# Recent Developments in Non-Commutative Gauge Theory

東京大学大学院 理学系研究科 物理学専攻 素粒子論研究室　浜中 真志

E-mail: hamanaka@hep-th.phys.s.u-tokyo.ac.jp

非可換空間上の場の理論は, 一様磁場中の物理系の解明にその威力を発揮し, ここ数年目覚ましく進展した. 特にタキオン凝縮といったDブレーンの力学への応用に大成功を収め, 今や非可換の考え方や手法は素粒子論の広い分野に浸透したと言えよう. このお話では, 非可換空間上のゲージ理論の最近の進展について, 非可換ソリトン ( = 非可換空間上のソリトン) を題材に振り返り, それが果たした役割や特長, 問題点を紹介し, 今後の方向性について議論したい.

## 1 Introduction

非可換空間は座標関数同士の積の非可換性で特徴付けられる：

$$[x^i, x^j] = i\theta^{ij}. \tag{1}$$

ここで, $\theta^{ij}$ は反対称な実定数であり, 非可換パラメータと呼ばれる. [1] この関係式は, 量子力学の正準交換関係

$$[q, p] = i\hbar \tag{2}$$

に類似しており,「空間の不確定性関係」を導く. このことから非可換空間上では, 粒子の位置は完全に決めることができず, ある広がった分布を持つ. その結果, 可換な空間上では存在した場の特異点が, 非可換空間上では解消されるということが起こりうる. 分布の広がりの幅は $\sqrt{|\theta^{ij}|}$ に比例し, 可換な空間への極限 $\theta^{ij} \to 0$ で特異性が復活する.

非可換空間上の場の理論においても運動方程式, BPS 方程式を定義することができ, そのソリトン解を非可換ソリトンと呼ぶ. 非可換ソリトンにおいても, 特異点解消が一般に起こり, 可換な場合には見られない面白い結果を生み出す. 例えば非可換インスタントンでは (完備化された) インスタントン・モジュライ空間の特異点が一般に解消し [50], 特異でない $U(1)$ インスタントン解を具体的に構成することができる [52].

非可換空間上の場の理論は一般に背景に磁場のかかった物理系を記述する.[2] 近年の非可換空間上のゲージ理論 (以後「NC ゲージ理論」と略す.) [3] の爆発的発展は主にこの事実の弦理論的再現 [7], [10], [56] に基づくものである . Dブレーン上に誘起されるゲージ理論のソリトンは, より低い次元のDブレーンを表す. したがって背景に一様な $B$ 場 (磁場と等価) のかかった状況でのDブレーンは非可換ソリトンとして記述され, 非可換 (BPS) ソリトンの厳密解の構成により, タキオン凝縮といったDブレーンの (静) 力学が厳密に議論できるのである.

この記事では, まずセクション 2 で NC ゲージ理論の基礎を概説したのち, セクション 3 で, NC ゲージ理論と一様 $B$ 場 (磁場) 中のDブレーン上のゲージ理論との等価性を ADHM/Nahm 構成法を題材に議論する. ADHM/Nahm 構成法は自己双対ゲージ場の本質を最も的確に捉える一つの見方であるが, Dブレーンの複合系からその物理的解釈を行うと非常に明解に理解される. ADHM/Nahm 構成法は非可

[1] 非可換パラメータ $\theta^{ij}$ は今のところ手で与えるしかない.

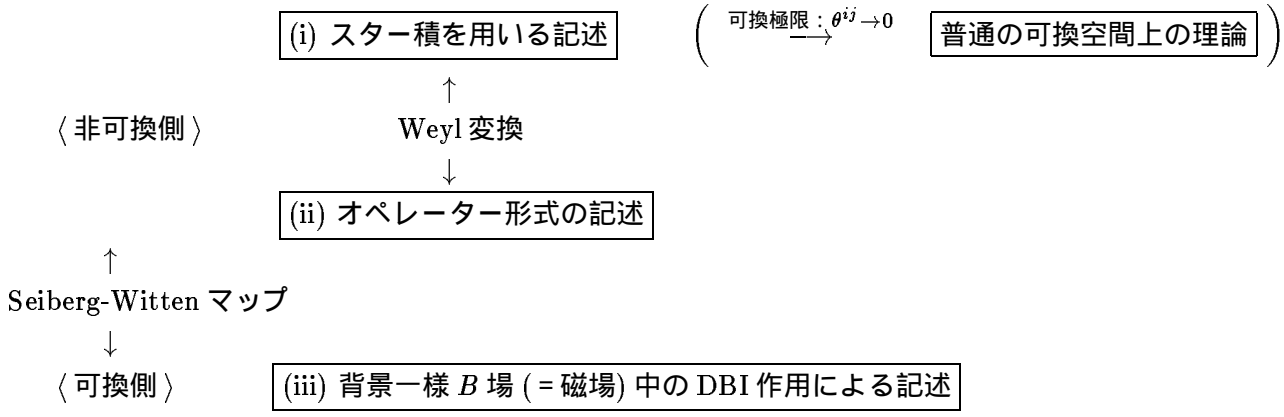
[2] 磁場中の荷電粒子の運動で重心座標が非可換に見えるという話は良く知られている (例えば [24] のセクション 3.1).

[3]「非可換ゲージ理論」と略すと, 非可換空間上の (Non-Commutative) ゲージ理論なのか, ゲージ群が非可換 (Non-Abelian) なゲージ理論なのか, 区別が付かなくなるので.

換化できるため, 非可換の効果が $B$ 場 (磁場) の効果として見えるはずであり, 実際それが具体解などから見て取れる. それについて詳しく議論する. セクション 4 では, ADHM/Nahm 構成法と並ぶ強力な非可換ソリトンの構成法：Solution Generating Technique を紹介する. これこそがタキオン凝縮の議論に大きな進展をもたらした重要な手法であり, 広い分野にインパクトを与えた. 最後にセクション 5 で, 現状と今後の方向性について私なりの意見を述べる.

## 2 Non-Commutative(=NC) Gauge Theory

NC ゲージ理論の記述には次の 3 つの方法があり, Weyl 変換および Seiberg-Witten マップによって 1 対 1 に対応づけられる[4] ：




Seiberg と Witten が明らかにしたのは (i) と (iii) の等価性であるが, ここでは触れない. このセクションではまずスター積を用いる記述 (i) によって NC ゲージ理論を定義し, それから Weyl 変換という変換を用いてオペレーター形式の記述 (ii) に移る. オペレーター形式の記述で厳密解を求める.

簡単のため, この記事では NC $G=U(1)$ $(3+1)$ 次元 Yang-Mills-Higgs 理論を具体例として議論を進める. 作用 $I_{\rm YMH}$ は次の通り：

$$I_{\rm YMH}=-\frac{1}{4g_{\rm YM}^2}\int d^4x\ {\rm Tr}\left(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}+2D_\mu\Phi D^\mu\Phi\right). \tag{3}$$

ここで, $\Phi$ はゲージ群 $G$ の随伴表現に属する Higgs 場であり, $d^4x:=dx^0dx^1dx^2dx^3$, $F_{\mu\nu}:=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu+[A_\mu,A_\nu]$, $D_\mu:=\partial_\mu+A_\mu$ $(\mu,\nu=0,1,2,3)$ である. 運動方程式, BPS 方程式は次のようになる：

$$\text{運動方程式}\quad:\quad [D^\nu,F_{\nu\mu}]+[\Phi,[\Phi,D_\mu]]=0,\quad [D^\mu,[D_\mu,\Phi]]=0, \tag{4}$$

$$\text{BPS 方程式}\quad:\quad B_i=\pm[D_i,\Phi]. \tag{5}$$

ここで, $B_i:=-(i/2)\epsilon_{ijk}F^{jk}$ $(i,j,k=1,2,3)$ は磁場である. 複号は上段が Self-Dual, 下段が Anti-Self-Dual の場合を表す (以後同様). BPS 方程式はエネルギー $E$ の下限を満たすものとして次のように導かれた：

$$E=\frac{1}{2g_{\rm YM}^2}\int d^3x\ {\rm Tr}\left[\frac{1}{2}F_{ij}F^{ij}+D_i\Phi D^i\Phi\right]=\frac{1}{2g_{\rm YM}^2}\int d^3x\ {\rm Tr}[\underbrace{(B_i\mp D_i\Phi)}_{=0\ \Leftrightarrow\ \text{BPS}}{}^2\pm\partial_i(\epsilon_{ijk}F^{jk}\Phi)]. \tag{6}$$

[4] この記事では「非可換 Euclid 空間」のみを扱う. なお「曲がった非可換空間」では (i) と (ii) の 1 対 1 対応は一般には成り立たない. 「曲がった非可換空間」の解説を含む記事として例えば [59] がある. また記述 (iii) は, 座標関数同士の非可換性 (1) がなく, 可換側と呼ばれる.

