Exact BPS Solitons in Noncommutative Gauge Theories

東京大学大学院 理学系研究科 物理学専攻 素粒子論研究室　浜中 真志
E-mail: hamanaka@hep-th.phys.s.u-tokyo.ac.jp

非可換空間上の場の理論においても BPS 方程式を定義することができ, その解を非可換 BPS ソリトンという. 私達は, その BPS 方程式を不変に保つ, 非可換空間特有の変換を見出し, 既知のソリトン解から新しいソリトン解を構成した[1]. 扱ったソリトンは, インスタントン, モノポール, 渦である. この記事では, 主にモノポールを題材に, オペレーター形式の記述での厳密解の構成法や性質について, レヴューも含めて紹介する.

1 Introduction

非可換空間は座標関数同士の積の非可換性で特徴付けられる：

$$[x^i, x^j] = i\theta^{ij} \tag{1}$$

ここで, θ^{ij} は反対称な実定数であり, 非可換パラメータと呼ばれる.

非可換空間上の (=Non-Commutative, 以後 NC と書く) ゲージ理論には次の 3 つの等価な記述 (i), (ii), (iii) があり, Weyl 変換および Seiberg-Witten マップによって 1 対 1 に対応づけられる：

$\boxed{\text{(i) オペレーター形式の記述}}$

↑

Weyl 変換

↓

$\boxed{\text{(ii) スター積を用いる記述}}$　　$\left(\xrightarrow{\theta^{ij}\to 0} \boxed{\text{普通の可換空間上の理論}} \right)$

↑

Seiberg-Witten マップ

↓

$\boxed{\text{(iii) 背景一様 } B \text{ 場中の DBI 作用による記述}}$

(i) のオペレーター形式の記述は空間座標の非可換性を前面に出した定式化であり, 場はオペレーター (無限サイズの行列) で表される. この記述が「非可換空間上の」ゲージ理論と呼ぶのに最もふさわしく, 行列模型による解釈が直接可能である. (ii) のスター積を用いる記述は, 場同士の積をスター積と呼ばれる積に置き換えることで空間座標の非可換性を表現する定式化であり, 場は普通の関数である. 非可換パラメータ $\theta^{ij} \to 0$ の極限で可換空間上の理論に戻る. (iii) は背景一様 B 場 (磁場) 中の D ブレーンの有効理論であり, 座標関数同士の積の非可換性はない. (ii) と (iii) との等価性は [37] で示された. この記事では (iii) については触れない[2].

それぞれの記述における既知の非可換 BPS ソリトンを付録 A にまとめた. 代表的なソリトン解は 20 世紀中に一通り出揃ったと言えるが, 厳密解を求めるには (i) のオペレーター形式の記述が非常に強力であり[3], 具体的手法としては,

[1]この記事は同じ研究室の寺嶋靖治さんとの共同研究 [16] に基づく. なお関連論文として [20] がある.

[2]非可換モノポールの, (ii) と (iii) での記述については, この研究会報告の森山翔文さんの記事を御覧ください. なお森山さんの講演でもそうでしたが, 普通 (i) と (ii) は「非可換側」, (iii) は「可換側」と表現されます.

[3](iii) でもゲージ群が $U(1)$ の場合には厳密解が求められている (付録 A 参照).

- ADHM/Nahm 構成法[4]
- Solution Generating Technique [5]

が代表的である. 私達の構成法は後者に属する.

この記事では (i) のオペレーター形式の記述での非可換 BPS ソリトンの厳密解について議論する. まずセクション 2 で, NC ゲージ理論を簡単に定義したあと, Gross と Nekrasov によって構成された非可換モノポール解についてレヴューする. ADHM/Nahm 構成法の背景についても少し紹介する. 次にセクション 3 で私達の見出した BPS ソリトン生成変換を用いて新しい解を構成し, その物理的解釈を与える.

2 Gross-Nekrasov Monopoles

Gross と Nekrasov によって構成された非可換モノポールは 3 種類あるが (付録 A 参照), このセクションでは簡単のため非可換 1-Dirac モノポール解を紹介する. Dirac モノポールは $G = U(1)$ Yang-Mills-Higgs 理論の BPS ソリトンである.

2.1 Non-Commutative Gauge Theory

まず可換空間上の理論から出発して, その非可換版を定義することを考える. $G = U(1)$ Yang-Mills-Higgs 理論の作用 $I_{\rm YMH}$ は次の通り：

$$I_{\rm YMH} = -\frac{1}{4g_{\rm YM}^2}\int d^4x\ {\rm Tr}\left(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + 2D_\mu\Phi D^\mu\Phi\right). \tag{2}$$

Φ はゲージ群 G の随伴表現に属する Higgs 場である ($\mu,\nu = 0,1,2,3$). 運動方程式, BPS 方程式はそれぞれ,

$$\begin{aligned} &\text{運動方程式} \quad : \quad [D^\nu, F_{\nu\mu}] + [\Phi,[\Phi,D_\mu]] = 0, \quad [D^\mu,[D_\mu,\Phi]] = 0, &(3)\\ &\text{BPS 方程式} \quad : \quad B_i = \pm[D_i,\Phi], &(4)\end{aligned}$$

となる. ただし $B_i := -(i/2)\epsilon_{ijk}F^{jk}$ $(i,j,k = 1,2,3)$ は磁場である. 複号は上段が自己双対, 下段が反自己双対の場合を表す (以後同様). BPS 方程式はエネルギー E の下限を満たすものとして次のように導かれた：

$$E = \frac{1}{2g_{\rm YM}^2}\int d^3x\ {\rm Tr}\left[\frac{1}{2}F_{ij}F^{ij} + D_i\Phi D^i\Phi\right] = \frac{1}{2g_{\rm YM}^2}\int d^3x\ {\rm Tr}[(\underbrace{B_i \mp D_i\Phi}_{=0\ \Leftrightarrow\ {\rm BPS}})^2 \pm \partial_i(\epsilon_{ijk}F^{jk}\Phi)]. \tag{5}$$

次にこの理論の非可換版を考えよう. 非可換座標は x^1, x^2 であるものとする. すなわち

$$[x^1,x^2] = i\theta, \quad (\theta > 0), \quad \text{それ以外の座標同士：} \quad [x^\mu,x^\nu] = 0. \tag{6}$$

[4]総合報告として例えば [6], [13], [33] がある. この研究会の古内一之さんの講演はこの関連のお話である.

[5]Non-BPS の場合のレヴューとして例えば [18] が, BPS の場合の解説記事としてこの記事の他に例えば [14] がある. [14] では場の理論的考察がより詳しく議論されている. この研究会報告の松尾泰さんの記事にも少し解説があります.

まず, (ii) のスター積を用いる記述での NC ゲージ理論を定義し, それから, Weyl 変換によって (i) のオペレーター形式の記述に移る.

