超対称ゲージ理論の
超弦理論による実現

酒井 一博

平成 13 年 2 月

目 次

序 **3**

第 1 章 Seiberg-Witten 理論 **6**
1.1 低エネルギー有効理論の物理 6
1.2 解の構成 14
1.3 Seiberg-Witten 曲線 19
1.4 SU(2) QCD 及び一般のゲージ群 20

第 2 章 超弦理論のコンパクト化 **24**
2.1 コンパクト化多様体の候補 24
2.2 超重力理論のコンパクト化 26
2.3 コンパクト化弦理論における量子補正 29

第 3 章 IIA 弦理論によるゲージ理論の実現 **31**
3.1 ゲージ対称性の拡大 31
3.2 4 次元 $N = 2$ 多重項の実現 33
3.3 重力の分離 36

第 4 章 ローカルミラー対称性 **38**
4.1 ローカルミラー対の構成 38
4.2 ローカル Calabi-Yau 多様体の幾何学的不変量 43

第 5 章 ゲージ理論のモジュライ空間 **45**
5.1 プリポテンシャルの同定 45
5.2 Seiberg-Witten 曲線の同定 49
5.3 結び 52

補遺 **54**
A.1 One-loop ベータ関数の係数公式 54
A.2 超幾何関数の公式 55
A.3 Picard-Fuchs 方程式の解の導出 56

序

４次元ゲージ理論の解析は素粒子物理学の重要課題であるが、最近までその非摂動論的性質を厳密に調べることは非常に難しいとされていた。ところが１９９４年、Seiberg-Witten によって４次元 $N = 2$ 超対称 $SU(2)$ ゲージ理論の厳密解が求められた [1,2]。４次元の、物理的に面白い場の理論で初めて厳密解を得たことに加え、強結合-弱結合双対性を初めとする数々の新しいアイディアを含んだこの理論は、その後の場の理論及び弦理論の発展に大きな影響を与えた。場の理論では Seiberg-Witten の結果の様々な応用がなされ、また現象論的により興味のある $N = 1$ 超対称ゲージ理論における双対性も議論された [3]。一方弦理論の方もこれに刺激を受けて劇的な発展を遂げた。弦理論においても種々の非摂動論的双対性 (S-duality) が発見されるのであるが、これと以前から知られていた摂動論的双対性 (T-duality) とが融合し、また同じ頃の非摂動論的媒体としての D-ブレーンの認識もあって [4]、それまで別々とされていた５種類の超弦理論の統一的な理解 (String Duality) がもたらされることとなる。

４次元 $N = 2$ 超対称ゲージ理論自体の発展に戻ると、Seiberg-Witten の $SU(2)$ の結果から他のゲージ群の場合への拡張が行われた [5–12]。Seiberg-Witten 理論の解析で真新しかった Seiberg-Witten 曲線がこれらの場合についても提示された。Seiberg-Witten 曲線は、初めの Seiberg-Witten の論文でも手堅く導出されたという感じではなかったが、一般のゲージ群にゆくとますますその形の決定方法は間接的なものとなる。事実これらは様々な無矛盾条件及び可積分系との対応から決定されており、４次元ゲージ理論の枠内で曲線の直接的な導出及び曲線導入の必然性の説明は満足になされていなかった。

一方で、弦理論の立場から Seiberg-Witten 理論とのつながりを見ようという試みが早い時期から行われた。弦理論は場の理論を様々な形で内包するのでいくつものアプローチが可能であるが、最初に行われたのはコンパクト化した弦理論の低エネルギー理論として４次元のゲージ理論を見ることである。特に弦理論の双対性の確認という意味もあって、４次元 $N = 2$ 超対称性をもつ弦理論の双対な組について、それぞれの側で Seiberg-Witten の設定が現れることが確かめられた [22, 23]。理論に双対性があるとは、一つの物理系に異なる記述形態が存在することを意味するが、今の場合記述形態の違いの現れとして一方ではゲージ群の対応が見やすいのに対し、もう一方ではモジュライ空間の対応が見やすいという状況が生まれる。このことを利用して、前者の弦理論で Seiberg-Witten 理論のゲージ場の設定を合わせておき、双対性を橋渡しに後者の弦理論に行ってモジュライ空間の情報を読みとる、ということを考えることができる。具体的には後者の理論として考えているのは複素３次元 Calabi-Yau 多様体にコンパクト化したタイプ IIB 弦理論であるが、この理論では Calabi-Yau 多様体の複素構造モジュライの一部としてゲージ理論のモジュライ空間[1]の情報が含まれている。モジュライパラメーターの注意深い極限操作により４次元ゲージ理論のモジュライ情報だけを残すことが出来るが、特筆すべきこととして、この極限で Calabi-Yau 多様体から Seiberg-Witten 曲線が現れることが挙げられる[2]。この意味で弦理論によ

[1] モジュライ空間の Coulomb ブランチ部分 (次頁参照)。

[2] 厳密には極限操作によって現れるのは Seiberg-Witten geometry(1.133) である。ただし多くの簡単な場合、Seiberg-Witten geometry には Seiberg-Witten 曲線が自明な形で埋め込まれており、直接曲線を見てとることができる。

る Seiberg-Witten 理論の解析は Seiberg-Witten 曲線を「導出」し、その物理的意味を明らかにする。この議論を押し進めて、弦理論の双対性とコンパクト化多様体の幾何学を道具に、系統的に 4 次元 $N = 2$ 超対称ゲージ理論の厳密解を求める手法として、本修士論文でとりあげる Geometric Engineering が提唱された [24, 25]。

弦理論コンパクト化による Seiberg-Witten 理論の解析

Seiberg-Witten 理論の文脈で言われる「厳密」解とは、4 次元 $N = 2$ 超対称ゲージ理論のモジュライ空間の構造についての厳密性を指す。4 次元 $N = 2$ 超対称ゲージ理論の低エネルギー理論に現れる場 (超対称多重項) はベクトル多重項とハイパー多重項の 2 種類であり、理論全体のモジュライ空間 $\mathcal{M}$ は

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_V \times \mathcal{M}_H \tag{1}$$

と、それぞれの多重項内スカラー場真空期待値が張る空間の直積に分解する。$\mathcal{M}_V, \mathcal{M}_H$ は、それぞれ Coulomb ブランチ、Higgs ブランチと呼ばれる。Higgs ブランチは量子補正を受けず、古典論の範囲で調べられる。そこで以下では問題設定を Coulomb ブランチの構造を求めることに絞って議論を続けよう。勝手なゲージ群と物質場の表現が与えられたときに、どのような弦理論でその設定を同定し、またどのような弦理論で Coulomb ブランチの構造を読みとればよいか。

4 次元 $N = 2$ の超対称性をもつ弦理論として、ヘテロティック理論の $\mathrm{K3}\times\mathrm{T}^2$ コンパクト化、およびタイプ II 理論の CY_3 コンパクト化がある (T^2 は 2 次元トーラス、CY_3 は複素 3 次元 Calabi-Yau 多様体を表す)。これらの弦理論の間には次のような双対性が知られている:

$$\mathrm{Het}/(\mathrm{K3}\times\mathrm{T}^2) \overset{\text{S-dual}}{\Longleftrightarrow} \mathrm{IIA}/\mathrm{CY}_3 \overset{\text{T-dual}}{\Longleftrightarrow} \mathrm{IIB}/\widetilde{\mathrm{CY}}_3 \ . \tag{2}$$

ここで $\widetilde{\mathrm{CY}}_3$ は CY_3 のミラー対を表す。これら 3 つの弦理論にはゲージ理論の設定の同定と Coulomb ブランチの読みとりやすさ (量子補正の有無) に関して次のような性質の違いがある:

		4 次元 $N = 2$ 超弦理論				
		$\mathrm{Het}/(\mathrm{K3}\times\mathrm{T}^2)$	S-dual $\Longleftrightarrow$	$\mathrm{IIA}/\mathrm{CY}_3$	T-dual $\Longleftrightarrow$	$\mathrm{IIB}/\widetilde{\mathrm{CY}}_3$
ゲージ場・物質場の同定		◎		○		×
$\mathcal{M}_V$に対する インスタントン補正	spacetime	有		無		無
	worldsheet	有		有		無

これを見ると、ヘテロティック理論でゲージ群・物質場の同定を行い、IIB 理論で Coulomb ブランチを読みとるのが良いことが分かる。

Geometric Engineering

しかしながら、$\mathrm{Het}/(\mathrm{K3}\times\mathrm{T}^2)$ においてゲージ場・物質場は摂動論的に実現されており、許される群と表現に制限がある。これに対しタイプ II 理論では Calabi-Yau 多様体の特異点からゲージ場・物質場が生まれる。複雑な特異点を考えることによりタイプ II コンパクト化は、$\mathrm{Het}/(\mathrm{K3}\times\mathrm{T}^2)$ で実現できないような複雑なゲージ場・物質場の実現を可能にする。そこで、$\mathrm{Het}/(\mathrm{K3}\times\mathrm{T}^2)$ での明解さには劣るが、$\mathrm{IIA}/\mathrm{CY}_3$ で場の同定を行い (欲しいゲージ場・物質場を出す弦理論を用意し)、$\mathrm{IIB}/\widetilde{\mathrm{CY}}_3$ で Coulomb ブランチの構造を読みとろう、というのが Geometric Engineering の戦略である。

$\mathrm{IIA}/\mathrm{CY}_3$ と $\mathrm{IIB}/\widetilde{\mathrm{CY}}_3$ の T-双対はコンパクト化多様体の対応では CY_3 と $\widetilde{\mathrm{CY}}_3$ のミラー対称性と言い表せる。ミラー対をなす Calabi-Yau 多様体を系統的に構成する実際の手段としては、トー

リック幾何の手法が用いられる。ところで4次元のゲージ場・物質場の生成は特異点の局所的な構造のみに依存するので、ゲージ理論のCoulombブランチの構造を求めるという立場からは、特異点に関する情報さえミラー対応がついていれば十分となる。そこで着目している特異点以外の部分は大きさを無限大に膨らませて平坦にしたノンコンパクトCalabi-Yau多様体を考え、これについてミラー対を構成するということが行われる。これはローカルミラー対称性として知られ[37]、Geometric Engineeringのもう一つの特色である。

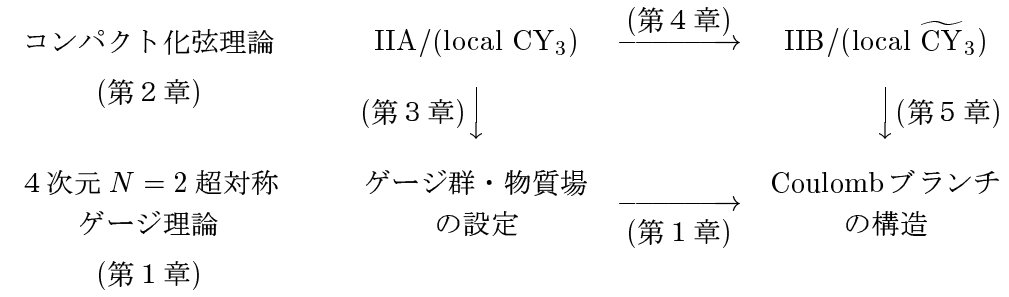
三番目に、これはGeometric Engineeringに限らず弦理論コンパクト化でゲージ理論を実現する際に共通の問題として、重力を分離するパラメーター操作がある[22]。Reggeスロープα'を0にする極限をとれば低エネルギー有効理論に重力は現れなくなるが、単純なこの操作ではゲージ場も一緒に消えてしまう。しかしα'とともに、Calabi-Yauのモジュライパラメーターについても$\alpha' \to 0$に連動させたうまい極限をとることにより、重力を分離しつつゲージ場を残すことが可能である。このような極限操作(しばしばdouble scaling limitと呼ばれる)は、ここ数年弦理論のいくつかの流れにおいて行われている。

ひとことで言えばGeometric Engineeringとは、低エネルギーでSeiberg-Witten理論として振舞う弦理論を特異点の設定によって構成し、理論の解析をコンパクト化多様体の幾何学の問題に置き換えておこなおうというものである。

構成

本修士論文はGeometric Engineeringによって4次元$N = 2$超対称ゲージ理論の厳密解が得られる仕組みを理解することを目標とする。また実際にゲージ群が$SU(2)$、物質場なしの一番簡単な模型について、Seiberg-Witten理論とGeometric Engineeringの両方のアプローチにより厳密解を求め、両者の結果が一致することを確かめる。

第1章では場の理論の枠内で物質場なし$SU(2)$ Seiberg-Witten理論の厳密解を求める。第2章では4次元$N = 2$超対称性をもつコンパクト化弦理論としてHet/K3、IIA/CY_3、IIB/$\widetilde{\mathrm{CY}_3}$の3つを候補に挙げ、大枠としてのそれらの違いを議論する。第3章ではIIA理論によるゲージ理論の設定の実現方法を調べる。第4章では双対なIIA理論とIIB理論を提供するコンパクト化多様体の対として、ローカルミラーCY対を構成する。第5章ではIIB理論のコンパクト化多様体のモジュライ構造からSeiberg-Witten理論の厳密解が得られることを確かめる。



第1章　Seiberg-Witten理論

1.1　低エネルギー有効理論の物理

低エネルギー有効作用とモジュライ空間

4次元 $N=2$ 超対称ゲージ理論のモジュライ空間の構造を調べるには、理論の低エネルギーでの振舞いを調べれば十分である。低エネルギーで励起をもつのは massless 場である。4次元 $N=2$ 超対称性代数の既約表現で massless かつヘリシティが 1 以下のものには、ベクトル多重項とハイパー多重項がある。それぞれの動力学的 (dynamical) な成分は

vector multiplet:			hypermultiplet:		
gauge field	A_μ		Weyl spinor	ψ_q	
Weyl spinor	λ	ψ	complex scalar	q	$\tilde{q}^\dagger$
complex scalar	ϕ		Weyl spinor	$\psi_{\tilde{q}}^\dagger$	

(1.1)

と表される。実際上はこれらの成分を $N=1$ 多重項にまとめて

vector multiplet	$W_\alpha:$	(A_μ, λ)	chiral multiplet	$Q:$	(q, ψ_q)
chiral multiplet	$A:$	$(\phi\ , \psi)$	chiral multiplet	$\tilde{Q}:$	$(\tilde{q}, \psi_{\tilde{q}})$

(1.2)

と書くのが便利である[1]。

ゲージ理論ではこれらの $N=2$ 多重項がゲージ群の表現になっている。ゲージ場を含むベクトル多重項はゲージ群の随伴表現を担い、ハイパー多重項は物質場表現を担う。

以下ではゲージ群が $SU(2)$、物質場なしのもっとも簡単な模型にしぼって議論を進めることにしよう。このとき低エネルギー理論の古典作用を構成するのは $SU(2)$ の随伴表現をなすベクトル多重項である。この随伴表現多重項内のスカラー場を Pauli 行列 σ^i を用いて

$$\phi = \sum_{i=1}^{3} \phi^{(i)} \left(\frac{\sigma^i}{2}\right) \tag{1.3}$$

と書くとき、理論の古典ポテンシャルは

$$V(\phi) = \frac{1}{g^2} \mathrm{Tr}[\phi, \phi^\dagger]^2 \tag{1.4}$$

と表される。零でない ϕ の真空期待値に対してもポテンシャルエネルギーが消えうるのが超対称ゲージ理論の特徴である。具体的には今の場合、$su(2)$ の[2]Cartan 部分代数に値をとる ϕ に対して、$V(\phi)$ は 0 となる。ゲージ変換によってそのような ϕ を

$$\phi = \frac{1}{2} a \sigma^3 \tag{1.5}$$

[1]本修士論文で用いる4次元 $N=1$ 超空間表記は Wess-Bagger [55] に従った。

[2]正確には $su(2)$ の複素化 $sl(2,\mathbb{C})$。

の形にうつすことができる。a はゲージ変換で変わらない複素数値であり、真空を特徴づける。正確には、さらに $SU(2)$ の Weyl 群による同一視 $a \leftrightarrow -a$ があるので

$$u = \frac{1}{2}a^2 = \mathrm{Tr}\phi^2 \tag{1.6}$$

が、異なる真空に 1 対 1 に対応するよいパラメータである。u は任意の複素数値をとりうる。これは、少なくとも古典的には理論の真空が連続的に縮退していることを意味する。

a が零でない値をとるとき、真空期待値 (1.5) を動かさないゲージ変換として $U(1)$ のみが残る。(1.5) を成分で書けば、

$$\phi^{(1)} = \phi^{(2)} = 0,\ \phi^{(3)} = a \tag{1.7}$$

であるが、$\phi^{(3)}$ の真空期待値は残りの $i = 1, 2$ 成分ベクトル多重項の Higgs 質量としてはねかえる。massless ベクトル多重項は、BPS ベクトル多重項に移行することで $N = 2$ 超対称性を壊さずに質量を持つことができる。したがって $a \neq 0$ の真空上の低エネルギー理論は $N = 2$ 超対称 $U(1)$ ゲージ理論として書ける。この理論は massless にとどまった $i = 3$ 成分ベクトル多重項によって記述され、質量を持った $i = 1, 2$ 成分は現れない。そこで以下では添字 $^{(3)}$ は全て省略することにする。