以後, 非可換座標は $x^1, x^2$ であるものとする. [5] すなわち

$$[x^1, x^2] = i\theta, \quad (\theta > 0), \quad \text{それ以外の座標同士：} \quad [x^\mu, x^\nu] = 0. \tag{7}$$

(i) スター積を用いる記述

スター積は普通の可換な関数 (場) に対して定義される積の一つである[6] :

$$\begin{aligned} f * g(x) &:= \exp\left(\frac{i}{2}\theta^{ij}\partial_i^{(x')}\partial_j^{(x'')}\right) f(x')g(x'')\Big|_{x'=x''=x} \\ &= f(x)g(x) + \frac{i}{2}\theta^{ij}\partial_i f(x)\partial_j g(x) + \mathcal{O}(\theta^2) \end{aligned} \tag{8}$$

スター積は次の重要な性質を持つ :

- 結合則が成り立つ : $f * (g * h) = (f * g) * h$.
- 座標関数同士の非可換性 (1) を再現 : $[x^i, x^j]_* := x^i * x^j - x^j * x^i = i\theta^{ij}$.
- $\theta^{ij} \to 0$ で普通の積に戻る.

NC ゲージ理論は, 普通の可換空間上のゲージ理論に現れる場同士の積を全てスター積に置き換えることで得られる. したがって, NC $G = U(1)$ Yang-Mills-Higgs 理論の作用, 運動方程式, および BPS 方程式はそれぞれ, 式 (3), (4), (5) において場同士の積が全てスター積に置き換わったものに等しい. 作用に無限個の微分が入っているが, [7] 場は普通の可換な関数なので, 運動方程式, BPS 方程式を導出するには, 可換な場合と同じ手順を踏めばよいのである. なおゲージ群は普通 $U(N)$ で考える. [8]

(ii) オペレーター形式の記述

今度は, 座標の非可換性 (1) から出発して NC ゲージ理論を定義する. 新しい変数を $\hat{a} := (1/\sqrt{2\theta})\hat{z}$, $\hat{a}^\dagger := (1/\sqrt{2\theta})\hat{\bar{z}}$ (ただし $\hat{z} := \hat{x}^1 + i\hat{x}^2$) として定義すると, $[\hat{x}^1, \hat{x}^2] = i\theta$ より,

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 \tag{9}$$

が分かる. これより, $\hat{a}^\dagger, \hat{a}$ はそれぞれ調和振動子の生成, 消滅演算子と解釈できる. これらが作用する Fock 空間を $\mathcal{H}$ と書くと, $\mathcal{H} = \oplus_{n=0}^{\infty}\mathbf{C}|n\rangle$ である. ここで, $|n\rangle := \left\{(\hat{a}^\dagger)^n/\sqrt{n!}\right\}|0\rangle$, $(n = 0, 1, \ldots)$ は占有数表示の基底であり, $\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle = n|n\rangle, \hat{a}|0\rangle = 0$ を満たす.

場 $\hat{f}$ は $\hat{x}$ の関数であるから, Fock 空間 $\mathcal{H}$ に作用する演算子となり, 占有数表示で以下のように表される (次ページ表参照) :

$$\hat{f}(\hat{x}^1, \hat{x}^2, x^3) = \sum_{m,n=0}^{\infty} f_{mn}(x^3)|m\rangle\langle n| \overset{\text{場が } x^3 \text{軸対称な場合 (次ページ表参照)}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x^3)|n\rangle\langle n|. \tag{10}$$

(i) と (ii) の等価性[9]

[5] 時間座標を非可換にすると因果律やユニタリティが破れるという議論があり, 普通は空間座標のみを非可換にする. (時間座標を非可換にする NCOS 理論, OM 理論と呼ばれるものも存在し, 例えば [1] の中の寺嶋さんの解説がある.) また非可換パラメータの表す行列は反対称であり, そのランクは偶数であるから, このように非可換性を導入するしかない.

[6] 正確にはスター積はもっと一般的に定義されるものであるが, ここでは「非可換 Euclid 空間」のみを扱うので, このような具体的表式 (Moyal 積と呼ばれる) で表した.

[7] このため非可換空間上の場の理論は, 一般に非局所性を持ち, またパリティを破るが (非可換パラメータ $\theta^{ij}$ の存在があらわに Lorentz 対称性を破っていることからも分かる), 一様磁場中の物理系と等価であり, 意味のない理論というわけではない.

[8] 積がスター積なので $g_1, g_2 \in G$ であったとしても, $g_1 * g_2 \in G$ とは限らない. 例えば $G = SU(N)$ だと行列式が 1 という条件からはみ出してしまう.

[9] 詳しくは [24] などを参照.

(i) と (ii) は「非可換 Euclid 空間」では等価な記述であり, Weyl 変換という変換によって対応づけられる. (i) の記述における場 $f(x^1,x^2)$ は, 次式で定義される Weyl 変換によって, (ii) の記述における場 $\hat{f}(\hat{x}^1,\hat{x}^2)$ にうつされる (簡単のため $x^3$ 依存性は考えない) :

$$\begin{aligned}\hat{f}(\hat{x}^1,\hat{x}^2) &:= \frac{1}{(2\pi)^2}\int dk_1dk_2\ \tilde{f}(k_1,k_2)e^{-i(k_1\hat{x}^1+k_2\hat{x}^2)}, \\ \text{ただし,}\qquad \tilde{f}(k_1,k_2) &:= \int dx^1dx^2\ f(x^1,x^2)e^{i(k_1x^1+k_2x^2)}.\end{aligned} \tag{11}$$

場 $f(x^1,x^2)$ を一度 Fourier 変換したものを, そのまま逆 Fourier 変換する際, exp の肩の座標 $x^1,x^2$ をオペレーター $\hat{x}^1,\hat{x}^2$ に置き換えて変換したようなものである :

$$\begin{array}{ccc} & f(x^1,x^2) & \\ \swarrow & \vert & \\ \tilde{f}(k_1,k_2) & \text{Weyl 変換} & \\ \searrow & \downarrow & \\ & \hat{f}(\hat{x}^1,\hat{x}^2). & \end{array}$$

Weyl 変換はスター積を行列の積にうつす : $\widehat{f*g}=\hat{f}\cdot\hat{g}$.

Weyl 変換の逆変換は直接には

$$f(x^1,x^2)=\int dk_2\ e^{-ik_2x^2}\left\langle x^1+\frac{k_2}{2}\middle|\hat{f}(\hat{x}^1,\hat{x}^2)\middle|x^1-\frac{k_2}{2}\right\rangle \tag{12}$$

と書ける. Weyl 変換により, 場や掛け算だけでなく, 微分, 積分も 1 対 1 に対応し, (i) と (ii) の記述は等価になる. 対応関係は以下の通り :

| | (i) スター積を用いる記述 | (ii) オペレーター形式の記述 |
|---|---|---|
| 場 | 普通の関数<br>$f(x^1,x^2)$ | 無限次元正方行列<br>$\hat{f}(\hat{x}^1,\hat{x}^2)=\sum_{m,n=0}^{\infty}f_{mn}\vert m\rangle\langle n\vert$ |
| 積<br>$(\widehat{f*g}=\hat{f}\hat{g})$ | スター積<br>結合則 : $f*(g*h)=(f*g)*h$ | 行列の積<br>結合則 : $\hat{f}(\hat{g}\hat{h})=(\hat{f}\hat{g})\hat{h}$ (自明) |
| 非可換性 | $[x^i,x^j]_*:=x^i*x^j-x^j*x^i=i\theta^{ij}$ | $[\hat{x}^i,\hat{x}^j]=i\theta^{ij}$ |
| 微分 | $\partial_i f$<br><br>特に $\partial_i x^j=\delta_i{}^j$ | $\partial_i\hat{f}:=[\underbrace{-i(\theta^{-1})_{ij}\hat{x}^j}_{=:\hat{\partial}_i},\hat{f}]$<br>特に $\partial_i\hat{x}^j=-i(\theta^{-1})_{ik}[\hat{x}^k,\hat{x}^j]=\delta_i{}^j$ |
| 積分 | $\int dx^1dx^2\ f(x^1,x^2)$ | $2\pi\theta\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}\hat{f}(\hat{x}^1,\hat{x}^2)$ |
| 曲率 | $F_{ij}=\partial_iA_j-\partial_jA_i+[A_i,A_j]_*$ | $\hat{f}_{ij}=\partial_i\hat{A}_j-\partial_j\hat{A}_i+[\hat{A}_i,\hat{A}_j]$<br>$=[\hat{D}_i,\hat{D}_j]-i(\theta^{-1})_{ij}$<br>(ただし $\hat{D}_i:=\hat{\partial}_i+\hat{A}_i$) |
| (ii) の行列要素<br><br>$\vert$<br>( $x^1$-$x^2$平面<br>で回転対称 )<br>$\downarrow$ | $\sqrt{\frac{n!}{m!}}\left(2r^2/\theta\right)^{\frac{m-n}{2}}e^{i(m-n)\varphi}\times$<br>$2(-1)^nL_n^{m-n}(2r^2/\theta)e^{-\frac{r^2}{\theta}}$<br>$\vert$<br>( $\varphi$ に依らない<br>$\Leftrightarrow m=n$ )<br>$\downarrow$ | $\vert n\rangle\langle m\vert$<br><br>$\vert$<br>( $(\hat{x}^1)^2+(\hat{x}^2)^2\sim\hat{a}^\dagger\hat{a}$ と可換<br>$\Leftrightarrow m=n$ )<br>$\downarrow$ |
| ある射影 | $2(-1)^nL_n(2r^2/\theta)e^{-\frac{r^2}{\theta}}$ | $\vert n\rangle\langle n\vert$ |

ここで, $(r,\varphi)$ は極座標, $L_n^\alpha(x)$ は次式で定義される Laguerre 多項式である：

$$L_n^\alpha(x) := \frac{x^{-\alpha}e^x}{n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n (e^{-x}x^{n+\alpha}). \tag{13}$$

(特に $L_n(x) := L_n^0(x)$.) 注意すべきことは, オペレーター形式の曲率の式で, $[\hat{D}_i, \hat{D}_j]$ とくくったため, $[\hat{\partial}_i, \hat{\partial}_j](= i(\theta^{-1})_{ij})$ を相殺するための定数項 $-i(\theta^{-1})_{ij}$ が現れたことである.

