ソリトン理論・可積分系の非可換化とQuasideterminant

名古屋大学 大学院多元数理科学研究科

浜中 真志 (HAMANAKA, Masashi)[1]

概 要

ソリトン理論・可積分系の非可換化は, 変数の行列型への拡張, 非可換空間上への拡張といった形で古くから活発に研究がなされてきた. 特に最近, ソリトン解の構成において, Quasideterminant というある種の非可換行列式が本質的役割を果たすことが明らかになり, 非可換ソリトンの研究は新しい局面を迎えている. この記事では, Quasideterminant の基礎を解説したのち, 4 次元空間上の非可換反自己双対ヤン・ミルズ方程式を題材に, それらが解の構成でいかに威力を発揮するかを説明する. (これはグラスゴー大学の C. Gilson 氏, J. Nimmo 氏との共同研究 [11,12] に基づく.) 低次元ソリトン方程式との関連についても少し触れる.

1 はじめに

場の理論の非可換空間への拡張は, 単なる一般化ではなく, 物理としても数理物理としても非常に面白いものを含んでいる. 特に, 非可換空間上のゲージ場の理論は, 背景フラックス中のゲージ場の理論と等価であり, 量子ホール効果の分野などで古くから様々な応用がなされてきた. さらに非可換空間では特異点の解消が一般に起こり, 新しい物理的対象が現れる. 例えば, 4 次元ゲージ理論の反自己双対ヤン・ミルズ (Anti-Self-Dual Yang-Mills = ASDYM) 方程式の非可換化では, モジュライ空間 (解空間) の特異点解消が起こり, U(1) インスタントンという非可換特有の物理的配位がもたらされる. ここではADHM構成法がうまく非可換化されることも要となっており, この意味で可積分性といった良い性質も保たれている. 対応するD ブレーンとの対応も明快で, 多くの知見が与えられた. (レヴューとして例えば, [5,13,14,22,28] がある.)

この流れを受け, ゲージ理論には (直接) 属さない可積分方程式 (KdV 方程式など) の非可換化の研究も活発になった. 特に [18] により,「これらの方程式の大半は, 4 次元非可換 ASDYM 方程式から次元還元といったリダクションの操作により得られる」ことが明らかにされ, 対応する物理系への応用の可能性が開かれた. KdV 方程式などもこの意味でゲージ理論に属し, 非可換化の意味 (背景フラックスの導入という物理的意味) を持つのである. この次元還元に現れる方程式にはN=2 弦理論というものが関連し, ソリトン解の解析などを通じて, この理論への直接的応用が可能である. また, 幾何学的背景や無限次元対称性の視点から, 低次元非可換可積分方程式の統一的理解が深まると期待される.

この記事では, まず2章でQuasideterminant の基礎を解説したのち, 3章で非可換ASDYM方程式とその (自己) ベックルント変換を議論する. 変換によって生成された解はQuasideterminant で簡明に記述される. また証明はすべて, Quasideterminant の恒等式を駆使することで示される. 以上はグラスゴー大学の C. Gilson 氏, J. Nimmo 氏との共同研究 [11,12] に基づく. 4章で

[1]E-mail: hamanaka AT math.nagoya-u.ac.jp; Home Page: http://www2.yukawa.kyoto-u.ac.jp/~hamanaka

は, 非可換 ASDYM 方程式のリダクションから低次元ソリトン方程式を導出する. 最後に 5 章で今後の方向などについてコメントする.

講演者の動機は上に述べた通り, 非可換空間上への拡張なのだが, 以下の議論は, より一般に変数がすべて非可換になった状況でも成り立つ. したがって, 以後は, 変数がすべて非可換になっている状況 (たとえば四元数に値をとるような状況) であると解釈して読んでいただいて差し支えない. (非可換空間上への拡張がどのようなものであるかについて興味のある方は, 例えば [16,17] などをご参照ください.)

2 Quasideterminant の簡単なレヴュー

この章では, Quasideterminant の簡単な紹介を行う. これは, 行列要素が非可換変数となっているような行列に対するある種の「行列式」であり, 1991 年に Gelfand と Retakh によって導入された [7]. 当時は純粋に数学的対象として定義されたが, まもなく非可換ソリトンや非可換対称関数との関連が指摘され始め, ここ数年は, Quasideterminant を用いたソリトン解の構成が盛んに研究されている. (レヴューとして例えば, [8,9,20,27] がある.)