ここまで準備して量子論の考察に移る。物質場なし $SU(2)$ 理論の古典モジュライ空間は複素 1 次元の広がりを持つ $U(1)$ 真空の集合と分かった。弱結合領域では古典近似が有効であることから量子モジュライ空間も、少なくとも局所的には複素 1 次元に広がる $U(1)$ 真空の集合であると予想できる。そこで量子 $SU(2)$ 理論の低エネルギー有効理論を $U(1)$ 有効ラグランジアンで記述することにしよう。さて Seiberg-Witten 理論で言われる「厳密」解の意味は、モジュライ空間の計量の Coulomb ブランチ部分が厳密に求まるということであった。モジュライ空間の構造が決定されると、この構造を色濃く反映する低エネルギー励起の形もかなりの程度決まってしまう。実際今の $SU(2)$ 理論の低エネルギー有効ラグランジアンは、微分が 2 次以下、フェルミオン場 4 つ以下の項のみ見るとき

$$\mathcal{L}_{eff} = \frac{1}{4\pi}\mathrm{Im}\left[\int d^4\theta \frac{\partial \mathcal{F}(A)}{\partial A}\bar{A} + \int d^2\theta \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathcal{F}(A)}{\partial A^2} W^\alpha W_\alpha\right] \tag{1.8}$$

と書かれる。プリポテンシャルと呼ばれる正則関数 $\mathcal{F}(A)$ に有効ラグランジアンの情報が集約されるのが $N = 2$ 超対称性の特徴である。もちろん、このような単純化が起こるのは相互作用の高次の項の情報を捨てているからであるが、モジュライ空間の計量を求めるという観点からは零エネルギーよりわずかに高い部分の振舞いだけ分かればよいので、このような捨象が許されるのである。

有効作用の $SL(2,\mathbb{Z})$ 双対性

Seiberg-Witten 理論では低エネルギー有効理論の自己双対性が、厳密解を決定する上でのひとつの鍵となる。一般に階数 r のゲージ群をもつ $N = 2$ 理論の低エネルギー理論は $U(1)^r$ ゲージ理論で表され、$Sp(2r, \mathbb{Z})$ 双対性がある。今の場合は $r = 1$ なので、$Sp(2, \mathbb{Z}) \cong SL(2, \mathbb{Z})$ 双対性をもつ[3]。このことを以下実際に確かめることにする。

[3]「$SL(2,\mathbb{Z})$ 双対性」が意味するのは、同じ真空に $SL(2,\mathbb{Z})$ 分の記述の仕方があるということである。理論の対称性として $SL(2,\mathbb{Z})$ があるのではないことに注意する。

まず、双対なカイラルスーパーフィールド

$$A_D = \mathcal{F}'(A) \tag{1.9}$$

を導入すると ($'$ は 1 階微分を表す)、(1.8) の第 1 項は

$$\frac{1}{4\pi}\int d^4\theta \frac{-i}{2}(A_D\bar{A} - \bar{A}_D A) \tag{1.10}$$

と書ける。これは $SL(2,\mathbb{R})$ 変換

$$\begin{pmatrix} A_D \\ A \end{pmatrix} \to M \begin{pmatrix} A_D \\ A \end{pmatrix},\ M \in SL(2,\mathbb{R}) \tag{1.11}$$

で不変になっている。

この変換によって第 2 項がどのように変化するかを見てみよう。$SL(2,\mathbb{R})$ 変換は A の規格化を変えるだけの自明な変換を除くと

$$T_b = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.12}$$

によって生成される (b は実数)。T_b による変換は結合定数

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial A^2} \equiv \tau = \frac{\theta}{2\pi} + \frac{4\pi i}{g^2} \tag{1.13}$$

を $2\pi b$ だけずらすので、b が整数値をとるとき経路積分は不変に保たれる。一方 S 変換による双対性は次のようにして見ることができる。$W_\alpha \equiv \bar{D}^2 D_\alpha V$ についての経路積分は

$$\int \mathcal{D}V \exp\left[i\frac{1}{16\pi}\mathrm{Im}\int d^4x\ d^2\theta\tau(A)W^\alpha W_\alpha\right] \tag{1.14}$$

と書かれる。これを経路積分の変数に直接 W_α を用いた形に書き換えることを考える。W_α を自由変数とみなし、かわりに Bianchi 恒等式 $\mathrm{Im}(D_\alpha W^\alpha) = 0$ を拘束条件として入れると上式は

$$\int \mathcal{D}W\mathcal{D}V_D \exp\left[i\frac{1}{16\pi}\mathrm{Im}\int d^4x\left(d^2\theta\mathcal{F}''(A)W^\alpha W_\alpha + \frac{1}{2}\int d^2\theta d^2\bar{\theta}V_D D_\alpha W^\alpha\right)\right] \tag{1.15}$$

と書き表すことができる。V_D は Lagrange 未定係数として導入したベクトルスーパーフィールドである。exp の肩の第 2 項は

$$\int d^2\theta d^2\bar{\theta}V_D D_\alpha W^\alpha = -\int d^2\theta d^2\bar{\theta}(D_\alpha V_D)W^\alpha = +\int d^2\theta\bar{D}^2(D_\alpha V_D W^\alpha) \tag{1.16}$$

$$= \int d^2\theta(\bar{D}^2 D_\alpha V_D)W^\alpha = -4\int d^2\theta W_{D\alpha}W^\alpha \tag{1.17}$$

と変形できる。ここで今 W_α の方を先に積分してしまうと、先の経路積分は

$$\int \mathcal{D}V_D \exp\left[i\frac{1}{16\pi}\mathrm{Im}\int d^4x\ d^2\theta\left(-\frac{1}{\tau(A)}W_D{}^\alpha W_{D\alpha}\right)\right] \tag{1.18}$$

となる。これは

$$\begin{pmatrix} \mathcal{F}'_D(A_D) \\ A_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{F}'(A) \\ A \end{pmatrix}, \tag{1.19}$$

$$\tau_D(A_D) \equiv \frac{d\mathcal{F}'_D(A_D)}{dA_D} = -\frac{dA}{d\mathcal{F}(A)} = -\frac{1}{\tau(A)} \tag{1.20}$$

という変数変換の結果、系を記述するラグランジアンが (1.8) の $\mathcal{L}_{eff}$ から

$$\mathcal{L}^D_{eff} = \frac{1}{4\pi}\mathrm{Im}\left[\int d^4\theta \mathcal{F}'_D(A_D)\bar{A}_D + \int d^2\theta \frac{1}{2}\mathcal{F}''_D(A_D) W_D{}^\alpha W_{D\alpha}\right] \tag{1.21}$$

に代わったということである。$\mathcal{F}$ と $\mathcal{F}_D$ は形の異なる関数であり、$\mathcal{L}_{eff}$ と $\mathcal{L}^D_{eff}$ は一つの物理系の異なる記述の仕方を与えている。

弱結合領域での有効理論

弱結合領域でプリポテンシャルを次のように分けて考えよう:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_{cl} + \mathcal{F}_{pert.} + \mathcal{F}_{non-pert.}\,. \tag{1.22}$$

まず、古典的にはプリポテンシャルは

$$\mathcal{F}_{cl} = \frac{1}{2}\tau_{cl} A^2 \tag{1.23}$$

であり、これは 4 次元 $N = 2$ 超対称ゲージ理論の標準的なラグランジアン

$$\mathcal{L}_{cl} = \frac{1}{4\pi}\mathrm{Im}\left[\tau_{cl}\int d^4\theta A\bar{A} + \tau_{cl}\int d^2\theta W^\alpha W_\alpha\right] \tag{1.24}$$

を与える。次に摂動による補正であるが、4 次元 $N = 2$ 超対称ゲージ理論においては結合定数に対する摂動論的繰り込み補正は one-loop までしかないことが知られており [13]

$$\tau = \tau_{cl} + \frac{ib}{2\pi}\ln\left(\frac{\mu}{\Lambda}\right) \tag{1.25}$$

となる。μ は繰り込みスケール、Λ は次元転移によって生成される質量スケールである。b は one-loop の β 関数に

$$\beta(g) = -\frac{g^3}{16\pi}b \tag{1.26}$$

と現れる係数で、ゲージ群と物質場の表現を指定すれば決まる (A.1 節参照)。今の物質場のない $SU(2)$ 理論の場合は $b = 4$ である。繰り込みのスケール μ を高エネルギーから下げてくるとともに結合定数は (1.25) に従って変化するが、μ が Higgs 質量 $|a|$ よりも下に来た時点でゲージ対称性は $U(1)$ に落ち、この $U(1)$ ゲージ場に関してチャージを持った場はなくなってしまうので、結合定数は $\mu < |a|$ では変化しなくなる。よって今考えている低エネルギー有効理論で、摂動補正を受けた結合定数は

$$\tau = \tau_{cl} + \frac{2i}{\pi}\ln\left(\frac{a}{\Lambda}\right) \tag{1.27}$$

と書ける。これよりプリポテンシャルの摂動項は

$$\mathcal{F}_{one-loop}(a) = \frac{i}{2\pi}a^2 \ln\left(\frac{a^2}{\Lambda^2}\right) \tag{1.28}$$

となる。最後に非摂動論的効果を考える。$N=2$ 理論では摂動が one-loop で終わってしまうのと関連して、n-インスタントン (及び $(-n)$-インスタントン) の効果も β 関数の係数 b によって規定され、$(\Lambda/a)^{bn}$ の寄与がある。よってプリポテンシャルは形式的に

$$\mathcal{F}_{instanton}(a) = \frac{1}{2\pi i}a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n \left(\frac{\Lambda}{a}\right)^{4n} \tag{1.29}$$

と表せる。普通係数 $\mathcal{F}_n$ の計算は n が上がるとすぐに手に負えなくなるが、Seiberg-Witten 理論では後で見るようにプリポテンシャルが (陰関数的にではあるが) 厳密に求まるので、$\mathcal{F}_n$ の値が機械的な展開計算だけで全ての次数について得られるのである。
結局弱結合領域での物質場のない $SU(2)$ 4 次元 $N=2$ 超対称ゲージ理論のプリポテンシャルは

$$\mathcal{F}(A) = \frac{1}{2}\tau_{cl}A^2 + \frac{i}{2\pi}A^2 \ln\left(\frac{A^2}{\Lambda^2}\right) + \frac{1}{2\pi i}A^2 \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n \left(\frac{\Lambda}{A}\right)^{4n} \tag{1.30}$$

と書ける。

モジュライ空間の外挿

弱結合領域からの展開形で書かれたこのプリポテンシャルの表式の、有効範囲を議論しよう。正則関数 $\tau(a)$ の虚部は、モジュライ空間 $\mathcal{M}$ の計量であることからも、$4\pi/g^2$ という明らかな表式からも分かる通り、一価で正値の関数である。$|a|$ 大では $\mathrm{Im}\,\tau$ は確かにそうなっている。しかし a 平面全体を考えると調和関数 $\mathrm{Im}\,\tau$ は極小をもつことができず、ある a に対しては負の値をとることになる。これは a が $\mathcal{M}$ 全体を張るよい座標ではないことに起因する。かわりに $\mathcal{M}$ の大域的な座標として u があるとしよう。古典的には Higgs 期待値に対する Weyl 群の作用のもとで不変な $\mathrm{Tr}\phi^2 = \frac{1}{2}a^2$ が $\mathcal{M}$ のよい座標だった。そこで準古典的な $|a|$ 大の領域では $u \sim \frac{1}{2}a^2$ と結びつけてよいだろう。a 及び $a_D(=\mathcal{F}'(a))$ は u の正則な関数として表される。プリポテンシャルを大域的に求める問題は u の媒介変数表示で 2 つの関数の組 $a(u), a_D(u)$ を求める問題に読み替えられる。

関数 $a(u), a_D(u)$ は多価関数であり、特異点 $u=\infty$ を一回りするとき非自明なモノドロミーをもつ。$u=\infty$ まわりでの漸近形は

$$\begin{pmatrix} a_D(u) \\ a(u) \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \frac{i}{\pi}\sqrt{2u}\ln(u/\Lambda^2) \\ \sqrt{2u} \end{pmatrix} \tag{1.31}$$

であった。$u \to e^{2\pi i}u$ でこれらの関数は

$$\begin{pmatrix} a_D \\ a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -a_D + 2a \\ -a \end{pmatrix} \tag{1.32}$$

$$= M_\infty \begin{pmatrix} a_D \\ a \end{pmatrix} \tag{1.33}$$

と振る舞う。行列

$$M_\infty = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.34}$$

は $u=\infty$ でのモノドロミー行列と呼ばれる。このモノドロミーを打ち消すためには $\mathcal{M}$ の他の場所にも特異点が必要である。それらの特異点のまわりでも同じようにモノドロミー行列が定義される。特異点を回って $a_D(u), a(u)$ の値が変わっても、$\mathcal{M}$ 上で元の点に戻ってくれば同じ物理系を与えなければならないので、モノドロミー変換は高々$SL(2,\mathbb{Z})$ 変換におさまっていなければならない。これらのモノドロミー行列が生成するモノドロミー群は、$\mathcal{M}$ から特異点を除いた空間 $\mathcal{M}'$ のホモトピー基本群の、$SL(2,\mathbb{Z})$ に値をとる表現となる。この表現が可換だったとすると、モノドロミー行列はすべて M_∞ と交換するので a^2 が大域的なよい座標となるが、それは先の考察から正しくない。したがってモノドロミー群は非可換である。表現が非可換であるためには特異点は $u=\infty$ の他に少なくとも 2 つ必要である。

特異点のもつ物理的意味を考えてみる。先の議論では繰り込み質量スケールよりも軽いモードが $U(1)$ ベクトル多重項のみとして有効作用 (1.8) を考えプリポテンシャル (1.29) の形を決めた。繰り込みスケール μ を十分小さくとってやれば系はいつでも純 $U(1)$ ゲージ理論に落ちると考えていた。しかしある真空で、$U(1)$ ゲージ場の他にも massless モードがあったとすると、そこでの有効理論は純 $U(1)$ ゲージ理論的記述をとることができない。そのような真空がモジュライ空間の特異点となって現れていると考えられる。特異点で massless になるモードは何であろうか。特異点でも $N=2$ 超対称性が残っているとすると、massless モードも $N=2$ 超対称性の多重項を組むと考えられる。4 次元 $N=2$ 超対称ゲージ理論では massless になりうるのは BPS 多重項であり、ベクトル多重項かハイパー多重項かのどちらかである。まず考えられるのは非可換ゲージを担っていたベクトル多重項が massless になる (すなわち $SU(2)$ ゲージ対称性が回復する) 場合である。しかし赤外領域での漸近的共形不変性を考えたときベクトル多重項の可能性は排除されることが確かめられる。すると特異点で massless になるモードはハイパー多重項ということになるが、今の物質場のない $SU(2)$ 理論で摂動論的にはそのような場はない。Seiberg-Witten はこの massless になるハイパー多重項はソリトンであると同定した。

強結合領域での有効理論

特異点まわりでの理論の振る舞いを調べよう。特異点直上でなければ純 $U(1)$ ゲージ理論的記述 (1.8) が有効である。しかし繰り込みスケールを下から上げていったとき最初に現れる massive モードは弱結合領域の場合と異なりソリトン場である。したがって $SU(2)$ ゲージ理論の結合定数繰り込みに基づいて書き表したプリポテンシャルの形 (1.29) は今の場合適切ではない。そこでプリポテンシャルの形を書き下す議論をもう一度見直すことにしよう。まず、ソリトン場の性質をみる。