(ii) スター積を用いる記述

スター積は普通の可換な関数 (場) に対して定義される積の一つである：

$$
\begin{aligned}
f * g(x) &:= \exp\left(\frac{i}{2}\theta^{ij}\partial_i^{(x')}\partial_j^{(x'')}\right) f(x')g(x'')\Big|_{x'=x''=x} \\
&= f(x)g(x) + \frac{i}{2}\theta^{ij}\partial_i f(x)\partial_j g(x) + \mathcal{O}(\theta^2).
\end{aligned}
\tag{7}
$$

スター積は次の重要な性質を持つ：

- 結合則が成り立つ：$f * (g * h) = (f * g) * h$.
- 座標関数同士の非可換性を再現：$[x^i, x^j]_* := x^i * x^j - x^j * x^i = i\theta^{ij}$.
- $\theta^{ij} \to 0$ で普通の積に戻る.

NC ゲージ理論は, 普通の可換空間上のゲージ理論に現れる場同士の積を全てスター積に置き換えることで得られる. したがって, NC $G = U(1)$ Yang-Mills-Higgs 理論の作用, 運動方程式, および BPS 方程式はそれぞれ, 式 (2), (3), (4) において場同士の積が全てスター積に置き換わったものに等しい. 作用に無限個の微分が入っているが, 場は普通の関数なので, 運動方程式, BPS 方程式を導出するには, 可換な場合と同じ手順を踏めばよいのである.

(i) オペレーター形式の記述

今度は, 座標の非可換性 (6) から出発して NC ゲージ理論を定義する. 新しい変数を $\hat{a} := (1/\sqrt{2\theta})\hat{z}$, $\hat{a}^\dagger := (1/\sqrt{2\theta})\hat{\bar{z}}$ (ただし $\hat{z} := \hat{x}^1 + i\hat{x}^2$) として定義すると, $[\hat{x}^1, \hat{x}^2] = i\theta$ より,

$$
[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 \tag{8}
$$

が分かる. これより, $\hat{a}^\dagger, \hat{a}$ はそれぞれ調和振動子の生成, 消滅演算子と解釈できる. これらが作用する Fock 空間を $\mathcal{H}$ と書くと, $\mathcal{H} = \oplus_{n=0}^{\infty}\mathbf{C}|n\rangle$ である. ここで, $|n\rangle := \left((\hat{a}^\dagger)^n/\sqrt{n!}\right)|0\rangle$, $(n = 0, 1, \ldots)$ は占有数表示の基底であり, $\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle = n|n\rangle, \hat{a}|0\rangle = 0$ を満たす.

場 $\hat{f}$ は $\hat{x}$ の (汎) 関数であるから, Fock 空間 $\mathcal{H}$ に作用する演算子となり, 占有数表示で以下のように表される：

$$
\hat{f}(\hat{x}^1, \hat{x}^2, x^3) = \sum_{m,n=0}^{\infty} f_{mn}(x^3)|m\rangle\langle n| \overset{\text{場が } x^3 \text{ 軸対称な場合}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x^3)|n\rangle\langle n|. \tag{9}
$$

最後の等号は, 場が $(\hat{x}^1)^2 + (\hat{x}^2)^2 \sim \hat{a}^\dagger\hat{a}$ と交換するという条件から決まる. 以後, 場は x^3 軸対称であるとする.

(i) と (ii) の等価性[6]

(i) と (ii) は等価な記述であり, Weyl 変換という変換によって対応づけられる. (ii) における普通の場 $f(x^1, x^2)$ は, Weyl 変換によって (i) における無限次元正方行列の場 $\hat{f}(\hat{x}^1, \hat{x}^2)$ にうつされる.

[6] 詳しくは [18] などを参照.

掛け算, 微分, 積分も 1 対 1 に対応し, BPS 方程式 (4) もその解も 1 対 1 に対応する. 対応関係は以下の通り：

	(ii) スター積を用いる記述	(i) オペレーター形式の記述
場	普通の関数 $f(x^1, x^2)$	無限次元正方行列 $\hat{f}(\hat{x}^1, \hat{x}^2) = \sum_{m,n=0}^{\infty} f_{mn}\lvert m\rangle\langle n\rvert$
積	スター積 結合則：$f * (g * h) = (f * g) * h$	行列の積 結合則：$\hat{f}(\hat{g}\hat{h}) = (\hat{f}\hat{g})\hat{h}$ (自明)
非可換性	$[x^i, x^j]_* = i\theta^{ij}$	$[\hat{x}^i, \hat{x}^j] = i\theta^{ij}$
微分	$\partial_i f$ 特に $\partial_i x^j = \delta_i{}^j$	$\partial_i \hat{f} := [\underbrace{-i(\theta^{-1})_{ij}\hat{x}^j}_{=:\, \hat{\partial}_i}, \hat{f}]$ 特に $\partial_i \hat{x}^j = -i(\theta^{-1})_{ik}[\hat{x}^k, \hat{x}^j] = \delta_i{}^j$
積分	$\int dx^1 dx^2\ f(x^1, x^2)$	$2\pi\theta \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}} \hat{f}(\hat{x}^1, \hat{x}^2)$
曲率	$F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i + [A_i, A_j]_*$	$\hat{F}_{ij} = \partial_i \hat{A}_j - \partial_j \hat{A}_i + [\hat{A}_i, \hat{A}_j]$ $= [\hat{D}_i, \hat{D}_j] - i(\theta^{-1})_{ij}$
ある射影	$2(-1)^n L_n(2r^2/\theta)e^{-\frac{r^2}{\theta}}$	$\lvert n\rangle\langle n\rvert$

ここで, $\hat{D}_i := \hat{\partial}_i + \hat{A}_i,\ r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}$ であり, L_n は n 次の Laguerre 多項式である. 注意すべきことは, オペレーター形式の記述の曲率の式で, $[\hat{D}_i, \hat{D}_j]$ とくくると, $[\hat{\partial}_i, \hat{\partial}_j](= i(\theta^{-1})_{ij})$ を相殺するために必要な定数項 $-i(\theta^{-1})_{ij}$ が現れることである.

したがってオペレーター形式の記述での BPS 方程式 (4) は

$$\begin{aligned} (\hat{B}_3 =)\ \ 2[\hat{D}_z, \hat{D}_z^\dagger] + \frac{1}{\theta} &= \pm[\hat{D}_3, \hat{\Phi}], \\ (\hat{B}_z =)\ \ [\hat{D}_3, \hat{D}_z] &= \pm[\hat{D}_z, \hat{\Phi}] \end{aligned} \tag{10}$$

と表される. ただし, $\hat{D}_z := (1/2)(\hat{D}_1 - i\hat{D}_2),\ \hat{B}_z := (1/2)(\hat{B}_1 - i\hat{B}_2)$ のように 1,2 成分を複素に組んだ. $\hat{B}_3$ に定数項が含まれているのは, 上述の通りである.

以後, 解の構成の議論は全てオペレーター形式の記述で行う. このサブ・セクションでは Fock 空間に作用する演算子にはハットを付けたが, 以後省略する.

2.2 ADHM/Nahm Construction

ADHM/Nahm 構成法とは, 任意のインスタントン解/モノポール解の構成法の一つであり, Nahm 変換と呼ばれる双対変換のある種の極限として解釈できる. 非可換インスタントン, モノポール解もこの方法で構成することができ, 既知の厳密解は主にこの方法で求められた (付録 A 参照). ここでは可換空間上の ADHM/Nahm 構成法の背景を簡単に紹介する.

