非可換ソリトンの厳密解の構成法[1]

東京大学大学院 理学系研究科 物理学専攻
素粒子論研究室　浜中 真志[2]

1 Introduction

非可換ソリトンとは, 非可換空間上の場の理論における BPS 方程式の解のことである[3]．私達は, その BPS 方程式を不変に保つ, 非可換空間上の場の理論特有の変換を見出し, 既知のソリトンから新しいソリトンを構成した [1]. 扱ったソリトンはインスタントン, モノポール, 渦である.

非可換空間は座標関数同士の積の非可換性で特徴付けられる：

$$[x^i, x^j] = i\theta^{ij}. \tag{1.1}$$

ここで, θ^{ij} は反対称な実定数であり, 非可換パラメータと呼ばれる[4]．この関係式は, 量子力学の正準交換関係：$[q, p] = i\hbar$ に類似しており,「空間の不確定性関係」を導く. したがって非可換空間上では, 粒子の位置は完全に決めることができず, ある広がった分布を持つ. その結果, 可換な空間上では存在した場の特異点が, 非可換空間上では解消されるということが起こりうる.

非可換ソリトンにおいても, 特異点解消が一般に起こり, 可換な場合には見られない面白い結果を生み出す. 例えば, 非可換インスタントンでは, (完備化された) インスタントン・モジュライ空間の特異点が解消し, 特異でない $U(1)$ インスタントン解を具体的に構成することができる [4]. 非可換ディラック・モノポールでは, 可換な場合には非物理的な対象であったディラック・ストリングが, 物理的な対象として解に現れてくる [5].

この記事では, まず 2 章で非可換空間上のゲージ理論 (Non-Commutative Gauge Theory) を定義し, 次に 3 章で私達の見出した変換を用いて新しい解を構成する.

2 NC(=Non-Commutative) Gauge Theories

NC ゲージ理論の記述には次の 3 つの方法がある：

(i) スター積を用いる記述

(ii) オペレーター形式による記述

(iii) 背景に一様な B 場 (磁場) が入った系の Dirac-Born-Infeld 作用による (弦理論的) 記述

(i), (ii), (iii) の記述は全て等価である. ここではまずスター積を用いる記述によって NC ゲージ理論を定義し, それからワイル変換という変換を用いてオペレーター形式による記述に移る.

紙面の都合上, $G = U(1)$ Yang-Mills-Higgs 理論を具体例として議論を進める. 作用 $I_{\rm YMH}$ は次の通り：

$$I_{\rm YMH} = -\frac{1}{4g_{\rm YM}^2}\int d^4x \ {\rm Tr}\ (F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + 2D_\mu\Phi D^\mu\Phi). \tag{2.1}$$

Φ はゲージ群 G の随伴表現に属するヒッグス場である ($\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$). 運動方程式, BPS 方程式はそれぞれ,

$$\text{運動方程式} \quad : \quad [D^\nu, [D_\nu, D_\mu]] + [\Phi, [\Phi, D_\mu]] = 0, \quad [D^\mu, [D_\mu, \Phi]] = 0, \tag{2.2}$$

$$\text{BPS 方程式} \quad : \quad B_i = \pm[D_i, \Phi], \tag{2.3}$$

となる (ただし $B_i := -\frac{i}{2}\epsilon_{ijk}F^{jk}$ $(i, j, k = 1, 2, 3)$). 複号は上段が自己双対, 下段が反自己双対の場合を表す (以後同様). BPS 方程式はエネルギー E の下限を満たすものとして次のように導かれた：

$$E = \int d^3x \ {\rm Tr}\ \left[\frac{1}{2}F_{ij}F^{ij} + D_i\Phi D^i\Phi\right] = \int d^3x \ {\rm Tr}\,[(\underbrace{B_i \mp D_i\Phi}_{=0 \ \Leftrightarrow\ {\rm BPS}})^2 \pm \partial_i(\epsilon_{ijk}F^{jk}\Phi)]. \tag{2.4}$$

[1] この記事は東京大学大学院理学系研究科物理学専攻の寺嶋靖治さんとの共同研究 [1] に基づく. また関連論文として [2] がある.
[2] e-mail address：hamanaka@hep-th.phys.s.u-tokyo.ac.jp
[3] 一般にはもっと広く, 非可換空間上の場の理論のソリトンのことである.
[4] 非可換パラメータ θ^{ij} は今のところ手で与えるしかない.

