 = 0 \quad (556)$$

$P_m$  は  $k+1$  次の多項式。このとき正則  $n$  形式は

$$\Omega = \frac{dz_1 dz_2 \cdots dz_{n+1}}{df} = \frac{dz_1 dz_2 \cdots dz_n}{z_{n+1}} = \frac{idz_1 dz_2 \cdots dz_n}{\sqrt{z_2^2 + \cdots + z_n^2 - P_m(z_1)}} \quad (557)$$

この  $\Omega$  を minimal supersymmetric サイクル で積分するのであるが、これを 2 つの部分に分けて考える。 $C$  が minimal supersymmetric サイクル だとするとこれを  $z_1$  平面に射影したときにその軌跡が 1 次的に

なっていることが分かる。 $z_1$  を 1 つ  $a$  という値に決めたととき、(556) は  $z_2^2 + \dots + z_n^2 = P_m(a)$  となりこれ  
 がもつ非自明なサイクルは  $S^{n-1}$  だけある。したがって、 $C$  の残りの次元は 1 次元なので  $a$  を変えたときの  
 軌跡は 1 次元的になる。

$$V = \int_C |\Omega| = \int_{C_f(z_1) \times I} |\Omega| = \int_I \int_{C_f(z_1)} |\Omega| = \int_I \left| \int_{C_f(z_1)} \Omega \right| \quad (558)$$

2 番目の等号は  $C$  が minimal であることによる。 $I$  は  $z_1$  平面の interval であり  $C_f(z_1) \times I$  によって  $n$ -サイ  
 クルを形成する。したがって、 $I$  の端点では  $P_m(z_1) = 0$  となって、 $S^{n-1}$  がつぶれるようなものでなけ  
 ればならない。下の図 26 参照。

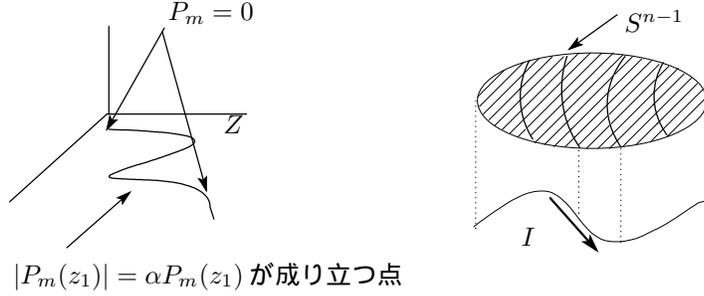


図 26: minimal susy サイクルでの積分

$\Omega$  に具体的な式を代入すると全体にかかる位相を無視すると、以下のように書き下すことができる。

$$V = \int_I dz_1 \left| \int_{S^{n-1}} \frac{idz_2 \cdots dz_n}{\sqrt{z_2^2 + \dots + z_n^2 - P_m(z_1)}} \right| = \int_I |P_m(z_1)|^{\frac{n-2}{2}} dz_1 \quad (559)$$

さらに  $C$  が minimal の条件から  $|P_m(z_1)| = \alpha P_m(z_1)$  を満たす  $z_1$  でなければならない。 $\alpha$  は  $z_1$  に依存し  
 ない位相。

次に  $W$  という関数を  $dW = P_m(z_1)^{\frac{n-2}{2}} dz_1$  と定義する。これを用いると先ほどの式は次のように書きか  
 えられる。

$$V = \int_I |P_m(z_1)|^{\frac{n-2}{2}} dz_1 = \alpha^{\frac{n-2}{2}} \int_I P_m(z_1)^{\frac{n-2}{2}} dz_1 = \int_{I_W} dW \quad (560)$$

ただし全体にかかる位相は除いてであることに注意。 $W$  平面では minimal になる interval は直線になっ  
 ている。その端では  $dW = P_m(z_1)^{\frac{n-2}{2}} dz_1 = 0$  になっている。よっていま導入した  $W$  の性質をまとめると

$$V = W(z_1^{final}) - W(z_1^{initial}) \quad (561)$$

$$dW(z_1^{final}) = dW(z_1^{initial}) = 0 \quad (562)$$

となっており、これはドメインウォールを記述している superpotential と思うことができる。また定数の差  
 の分だけの任意性は残して次のように書ける。

$$W(\Phi) = \int_{S^{n-1} \times I}^{z=\Phi} |\Omega| \quad (563)$$

## D RR フラックス による Partial SUSY Breaking

ここではノンコンパクトな CY 3fold 上で RR, NSNS フラックス を入れたとき生じる superpotential を見ていく。次に簡単な例を用いて SUSY が  $\mathcal{N} = 2 \rightarrow \mathcal{N} = 1$  にブレイクすることをみる。

付録 C でブレーンを minimal SUSY サイクルに巻きつけたときの superpotential を考えた。今の場合も本質的な superpotential の出どころは同じで、付録 C の結果をそのまま用いる。

$$W = \int_{C_R} \Omega \quad (564)$$

minimal SUSY サイクル では  $\Omega$  は実なので絶対値は落とした。  $C_R$  は RR フラックス が生じている 3-サイクル。これにつぎの公式を適用する。

$k$ -form  $\psi$  と  $(n-k)$ -form  $\phi$  がいずれも closed ならば、多様体  $M(\dim M = n)$  に  $(n-k)$  サイクル  $A$  が存在して

$$\int_M \psi \wedge \phi = \int_A \phi \quad (565)$$

が成り立つ。これより、  $W$  は次のようになる。

$$W = \int \Omega \wedge H^R \quad (566)$$

さらに NSNS フラックスも含めるのであるがこれは TypeIIB の  $SL(2, Z)$  の対称性から次のような組み合わせで入る。

$$\int \Omega \wedge (H^R + \tau H^{NS}) = W = \int_{C_R + \tau C_{NS}} \Omega \quad (567)$$