Quasideterminant は, $n \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$ に対して, 直接には, A の逆行列 $B = (b_{ij})$ を用いて,

$$|A|_{ij} := b_{ji}^{-1}, \tag{2.1}$$

のように定義される. (添え字 i, j はもちろん 1 から n までを走る. また, 以後逆行列の存在はすべて仮定する.) 可換極限をとると, A の行列式に帰着せず, $|A|$ に比例したもの, あるいは行列式の比となる：

$$|A|_{ij} \stackrel{\text{可換極限}}{\longrightarrow} (-1)^{i+j}\frac{\det A}{\det A^{ij}}. \tag{2.2}$$

ただし, A^{ij} は A の i 行と j 列を除いた行列である.

Quasideterminant は, 定義により, 一つの行列 A に対し, n^2 種類存在する. それらは, 添え字 i, j で表されているが, その代わりに A の (i, j) 成分をボックスで囲んで表記することも多く, 便利なこともある：

$$|A|_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & & \boxed{a_{ij}} & & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{2.3}$$

ブロック分割された行列の逆行列の公式を考察することで, Quasideterminant の具体的表式が以下のように帰納的に求まる：

- 1×1 matrix $A = a$ に対しては, $|A| = a$

- 2×2 matrix $A=(a_{ij})$ に対しては,

$$|A|_{11}=\begin{vmatrix}\boxed{a_{11}} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}-a_{12}a_{22}^{-1}a_{21},\quad |A|_{12}=\begin{vmatrix}a_{11} & \boxed{a_{12}}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{12}-a_{11}a_{21}^{-1}a_{22},$$
$$|A|_{21}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ \boxed{a_{21}} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{21}-a_{22}a_{12}^{-1}a_{11},\quad |A|_{22}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & \boxed{a_{22}}\end{vmatrix}=a_{22}-a_{21}a_{11}^{-1}a_{12},$$

- 3×3 matrix $A=(a_{ij})$ に対しては,

$$\begin{aligned}|A|_{11} &= \begin{vmatrix}\boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}-(a_{12},a_{13})\begin{pmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}a_{21}\\ a_{31}\end{pmatrix}\\ &= a_{11}-a_{12}\begin{vmatrix}\boxed{a_{22}} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}^{-1}a_{21}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ \boxed{a_{32}} & a_{33}\end{vmatrix}^{-1}a_{31}\\ &\qquad -a_{13}\begin{vmatrix}a_{22} & \boxed{a_{23}}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}^{-1}a_{21}-a_{13}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & \boxed{a_{33}}\end{vmatrix}^{-1}a_{31},\cdots\end{aligned}$$

定義を見る限り行列式というよりむしろ逆行列に近い Quasideterminant であるが, 行列式らしい恒等式が多数存在する. 例えば,

- 非可換 Jacobi 恒等式 [7]

$$\begin{vmatrix}A & B & C\\ D & f & g\\ E & h & \boxed{i}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A & C\\ E & \boxed{i}\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}A & B\\ E & \boxed{h}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}A & B\\ D & \boxed{f}\end{vmatrix}^{-1}\begin{vmatrix}A & C\\ D & \boxed{g}\end{vmatrix}. \tag{2.4}$$

可換極限で, 行列式に対する Jacobi の恒等式 [23] に帰着する：

$$\begin{vmatrix}A & B & C\\ D & f & g\\ E & h & i\end{vmatrix}A=\begin{vmatrix}A & C\\ E & i\end{vmatrix}\begin{vmatrix}A & B\\ D & f\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}A & B\\ E & h\end{vmatrix}\begin{vmatrix}A & C\\ D & g\end{vmatrix}.$$

- Homological 関係式 [7]

$$\begin{vmatrix}A & B & C\\ D & f & g\\ E & \boxed{h} & i\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A & B & C\\ D & f & g\\ E & h & \boxed{i}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}A & B & C\\ D & f & g\\ 0 & \boxed{0} & 1\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}A & B & C\\ D & f & \boxed{g}\\ E & h & i\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A & B & 0\\ D & f & \boxed{0}\\ E & h & 1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}A & B & C\\ D & f & g\\ E & h & \boxed{i}\end{vmatrix} \tag{2.5}$$

