ソリトン理論・可積分系の非可換空間への拡張

名古屋大学大学院 多元数理科学研究科

浜中 真志[1]

概 要

ソリトン理論・可積分系の非可換空間への拡張が現在盛んに研究されつつある．これまで, KP 方程式, KdV 方程式, Burgers 方程式といった個々の方程式の非可換化は, Lax 形式, 保存量, 線形化などの観点から詳しく調べられ, 何らかの非常に特別な性質が保たれていることが分かっている．しかし, その特別な性質はどこから生じているのか, 可積分性を与えるのに十分なのかなど, まだまだ調べるべきことが残っている．今こそ, より一般的な枠組みを構築し, それらの起源や背景を探ることが必要とされている．

この記事では, ソリトン理論・可積分系の体系的非可換化プログラム (佐藤理論およびツイスター理論の非可換化) とその現状を紹介する．特に最近の成果として, 擬微分作用素の枠組みから得られる Lax 方程式が全て, 無限個の保存量および N ソリトン解を持つことを示す．存在だけでなく具体的表式も与え, 解の振る舞いなどについても議論する．

1 Introduction

1.1 Motivation

非可換空間は座標関数同士の積の非可換性で特徴付けられる：

$$[x^i, x^j] = i\theta^{ij}. \tag{1.1}$$

ここで, θ^{ij} は反対称な実定数であり, 非可換パラメータと呼ばれる.[2] この関係式は, 量子力学の正準交換関係 $[q,p] = i\hbar$ に類似しており, 「空間の不確定性関係」を導く．このことから非可換空間上では, 粒子の位置は完全に決めることができず, ある広がった分布を持つ．その結果, 可換な空間上では存在した場の特異点が, 非可換空間上では解消されるということが起こりうる．これは素朴な考察に過ぎないが, 非可換空間上の (Non-Commutative=NC) 場の理論では特異点の解消が実際一般に起こり, その結果, 非可換空間特有の新しい物理的対象が現れる．分布の広がりの幅は大体 $\sqrt{|\theta^{ij}|}$ に比例し, 可換な空間への極限 $\theta^{ij} \to 0$ で特異性が復活する．

特異な場の配位は内部構造を持たずシンプルではあるが, 普通には取り扱えないため可換空間では解析の対象から除外される．これが非可換空間では可能になり, 容易な取り扱いから様々な応用がもたらされる．特に非可換空間上のゲージ理論は磁場中のゲージ理論と等価であり, 量子ホール系や弦理論の D ブレイン系への応用に威力を発揮した．ここでは非可換ソリトンが重要な役割を果たす．(レヴューとして例えば [5, 6, 15, 16, 31] などがある.)

---

[1] E-mail: hamanaka AT math.nagoya-u.ac.jp; Home Page: http://www2.yukawa.kyoto-u.ac.jp/~hamanaka

[2] 非可換パラメータ θ^{ij} は背景磁場に関係し, 手で与えられる．非可換パラメータは一般には座標に依存してもよいが, ここでは定数とする．

1.2 Towards Noncommutative Integrable Systems

非可換ソリトンの中でも特に, 非可換インスタントン解 (＝反自己双対 (Anti-Self-Dual=ASD) Yang-Mills (YM) 方程式の解) は ADHM 構成法によって厳密に構成され, 対応する D ブレインの性質についても理解が進んだ. これは ASDYM 方程式が非可換空間でも「解ける」すなわち「可積分である」ことを意味する. (レヴューとして例えば [7, 8, 23, 36] などがある.)

一方, より低次元のソリトン方程式, 可積分方程式として, KdV 方程式, KP 方程式といったものが多数知られている. これらの非可換化についても, 新しい物理的対象やさまざまな応用が十分期待されるが, その体系的研究はこれまでほぼ皆無であった. 非可換空間上の場の方程式というのは無限回微分方程式で記述され, それが解けるという状況はむしろ奇跡に近いのである.

ところがこれらのソリトン方程式, 可積分方程式は実は 4 次元の ASDYM 方程式の (次元) 還元によって (ほとんど全て) 得られることが知られている (Ward 予想 [35]). これと ASDYM 方程式の非可換化の成功を合わせると, KdV 方程式, KP 方程式といった方程式の非可換化も非常に面白いものと期待される.

