Noncommutative Solitons and Sato Theory

東京大学大学院 総合文化研究科 素粒子論研究室　浜中 真志
E-mail: hamanaka@hep1.c.u-tokyo.ac.jp

昨年、可積分系・ソリトン理論の体系的非可換化 (非可換空間への拡張) に向けてのひとつのプログラムが提唱された [1, 2]。それは、非可換 Lax 方程式の具体的構成と非可換 Ward 予想 :「非可換 Lax 方程式は可積分であり、非可換 4 次元自己双対 Yang-Mills 方程式のリダクションによって得られるであろう。」の提唱を含む。

非可換空間上では、特異点の解消から新しい物理的対象が現れる。また、非可換ソリトンは D ブレイン力学の解明に大きな役割を果たした。(例えば [3] 参照。) このことと非可換 Ward 予想を合わせると、低次元の非可換可積分方程式、ソリトン方程式についても 同様の成果が期待される。

ところが上記の期待は素朴なものであり、本当にリダクションで得られた低次元 ((2+1) 次元、(1+1) 次元) の方程式が可積分なのかどうか、あるいはソリトン解を持つかどうか、というのは自明ではなく、より詳しく調べる必要がある。

低次元のソリトン方程式の全貌を知るには佐藤理論が最適である。佐藤理論は、KP 方程式系を親玉とする、ソリトン理論の最も包括的かつ美しい理論として知られる。この理論から、多重ソリトンの厳密解の構成や無限個の保存量の導出だけでなく、解空間の構造や、背後にある無限次元の対称性などが全て明らかにされる。理論の要は、階層方程式 (無限個の Lax 方程式の系列) の存在と τ 関数の存在である。

私は富山県立大学の戸田晃一氏と共同で、佐藤理論の非可換化といくつかの非可換方程式の可積分性について詳しく調べた。まず擬微分作用素を用いた KP 階層方程式の導出に成功し、KdV 階層方程式、Boussinesq 階層方程式といった、様々な (1+1) 次元の非可換 (ソリトン) 方程式とその階層方程式の存在を明らかにした [4]。階層方程式の存在は、ソリトン理論に内在する無限次元の対称性、すなわち可積分性を示唆していると考えられる。実際、非可換 Burgers (階層) 方程式については、非可換 Cole-Hopf 変換による線型化に成功し、厳密解を構成した [5]。また非可換 Ward 予想の検証にも成功した。解には確かに非可換変形の効果が現れており、興味深い。

非可換 (1+1) 次元時空上では、非線型方程式は時間について無限階の微分方程式となるため、可積分性はおろか、初期値問題さえも定義できそうにない。それにも関わらず、非可換 Burgers 方程式は線型化され、可積分であることが分かった。初期値問題も正しく定義される。この点は非常に不思議なことで、非可換変形が (可積分性を保つ) 何か特別なものであると予感させる。

佐藤理論の非可換化では、この種の問題が常につきまとう。一つの解決法は、τ 関数の理論を完成させ、多重ソリトンの厳密解を実際に構成することである。τ 関数の理論の構築は Cole-Hopf 変換の単純な拡張で成される。この非可換化については現在研究が進んでいる。これができれば、佐藤理論の非可換化、非可換ソリトン理論の全貌解明は目前に迫る。

参考文献

[1] K. Toda, "Extensions of soliton equations to non-commutative $(2+1)$ dimensions," [JHEP PRHEP-unesp2002/038].

[2] M. Hamanaka and K. Toda, Phys. Lett. A **316** (2003) 77 [hep-th/0211148].

[3] M. Hamanaka, "Noncommutative solitons and D-branes," 東京大学博士論文 (2003) [hep-th/0303256].

[4] M. Hamanaka and K. Toda, "Towards noncommutative integrable equations," [hep-th/0309265].

[5] M. Hamanaka and K. Toda, J. Phys. A **36** (2003) 11981 [hep-th/0301213].