3　非可換 ASDYM 方程式とベックルント変換

3.1　非可換 ASDYM 方程式

4 次元空間上で定義される非可換 ASDYM 方程式は, Yang 形式で次のように書ける.

$$\partial_z(J^{-1}\partial_{\tilde{z}}J) - \partial_w(J^{-1}\partial_{\tilde{w}}J) = 0. \tag{3.1}$$

ただしゲージ群は $G = GL(2)$ とする. $J \in GL(2)$ である. $z, w, \tilde{z}, \tilde{w}$ は 4 次元の実座標を適当に複素に組んだものである. ここですべての変数は非可換になっており, 行列要素同士の積がすべて非可換になっている. (単純に $G = GL(2, \mathbb{H})$ のように考えて差し支えない.)

この方程式の解 J が与えられると, $J = \tilde{h}^{-1}h$ のように 2×2 行列 h と $\tilde{h}$ に分解することで, 反自己双対ゲージ場を

$$A_z = -(\partial_z h)h^{-1}, \quad A_w = -(\partial_w h)h^{-1}, \quad A_{\tilde{z}} = -(\partial_{\tilde{z}}\tilde{h})\tilde{h}^{-1}, \quad A_{\tilde{w}} = -(\partial_{\tilde{w}}\tilde{h})\tilde{h}^{-1}, \tag{3.2}$$

として再現することができる. これらは実際, (標準的形式の) 非可換 ASDYM 方程式を満たす：

$$\begin{aligned} &F_{wz} = \partial_w A_z - \partial_z A_w + [A_w, A_z] = 0, \quad F_{\tilde{w}\tilde{z}} = \partial_{\tilde{w}} A_{\tilde{z}} - \partial_{\tilde{z}} A_{\tilde{w}} + [A_{\tilde{w}}, A_{\tilde{z}}] = 0, \\ &F_{z\tilde{z}} - F_{w\tilde{w}} = \partial_z A_{\tilde{z}} - \partial_{\tilde{z}} A_z + \partial_{\tilde{w}} A_w - \partial_w A_{\tilde{w}} + [A_z, A_{\tilde{z}}] - [A_w, A_{\tilde{w}}] = 0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

3.2　ベックルント変換

この節の結果は, [3] の自然な非可換化であり, 可換極限でそれらに帰着する.

一般性を失わず, J を以下のようにパラメトライズすることができる：

$$J = \begin{bmatrix} f - gb^{-1}e & -gb^{-1} \\ b^{-1}e & b^{-1} \end{bmatrix}. \tag{3.4}$$

このとき, 以下の 2 種類の変換は, 非可換 ASDYM 方程式を不変に保つ, すなわち (自己) ベックルント変換である：

- β 変換 [11, 24]:

  $$b^{\mathrm{new}} = f^{-1}, f^{\mathrm{new}} = b^{-1}, e_w^{\mathrm{new}} = f^{-1}g_{\tilde{z}}b^{-1}, e_z^{\mathrm{new}} = f^{-1}g_{\tilde{w}}b^{-1}, g_{\tilde{z}}^{\mathrm{new}} = b^{-1}e_w f^{-1}, g_{\tilde{w}}^{\mathrm{new}} = b^{-1}e_z f^{-1}.$$

- γ_0 変換 [11]:

  $$b_{\tilde{z}}^{\mathrm{new}} = (f - gb^{-1}e)^{-1},\ f_{\tilde{z}}^{\mathrm{new}} = (b - ef^{-1}g)^{-1},\ e_{\tilde{z}}^{\mathrm{new}} = (e - bg^{-1}f)^{-1},\ g_{\tilde{z}}^{\mathrm{new}} = (g - fe^{-1}b)^{-1}.$$