これまですでに, KP 方程式, KdV 方程式, Burgers 方程式といった個々の方程式の非可換化は, Lax 形式, 保存量, 線形化などの観点から詳しく調べられ, 何らかの非常に特別な性質が保たれていることが報告されていた. しかし, その特別な性質はどこから生じているのか, 可積分性を与えるのに十分なのか, といった本質的な問いに対する答えをまだ手にしてはいない. 今こそ, より一般的な枠組みを構築し, それらの起源や背景を探ることが必要とされている.

このような状況を受けて, 私達は次の研究方向を提示した：

- 非可換ツイスター理論の構築と非可換 Ward 予想 [11] の検証
- 非可換佐藤理論の構築と解空間の構造解明

ツイスター理論は ASDYM 方程式の可積分性を記述する最も本質的な枠組みであり, Ward 予想の検証にも不可欠である [21]. ツイスター理論の非可換化はすでに議論されており (例えば [17, 14, 32]), 非可換 Ward 予想もいくつかの方程式について肯定的に検証されている [12, 19, 24]. ASDYM 方程式には対応する物理的状況が存在するので, (次元) 還元で得られた方程式もある物理系を記述し, 厳密解の解析から, さまざまな応用が期待される.

佐藤理論は, (低次元の) ソリトン方程式の最も包括的かつ壮大な理論として知られており, 多重ソリトンの厳密解の構成や無限個の保存量の導出だけでなく, 解空間の構造や, 背後にある無限次元の対称性などが全て明らかにされる. この理論の非可換空間への拡張により, 可積分性の起源や幾何学的背景が明らかにされると期待される.

この記事では, 上記のソリトン理論・可積分系の非可換化プログラムとその現状を紹介する. 特に最近の成果として, 非可換階層の枠組みから得られる Lax 方程式が全て, 無限個の保存量 [9] および N ソリトン解を持つことを示す. 存在だけでなく具体的表式も与え, 解の振る舞いなどについてもコメントする. これはまだまだ発展途上であり, 現時点では実験事実の報告に過ぎないが, 実験データは, 可積分性が非可換空間上でも保たれていることを強く示唆しており, 可積分系研究の新しい地平が予感される.

2 Noncommutative Sato's Theory

佐藤理論 [29] は, KP 方程式系を親玉とする, ソリトン理論の最も美しい理論として知られ, 擬微分作用素を用いて定式化される. 理論の要は, 階層方程式 (無限個の Lax 方程式の系列) の存在と τ 関数の存在である. ここでは, 佐藤理論の非可換化の現状を簡単に報告する. 特にごく最近得られた, 無限個の保存量 [9] について議論する.

2.1 Brief Introduction to NC Field Theories

可換空間上の理論から出発して非可換空間上の理論を得るには, もとの可換空間上の理論に現れる場同士の積を全てスター積というものに置き換えればよい. ユークリッド空間を扱う場合は, スター積として Moyal 積をとればよい.

Moyal 積は普通の可換な関数 (場) に対して定義される積の一つである [22]：

$$\begin{aligned} f \star g(x) &:= \exp\left(\frac{i}{2}\theta^{ij}\partial_i^{(x')}\partial_j^{(x'')}\right) f(x')g(x'')\Big|_{x'=x''=x} \\ &= f(x)g(x) + \frac{i}{2}\theta^{ij}\partial_i f(x)\partial_j g(x) + \mathcal{O}(\theta^2) \end{aligned} \tag{2.1}$$

Moyal 積は次の重要な性質を持つ (より詳しい議論は例えば [15, 20, 26, 25] など参照.)：

- 結合則が成り立つ：$f \star (g \star h) = (f \star g) \star h$
- 座標関数同士の非可換性 (1.1) を再現：$[x^i, x^j]_\star := x^i \star x^j - x^j \star x^i = i\theta^{ij}$
- 可換極限 $\theta^{ij} \to 0$ で普通の積に戻る.

2 番目の性質から, この積の置き換えが非可換空間上の理論を与えていることが分かる. 3 番目の性質を考慮すると, 非可換空間上の理論は, もとの可換空間上の理論の一つの変形理論に他ならない. 場や座標自身は普通の c 数の関数であるが, それらの積だけが変形されて, 非可換空間を実現しているのである. したがって可積分系の非可換空間への拡張は, 特別な可積分変形と理解することもできる.