次にこの理論の非可換版を考えよう. 非可換座標は x^1, x^2 であるものとする. すなわち

$$[x^1, x^2] = i\theta, \quad (\theta > 0), \quad \text{それ以外の座標同士：} \quad [x^\mu, x^\nu] = 0. \tag{2.5}$$

(i) スター積を用いる記述　スター積は普通の可換な関数 (場) に対して定義される積の一つである：

$$f * g(x) := \exp\left(\frac{i}{2}\theta^{ij}\partial_i^{(x')}\partial_j^{(x'')}\right) f(x')g(x'')\Big|_{x'=x''=x} = f(x)g(x) + \frac{i}{2}\theta^{ij}\partial_i f(x)\partial_j g(x) + \mathcal{O}(\theta^2), \tag{2.6}$$

スター積の性質
- 結合則が成り立つ：$f * (g * h) = (f * g) * h$.
- 座標関数同士の非可換性 (1.1) を再現：$[x^i, x^j]_* := x^i * x^j - x^j * x^i = i\theta^{ij}$.
- $\theta^{ij} \to 0$ で普通の積に戻る.

NC ゲージ理論は, 普通の可換空間上のゲージ理論に現れる場同士の積を全てスター積に置き換えることで得られる. したがって, NC $G = U(1)$ Yang-Mills-Higgs 理論の作用, 運動方程式, BPS 方程式はそれぞれ, 式 (2.1), (2.2), (2.3) において場同士の積が全てスター積に置き換わったものに等しい. 作用に無限個の微分が入っているが [5] 場は普通の関数なので, 運動方程式, BPS 方程式を導出するには可換な場合と同じ手順を踏めばよいのである.

(ii) オペレーター形式による記述　今度は, 座標の非可換性 (2.5) から出発して NC ゲージ理論を定義する. 新しい変数を $\hat{a} := \frac{1}{\sqrt{2\theta}}\hat{z}$, $\hat{a}^\dagger := \frac{1}{\sqrt{2\theta}}\hat{\bar{z}}$ (ただし $\hat{z} := \hat{x}^1 + i\hat{x}^2$) として定義すると, $[\hat{x}^1, \hat{x}^2] = i\theta$ より, $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ が分かる. これより, $\hat{a}^\dagger, \hat{a}$ はそれぞれ調和振動子の生成, 消滅演算子と解釈できる. これらが作用するフォック空間を $\mathcal{H}$ と書くと, $\mathcal{H} = \oplus_{n=0}^{\infty}\mathbf{C}|n\rangle$ である. ここで, $|n\rangle := \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle$, $(n = 0, 1, \ldots)$ は占有数表示の基底であり, $\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle = n|n\rangle, \hat{a}|0\rangle = 0$ を満たす.

場 $\hat{f}$ は $\hat{x}$ の関数であるから, フォック空間 $\mathcal{H}$ に作用する演算子となり, 占有数表示で以下のように表される：

$$\hat{f}(\hat{x}^1, \hat{x}^2, x^3) = \sum_{m,n=0}^{\infty} f_{mn}(x^3)|m\rangle\langle n| \overset{\text{場が } x^3 \text{軸対称な場合}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x^3)|n\rangle\langle n|. \tag{2.7}$$

最後の等号は, $(\hat{x}^1)^2 + (\hat{x}^2)^2 \sim \hat{a}^\dagger\hat{a} \sim n$ による. 以後, 場は x^3 軸対称であるとする.

(i) と (ii) の等価性[6]　(i) と (ii) は等価な記述であり, ワイル変換という変換によって対応づけられる. (i) における普通の場 $f(x^1, x^2, x^3)$ は, ワイル変換によって (ii) における無限次元正方行列の場 $\hat{f}(\hat{x}^1, \hat{x}^2, x^3)$ にうつされる. 掛け算, 微分, 積分も 1 対 1 に対応し, BPS 方程式 (2.3) もその解も 1 対 1 に対応する. 一つ注意すべきことは, 曲率 $\partial_i A_j - \partial_j A_i + [A_i, A_j]$ が (ii) では $[\hat{D}_i, \hat{D}_j] - i(\theta^{-1})_{ij}$ と書かれることである ($\hat{D}_i := \hat{\partial}_i + \hat{A}_i$). $[\hat{D}_i, \hat{D}_j]$ とくくったため, $[\hat{\partial}_i, \hat{\partial}_j](= i(\theta^{-1})_{ij})$ を相殺するための定数項 $-i(\theta^{-1})_{ij}$ が現れたのである. よって, NC BPS 方程式 (2.3) の B_3 には定数項 $1/\theta$ が含まれる.