これによりオペレーター形式の記述での BPS 方程式 (5) は

$$\begin{aligned} (\hat{B}_3 =)\ \ 2[\hat{D}_z, \hat{D}_z^\dagger] + \frac{1}{\theta} &= \pm[\hat{D}_3, \hat{\Phi}], \\ (\hat{B}_z =)\qquad [\hat{D}_3, \hat{D}_z] &= \pm[\hat{D}_z, \hat{\Phi}] \end{aligned} \tag{14}$$

と表される. ただし, $\hat{D}_z := (1/2)(\hat{D}_1 - i\hat{D}_2)$, $\hat{B}_z := (1/2)(\hat{B}_1 - i\hat{B}_2)$ のように 1,2 成分を複素に組んだ. $\hat{B}_3$ に定数項が含まれているのは, 上述の通りである.

以後, 解の構成の議論は全てオペレーター形式の記述で行う. このセクションでは Fock 空間に作用する演算子にはハットを付けたが以後省略する. また簡単のため以後 Anti-Self-Dual 方程式を扱う.

## 3 ADHM/Nahm Construction

ADHM/Nahm 構成法[10] とは, 任意のインスタントン解/モノポール解の非常に強力な構成法の一つであり, 多くの応用がある. これは, インスタントン/モノポールの解空間 (4 次元/3 次元自己双対方程式の解空間) と ADHM/Nahm 方程式の解空間との 1 対 1 対応 (双対性) を利用したものであり, それらの解空間どうしは「Dirac 方程式の零モード」を介して対応づけられる. 非可換インスタントン/モノポール解もこの方法で構成することができ, 既知の厳密解は (オペレーター形式では) 主にこの方法で求められた. ここでは ADHM/Nahm 構成法の D ブレーン解釈を紹介し, その双対性が成り立つ理由と, 空間を非可換にした効果と背景に $B$ 場をかけた影響との関連について論じる.[11]

まず, $G = U(N)$, $k$ インスタントンの ADHM 構成法について説明する. 可換空間上の ADHM 方程式は正確には次のようになる：

$$\begin{aligned} (\mu_R :=)\qquad & [B_1, B_1^\dagger] + [B_2, B_2^\dagger] + II^\dagger - J^\dagger J\ (\equiv -[z_1, \bar{z}_1] - [z_2, \bar{z}_2]) = 0, \\ (\mu_C :=)\qquad & [B_1, B_2] + IJ = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

ここで, $B_1, B_2$ は $k \times k$ 行列, $I, J^\dagger$ は $k \times N$ 行列である. 非可換空間上では, (15) の第 1 式の括弧内の部分が ノンゼロとなり, ADHM 方程式は

$$\begin{aligned} (\mu_R :=)\qquad & [B_1, B_1^\dagger] + [B_2, B_2^\dagger] + II^\dagger - J^\dagger J = -2(\theta^{12} + \theta^{34}) =: \zeta, \\ (\mu_C :=)\qquad & [B_1, B_2] + IJ = 0. \end{aligned} \tag{16}$$

のように少し修正される. 非可換空間上での 4 次元自己双対方程式[12]

$$\begin{aligned} (F_{z_1\bar{z}_1} + F_{z_2\bar{z}_2} =)\qquad & -[D_{z_1}, D_{z_1}^\dagger] - [D_{z_2}, D_{z_2}^\dagger] - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\theta^{12}} + \frac{1}{\theta^{34}}\right) = 0, \\ (F_{z_1 z_2} =)\qquad & [D_{z_1}, D_{z_2}] = 0. \end{aligned} \tag{17}$$

[10] 包括的レヴューとして [20] がある. 参考文献もそこに網羅してある.

[11] 背景 $B$ 場中の D ブレーン複合系に関する議論については, この研究会の今泉さん, 村上さん, 太田さん, 佐藤さんの発表および, [1] の中の松尾 (俊) さんの記事も御参照ください.

[12] いま非可換性は (空間) 4 次元方向全てに導入している. ($\theta^{12}$ と $\theta^{34}$ のみノンゼロとした.)

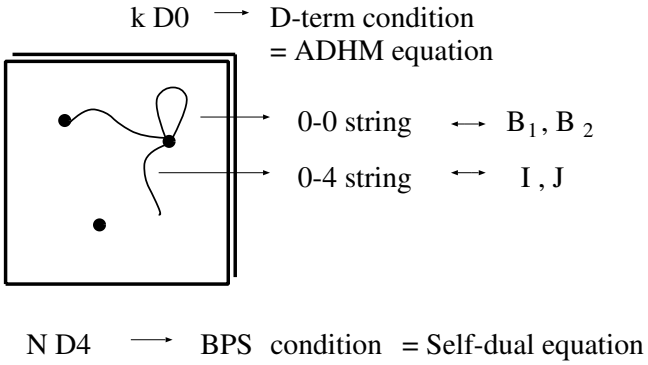



図 1: ADHM 構成法の D ブレーン解釈

と見比べれば, ADHM 方程式と 4 次元自己双対方程式とで美しく対応していることが良く分かる. (16) の第 1 式の右辺の定数 $\zeta$ が ノンゼロであれば, (完備化された) インスタントン・モジュライ空間の特異点が解消することが知られている [50]. したがって解消された特異点の部分に対応する, 可換空間にはないインスタントン解が存在することになる. これが $U(1)$ インスタントンであり, 実際に非可換 $\mathbf{R}^4$ 上で非特異な解として構成された [52], [12].

ここでこれらの方程式の D ブレーン解釈 [9], [61] を紹介する. 背景となる系は $k$ 個の D0 ブレーンと $N$ 枚の D4 ブレーンの BPS 複合系である (図 1 参照).

この系を 2 つの異なった立場から記述しよう. まず D4 から見る. このとき例えばゲージーノの SUSY 変換の式から, (4 次元) 自己双対方程式がこの BPS 系を記述するものとして得られ, D0 ブレーンはインスタントンとして記述される. 一方 D0 から見ると SUSY を保つ条件は D 項条件として得られる. D 項条件を書き下すには, D0 上の SYM 理論の (ハイパー多重項の) [13] 零質量スカラー場を持ってこなければならないが, これは 0-0 ストリングからくるもの ($k \times k$ 行列) および 0-4 ストリングからくるもの ($k \times N$ 行列) がある. これらをそれぞれ $B_{1,2}$ および $I, J^\dagger$ と表して, D 項条件を書き下すと, ちょうど ADHM 方程式が得られる. どちらの方程式も同じ物理系を記述するものであるから, 解空間の等価性は自明である. またインスタントン・モジュライの次元は $4Nk$ であることが知られているが, この D0-D4 BPS 系で D0 の動く自由度を考えると, これも明らかである. さらに空間を非可換にした効果は ADHM 構成法そのものの枠組みで自然に現れるが, 一方 D ブレーン解釈から考えると, $B$ 場の効果が FI パラメータとして D 項条件式に現れたと理解できる. ここに空間を非可換にした効果と磁場を入れた効果が全く同一のものとして現れている.

一方, 可換空間上の Nahm 方程式は $G = U(1), U(2)$ の場合, 次式のようになる[14] :

$$\frac{dT_i}{d\xi} - \frac{i}{2}\epsilon_{ijk}[T_j, T_k] \ (\equiv -\frac{1}{2}[z, \bar{z}]\delta_{i3}) = 0. \tag{18}$$

$T_i$ は ADHM 構成法の $B_{1,2}$ に相当し, 1-1 ストリングからくるスカラー場に対応する. 非可換空間上ではインスタントンの時と同様に

$$\frac{dT_i}{d\xi} - \frac{i}{2}\epsilon_{ijk}[T_j, T_k] = -\theta\delta_{i3} \tag{19}$$

と少し修正される. これも非可換空間上の Bogomol'nyi 方程式 (14)

$$[\Phi, D_i] - \frac{i}{2}\epsilon_{ijk}[D_j, D_k] = \frac{1}{\theta}\delta_{i3} \tag{20}$$

[13] 今考えている状況は Higgs ブランチに相当する.

[14] さらに境界条件が必要である. この境界条件は実は Myers 効果 [49] と関係がある. (レヴューとして例えば [39] がある.) また, $G = U(N)$, $N \geq 3$ の場合は少し複雑な形になる. (ADHM 方程式の $I, J$ に対応する項が追加される.)