Moyal 積は非可換な積 ($f \star g \neq g \star f$) であり, 非線型項がどのような順序で変形されるのかが重要なポイントとなるが, 佐藤理論の枠組みでは Lax 形式 (2.11) を出発点とすることで確定する.

2.2 NC Gelfand-Dickey's Hierarchies

ここでは, 擬微分作用素を用いて階層方程式 (無限個の Lax 方程式の系列) の存在を具体的に示す. まず擬微分作用素を定義する. N 階の (モニックな) 擬微分作用素 A は負巾の微分作用素を含む, 次のような作用素である：

$$A = \partial_x^N + a_{N-1}\partial_x^{N-1} + \cdots + a_0 + a_{-1}\partial_x^{-1} + a_{-2}\partial_x^{-2} + \cdots. \tag{2.2}$$

ここで次のような記号を導入しておくと便利である：

$$\begin{aligned} A_{\geq r} &:= \partial_x^N + a_{N-1}\partial_x^{N-1} + \cdots + a_r\partial_x^r, & (2.3)\\ A_{\leq r} &:= A - A_{\geq r+1} = a_r\partial_x^r + a_{r-1}\partial_x^{r-1} + \cdots, & (2.4)\\ \mathrm{res}_r A &:= a_r. & (2.5) \end{aligned}$$

特に $\mathrm{res}_{-1}A$ は擬微分作用素 A の留数と呼ばれる.

負巾の微分 ∂_x^n の掛け算作用素 f への作用は, Leibniz 則の一般化として与えられる：

$$\partial_x^n \cdot f := \sum_{i\geq 0} \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} (\partial_x^i f)\partial_x^{n-i}, \tag{2.6}$$

ここで二項係数は次のように定義される：

$$\begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} := \frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{i(i-1)\cdots 1}. \tag{2.7}$$

この二項係数の定義 (2.7) は, 負の n でも定義されるため, 式 (2.6) は負巾の微分作用素の作用を定めている. 例えば,

$$\begin{aligned} \partial_x^{-1}\cdot f &= f\partial_x^{-1} - f'\partial_x^{-2} + f''\partial_x^{-3} - \cdots, \\ \partial_x^{-2}\cdot f &= f\partial_x^{-2} - 2f'\partial_x^{-3} + 3f''\partial_x^{-4} - \cdots, \\ \partial_x^{-3}\cdot f &= f\partial_x^{-3} - 3f'\partial_x^{-4} + 6f''\partial_x^{-5} - \cdots, & (2.8) \end{aligned}$$

ただし $f' := \partial f/\partial x, f'' := \partial^2 f/\partial x^2$. 右辺の ∂_x^{-1} は関数に対して積分作用素 $\int^x dx$ として作用する.

擬微分作用素の合成は, 上記の作用から正しく定義され, 擬微分作用素全体は作用素の代数を成す. (詳しくは例えば [1] 等を参照.)

次に擬微分作用素を用いた非可換階層 (方程式) の定義をする. まず 1 階の擬微分作用素 L を導入しよう：

$$L = \partial_x + u_2\partial_x^{-1} + u_3\partial_x^{-2} + u_4\partial_x^{-3} + \cdots. \tag{2.9}$$

各係数 u_k $(k = 2, 3, \ldots)$ は無限個の「時間変数」$(x^1, x^2, \ldots)$ に依存する関数である. (ただし $x^1 \equiv x$. cf. (2.16).)

$$u_k = u_k(x^1, x^2, \ldots). \tag{2.10}$$

この無限個の変数の一部が, 時間, 空間の座標に対応する. したがって非可換性はこの無限個の「時間変数」$(x^1, x^2, \ldots)$ に対して導入される. 非可換性はこの段階では任意に与えられる.