背景となる Nahm 変換の話から始める. Nahm 変換とは, 4 次元トーラス T^4 上の $G = U(N)$, k インスタントン解と, その双対 (4 次元) トーラス $\tilde{T}^4$ 上の $G = U(k)$, N インスタントン解とを 1 対 1 に対応させる変換のことである. 双対トーラスはトーラスの半径を全て逆数にしたトーラス

である．ゲージ群のランクとインスタントン数が入れ替わるのが興味深く，k 本の D0 ブレーンと N 枚の D4 ブレーンの束縛状態の T 双対変換として解釈できる．

双対トーラス $\widetilde{T}^4$ 上のインスタントン解からトーラス T^4 上のインスタントン解を構成する手順は以下の通り：

- 手順 1：双対トーラス上の自己双対方程式を解く．(その解を T_μ ($k \times k$ 行列) と書く.)
- 手順 2：双対インスタントン T_μ を背景とする零質量 Dirac 方程式 (Weyl 方程式) を解く．指数定理より，カイラリティが正または負の規格化可能解が独立に N 個存在することが言える．これを列に並べた，$2k \times N$ 行列を v と書く．
- 手順 3：v からトーラス上のゲージ場を $A_\mu = \int_{\widetilde{T}^4} v^\dagger \partial_\mu v$ として構成すると，インスタントンが出来上がる．実際にこれが自己双対方程式を満たすことはすぐに言える．v が N 列の行列であったことから，ゲージ場のサイズが $N \times N$ となった．

トーラス上のインスタントン解から双対トーラス上のインスタントン解を構成する手順は全く同様であり，トーラス T^4 上の $G = U(N)$，k インスタントン解と，その双対トーラス $\widetilde{T}^4$ 上の $G = U(k)$，N インスタントン解との 1 対 1 対応を厳密に証明することができる．Dirac 方程式のゼロモードを経由して解くあたりにとても深いものを感じる．

次にこの系の特殊な場合を考え，ADHM/Nahm 構成法を導く[7]：

- トーラスの半径を 4 つとも全て無限大にする $\Rightarrow$ ADHM 構成法[8]

  このとき双対トーラスの半径は 4 つとも全てゼロになる．したがって双対トーラスは 1 点につぶれてしまい，無限に近い 2 点上の差を読み取る操作である微分は意味を持たなくなる．その結果，双対トーラス上の自己双対方程式および零質量 Dirac 方程式の中の微分は全て落ち，それらは行列の方程式になる．これにより，行列の方程式を解くことで $\mathbf{R}^4$(= 半径無限大のトーラス) 上のインスタントンが得られる．これが ADHM 構成法である．

- トーラスの半径を 3 つだけ無限大，残り 1 つをゼロにする $\Rightarrow$ Nahm 構成法

  このとき双対トーラスの半径は，3 つはゼロ，1 つは無限大になる．したがって双対トーラスは直線になり，双対トーラス上の自己双対方程式および零質量 Dirac 方程式の中の 3 つの方向の微分は落ち，1 つの方向の微分だけが残る．その結果，常微分方程式を解くことで $\mathbf{R}^3$ 上のインスタントン (= BPS モノポール) が得られる．これが Nahm 構成法である．

もともとの状況は全く双対的であったが，半径というパラメータのある特別な極限で双対性が非自明となり，片側の記述が易しくなったのである．その結果，偏微分方程式を解くという難しい問題が行列方程式を解くといった易しい問題に置き換わったというわけである．$k = 1$ の場合は，手順 1 の双対トーラス上の自己双対方程式の解としては基本的に自明解を持ってくればよい．本質的に計算が必要なのは，手順 2, 3 である．しかし可換な場合はこれも易しい計算で済むことが多い．

紙数の都合のためこれ以上は説明しないが，ADHM/Nahm 構成法は非可換空間上にも拡張でき，さまざまな厳密解が手順通りに構成できる．D ブレーン解釈も非常に興味深く，今後の D ブレーンの発展にも役立つものと期待している[9]．

[7]少しずれる部分もあるが，それはここでの議論が非常にナイーブなものだからである．
[8]T_μ, v はそれぞれ古内さんの講演の $B_{0,1}, \Psi$ に対応する．(B_0, B_1 は T_μ を複素に組んだもの.)
[9]興味のある方は，是非 [13] を御覧ください．参考文献もそこにあります．

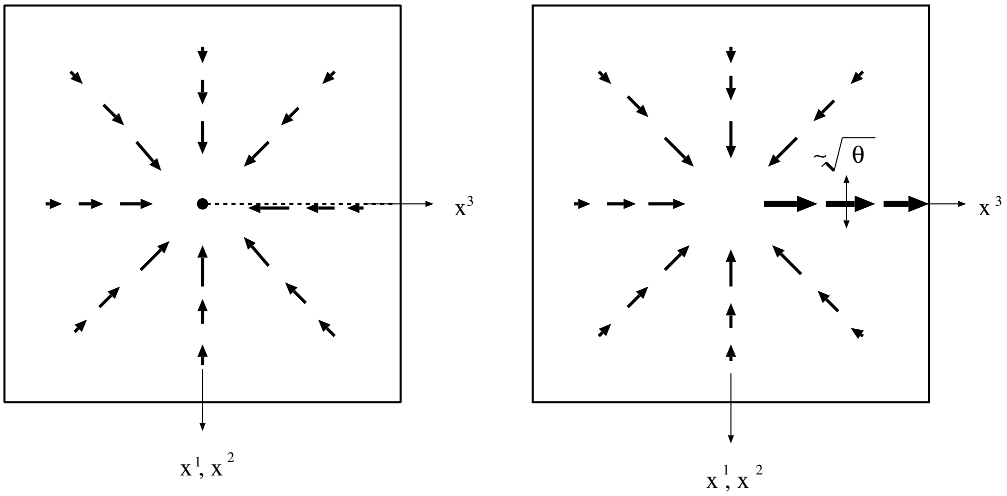

図 1: Dirac モノポールの磁場分布 (可換空間上 (左) V.S. 非可換空間上 (右))

2.3 Gross-Nekrasov Monopole

Gross と Nekrasov によって構成された非可換 1-Dirac モノポールの厳密解 [10] のレヴューを行う. Dirac モノポール解は Nahm 構成で ξ の積分区間を $(0,\infty)$ と定めることで得られる[10].

比較のため, まず可換空間上の 1-Dirac モノポール解を紹介する：

$$\Phi = \frac{1}{2r},\ A_r = A_\theta = 0,\ A_\phi = \frac{1}{2r}\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}. \tag{11}$$

ただし (r,θ,ϕ) は普通の極座標である. ゲージ場および, それから計算される磁場は $\theta=0$, すなわち x^3 軸の正の部分にデルタ関数型の特異性を持つことが分かる. この x^3 軸の正の部分に沿ったストリング状の特異点の集まりを Dirac ストリングと呼ぶ. Dirac ストリングは無限小の幅を持ったソレノイドと解釈でき, ゲージ変換でその方向が変わる非物理的対象である[11]. x^3 軸の正の部分以外では磁場は

$$B_i = \partial_i \Phi = -\frac{x^i}{2r^3} \tag{12}$$

と計算され, 磁場分布は図 1 の左のようになる[12].