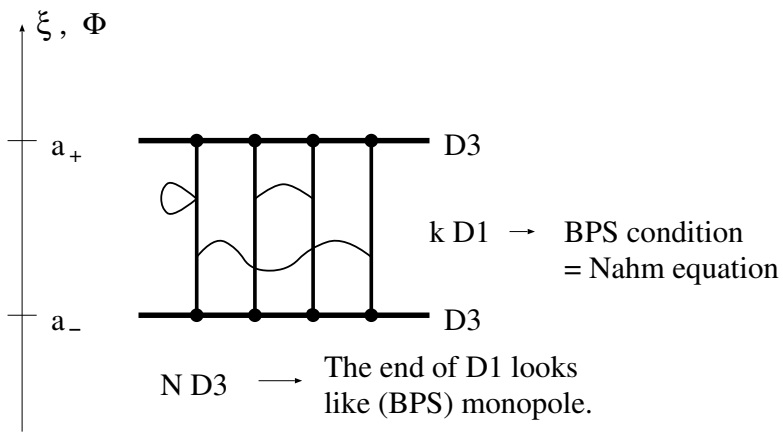



図 2: Nahm 構成法の D ブレーン解釈

と見比べれば双対関係が顕著である.

Nahm 構成法の D ブレーン解釈 [8] も存在し, D1-D3 ブレーン複合系として記述される (図 2 参照). インスタントンの時と同様に, Bogomol'nyi 方程式および Nahm 方程式はそれぞれ D3 および D1 からみたときの BPS 条件として表される. したがって両者の解空間の等価性は自明である. $B$ 場の効果についての議論は 8 ページ脚注に回す.

次に簡単な具体解を少し紹介する.

可換空間上の $G = SU(2)$ (ASD) 1 インスタントン解 (BPST 解) は ADHM 構成法により次のように求められる (ADHM 方程式 (15) の解としては $B_{0,1} = 0,\ I = (\rho, 0), J = (0, \rho)^t$ (ほぼ自明解) を取ればよい. [15] ) :

$$A_\mu = \frac{2x_\nu}{|x|^2 + \rho^2}\eta^-_{\nu\mu}, \quad F_{\mu\nu} = \frac{4\rho^2}{\left(|x|^2 + \rho^2\right)^2}\eta^-_{\mu\nu}. \tag{21}$$

ここで $\eta^-_{\mu\nu} = \eta^{-i}_{\mu\nu} \otimes \sigma_i$ は $\eta^{-i}_{\mu\nu} := \epsilon_{i\mu\nu 4} - \delta_{i\mu}\delta_{\nu 4} + \delta_{i\nu}\delta_{\mu 4}$ で定義される Anti-Self-Dual テンソルであり, $\eta^{-i}_{\mu\nu}$ は't Hooft の $\eta$ シンボルと呼ばれる. したがってこの解は Anti-Self-Dual である. $\rho$ はインスタントンのサイズ (半値幅) を与えるモジュライ・パラメータである. したがって ADHM データ $I, J$ はインスタントンのサイズの情報を含んでいる. 今このサイズ $\rho$ をゼロにもっていくと, 曲率 $F_{\mu\nu}$ はデルタ関数型の分布になり, インスタントンの仲間からはみ出してしまう. この $\rho = 0$ に対応するモジュライ空間の「端点」をスモール・インスタントン特異点と呼ぶ. このように可換空間上ではスモール・インスタントン特異点が存在し, ADHM データ $I = 0, J = 0$ によって特徴付けられる.

非可換空間上の $G = U(2)$ (ASD) 1 インスタントン解 (非可換 BPST 解) も ADHM 構成法により同様に求められる [52], [12]. これを与える非可換 ADHM 方程式 (16) の解としては $B_{0,1} = 0,\ I = (\sqrt{\rho^2 + \zeta}, 0), J = (0, \rho)^t$ (ほぼ自明解) を取ればよい. ($\zeta > 0$ とした.) 可換空間の場合と比べると $I$ の値が少し異なるため, さっきと同様に $\rho$ をゼロにもっていっても $I$ はゼロにならず, サイズ有限の非特異なインスタントンが生き残る. これが実は $U(1)$ インスタントンであり, スモール・インスタントン特異点が解消されたことによって生じた新しいインスタントン解に相当する. $U(1)$ インスタントンは位置を表すモジュライ・パラメータしか持たず, 広がりのサイズは一定 (大体 $\sqrt{\zeta}$ ぐらい) である.

可換空間上の 1-Dirac モノポール解は Nahm 構成法により次のように求められる (Nahm 方程式 (18)

[15] $B_{0,1}$ は D0 ブレーン上のゲージ理論のスカラー場の期待値であり, (対角化された場合の対角成分が) インスタントンの位置を表すので, $B_{0,1} = 0$ というのはインスタントンを原点に置いたことに相当する.

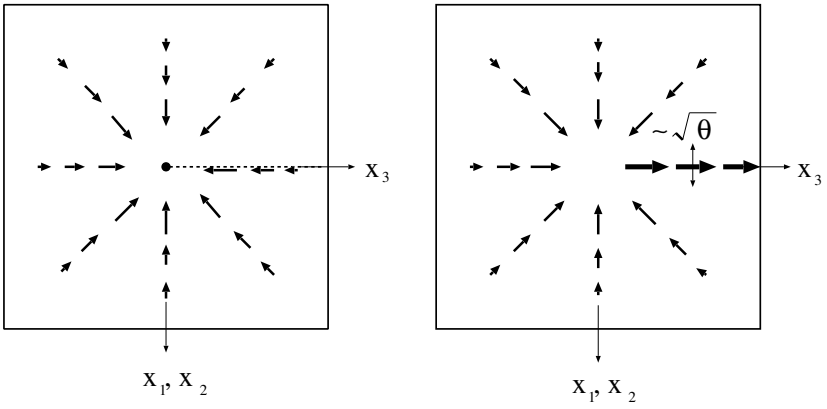



図 3: Dirac モノポールの磁場分布 (可換空間上 (左) V.S. 非可換空間上 (右))

の解としては $T_i = 0$ (自明解) を取ればよい. $k = 1$ の場合はこれで境界条件も満たされる.) :

$$\Phi = -\frac{1}{2r},\ A_r = A_\vartheta = 0,\ A_\phi = \frac{1}{2r}\frac{1+\cos\vartheta}{\sin\vartheta}. \tag{22}$$

ただし $(r, \vartheta, \phi)$ は普通の極座標である. ゲージ場は $\vartheta = 0$ で発散しており, それから計算される磁場も $\vartheta = 0$, すなわち $x_3$ 軸の正の部分にデルタ関数型の特異性を持つことが分かる. この $x_3$ 軸の正の部分に沿ったストリング状の特異点の集まりを Dirac ストリングと呼ぶ. Dirac ストリングは無限小の幅を持ったソレノイドと解釈でき, ゲージ変換でその方向が変わる非物理的対象である. [16] $x_3$ 軸の正の部分以外では磁場は

$$B_i = -\partial_i \Phi = -\frac{x_i}{2r^3} \tag{23}$$

と計算され, 放射状の分布をしている. (図 3 の左参照.)

非可換 1-Dirac モノポールの厳密解は [18] で Nahm 構成法により求められた (非可換 Nahm 方程式 (19) の解としては $T_i = -\delta_{i3}\theta\xi$ (自明解) を取ればよい.) [17] :

$$\begin{aligned}
\Phi &= \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n |n\rangle\langle n| = -\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\xi_n^2 - \xi_{n-1}^2\right) |n\rangle\langle n| + \left(\xi_0^2 + \frac{x_3}{\theta}\right) |0\rangle\langle 0| \right\}, \\
A_z &= \frac{1}{\sqrt{2\theta}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\xi_n}{\xi_{n+1}}\right) a^\dagger |n\rangle\langle n|, \quad A_3 = 0.
\end{aligned} \tag{24}$$

$$\text{ここで} \qquad \zeta_n := \int_0^\infty dp\ p^n e^{-\theta p^2 + 2px_3}, \quad \xi_n := \sqrt{\frac{n\zeta_{n-1}}{2\theta\zeta_n}}. \tag{25}$$

これは至るところ非特異な解である. 無限遠の振る舞い ($r_n + x_3 \to \infty,\ r_n := \sqrt{(x_3)^2 + 2\theta n}$) は次のようになる[18] :

$$\Phi_n \sim \begin{cases} -\dfrac{x_3}{\theta} & : n = 0,\ x_3 \to +\infty \\ -\dfrac{1}{2r_n} = \pm\dfrac{1}{2\sqrt{(x_3)^2 + 2\theta n}} & : \text{それ以外} \end{cases} \tag{26}$$

[16] モノポールに関する詳しいレヴューとして例えば [14], [23] がある.

[17] $T_i(\xi)$ は D1 ブレーン上のゲージ理論のスカラー場の期待値 (すなわち D1 ブレーンの位置) を表すので, この非可換 Nahm 方程式の解は D1 ブレーンが $\xi$ 方向に傾き $-\theta$ で傾いていることを表している. そしてこの傾きこそが, D1 ブレーンの端点 (磁荷を帯びている) が $B$ 場 (磁場) に引っ張られた効果を表しているのである. (図 4 の右下図参照.) この $\theta$ は座標の非可換性から Nahm 方程式に現れたものであり, ここに非可換の効果と $B$ 場の効果との一致が見られる.

[18] 鞍点法で $\zeta_n$ の積分を処理した.