$\tau$  は TypeIIB のカップリング定数。  $H_3(M, Z)$  のシンプレクティック basis  $(A_i, B_j)$  を次のように取る。

$$A^i \cap A^j = B_i \cap B_j = 0, \quad A^i \cap B_j = \delta_j^i \quad (568)$$

それぞれの 3-サイクル における周期積分を次のように定義する。

$$S_i \equiv \int_{A_i} \Omega, \quad \Pi_i \equiv \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial S_i} \equiv \int_{B_i} \Omega \quad (569)$$

$$W = \int_{C_R} \Omega + \tau \int_{C_{NS}} \Omega = e^i S_i + m^j \Pi_j \quad (570)$$

ただし、  $\tau C_{NS} + C_R = e^i A_i + m^j B_j$  とした。これから分かることは CY としてどんなものを持ってくるかで  $\mathcal{F}$  (プレポテンシャル) が変わり、それゆえ superpotential が変わる。またどのフラックスをどのサイクルから出すかによっても superpotential は変わる。このことは fibration の仕方によって superpotential が変わってきたことに対応している。非常に重要なことは、持ってくる CY がコンパクトならば  $\mathcal{N} = 2, 0$  のバックグラウンドしか得られないことが知られていることである [31]。しかしながら、Vafa のデュアリティーを考えるのはノンコンパクトな空間なので  $\mathcal{N} = 1$  のバックグラウンドが存在する。

**TypeIIA version** 同じような式が TypeIIA のときにも成り立つ。この場合には、CY3-fold の 4,2,0 サイクルに対応して 2,4,6 form フラックス が存在する。

$$W = N_0 + \int_{C_2} k + \int_{C_4} k^2 \quad (571)$$

ここで  $k$  は Kahler class で  $N_0$  は 6-form フラックス。

スカラーポテンシャル 次にやることは (571) が付け加えられたときのスカラーポテンシャルを具体的にみて SUSY を保つ条件を調べていくことである。今は SUGRA を考えているので重力からの効果でフラットコンディションが通常の場合の理論と比べて変化している。

$$V = e^{[K(z, \bar{z}) + \tilde{K}(\tau, \bar{\tau})]} [G^{i\bar{j}} D_i W D_{\bar{j}} \bar{W} + \tilde{G}^{\tau\bar{\tau}} D_\tau W D_{\bar{\tau}} \bar{W}] + \frac{1}{2} f_{ab} D^a D^b \quad (572)$$

$$D_i W = (\partial_i + \kappa^2 K_i) W, \quad D_\tau W = (\partial_\tau + \kappa^2 \tilde{K}_\tau) W, \quad (573)$$

$$\tilde{G}^{\tau\bar{\tau}} = \tilde{K}_{\tau\bar{\tau}}^{-1} = -(\tau - \bar{\tau})^2 \quad (574)$$

最後の項は  $W$  がないときにも存在していた D-term 条件である。これから分かるように超対称性を保つためには

$$W = dW = D^a = 0 \quad (575)$$

を満たさなければならない。これは通常の場合の理論と比較して  $W = 0$  の条件が入ることが違っている。実際重力の効果もなくす極限をとると

$$V \rightarrow V_{\kappa \rightarrow 0} \simeq |\partial W|^2 + \frac{1}{2} |D^a|^2 \quad (576)$$

となる。よって  $\mathcal{N} = 2$  の D-term 条件が満たされている領域に限って SUSY Vacua を探すならば  $W = dW = 0$  がその条件になる。

## E Conifold

ここでは、本文にたびたび登場する Conifold について簡単に説明する [54][55][56]。conifold は次の方程式で定義される  $\mathbb{C}^4$  上の cone  $B$  である [54]。

$$f \equiv \sum_{A=1}^4 (w^A)^2 = 0 \quad (577)$$

この方程式は  $w^A = 0$  を除いてはスムーズな曲面になっている。また、この方程式をみたす解  $w_0^A$  が 1 つ与えられたら  $\lambda w_0^A$  もまたこれを満たすのでこの曲面はゼロを通る複素 Line から構成される。それゆえに cone といわれ、その頂点(またはノード)は 2 重点になっている。2 重点とは  $f = df = 0$  を満たすが、2 階微分の行列は非退化である点のことである ( $A_1$  型の特異点といってもよい)。cone の Base は何らかの多様体で (これを  $T$  と書く) (577) 式の解空間と  $\mathbb{C}^4 = \mathbb{R}^8$  における半径  $r$  の球面の断面によって与えられる。

$$\sum_{A=1}^4 |w^A|^2 = r^2 \quad (578)$$

4 つの座標  $w^A$  を一つのベクトル  $w$  とみなすことにし、実部と虚部に分けて書く  $w = x + iy$ 。これを用いると式 (577) と (578) は次のように書ける。

$$x \cdot x = \frac{1}{2} r^2, \quad y \cdot y = \frac{1}{2} r^2, \quad x \cdot y = 0 \quad (579)$$

最初の式は半径が  $r/\sqrt{2}$  の  $S^3$  を表している。次に 3 つ目の式を見ると  $S^3$  を表すベクトル  $x$  と  $y$  は直交しているので余接空間の元であり、さらに 2 つ目の式からその空間における長さが  $r/\sqrt{2}$  の元のみ集合となり、 $S^2$  をなす。これは  $S^3$  上の  $S^2$  バンドルになっている。 $S^3$  上のそのようなバンドルはすべて自明であ

ることが知られているので、 $T$  はトポロジーとして  $S^2 \times S^3$  をもつ。したがって、 $B$  はトポロジー的には  $S^2 \times S^3$  上の cone である。