$N=2$ 超対称性理論ではゲージ対称性のチャージ (磁荷 n_m, 電荷 n_e) と超対称性の中心電荷 Z との間に

$$Z = n_e a + n_m a_D \tag{1.35}$$

という関係が成り立ち、粒子の質量 m は Z によって

$$m \geq \sqrt{2}|Z| \tag{1.36}$$

なる下限がつけられている。特に BPS 状態については等号が成り立ち、質量は

$$m = \sqrt{2}|n_e a + n_m a_D| \tag{1.37}$$

と決まってしまう。

ある特異点でチャージ $(1,0)$ のモノポールが massless になるとして、その特異点まわりでの物理を調べよう。モノポールは磁気的 $U(1)$ ゲージ場に結合しているので双対場 A_D による記述が適切である。有効理論に考えるのは $U(1)$ ゲージ場にチャージ 1、質量 $\sqrt{2}|a_D|$ の BPS ハイパー多重項が加わった系である。この場合 β 関数の係数は $b=-1$ となるので (A.1 節参照)、摂動補正を受けた結合定数は

$$\tau_D = \tau_{D\,cl} - \frac{i}{2\pi}\ln\left(\frac{\mu}{\Lambda}\right) \tag{1.38}$$

と書ける。繰り込みスケール μ を下げてきて有効理論が純 $U(1)$ ゲージ理論に移行すると、結合定数の μ 変化は止まり

$$\tau_D = \tau_{D\,cl} - \frac{i}{2\pi}\ln\left(\frac{a_D}{\Lambda}\right) \tag{1.39}$$

がその場合の結合定数となる。非摂動論項については、$b=-1$ より n-インスタントンから $(\Lambda/a_D)^{-n}$ の寄与があることが分かる。これよりモノポールが massless に近づく領域でのプリポテンシャルは

$$\mathcal{F}_D(a_D) = \frac{1}{2}\tau_{D\,cl}{a_D}^2 - \frac{i}{4\pi}{a_D}^2\ln\left(\frac{a_D}{\Lambda}\right) - \frac{1}{2\pi i}\Lambda^2\sum_{n=1}^{\infty}\mathcal{F}_n^D\left(\frac{ia_D}{\Lambda}\right)^n \tag{1.40}$$

という形に書ける。

モノドロミー

この特異点まわりでのモノドロミー行列を求めよう。特異点の u 座標を u_0 とするとき $u\to u_0$ での $a_D(u), a(u)$ の漸近形は次のようになる[4]:

$$\begin{pmatrix} a_D(u) \\ a(u) \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} c_0(u-u_0) \\ a_0 + \frac{i}{\pi}c_0(u-u_0)\ln[(u-u_0)/\Lambda^2] \end{pmatrix}. \tag{1.41}$$

これらは $u-u_0 \to e^{2\pi i}(u-u_0)$ で

$$\begin{pmatrix} a_D \\ a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_D \\ -2a_D + a \end{pmatrix} \tag{1.42}$$

$$= M_{u_0}\begin{pmatrix} a_D \\ a \end{pmatrix} \tag{1.43}$$

と振る舞い、モノドロミー行列は

$$M_{u_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.44}$$

となる。
このモノポール チャージとモノドロミーとの関係を $SL(2,\mathbb{Z})$ 双対な別の記述に行って見てみよう。特異点で massless になる粒子の質量は

$$m = \sqrt{2}|a_D| \tag{1.45}$$

[4]一般には a_D の漸近形としては $c_0(u-u_0)^k$, $(k>0)$ が考えられるが、モノドロミー行列の $SL(2,\mathbb{Z})$ 性と整合条件 (1.51) とから $k=1$ 以外の可能性は排除される。

と表されていた。これを $SL(2,\mathbb{Z})$ 変換

$$\begin{pmatrix} a_D \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_m & n_e \\ k & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{a_D} \\ \tilde{a} \end{pmatrix} \tag{1.46}$$

で導入される新しい変数 $\tilde{a}_D, \tilde{a}$ で見ると

$$m = \sqrt{2}|n_m \tilde{a}_D + n_e \tilde{a}| \tag{1.47}$$

と、チャージ (n_m, n_e) の粒子の質量に見える。このとき、モノドロミー変換 (1.42) は

$$\begin{pmatrix} \tilde{a_D} \\ \tilde{a} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} n_m & n_e \\ k & l \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_m & n_e \\ k & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{a_D} \\ \tilde{a} \end{pmatrix} \tag{1.48}$$

$$= \begin{pmatrix} 1+2n_m n_e & 2{n_e}^2 \\ -2{n_m}^2 & 1-2n_m n_e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{a_D} \\ \tilde{a} \end{pmatrix} \tag{1.49}$$

と表される。つまり、チャージ (n_m, n_e) の粒子が massless になる特異点でのモノドロミー行列として

$$M^{(n_m,n_e)} = \begin{pmatrix} 1+2n_m n_e & 2{n_e}^2 \\ -2{n_m}^2 & 1-2n_m n_e \end{pmatrix} \tag{1.50}$$

が得られる。$\mathcal{M}$ に、$u=\infty$ の他に n 個の特異点 $u_1, u_2, \ldots, u_n$ があったとする。ホモトピー基準点から順番に特異点を 1 個ずつ回って帰って来る n 個のループを考えると、対応するモノドロミー行列 $M_{u_1}, M_{u_2}, \ldots, M_{u_n}$ は

$$M_\infty = M_{u_1} M_{u_2} \ldots M_{u_n} \tag{1.51}$$

を満たす。

Seiberg-Witten は特異点の個数の条件 $(n \geq 2)$ とこのモノドロミー行列に関する整合条件を満足する解として、$u=\infty$ の他に massless モノポール特異点と massless $(1,-1)$-ダイオン特異点の組合せを提示した。特異点の u 座標をそれぞれ $u_0, -u_0$ として、モノドロミー行列は

$$M_{u_0} = M^{(1,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \tag{1.52}$$

$$M_{-u_0} = M^{(1,-1)} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \tag{1.53}$$

で与えられる。実際これらの行列は

$$M_\infty = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.54}$$

とあわせて整合条件

$$M_\infty = M_{u_0} M_{-u_0} \tag{1.55}$$

を満たしている。それぞれの特異点で massless になる粒子のチャージとモノドロミー行列の具体形は、$SL(2,\mathbb{Z})$ 双対な別の記述に移れば変化する。どの記述をとるかに依らずに解を特徴づける

のは、これらの行列が生成するモノドロミー群である。今の場合についてみると、3つの行列が生成するのは $SL(2,\mathbb{Z})$ 全体ではなく、その部分群

$$\Gamma(2) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z}) \;\middle|\; \begin{array}{l} B, C = 0 \bmod 2 \\ A, D = 1 \bmod 2 \end{array} \right\} \tag{1.56}$$

である。

1.2 解の構成

結合定数

$$\tau = \frac{da_D}{da} \tag{1.57}$$

は $SL(2,\mathbb{Z})$ 変換

$$\begin{pmatrix} a_D \\ a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_D \\ a \end{pmatrix} \tag{1.58}$$

のもとで

$$\tau \to \frac{A\tau + B}{C\tau + D} \tag{1.59}$$

と写る。モノドロミー群による変換で真空は不変であるが、τ は一般に別の値に変わる。すなわち関数 $\tau(u)$ にはモノドロミー群の作用で上のように写る分だけの多価性がある。上半平面 $\mathbf{H}$ をモノドロミー群 Γ で切り分け、その中の1枚を τ の基本領域にとろう。特異点が全て実軸上に並ぶように u 座標をとると、$\tau(u)$ は $\mathbf{H} = \{\mathrm{Im}\ u \geq 0\}$ からこの基本領域への1対1写像を与えることにより決まる。この型の写像は Fuchs 写像として知られており、Schwarz 微分方程式

$$\{\tau, u\} = 2Q(u), \tag{1.60}$$

$$Q(u) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \frac{1 - {\alpha_i}^2}{(u - u_i)^2} + \frac{\beta_i}{u - u_i} + \gamma, \qquad (u_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma \in \mathbb{R}) \tag{1.61}$$

を満たす。(Schwarz 微分は

$$\{\tau, u\} \equiv \frac{\tau'''}{\tau'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\tau''}{\tau'}\right)^2, \qquad ' \equiv \frac{d}{du} \tag{1.62}$$

で定義される。) この方程式の解は、線形微分方程式

$$\varpi'' + Q\varpi = 0 \tag{1.63}$$

の独立な2解 ϖ_1, ϖ_2 の比をとって

$$\tau(u) = \frac{\varpi_1(u)}{\varpi_2(u)} \tag{1.64}$$

と構成できる。したがって問題は微分方程式 (1.63) を解くことに置きかえられる。

Seiberg-Witten は特異点が $u = \infty$ を含めて 3 つであると仮定して解を構成した。実は特異点の個数の仮定をおかないでも (ただし有限個ではあるとする)、$u = \infty$ での漸近形 (1.31) との整合性から特異点の個数が 3 つに決まってしまうことが示されている [14]。

以下では $a_D(u), a(u)$ が、特異点付近での漸近的振る舞いと $\tau = da_D/da$ についての Schwarz 微分方程式 (1.60) とから、本質的に一意に定まることを見る。線形微分方程式の理論で定数モノドロミーは確定特異点から出ることが分かっている。確定特異点 3 つの 2 階線形微分方程式 (1.63) は、適当な変数変換のもとで Gauss の超幾何微分方程式

$$\left[z(1-z)\frac{d^2}{dz^2} + [c - (a+b+1)z]\frac{d}{dz} - ab \right] \varpi = 0 \tag{1.65}$$

に変形できる。いま、

$$\varpi_D(u) \equiv a_D'(u),\ \varpi(u) \equiv a'(u) \tag{1.66}$$

は

$$\tau = \frac{da_D/du}{da/du} = \frac{\varpi_D}{\varpi} \tag{1.67}$$

と (1.64) の形に τ を構成していた。そこで超幾何微分方程式の解となる ϖ_D, ϖ で、特異点付近の漸近形を正しく再現するものが求まれば問題が解けたことになる。

以下、u 座標を規格化しモノポール特異点の座標を $u = +\Lambda^2$、ダイオン特異点の座標を $u = -\Lambda^2$ として議論を進める。$\varpi_D(u), \varpi(u)$ は
$u \to \infty$ では

$$\begin{cases} \varpi_D(u) \simeq \frac{i}{\pi\sqrt{2u}} \left[\ln\left(\frac{u}{\Lambda^2}\right) + 2 \right], \\ \varpi(u) \simeq \frac{1}{\sqrt{2u}}, \end{cases} \tag{1.68}$$

$u \to +\Lambda^2$ では

$$\begin{cases} \varpi_D(u) \simeq c_0, \\ \varpi(u) \simeq \frac{i}{\pi} c_0 \left[\ln\left(\frac{u-\Lambda^2}{\Lambda^2}\right) + 1 \right] \end{cases} \tag{1.69}$$

と振る舞う。特異点を標準位置にもってゆく次の 2 つの変数変換を考えよう:

$$z = \frac{\Lambda^2 - u}{2\Lambda^2}, \tag{1.70}$$

$$w = \frac{\Lambda^4}{u^2}. \tag{1.71}$$

これらの変数変換で u 座標の特異点は次のように移る:

u	$+\Lambda^2$	$-\Lambda^2$	∞
z	0	1	∞
w	1	1	0

. (1.72)

z, w はそれぞれモノポール特異点、漸近自由特異点を原点とする座標変数である。

超幾何微分方程式の微分演算子を

$$\mathcal{L}^{HG}_{(a,b,c;z)} \equiv z(1-z)\frac{d^2}{dz^2} + \big[c-(a+b+1)z\big]\frac{d}{dz} - ab \tag{1.73}$$

のように記し、その解を $\tilde{F}(a,b,c;z)$ [5] と表す。$\mathcal{L}^{HG}_{(a,b,c;z)}$ は対数微分 $\theta_z \equiv z\partial_z$ を用いて

$$z\mathcal{L}^{HG}_{(a,b,c;z)} = \theta_z\big(\theta_z-(1-c)\big) - z(\theta_z+a)(\theta_z+b) \tag{1.74}$$

と書くことができる。変数を z から $w(=(1-2z)^{-2})$ に変換すると、この演算子は

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4}\mathcal{L}^{HG}_{(a,b,c;z)} = \Big(\theta_w-\frac{a}{2}\Big)\Big(\theta_w-\frac{b}{2}\Big) - w\,\theta_w\Big(\theta_w+\frac{1}{2}\Big) \\ +\frac{a+b-2c+1}{2}w^{\frac{1}{2}}\,\theta_w \end{aligned} \tag{1.75}$$

となる。ここで

$$a+b-2c+1=0 \tag{1.76}$$

であったとすると $w^{\frac{1}{2}}$ の項が消える。さらに右から左へ $w^{\frac{a}{2}}$ を通すと

$$-\frac{1}{4}\mathcal{L}^{HG}_{(a,b,c;z)}w^{\frac{a}{2}} = w^{\frac{a}{2}+1}\mathcal{L}^{HG}_{(\frac{a}{2},\frac{a+1}{2},\frac{a-b}{2}+1;w)} \tag{1.77}$$

となり、w 変数についても系は再び超幾何系に帰着できる。つまり条件 (1.76) のもとで、$\mathcal{L}^{HG}_{(a,b,c;z)}$ の解としては
$z=0(u=+\Lambda^2)$ まわりでは

$$\tilde{F}(a,b,c;z), \tag{1.78}$$

$w=0(u=\infty)$ まわりでは

$$w^{\frac{a}{2}}\tilde{F}(\frac{a}{2},\frac{a+1}{2},\frac{a-b}{2}+1;w) \tag{1.79}$$

を選べばよいことが分かる。これらの基本解が (1.69), (1.68) のような対数解をもつためには微分方程式の指数が縮退している必要がある。超幾何微分方程式の言葉ではこれは c が整数であることに対応する。さらに、対数と同次の項に負巾が現れないこと、(1.68) の $1/\sqrt{2u}$ が (1.79) の $w^{\frac{a}{2}}$ に対応すること、及び条件 (1.76)、全てを総合することにより超幾何微分方程式のパラメーター a,b,c が一意に定まり

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^{HG}_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;z)} \tag{1.80}$$

が ϖ_D, ϖ を消す微分演算子として同定できる。

$\mathcal{L}$ は、u 変数で表すと

$$\mathcal{L} = (\Lambda^4-u^2){\partial_u}^2 - 2u\partial_u - \frac{1}{4} \tag{1.81}$$

[5] 以下では $F(a,b,c;z)$ と書いて狭い意味での超幾何関数

$$F(a,b,c;z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}\frac{z^n}{n!}$$

を表し、$\tilde{F}(a,b,c;z)$ と書いて原点まわりで有効な 2 つの基本解の組を表すことにする。

と書かれる。いま、

$$0 = \mathcal{L}\begin{pmatrix} \varpi_D(u) \\ \varpi(u) \end{pmatrix} = \mathcal{L}\,\partial_u \begin{pmatrix} a_D(u) \\ a(u) \end{pmatrix} \tag{1.82}$$

が成り立っていた。ここで $\mathcal{L}$ の右の ∂_u を左へもってゆくと、$\mathcal{L}$ は

$$\tilde{\mathcal{L}} = (\Lambda^4 - u^2){\partial_u}^2 - \frac{1}{4} \tag{1.83}$$

に形を変えて

$$\mathcal{L}\partial_u = \partial_u \tilde{\mathcal{L}} \tag{1.84}$$

のように書ける。このとき (1.82) は

$$\partial_u\,\tilde{\mathcal{L}} \begin{pmatrix} a_D(u) \\ a(u) \end{pmatrix} = 0 \tag{1.85}$$

となり、$\tilde{\mathcal{L}}$ は $a_D(u), a(u)$ を消す微分演算子であることが分かる。この演算子、及び対応する微分方程式はそれぞれ Picard-Fuchs 演算子、Picard-Fuchs 方程式と呼ばれる。Picard-Fuchs 方程式は、後々Seiberg-Witten 曲線や Calabi-Yau 多様体の周期積分が満たす方程式として重要な役割を果たす。$\tilde{\mathcal{L}}$ を z 変数で表すと

$$\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L}^{HG}_{(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0;z)} \tag{1.86}$$

と、これも超幾何微分演算子として書けることが分かる。これを

$$-\frac{1}{4}\tilde{\mathcal{L}} w^{-\frac{1}{4}} = w^{\frac{3}{4}} \mathcal{L}^{HG}_{(-\frac{1}{4},\frac{1}{4},1;w)}, \tag{1.87}$$

$$\tilde{\mathcal{L}} z = z\mathcal{L}^{HG}_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2},2;z)} \tag{1.88}$$