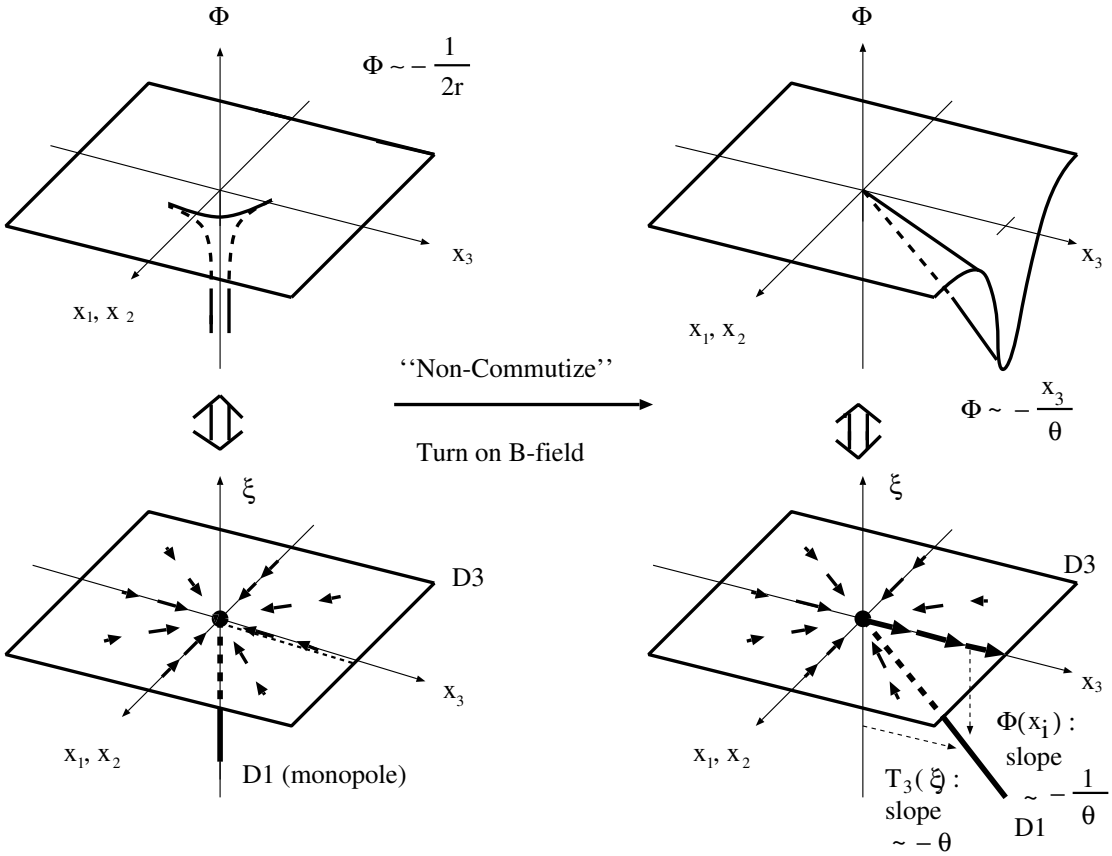



図 4: Dirac モノポールの Higgs 場の配位 (上) と D ブレーン解釈 (下) (左：可換空間, 右：非可換空間)

$$(B_3)_n \quad \sim \quad \begin{cases} \dfrac{1}{\theta} & : n = 0,\ x_3 \to +\infty \\ -\dfrac{x_3}{2(r_n)^3} & : \text{それ以外} \end{cases} \tag{27}$$

これから分かるように, Higgs 場および磁場はともに $n = 0$, $x_3 \to \infty$, すなわち $x_3$ 軸の正の部分で特別な振る舞いをし, [19] 磁場分布はおおよそ図 3 の右のようになる. $x_3$ 軸の正の部分の一様な磁場 $(B_3(x_3 \to +\infty))_0|0\rangle\langle 0|$ は, Weyl 変換でスター積を用いる記述に戻ると, ちょうど Gauss 型の分布 $(2/\theta)\exp\{-((x_1)^2 + (x_2)^2)/\theta\}$ になり, その幅は大体 $\sqrt{\theta}$ である. したがって可換空間上への極限 $\theta \to 0$ で, これはちょうどデルタ関数型の分布になり, もとの特異な Dirac ストリングに一致する.

次に D ブレーン解釈を考える. $G = U(1)$ Yang-Mills-Higgs 理論は 1 枚の D3 ブレーンの有効理論で記述できる. このとき Higgs 場 $\Phi$ の値は D3 ブレーンの広がった方向に垂直なある 1 方向の D3 ブレーンの位置を表す. Dirac モノポール解の配位は, まっすぐ無限にのびた D1 ブレーンが D3 ブレーンに端を持ち, 安定化した状況に相当する. (9 ページの図 4 の左下参照.) このとき D1 ブレーンは D3 ブレーンと一体化し, D3 ブレーンの突起と解釈される. D1 ブレーンの端は磁荷を帯びており, D3 ブレーンからみるとモノポールに見える. 今考えている非可換の場合に相当するのは, D3 ブレーン上に背景一様 $B$ 場 (磁場) が $x_3$ 方向に入っている状況であり, D1 ブレーンの端は一様 $B$ 場に引っ張られ, ある傾きを持った状態で D1 ブレーンの張力と釣り合って安定となる [29], [30], [31]. (図 4 の右下参照.)

Higgs 場の配位 (22) および (26) を図示すると, 図 4 の左上および右上のようになる. 上記の D ブレーン解釈 (図 4 下) と比較すると, Higgs 場の $x_3$ 軸の正の部分での特異な振る舞いは D3 ブレーンが突起してできた D1 ブレーンを表していると考えられる. $x_3$ 軸の正の部分の磁束は, この D1 ブレーンの「影」

[19] 今 $n$ を大体 1-2 平面上の原点からの距離の 2 乗と思っている $((x_1)^2 + (x_2)^2 \sim 2\theta n)$.

である [18]. [20] D1 ブレーンの傾きは, D3 ブレーンから測って $-1/\theta$ であり, $\xi$ 軸から測った傾きが $-\theta$ であることと全く矛盾せず (図 4 の右下参照), また, DBI 作用の解析から求められた可換側の記述 (iii) での非可換モノポールのブレーン解釈 [48], [32] の結果とも, ちょうど一致する. [21]

# 4 Solution Generating Technique

このセクションでは, 運動方程式, BPS 方程式を不変に保つ非可換空間特有の変換を見出し, 既知のソリトン解から新しいソリトン解を構成する. この構成法は Solution Generating Technique と呼ばれており, 2000 年後半の非可換理論の発展の支柱となった.

まず次の変換を考える：

$$\Phi \to S\Phi S^\dagger, \quad D_i \to SD_iS^\dagger. \tag{28}$$

ただし, $S$ は $S^\dagger S = 1$ を満たす演算子である. $S$ が有限サイズの行列であれば, 自動的に $SS^\dagger = 1$ も満たされ, $S$ はユニタリ演算子, 変換 (28) はゲージ変換となる. ところが今, $S$ は無限サイズの行列であるため, $SS^\dagger$ は射影演算子になることしか言えない ($(SS^\dagger)(SS^\dagger) = SS^\dagger$).

変換 (28) は一般に運動方程式を不変に保つ [26]：

$$\frac{\delta I}{\delta \mathcal{O}} \to S\frac{\delta I}{\delta \mathcal{O}}S^\dagger. \tag{29}$$

実際, 例えば NC $G = U(1)$ Yang-Mills-Higgs 理論の運動方程式 (4) の 2 番目の方の左辺は

$$\begin{aligned}[D^\mu, [D_\mu, \Phi]] &\to [SD^\mu S^\dagger, [SD_\mu S^\dagger, S\Phi S^\dagger]] \\ &= S[D^\mu, [D_\mu, \Phi]]S^\dagger\end{aligned}$$

と共変的に変換する. ($S^\dagger S = 1$ だけが必要であることに注意.)

変換 (28) を基本とした解生成法を Solution Generating Technique と呼ぶ. この方法により真空解 (自明解) から非自明な新しい解がいとも簡単に構成され, タキオン凝縮の議論へ目覚しく応用された. これについては 13 ページで解説する.

$S$ の典型例は次のシフト演算子 $S_k$ である：

$$S_k := \sum_{n=0}^{\infty} |n+k\rangle\langle n|, \quad S_k^\dagger = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n+k|. \tag{30}$$

これらは $S_k^\dagger S_k = 1, \quad S_k S_k^\dagger = 1 - P_k$ を満たす. ここで,

$$P_k := \sum_{m=0}^{k-1} |m\rangle\langle m| \tag{31}$$

は, Fock 空間 $\mathcal{H}$ の $k$ 次元部分空間 $\mathcal{H}_N = \oplus_{m=0}^{k-1}\mathbf{C}|m\rangle$ への射影演算子であり, $S_kS_k^\dagger$ は, $\mathcal{H}$ に対する $\mathcal{H}_N$ の補空間への射影演算子となる. 以後 $S$ として $S_k$ を用いる.