これらはともに包合的 ($\beta\circ\beta = id, \gamma_0\circ\gamma_0 = id$) であるが, それらを組み合わせた $\alpha = \gamma_0\circ\beta$ は非自明な変換となる. したがって自明解のクラス R_0 から出発して, ベックルント変換の作用によって一連の (非自明) 解のシリーズが構成できる：

$$\begin{tikzcd}
R_0 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, leftrightarrow, "\beta"'] & R_1 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, leftrightarrow, "\gamma_0"'] \arrow[dr, leftrightarrow, "\beta"'] & R_2 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, leftrightarrow, "\gamma_0"'] \arrow[dr, leftrightarrow, "\beta"'] & R_3 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, leftrightarrow, "\gamma_0"'] \arrow[dr, leftrightarrow, "\beta"'] & R_4 \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow, "\gamma_0"'] & \cdots \\
 & R'_1 \arrow[r, "\alpha'"'] & R'_2 \arrow[r, "\alpha'"'] & R'_3 \arrow[r, "\alpha'"'] & R'_4 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

$b=e=f=g=\Delta_0^{-1}$ ($\Delta_0(x)$ はスカラー関数) とおくと, 非可換 ASDYM 方程式は非可換線形微分方程式 $(\partial_z\partial_{\tilde{z}}-\partial_w\partial_{\tilde{w}})\Delta_0=0$ (ユークリッド空間のときは 4 次元ラプラス方程式) となる. この自明解を出発点としてベックルント変換を施して得られる解のシリーズは, 以下のように Quasideterminant で極めてシンプルかつ対称的に表される：

- 非可換 Atiyah-Ward 仮設解 R_l

$$
\begin{aligned}
b_l &= \begin{vmatrix} \Delta_0 & \Delta_{-1} & \cdots & \Delta_{-l} \\ \Delta_1 & \Delta_0 & \cdots & \Delta_{1-l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_l & \Delta_{l-1} & \cdots & \boxed{\Delta_0} \end{vmatrix}^{-1}, \quad f_l = \begin{vmatrix} \boxed{\Delta_0} & \Delta_{-1} & \cdots & \Delta_{-l} \\ \Delta_1 & \Delta_0 & \cdots & \Delta_{1-l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_l & \Delta_{l-1} & \cdots & \Delta_0 \end{vmatrix}^{-1}, \\
e_l &= \begin{vmatrix} \Delta_0 & \Delta_{-1} & \cdots & \boxed{\Delta_{-l}} \\ \Delta_1 & \Delta_0 & \cdots & \Delta_{1-l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_l & \Delta_{l-1} & \cdots & \Delta_0 \end{vmatrix}^{-1}, \quad g_l = \begin{vmatrix} \Delta_0 & \Delta_{-1} & \cdots & \Delta_{-l} \\ \Delta_1 & \Delta_0 & \cdots & \Delta_{1-l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boxed{\Delta_l} & \Delta_{l-1} & \cdots & \Delta_0 \end{vmatrix}^{-1}.
\end{aligned} \tag{3.5}
$$

- 非可換 Atiyah-Ward 仮設解 R'_l

$$
\begin{aligned}
b'_l &= \begin{vmatrix} \boxed{\Delta_0} & \Delta_{-1} & \cdots & \Delta_{1-l} \\ \Delta_1 & \Delta_0 & \cdots & \Delta_{2-l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{l-1} & \Delta_{l-2} & \cdots & \Delta_0 \end{vmatrix}, \quad f'_l = \begin{vmatrix} \Delta_0 & \Delta_{-1} & \cdots & \Delta_{1-l} \\ \Delta_1 & \Delta_0 & \cdots & \Delta_{2-l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{l-1} & \Delta_{l-2} & \cdots & \boxed{\Delta_0} \end{vmatrix}, \\
e'_l &= \begin{vmatrix} \Delta_{-1} & \Delta_{-2} & \cdots & \boxed{\Delta_{-l}} \\ \Delta_0 & \Delta_{-1} & \cdots & \Delta_{1-l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{l-2} & \Delta_{l-3} & \cdots & \Delta_{-1} \end{vmatrix}, \quad g'_l = \begin{vmatrix} \Delta_1 & \Delta_0 & \cdots & \Delta_{2-l} \\ \Delta_2 & \Delta_1 & \cdots & \Delta_{3-l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boxed{\Delta_l} & \Delta_{l-1} & \cdots & \Delta_1 \end{vmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.6}
$$

行列の要素として現れたスカラー関数 $\Delta_i(x)$ は以下の関係式により, Δ_0 から完全に決まる：

$$
\frac{\partial \Delta_i}{\partial z}=-\frac{\partial \Delta_{i+1}}{\partial \tilde{w}}, \quad \frac{\partial \Delta_i}{\partial w}=-\frac{\partial \Delta_{i+1}}{\partial \tilde{z}}, \quad -l\leq i\leq l-1 \quad (l\geq 2), \tag{3.7}
$$

可換極限では, $b_l=f_l, b'_l=f'_l$ が成り立ち, [3] の結果に帰着する.