という形に表しておいて $u = \infty, u = +\Lambda^2$ 特異点まわりでの解を具体的に構成する。実際上の表式から直ちに
$w = 0 (u = \infty)$ まわりでは

$$w^{-\frac{1}{4}} \tilde{F}(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 1; w), \tag{1.89}$$

$z = 0 (u = +\Lambda^2)$ まわりでは

$$z\tilde{F}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2; z) \tag{1.90}$$

が基本解となることが分かる。具体的な形は次の通りである。
$w^{-\frac{1}{4}} \tilde{F}(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 1; w)$ 基本解系:

$$f_1(w) = w^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{4})_n (\frac{1}{4})_n}{(1)_n{}^2} w^n, \tag{1.91}$$

$$f_2(w) = f_1(w) \ln w + w^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{k - \frac{1}{4}} + \frac{1}{k + \frac{1}{4}} - \frac{2}{k+1} \right) \frac{(-\frac{1}{4})_n (\frac{1}{4})_n}{(1)_n{}^2} w^n, \tag{1.92}$$

$z\tilde{F}(\frac{1}{2},\frac{1}{2},2;z)$ 基本解系:

$$
\begin{aligned}
g_1(z) &= z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\frac{1}{2})_n{}^2}{(1)_n(2)_n}z^n, \qquad (1.93)\\
g_2(z) &= g_1(z)\ln w\\
&\quad + z\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{2}{k+\frac{1}{2}}-\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)\frac{(\frac{1}{2})_n{}^2}{(1)_n(2)_n}z^n\\
&\quad + 4. \qquad (1.94)
\end{aligned}
$$

ここで Pochhammer の記号

$$
(a)_n \equiv a(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1)=\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}, \quad (a)_0=1 \qquad (1.95)
$$

を用いた。

a_D, a は、これらの基本解の線形結合をとって構成される。漸近形 (1.31),(1.41) を満足し、正しく解析接続でつながる解として

$u=\infty$ まわりの領域での表示:

$$
\begin{cases} a_D(u) &= -\frac{i}{\sqrt{2}\pi}\Lambda[f_2(w)+(4-6\ln 2)f_1(w)],\\ a(u) &= \sqrt{2}\Lambda f_1(w), \end{cases} \qquad (1.96)
$$

$u=+\Lambda^2$ まわりの領域での表示:

$$
\begin{cases} a_D(u) &= -i\Lambda g_1(z),\\ a(u) &= \frac{1}{\pi}\Lambda[g_2(z)-(1+\ln 2)g_1(z)] \end{cases} \qquad (1.97)
$$

が決まる。

(1.96) で w を a について逆に解き、結果を a_D の式に代入することにより a_D を a の関数として求めることができる。これを a について積分すれば弱結合領域でのプリポテンシャル

$$
\mathcal{F}(a)=\frac{i}{2\pi}a^2\left(\ln\frac{a^2}{\Lambda^2}-3+2\ln 2\right)+\frac{1}{2\pi i}a^2\sum_{n=1}^{\infty}\mathcal{F}_n\left(\frac{\Lambda}{a}\right)^{4n} \qquad (1.98)
$$

が得られる。係数 $\mathcal{F}_n$ のはじめの数項を示す:

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$\mathcal{F}_n$	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{5}{2^7}$	$\frac{3}{2^7}$	$\frac{1469}{2^{16}}$	$\frac{4471}{2^{15}\cdot 5}$	$\frac{40397}{2^{20}}$	$\frac{441325}{2^{20}\cdot 7}$	$\frac{866589165}{2^{33}}$

. (1.99)

同様に、(1.97) からはモノポール特異点付近でのプリポテンシャル

$$
\mathcal{F}_D(a_D)=-\frac{i}{4\pi}{a_D}^2\left(\ln\frac{a_D}{\Lambda}-\ln i-4\ln 2\right)-\frac{1}{2\pi i}\Lambda^2\sum_{n=1}^{\infty}\mathcal{F}_n^D\left(\frac{ia_D}{\Lambda}\right)^n \qquad (1.100)
$$

が得られる。係数 $\mathcal{F}_n^D$ は次のように求まる:

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$\mathcal{F}_n^D$	4	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2^4}$	$\frac{5}{2^9}$	$\frac{11}{2^{12}}$	$\frac{63}{2^{16}}$	$\frac{527}{2^{18}\cdot 5}$	$\frac{3129}{2^{24}}$

. (1.101)

1.3 Seiberg-Witten 曲線

ϖ_D, ϖ を基本周期とするトーラス $T = \mathbb{C}^2/\Lambda$ を考える。ここで

$$\Lambda = \{m\varpi_D + n\varpi \mid m, n \in \mathbb{Z}\} \tag{1.102}$$

は ϖ_D, ϖ の生成する格子群である。結合定数 $\tau = \omega_D/\omega$ はトーラスの複素構造モジュラスになっている。このトーラス上で定義される Weierstrass の $\wp$ 関数

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum{}' \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right) \tag{1.103}$$

を考える。ただし $\sum'$ は Λ から $\omega = 0$ を除いた集合にわたってとる和を表す。$\wp(z)$ は微分方程式

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3 \tag{1.104}$$

を満たす。(ここで $g_2 = 60\sum' \frac{1}{\omega^4},\ g_3 = 140\sum' \frac{1}{\omega^6}$ である。) $x = \wp(z), y = \wp'(z)$ とすると、T から $\mathbb{C}^2$ 内の楕円曲線

$$y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3 \tag{1.105}$$

への写像が自然に定義できる。この楕円曲線は

$$y^2 t = 4x^3 - g_2 x t^2 - g_3 t^3 \tag{1.106}$$

の形で $\mathbf{P}^2$ に埋め込むことによりコンパクト化される。($x = t = 0$ が (1.105) での無限遠点に対応するのでそれをつけ加える。) 定義より

$$dz = \frac{dz}{d\wp} d\wp = \frac{dx}{y} \tag{1.107}$$

であった。Riemann 面の基本サイクル γ_D, γ にわたってこれを積分することで、T の基本周期が

$$\varpi_D = \oint_{\gamma_D} \frac{dx}{y},\ \varpi = \oint_{\gamma} \frac{dx}{y} \tag{1.108}$$

と複素積分の形で書ける。

以上、2 つの複素数 ω_D, ω と楕円曲線との間に対応がつけられることを見た。(一般の楕円曲線も適当な変数変換で Weierstrass の標準形 (1.105) にもって行くことができ、同様の議論が成り立つ。) このことからモジュライ空間 $\mathcal{M}$ 上の関数 $\omega_D(u), \omega(u)$ を考える問題は、$\mathcal{M}$ の各点で対応する楕円曲線を与える問題に置き換えて考えることが可能である。

Seiberg-Witten は $\mathbf{H}/\Gamma(2)$ を複素構造モジュライ空間とする楕円曲線

$$y^2 = (x - \Lambda^2)(x + \Lambda^2)(x - u) \tag{1.109}$$

を導入し、周期積分

$$\varpi_D = -\frac{\sqrt{2}}{4\pi} \oint_{\gamma_D} \frac{dx}{y} = -\frac{\sqrt{2}}{2\pi} \int_{\Lambda^2}^{u} \frac{dx}{\sqrt{(x+\Lambda^2)(x-\Lambda^2)(x-u)}}, \tag{1.110}$$

$$\varpi = -\frac{\sqrt{2}}{4\pi} \oint_{\gamma} \frac{dx}{y} = -\frac{\sqrt{2}}{2\pi} \int_{-\Lambda^2}^{\Lambda^2} \frac{dx}{\sqrt{(x+\Lambda^2)(x-\Lambda^2)(x-u)}} \tag{1.111}$$

として $\varpi_D(u), \varpi(u)$ を与えた。これらは u について積分できて

$$a_D(u) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_{\Lambda^2}^{u}\frac{dx\sqrt{x-u}}{\sqrt{x^2-\Lambda^4}}, \tag{1.112}$$

$$a(u) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_{-\Lambda^2}^{\Lambda^2}\frac{dx\sqrt{x-u}}{\sqrt{x^2-\Lambda^4}} \tag{1.113}$$

を得る。超幾何関数の公式を使うとこれらの積分は

$$a_D(u) = i\frac{u-\Lambda^2}{2\Lambda}F(\frac{1}{2},\frac{1}{2},2;\frac{\Lambda^2-u}{2\Lambda^2}) \tag{1.114}$$

$$= i\frac{u^2-\Lambda^4}{4\Lambda^3}F(\frac{3}{4},\frac{3}{4},2;1-\frac{u^2}{\Lambda^4}), \tag{1.115}$$

$$a(u) = \sqrt{2}(u+\Lambda^2)^{\frac{1}{2}}F(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;\frac{2\Lambda^2}{u+\Lambda^2}) \tag{1.116}$$

$$= \sqrt{2u}F(-\frac{1}{4},\frac{1}{4},1;\frac{\Lambda^4}{u^2}) \tag{1.117}$$

と表される。これは 1.2 節で求めた解に一致している。実際積分表示の (1.112), (1.113) が (1.83) の Picard-Fuchs 演算子の作用でゼロになることも確かめられる。

楕円曲線 (1.109) は Seiberg-Witten 曲線と呼ばれる。Seiberg-Witten 曲線を用いた記述は解に幾何学的解釈を与えてくれる。もっとも顕著には、モノドロミー変換

$$\begin{pmatrix} a_D \\ a \end{pmatrix} \to M \begin{pmatrix} a_D \\ a \end{pmatrix},\ M \in \Gamma(2) \tag{1.118}$$

が直接曲線の基本サイクルの変換

$$\begin{pmatrix} \gamma_D \\ \gamma \end{pmatrix} \to M \begin{pmatrix} \gamma_D \\ \gamma \end{pmatrix} \tag{1.119}$$

として見えることが挙げられる。また BPS 状態の安定性を議論する上でも曲線による記述が効力を発揮する。

半面プリポテンシャルを求めるにあたっては、積分表示 (1.112), (1.113) を u で直接展開するのは現実的ではない。具体的には、いったん Picard-Fuchs 方程式を導いた上でそれを解き、積分表示から漸近形だけ見積もって基本解の線形結合のとり方を確定する、という手順を踏む。今は物質場のない $SU(2)$ という一番単純な場合を扱っていたので Picard-Fuchs 方程式による解法と Seiberg-Witten 曲線による解法と、それぞれ独立に議論できた。より複雑なゲージ群や物質場をもつ場合にはこれらを相補的に使って解析を行うことになる。

1.4 SU(2) QCD 及び一般のゲージ群

本節では $SU(2)$ QCD すなわち物質場の入った $N=2$ $SU(2)$ 理論、及び一般のゲージ群の場合の Seiberg-Witten 理論について、結果をまとめておく。$SU(2)$ QCD の結果を見る前に、$SU(2)$ Seiberg-Witten 理論の記述に用いられる 2 種類の規約について述べる。前節の物質場のない $SU(2)$ の解析では W ボソンの電荷を 1 としていたが、この規格化では $SU(2)$ 基本表現 (vector 表現) の物質場の電荷は $\frac{1}{2}$ となる。電荷を整数にとりたいので基本表現の場が入る場合には電荷を 2 倍し、

それを打ち消すために a を $\frac{1}{2}$ 倍する再規格化が行われる。Seiberg-Witten 理論として扱えるのは漸近自由な系であり、条件 $\beta(g) \leq 0$ から許されるのは $SU(2)$ 基本表現の物質場が 4 つ以下、もしくは $SU(2)$ 随伴表現の物質場が 1 つ以下の場合である。このうち基本表現が 4 つの系、随伴表現 1 つの系は $\beta(g) = 0$ のスケール不変な理論となる。前者を $N_f = 4$ 理論、後者を $N = 4$ 理論と呼ぶことにする (実際後者には $N = 4$ 超対称性が現れる)。これらのスケール不変な理論は共に真空の対称性として $SL(2,\mathbb{Z})$ 不変性をもつ。両 $SL(2,\mathbb{Z})$ は物質場を取り去った物質場のない $SU(2)$ 理論では記述の双対性として現れるが、$SL(2,\mathbb{Z})_{N=4}$ が ${}^T(a_D, a)$ に作用するのに対し、$SL(2,\mathbb{Z})_{N_f=4}$ は ${}^T(a_D, a/2)$ に作用するという違いがある。そこで、前節で用いていた規約を $N = 4$ 規約、n_e を 2 倍 a を $\frac{1}{2}$ 倍した後の規約を $N_f = 4$ 規約と呼ぶことにして、前者から後者への移行の仕方をまとめておく:

	$N = 4$ convention		$N_f = 4$ convention
charge	(n_m, n_e)	$=$	$(\hat{n}_m, \hat{n}_e/2)$
gauge field	(A_D, A)	$=$	$(\hat{A}_D, 2\hat{A})$
coupling constant	$\tau = \frac{\theta}{2\pi} + \frac{4\pi i}{g^2}$		$\hat{\tau} = \frac{\theta}{\pi} + \frac{8\pi i}{g^2}$
monodromy matrix	$\begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} m & 2n \\ p/2 & q \end{pmatrix}$
monodromy group	$\Gamma(2)$		$\Gamma_0(4)$
SW curve	$y^2 = (x^2 - \Lambda^4)(x - u)$		$\hat{y}^2 = (\hat{x}^2 - u)^2 - \Lambda^4$
		with	
	(x, y)	$=$	$(u - \hat{x}^2, i\hat{x}\hat{y})$

(1.120)

$N_f = 4$ 規約の記号には $\hat{}$ をつけて表した。また $\Gamma_0(4)$ は

$$\Gamma_0(4) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z}) \;\middle|\; B = 0 \bmod 4 \right\} \tag{1.121}$$

で定義される。

物質場のない $SU(2)$ 理論を考える限りではどちらの規約をとっても大した違いはない ($N = 4$ 規約の方が若干便利である) が、物質場を含む場合や一般のゲージ群の場合への拡張を考える際には $N_f = 4$ 規約が便利である。以下は特に断らない限り $N_f = 4$ 規約を用いて議論を進めることにする。

$SU(2)$ 基本表現の物質場が N_f 個 ($0 \leq N_f < 4$) ある場合の Seiberg-Witten 曲線は

$$y^2 = (x^2 - u)^2 - (\Lambda_{N_f})^{4-N_f} \prod_{i=1}^{N_f} (x + m_i) \tag{1.122}$$

という形をとる。

SU(n) ゲージ群

次にゲージ群の階数が 1 より大きい場合として、一番簡単な $SU(n)$ の場合を考える。$SU(n)$ ゲージ群を担うベクトル多重項の中の複素スカラー場 (Higgs 場) ϕ は $su(n)$ の随伴表現に値をとる。一般のモジュライ点では $n \times n$ 行列 ϕ の固有値は全て異なる値をとる。固有値が共通値をとる特別なモジュライ上では非可換なゲージ対称性が回復する。このモジュライ領域は $SU(2)$ 理論

の $a=0$ の点の一般化に対応するもので、古典モジュライ空間の特異点 (枝) となる。ϕ の固有値は、特性多項式

$$P_{A_{n-1}} \equiv \det_{n\times n}(x\mathbf{1}-\phi) \tag{1.123}$$

$$= x^n - \sum_{j=1}^{n-1} u_{j+1}x^{n-j-1} \tag{1.124}$$

の根として表される。つまり上の特性多項式は $SU(n)$ 理論の古典モジュライ空間を特徴づける。u_i は i 次の Casimir 固有値で、ゲージ不変なモジュライ座標となる。