これから見ていくのは、この  $B$  上の Ricci 平坦計量である。

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\Sigma^2, \quad d\Sigma^2 = h_{ab} dx^a dx^b \quad (580)$$

$d\Sigma^2$  は  $T$  上の計量である。 $n$  次元の cone が Ricci 平坦計量を許容するのは Base が次のような Einstein 多様体のときのみである。

$$R_{ab}(h) = (n-2)h_{ab} \quad (581)$$

これはストレートに示すことができる。Einstein 多様体になる Base の計量を調べるために、次の形の計量を考えてみる。 $p, q$  は互いに素な整数である。

$$d\Sigma_{p,q}^2 = \lambda^2 (d\psi + p \cos \theta_1 d\phi_1 + q \cos \theta_2 d\phi_2)^2 + \Lambda_1^{-1} (d\theta_1^2 + \sin^2 \theta_1 d\phi_1^2) + \Lambda_2^{-1} (d\theta_2^2 + \sin^2 \theta_2 d\phi_2^2) \quad (582)$$

$0 \leq \theta_i < \pi$ ,  $0 \leq \phi_i < \pi$  はそれぞれの  $S^2$  の球面座標であり、 $0 \leq \psi < 4\pi$  は  $U(1)$  ファイバーの座標である。これは  $S^2 \times S^2$  上の  $U(1)$  ファイバーをもつファイバーバンドルの計量になっている。この空間とその計量は 2 つの意味においてこれからの議論に重要である。1 つは定数  $\lambda, \Lambda_1, \Lambda_2$  が次の関係式を満たせばそれは  $n = 6$  の Einstein 多様体になるということである。

$$\begin{aligned} 4 &= \frac{1}{2} \lambda^2 [(p\Lambda_1)^2 + (q\Lambda_2)^2] \\ &= \Lambda_1 - \frac{1}{2} (\lambda p \Lambda_1)^2 \\ &= \Lambda_2 - \frac{1}{2} (\lambda q \Lambda_2)^2 \end{aligned} \quad (583)$$

2 つめには、ファイバーバンドルが  $S^2 \times S^3$  になるような  $(p, q)$  が 2 つ存在するということである。

$$T^{11} = T^{10} = S^2 \times S^3 \quad (584)$$

$T^{10}$  はラウンド計量の直積になっていて自明なものである。

$$d\Sigma_{10}^2 = \frac{1}{8} (d\psi + p \cos \theta_1 d\phi_1)^2 + \frac{1}{8} (d\theta_1^2 + \sin^2 \theta_1 d\phi_1^2) + \frac{1}{4} (d\theta_2^2 + \sin^2 \theta_2 d\phi_2^2) \quad (585)$$

一方で  $T^{11}$  は非自明である。

$$d\Sigma_{p,q}^2 = \frac{1}{9} (d\psi + \cos \theta_1 d\phi_1 + \cos \theta_2 d\phi_2)^2 + \frac{1}{6} (d\theta_1^2 + \sin^2 \theta_1 d\phi_1^2) + \frac{1}{6} (d\theta_2^2 + \sin^2 \theta_2 d\phi_2^2) \quad (586)$$

これら 2 つの計量は  $S^2 \times S^3$  上の異なった幾何学を表す。つまり、微分同相だが  $d\Sigma_{10}^2$  を  $d\Sigma_{11}^2$  にする座標変換は存在しない。これらが異なる幾何学を持つことを簡単に見るには、それぞれの Base  $T^{10}, T^{11}$  の体積を比較してやればよい。

$$\sqrt{g} = \frac{\lambda}{\Lambda_1 \Lambda_2} \sin \theta_1 \sin \theta_2 \quad (587)$$

なので、互いに比較すると等しくないことが分かる。

$$\frac{Vol(T^{11})}{Vol(T^{10})} = \frac{\sqrt{2} \times 8^2}{3 \times 9^2} \quad (588)$$

注意すべきことは、計量は自由に rescale することはできないということである。rescale してしまうと (581) 式が満たされなくなってしまうからである。

次に、実際に (584) 式を示してみることにする。始めに定義方程式を次のような行列  $W$  を用いて表現しなおす。

$$W \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} w^A \sigma_A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} w^3 + iw^4 & w^1 - iw^2 \\ w^1 + iw^2 & -w^3 + iw^4 \end{pmatrix} \quad (589)$$

ここで、 $\sigma_A \equiv (\sigma_i, i1)$  であり、 $\sigma_i$  はパウリ行列。(577) 式および (578) 式は次のようになる。

$$\det W = -\frac{1}{2} \sum_{A=1}^4 (w^A)^2 = 0 \quad (590)$$

$$\text{Tr} W^\dagger W = \sum_{A=1}^4 |w^A|^2 = r^2 \quad (591)$$

さらに

$$Z \equiv \frac{W}{r} \quad (592)$$

を定義すると、それぞれの式は次のように簡潔に書くことができる。

$$\det Z = 0, \quad \text{Tr} Z^\dagger Z = 1 \quad (593)$$

これらの方程式の 1 つの解として次の  $Z_0$  がある。

$$Z_0 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\sigma_1 + i\sigma_2) \quad (594)$$

これを用いると一般解は

$$Z = LZ_0R^\dagger \quad (595)$$

と書くことができる。ここで  $L, R$  は  $SU(2)$  に属し

$$L = \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} k & -\bar{l} \\ l & \bar{k} \end{pmatrix} \quad (596)$$