以後, 解の構成の議論は全てオペレーター形式で行う. この章ではフォック空間に作用する演算子にはハットを付けたが, 以後省略する.

3 BPS-Soliton Generating Transformation

この章では, 非可換 BPS 方程式を不変に保つ変換を見出し, 既知のソリトン解から新しいソリトン解を構成する. まず次の変換を考える：

$$\Phi \to S\Phi S^\dagger, \quad D_i \to SD_iS^\dagger. \tag{3.1}$$

ただし, S は $S^\dagger S = 1$ を満たす演算子である. S が有限サイズの行列であれば, 自動的に $SS^\dagger = 1$ も満たされ, S はユニタリー演算子, 変換 (3.1) はゲージ変換となる. ところが今, S は無限サイズの行列であるため, $SS^\dagger$ は射影演算子になることしか言えない ($(SS^\dagger)(SS^\dagger) = SS^\dagger$). S の典型例は次のシフト演算子 S_N である：

$$S_N := \sum_{n=0}^{\infty}|n+N\rangle\langle n|, \quad S_N^\dagger = \sum_{n=0}^{\infty}|n\rangle\langle n+N|. \tag{3.2}$$

[5] このため非可換空間上の場の理論は, 一般に非局所性を持ち, またパリティを破るが (非可換パラメータ θ^{ij} の存在があらわにローレンツ対称性を破っていることからも分かる), 一様磁場中の物理系と等価であり [3], 意味のない理論というわけではない. むしろ一様磁場中の物理の解明に役立つものと期待している. 実際, この研究会においても石川健三さんの関連した講演があったし, Susskind の論文 [6] 以後, NC Chern-Simons 理論の分数量子ホール効果への応用が盛んである.

[6] 詳しくは [7], [8], [9] などを参照.

これらは $S_N^\dagger S_N = 1, \quad S_N S_N^\dagger = 1 - P_N$ を満たす. ここで, $P_N := \sum_{m=0}^{N-1} |m\rangle\langle m|$ は, フォック空間 $\mathcal{H}$ の N 次元部分空間 $\mathcal{H}_N = \oplus_{m=0}^{N-1}\mathbf{C}|m\rangle$ への射影演算子であり, $S_N S_N^\dagger$ は, $\mathcal{H}$ に対する $\mathcal{H}_N$ の補空間への射影演算子となる.

変換 (3.1) は一般に運動方程式を不変に保つが [10], BPS 方程式を不変に保たない. これは, BPS 方程式が運動方程式と違って, 定数項 (例えば曲率の式に現れた $-i(\theta^{-1})_{ij}$ など) を含んでおり, 式全体が共変的に変換しないためである. そこで私達は, 変換 (3.1) を修正することで, BPS 方程式を不変に保つ変換を見出した.

NC $G = U(1)$ Yang-Mills-Higgs 理論に対する結果は次の通り：

$$\begin{aligned} \Phi &\rightarrow S_N \Phi S_N^\dagger \pm \frac{x^3}{\theta} P_N + \sum_{m=0}^{N-1} \lambda_m^{(4)} |m\rangle\langle m|, \\ D_3 &\rightarrow \partial_3 + S_N A_3 S_N^\dagger + \sum_{m=0}^{N-1} \lambda_m^{(3)} |m\rangle\langle m|, \quad D_z \rightarrow S_N D_z S_N^\dagger + \sum_{m=0}^{N-1} \lambda_m^{(z)} |m\rangle\langle m|. \end{aligned} \tag{3.3}$$

ここで, $D_z := \frac{1}{2}(D_1 - iD_2)$, $\lambda_m^{(z)} := \frac{1}{2}(\lambda_m^{(1)} - i\lambda_m^{(2)})$ であり, $\lambda_m^{(1)}, \lambda_m^{(2)}, \lambda_m^{(3)}, \lambda_m^{(4)}$ は任意の実パラメータである.