量子モジュライ空間もこの特性多項式によって規定され、$SU(n)$ 理論の Seiberg-Witten 曲線は次のようになる [5, 6]:

$$y^2 = \big(P_{A_{n-1}}(x;u_k)\big)^2 - \Lambda^{2n}. \tag{1.125}$$

あるいは、$y = z + P_{A_{n-1}}(x;u_k)$ とおいて

$$z + \frac{\Lambda^{2n}}{z} + 2P_{A_{n-1}}(x;u_k) = 0 \tag{1.126}$$

と表した形もよく用いられる。

ADE 型ゲージ群

一般のゲージ群の場合もモジュライ空間の構造は特性方程式によって規定される。しかしながら $SU(n)$ 以外のゲージ群はゲージ群の階数よりも特性多項式の次数の方が大きいため、特性多項式の係数を組にしただけでは直接モジュライ空間の独立座標にはならない。$SU(n)$ 以外のゲージ理論では、曲線よりもむしろ次元を上げた代数多様体を用いた方が、解の記述が自然にできる。ADE 型ゲージ群の場合の解を見るために、次の多項式を導入する (これらは ADE 型特異点を表す多項式[6]の、複素変形による特異点解消である):

$$W_{A_n}(x_i;u_k) = P_{A_n}(x_1;u_k) + {x_2}^2 + {x_3}^2$$
$$= {x_1}^{n+1} + {x_2}^2 + {x_3}^2 - \sum_{j=1}^{n} u_{j+1}{x_1}^{n-j}, \tag{1.127}$$

$$W_{D_n}(x_i;u_k) = {x_1}^{n-1} + x_1{x_2}^2 + {x_3}^2 - \sum_{j=1}^{n-1} u_{2j}{x_1}^{n-j-1} - \tilde{u}_n x_2, \tag{1.128}$$

$$W_{E_6}(x_i;u_k) = {x_1}^3 + {x_2}^4 + {x_3}^2$$
$$-u_2x_1{x_2}^2 - u_5x_1x_2 - u_6{x_2}^2 - u_8x_1 - u_9x_2 - u_{12}, \tag{1.129}$$

$$W_{E_7}(x_i;u_k) = {x_1}^3 + x_1{x_2}^3 + {x_3}^2$$
$$-u_2{x_1}^2x_2 - u_6{x_1}^2 - u_8x_1x_2 - u_{10}{x_2}^2 - u_{12}x_1 - u_{14}x_2 - u_{18}, \tag{1.130}$$

$$W_{E_8}(x_i;u_k) = {x_1}^3 + {x_2}^5 + {x_3}^2$$
$$-u_2x_1{x_2}^3 - u_8x_1{x_2}^2 - u_{12}{x_2}^3$$
$$-u_{14}x_1x_2 - u_{18}{x_2}^2 - u_{20}x_1 - u_{24}x_2 - u_{30}. \tag{1.131}$$

[6] 後で出てくる特異点の方程式 (3.2) の左辺。

ゲージ理論の量子モジュライ空間は

$$z + \frac{\Lambda^{2n}}{z} + 2W_{ADE}(x_i; u_k) = 0 \tag{1.132}$$

なる代数多様体の複素構造モジュライ空間として表される [18, 23]。この代数多様体は Seiberg-Witten geometry と呼ばれる。

物質場がある場合の Seiberg-Witten geometry は

$$z + \frac{\Lambda^{b}}{z} \prod_{l} X_{ADE}^{\mathcal{R}_l}(x_i; u_k, m_l) + 2W_{ADE}(x_i; u_k) = 0 \tag{1.133}$$

という形をとる。ゲージ群の表現が $\mathcal{R}_l$、質量が m_l の物質場は多項式 $X_{ADE}^{\mathcal{R}_l}(x_i; u_k, m_l)$ として Seiberg-Witten geometry の中に現れる。b は (1.26) で導入したベータ関数の係数である。

第2章　超弦理論のコンパクト化

2.1　コンパクト化多様体の候補

超弦理論で4次元 $N = 2$ 超対称ゲージ理論を実現する方法として現在大きく分けて、MQCDの方法 [19]、ブレーンプローブによる方法 [20, 21]、弦理論コンパクト化による方法 [22–25] の3つが知られている。何を解析したいかによりそれぞれ一長一短があるが、本修士論文ではもっとも汎用性のある弦理論コンパクト化による方法を議論する。

超弦理論のコンパクト化とは、非自明な重力場背景のもとでの超弦理論を考えることである。低エネルギーで4次元のゲージ理論を出すには標的空間 (target space) として $\mathbb{R}^{3,1} \times X$ (X は実次元6のコンパクト化多様体) をとる。X のサイズを弦のスケールに比べて小さくとることにより低エネルギーでは X に沿う方向の励起は現れず、理論は4次元に見える。X の構造の情報は4次元場の理論の対称性や現れる場の種類に反映される。与えられた Seiberg-Witten 理論の設定を実現するにはどのような弦理論コンパクト化を考えればよいだろうか。この節では、4次元でちょうど $N = 2$ 超対称性が現れるための条件から、コンパクト化多様体としてタイプ II 理論では Calabi-Yau 多様体が、ヘテロティック理論では $\mathrm{K3}\times\mathbf{T}^2$ が適することを確かめる。(本修士論文ではこれらの超弦理論のコンパクト化のみを扱う。)

超対称変換の生成子であるスーパーチャージは、Lorentz 群のスピノル表現をなす。10次元理論から4次元理論へのコンパクト化で超対称性がどう変化するか、すなわちどのスーパーチャージが生き残るかを見るには、Lorentz 群の分解

$$SO(9,1) \to SO(3,1) \times SO(6) \tag{2.1}$$

にともなうスピノル表現の分解を考えればよい。このとき、$SO(3,1)$ の表現として Dirac スピノル **4** 表現が出るような分解を考えるが、残りの $SO(6)$ の表現は何を表すのだろうか。$SO(6)$ は、コンパクト化で一般的には破れる対称性である。ただしコンパクト化多様体が何らかの対称性変換群をもつ場合には、この $SO(6)$ 表現の一部が生き残る。生き残る対称性は4次元理論においては内部対称性 (の一部) として現れる。このうち特に、スーパーチャージにはたらく内部対称性は、超対称性の中の R-対称性である。一方 $SO(6)$ の破れる対称性の方は、コンパクト化多様体 X のホロノミーに移行すると考える。こうして、4次元へのコンパクト化では

$$SO(6) \to (\text{内部対称性の群}) \times (X \text{ のホロノミー群}) \tag{2.2}$$

と、対称性の表現の読み替えを行う[1]。

4次元理論で生き残るのはコンパクト化多様体 X の内部構造に依存しないスーパーチャージである。あるいは言いかえると、生き残るのは X のホロノミー群について自明表現となるスーパー

[1] 一般に、コンパクト化理論の対称性表現の全てが元の理論の対称性表現から得られるとは限らないことに注意する。ノンコンパクト理論の表現の分解は、コンパクト化理論に現れる場の種類 (field contents) を手早く知る便利な方法であるが、完全なコンパクト化理論を得るには元の理論から出ない対称性の表現を補う必要がある。(いわゆる twisted states の補完。)

チャージである。まず、３２個のスーパーチャージをもつタイプ II 理論のコンパクト化を考えよう。これらのスーパーチャージは $SO(9,1)$ のスピノル表現として、IIA ではカイラリティの異なる２つの **16** 表現、IIB ではカイラリティの揃った２つの **16** 表現をなす。コンパクト化による表現の分解は、２つの **16** 表現に同じようにはたらく。よって４次元 $N=2$ のスーパーチャージを残すには、それぞれの **16** 表現から $SO(3,1)$ の **4** 表現を１つずつ出すような分解を考えればよい。**16** スピノルは

$$SO(9,1) \to SO(3,1) \times SO(6) \tag{2.3}$$

のもとで

$$\mathbf{16} \mapsto (\mathbf{4},\mathbf{4}) \tag{2.4}$$

と分かれる。$SO(6)$ の分解として

$$SO(6) \to SU(3) \times U(1) \tag{2.5}$$

を考えると、上の表現はさらに

$$(\mathbf{4},\mathbf{4}) \mapsto (\mathbf{4},\mathbf{1})_3 + (\mathbf{4},\mathbf{3})_{-1} \tag{2.6}$$

と分かれる。ただし表現を $(SO(3,1), SU(3))_{U(1)\text{-charge}}$ のように表した。$SU(3)$ をコンパクト化多様体のホロノミー群とみなすと $(\mathbf{4},\mathbf{1})_3$ が４次元理論で生き残るスーパーチャージ、$(\mathbf{4},\mathbf{3})_{-1}$ がそうでないスーパーチャージに対応する。よってタイプ II 理論ではホロノミー群に $SU(3)$ をもつコンパクト化多様体を選べば４次元 $N=2$ 超対称性が実現できる。

次にヘテロティック理論のコンパクト化の場合を考えよう。ヘテロティック理論のスーパーチャージは $SO(9,1)$ の **16** 表現１つ分である。よってこの場合には群の分解として、４次元の２つのスーパーチャージがなす R-対称性の **2** 表現が、$SO(6)$ の **4** 表現から出るようなものを考える。具体的には

$$SO(6) \to SU(2) \times SU(2) \times U(1) \tag{2.7}$$

にともなう

$$(\mathbf{4},\mathbf{4}) \mapsto (\mathbf{4},\mathbf{1},\mathbf{2})_2 + (\mathbf{4},\mathbf{2},\mathbf{1})_{-2} \tag{2.8}$$

という表現の分解が見つかる。ただし右辺は $(SO(3,1), SU(2), SU(2))_{U(1)\text{-charge}}$ と表記した。前者の $SU(2)$ をホロノミー群、後者の $SU(2)$ を R-対称性の群とみなせば、$(\mathbf{4},\mathbf{1},\mathbf{2})_2$ が生き残るスーパーチャージとなり、$N=2$ の超対称性が得られることが分かる。

以上結果をまとめると、タイプ II 理論では $SU(3)$、ヘテロティック理論では $SU(2)$ をホロノミー群にもつコンパクト化多様体が、４次元 $N=2$ 超対称性の実現に適することが分かった。これらは時空の一方で、弦理論自体の無矛盾性から要請されるコンパクト化多様体への制限があった。コンパクト化弦理論の世界面理論は $\mathbb{R}^{3,1} \times X$ 上の２次元非線形シグマ模型の形をとるが、これが (2,2) 超対称共形場理論となるための条件として、X に複素 Kähler 構造及び Ricci 平坦計量が要求される。これらの条件を全て満たすものとして Calabi-Yau 多様体がある。ここに Calabi-Yau 多様体は

$$(d\text{ 次元 Calabi-Yau 多様体}) \stackrel{def}{=} \left(\begin{array}{c} SU(d)\text{ ホロノミーをもつ} \\ d\text{ 次元複素 Kähler 多様体} \end{array} \right) \tag{2.9}$$

と定義され、Ricci 平坦計量が入ることが知られている。このことからタイプ II 理論、ヘテロティック理論のコンパクト化多様体候補として、それぞれ 3 次元 Calabi-Yau 多様体、2 次元 Calabi-Yau 多様体すなわち K3 を挙げることができる。ただし K3 は実次元 4 なのでヘテロティックコンパクト化の残り 2 次元分は、ホロノミー群の自明なトーラス $\mathbf{T}^2$ にコンパクト化する。

2.2 超重力理論のコンパクト化

Calabi-Yau にコンパクト化したタイプ II 弦理論の低エネルギー理論に現れる場には、１０次元超重力理論の場に起源をもつものと、弦理論特有の現象によって生じるものとがある。後者は次章で扱うことにして、この節では１０次元超重力理論の Calabi-Yau コンパクト化による場の生成をまとめておく。

X を 3 次元 Calabi-Yau 多様体とする。X の (r,s)-Dolbeault コホモロジー群 $H^{r,s}_{\bar\partial}(X)$ の次元を $h^{r,s}$ とするとき、X は次のような Hodge 構造をもつ:

$$\begin{array}{ccccccc} & & h^{0,0} & & & & \\ & h^{1,0} & & h^{0,1} & & & \\ h^{2,0} & & h^{1,1} & & h^{0,2} & & \\ h^{3,0} & & h^{2,1} & & h^{1,2} & & h^{0,3} \\ & h^{3,1} & & h^{2,2} & & h^{1,3} & \\ & & h^{3,2} & & h^{2,3} & & \\ & & & h^{3,3} & & & \end{array} = \begin{array}{ccccccc} & & 1 & & & & \\ & 0 & & 0 & & & \\ 0 & & h^{1,1} & & 0 & & \\ 1 & & h^{2,1} & & h^{2,1} & & 1 \\ 0 & & h^{1,1} & & 0 & & \\ & 0 & & 0 & & & \\ & & 1 & & & & \end{array} . \tag{2.10}$$

以下では Bosonic 場について１０次元から 4 次元への次元還元を見ることにする (Fermionic 場は全てこれらの場の超対称パートナー (superpartner) になっている)。計量テンソルからとその他の微分形式場からとで場の生成の仕組みが異なるので、分けて考える。計量の変形

$$\delta G = \delta g_{i\bar\jmath} dz^i d\bar z^{\bar\jmath} + \delta g_{ij} dz^i dz^j + c.c. \tag{2.11}$$

のうち、Calabi-Yau の Ricci 平坦条件を保つものとして次の 2 種類がある。一つは $\delta g_{i\bar\jmath} dz^i \wedge d\bar z^{\bar\jmath}$ が調和形式となる場合である。これは Kähler 形式 $J = G_{i\bar\jmath} dz^i \wedge d\bar z^{\bar\jmath}$ の変更、すなわち Calabi-Yau の Kähler 構造の変形に対応する。この変形は J の正則性をこわさないので Calabi-Yau の複素構造は不変に保たれる。調和形式とコホモロジーとの 1 対 1 対応によりこの種の計量の変形は $h^{1,1}$ 個の独立な元によって張られる。もう一つは Kähler 構造を動かさずに複素構造を変形するもので、

$$\Omega_{ijk} G^{k\bar k} \delta g_{\bar k\bar l} dz^i dz^j d\bar z^{\bar l} \tag{2.12}$$

が、調和形式となるものである。ここで Ω は Calabi-Yau の正則 3 形式である。この $(2,1)$ 形式は $h^{2,1}$ 個の独立な元によって張られる。

R-R 3 形式場 C_3 を例に１０次元微分形式場からの 4 次元場の生成を考える。運動方程式

$$\triangle^{(10)} C_3 = 0 \tag{2.13}$$

の解のうち、4 次元時空方向に 1 つ、コンパクト化方向に 2 つ足をとるものを考える。運動方程式を 4 次元時空方向とコンパクト化方向に分けて

$$(\triangle^{(4)} + \triangle^{(6)}) C_3 = 0 \tag{2.14}$$

と書く。$\omega_2^{(n)}$ を固有方程式

$$\triangle^{(6)}\omega_2^{(n)} = {m_n}^2\omega_2^{(n)} \tag{2.15}$$

を満たす $\triangle^{(6)}$ の固有モードとする。運動方程式の解を

$$C_3 = \sum_n A_1^{(n)} \wedge \omega_2^{(n)} \tag{2.16}$$

の形に展開すると、

$$(\triangle^{(4)} + {m_n}^2)A_1^{(n)} = 0 \tag{2.17}$$

となり、$A_1^{(n)}$ が質量 m_n をもつ 4 次元場に見える。今、コンパクト化多様体が非常に小さいとすると零以外の m_n の値は大きくなり低エネルギースペクトルに現れるのは $\triangle^{(6)}$ の零固有値のみとなる。その場合低エネルギー理論の範囲では、$\triangle^{(6)}$ の固有モードとして調和形式のみを考えればよい。そこで $\omega_2^{(A)}$ を $H_{\bar\partial}^{1,1}(X)$ に対応する調和形式の生成子として、低エネルギー理論の解を

$$C_3 = \sum_{A=1}^{h^{1,1}} A_1^{(A)} \wedge \omega_2^{(A)} \tag{2.18}$$

の形に表す。このとき係数 $A_1^{(A)}$ が 4 次元の massless ベクトル場として見えることになる。他の微分形式場についても同様に考えることができる。上のような考察をもとに１０次元超重力理論の Calabi-Yau コンパクト化による 4 次元低エネルギー理論場の生成を Bosonic 部分に関してまとめると以下のようになる。

IIA/CY_3 compactification:

	$(NS+,NS+)$			$(R+,R-)$	
	G_{MN}	B_{MN}	Φ	C_M	C_{MNP}
1	$g_{\mu\nu}$	$b_{\mu\nu}$	ϕ	c_μ	–
0 0	–	–	–	–	–
0 $h^{1,1}$ 0	$\delta g_{i\bar\jmath}^{(A)}$	$b_{i\bar\jmath}^{(A)}$	–	–	$c_{\mu i\bar\jmath}^{(A)}$
1 $h^{2,1}$ $h^{2,1}$ 1	$\delta g_{ij}^{(I)}, \delta g_{\bar\imath\bar\jmath}^{(I)}$	–	–	–	$c_{ijk}, c_{ij\bar k}^{(I)}, c_{\bar\imath\bar\jmath k}^{(I)}, c_{\bar\imath\bar\jmath\bar k}$
0 $h^{1,1}$ 0	–	–	–	–	–
0 0	–	–	–	–	–
1	–	–	–	–	–

$(A = 1, \ldots, h^{1,1},\ I = 1, \ldots, h^{2,1})$, (2.19)