$|a|^2 + |b|^2 = 1, |k|^2 + |l|^2 = 1$ 。これらはオイラー角を使って、次のようにパラメトライズすることができる。

$$\begin{aligned} a &= \cos \frac{1}{2} \theta_1 e^{\frac{1}{2} i(\psi_1 + \phi_1)}, & k &= \cos \frac{1}{2} \theta_2 e^{\frac{1}{2} i(\psi_2 + \phi_2)}, \\ b &= \sin \frac{1}{2} \theta_1 e^{\frac{1}{2} i(\psi_1 - \phi_1)}, & l &= \sin \frac{1}{2} \theta_2 e^{\frac{1}{2} i(\psi_2 - \phi_2)} \end{aligned} \quad (597)$$

行列  $(L, R)$  の中には  $Z_0$  を不変にするものが含まれて、それは  $(L, R) = (\Theta, \Theta^\dagger)$

$$\Theta = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \quad (598)$$

と表される。つまり、 $\Theta Z_0 \Theta = Z_0$ 。それゆえ  $T$  は、次の同一視を満たす行列の集合とすることができる。

$$(L, R) \simeq (L\Theta, R\Theta^\dagger) \quad (599)$$

これは

$$T = \frac{SU(2) \times SU(2)}{U(1)} = \frac{\mathbf{S}^3 \times \mathbf{S}^3}{U(1)} \quad (600)$$

ここで  $U(1)$  は  $\Theta$  によって生成され、2つの  $\mathbf{S}^3$  に対称的に埋め込まれている。一般に  $(p, q)$  に対して

$$(L, R) \simeq (L\Theta^q, R\Theta^{p\dagger}) \quad (601)$$

の同一視をする空間は  $T = T^{pq}$  と表される。よって今見た場合は  $T = T^{11}$  に対応するものである。(593)の解を考える別の方法もある。

$$Z = \tilde{L}\mathcal{Y}^\dagger, \quad \mathcal{Y} \equiv RZ_0^T R^T \quad (602)$$

この場合  $SU(2) \times SU(2)$  に次のような同一視をする。

$$(\tilde{L}, R) \simeq (\tilde{L}, R\Theta^\dagger) \quad (603)$$

したがって、 $T = T^{10}$  のケースであり、トポロジ-的には  $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{S}^3$  である。既に見た Einstein 計量は、今定義した量を用いて簡潔に書くことができる。

$$d\Sigma_{11}^2 = \frac{2}{3} \text{Tr}(dZ^\dagger dZ) - \frac{2}{9} |\text{Tr}(Z^\dagger dZ)|^2 \quad (604)$$

$$d\Sigma_{10}^2 = \frac{1}{2} \text{Tr}(d\tilde{L}^\dagger d\tilde{L}) + (\text{Tr}(d\mathcal{Y}^\dagger d\mathcal{Y}))^2 \quad (605)$$

**Kähler 構造** 2つの Ricci 平坦計量は求めたがそれらは Kähler 構造をもつだろうか？ Kähler である必要十分条件は計量 (580) に対して

$$g_{\mu\bar{\nu}} = \partial_\mu \partial_{\bar{\nu}} \mathcal{F} \quad (606)$$

とかける Kähler ポテンシャルが存在することである。 $SU(2) \times SU(2)$  の作用のもとで不変な Kähler ポテンシャルは  $r^2$  のみの関数でなければならない。それゆえ

$$g_{\mu\bar{\nu}} = (\partial_\mu \partial_{\bar{\nu}} r^2) \mathcal{F}' + (\partial_\mu r^2) (\partial_{\bar{\nu}} r^2) \mathcal{F}'' \quad (607)$$

と書き換えられる。ここで  $'$  は  $r^2$  での微分を意味する。先に定義した  $W$  を用いると計量は

$$ds^2 = \mathcal{F}' \text{Tr}(dW^\dagger dW) + \mathcal{F}'' |\text{Tr}(W^\dagger dW)|^2 \quad (608)$$

Kähler 多様体の Ricci テンソルは

$$R_{\mu\bar{\nu}} = \partial_\mu \partial_{\bar{\nu}} \ln \sqrt{g} \quad (609)$$

によって与えられる。(590) 式を使うと  $w^A$  のうち任意の3つを座標ととることができる。そこで  $(w^1, w^2, w^3)$  を選ぶと

$$\sqrt{g} = \frac{1}{3|w^4|^{2r^2}} (\gamma^3)' \quad \gamma \equiv r^2 \mathcal{F}' \quad (610)$$

これを (609) 式に代入すると  $w$  の依存性はなくなり、Ricci 平坦の条件は

$$(\gamma^3)' = 2r^2 \quad (611)$$

となる。これを積分すると

$$\gamma = (r^4 + B)^{\frac{1}{3}} \quad (612)$$

これまでのところ Ricci 平坦 Kähler 計量を求めただけであり、これらすべてが cone 上の計量ではない。実際、 $B$  がゼロのときのみ cone の計量になる。つまり

$$\gamma = r^{\frac{4}{3}} \quad (613)$$

のときである。計量を  $dr^2 + r^2 d\Sigma^2$  の形にもって行くために、動径座標を次のように取り直す。

$$\rho \equiv \sqrt{\frac{3}{2}} r^{\frac{2}{3}} \quad (614)$$

また  $W$  を (597) 式で見たオイラー角で表すと計量は

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 \left[ \frac{1}{9} (d\psi + \cos \theta_1 d\phi_1 + \cos \theta_2 d\phi_2)^2 + \frac{1}{6} (d\theta_1^2 + \sin^2 \theta_1 d\phi_1^2) + \frac{1}{6} (d\theta_2^2 + \sin^2 \theta_2 d\phi_2^2) \right] \quad (615)$$