一方, 非可換 1-Dirac モノポールの厳密解は次の通り [10]：

$$\Phi \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty}\Phi_n|n\rangle\langle n| = \pm\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\xi_n^2-\xi_{n-1}^2\right)|n\rangle\langle n| + \left(\xi_0^2+\frac{x^3}{\theta}\right)|0\rangle\langle 0|\right\},$$

[10] なお, $G=U(2)$ モノポール解は ξ の積分区間を有限の一区間に定めることで得られる. 特に積分区間を $(-u/2,u/2)$ に定めると $G=SU(2)$ 't Hooft-Polyakov モノポール解が得られる. (u は Higgs 場の真空期待値.) したがって, Nahm 構成で導かれる Dirac モノポール解は $G=U(2)$ モノポール解のある種の極限 (積分区間の極限) として解釈され, そのため以下に紹介するように, Dirac モノポールでは普通考えない Higgs 場が BPS 方程式を満たすものとして解に入ってくる. さらに補足すると $G=U(2)$ モノポールに対応するブレーン配置は, D ストリング (=D1 ブレーン) が, 有限の距離だけ離れた平行な 2 枚の D3 ブレーンに両端を持ち安定化した状況であり, ξ は D3 ブレーンに垂直な 1 つの方向の座標, 積分区間は D ストリングが延びている区間に対応する. したがって Dirac モノポールに対応するブレーン配置は, $G=U(2)$ モノポールの配置において 1 枚の D3 ブレーンを無限遠に追いやった状況に相当する.

[11] モノポールに関する詳しいレヴューとして例えば [9], [17] がある.

[12] 普通は Dirac ストリングを「手でもぎ取る」が, 非可換な場合との比較のため, Dirac ストリングの存在も点線で図示している. (実際はどの方向に伸びていても構わない.)

$$A_z = \frac{1}{\sqrt{2\theta}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\xi_n}{\xi_{n+1}}\right) a^\dagger |n\rangle\langle n|, \quad A_3 = 0. \tag{13}$$

ここで
$$\zeta_n := \int_0^\infty dp\ p^n e^{-\theta p^2 + 2px^3}, \quad \xi_n := \sqrt{\frac{n\zeta_{n-1}}{2\theta\zeta_n}}. \tag{14}$$

(ただし, $\xi_0 := 1/\sqrt{2\theta\zeta_0}$ とする.) この解は至るところ非特異である.

物理的な意味を見るため, まず無限遠の振る舞いを調べる. 無限遠の振る舞い ($r_n + x^3 \to \infty$, $r_n := \sqrt{(x^3)^2 + 2\theta n}$) は次のようになる[13]：

$$\Phi_n \sim \begin{cases} \pm\dfrac{x^3}{\theta} & : n = 0,\ x^3 \to +\infty \\ \pm\dfrac{1}{2r_n} = \pm\dfrac{1}{2\sqrt{(x^3)^2 + 2\theta n}} & : \text{それ以外} \end{cases} \tag{15}$$

$$(B_3)_n \sim \begin{cases} \dfrac{1}{\theta} & : n = 0,\ x^3 \to +\infty \\ -\dfrac{x^3}{2(r_n)^3} & : \text{それ以外} \end{cases} \tag{16}$$

これから分かるように, Higgs 場および磁場はともに $n = 0$, $x^3 \to \infty$, すなわち x^3 軸の正の部分で特別な振る舞いをする[14]. 磁場の他の成分も同様の振る舞いをし, 磁場分布はおおよそ図 1 の右のようになる[15]. x^3 軸の正の部分の一様な磁場 $(B_3(x^3 \to +\infty))_0|0\rangle\langle 0|$ は, Weyl 変換でスター積を用いる記述に戻ると, ちょうど Gauss 型の分布 $(2/\theta)\exp\left\{-((x^1)^2 + (x^2)^2)/\theta\right\}$ になり, その幅は大体 $\sqrt{\theta}$ である. したがって可換空間上への極限 $\theta \to 0$ で, これはちょうどデルタ関数型の分布になり, もとの特異な Dirac ストリングに一致する. 以上のことから, x^3 軸の正の部分の磁束は Dirac ストリングが非可換性のために膨らんだため, その内部の磁場が現れたものであり, 解 (13) は Dirac ストリング付きの Dirac モノポールの非可換版である[16] と解釈するのが妥当であるように思えるが, これについては後でさらに詳しく考察する (8 ページ脚注参照).

次にブレーン解釈を考える. $G = U(1)$ Yang-Mills-Higgs 理論は D3 ブレーンの有効理論で記述できる. このとき Higgs 場 Φ の値は D3 ブレーンの広がった方向に垂直なある 1 方向の D3 ブレーンの座標に対応する. Dirac モノポール解の配位は, まっすぐ無限にのびた D ストリングが D3 ブレーンに端を持ち, 安定化した状況に相当する. (6 ページの脚注参照.) このとき D ストリングは D3 ブレーンと一体化し, D3 ブレーンの突起と解釈される. D ストリングの端は磁荷を帯びており, D3 ブレーンからみるとモノポールに見える. 今考えている非可換の場合に相当するのは, D3 ブレーン上に背景一様 B 場 (磁場と等価) が x^3 方向に入っている状況であり (1 ページの記述 (iii) のこと), D ストリングの端は一様 B 場に引っ張られ, ある傾きを持った状態で D ストリングの張力と釣り合って安定となる [21], [22], [23]. この記述での非可換 1-Dirac モノポール解は [30], [24] で厳密に求められた. (詳しくは森山さんの記事を御参照ください.)

---

[13] 鞍点法で ζ_n の積分を処理した.

[14] 今 n を大体 1-2 平面上の原点からの距離の 2 乗と思っている ($(x^1)^2 + (x^2)^2 \sim 2\theta n$).

[15] ここでは n を $(x^1)^2 + (x^2)^2$ と思い, かつ場 $\mathcal{O} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{O}_n |n\rangle\langle n|$ の $|n\rangle\langle n|$ の部分をちゃんと扱っていないので, 実は非常に荒っぽい議論をしている. 本当は場 $\mathcal{O}$ 全体を Weyl 変換して (ii) のスター積を用いる記述で解釈するのが妥当であるが, 鞍点法で解 (13) に含まれる積分を評価した後でさえ, Laguerre 多項式などに $1/\sqrt{* + n}$ の重みを掛けた無限和をとることになり (4 ページにある表の $|n\rangle\langle n|$ の Weyl 変換式参照), 非常に難しい. 仮に Weyl 変換できたとしても, 非可換空間上には局所的な観測可能量は存在しないため, 磁場の分布図というものは本当は意味をなさない.

[16] x^3 軸の正の部分の磁束は原点に流入する磁束の総量に等しく, 十分大きい 2 次元球面で囲って磁場を表面積分するとゼロになる. すなわち磁荷がゼロとなりモノポールとは言えないわけであるが, 可換な場合に Dirac ストリングを取り除いて扱うのと同様に, この磁束を除いて表面積分すると -1 という望ましい値が得られる [10].