変換 (28) は BPS 方程式を不変に保たない. 実際, 例えば BPS 方程式 (14) の一番目の方の左辺は

$$\begin{aligned}2[D_z, D_z^\dagger] + \frac{1}{\theta} &\to 2[S_kD_zS_k^\dagger, S_kD_z^\dagger S_k^\dagger] + \frac{1}{\theta} \\ &= S_k(2[D_z, D_z^\dagger])S_k^\dagger + \frac{1}{\theta} \\ &= S_k\left\{2[D_z, D_z^\dagger] + \frac{1}{\theta}\right\}S_k^\dagger + \frac{1}{\theta}P_k\end{aligned}$$

[20] これが物理的対象であるかどうかは微妙で難しい問題である.

[21] 記述 (iii) の詳しい議論は [1] の中の森山さんの記事を, 記述 (ii) と (iii) との比較の詳しい議論は [1] の中の浜中の記事を御参照ください.

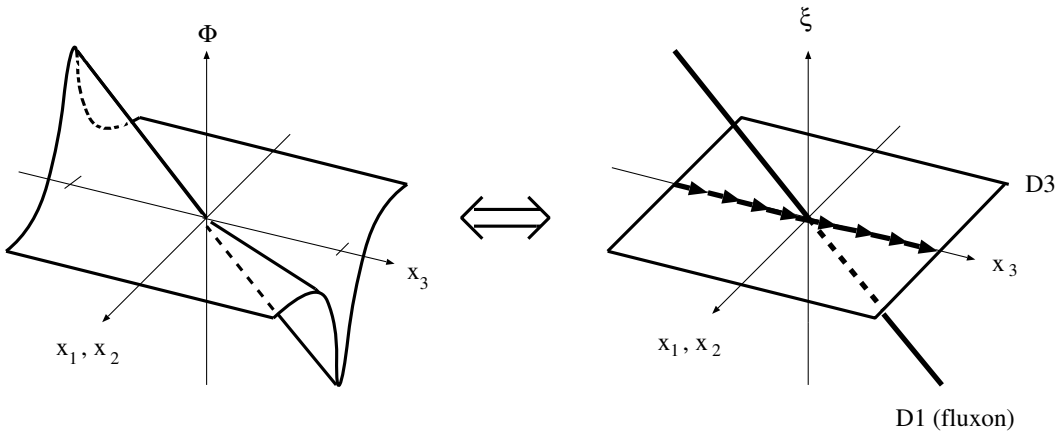



図 5: 1 フラクソンの Higgs 場 (左) および D ブレーン解釈と磁場分布 (右)

と共変的に変換しない. これは, BPS 方程式が運動方程式と違って, 定数項 (例えば曲率の式に現れた $-i(\theta^{-1})_{ij}$ など) を含んでいるためである. ($S_k S_k^\dagger$ が射影演算子であることにも注意.)

そこで私達は, 変換 (28) を修正することで, BPS 方程式を不変に保つ変換を見出した. NC $G = U(1)$ Yang-Mills-Higgs 理論に対する結果は次の通り :

$$\begin{aligned}
\Phi &\to S_k \Phi S_k^\dagger - \sum_{m=0}^{k-1} \frac{x_3 - \lambda_3^{(m)}}{\theta} |m\rangle\langle m|, \\
D_3 &\to \partial_3 + S_k A_3 S_k^\dagger + i \sum_{m=0}^{k-1} \frac{\lambda_4^{(m)}}{\theta} |m\rangle\langle m|, \\
D_z &\to S_k D_z S_k^\dagger + \sum_{m=0}^{k-1} \frac{\lambda_z^{(m)}}{\theta} |m\rangle\langle m|.
\end{aligned} \tag{32}$$

ここで, $\lambda_z^{(m)} := (1/2)(\lambda_1^{(m)} - i\lambda_2^{(m)})$ であり, $\lambda_\mu^{(m)}$ は任意の実 (モジュライ・) パラメータである.

この変換を用いると, 任意の既知解から新しい解がどんどん生成される. 例えば, 既知解として真空解 $\Phi = 0,\ A = 0$ をとると, 次の新しい解が得られる :

$$\Phi^{\text{fluxon}} = -\sum_{m=0}^{k-1} \frac{x_3 - \lambda_3^{(m)}}{\theta}, \quad D_z^{\text{fluxon}} = S_k \hat{\partial}_z S_k^\dagger + \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_z^{(m)} |m\rangle\langle m|, \quad A_3^{\text{fluxon}} = 0, \tag{33}$$

$$B_3^{\text{fluxon}} = -\partial_3 \Phi = \frac{1}{\theta} P_k, \quad B_1^{\text{fluxon}} = B_2^{\text{fluxon}} = 0. \tag{34}$$

これは $k$ フラクソンと呼ばれる非可換空間特有のソリトンである [54], [19]. Higgs 場の配位およびその D ブレーン解釈と磁場分布は図 5 のようになる.

フラクソンは非可換 Dirac モノポールに現れた $x_3$ 軸の正の部分の磁束が無限にのびているものと解釈でき, モノポールというよりはむしろ渦に近い. 単位長さあたりの質量は $2\pi/g_{\text{YM}}^2\theta$ である. したがって変換 (32) は, BPS 方程式を (よって運動方程式も) 不変に保ちながら, エネルギーを変えてしまっているように見える. これは変換 (32) が実は作用も変えてしまっているためであり, その原因は作用の中の曲率の式に定数項が含まれていることである. 変換 (32) は見掛け上はほとんどゲージ変換であるが, 実際は, あるソリトン (フラクソン) 数のセクターの真空を, $k$ 個ソリトン数の多いセクターの真空に移すという変換になっている.

この変換を行列模型 [4], [37] の立場で解釈する [2], [3]. フラクソン解は, 行列表示すると次のようになる：

$$
\begin{aligned}
D_z^{\text{fluxon}} &= S_k \left( \sum_{m,n=0}^{\infty} (\hat{\partial}_z)_{m,n} |m\rangle\langle n| \right) S_k^\dagger + \sum_{m=0}^{k-1} \frac{\lambda_z^{(m)}}{\theta} |m\rangle\langle m|, \\
&= \sum_{m,n=N}^{\infty} (\hat{\partial}_z)_{m-N,n-N} |m\rangle\langle n| + \sum_{m=0}^{k-1} \frac{\lambda_z^{(m)}}{\theta} |m\rangle\langle m|, \\
&= \left( \begin{array}{ccc|c} \frac{\lambda_z^{(0)}}{\theta} & & O & \\ & \ddots & & O \\ & & \frac{\lambda_z^{(k-1)}}{\theta} & \\ O & & & \\ \hline & O & & \hat{\partial}_z \end{array} \right).
\end{aligned} \tag{35}
$$

したがって, 変換 (32) は行列表示してみたとき, もとの解を右下方向に $k$ だけずらして, 空いた左上の $k \times k$ 行列の対角成分に適当な項を加えたものとなっている. 変換後の解は行列模型によると, 行列の右下部分が無限個の D1 ブレーンの束縛状態としての D3 ブレーンを表し, 左上の $k \times k$ の部分が $k$ 個のバラバラになった D1 ブレーンを表すと解釈できる (図 5 の右図参照). この $k$ 個の D1 ブレーン (フラクソン) からみると, 式 (35) の左上の任意パラメータ $\lambda_\mu^{(m)}$ は, スカラー場の真空期待値であり, D1 ブレーンに垂直な方向の座標を表す. したがって, 新しい解に含まれていた任意パラメータ $\lambda_\mu^{(m)}$ は, $k$ 個のフラクソンの位置を表す. Higgs 場 $\Phi$ の左上の $k \times k$ の部分には $x_3$ の一次の項が入っているため, $k$ 個の D1 ブレーンが $x_3$ 方向にうまく傾き (傾き = $-1/\theta$), BPS 状態の配位が実現されたのである.[22] ところでフラクソンの磁場を計算すると, 式 (34) のように位置の情報 $\lambda_\mu^{(m)}$ が消えてしまう. これは NC ゲージ理論には局所的な観測可能量が存在しないためであり, このようなことが起こっても不思議なことではない. 物理的解釈は可換側にうつると問題なく行うことが出来る. フラクソン解は厳密な Seiberg-Witten マップ [53] により可換側にマップすることが可能であり, その D1 ブレーン密度は次のように求まる [33]：

$$
J_{D1}(x) = \frac{1}{\theta} \delta(\Phi) + \sum_{m=0}^{k-1} \delta(x_1 - \lambda_1^{(m)}) \delta(x_2 - \lambda_2^{(m)}) \delta\left( \Phi + \frac{x_3 - \lambda_3^{(m)}}{\theta} \right). \tag{36}
$$

右辺第一項は一様に分布した無限個の D1 ブレーン, すなわち D3 ブレーンを, 右辺第二項は傾き $-1/\theta$ で D3 ブレーンに突き刺した D1 ブレーンを表すと解釈される. パラメータ $\lambda_i^{(m)}$ がフラクソンの位置を表すことは明らかである.[23]

タキオン凝縮への応用 [26] [24] .

ここでは再び元の変換 (28) に戻り, もっと複雑な理論について考える.

---

[22] インスタントンで非可換パラメータ $\theta^{12}$ と $\theta^{34}$ がうまくつりあう ($\theta^{12} + \theta^{34} = 0$) ことで BPS 状態の配位が実現される [2] のとちょうど同じである. 実際 Solution Generating Technique で生成されるインスタントンを周期的に並べて Fourier 変換し, 周期ゼロの極限を取ると, $\theta^{12} + \theta^{34} = 0$ の状況でちょうどフラクソンと一致する [21].