と書ける。 $\rho^2 = const$  を見てやると  $d\Sigma_{11}^2$  になっていることが分かる。この導出から分かるように  $d\Sigma_{10}^2$  に対応する Ricci 平坦 Kähler 計量はない。

## E.1 Resolved conifold 上の Ricci 平坦 Kähler 計量

resolved conifold (small resolution)  $\mathcal{B}_s$  は conifold の定義方程式 (577) を次のように変えたものである。

$$\mathcal{B}_s; \begin{pmatrix} p^1 \\ p^2 \end{pmatrix} \equiv W \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{CP}^1 \quad (616)$$

ここで  $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$ 、また行列  $W$  は

$$W = \begin{pmatrix} X & U \\ V & Y \end{pmatrix} \quad (617)$$

であり、ランクは 1 (ただしすべての  $X, Y, U, V$  がゼロになるところではランクは 0)。 $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{CP}^1$  なので  $\lambda_1 \neq 0$  の領域では  $\lambda \equiv \lambda_1 / \lambda_2$  によって特徴付けられる。このようなパッチでは方程式 (616) の解は次のように与えられる。

$$W = \begin{pmatrix} -U\lambda & U \\ -Y\lambda & Y \end{pmatrix} \quad (618)$$

$\mathcal{B}_s$  上の計量が Kähler であると要求することからはじめる。

$$g_{\mu\bar{\nu}} = \partial_\mu \partial_{\bar{\nu}} \mathcal{K} \quad (619)$$

conifold の場合と違い Kähler ポテンシャルはグローバルに定義できない。また動径座標  $r$  のみの関数でもない。よって計量が covariant であるためには、 $\mathcal{K}$  がパッチの重なりでつぎの関係式を満たさなければならない。

$$\mathcal{K}_+ = \mathcal{K}_- + \ln |f|^2 \quad (620)$$

ここでは Kähler ポテンシャル  $\mathcal{K}$  は  $r^2$  のみの関数という仮定はおかない。こう仮定してしまうと (608) 式の計量になってしまうからである。座標系  $(U, Y; \lambda)$  において、(591) 式は

$$r^2 = Tr(W^\dagger W) = \sigma \Lambda \quad (621)$$

とかける。ここで

$$\sigma \equiv |U|^2 + |Y|^2, \quad \Lambda \equiv 1 + |\lambda|^2 \quad (622)$$

$H_+ \cap H_-$  上で、 $\sigma$  と  $\Lambda$  はつぎの変換則をもつ

$$\Lambda \rightarrow \frac{\Lambda}{|\lambda|^2}, \quad \sigma \rightarrow |\lambda|^2 \sigma \quad (623)$$

よって最も一般的な Kähler ポテンシャルは次のようになる。

$$\mathcal{K} = \mathcal{F}_s + 4a^2 \ln \Lambda \quad (624)$$

ここで、 $\mathcal{F}_s$  は  $r^2$  と  $a$  のみの関数である。 $\mathcal{K}$  は次のように変換する。

$$\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K} - 4a^2 \ln |\lambda|^2 \quad (625)$$

それゆえに計量は well defined である。こうした想定から次の計量が得られる。

$$ds^2 = \mathcal{F}'_s \text{Tr}(dW^\dagger dW) + \mathcal{F}''_s |\text{Tr}(W^\dagger dW)|^2 + 4a^2 \frac{|d\lambda|^2}{\Lambda^2} \quad (626)$$

この計量は  $a \rightarrow 0$  の極限で  $\mathcal{F}_s$  を  $\mathcal{F}$  と対応させれば (608) 式に行き着く。この計量が Ricci 平坦になる条件は

$$\det g_{m\bar{n}} = \mathcal{F}'_s (\mathcal{F}'_s + r^2 \mathcal{F}''_s) (4a^2 + r^2 \mathcal{F}'_s) \quad (627)$$

$$\gamma'_s \gamma_s (\gamma + 4a^2) = \frac{2}{3} r^2, \quad \gamma_s \equiv r^2 \mathcal{F}'_s \quad (628)$$

である。これを積分すると

$$\gamma_s^3 + 6a^2 \gamma_s^2 = r^4 + B \quad (629)$$

となる。 $a \rightarrow 0$  の極限で (613) 式に行き着くには  $a$  とともに  $B$  もゼロになる必要がある。

$$\gamma^3 + 6a^2 \gamma^2 - r^4 = 0 \quad (630)$$

この方程式の実数値解は

$$\gamma = -2a^2 + 4a^4 N^{-\frac{4}{3}}(r) + N^{\frac{1}{3}}, \quad N(r) \equiv \frac{1}{2} \left( r^4 - 16a^6 + \sqrt{r^8 - 32a^6 r^4} \right) \quad (631)$$

$$\gamma(r \rightarrow 0) = \frac{1}{\sqrt{6}a} r^2 - \frac{1}{72a^4} r^4 + \mathcal{O}(r^6), \quad \gamma(r \rightarrow \infty) = r^{\frac{4}{3}} - 2a^2 + \mathcal{O}(r^{-\frac{4}{3}}) \quad (632)$$

である。計量 (626) をオイラー角で具体的に表すと次のようになる。(618) の  $W$  は (592), (595) より

$$U = r e^{\frac{i}{2}(\psi + \phi_1 + \phi_2)} \cos \frac{\theta_1}{2} \cos \frac{\theta_2}{2}, \quad Y = r e^{\frac{i}{2}(\psi - \phi_1 + \phi_2)} \sin \frac{\theta_1}{2} \cos \frac{\theta_2}{2}, \quad \lambda = e^{-i\phi_2} \tan \frac{\theta_2}{2} \quad (633)$$

