非可換 Anti-Self-Dual Yang-Mills 方程式の数理と可積分系

名古屋大学大学院多元数理科学研究科　浜中 真志
E-mail: hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

場の理論の非可換空間への拡張は, 単なる一般化ではなく, 物理としても数理物理としても非常に面白いものを含んでいる. 特に, 非可換空間上のゲージ場の理論は, 背景フラックス中のゲージ場の理論と等価であり, 量子ホール効果の分野などで古くから様々な応用がなされてきた. さらに非可換空間では特異点の解消が一般に起こり, 新しい物理的対象が現れる. 例えば, 4 次元ゲージ理論の Anti-Self-Dual Yang-Mills (ASDYM) 方程式の非可換化では, モジュライ空間 (解空間) の特異点解消が起こり, $U(1)$ インスタントンという非可換特有の物理的配位がもたらされる. ここでは ADHM 構成法がうまく非可換化されることも要となっており, この意味で可積分性といった良い性質も保たれている. 対応する D ブレーンとの対応も明快で, 多くの知見が与えられた.

この流れを受け, ゲージ理論には (直接) 属さない可積分方程式 (KdV 方程式など) の非可換化の研究も活発になった. 特に [1] により,「これらの方程式の大半は, 4 次元非可換 ASDYM 方程式から次元還元などにより得られる」ことが明らかにされ, 対応する物理系への応用の可能性が開かれた. KdV 方程式などもこの意味でゲージ理論に属し, 非可換化の意味 (背景フラックスの導入という物理的意味) を持つのである. この次元還元に現れる方程式には N=2 弦理論というものが関連し, ソリトン解の解析などを通じて, この理論への直接的応用が可能である. また, 幾何学的背景や無限次元対称性の視点から, 低次元非可換可積分方程式の統一的理解が深まると期待される.

私は, グラスゴー大学の Gilson 氏, Nimmo 氏と共同で, 非可換 ASDYM 方程式 (G=GL(2)) に対する (2 種類の involutive な) ベックルント変換 (解を解にうつす変換) を与え, それらを交互に組み合わせることで, 線形方程式 (Laplace 方程式) の簡単な解から, 非可換インスタントン解, 非可換「非線形平面波」解といったさまざまな厳密解を具体的に構成した [2]. この議論では有限作用の条件は課しておらず, 後者のように ADHM 構成法で構成できない解が多く含まれる. これらの D ブレーン解釈も興味深い問題である. またこのベックルント変換が単なるゲージ変換ではないことも証明し, 可換空間でも懸案だった問題を解決した.

また, これらの解の記述には, ある種の非可換行列式である quasi-determinant と呼ばれるものが重要な役割を果たす. この事実は, 低次元の非可換可積分 (階層) 方程式と共通したものであり, 低次元と高次元の深遠な関係を示唆しているとも考えられる [3]. また, この証明には quasi-determinant の恒等式をフルに用いるが, このことを「非可換ベックルント変換は quasi-determinant の恒等式そのものである」と言い表すこともできる. これは可換空間での (低次元) 可積分系でよく知られた事実「ベックルント変換は determinant の恒等式そのものである」の自然な拡張となっており, quasi-determinant を用いた可積分系の新しい定式化の可能性をもほのめかしている.

さらに, このベックルント変換の起源を非可換ツイスター理論の枠組みから理解することに成功し [2], 生成された解はいわゆる Atiyah-Ward ansatz 解と呼ばれるクラスの解の非可換版であることを明らかにした. ベックルント変換と解の一般化も行った. すべての解を生成するベックルント変換が見出せれば, 解空間の構造や対称性が具体的に記述され, 低次元可積分系の対称性による系統的分類や (有限作用条件を除いた) ASDYM 場バックグラウンドでの経路積分 (無限次元の積分) の実行が (原理的には) 可能になる.

References

[1] M. Hamanaka, “Noncommutative Ward’s Conjecture and Integrable Systems,” Nuclear Physics B **741** (2006), 368 – 389 [hep-th/0601209].

[2] C. R. Gilson, M. Hamanaka and J. J. C. Nimmo, “Bäcklund Transformations and the Atiyah-Ward ansatz for Noncommutative Anti-Self-Dual Yang-Mills Equations,” Proceedings of the Royal Society A **465** (2009), 2613 – 2632 [arXiv:0812.1222].

[3] M. Hamanaka, “Noncommutative Solitons and Quasideterminants,” work in progress.