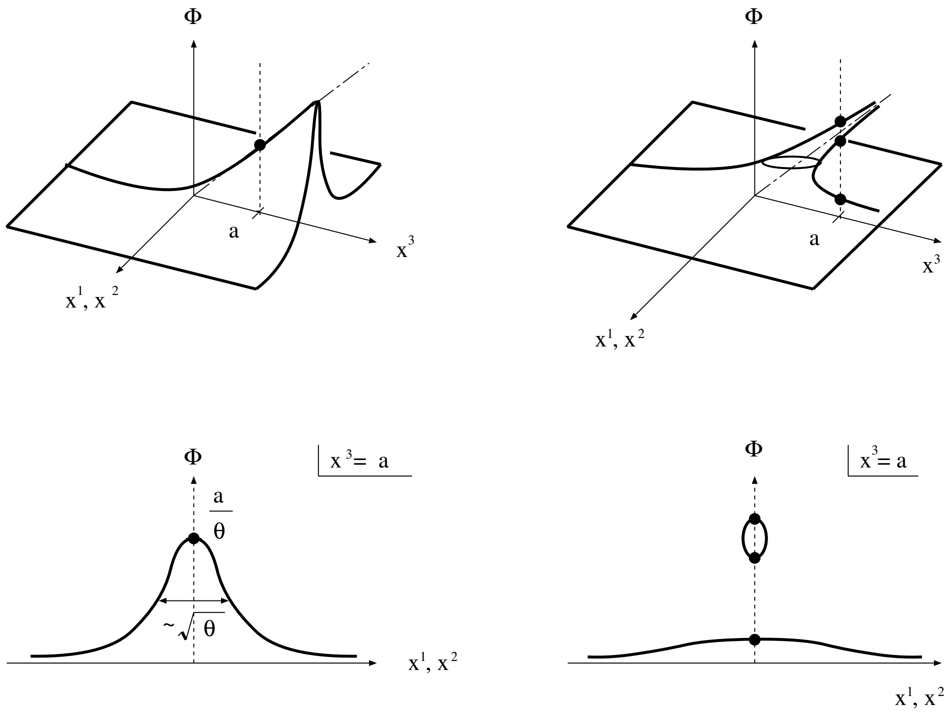

図 2: Higgs 場の配位 (記述 (i) (左) V.S. 記述 (iii) (右))

Higgs 場の配位 (15) を図示すると, 図 2 の左のようになる. DBI 作用での記述 (iii) の解 [30](図 2 の右) と比較すると, Higgs 場の x^3 軸の正の部分での特異な振る舞いは D3 ブレーンが突起してできた D ストリングを表していると考えられる[17]. D ストリングの傾きは, $\pm 1/\theta$ であり, (iii) の記述での非可換モノポールのブレーン解釈とちょうど一致する[18]. ただ, (i) の記述での解 (13) は場の理論の立場で解いたものであるから 1 価であるのに対し, (iii) の記述での解 [30] は多価性を持つため, この部分が対応しない. この問題については現在未解決であり, 今後の研究が待たれる.

3 BPS-Soliton Generating Transformation

このセクションでは, 非可換 BPS 方程式を不変に保つ変換を見出し, 既知のソリトン解から新しいソリトン解を構成する.

[17] 背景に磁場を加えた影響により傾いた D ストリングを記述するため, Higgs 場がその方向に特別な振る舞いをし, それが x^3 軸の正の部分の磁束を表すことになったのである. D ストリングの傾き方は背景磁場を固定すれば一意に定まるため, 磁束の方向も一意に定まる. その磁束は D ストリングの反映であるから (非可換空間上で何が「物理的」かを判定する基準は今のところ確立していないが) 物理的対象であろう. 一方可換空間では, D ストリングが D3 ブレーンに対してちょうど垂直となるため, Higgs 場の特別な振る舞いがちょうどなくなり, D3 ブレーン上の理論で (磁場の供給元であるところの) D ストリングを記述するのがこのときに限りできなくなり, Dirac ストリングという非物理的対象が必要となったのである. したがって, 傾いた D ストリングの反映であるところの磁束と架空の存在である Dirac ストリングとは区別されるべきものであると思われる.

[18] [10] の (6.4) 式から分かるように, (iii) の記述での D ストリングの傾きは, オープン・ストリング・メトリックを $G_{ij} = \delta_{ij}$ と固定したとき, $\pm\left\{(2\pi\alpha')^2 B(1+(\theta/2\pi\alpha')^2)\right\}^{-1}$ である. したがって, Seiberg-Witten リミットを取る前かつ $\theta \ll \alpha'$ の状況 $(B = \theta/(2\pi\alpha')^2)$ でも, Seiberg-Witten リミットを取った後の状況 $(\alpha' \to 0, B = \theta^{-1})$ でも D ストリングの傾きは $\pm 1/\theta$ となる.

まず次の変換を考える：

$$\Phi \to S\Phi S^\dagger, \quad D_i \to SD_iS^\dagger. \tag{17}$$

ただし, S は $S^\dagger S=1$ を満たす演算子である. S が有限サイズの行列であれば, 自動的に $SS^\dagger=1$ も満たされ, S はユニタリ演算子, 変換 (17) はゲージ変換となる. ところが今, S は無限サイズの行列であるため, $SS^\dagger$ は射影演算子になることしか言えない $((SS^\dagger)(SS^\dagger)=SS^\dagger)$.

変換 (17) は一般に運動方程式を不変に保つ [19]：

$$\frac{\delta I}{\delta\mathcal{O}} \to S\frac{\delta I}{\delta\mathcal{O}}S^\dagger. \tag{18}$$

実際, 例えば NC $G=U(1)$ Yang-Mills-Higgs 理論の運動方程式 (3) の 2 番目の方の左辺は

$$\begin{aligned}[D^\mu,[D_\mu,\Phi]] &\to [SD^\mu S^\dagger,[SD_\mu S^\dagger,S\Phi S^\dagger]]\\ &= S[D^\mu,[D_\mu,\Phi]]S^\dagger\end{aligned}$$

と共変的に変換する. ($S^\dagger S=1$ だけが必要であることに注意.)

S の典型例は次のシフト演算子 S_N である：

$$S_N := \sum_{n=0}^{\infty}|n+N\rangle\langle n|, \quad S_N^\dagger = \sum_{n=0}^{\infty}|n\rangle\langle n+N|. \tag{19}$$

これらは $S_N^\dagger S_N=1, \quad S_NS_N^\dagger=1-P_N$ を満たす. ここで,

$$P_N := \sum_{m=0}^{N-1}|m\rangle\langle m| \tag{20}$$

は, Fock 空間 $\mathcal{H}$ の N 次元部分空間 $\mathcal{H}_N=\oplus_{m=0}^{N-1}\mathbf{C}|m\rangle$ への射影演算子であり, $S_NS_N^\dagger$ は, $\mathcal{H}$ に対する $\mathcal{H}_N$ の補空間への射影演算子となる. 以後 S として S_N を用いる.