IIB/$\widetilde{\mathrm{CY}_3}$ compactification:

	$(NS+,NS+)$			$(R+,R+)$		
	G_{MN}	B_{MN}	Φ	C	C_{MN}	C^+_{MNPQ}
1	$g_{\mu\nu}$	$b_{\mu\nu}$	ϕ	c	$c_{\mu\nu}$	–
0 0	–	–	–	–	–	–
0 $\tilde{h}^{1,1}$ 0	$\delta g^{(I)}_{i\bar{j}}$	$b^{(I)}_{i\bar{j}}$	–	–	$c^{(I)}_{i\bar{j}}$	–
1 $\tilde{h}^{2,1}$ $\tilde{h}^{2,1}$ 1	$\delta g^{(A)}_{ij}, \delta g^{(A)}_{\bar{i}\bar{j}}$	–	–	–	–	$c_{\mu ijk}, c^{(A)}_{\mu ij\bar{k}}$
0 $\tilde{h}^{1,1}$ 0	–	–	–	–	–	$c^{(I)}_{ij\bar{k}\bar{l}}$
0 0	–	–	–	–	–	–
1	–	–	–	–	–	–

$(A = 1, \ldots, \tilde{h}^{2,1},\ I = 1, \ldots, \tilde{h}^{1,1})$. (2.20)

ここで、$M, N, \ldots$ は１０次元時空の添字、$\mu, \nu, \ldots$ は４次元時空の添字、$i, j, \ldots, \bar{\imath}, \bar{\jmath}, \ldots$ はコンパクト化方向の添字を表す。表についていくつか注釈が必要である。まず、４次元の場の理論の微分形式場のうち物理的自由度をもつのは２形式場までである。$c_{\mu\nu\rho}$ などの高階の微分形式は４次元の場の理論には現れない。次に、表には書かなかったが $c^{(I)}_{\mu\nu i\bar{j}}, c^{(A)}_{\mu\bar{\imath}\bar{j}k}, c_{\mu\bar{\imath}\bar{j}\bar{k}}$ という場の生成が考えられる。しかしながら今の場合 C^+_{MNPQ} が自己双対場であることからこれらの場はそれぞれ

$$c^{(I)}_{\mu\nu i\bar{j}} \cong c^{(I)}_{ij\bar{k}\bar{l}}, \tag{2.21}$$

$$c^{(A)}_{\mu\bar{\imath}\bar{j}k} \cong c^{(A)}_{\mu ij\bar{k}}, \tag{2.22}$$

$$c_{\mu\bar{\imath}\bar{j}\bar{k}} \cong c_{\mu ijk} \tag{2.23}$$

と同一視される。表は独立な自由度が数えやすいよう片方のみを残して書いた。

これらの場は４次元 $N = 2$ 超対称性の表現として次のように多重項を組む:

IIA/CY_3：

超重力多重項	$(g_{\mu\nu}, c_\mu)$	1 個
ベクトル多重項	$(\delta g^{(A)}_{i\bar{j}}, b^{(A)}_{i\bar{j}}, c^{(A)}_{\mu i\bar{j}})$	$h^{1,1}$ 個
ハイパー多重項	$(\delta g^{(I)}_{ij}, \delta g^{(I)}_{\bar{i}\bar{j}}, c^{(I)}_{ij\bar{k}}, c^{(I)}_{\bar{i}\bar{j}k})$	$h^{2,1}$ 個
	$(\phi, a, c_{ijk}, c_{\bar{i}\bar{j}\bar{k}})$	1 個

, (2.24)

IIB/$\widetilde{\mathrm{CY}_3}$：

超重力多重項	$(g_{\mu\nu}, c_\mu)$	1 個
ベクトル多重項	$(\delta g^{(A)}_{ij}, \delta g^{(A)}_{\bar{i}\bar{j}}, c^{(A)}_{\mu ij\bar{k}})$	$\tilde{h}^{2,1}$ 個
ハイパー多重項	$(\delta g^{(I)}_{i\bar{j}}, b^{(I)}_{i\bar{j}}, c^{(I)}_{i\bar{j}}, c^{(I)}_{ij\bar{k}\bar{l}})$	$\tilde{h}^{1,1}$ 個
	(ϕ, a, c, a')	1 個

. (2.25)

ただし、a, a' はそれぞれ２形式場 $b_{\mu\nu}, c_{\mu\nu}$ と等価なアクシオンである。これらは場の強さ (field strength) に関して、Hodge 双対で

$$da_0 = {}^4{*}db_2,\ da'_0 = {}^4{*}dc_2 \tag{2.26}$$

と関係づけられる。

上の結果をモジュライ空間の関係として模式的に次のように表しておこう:

$$\mathcal{M}_V = \mathcal{M}^{\mathrm{CY}_3}_{\mathrm{K\ddot{a}hler}} = \mathcal{M}^{\widetilde{\mathrm{CY}}_3}_{\mathrm{complex}}\,, \tag{2.27}$$

$$\mathcal{M}_H = \mathcal{M}^{\mathrm{CY}_3}_{\mathrm{complex}} \times \mathcal{M}_{\mathrm{dilaton}} = \mathcal{M}^{\widetilde{\mathrm{CY}}_3}_{\mathrm{K\ddot{a}hler}} \times \mathcal{M}_{\mathrm{dilaton}}\,. \tag{2.28}$$

2.3 コンパクト化弦理論における量子補正

前節の結果のうち、ゲージ理論の実現と解析を行う上で特に着目すべき点について触れておく。ひとつはタイプ II 理論コンパクト化ではディラトンがハイパー多重項に落ちることである。これはコンパクト化で現れる場を (2.24) や (2.25) にまとめる際にも分かるが[2]、より直接的には次のように説明できる [27]。

弦理論ではディラトンを left-moving NS 状態と right-moving NS 状態の合成で表した。left-,right-, 及び合成状態を、その 4 次元ヘリシティを h_L, h_R, h として $|h_L\rangle_L, |h_R\rangle_R, |h\rangle\rangle$ のように書くことにすると、ディラトン、アクシオンは

$$\text{dilaton} \quad : \quad |0\rangle\rangle = |+1\rangle_L|-1\rangle_R + |-1\rangle_L|+1\rangle_R\,, \tag{2.29}$$

$$\text{axion} \quad : \quad |0\rangle\rangle = |+1\rangle_L|-1\rangle_R - |-1\rangle_L|+1\rangle_R \tag{2.30}$$

のように合成されている。ここで超対称パートナーを考える。タイプ II 理論は世界面理論として左右に半分ずつ超対称性があった。4 次元 $N = 2$ 超対称性への寄与も、左と右から半分ずつ $N = 1$ 超対称性を与えると考えられる。よって、$|+1\rangle_L$ には $|+1/2\rangle_L$ が、$|-1\rangle_R$ には $|-1/2\rangle_R$ がと (他についても同様)、left-,right-状態にそれぞれひとつずつ超対称パートナーがつきそれら 2×2 の組合せで

$$|+1/2\rangle\rangle,\ |0\rangle\rangle,\ |0\rangle\rangle,\ |-1/2\rangle\rangle \tag{2.31}$$

が、ディラトンとその超対称パートナーとなる。アクシオンについても同じで、合わせると bosonic 部分が実スカラー 4 つのハイパー多重項をなす。

この議論を $\mathrm{Het}/(\mathrm{K3}\times\mathrm{T}^2)$ 理論に適用してみる。ヘテロティック理論は世界面理論として超対称性を right-側一方にだけ持っていた。このため 4 次元 $N = 2$ の超対称性も全て right-moving 状態が持つことになる。よって $|+1\rangle_L$ と合成される right-moving 状態 $|-1\rangle_R$ には $|-1/2\rangle_R, |-1/2\rangle_R, |0\rangle_R$ と 3 つ超対称パートナーが付随することになり、1×4 の組合せから

$$|0\rangle\rangle,\ |+1/2\rangle\rangle,\ |+1/2\rangle\rangle,\ |1\rangle\rangle \tag{2.32}$$

がディラトンとその超対称パートナーとなる。ヘリシティ1 の粒子が入っており、これはベクトル多重項をなす。

結果をもう一度繰り返すと、ディラトンはタイプ II コンパクト化理論ではハイパー多重項に落ち、$\mathrm{Het}/(\mathrm{K3}\times\mathrm{T}^2)$ 理論ではベクトル多重項に落ちる。ディラトンの行き先が重要なのは、ディラトンの真空期待値 $\langle\phi\rangle$ が弦理論の摂動展開の結合定数 g_s に

$$g_s = e^{\langle\phi\rangle} \tag{2.33}$$

[2] コンパクト化で生じる場の全体から $H^{1,1}_{\bar\partial}(X), H^{2,1}_{\bar\partial}(X)$ に起因する場、及び超重力多重項の成分を取り去ると、残るのはスカラー場 4 つのみとなる。スカラー場のみを Bosonic 成分に持つ 4 次元 $N = 2$ 多重項は、ハイパー多重項だけである。

と結びついているからである。ここで 4 次元 $N = 2$ 超対称理論において、Coulomb ブランチ $\mathcal{M}_V$ は量子補正を受けるのに対し、Higgs ブランチ $\mathcal{M}_H$ は量子補正を受けなかったことを思い出す。$\mathrm{Het}/(\mathrm{K3}\times\mathrm{T}^2)$ 理論の弦結合定数は $\mathcal{M}_V$ に値をとるので量子補正を受けるのに対し、タイプ II コンパクト化理論の弦結合定数は $\mathcal{M}_H$ に値をとるため量子補正を受けない。さて、Seiberg-Witten 理論で目的としていたのはゲージ理論の Coulomb ブランチの構造の解析であった。4 次元 $N = 2$ 超対称理論のモジュライ空間において、$\mathcal{M}_V$ と $\mathcal{M}_H$ はモジュライ空間の計量に関して直積に分かれている。よって $\mathcal{M}_V$ の構造を調べる上では $\mathcal{M}_H$ のモジュライ位置はどこに選んでもよい。タイプ II コンパクト化理論では、$\mathcal{M}_H$ の特別な場所として弦結合定数が 0 になるところが考えられる。$\mathcal{M}_H$ が量子補正を受けないため弦結合定数は古典論・量子論の別なく 0 であり、このとき弦理論は tree レベルだけで完結する。つまり標的空間の描像で摂動補正もインスタントン補正も考えなくてよいので理論は著しく単純化される。一方の $\mathrm{Het}/(\mathrm{K3}\times\mathrm{T}^2)$ 理論では、弦結合定数が $\mathcal{M}_V$ 内でゲージ場のモジュライと一緒に量子補正を受けるのでこうはならない。この点が $\mathrm{Het}/(\mathrm{K3}\times\mathrm{T}^2)$ 理論とタイプ II コンパクト化理論の決定的な違いであり、Seiberg-Witten 理論を弦理論の双対性を利用して解析する上でひとつのかなめとなっている。

さて弦摂動が tree レベルのみとなったタイプ II コンパクト化理論は、世界面の描像で 2 次元共形場理論としてとらえられる。もともと 4 次元の場の理論であったのが 2 次元共形場理論に置きかわったのは進展ととらえられる。しかしながらこの 2 次元理論も依然として量子論であり、厳密に解くとなると、全てのインスタントン効果を考えなくてはならないという障壁に阻まれることとなる。

今考えている世界面理論は $\mathbf{P}^1$ から $\mathbb{R}^{3,1}\times\mathrm{CY}_3$ への非線形シグマ模型である。Calabi-Yau の計量 $G_{i\bar{\jmath}}$ 及び $B_{i\bar{\jmath}}$ 場の真空期待値は、この 2 次元理論の作用の中の結合定数として現れる。これらの結合定数に対するインスタントン補正という形で $G_{i\bar{\jmath}}, B_{i\bar{\jmath}}$ の真空期待値は量子補正を受ける。ところで世界面インスタントンとは、コンパクト化多様体の 2-サイクルに世界面が非自明に巻きついた解であった。古典解、すなわちエネルギーが極小値をとるような 2-サイクルは常に正則曲線である[3]。この正則性が経路積分におけるインスタントン解の足し上げにも反映され、インスタントンによる量子補正は解析的な補正となる。つまり、インスタントン補正によってコンパクト化 Calabi-Yau 多様体の Kähler 構造は変わるが、複素構造は変更を受けない。

ここで表 (2.24), (2.25) を見てみよう。ゲージ場すなわちベクトル多重項は、$\mathrm{IIA}/\mathrm{CY}_3$ 理論ではコホモロジー $H^{1,1}_{\bar{\partial}}(X)$ に起因するのに対し、$\mathrm{IIB}/\widetilde{\mathrm{CY}}_3$ 理論ではベクトル多重項は $H^{2,1}_{\bar{\partial}}(X)$ に起因していた。モジュライ空間の対応としてこれは次のように言い表せる。すなわち Coulomb ブランチ $\mathcal{M}_V$ は、$\mathrm{IIA}/\mathrm{CY}_3$ では Calabi-Yau 多様体の Kähler モジュライとして実現されるのに対し、$\mathrm{IIB}/\widetilde{\mathrm{CY}}_3$ では複素構造モジュライとして実現される。つまり $\mathrm{IIB}/\widetilde{\mathrm{CY}}_3$ 理論では、世界面インスタントン補正を受けない形でゲージ場のモジュライが実現されているのである。

以上のことから 4 次元 $N = 2$ 超対称性のある 3 つのコンパクト化弦理論のうち、$\mathrm{IIB}/\widetilde{\mathrm{CY}}_3$ 理論がゲージ理論のモジュライの読みとりにもっとも適していることが分かる。一方、与えられた場の設定の実現を直接見てとるのには、元から摂動論的にゲージ場をもっている $\mathrm{Het}/(\mathrm{K3}\times\mathrm{T}^2)$ が優れ、ついで $\mathrm{IIA}/\mathrm{CY}_3$ 理論となり、$\mathrm{IIB}/\widetilde{\mathrm{CY}}_3$ 理論は 3 つの中でもっとも不向きである。Geometric Engineering のアイディアは、場の設定の実現を直接確認できかつ汎用性のある $\mathrm{IIA}/\mathrm{CY}_3$ 理論でまず模型をつくっておいて、弦理論の双対をとることで対応する $\mathrm{IIB}/\widetilde{\mathrm{CY}}_3$ 理論を得るというものだった。本修士論文の後半でこの過程を、場の設定の実現 (3 章)、$(\mathrm{CY}_3, \widetilde{\mathrm{CY}}_3)$ 対の構成 (4 章)、ゲージ理論のモジュライの読みとり (5 章) と実際に見てゆくことにする。

[3] 3.1 節で正則曲線に巻きつく D2-ブレーンが BPS 状態をとることを述べるが、ここも同じ仕組みである。

第3章　IIA 弦理論によるゲージ理論の実現

3.1　ゲージ対称性の拡大

ヘテロティック理論では１０次元においてすでに非可換ゲージ場が存在するので、弦理論固有の効果を考えなくても低エネルギー超重力理論の範囲内で非可換ゲージ場をとらえることができた。コンパクト化によって $U(1)$ ゲージ場は出るが、超重力理論の範囲では非可換ゲージ場の生成はとらえられなかった。ところで、弦理論の S-双対のひとつに Het/T^4 と IIA/K3 の間の双対性がある [28]。ヘテロティック理論の特定のモジュライ領域では非可換ゲージ対称性が存在することから、IIA 理論側でも対応するモジュライ領域があるとすれば、そこでは非可換ゲージ対称性が存在するはずである。この節では IIA/K3 理論で、K3 の特異点から非可換ゲージ対称性が生まれることを見る。

IIA 弦理論を K3 にコンパクト化するとスーパーチャージが左右それぞれ半分ずつ壊れて (8+8) 個のスーパーチャージのある理論になることが 2.1 節と同様の議論によって分かる。これは 6 次元 $(1,1)$ 超対称理論である。6 次元 $(1,1)$ 超対称理論でゲージ場を含む多重項をゲージ多重項と呼ぶことにする[1]。この多重項は massless であるが、成分数の同じ BPS-massive 多重項に移行することにより自然に質量を入れることもできる。さて、弦理論特有の物理を論ずる上ではブレーンの振舞いを考慮の対象に入れることになる。IIA 弦理論の D2-ブレーンがコンパクト化多様体のなかの 2-サイクルに巻きついてつくる状態に着目すると、この状態が BPS となるような特別なサイクル配位が考えられる。これは超対称 2-サイクル (supersymmetric 2-cycle) と呼ばれ、コンパクト化多様体の言葉では正則曲線として実現される [30]。この BPS 状態を 6 次元時空の粒子として見たとき、その質量は

$$(6\text{次元質量}) = (\text{2-サイクルの面積}) \times (\text{ブレーンの tension(質量面密度)}) \tag{3.1}$$