と表せるので次のようになる。

$$ds^2 = \gamma' dr^2 + \frac{1}{4} \gamma \sum_{i=1}^2 (d\theta_i^2 + \sin^2 \theta_i d\phi_i^2) + \frac{1}{4} \gamma' r^2 \left( d\psi + \sum_{i=1}^2 \cos \theta_i d\phi_i \right)^2 + a^2 (d\theta_2^2 + \sin^2 \theta_2 d\phi_2^2) \quad (634)$$

但し、 $\psi = \psi_1 + \psi_2$  とした。vielbein として

$$e_\psi = d\psi + \sum_{i=1}^2 \cos \theta_i d\phi_i, \quad e_{\theta_i} = d\theta_i, \quad e_{\phi_i} = \sin \theta_i d\phi_i, \quad i = 1, 2 \quad (635)$$

を用いると次のようになる。

$$ds^2 = \gamma' dr^2 + \frac{1}{4} \gamma' r^2 e_\psi^2 + \frac{1}{4} \gamma (e_{\theta_1}^2 + e_{\phi_1}^2) + \frac{1}{4} (\gamma + 4a^2) (e_{\theta_2}^2 + e_{\phi_2}^2) \quad (636)$$

## E.2 Deformed conifold 上の Ricci 平坦 Kähler 計量

次に cone を deformation してスムーズにした場合を考える。これを  $B_d$  と書く。

$$\sum_{A=1}^4 (w^A)^2 = \epsilon^2 \quad (637)$$

$W$  によって表すと

$$\det W = -\frac{1}{2}\epsilon^2 \quad (638)$$

それゆえに動径座標  $r$  を

$$r \equiv \text{Tr}(W^\dagger W) \quad (639)$$

と定義できる。ここでもまた  $w^A$  を実部と虚部に分けると

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \epsilon^2 = x^2 - y^2 \quad (640)$$

となる。これから明らかなように  $\epsilon \leq r < \infty$  である。(638)(639) の一つの解として

$$W_\epsilon = \begin{pmatrix} \frac{\epsilon}{\sqrt{2}} & \sqrt{r^2 - \epsilon^2} \\ 0 & -\frac{\epsilon}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (641)$$

があり、これから一般解は次のように得られる。

$$W = L W_\epsilon R^\dagger \quad (642)$$

$r \neq \epsilon$  について  $W_\epsilon$  を不変にする群は  $U(1)$  であることが容易に分かる。それゆえに  $r = \text{const}$  の曲面は再び  $S^2 \times S^3$  である。しかしながら  $r = \epsilon$  のときには注意が必要である。このとき  $W_\epsilon$  は  $\sigma_3$  に比例する。もし、 $(L, R) = (L, \sigma_3 L \sigma_3)$  であるなら

$$L \sigma_3 R^\dagger = \sigma_3 \quad (643)$$

なので、 $SU(2)$  全体で不変である。したがって座標の原点  $r = \epsilon$  では実際  $SU(3) = S^3$  になっている。

ここでもまた座標として  $(w^1, w^2, w^3)$  を取ることにし、 $r$  は (639) から求まる。これまでと同じように

$$g_{\mu\bar{\nu}} = \partial_\mu \partial_{\bar{\nu}} \mathcal{F}_d(r^2) \quad (644)$$

$$\gamma_d \equiv r^2 \mathcal{F}'_d(r^2) \quad (645)$$

を定義する。少し計算すると

$$\sqrt{g} = \frac{1}{3|w^4|^2 r^8} [r^2(r^4 - \epsilon^4) (\gamma_d^3)' + 3\epsilon^4 \gamma_d^3] \quad (646)$$

を得る。Ricci 平坦の条件は

$$r^2(r^4 - \epsilon^4) (\gamma_d^3)' + 3\epsilon^4 \gamma_d^3 = 2r^8 \quad (647)$$

$$r^2 = \epsilon^2 \cosh \tau \quad (648)$$

といて積分すると

$$\gamma_d = \frac{2^{-\frac{1}{3}} \epsilon^{\frac{4}{3}}}{\tanh \tau} (\sinh 2\tau - 2\tau)^{\frac{1}{3}} \quad (649)$$

ここで、 $r = \epsilon$  で計量が正則であるために積分定数はゼロにとった。よって具体的に計量は次のように表すことができる。

$$ds^2 = \frac{1}{2} \epsilon^{\frac{4}{3}} \mathcal{K} \left[ (3\mathcal{K}^3)^{-1} (d\tau^2 + g_5^2) + \sinh^2 \frac{\tau}{2} (g_1^2 + g_2^2) + \cosh^2 \frac{\tau}{2} (g_3^2 + g_4^2) \right] \quad (650)$$

$$\mathcal{K} = \frac{\left[ \frac{1}{2} \sinh(2\tau) - \tau \right]^{\frac{1}{3}}}{\sinh \tau} \quad (651)$$

$$g_1 = -\frac{\epsilon_2 + e_{\phi_1}}{\sqrt{2}}, \quad g_2 = -\frac{\epsilon_1 - e_{\theta_1}}{\sqrt{2}}, \quad g_3 = \frac{\epsilon_2 - e_{\phi_1}}{\sqrt{2}}, \quad g_4 = \frac{\epsilon_1 + e_{\theta_1}}{\sqrt{2}}, \quad g_5 = e_\psi \quad (652)$$

$$\epsilon_1 \equiv \sin \psi \sin \theta_2 d\phi_2 + \cos \psi d\theta_2, \quad \epsilon_2 \equiv \cos \psi \sin \theta_2 d\phi_2 - \sin \psi d\theta_2 \quad (653)$$