変換 (17) は BPS 方程式を不変に保たない. 実際, 例えば BPS 方程式 (10) の一番目の方の左辺は

$$\begin{aligned}2[D_z,D_z^\dagger]+\frac{1}{\theta} &\to 2[S_ND_zS_N^\dagger,S_ND_z^\dagger S_N^\dagger]+\frac{1}{\theta}\\ &= S_N(2[D_z,D_z^\dagger])S_N^\dagger+\frac{1}{\theta}\\ &= S_N\left\{2[D_z,D_z^\dagger]+\frac{1}{\theta}\right\}S_N^\dagger+\frac{1}{\theta}P_N\end{aligned}$$

と共変的に変換しない. これは, BPS 方程式が運動方程式と違って, 定数項 (例えば曲率の式に現れた $-i(\theta^{-1})_{ij}$ など) を含んでいるためである. ($S_NS_N^\dagger$ が射影演算子であることにも注意.)

そこで私達は, 変換 (17) を修正することで, BPS 方程式を不変に保つ変換を見出した. NC $G=U(1)$ Yang-Mills-Higgs 理論に対する結果は次の通り：

$$\begin{aligned}\Phi &\to S_N\Phi S_N^\dagger \pm \frac{x^3}{\theta}P_N+\sum_{m=0}^{N-1}\lambda_m^{(4)}|m\rangle\langle m|,\\ D_3 &\to \partial_3+S_NA_3S_N^\dagger+\sum_{m=0}^{N-1}\lambda_m^{(3)}|m\rangle\langle m|,\\ D_z &\to S_ND_zS_N^\dagger+\sum_{m=0}^{N-1}\lambda_m^{(z)}|m\rangle\langle m|.\end{aligned} \tag{21}$$

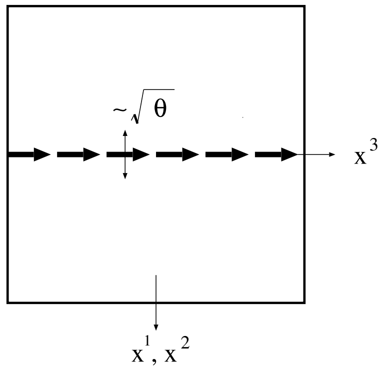

図 3: 1 フラクソンの磁場分布

ここで, $\lambda_m^{(z)} := (1/2)(\lambda_m^{(1)} - i\lambda_m^{(2)})$ であり, $\lambda_m^{(1)},\ \lambda_m^{(2)},\ \lambda_m^{(3)},\ \lambda_m^{(4)}$ は任意の実 (モジュライ・) パラメータである.

例えば, 非可換 1-Dirac モノポール解 (13) を (21) で変換すると, 次の新しいソリトン解が得られる：

$$
\begin{aligned}
\Phi^{\rm new} &= \pm\left\{\sum_{n=N+1}^{\infty}(\xi_{n-N}^2-\xi_{n-N-1}^2)|n\rangle\langle n| + \left(\xi_0^2+\frac{x^3}{\theta}\right)|N\rangle\langle N| + \sum_{m=0}^{N-1}\left(\frac{x^3}{\theta}-\lambda_m^{(4)}\right)|m\rangle\langle m|\right\},\\
D_z^{\rm new} &= \frac{1}{\sqrt{2\theta}}\sum_{n=N}^{\infty}\sqrt{\frac{n+1-N}{n+1}}\frac{\xi_{n-N}}{\xi_{n+1-N}}a^\dagger|n\rangle\langle n| + \sum_{m=0}^{N-1}\lambda_m^{(z)}|m\rangle\langle m|,\\
A_3^{\rm new} &= \sum_{m=0}^{N-1}\lambda_m^{(3)}|m\rangle\langle m|.
\end{aligned}
\tag{22}
$$

これは, Dirac モノポール 1 個とフラクソン N 個の複合系を表す. N フラクソン解は真空解 $\Phi = 0,\ A = 0$ を (21) で変換することで得られ,

$$
\begin{aligned}
\Phi^{\rm fluxon} &= \pm\frac{x^3}{\theta}P_N,\\
D_z^{\rm fluxon} &= S_N\hat{\partial}_z S_N^\dagger, \quad A_3^{\rm fluxon} = 0,\\
B_3^{\rm fluxon} &= \frac{1}{\theta}P_N, \quad B_1^{\rm fluxon} = B_2^{\rm fluxon} = 0.
\end{aligned}
\tag{23}
$$

で与えられる[19] [36], [11]. (λ は全てゼロとした.) 磁場分布は図 3 のようになる.

フラクソンは, 非可換空間特有のソリトンであり, 非可換 Dirac モノポールに現れた x^3 軸の正の部分の磁束が無限にのびているものと解釈できる. 単位長さあたりの質量は $2\pi/g_{\rm YM}^2\theta$ である. したがって変換 (21) は, BPS 方程式を (よって運動方程式も) 不変に保ちながら, エネルギーを変えてしまっているように見える. これは変換 (21) が実は作用も変えてしまっているためであり, その原因は作用の中の曲率の式に定数項が含まれていることである. 変換 (21) は見掛け上はほとんどゲージ変換であるが, 実際は, あるソリトン (フラクソン) 数のセクターの真空を, N 個ソリトン数の多いセクターの真空に移すという変換になっている.

[19] なお, 橋本幸士さんが [20] の中で議論している解："(ii) the smeard D-string with no D3-brane surface" は真空解 $\Phi = 0,\ A = 0$ を, $N = \infty,\ \lambda_m^{(4)} = \Phi_0$ (定数) の場合の (21) で変換することによって得られる.