[23] フラクソンは Nahm 構成法を用いて構成することも出来る [21]. パラメータ $\lambda_i^{(m)}$ を Nahm データ $T_i$ の対角成分に導入すると, 上記の解 (33) が得られる. このことからも $\lambda_*^{(m)}$ がフラクソンの位置を表すというのが理解される. なおこの構成では Higgs 場の解の中の $x_3$ の一次の項が自然に現れる.

[24] トーラス上, オービフォールド上での Solution Generating Technique を用いた議論については [35], [40] (この研究会の梶浦さんの発表), [45], [46] 参照.

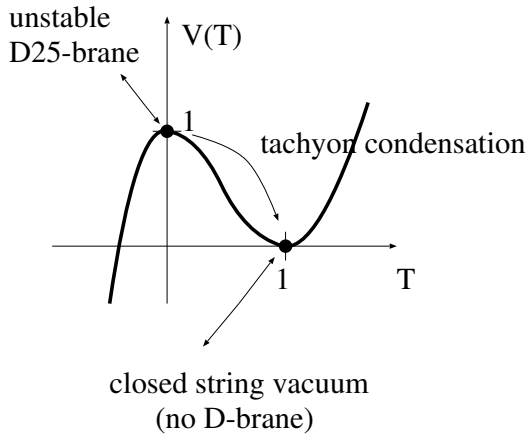



図 6: タキオンポテンシャルの概形

簡単のため一様 $B$ 場中 ($B_{24,25} =: -b < 0$ のみノンゼロ) [25] のボゾニックな D25 ブレーンの有効作用を考える：

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{T_{\mathrm{D25}} g_s}{G_s} \int d^{24}x \ (2\pi\theta \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}) \ \mathcal{L}, && (37)\\
\mathcal{L} &= -V(T-1)\sqrt{-\det(G_{\mu\nu} + 2\pi\alpha'(F+\Phi)_{\mu\nu})} \\
&\quad + \frac{1}{2}\sqrt{G} f(T-1)[D^\mu, T][D_\mu, T] + (\text{高階微分項}), \quad (\mu,\nu = 0,\ldots,25), && (38)\\
\text{ただし} \quad & G_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1,-1,\cdots,-1,-(2\pi\alpha' b)^2, -(2\pi\alpha' b)^2), \quad G_s = g_s(2\pi\alpha'), \\
& \theta^{24,25} =: \theta = 1/b, \quad F_{24,25} + \Phi_{24,25} = [D_z, D_z^\dagger]/\theta.
\end{aligned}
$$

ここで $T_{\mathrm{Dp}}$ は Dp ブレーンの張力を表す. この有効作用は, 弦の場の理論のタキオン場 $T$ と零質量のゲージ場 $A_\mu$ だけ残し, それ以外の場を全て積分してしまってから, 普通のゲージ対称性を課すことなどにより得られる. [26] タキオンポテンシャル $V(T)$ は図 6 のような形をしていると仮定する. Sen の予想[27] にしたがって, このタキオンポテンシャルの山 ($T=0$) の部分が不安定な D25 ブレーンを, 谷 ($T=1$) の部分がクローズド・ストリング真空を表すとする. 重要なことは, 作用 (37) のゲージ不変性により, Solution Generating Technique が作用の詳細によらずその運動方程式を不変に保つということである.

したがってクローズド・ストリング真空解 $T=1,\ \hat{D}_z = \hat{\partial}_z,\ A_i = 0,\ (i=0,\ldots,23)$ を (28) で変換すると (高階微分項の具体形が分かっていないにも関わらず, また DBI 作用の形にまとまるという知識がなくとも) 非自明な厳密解が得られる：

$$
T = S_k 1 S_k^\dagger = 1 - P_k,\ \hat{D}_z = S_k \hat{\partial}_z S_k^\dagger,\ A_i = 0. \tag{39}
$$

この解の単位体積あたりのエネルギー (張力) は簡単に計算することができ,

$$
(\text{張力}) = (2\pi)^2 \alpha' k T_{\mathrm{D25}} = k T_{\mathrm{D23}}, \tag{40}
$$

のように $k$ 個の D23 ブレーンの張力と一致する. したがって変換後の解は D23 ブレーンを表していると解釈できる. この解の周りでのゆらぎの解析もこの解釈を支持している.

[25] ここでは 24-25 平面を非可換だと思っている. $z$ はこの平面での複素表示.
[26] 微分を含まない部分が DBI 作用の形にまとまるというのは, さらに議論を要する. しかしここではそのような細かい議論は実は不要なのである.
[27] レヴューとして例えば [57] がある.

このようにして, 不安定な D25 ブレーンがタキオン凝縮を起こして D23 ブレーンになるというシナリオ (これも Sen の予想) が, 有効理論の枠組みではあるが弦の場の理論の D23 ブレーンの厳密解を用いて検証されたのである. 非可換の枠組みでのタキオン凝縮の議論は $\theta \to \infty$ の極限で, いわゆる GMS ソリトン [16] [28] を用いてなされた [27] のがきっかけであるが, ここで紹介した議論は任意の $\theta$ で適用可能である.

# 5 Conclusion and Discussion

この記事では非可換ソリトンを題材にここ数年の NC ゲージ理論の進展を振り返った. 非可換理論の爆発的流行は 1997 年終わり頃の [7], [10] および 1999 年夏の [56] をきっかけに始まった. この流行はすぐに廃れると予想されていたが, その後多くの新しい発展[29] が次から次へと出現し, 今日まで約 2, 3 年以上も素粒子論の一つの主流としての地位を保ち続けてきた. その結果, 非可換の考え方や手法は素粒子論の多くの分野に影響を及ぼし, 広い範囲に渡って浸透した. 特に行列模型や弦の場の理論の分野に与えたインパクトは比較的大きいと思われる.

NC ゲージ理論は, それ自身新しい物理的対象を含んでいただけでなく, D ブレーンの力学の解明にも重要な役割を果たした. 非可換 (BPS) ソリトンの解は代表的なものについては 20 世紀中に大体出揃い,[30] 調べるべきことも (基本的な部分については) 一通り尽くされ, 研究の動向としてはひとまず落ち着いてきたと言えよう. 2000 年後半からレヴューが次々と発表されたのはその現れである (付録 A 参照).

21 世紀に入ってからは, 以前ほどの盛り上がりは見られなくなったが, それでもなお, 非可換空間での物理的解釈 (何が観測可能量か？など) をどう考えるかといった問題 [36], [17] への取り組みや, より精密な取り扱いについての議論などは (ゆっくりではあるが) 続いている.[31] そしてまた量子ホール効果への応用[32] や可積分系の非可換化といった他分野への新たな広がりもあり, 依然として非可換の研究は着々と進展している. この記事では「非可換ユークリッド空間」しか取り扱わなかったが, 曲がった非可換空間[33] を考えることは D ブレーンの力学を考える上でも, もちろん非常に重要であり, 研究の余地が十分残っている. 変形量子化 [44], [6] の立場からの定式化もどんどん進んでおり, [34] これからもまだまだ新しい発展が期待される.

さらにこの記事では全く触れなかったが, 非可換幾何と量子重力 (あるいは弦理論) との関わりという深遠なテーマもあり, [35] これまでにも時空の不確定性原理 [62] といった重要な知見がいくつも得られている. この記事で議論したことは基本的には一様磁場中の物理系についてであるが, そこで得られた洞察や手法が何らかの形で活かされ, 重力の本質の解明に向けて重要な役割を果たすかもしれない.

非可換幾何はもはやそれだけを切り離して取り扱うことはできない. これからも多くの分野と関連しながら, 互いに影響を及ぼしあって発展し続けていくであろう.

---

[28] この研究会の荒木さん, 黒木 (伸) さんの発表も御参照ください.

[29] この記事で紹介したものの他に例えば, 摂動論 (UV/IR 混合) [47], [34] (この研究会の中島さんの発表も御参照ください.) や NCOS 理論 [55], [15] などがある.

[30] (部分的であるが) それらをリストアップした表が [1] の中の浜中の記事の付録に掲載されている.

[31] この記事で少し触れた厳密な Seiberg-Witten マップ [53] はその中の重要な成果の一つであるが, これはそれまでの地道な発展の流れの中に自然に位置づけられるものである.

[32] 非可換の手法を用いたアプローチは昔から盛んであるが (例えば [5], [38]. またこの研究会の青山さんの発表も御参照ください.), 特に Susskind の論文 [58] 以後, NC Chern-Simons 理論の分数量子ホール効果への応用が盛り上がっている.

[33] 例えば Fuzzy Sphere 上のゲージ理論は [60] 以後, 活発に研究されている.

[34] この研究会の池田さん, 岸本さんの発表も御参照ください.

[35] 解説記事として例えば [41], [59] がある.

**Acknowledgements**

この記事は 2001 年 7 月 16 ~ 19 日に行われた基研研究会「場の量子論 2001」における私の発表のプロシーディングです. 貴重な発表の機会を与えて下さった世話人の方々, ならびに聴講, 議論して下さった方々に心からお礼申し上げます. また寺嶋靖治さんからは共同研究 [22] などを通じて非常に多くのことを学ぶことができました. 他の研究会や各大学でのセミナー発表においても, 質疑応答などで理解が深まりました. お世話になった方々全てに, この場をお借りして感謝申し上げます.