非可換階層は, 2 つの線型方程式系 $L \star \psi = \lambda\psi,\ \partial_m\psi = B_m \star \psi$, (ただし λ は定数) の両立条件として得られ, したがって広い意味での Lax 形式である:

$$\partial_m L = [B_m, L]_\star, \quad m = 1, 2, \ldots, \tag{2.11}$$

ここで微分 ∂_m の L に対する作用は, $\partial_m L := [\partial_m, L]$ あるいは $\partial_m \partial_x^k = 0$ のように ∂_x^k の係数への作用として定義される. また作用素 B_m は, 微分作用素であり,

$$B_m := (\underbrace{L \star \cdots \star L}_{m\text{ 個}})_{\geq 0} =: (L^m)_{\geq 0}, \tag{2.12}$$

で定義される. 具体例は以下の通り：

$$B_1 = \partial_x, \quad B_2 = \partial_x^2 + 2u_2, \quad B_3 = \partial_x^3 + 3u_2\partial_x + 3(u_3 + u_2'). \tag{2.13}$$

非可換階層 (2.11) は各 m について, ∂_x^{1-k} の各係数から生じる無限個の微分方程式を含んでいる. したがって, m を動かすと, 膨大な数の微分方程式が得られる. これを非可換階層方程式と呼ぶ. 非可換階層方程式の左辺は, (2.11) より $\partial_m u_k$ の形になるので, x^m 方向の「非可換発展方程式」とも呼ばれる.

さらにこの非可換 (KP) 階層 (2.11) に適当な補助条件を加えると, 様々な非可換階層が導かれる. 特に補助条件

$$L^l = B_l \tag{2.14}$$

は非可換 KP 階層の l リダクションと呼ばれ, 非可換 KdV 階層 ($l = 2$), 非可換 Boussinesq 階層 ($l = 3$) といった無限個の非可換階層の系列を生み出す. このとき, 全ての N, k に対して

$$\frac{\partial u_k}{\partial x^{Nl}} = 0, \tag{2.15}$$

すなわち, x^{Nl} 方向への次元還元を与えていることが分かる. (なぜなら, $dL^l/dx^{Nl} = [B_{Nl}, L^l]_\star = [(L^l)^N, L^l]_\star = 0$.)

この場合, 補助条件 $L^l = B_l$ が, 無限種類の場同士に簡明な関係式を与え, 無限種類の場 $u_{l+1}, u_{l+2}, u_{l+3}, \ldots$ が $(l-1)$ 種類の場 $u_2, u_3, \ldots, u_l$ で表される.

具体例を紹介する：

- 非可換 KP 階層

  まず, 何も補助条件を加えない非可換階層 (2.11) が非可換 KP 方程式を含んでいることを示す. 非可換階層 (2.11) における擬微分作用素の各べきの係数が, 無限個の非可換「発展方程式」を与える. すなわち, $m = 1$ に対して,

$$\partial_x^{1-k}) \quad \partial_1 u_k = u_k', \quad k = 2, 3, \ldots \quad \Rightarrow \quad x^1 \equiv x, \tag{2.16}$$

  $m = 2$ に対して,

$$\begin{aligned}
\partial_x^{-1}) \quad \partial_2 u_2 &= u_2'' + 2u_3', \\
\partial_x^{-2}) \quad \partial_2 u_3 &= u_3'' + 2u_4' + 2u_2 \star u_2' + 2[u_2, u_3]_\star, \\
\partial_x^{-3}) \quad \partial_2 u_4 &= u_4'' + 2u_5' + 4u_3 \star u_2' - 2u_2 \star u_2'' + 2[u_2, u_4]_\star.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

$m=3$ に対して,

$$\begin{aligned}\partial_x^{-1}) \quad \partial_3 u_2 &= u_2''' + 3u_3'' + 3u_4' + 3u_2' \star u_2 + 3u_2 \star u_2',\\ \partial_x^{-2}) \quad \partial_3 u_3 &= u_3''' + 3u_4'' + 3u_5' + 6u_2 \star u_3' + 3u_2' \star u_3 + 3u_3 \star u_2' + 3[u_2, u_4]_\star.\end{aligned} \tag{2.18}$$

重要なことは, x_2 方向の「時間発展」の式 (2.17) から, 無限種類の場 $u_3, u_4, u_5, \ldots$ が 1 種類の場 $2u_2 \equiv u$ で表されてしまうことである. これが階層の存在条件であり, 非可換空間でも満たされていることが分かる [13]. このようにして非線型項の順序も確定する.