で表される。つまり BPS 質量は 2-サイクルの面積に比例する。ここでもしサイクルが一点につぶれたとすると、面積が 0 になるので BPS 粒子の質量も 0 になる。このとき理論の低エネルギースペクトラムに新たな massless 粒子が現れることになる。

つぶれた 2-サイクルはコンパクト化多様体の中では特異点としてとらえられる。今考えている K3 においてこのような 2-サイクルがつぶれてできる特異点は単純特異点として知られている[2]。単純特異点は局所的には 2 次元オービフォールドとして $\mathbb{C}^2/G$ の形に表すことができる。ここで G は $SL(2,\mathbb{C})$ の有限部分群で共役を除いて ADE 型[3] に分類されており、これと対応して単純特異点も ADE 分類される。

単純特異点は $\mathbb{C}^3$ 内の代数曲面の特異点として表すこともできる。その方程式は例えば以下のよ

[1] 正確には 6 次元 $(1,1)$ 超対称多重項で、重力場を含まずゲージ場を含むものには R-対称性の表現の違いによって 2 種類がある。[33] では Yang-Mills 多重項、USp(2) Yang-Mills 多重項とそれぞれ呼ばれているが、ここでは前者を考えている。

[2] K3 及び関連する弦理論についての Review として、例えば [51] がある。

[3] ただし「ADE」の名前は後の Lie 代数の Cartan 分類との対応からつけている。

うに書ける:

$$\begin{array}{lcl} A_n(n \geq 1) & : & x^2 + y^2 + z^{n+1} = 0, \\ D_n(n \geq 4) & : & x^2 + y^2 z + z^{n-1} = 0, \\ E_6 & : & x^2 + y^3 + z^4 = 0, \\ E_7 & : & x^2 + y^3 + yz^3 = 0, \\ E_8 & : & x^2 + y^3 + z^5 = 0. \end{array} \tag{3.2}$$

単純特異点の解消の方法としてブローアップによる解消と複素構造の変形 (complex deformation) による解消がある。これらはそれぞれコンパクト化多様体の Kähler モジュライの変更と複素構造モジュライの変更に対応する。ブローアップによる解消のなかで最小特異点解消 (minimal resolution) が、無駄のないものとして本質的である。単純特異点には一意的な最小解消が存在する。ブローアップは例外因子 (exceptional divisor) を加えることで多様体を滑らかにするが、単純特異点の最小解消では ((3.2) の n に対応して) n 個の例外因子がつけ加わる。このときこれらの例外因子のなす交差行列が ADE 型単純 Lie 代数の Cartan 行列に (-1) 倍で一致する。特に、これらの例外因子の自己交差数が -2 であることが分かる。今の場合例外因子は次元 1 の複素曲線であるが、$K3$ の中で自己交差数が -2 の曲線は、ジーナスが 0 で 2 次元球面 S^2 の位相をもつ (すなわち有理曲線である)。Ricci 平坦な計量の入った K3 において、複素構造を、この S^2 が正則曲線となるように選ぶことができる。S^2 の代わりに $\mathbf{P}^1$ と書くと[4] 、この自己交差数 -2 の曲線の正則性が明確に表せる。

ここまで来ると IIA/K3 理論における非可換ゲージ場の生成の仕組みが大雑把に見えてくる。まず今までの議論をまとめておこう。K3 の単純特異点に対しブローアップによる最小解消を行うと、対応する Lie 代数の階数個の $\mathbf{P}^1$ が生じ、それらの交点行列が Lie 代数の Cartan 行列をなす。さらに、正則曲線としてのこれらの $\mathbf{P}^1$ は超対称 2 -サイクルとなるので、D2-ブレーンの巻きつきによる BPS 粒子がある。これらの BPS 粒子は $\mathbf{P}^1$ がブローダウンでつぶれるとき massless となる。

この弦理論特有の massless ゲージ多重項生成に対し、超重力理論のコンパクト化の段階ですでにゲージ多重項の生成があったことを思い出そう。複素多様体のホモロジー類とコホモロジー類の 1 対 1 対応及びコホモロジー類と調和形式の 1 対 1 対応から、独立な 2-サイクルにはそれぞれ対応する調和 2 形式がある。2.2 節で見たように[5]、IIA 超重力理論の R-R 3 形式場は調和 2 形式を通じて 6 次元でゲージ場を出す。(他の超重力場から出るスカラー場、フェルミオン場とともに、このゲージ場は 6 次元 $(1,1)$ ゲージ多重項をなす。)

結局 K3 の単純特異点からは超重力場の次元還元 (dimensional reduction) と D2-ブレーンの巻き付きと、2 通りの仕組みでゲージ多重項が生まれることが分かった。これらはそれぞれ、ゲージ群の生成子の Cartan 部分代数とルートに対応すると考えられる。実際前者は常に massless 場として存在するのに対し、後者は $\mathbf{P}^1$ がつぶれる特別な Kähler モジュライ点で massless になる。これはちょうど一般にはゲージ対称性が $U(1)$ の直積に破れた真空をもつ理論が、Cartan Higgs の真空期待値が 0 になるモジュライ点で非可換ゲージ対称性を回復するのに対応する。

この対応をもう少し精密にいうと、各 $\mathbf{P}^1$ に向きを定めて 1 回巻きついた D2-ブレーンが Lie 代数の単純ルートに対応する。Lie 代数の理論で、全ての正値ルートは単純ルートの和によって構成され、負値ルートはその逆元で与えられた。さらに ADE 型の Lie 代数 (simply laced Lie algebra) では全てのルートの長さが等しく、通常その二乗長は 2 に規格化される。単純ルートの整数和はルート格子を張るが、格子点の中で位置ベクトルの長さが $\sqrt{2}$ のもののみが実際のルートとなる。

[4]本修士論文では単に $\mathbf{P}^1$ と書いて 1 次元複素射影空間 $\mathbf{CP}^1$ を表す。

[5]今は 1 0 次元から 6 次元へのコンパクト化であるが議論は全く同じである。

ADE 型の Lie 代数の Dynkin 図は各単純ルートに対応する頂点が 1 本線で結ばれており、1 本線で隣り合う単純ルートのなす角は 120°、隣り合わない単純ルート同士のなす角は 90° である。長さを $\sqrt{2}$ に保つような単純ルートの和は、必ず Dynkin 図上で連結したものにわたってとられる。これらの事実はブローアップ $\mathbf{P}^1$ と D2-ブレーンの描像では次のように言い表せる。単純ルートの二乗長 2、単純ルートのなす角 120°、90° はそれぞれ $2, 1, 0$ という Cartan 行列の要素の値として表された。これは $\mathbf{P}^1$ の交差行列の $-2, -1, 0$ に対応する。ルート格子空間で長さ $\sqrt{2}$ のベクトルのみがルートとして選ばれるという事実は自己交差数 -2 の曲線のみが正則曲線 = 超対称 2-サイクルとなり、BPS D2-ブレーンを生むということに言い直される。ゲージ基本粒子となる D2-ブレーンは必ず連結した $\mathbf{P}^1$ にまたがって巻きついている。

2-サイクル Γ に巻きついた D2-ブレーンと R-R 3 形式場 C_3 の結合は、μ_2 を D2-ブレーン電荷として

$$i\mu_2 \int_\Gamma C_3 \tag{3.3}$$

と書かれる。この表式を介して、D2-ブレーンゲージ場が次元還元ゲージ場と電荷まで含めて正しく結合することが確かめられる。

3.2 4 次元 $N = 2$ 多重項の実現

IIA 弦理論を潰れる 2-サイクルのある K3 へコンパクト化すると、ゲージ群の随伴表現をなす 6 次元 $(1, 1)$ ベクトル多重項が現れることが分かった。これをもとにして、4 次元 $N = 2$ のゲージベクトル多重項を導き出したい。一番最初に考えられるのは 6 次元時空の残りの 2 次元分をトーラスコンパクト化することである。トーラスコンパクト化ではスーパーチャージが全て残るので 4 次元の超対称性は $N = 4$ となり、ゲージ群の随伴表現を担うのは $N = 4$ のベクトル多重項になる。これを $N = 2$ の言葉で表すと

$$(N = 4 \text{ベクトル多重項}) = (N = 2 \text{ベクトル多重項}) \oplus (N = 2 \text{ハイパー多重項}) \tag{3.4}$$

であり、随伴表現物質場のあるゲージ理論に見える。

物質場がない場合や他の表現の物質場も考えたい。ベクトル多重項 (ゲージ場) はいつでも残しつつハイパー多重項 (随伴表現物質場) がうまく消えるようにするにはどのようなコンパクト化をすればよいだろうか。トーラスを他の 2 次元面でおきかえることがまず考えられる。しかしこの場合単純に K3 と 2 次元面の直積をとったのでは Ricci 平坦な計量が入らず、コンパクト化多様体全体が Calabi-Yau にならない。そこで、直積のかわりに K3 を 2 次元面にうまくファイバーさせることによって Calabi-Yau 多様体を作ることができる。

コンパクト化 Calabi-Yau 多様体としてジーナス g の Riemann 面に K3 をファイバーさせたものを考えると、g 個の随伴表現ハイパー多重項が得られることが知られている [32]。特に $g = 1$、つまりトーラスの場合は随伴表現のハイパー多重項が 1 つで上の場合を再現する。このときゲージ結合定数のベータ関数 $\beta(g) = 0$ である。漸近自由な理論 ($\beta(g) < 0$) を考えているので[6] 、今の場合に使えるのは $g \leq 1$ の Riemann 面である。さらに $N = 4$ の場合を含めない狭い意味での $N = 2$ 超対称ゲージ理論を考えるならば、$g = 0$、すなわち $\mathbf{P}_1$ が底多様体に選ばれる。結局 4 次元 $N = 2$ 超対称ゲージ理論を実現する弦理論の候補として

$$\text{IIA}/(\text{K3 fibered } \mathbf{P}^1) \tag{3.5}$$

[6] $\beta(g) > 0$ の場合、大域的超対称ゲージ理論の枠内では無矛盾な理論が作れない (重力が必然的に入ってくる)。

がよいことが分かる。

6 次元から 4 次元に落とす過程でのコンパクト化多様体におけるファイバー積は、場の理論の観点からは大域的対称性のツイストとしてとらえることができる。6 次元 $(1,1)$ 超対称性の Bosonic 部分は

$$\underbrace{SO(5,1)}_{\text{Lorentz 対称性}} \times \underbrace{USp(2)_L \times USp(2)_R}_{\text{R-対称性}} \tag{3.6}$$

である。Lorentz 群 $SO(5,1)$ の massless 小群 (little group) を $SO(4) \simeq SU(2)_A \times SU(2)_B$ と分解し、6 次元 $(1,1)$ 超対称性の表現を $(SU(2)_A, SU(2)_B; USp(2)_L, USp(2)_R)$ のように表すことにすると、ゲージ多重項およびスーパーチャージは次の表現をとる [33]:

$$\text{gauge multiplet} \quad : \quad (\mathbf{2},\mathbf{2};\mathbf{1},\mathbf{1}) + (\mathbf{1},\mathbf{1};\mathbf{2},\mathbf{2}) + (\mathbf{2},\mathbf{1};\mathbf{1},\mathbf{2}) + (\mathbf{1},\mathbf{2};\mathbf{2},\mathbf{1}), \tag{3.7}$$

$$\text{supercharge } Q_{+\frac{1}{2}} \quad : \quad (\mathbf{2},\mathbf{1};\mathbf{2},\mathbf{1}) + (\mathbf{1},\mathbf{2};\mathbf{1},\mathbf{2}). \tag{3.8}$$

(Q の下付添字は $SO(1,1)$ スピノルとしての重みを表す。$Q_{-\frac{1}{2}}$ は物理状態 (physical state) の生成には寄与しないので、今の状態数カウントの議論では扱わない。) これをもとに 6 次元から 4 次元へのコンパクト化にともなう表現の分解を考えよう。6 次元の Lorentz 群は 4 次元 Lorentz 群と $\mathbf{P}^1$ のホロノミー部分に

$$SO(5,1) \to SO(3,1) \times U(1) \tag{3.9}$$

と分けられる。$SO(2)$ を 4 次元 Lorentz 群の massless 小群として、表現の移行

$$SU(2)_A \times SU(2)_B \to SO(2) \times U(1) \tag{3.10}$$

を行うには次のことを思い出せばよい。$SO(5,1)$ の生成子を L_{ij} $(i,j = 0,\ldots,5)$ とするとき、$SU(2)_A, SU(2)_B$ の生成子 $\{J_A^i\}, \{J_B^i\}$ $(i = 1,2,3)$ は

$$(J_A^1, J_A^2, J_A^3) = \frac{1}{2}(L_{34} + L_{25}, L_{42} + L_{35}, L_{23} + L_{45}), \tag{3.11}$$

$$(J_B^1, J_B^2, J_B^3) = \frac{1}{2}(L_{34} - L_{25}, L_{42} - L_{35}, L_{23} - L_{45}) \tag{3.12}$$

となっていた。表現を J_A^3, J_B^3 の固有状態にとるとき、$SO(2) \times U(1)$ の表現は

$$SO(2) \text{ helicity} : L_{23} = J_A^3 + J_B^3, \tag{3.13}$$

$$U(1) \text{ charge} : L_{45} = J_A^3 - J_B^3 \tag{3.14}$$

で規定される。これより分解後の表現を $(USp(2)_L, USp(2)_R)_{L_{45}}$ のように表すことにすると、6 次元 $(1,1)$ 超対称性のゲージ多重項、スーパーチャージはそれぞれ次のような表現の組に分かれる:

helicity	gauge multiplet	supercharge $Q_{+\frac{1}{2}}$
$+1$	$(\mathbf{1},\mathbf{1})_0$	
$+\frac{1}{2}$	$(\mathbf{1},\mathbf{2})_{+\frac{1}{2}}$ $(\mathbf{2},\mathbf{1})_{-\frac{1}{2}}$	$(\mathbf{2},\mathbf{1})_{+\frac{1}{2}}$ $(\mathbf{1},\mathbf{2})_{-\frac{1}{2}}$
0	$(\mathbf{1},\mathbf{1})_{+1}$ $(\mathbf{2},\mathbf{2})_0$ $(\mathbf{1},\mathbf{1})_{-1}$	
$-\frac{1}{2}$	$(\mathbf{2},\mathbf{1})_{+\frac{1}{2}}$ $(\mathbf{1},\mathbf{2})_{-\frac{1}{2}}$	$(\mathbf{1},\mathbf{2})_{+\frac{1}{2}}$ $(\mathbf{2},\mathbf{1})_{-\frac{1}{2}}$
-1	$(\mathbf{1},\mathbf{1})_0$	

. (3.15)

一方 4 次元 $N = 2$ の超対称性の Bosonic 部分は

$$\underbrace{SO(3,1)}_{\text{Lorentz 対称性}} \times \underbrace{SU(2)_{\mathcal{R}} \times U(1)_{\mathcal{R}}}_{\text{R-対称性}} \tag{3.16}$$

であった。その表現を $(SU(2)_{\mathcal{R}}, U(1)_{\mathcal{R}}$ charge) の形に表すとき、Seiberg-Witten 理論に現れるベクトル多重項、ハイパー多重項、及びスーパーチャージはそれぞれ次のように書ける:

helicity	vector multiplet	hypermultiplet	supercharge $Q_{+\frac{1}{2}}$
$+1$	$(\mathbf{1}, 0)$		
$+\frac{1}{2}$	$(\mathbf{2}, +1)$	$(\mathbf{1}, -1)$ $(\mathbf{1}, -1)$	$(\mathbf{2}, -1)$
0	$(\mathbf{1}, +2)$ $(\mathbf{1}, -2)$	$(\mathbf{2}, \ 0)$ $(\mathbf{2}, \ 0)$	
$-\frac{1}{2}$	$(\mathbf{2}, -1)$	$(\mathbf{1}, +1)$ $(\mathbf{1}, +1)$	$(\mathbf{2}, +1)$
-1	$(\mathbf{1}, 0)$		

. (3.17)

さて、今目指すのは

helicity	6-dim gauge multiplet	6-dim supercharge $Q_{+\frac{1}{2}}$
$+1$	$\mathbf{1}$	
$+\frac{1}{2}$	$\mathbf{4}$	$\mathbf{4}$
0	$\mathbf{6}$	
$-\frac{1}{2}$	$\mathbf{4}$	$\mathbf{4}$
-1	$\mathbf{1}$	