証明は, Quasideterminant の恒等式のみを駆使して与えられる. 例えば, γ_0 変換 $b_l^{-1}=f'_l-g'_l b'^{-1}_l e'_l$ は具体的には,

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} \Delta_0 & \Delta_{-1} & \cdots & \Delta_{-l} \\ \Delta_1 & \Delta_0 & \cdots & \Delta_{1-l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_l & \Delta_{l-1} & \cdots & \boxed{\Delta_0} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \Delta_0 & \cdots & \Delta_{1-l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{l-1} & \cdots & \boxed{\Delta_0} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \Delta_1 & \cdots & \Delta_{2-l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boxed{\Delta_l} & \cdots & \Delta_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \boxed{\Delta_0} & \cdots & \Delta_{1-l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{l-1} & \cdots & \Delta_0 \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} \Delta_{-1} & \cdots & \boxed{\Delta_{-l}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{l-2} & \cdots & \Delta_{-1} \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

と等価であるが, これはまさに非可換 Jacobi 恒等式そのものである！(コーナーの 4 成分に着目して非可換 Jacobi 恒等式を適用すればよい.) β 変換の証明も, Quasideterminant の恒等式を駆使することで示される [11]. (なお可換極限をとると, [25, 26] との関連も見える.) このことを「非可換ベックルント変換は Quasideterminant の恒等式そのものである」と言い表すこともできるが, これは可換空間での (低次元) 可積分系でよく知られた事実「バックルンド変換は determinant の恒等式そのものである [23]」の自然な拡張となっており, Quasideterminant を用いた可積分系の新しい定式化の可能性をもほのめかしている. この解に対する J の表式も極めて美しく, J を直接導くような Riemann-Hilbert 問題の解法の存在が示唆される. このベックルント変換が単なるゲージ変換ではないことも J の表式を見れば明らかである.

さらに [12] では, このベックルント変換の起源を非可換ツイスター理論の枠組み [2, 29] から完全に理解することに成功し, 生成された解はいわゆる Atiyah-Ward 仮設解 [1] と呼ばれるクラスの解の非可換版であることを明らかにした. 変換と解の一般化も行った. すべての解を生成するベックルント変換が見出せれば, 解空間の構造や対称性が具体的に記述され, 低次元可積分系の対称性による系統的分類や (有限作用条件を除いた) ASDYM 場バックグラウンドでの経路積分 (無限次元の積分) の実行が (原理的には) 可能になる.

非可換線形方程式 (Laplace 方程式) を解くのはそれほど難しくはなく, 非可換インスタントン解, 非可換「非線形平面波」解といったさまざまな新しい厳密解が生成される. この議論では有限作用の条件は課しておらず, ADHM 構成法で構成できない解が多く含まれる. これらの D ブレーン解釈も興味深い問題である.

4 非可換 ASDYM 方程式のリダクション (非可換 Ward 予想)

可換空間において, 低次元の可積分方程式の多くが 4 次元の ASDYM 方程式からリダクションによって得られることが知られている. これは Ward 氏によって 1985 年につぶやかれ [32], しばしば Ward 予想と呼ばれる. Mason-Woodhouse の教科書には, ツイスター的取り扱いも含めて非常に多くの具体例が体系的にまとめられている [24]. Ward 予想の非可換版は, [21] で明確に提唱され, 多くの具体例が [18] にまとめられている. ここでは, $(2+1)$ 次元の非可換トロイダル KdV 方程式 (あるいは, 非可換 Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff 方程式) および非可換 KdV 方程式へのリダクションを紹介する.