式 (2.17) の最初の 2 つの式を用いて, 式 (2.18) の最初の式から, u_3, u_4 を消去すると, $(2+1)$ 次元の非可換 KP 方程式 [27, 18] が得られる (ただし $2u_2 \equiv u, x^2 \equiv y, x^3 \equiv t$):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{4}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{3}{4}\frac{\partial (u \star u)}{\partial x} + \frac{3}{4}\int^x dx' \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{3}{4}\left[u, \int^x dx' \frac{\partial u}{\partial y}\right]_\star. \tag{2.19}$$

したがって非可換階層 (2.11) のことを非可換 KP 階層と呼ぶ. 方程式 (2.19) は, x, y, t についての微分のみを含み, $(2+1)$ 次元時空上の方程式と考えることができる. この方程式のみに着目する場合, 他の座標 $(x_4, x_5, \cdots)$ はいわば "Extra Dimension" に属し, 本質的ではない. よってこのとき非可換性は時間・空間座標 x, y, t に対してのみ導入されるべきである.

- 非可換 KdV 階層 (非可換 KP 階層の 2 リダクション)

  補助条件 $L^2 = B_2 =: \partial_x^2 + u$ を非可換 KP 階層に課すと, 非可換 KdV 階層が得られる. この場合, 非可換階層

$$\frac{\partial u}{\partial x^m} = \left[B_m, L^2\right]_\star, \tag{2.20}$$

  が直接 m 次非可換 KdV 方程式を生み出す. すなわち, (2.20) は擬微分作用素の正巾, 負巾ともに含まない. 例えば, $m=3$ のとき, $x^3 \equiv t$ とすると $(1+1)$ 次元非可換 (3 次) KdV 方程式 [3]

$$\dot{u} = \frac{1}{4}u''' + \frac{3}{4}(u \star u)', \tag{2.21}$$

  が得られ, $m=5$ のとき, $x^5 \equiv t$ とすると, $(1+1)$ 次元非可換 5 次 KdV 方程式 [33]

$$\dot{u} = \frac{1}{16}u''''' + \frac{5}{16}(u \star u''' + u''' \star u) + \frac{5}{8}(u' \star u' + u \star u \star u)', \tag{2.22}$$

  が得られる. ただし $\dot{u} := \partial u / \partial t$. 非可換 3 次 KdV 方程式と非可換 5 次 KdV 方程式は共に $(1+1)$ 次元時空上の方程式であるが, 時間座標が異なることに注意されたい. 保存量を議論する際は, どの方程式に着目しどの座標を時間・空間とみなすのかを明言しなければならない.

同様にして, 非可換 Boussinesq 階層, 非可換 Coupled KdV 階層, 非可換 Sawada-Kotera 階層, 非可換変形 KdV 階層, 非可換 Burgers 階層など広いクラスの非可換階層が得られる. (これらを非可換 Gelfand-Dickey 階層と呼ぶ.) AKNS 階層といった行列型のものの拡張 (NLS 階層も含まれる) や Bogoyavlenskii-Calogero-Schiff (BCS) 階層の拡張も同様に可能である.

2.3 Infinite Conserved Quantities

ここでは, このようにして非可換階層から得られた方程式が全て, 無限個の保存量を持つことを示す. 保存量の存在は対称性の存在と密接な関係にあり, 無限個の保存量の存在は背後にある無限次元の対称性の存在を示唆していると考えられる.

まず, 保存則と保存量の関係を思いだそう. 保存則というのは, 次のような関係式のことで

$$\frac{\partial\sigma(t,x^i)}{\partial t} = \partial_i J^i(t,x^i). \tag{2.23}$$

ただし t, x^i はそれぞれ時間座標, 空間座標であり, $\sigma(t,x^i)$ は保存密度, $J^i(t,x^i)$ はそれに付随した流束と呼ばれる. このとき保存密度の空間積分

$$Q(t) = \int_{\text{space}} d^D x \sigma(t,x^i), \tag{2.24}$$

が保存量を与える. すなわち

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{space}} d^D x\sigma(t,x^i) = \int_{\text{space}} d^D x \partial_i J_i(t,x^i) = \int_{\substack{\text{spatial}\\ \text{infinity}}} dS^i J_i(t,x^i) = 0, \tag{2.25}$$

ただし, $J_i(t,x^i)$ の表面積分は消えるものとする. 2.1 節の議論により, この議論は非可換空間でも全く同様に成り立つことが分かる. ただし, どの座標が時間座標で, どの座標が空間座標なのかを明示しなければばならない.