この記事は日本育英会および日本証券奨学財団の経済援助のもと作成されました

# A Reviews of Noncommutative Theories

- 総合報告：2001 年 2 月の基研研究会のプロシーディング [1]
- 場の理論的側面：Douglas and Nekrasov [11]
- 基礎とタキオン凝縮への応用：Harvey [24]
- 非可換トーラス (と行列模型)：Konechny and Schwarz [42]
- 非可換幾何と行列模型：石橋 (延) in [1]
- 基礎と非可換モノポール：Nekrasov [51]
- 基礎と非可換インスタントン：Konechny and Schwarz [43]
- 幾何学的側面 (トポロジカル・チャージなど)：古内 [13], Harvey [25], 松尾 (泰) in [1]
- (非可換) ADHM/Nahm 構成法 (包括的レヴュー)：浜中 [20]

# 参考文献

[1] Proceedings of Workshop on Noncommutative Geometry in String Theory and Field Theories, 2001 年 2 月 19 ~ 21 日@京大基研, 素粒子論研究 **104-3** (2001-12) および文部省特定領域研究 (B)707「超対称性理論」の会議録シリーズ No.8 (掲載予定) [36]

[2] M. Aganagic, R. Gopakumar, S. Minwalla and A. Strominger, JHEP **0104** (2001) 001, [hep-th/0009142]

[3] H. Aoki, N. Ishibashi, S. Iso, H. Kawai, Y. Kitazawa and T. Tada, Nucl. Phys. B **565** (2000) 176, [hep-th/9908141]

[4] T. Banks, W. Fischler, S. H. Shenker and L. Susskind, Phys. Rev. D **55** (1997) 5112, [hep-th/9610043]

[5] J. Bellissard, A. van Elst and H. Schulz-Baldes, "The non-commutative geometry and the quantum Hall effect," [cond-mat/9411052]

[6] A. S. Cattaneo and G. Felder, Commun. Math. Phys. **212** (2000) 591, [math.qa/9902090]

[7] A. Connes, M. R. Douglas and A. Schwarz, JHEP **9802** (1998) 003, [hep-th/9711162]

[36] [http://www-hep.phys.s.u-tokyo.ac.jp/japanese/tokutei99.html] に掲載中.

[8] D. Diaconescu, Nucl. Phys. B **503** (1997) 220, [hep-th/9608163]

[9] M. R. Douglas, "Branes within branes," [hep-th/9512077];
M. R. Douglas, J. Geom. Phys. **28** (1998) 255, [hep-th/9604198]

[10] M. R. Douglas and C. Hull, JHEP **9802** (1998) 008, [hep-th/9711165]

[11] M. R. Douglas and N. A. Nekrasov, "Noncommutative field theory," [hep-th/0106048]

[12] K. Furuuchi, Prog. Theor. Phys. **103** (2000) 1043, [hep-th/9912047]

[13] K. Furuuchi, "Topological charge of U(1) instantons on noncommutative $\mathbf{R}^4$," [hep-th/0010006]

[14] P. Goddard and D. I. Olive, Rept. Prog. Phys. **41** (1978) 1357

[15] R. Gopakumar, J. Maldacena, S. Minwalla and A. Strominger, **0006** (2000) 036, [hep-th/0005048]

[16] R. Gopakumar, S. Minwalla and A. Strominger, JHEP **0005** (2000) 020, [hep-th/0003160]

[17] D. J. Gross, A. Hashimoto and N. Itzhaki, [hep-th/0008075]

[18] D. J. Gross and N. A. Nekrasov, JHEP **0007** (2000) 03, [hep-th/0005204]

[19] D. J. Gross and N. A. Nekrasov, JHEP **0010** (2000) 021, [hep-th/0007204]

[20] 浜中 真志, 『ADHM/Nahm 構成法とその双対性』[37], 素粒子論研究 (投稿寸前)

[21] M. Hamanaka, "ADHM/Nahm construction of localized solitons in noncommutative gauge theories," [hep-th/0109070]

[22] M. Hamanaka and S. Terashima, JHEP **0103** (2001) 034, [hep-th/0010221]

[23] J. A. Harvey, "Magnetic monopoles, duality, and supersymmetry," [hep-th/9603086]

[24] J. A. Harvey, "Komaba lectures on noncommutative solitons and D-branes," [hep-th/0102076]

[25] J. A. Harvey, "Topology of the gauge group in noncommutative gauge theory," [hep-th/0105242]

[26] J. A. Harvey, P. Kraus and F. Larsen, JHEP **0012** (2000) 024, [hep-th/0010060]

[27] J. A. Harvey, P. Kraus, F. Larsen and E. J. Martinec, JHEP **0007** (2000) 042, [hep-th/0005031]

[28] K. Hashimoto, JHEP **0012** (2000) 023, [hep-th/0010251]

[29] A. Hashimoto and K. Hashimoto, JHEP **9911** (1999) 005, [hep-th/9909202]

[30] K. Hashimoto, H. Hata and S. Moriyama, JHEP **9912** (1999) 021, [hep-th/9910196]

[31] K. Hashimoto and T. Hirayama, Nucl. Phys. B **587** (2000) 207, [hep-th/0002090]

[32] K. Hashimoto, T. Hirayama and S. Moriyama, JHEP **0011** (2000) 014, [hep-th/0010026]

[33] K. Hashimoto and H. Ooguri, "Seiberg-Witten transforms of noncommutative solitons," [hep-th/0105311]

[34] M. Hayakawa, Phys. Lett. B **478** (2000) 394, [hep-th/9912094]

[37] 私が書いた記事については, 私のホームページ [http://www2.yukawa.kyoto-u.ac.jp/~hamanaka] にも置かれております.

[35] K. Ichikawa, "Solution generating technique for noncommutative orbifolds," [hep-th/0109131]

[36] N. Ishibashi, S. Iso, H. Kawai and Y. Kitazawa, Nucl. Phys. B **573** (2000) 573, [hep-th/9910004]

[37] N. Ishibashi, H. Kawai, Y. Kitazawa and A. Tsuchiya, Nucl. Phys. B **498** (1997) 467, [hep-th/9612115]

[38] N. Imai, K. Ishikawa, T. Matsuyama and I. Tanaka, Phys. Rev. B **42** (1990) 10610

[39] C. V. Johnson, "D-brane primer," [hep-th/0007170]

[40] H. Kajiura, Y. Matsuo and T. Takayanagi, JHEP **0106** (2001) 041, [hep-th/0104143]

[41] 加藤 光裕, "Noncommutative Geometry and String Theory," 素粒子論研究 **102-3** (2000-12) C6, ※2000 年 7 月の基研研究会「場の量子論 2000」のプロシーディング

[42] A. Konechny and A. Schwarz, "Introduction to M(atrix) theory and noncommutative geometry," [hep-th/0012145]

[43] A. Konechny and A. Schwarz, "Introduction to M(atrix) theory and noncommutative geometry, part II," [hep-th/0107251]

[44] M. Kontsevich, "Deformation quantization of Poisson manifolds, I," [q-alg/9709040]

[45] T. Krajewski and M. Schnabl, JHEP **0108** (2001) 002, [hep-th/0104090]

[46] E. J. Martinec and G. W. Moore, [hep-th/0101199]

[47] S. Minwalla, M. Van Raamsdonk and N. Seiberg, JHEP **0002** (2000) 020, [hep-th/9912072]

[48] S. Moriyama, Phys. Lett. **B485** (2000) 278, [hep-th/0003231]

[49] R. C. Myers, JHEP **9912** (1999) 022, [hep-th/9910053]

[50] H. Nakajima, *Lectures on Hilbert Schemes of Points on Surfaces*, (AMS ; 1999), [ISBN/0-8218-1956-9]

[51] N. A. Nekrasov, "Trieste lectures on solitons in noncommutative gauge theories," [hep-th/0011095]

[52] N. Nekrasov and A. Schwarz, Commun. Math. Phys. **198** (1998) 689, [hep-th/9802068]

[53] Y. Okawa and H. Ooguri, Phys. Rev. D **64** (2001) 046009, [hep-th/0104036]

[54] A. P. Polychronakos, Phys. Lett. B **495** (2000) 407, [hep-th/0007043]

[55] N. Seiberg, L. Susskind and N. Toumbas, JHEP **0006** (2000) 044, [hep-th/0005015]

[56] N. Seiberg and E. Witten, JHEP **9909** (1999) 032, [hep-th/9908142]

[57] A. Sen, "Non-BPS states and branes in string theory," [hep-th/9904207]

[58] L. Susskind, "The quantum Hall fluid and non-commutative Chern Simons theory," [hep-th/0101029]

[59] 綿村 哲, 『非可換幾何学と場の理論』, 日本物理学会誌 **55-10** (2000) 756

[60] U. Carow-Watamura and S. Watamura, Commun. Math. Phys. **212** (2000) 395, [hep-th/9801195]

[61] E. Witten, Nucl. Phys. B **460** (1996) 541, [hep-th/9511030]

[62] T. Yoneya, Prog. Theor. Phys. **103** (2000) 1081, [hep-th/0004074]