標準的な非可換 ASDYM 方程式 (3.3) から出発し (ゲージ群は $G = GL(2,\mathbb{C})$), まず次の方向に関する次元還元を行う (並進不変性を課す)：

$$Y = \partial_{\tilde{z}}. \tag{4.1}$$

次いで, 以下の非自明なリダクション条件をゲージ場に課す：

$$A_{\tilde{w}} = O,\ A_{\tilde{z}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ A_w = \begin{pmatrix} q & -1 \\ q_w + qq & -q \end{pmatrix},$$
$$A_z = \begin{pmatrix} (1/2)q_{w\tilde{w}} + q_{\tilde{w}}q + \alpha & -q_{\tilde{w}} \\ \phi & -(1/2)q_{w\tilde{w}} - qq_{\tilde{w}} + \alpha \end{pmatrix},$$

ただし,

$$\begin{aligned}
\alpha &= \partial_w^{-1}[q_w, q_{\tilde{w}}], \qquad \partial_w^{-1} f(w) := \int^w dw' f(w'),\ \ \{A, B\} := AB + BA, \\
\phi &= -q_z + \frac{1}{2} q_{ww\tilde{w}} + \frac{1}{2}\{q, q_{w\tilde{w}}\} + \frac{1}{2}\{q_w, q_{\tilde{w}}\} + q q_{\tilde{w}} q + [q, \partial_w^{-1}[q_w, q_{\tilde{w}}]],
\end{aligned}$$

このとき, $2q_w = u$ とおくことで, 非可換 ASDYM 方程式は非可換トロイダル KdV 方程式 [21,30] に帰着する！

$$u_z = \frac{1}{4} u_{ww\tilde{w}} + \frac{1}{2}\{u, u_{\tilde{w}}\} + \frac{1}{4}\{u_{\tilde{w}}, \partial_w^{-1} u_{\tilde{w}}\} + \frac{1}{4}\partial_w^{-1}[u, \partial_w^{-1}[u, \partial_w^{-1} u_{\tilde{w}}]]. \tag{4.2}$$

この方程式は (階層も含めて), Wronski 行列の Quasideterminant で表される N ソリトン解を持つ [19].

なお, ここでユークリッド計量 $(++++)$ ではなく, split 計量 $(++--)$ をとると, 座標 $z, w, \tilde{w}$ をすべて実座標と考えることができる [24]. このような事情により, リダクションの文脈で現れる ASDYM 方程式は, $(2+2)$ 次元上のものを考えるのである.

さらに, $\partial_w = \partial_{\tilde{w}}$ の条件を課し, $X = \partial_w - \partial_{\tilde{w}}$ 方向に関する次元還元を行うと, $(1+1)$ 次元の非可換 KdV 方程式に帰着する：

$$\dot{u} = \frac{1}{4} u''' + \frac{3}{4}(u'u + uu'). \tag{4.3}$$

ただし, 時間・空間座標は $(t, x) := (z, w + \tilde{w})$ と同定されている. すなわち, 非可換 KdV 方程式も非可換 ASDYM 方程式からリダクションによって得られることが分かり, また非可換階層から得られる方程式とも完全に一致する. (すなわち, 無限個の保存量 [4,15] や Wronski 行列の Quasideterminant で表される N ソリトン解 [6,10] を持つ特別な方程式となっている.)

このように非可換 ASDYM 方程式から, 非可換 Zakharov 系 → 非可換 NLS 方程式, 非可換 Toda 方程式といったさまざまな低次元非可換可積分方程式への「リダクション・カスケード」が得られ, ある程度の分類を行うことができる.

Quasideterminant はさらに解空間の記述や構造に関しても, (高次元と低次元に両方における) 統一的な取り扱いの可能性を示唆しており, 今後さまざまな方向での進展が期待される. 紙数も尽きたので詳しい議論は [20] などに譲る.

Acknowledgements

この研究は昭和報公会, 仁科記念財団, 大幸財団から経済援助を受けています.

参考文献

[1] M. F. Atiyah and R. S. Ward, Commun. Math. Phys. **55**, 117 (1977).

[2] S. J. Brain and S. Majid, Commun. Math. Phys. **284**, 713 (2008) [math/0701893].