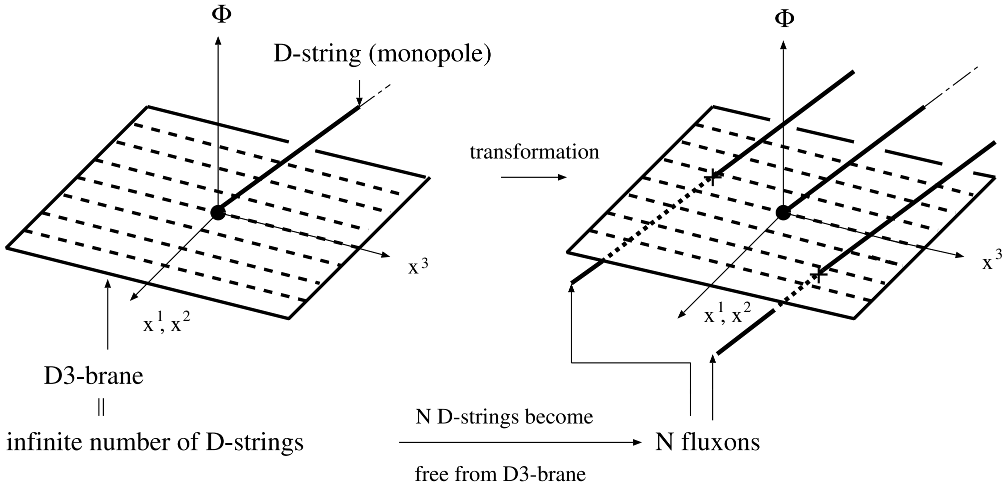

図 4: 行列模型による解釈

最後に行列模型による解釈を与える [1] [20]. 変換 (21) によって得られた新しい解は, 行列表示すると次のようになる：

$$
\begin{aligned}
D_z^{\text{new}} &= S_N \left(\sum_{m,n=0}^{\infty} (D_z^{\text{original}})_{m,n} |m\rangle\langle n| \right) S_N^\dagger + \sum_{m=0}^{N-1} \lambda_m^{(z)} |m\rangle\langle m|, \\
&= \sum_{m,n=N}^{\infty} (D_z^{\text{original}})_{m-N,n-N} |m\rangle\langle n| + \sum_{m=0}^{N-1} \lambda_m^{(z)} |m\rangle\langle m|, \\
&= \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_0^{(z)} & & O & \\ & \ddots & & O \\ O & & \lambda_{N-1}^{(z)} & \\ \hline & O & & D_z^{\text{original}} \end{array} \right).
\end{aligned} \tag{24}
$$

したがって, 変換 (21) は行列表示してみたとき, もとの解を右下方向に N だけずらして, 空いた左上の $N \times N$ 行列の対角成分に適当な項を加えたものとなっている. この変換は行列模型によると, (変換前は) 無限個の D ストリングの束縛状態として記述されていた BPS 状態の D3 ブレーンから N 個の束縛されていない D ストリングが解放されたものと解釈できる (図 4 参照). この N 個の D ストリングが x^3 方向にうまく傾くことで, BPS 状態の配位が実現されたものと考えられる[21]. これがフラクソンである. この N 個の D ストリング (フラクソン) からみると, 式 (24) の左上の任意パラメータ $\lambda_m^{(*)}$ は, Higgs 場の真空期待値であり, D ストリングに垂直な方向の座標を表す. したがって, 新しい解に含まれていた任意パラメータ $\lambda_m^{(*)}$ は, N 個のフラクソンの位置を表す.

[20] 詳しくは (参照論文についても) この研究会報告の石橋延幸さんの記事を御覧ください. なおレヴューとして [27] があります.

[21] インスタントンで非可換パラメータ θ^{12} と θ^{34} がうまくつりあうことで BPS 状態の配位が実現される [1] のとちょうど同じである. したがってフラクソンはスモール・インスタントンのモノポール版であると考えられる [15]. なお背景 B 場中の種々の D ブレーン複合系の議論については松尾俊寛さんの記事を御覧下さい.

4 Conclusion and Discussion

インスタントン, 渦[22] についても同様の議論ができる. この場合, 変換式は (17) にモジュライの項 (λ を含む項) を加えたものでよいが[23], 非可換パラメータに制約をつけなければならない :

- インスタントンの場合 :

  非可換パラメータの自己双対性がゲージ場の自己双対性と一致するときに限り, BPS 解を生成することができる. このとき (完備化された) インスタントン・モジュライ空間は可換な場合と変わらず特異なままである.

  具体的既知解としては, 非可換パラメータの自己双対性がゲージ場の自己双対性とちょうど逆の場合の解 [34], [5] ではなく, 非可換パラメータの自己双対性がゲージ場の自己双対性と一致する場合の解 [7] を持ってくる必要がある. 変換後の解は, 変換前の非可換 BPS インスタントンとスモール・インスタントン (= サイズが最小のインスタントン) の (BPS) 複合系となる[24].

- 渦の場合 :

  非可換パラメータのスケールと渦の大きさのスケールが (向きも含めて) 一致するときに限り, BPS 解を生成することができる.

  具体的既知解としては今のところ真空解を持ってくるしかない[25]. 変換後の解は, N 個の「スモール渦」の BPS 解となる. これはモジュライ・パラメータが入っている分だけ, [2] の解の一般化になっている.

いずれの場合も, 私達の見出した変換によって, 変換前の非可換 BPS ソリトンと非可換空間特有のソリトンの (BPS) 複合系が得られる. これらの変換を用いることで, 任意の既知解からさまざまな新しい解が構成できる. そのための条件として非可換パラメータとゲージ場の自己双対性が密接に関わってくる. またモノポールのときと同じく, 変換によって, BPS 方程式, 運動方程式は不変に保たれるが, 作用は変わってしまい, あるソリトン数のセクターの真空が異なるソリトン数のセクターの真空へ移される. これはやはり作用の中の曲率の式に定数項が含まれていることによる.

Acknowledgements

この記事は 2001 年 2 月 19 ~ 21 日に行われた基研研究会「ストリング理論と場の理論における非可換幾何」における私の発表のプロシーディングです[26]. 貴重な発表の機会を与えて下さった世話人の方々, ならびに聴講, 議論して下さった方々全てに, この場をお借りして感謝申し上げます. また, [16] の共同研究者でもある寺嶋靖治さんからは非可換幾何学のアイデアや現状について非常に多くのことを学ぶことができ, 理解が深まりました. 他の研究会や各大学でのセミナー発表で得たものもたくさんあり, それらの一部はこの記事に反映されていることと思います.

この記事は日本育英会および日本証券奨学財団の経済援助のもと作成されました.

[22] Abelian-Higgs 模型の BPS ソリトンのことである.

[23] 渦の記述に必要な, ゲージ群の基本表現に属する Higgs 場 ϕ に対しては $\phi \to S\phi$ と変換する. (ϕ にはモジュライの項は加えてはならない.)

[24] 個々のインスタントン解の性質については古内さんの記事や論文 [1], [7] を御覧ください.

[25] 既知解として [26] や [28] の解を持ってくることは出来ない. (これは「向き」が逆の場合の解)

[26] この記事の作成にあたり, 研究会以後の発展について少し追加した部分があります.

A Known NC BPS Solitons

既知の非可換 BPS ソリトンを以下の表にまとめた.

例	(i) オペレーター形式の記述	(ii) スター積を用いる記述	(iii) 背景一様 B 場中の DBI 作用による記述
インスタントン	• $U(1), U(2)$ $k=1,2,\cdots$ ASD 解 (θ : SD) : Nekrasov-Schwarz [34]*, 古内 [5]*, $\cdots$ • $U(1)$ $k=1$ ASD 解 (θ : 任意) : Nekrasov [32] • $U(2)$ $k=1$ SD 解 (θ : SD) : 古内 [7]* ◉ SD Small Instanton 解 (θ : SD, k : 任意) : Aganagic et al. [1], 古内 [7]*		• $U(1)$ $k=1$ ASD 解 (B : SD) : 寺嶋 S [38] • $U(1)$ $k=1$ ASD 解 (B : 任意) : 森山 [31] • 〈 関連論文 〉: Mariño et al. [29], $\cdots$
モノポール	• $U(1)$ $k=1$: Gross-Nekrasov [10]* • $U(2)$ $k=1$: Gross-Nekrasov [12]* ◉ Fluxon 解 (k : 任意) : Gross-Nekrasov [11], Polychronakos [36], 浜中 [15]*	• $U(1)$ $k=1$ (θ 1 次) : 橋本 K・平山 [23] • $U(2)$ $k=1$ (θ 1 次) : Bak [2]*, 橋本 K・畑・森山 [22] (θ 2 次) : 後藤・畑 [8]	• $U(1)$ $k=1$ (Higgs 場) : 森山 [30] (Gauge 場) : 橋本 K・平山・森山 [24] • 〈 関連論文 〉: 橋本 A・橋本 K [21], $\cdots$
渦	• U(1) ASD 解 ($\theta \to \infty$) : Jatkar-Mandal-Wadia [26] ◉ U(1) SD "Small Vortex" 解 ($\theta = 1/v^2, k$: 任意) : Bak [3] • 〈 関連論文 〉: Lozano-Moreno-Schaposnik [28], Bak-Lee-Park [4], $\cdots$	?	? ?