ここで非可換階層の中のある方程式に着目し, その保存則, 保存密度について議論しよう. このとき非可換性は, 時間・空間方向にのみ導入されている. (cf. 式 (2.19) の下のコメント.) 天下りであるが, 座標 x^m が時間座標 t であるとき, (無限個の) 保存密度は次式のようになる ($n=1,2,\ldots$) [9]：

$$\sigma_n = \text{res}_{-1} L^n + \sum_i \theta^{im} \sum_{k=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{k} \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} \partial_x^{k-l} \text{res}_{\ -(l+1)} L^n \diamond \partial_i \text{res}_k L^m, \tag{2.26}$$

ここで, “$\diamond$” は Strachan 積 [30] と呼ばれる積で次のように定義される：

$$f(x)\diamond g(x) := \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{(2s+1)!}\left(\frac{1}{2}\theta^{ij}\partial_i^{(x')}\partial_j^{(x'')}\right)^{2s} f(x')g(x'')\Big|_{x'=x''=x}. \tag{2.27}$$

Strachan 積は可換であるが結合則を満たさないという性質を持つ.

いま非可換性は時間・空間方向にのみ導入されているので, i はその方向の成分のみを走る. 空間—空間非可換性のときには, $\theta^{im}=0$ より, 保存密度は L^n の留数 $\text{res}_{-1}L^n$ に等しい. 一方, 時間—空間非可換性のときには, (2.26) の第 2 項の寄与があるため, 保存密度が大幅に変形されることが分かる. ($\text{res}_{-r}L^n$ の具体的表式は [9] の Appendix A から見て取れる.) 例えば, 非可換 KP 方程式 ($[t,x]=i\theta$) および非可換 KdV 方程式の保存密度は次のようになる：

$$\sigma_n = \text{res}_{-1}L^n - 3\theta\left((\text{res}_{-1}L^n)\diamond u_3' + (\text{res}_{-2}L^n)\diamond u_2'\right). \tag{2.28}$$

l リダクションした階層に対しては, 保存密度 (2.26) は $n = Nl$ ($N=1,2,\ldots$) に対して自明なものになる.

2.4 Comments on Exact Soliton Solutions

まず１ソリトン解についてコメントする. 新しい変数 $z := x + vt, \bar{z} := x - vt$ で式 (2.1) を書き換えると

$$f(z,\bar{z}) \star g(z,\bar{z}) = \exp\left\{iv\theta\left(\partial_{\bar{z}'}\partial_{z''} - \partial_{z'}\partial_{\bar{z}''}\right)\right\} f(z',\bar{z}')g(z'',\bar{z}'')\Big|_{\substack{z'=z''=z \\ \bar{z}'=\bar{z}''=\bar{z}}} \tag{2.29}$$

となる. したがって,

$$f(z) \star g(z) = f(z)g(z), \quad f(\bar{z}) \star g(\bar{z}) = f(\bar{z})g(\bar{z}). \tag{2.30}$$

すなわち $(1+1)$ 次元非可換時空上の１ソリトン解 (あるいは衝突過程を含まない多重ソリトン解) は可換空間のものと全く同じものとなる [2, 11].

N ソリトン解の存在を示すのは, 可積分性の議論において非常に重要であるが, 最近の研究により, 上記の非可換階層方程式は全て N ソリトン解を持つことが明らかになった. すなわち, 衝突過程でソリトンは崩壊せず, 位相のずれだけを生じてもとの形を保ったまま一定の速度で進行する. ただし位相のずれが非可換性によって少しだけ影響を受ける可能性がある.

すでに紙数も尽きたので, 詳しい報告は [10] にゆずる. 佐藤理論の非可換化については, [4, 28, 34] でも議論がなされている.

Acknowledgements

この研究は大幸財団から経済援助を受けています.

参考文献

[1] L. A. Dickey, *Soliton Equations and Hamiltonian Systems (2nd Ed.)* (World Sci., 2003) [ISBN/9812381732].

[2] A. Dimakis and F. Müller-Hoissen, hep-th/0007015[3]; Czech. J. Phys. **51** (2001) 1285.

[3] A. Dimakis and F. Müller-Hoissen, Phys. Lett. A **278** (2000) 139 [hep-th/0007074].

[4] A. Dimakis and F. Müller-Hoissen, J. Phys. A **37** (2004) 4069 [hep-th/0401142]; J. Phys. A **37** (2004) 10899 [hep-th/0406112]; [nlin.si/0408023].