[3] E. Corrigan, D. B. Fairlie, R. G. Yates and P. Goddard, Commun. Math. Phys. **58**, 223 (1978).

[4] A. Dimakis and F. Müller-Hoissen, Phys. Lett. A **278** (2000) 139 [hep-th/0007074].

[5] M. R. Douglas and N. A. Nekrasov, Rev. Mod. Phys. **73** (2002) 977 [hep-th/0106048].

[6] P. Etingof, I. Gelfand and V. Retakh, Math. Res. Lett. **4**, 413 (1997) [q-alg/9701008].

[7] I. Gelfand and V. Retakh, Funct. Anal. Appl. **25**, 91 (1991); Funct. Anal. Appl. **26**, 231 (1992).

[8] I. Gelfand, S. Gelfand, V. Retakh and R. L. Wilson, Adv. Math. **193**, 56 (2005).

[9] I. M. Gelfand, D. Krob, A. Lascoux, B. Leclerc, V. S. Retakh and J. Y. Thibon, Adv. Math. **112** (1995) 218 [hep-th/9407124].

[10] C. R. Gilson and J. J. C. Nimmo, J. Phys. A **40**, 3839 (2007) [nlin.si/0701027].

[11] C. R. Gilson, M. Hamanaka and J. J. C. Nimmo, Glasgow Mathematical Journal **51A** (2009) 83[arXiv:0709.2069].

[12] C. R. Gilson, M. Hamanaka and J. J. C. Nimmo, Proc. Roy. Soc. Lond. A **465** (2009) 2613 [arXiv:0812.1222].

[13] 浜中 真志, "ADHM/Nahm 構成法とその双対性," 素粒子論研究 **106-1** (2002-10) 1-60.[2]

[14] M. Hamanaka, "Noncommutative solitons and D-branes," Ph. D thesis [hep-th/0303256].

[15] M. Hamanaka, J. Math. Phys. **46** (2005) 052701 [hep-th/0311206].

[16] 浜中 真志, "Solitons on Non-Commutative Spaces," 京大数理研講究録 **1400** (2004) 88-126.

[17] 浜中 真志, "ソリトン理論・可積分系の非可換空間への拡張," 応用力学研究所研究集会研究会報告 **16ME-S1**, 18 (2005) 1-12.

[18] M. Hamanaka, Nucl. Phys. B **741**, 368 (2006). [hep-th/0601209].

[19] M. Hamanaka, JHEP **0702**, 094 (2007) [hep-th/0610006].

[20] M. Hamanaka, "Noncommutative solitons and Quasideterminants," Proceedings of the COE workshop on Noncommutative Geometry and Physics 2008, Shonan, in preparation.

[21] M. Hamanaka and K. Toda, Phys. Lett. A **316** (2003) 77 [hep-th/0211148].

[22] J. A. Harvey, [hep-th/0102076].

[23] 広田 良吾, 「直接法によるソリトンの数理」(岩波書店, 1992 年) [ISBN/4-00-005676-X]

[24] L. J. Mason and N. M. Woodhouse, *Integrability, self-duality, and twister theory* (Oxford, 1996) [ISBN/0-19-853498-1].

[25] 増田 哲, "Ernst 方程式再訪," 応用力学研究所研究集会報告 **17ME-S2**, 17 (2006) 1-19.

[26] N. Sasa, Y. Ohta and J. Matsukidaira, J. Phys. Soc. Jap. **67**, 83 (1998).

[27] 鈴木 達夫, "非可換行列式とその応用," [http://www.aoni.waseda.jp/suzukita/].

[28] R. J. Szabo, Phys. Rept. **378** (2003) 207 [hep-th/0109162]

[29] K. Takasaki, J. Geom. Phys. **37** (2001) 291 [hep-th/0005194].

[30] K. Toda, JHEP Proceedings of workshop on integrable theories, solitons and duality, Sao Paulo, Brazil, 1-6 July 2002 [JHEP PRHEP-unesp2002/038].

[31] N. Wang and M. Wadati, J. Phys. Soc. Jap. **73** (2004) 1689.

[32] R. S. Ward, Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A **315** (1985) 451.

[2] 私が書いた解説記事は, 私のホームページ [http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~hamanaka/hamanaka.html] から入手可能です.