引用論文[27] の肩に星印がついているものは, ADHM/Nahm 構成法を用いたものである. また, SD, ASD はそれぞれ自己双対 (Self-Dual), 反自己双対 (Anti-Self-Dual) の略である. "◉" の解は "Solution Generating Technique" で生成される非可換空間特有の BPS ソリトンである[28].

(ii) の解は可換空間上の解 ($\theta = 0$ の場合の解) の周りで θ 展開して求められている.

インスタントンに関しては, (ii) の解はすぐに求められると思われるが, (ii) と (iii) との対応はモノポールほど議論されていない.

[27] 敬称は省略させていただきました.

[28] "Small Vortex" 解を除いた "◉" の解と $U(2)$ $k=1$ SD インスタントン解の一部については, 厳密な Seiberg-Witten マップ [35] を用いて (iii) の記述の解が求められている [25]. Solution Generating Technique で生成されるソリトンは Non-BPS の場合も含めて全て (iii) の記述では特異な解となる.

モノポールに関しては, (ii), (iii) の論文は (ii) と (iii) との対応についても詳しく議論しているので, (ii), (iii) の記述の間の境界線は明確ではない.

渦に関しては, (ii) の解は, 可換空間上の渦の解が知られていないため, 可換空間上の解の周りで θ 展開して求めることはできない. (iii) の解は, 渦の D ブレーンでの記述が知られていないため, 全く議論されていない. (Non-BPS の場合はこの限りでない.)

参考文献

[1] M. Aganagic, R. Gopakumar, S. Minwalla and A. Strominger, JHEP **0104** (2001) 001, hep-th/0009142

[2] D. Bak, Phys. Lett. B **471** (1999) 149, hep-th/9910135

[3] D. Bak, Phys. Lett. B **495** (2000) 251, hep-th/0008204

[4] D. Bak, S. U., K. Lee and J. Park, "Noncommutative vortex solitons," hep-th/0011099

[5] K. Furuuchi, Prog. Theor. Phys. **103** (2000) 1043, hep-th/9912047

[6] K. Furuuchi, "Topological charge of U(1) instantons on noncommutative $\mathbf{R}^4$," hep-th/0010006

[7] K. Furuuchi, JHEP **0103** (2001) 033, hep-th/0010119

[8] S. Goto and H. Hata, Phys. Rev. D **62** (2000) 085022, hep-th/0005101

[9] P. Goddard and D. I. Olive, Rept. Prog. Phys. **41** (1978) 1357

[10] D. J. Gross and N. A. Nekrasov, JHEP **0007** (2000) 034, hep-th/0005204

[11] D. J. Gross and N. A. Nekrasov, JHEP **0010** (2000) 021, hep-th/0007204

[12] D. J. Gross and N. A. Nekrasov, JHEP **0103** (2001) 044, hep-th/0010090

[13] 浜中 真志, 『ADHM/Nahm 構成法とその双対性』, (雑誌「素粒子論研究」にまもなく投稿)

[14] 浜中 真志, 『非可換ソリトンの厳密解の構成法』[29], 素粒子論研究 **103-5** (2001-8) E16
※2000 年 12 月の基研研究会「場の量子論の基礎的諸問題と応用」のプロシーディング

[15] M. Hamanaka, "ADHM/Nahm construction of localized solitons in non-commutative gauge theories," hep-th/0109070

[16] M. Hamanaka and S. Terashima, JHEP **0103** (2001) 034, hep-th/0010221

[17] J. A. Harvey, "Magnetic monopoles, duality, and supersymmetry," hep-th/9603086

[29] この記事 [14] の増補版に相当する記事が http://www.math.h.kyoto-u.ac.jp/~takasaki/soliton-lab/nis/iss2001/ にあります. なお私が書いた記事については, 私のホームページ [http://www2.yukawa.kyoto-u.ac.jp/~hamanaka] にも置かれております.

[18] J. A. Harvey, "Komaba lectures on noncommutative solitons and D-branes," hep-th/0102076

[19] J. A. Harvey, P. Kraus and F. Larsen, JHEP **0012** (2000) 024, hep-th/0010060

[20] K. Hashimoto, JHEP **0012** (2000) 023, hep-th/0010251

[21] A. Hashimoto and K. Hashimoto, JHEP **9911** (1999) 005, hep-th/9909202

[22] K. Hashimoto, H. Hata and S. Moriyama, JHEP **9912** (1999) 021, hep-th/9910196

[23] K. Hashimoto and T. Hirayama, Nucl. Phys. B **587** (2000) 207, hep-th/0002090

[24] K. Hashimoto, T. Hirayama and S. Moriyama, JHEP **0011** (2000) 014, hep-th/0010026

[25] K. Hashimoto and H. Ooguri, "Seiberg-Witten transforms of noncommutative solitons," hep-th/0105311

[26] D. P. Jatkar, G. Mandal and S. R. Wadia, JHEP **0009** (2000) 018, hep-th/0007078

[27] A. Konechny and A. Schwarz, "Introduction to M(atrix) theory and noncommutative geometry," hep-th/0012145

[28] G. S. Lozano, E. F. Moreno and F. A. Schaposnik, Phys. Lett. B **504** (2001) 117, hep-th/0011205

[29] M. Marino, R. Minasian, G. Moore and A. Strominger, JHEP **0001** (2000) 005, hep-th/9911206

[30] S. Moriyama, Phys. Lett. B **485** (2000) 278, hep-th/0003231

[31] S. Moriyama, JHEP **0008** (2000) 014, hep-th/0006056

[32] N. A. Nekrasov, "Noncommutative instantons revisited," hep-th/0010017

[33] N. A. Nekrasov, "Trieste lectures on solitons in noncommutative gauge theories," hep-th/0011095

[34] N. Nekrasov and A. Schwarz, Commun. Math. Phys. **198** (1998) 689-703, hep-th/9802068

[35] Y. Okawa and H. Ooguri, "An exact solution to Seiberg-Witten equation of noncommutative gauge theory," Phys. Rev. D **64** (2001) 046009, hep-th/0104036

[36] A. P. Polychronakos, Phys. Lett. B **495** (2000) 407, hep-th/0007043

[37] N. Seiberg and E. Witten, JHEP **9909** (1999) 032, hep-th/9908142

[38] S. Terashima, Phys. Lett. B **477** (2000) 292, hep-th/9911245