[5] M. R. Douglas and N. A. Nekrasov, Rev. Mod. Phys. **73** (2002) 977 [hep-th/0106048].

[6] 浜中 真志, 素粒子論研究 **104-5** (2002-2) E27-E44.[4]

[7] 浜中 真志, "ADHM/Nahm 構成法とその双対性," 素粒子論研究 **106-1** (2002-10) 1-60.

[8] M. Hamanaka, "Noncommutative solitons and D-branes," Ph. D thesis [hep-th/0303256].

[9] M. Hamanaka, J. Math. Phys. **46** (2005) 052701 [hep-th/0311206].

[10] M. Hamanaka, "Noncommutative solitons and integrable systems," Proceedings of the COE workshop on Noncommutative Geometry and Physics 2004, Keio, hep-th/0504001.

[3] hep-th/～とあるのは論文のプレプリント番号であり, [http://xxx.lanl.gov/archive/hep-th] から入手できる.
[4] 私が書いた記事については, 私の HP [http://www2.yukawa.kyoto-u.ac.jp/~hamanaka] にも置かれております.

[11] M. Hamanaka and K. Toda, Phys. Lett. A **316** (2003) 77 [hep-th/0211148].

[12] M. Hamanaka and K. Toda, J. Phys. A **36** (2003) 11981 [hep-th/0301213].

[13] M. Hamanaka and K. Toda, [hep-th/0309265].

[14] K. C. Hannabuss, Lett. Math. Phys. **58** (2001) 153 [hep-th/0108228].

[15] J. A. Harvey, [hep-th/0102076].

[16] 伊藤 克司, "非可換時空上の場の理論と超弦理論," 日本物理学会誌 **59** (2004-12) 856-861.

[17] A. Kapustin, A. Kuznetsov and D. Orlov, Commun. Math. Phys. **221** (2001) 385 [hep-th/0002193].

[18] B. Kupershmidt, *KP or mKP : noncommutative mathematics of Lagrangian, Hamiltonian, and integrable systems* (AMS, 2000) [ISBN/0821814001].

[19] M. Legare, hep-th/0012077; J. Phys. A **35** (2002) 5489.

[20] 前田 吉昭, 梶浦 宏成 (高村 亮 記), "変形量子化入門," 東京大学数理科学セミナリーノート **20** (2002) [ISSN/0919-8180].

[21] L. J. Mason and N. M. Woodhouse, *Integrability, self-duality, and twister theory* (Oxford, 1996) [ISBN/0-19-853498-1].

[22] J. E. Moyal, Proc. Cambridge Phil. Soc. **45** (1949) 99; H. J. Groenewold, Physica **12** (1946) 405.

[23] N. A. Nekrasov, [hep-th/0011095].

[24] H. Nishino and S. Rajpoot, Phys. Lett. B **572** (2003) 91 [hep-th/0306290].

[25] 大森 英樹, "数学のなかの物理学" (2004, 東大出版) [ISBN/4-13-061304-9].

[26] 大森 英樹, 前田 吉昭, "量子的な微分・積分" (2004, シュプリンガー東京) [ISBN/4-431-71090-6].

[27] L. D. Paniak, [hep-th/0105185].

[28] M. Sakakibara, J. Phys. A **37** (2004) L599 [nlin.si/0408002].

[29] M. Sato, RIMS Kokyuroku **439** (1981) 30; M. Sato and Y. Sato, Lect. Notes Num. Appl. Anal. **5** (1982) 259.

[30] I. Strachan, J. Geom. Phys. **21** (1997) 255 [hep-th/9604142].

[31] R. J. Szabo, Phys. Rept. **378** (2003) 207 [hep-th/0109162]

[32] K. Takasaki, J. Geom. Phys. **37** (2001) 291 [hep-th/0005194].

[33] K. Toda, JHEP Proceedings of workshop on integrable theories, solitons and duality, Sao Paulo, Brazil, 1-6 July 2002 [JHEP PRHEP-unesp2002/038].

[34] N. Wang and M. Wadati, J. Phys. Soc. Jap. **73** (2004) 1689.

[35] R. S. Ward, Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A **315** (1985) 451.

[36] 綿村 哲, "非可換空間上のゲージ理論," Summer School「数理物理 2002」予稿集 (2002) 35-98.