### E.3 コホモロジーとホモロジー

コンパクト多様体に対し、ホモロジーとコホモロジー群は、その間にあるデュアリティーのために同じ次元を持つことが知られている。 $c_p$  をコンパクト多様体  $M$  上に定義されたサイクルの集合、 $\omega_p$  を  $M$  上に定義された閉形式の集合とする。そして、行列  $\Omega_{pq}$  を

$$\Omega(c_p, \omega_q) = \int_{c_p} \omega_q \quad (654)$$

によってつくる。行列  $\Omega$  は周期行列と呼ばれる。これが行列式がゼロでない正方行列であることから、閉形式  $\omega_p$  の次元はサイクルの次元に等しくなる。これを上の式は表している。これは極めて重要な結果である。なぜなら、特定の多様体の Betti 数を計算するのに、その局所的 (コホモロジー) または大域的 (ホモロジー) 性質のいずれを用いてもよいことになるからである。

多様体の積についての性質

$$b_k(M \times N) = \sum_{p+q=k} b_p(M) b_q(N) \quad (655)$$

以下では、いくつかの多様体についてその Betti 数をまとめる。

$N$  次元球面 球面  $S_N$  上のサイクルは、もちろんいつでも点に縮小できる。したがって独立なサイクルはない。つまり、

$$\mathbf{S}^N : \begin{cases} b_0 = b_N = 1 \\ b_p = 0 \quad (\text{その他}) \end{cases} \quad (656)$$

したがって、オイラー数は

$$\chi(\mathbf{S}^N) = \begin{cases} 0 & (N \text{ が奇}) \\ 2 & (N \text{ が偶}) \end{cases} \quad (657)$$

とくに、 $\mathbf{T}^2 = \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$  より、オイラー数の積の規則を用いてトーラスのオイラー数が

$$\chi(\mathbf{T}^2) = \chi(\mathbf{S}^1)^2 = 0 \quad (658)$$

であることが示せる。これは前の計算と一致する。

球面の積 積多様体の場合の公式をつかって積  $S^3 \times S^3$  に対し

$$S^3 \times S^3 : \begin{cases} b_0 = b_6 = 1 \\ b_3 = 2 \\ b_p = 0 \text{ (その他)} \end{cases} \quad (659)$$

が示せる。オイラー数は0になることが分かる。これは3次元球面のオイラー数も0であることから期待される。

$$\chi(S^3 \times S^3) = \chi(S^3) \times \chi(S^3) = 0 \quad (660)$$

同様に、積  $S^2 \times S^2 \times S^2$  をとると、それは Betti 数

$$S^2 \times S^2 \times S^2 : \begin{cases} b_0 = b_6 = 1 \\ b_2 = b_4 = 3 \\ b_p = 0 \text{ (その他)} \end{cases} \quad (661)$$

をもつ。そのオイラー数は

$$\chi(S^2 \times S^2 \times S^2) = \chi(S^2)^3 = 8 \quad (662)$$

となることが分かる。

実および複素射影空間 空間  $CP^N$  は、ふつうの複素  $(N+1)$  次元空間をとり、ある0でない複素数  $\lambda$  に対し同一視

$$z_p \simeq \lambda z_p \quad (663)$$

をすることにより得られる。この条件が、複素  $(N+1)$  次元空間を複素射影  $N$  次元空間にするのである。 $CP^N$  は実射影空間  $P^N$  の一般化である。後者は実  $(N+1)$  次元空間で、ある0でない実数  $k$  に対し、

$$x_p \simeq kx_p \quad (664)$$

による同一視をして作られる。これはまた球面  $S^N$  で対心点と同一視しても得られる。実射影および複素射影空間の例は、

$$CP^1 = S^2 \quad (665)$$

$$P^3 = SO(3) = SU(2)/Z_2 \quad (666)$$

$$CP^N = \frac{SU(N+1)}{U(N)} \quad (667)$$

などである。その Betti 数は

$$P^N : \begin{cases} b_0 = 1 \\ b_N = 0 \text{ (} N \text{ が偶)}; = 1 \text{ (} N \text{ が奇)} \\ b_i = 0 \text{ (その他)} \end{cases} \quad (668)$$

$$\chi(P^N) = 1 \text{ (} N \text{ が偶)}; = 0 \text{ (} N \text{ が奇)} \quad (669)$$

および

$$CP^N : \begin{cases} b_{\text{偶}} = 1 \\ b_{\text{奇}} = 0 \end{cases} \quad (670)$$