例えば, 非可換 1 ディラック・モノポール解 [5] を (3.3) で変換すると, 次の新しいソリトン解が得られる：

$$\begin{aligned} \Phi^{\mathrm{new}} &= \pm \left\{ \sum_{n=N+1}^{\infty} (\xi_{n-N}^2 - \xi_{n-N-1}^2)|n\rangle\langle n| + \left(\xi_0^2 + \frac{x^3}{\theta}\right)|N\rangle\langle N| + \sum_{m=0}^{N-1}\left(\frac{x^3}{\theta} - \lambda_m^{(4)}\right)|m\rangle\langle m| \right\}, \\ D_z^{\mathrm{new}} &= \frac{1}{\sqrt{2\theta}} \sum_{n=N}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1-N}{n+1}} \frac{\xi_{n-N}}{\xi_{n+1-N}} a^\dagger |n\rangle\langle n| + \sum_{m=0}^{N-1} \lambda_m^{(z)} |m\rangle\langle m|, \quad A_3^{\mathrm{new}} = \sum_{m=0}^{N-1} \lambda_m^{(3)} |m\rangle\langle m|, \end{aligned} \tag{3.4}$$

ただし
$$\xi_n := \sqrt{\frac{n\zeta_{n-1}}{2\theta\zeta_n}}, \quad \zeta_n := \int_0^\infty dp\ p^n e^{-\theta p^2 + 2px^3}. \tag{3.5}$$

これは, 非可換ディラック・モノポール 1 個とフラクソン N 個の複合系を表す[7]. フラクソン [11] は NC ゲージ理論特有のソリトンであり, 無限にのびたディラック・ストリングが非可換性のため膨らんで非特異になったようなものである (単位長さあたりの質量 $= 2\pi/g_{\mathrm{YM}}^2\theta$). 新しい解に含まれていた任意パラメータ $\lambda_m^{(*)}$ は, N 個のフラクソンの位置を表す[8]. 変換 (3.3) は, BPS 方程式, 運動方程式を不変に保ちながら, エネルギー, 作用を変えてしまっている. これは, 曲率の式に定数項が含まれていることと, 行列のサイズが無限大であることによる.

インスタントン, 渦についても同様の議論ができる. これらの変換を用いることで, 任意の既知解からさまざまな新しい解が構成できるのである.

参考文献

[1] M. Hamanaka and S. Terashima, "On exact noncommutative BPS solitons," JHEP **0103** (2001) 034, hep-th/0010221

[2] K. Hashimoto, JHEP **0012** (2000) 023, hep-th/0010251

[3] N. Seiberg and E. Witten, JHEP **9909** (1999) 032, hep-th/9908142

[4] N. Nekrasov and A. Schwarz, Comm. Math. Phys. **198** (1998) 689-703, hep-th/9802068;
K. Furuuchi, Prog. Theor. Phys. **103** (2000) 1043, hep-th/9912047

[5] D. J. Gross and N. A. Nekrasov, JHEP **0007** (2000) 03, hep-th/0005204

[6] L. Susskind, "The quantum Hall fluid and non-commutative Chern Simons theory," hep-th/0101029

[7] 浜中 真志, "Exact BPS Solitons in Noncommutative Gauge Theories," 素粒子論研究 (to appear)
(2001 年 2 月の基研研究会「ストリング理論と場の理論における非可換幾何」のプロシーディング)

[8] 浜中 真志, 『ADHM/Nahm 構成法とその双対性』, 素粒子論研究 (to appear)

[9] J. A. Harvey, "Komaba lectures on noncommutative solitons and D-branes," hep-th/0102076

[10] J. A. Harvey, P. Kraus and F. Larsen, JHEP **0012** (2000) 024, hep-th/0010060

[11] D. J. Gross and N. A. Nekrasov, JHEP **0010** (2000) 021, hep-th/0007204;
A. P. Polychronakos, Phys. Lett. **B495** (2000) 407, hep-th/0007043

[7] 磁場の分布や D-brane 解釈など, 解の性質に関するより詳しい議論は [7], [8] にある. なお, この記事 (の増補版) が http://www.math.h.kyoto-u.ac.jp/~takasaki/soliton-lab/nis/iss2001/に置かれている.

[8] フラクソンと超伝導の渦糸との関連は, ほとんど議論されていない.