である。したがって、

$$\chi(CP^N) = N + 1 \quad (671)$$

となる。

## 参考文献

- [1] G.'t Hooft, Nucl. Phys. **72** (1974) 461
- [2] M.Kontsevich, Comm.Math.Phys.**147**(1992)1
- [3] E.Witten, Nucl. Phys. **B340** (1990) 281
- [4] J.Maldacena, Adv.Theor.Math.Phys.2: 231-252, 1998
- [5] O.Aharony,S.Gubser,J.Maldacena,H.Ooguri,Y.Oz, hep-th/9905111
- [6] 国友 浩,2000 年夏の学校講義 , 講義録 “超弦理論とゲージ理論 (AdS/CFT 対応)”
- [7] I.Klebanov and E.Witten, Nucl.Phys.B536: 199-218, 1998
- [8] J.Polchinski and M.Strassler, hep-th/0003136
- [9] J.Maldacena and C.Nunez, Phys.Rev.Lett.86:588-591, 2001
- [10] C.Vafa, J.Math.Phys.42:2798-2817,2001
- [11] I.Klebanov and M.Strassler, JHEP 0008:052,2000
- [12] R.Gopakumar and C.Vafa, Adv.Theor.Math.Phys.3:1415-1443,1999
- [13] B.Greene,D.R.Morrison,and A.Strominger, Nucl.Phys.B451:109-120,1995
- [14] I.Affleck,M.Dine and N.Seiberg, Nucl. Phys. **B241** (1984) 493
- [15] M.Bershadsky,S.Ceccoti,H.Ooguri and C.Vafa, Commun,Math.Phys.**165**(1994)311
- [16] B.Greene, hep-th/9702155
- [17] F.Cachazo,B.Fiol,K.Intrilligator,S.Katz and C.Vafa, hep-th/0110028
- [18] F.Cachzo,S.Katz and C.Vafa, hep-th/0108120
- [19] M.Douglas and G.Moore, hep-th/9603167
- [20] C.Johnson and R.Myers, Phys.Rev.D55:6382-6393,1997
- [21] J.Polchinski, “String Theory I II,” Cambridge University Press
- [22] S.Gubser,N.Nekrasov and S.Shatashvili, JHEP 9905:003,1999
- [23] C.Cachazo,K.Intriligator and C.Vafa, Nucl.Phys.B603:3-41,2001
- [24] H.Fuji and Ookouchi, hep-th/0205301
- [25] Shin'ichi Imai and Takashi Yokono Phys.Rev.D65:066007,2002
- [26] M.Luty and W.Taylor, Phys.Rev.D53:3399-3405,1996
- [27] P.Horava and E.Witten, Nucl.Phys.B475:94-114,1996
- [28] P.Gabriel, Manuscr.Math 6 (1972),71-103

- [29] V.G.Kac, Inv. Math. 56 (1980) 263
- [30] T.R.Taylor and C.Vafa, hep-th/9912152,Phys.Lett.**B474**(2000)99-126
- [31] J.Michelson, **B495**(1997)127
- [32] N.Seiberg, Nucl.Phys.B435:129-146,1995
- [33] D.Joyce, (Oxford University Press,2000)
- [34] G.Papadopoulos and P.K.Townsend, Phys.Lett.B357:300-306,1995
- [35] M.Athiyah and E.Witten, hep-th/0107177
- [36] M.Athiyah,J.Maldacena and C.Vafa, J.Math.Phys.42:3209-3220,2001
- [37] E.Witten, hep-th/9207094
- [38] A.Bergman and C.P.Herzog, JHEP 0201:030,2002
- [39] S.Kachru , J.Pearson and H.Verlinde, hep-th/0112197
- [40] E.Witten, hep-ph/0201018
- [41] 菅野 浩明 2001 年東工大集中講義
- [42] M.Duff,B.Nilsson and C.Pope, Phys.rep **130** (1986) 1
- [43] B.Acharya,J.Figueroa,C.Hull,B.Spence, Adv.Theor.Math.Phys.2:1249-1286,1999
- [44] 菅野 浩明 2001 年静岡県立大学集中講義
- [45] G.Gibbons,D.Page and C.Pope, Commun. Math. Phys. 127 (1990) 529
- [46] R.Bryant and S.Salamon, Duke.MATH.J vol58 No3 (1989)829
- [47] H.Ita,Y.Oz and Tadakatsu Sakai, hep-th/0203052
- [48] E.Witten, hep-th/0108165
- [49] A.Brandhuber, hep-th/0112113
- [50] A.Brandhuber,J.Gomis,S.Gubser and S.Gukov, Nucl.Phys.B611:179-204,2001
- [51] M.Cvetic,G.Gibbons H.Lu,C.Pope, hep-th/0112138
- [52] Fuchs and Schweigert, "Symmetries,Lie Algebras and Representations," Cambridge University Press
- [53] S.Gukov,C.Vafa,E.Witten, Nucl.Phys.B584:69-108,2000
- [54] P.Candelas and de la Ossa, Nucl.Phys.B343(1990)246
- [55] K.Higashijima, T.Kimura and M.Nitta , Phys. Lett. B518 (2001) 301
- [56] K.Higashijima, T.Kimura and M.Nitta ,Phys.Lett. B515 (2001) 421
- [57] B.Acharya, hep-th/0011089

- [58] B.Acharya, hep-th/0101206
- [59] B.Acharya and E.Witten, hep-th/0109152
- [60] V.Arnold,S.Gusein-Zade and A.Varchenko, “Singularities of Differentiable Maps,” Vol.II , Monographs in Mathematics, vol.82, Birkhause, Boston, Basel, Stuttgart, 1985
- [61] P.Aspinwall,BGreene and D.Morrison, Phys.Lett.B303:249-259,1993
- [62] E.Witten, Nucl.Phys.B403:159-222,1993
- [63] A.Strominger, Nucl.Phys.B451:96-108,1995
- [64] H.Ooguri and C.Vafa, Nucl.Phys.B500:62-74,1997
- [65] K.Becker,M.Becker and A.Strominger, Nucl. Phys. **B456** (1995) 130
- [66] P.Horava, Nucl. Phys. B418 (1994) 571
- [67] I.R.Klebanov and N.Nekrasov, Nucl.Phys.B574:263-274,2000
- [68] I.R.Klebanov and A.Tseytlin, Nucl.Phys.B578:123-138,2000
- [69] S.Gubser, hep-th/0201114
- [70] N.Seiberg and E.Witten, Nucl.Phys.B426:19-52,1994
- [71] M.Douglas and S.Shenker, Nucl.Phys.B447:271-296,1995
- [72] D.Anselmi,D.Freedman, M.Grisaru and A.Johansen Nucl.Phys.B526:543-571,1998
- [73] L.Alvarez-Gaumme and E.Witten, Nucl. Phys. **B234** (1984) 269
- [74] P.Freund and M.Rubin, Phys. Lett. **B97** (1980) 233
- [75] P.Aspinwall, hep-th/9611137
- [76] A.Dabholkar, hep-th/9804208