(3.18)

から

helicity	4-dim vector multiplet	4-dim supercharge $Q_{+\frac{1}{2}}$
$+1$	$\mathbf{1}$	
$+\frac{1}{2}$	$\mathbf{2}$	$\mathbf{2}$
0	$\mathbf{2}$	
$-\frac{1}{2}$	$\mathbf{2}$	$\mathbf{2}$
-1	$\mathbf{1}$	

(3.19)

が選び出される仕組みを、場の理論の立場から説明することである。表 (3.15) から直ちに分かることは単純に $\mathbf{P}^1$ のホロノミー群の自明表現 ($U(1)$ charge $= 0$) が残る、としたのでは 4 次元でスーパーチャージがひとつも生き残らないということである。さらに $U(1)$ charge だけを見ている限りでは、(3.18)→(3.19) の次元還元を説明することはできない。

このことから、コンパクト化の際の次元還元を場の理論の立場で説明するには必然的に何らかのツイストが導入されることになる。今、6 次元の R-対称性の表現から 4 次元の R-対称性の表現への移行の仕方はまだ与えられていなかった。そこでもっとも自然に考えられるのは $SO(5,1) \to SO(3,1) \times U(1)$ の分解からくる $U(1)$ に 6 次元の R-対称性が混じり、その中から $\mathbf{P}^1$ のホロノミー群 $U(1)_{hol.}$ が出る、というツイストである。すなわち、

$$U(1) \times USp(2)_L \times USp(2)_R \to U(1)_{hol.} \times (\text{4-dim R-symmetry subgroup}) \tag{3.20}$$

という分解を考える。チャージ L_{45}, J_L^3, J_R^3 を組み合わせて 4 次元で残したい成分についてだけ 0 の値をとるようなチャージを構成できれば次元還元 (3.18)→(3.19) を正しく説明することができる。そのような組合せを探すと

$$J_{hol.} = L_{45} - J_L^3 - J_R^3 \tag{3.21}$$

がよいことが分かる [32]。

3.3 重力の分離

ここまでの考察で Seiberg-Witten 理論の場を IIA/CY_3 理論の中に実現できるようになった。弦理論を用いて Seiberg-Witten 理論を解析する上でもうひとつ重要となるのは、重力場を含めた不要な場を取り除くことである。別の言い方をすると、コンパクト化弦理論のモジュライパラメータの調節によって不要な励起モードの質量を全て高エネルギーにもっていって、理論の低エネルギースペクトラムに Seiberg-Witten 理論の場の励起のみが残る状況をつくる。すなわちコンパクト化弦理論のあるモジュライ領域では、弦理論の低エネルギー理論が Seiberg-Witten の低エネルギー理論そのものになると考える。そのようなモジュライパラメータのとり方をこの節では調べる。

一番簡単な $SU(2)$ 物質場なしの場合について見てみよう。4 次元場の理論としてコンパクト化弦理論を見たとき、その質量スケールには大きく分けて W ボソンの質量 m_W、動力学的 (dynamical) に生成される質量スケール Λ、弦の励起のスケール m_{string} の 3 つがある (m_W は 1 章での Higgs 期待値 a に相当する。後の Seiberg-Witten 理論との同定を考慮して、以下では W ボソンの質量を m_W ではなく a と書くことにする)。a, Λ はゲージ理論の質量スケールであるのに対し、m_{string} は重力効果に関わる質量スケールである。したがってこれらの 3 つの質量スケールの相対関係を m_{string} が他の 2 つに比べて非常に大きくなるように調節してやれば、低いエネルギースケールではゲージ理論の反応だけが見えることになる。この質量スケール調節

$$a, \Lambda \ll m_{string} \tag{3.22}$$

をコンパクト化弦理論のモジュライパラメータの言葉で表したい。

まず W ボソンすなわち Lie 代数のルートに値をとるゲージ場は、ファイバー K3 の特異点のブローアップで生じた $\mathbf{P}^1$ (以下 $\mathbf{P}^1_{fiber}$ と表す) に D2-ブレーンが巻きついて実現されていた。その質量は $\mathbf{P}^1_{fiber}$ の面積に比例し、よって $\mathbf{P}^1_{fiber}$ の Kähler モジュライ t_f に比例する。t_f は無次元量であるから、実際に t_f が表すのは m_{string} を単位にして測った W ボソンの質量である:

$$t_f \sim \frac{a}{m_{string}}. \tag{3.23}$$

一方底多様体の $\mathbf{P}^1$(以下 $\mathbf{P}^1_{base}$ と表す) の大きさが規定するのはゲージ理論の結合定数である。コンパクト化を１０次元から 6 次元、6 次元から 4 次元と二段階に分けて考えるとき、ゲージ場は 6 次元で現れ、さらなる底多様体へのコンパクト化の際の体積積分で結合定数が出る。よって、$\mathbf{P}^1_{base}$ の Kähler モジュライ t_b と結合定数は

$$t_b \propto \frac{1}{g^2(m_{string})} \tag{3.24}$$

と関係づけられる。(1.25) でも見たようにゲージ結合定数は、質量スケールの変化で

$$\frac{8\pi^2}{g^2(m_{string})} = \frac{8\pi^2}{g^2(\Lambda)} + b \ln\left(\frac{m_{string}}{\Lambda}\right) \tag{3.25}$$

のように走る (b はベータ関数の係数)。

さて無次元パラメータ

$$\epsilon \equiv \frac{\Lambda}{m_{string}} \tag{3.26}$$

を導入して $\epsilon \to 0$ で (3.22) のパラメータ調節を表すことにしよう。t_b の規格化を

$$t_b \equiv \frac{8\pi^2}{g^2(m_{string})} \tag{3.27}$$

のように定義すると、(3.25) および (3.23) は

$$t_b = \frac{8\pi^2}{g^2(\Lambda)} - b \ln \epsilon \tag{3.28}$$

$$t_f \sim \epsilon \frac{a}{\Lambda} \tag{3.29}$$

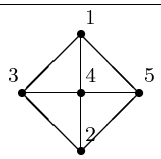
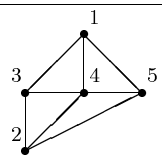
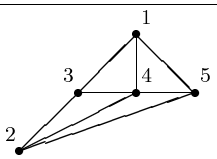
と書ける。この関係式を媒介として、a, Λ や $g(\Lambda)$ を有限に保ちつつ $\epsilon \to 0$ とする極限操作を t_b, t_f に施すことにより、低エネルギー IIA/CY_3 理論は重力場を含まないゲージ理論となる。

第4章　ローカルミラー対称性

4.1　ローカルミラー対の構成

IIA/CY_3 によるゲージ理論の実現で、場の設定は Calabi-Yau の特異点の構造だけによることが分かった。物質場なし $SU(2)$ 理論の場合、ゲージ理論の起源となるのは $\mathbf{P}^1_{base}$ にファイバーされた A_1 型特異点、あるいはブローアップした形で $\mathbf{P}^1_{base}$ にファイバーされた $\mathbf{P}^1_{fiber}$ であった。$\mathbf{P}^1$ に $\mathbf{P}^1$ がファイバーされた複素 2 次元多様体として、Hirzebruch 曲面 $\mathbf{F}_n$ が知られている。n はファイバーの仕方を特徴づける整数である。IIA コンパクト化理論の枠組みでは Hirzebruch 曲面 $\mathbf{F}_n$ が物質場なし $SU(2)$ 理論を表す、と言うことができる。ゲージ理論は Calabi-Yau 多様体の他の構造によらない。というよりも、Calabi-Yau 多様体が他にもつぶれるサイクルを持っているとそこからも massless 場が出て望むゲージ理論にならないので、そのような余計な場はパラメータの極限操作で取り除くのだった。それならば、初めから不要なサイクルが低エネルギー理論に寄与を与えないようにすればよい。そこで $\mathbf{F}_n$ 以外のサイクルを全て無限大の大きさに膨らませて平坦にした CY_3 を、コンパクト化多様体にを用いる。CY_3 と書いたが、これはノンコンパクトな Calabi-Yau 多様体である。このような局所構造だけを残してノンコンパクトにした Calabi-Yau 多様体の間のミラー対称性は、ローカルミラー対称性として最近調べられている [37]。実際にローカルミラー対を構成する手段としては、系統的にミラー Calabi-Yau 対を構成する方法として知られているトーリック幾何の手法が、今の場合にも用いられる。以下では物質場なしの $SU(2)$ 理論の場合を具体例として扱いながら、ローカルミラー対の構成の手順を追うことにする。

物質場なし $SU(2)$ 理論を実現するノンコンパクト Calabi-Yau 多様体として、Hirzebruch 曲面 $\mathbf{F}_n(n=0,1,2)$ [1]に直交束として標準束がのったものを考えよう。これを以下では $K_{\mathbf{F}_n}$ と表すことにする。これらのノンコンパクト Calabi-Yau 多様体は次のトーリックデータで規定される:

	$K_{\mathbf{F}_0}$	$K_{\mathbf{F}_1}$	$K_{\mathbf{F}_2}$
ニュートン多面体 ∇			
トーリックデータ $(i=0,\ldots,4)$	$\nu^{(i)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\nu^{(i)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\nu^{(i)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
チャージベクトル	$l^{(b)} = (1,1,0,-2,0)$ $l^{(f)} = (0,0,1,-2,1)$	$l^{(b)} = (1,1,-1,-1,0)$ $l^{(f)} = (0,0,1,-2,1)$	$l^{(b)} = (1,1,-2,0,0)$ $l^{(f)} = (0,0,1,-2,1)$

[1]トーリック幾何によるミラー対の構成法では reflexive polyhedron(内部に格子点が 1 つだけある凸多面体) の対 $(\triangle,\nabla)$ からミラー対が構成された [36]。今の場合 $n=0,1,2$ の場合のみ、$\mathbf{F}_n$ に対応する凸多面体として 2 次元の reflexive polyhedron をとることができ、ミラー対の構成が可能となる。

チャージベクトルは $\bar{\nu}^{(i)} = (1, \nu^{(i)})$ に対して線形関係

$$\sum_{i=0}^{4} l_i^{(k)} \bar{\nu}^{(i)} = 0 \tag{4.1}$$

を与えるベクトルで独立なものを選ぶ。

今、IIA 理論をコンパクト化する多様体を X、IIB 理論をコンパクト化する多様体を $\tilde{X}$ とし、それぞれ A モデル Calabi-Yau 多様体、B モデル Calabi-Yau 多様体と呼ぶことにしよう。$\triangledown$ のトーリックデータから、商空間の描像で A モデルローカル Calabi-Yau が、代数曲面の描像で B モデルローカル Calabi-Yau が、それぞれ構成される[2]。それぞれの描像におけるトーリックデータの対応物は次のようになっている:

	X	$\tilde{X}$
ローカル Calabi-Yau 多様体の実現法	商空間 $(\mathbb{C}^s - U)/\mathbb{C}^{\star r}$	$\mathbb{C}^d$ 内の超曲面 $P_{\tilde{X}} = 0$
トーリックデータ ν_i ($\triangledown$ 内の有効な格子点)	同次座標 x_i 因子 $(x_i = 0)$	アフィン座標 Y_i $P_{\tilde{X}}$ を構成する単項式
チャージベクトル $l^{(k)}$ (線形関係式)	$\mathbb{C}^{\star r}$ 作用	複素構造モジュライ z_k Picard-Fuchs 方程式

$(i = 1, \ldots, s\ ;\ k = 1, \ldots, r \mid r = s - d)$

ただし、d : $\triangledown$ が置かれている格子空間の次元、

s : 有効な格子点 [3] の数、とする。 (4.2)

これに従い、前頁で与えられたトーリックデータから $(K_{\mathbf{F}_n}, \tilde{K}_{\mathbf{F}_n})$ のミラー対を構成する。

最初に前頁のトーリックデータが、A モデル多様体として $K_{\mathbf{F}_n}$ を与えることを確かめよう。商空間によるローカル Calabi-Yau の実現では、まず各頂点 $\nu^{(i)}$ に同次座標 x_i を対応させる。チャージベクトル $l^{(k)} \equiv (l_1^{(k)}, \ldots, l_k^{(k)})$ が、これらの座標で張られる空間に $\mathbb{C}^\star$ 作用

$$x_i \to x_i {\lambda_k}^{l_i^{(k)}} \tag{4.3}$$

による同一視を入れる。今の場合 $\lambda_b \equiv \mu, \lambda_f \equiv \lambda$ と書いて、各 $K_{\mathbf{F}_n}$ のチャージベクトルから次のような同一視が書き下せる:

$$K_{\mathbf{F}_0} : (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \to (\mu x_1, \mu x_2, \quad \lambda x_3, \mu^{-2}\lambda^{-2} x_4, \lambda x_5), \tag{4.4}$$

$$K_{\mathbf{F}_1} : (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \to (\mu x_1, \mu x_2, \mu^{-1}\lambda x_3, \mu^{-1}\lambda^{-2} x_4, \lambda x_5), \tag{4.5}$$

$$K_{\mathbf{F}_2} : (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \to (\mu x_1, \mu x_2, \mu^{-2}\lambda x_3, \quad \mu\lambda^{-2} x_4, \lambda x_5). \tag{4.6}$$

これらが $K_{\mathbf{F}_n}$ を表すことは次のようにして見ることができる。$x_4 = x_3 = x_5 = 0$ と制限した部分空間を見ると、これは x_1, x_2 で張られる 2 次元空間において、$(x_1 : x_2)$ を μ の作用で同一視したものであり、$\mathbf{P}^1$ を表す。また $x_4 = x_1 = x_2 = 0$ を考えると、今度は λ 作用で $(\mu^{-n} x_3 : x_5)$ を同一視しておりやはり $\mathbf{P}^1$ となるが、こちらは μ の値によって同一視の仕方が変わってくる。したがって $x_4 = x_3 = x_5 = 0, x_4 = x_1 = x_2 = 0$ はそれぞれ $\mathbf{P}^1_{base}, \mathbf{P}^1_{fiber}$ に対応することが分かる。これらを総合した因子 $x_4 = 0$ として Hirzebruch 曲面 $\mathbf{F}_n$ が実現される。同次座標 x_4 によって張られる 1 次元空間は $\mathbf{F}_n$ の直交束となる。よって全体で $K_{\mathbf{F}_n}$ が表されることが確かめられる。

[2] $\triangledown$ と対をなす $\triangle$ のトーリックデータからは、逆の描像で $X, \tilde{X}$ が構成できる。

[3] $\triangledown$ の余次元 1 以外の境界上、及び内部にある格子点。

次にトーリックデータからミラー対 $\tilde{K}_{\mathbf{F}_n}$ を構成しよう。B モデル側では各頂点 $\nu^{(i)}$ にアフィン座標 Y_i を対応させる。ただしこれらのアフィン座標は独立でなく、拘束

$$\prod_{l_i^{(k)}>0} Y_i^{l_i^{(k)}} = \prod_{l_i^{(k)}<0} Y_i^{-l_i^{(k)}} \tag{4.7}$$

がかかっている。ミラー多様体は、Laurent 多項式の零点として定義される代数曲面

$$P_{\tilde{X}} \equiv \sum_i a_i Y_i = 0 \tag{4.8}$$

によって表される。具体的に $\tilde{K}_{\mathbf{F}_n}$ についての拘束の式 (4.7) は次のように書ける:

$$\tilde{K}_{\mathbf{F}_0}: \begin{cases} Y_1Y_2 = {Y_4}^2, \\ Y_3Y_5 = {Y_4}^2, \end{cases} \quad \tilde{K}_{\mathbf{F}_1}: \begin{cases} Y_1Y_2 = Y_3Y_4, \\ Y_3Y_5 = {Y_4}^2, \end{cases} \quad \tilde{K}_{\mathbf{F}_2}: \begin{cases} Y_1Y_2 = {Y_3}^2, \\ Y_3Y_5 = {Y_4}^2, \end{cases} \tag{4.9}$$

$Y_3 = s, Y_1 = sz, Y_4 = st$ とおいてこれらを解けば

$$Y = \left(sz, \frac{st^2}{z}, s, st, st^2\right), \quad Y = \left(sz, \frac{st}{z}, s, st, st^2\right), \quad Y = \left(sz, \frac{s}{z}, s, st, st^2\right) \tag{4.10}$$

と表される。$s = 1$ となるよう多項式全体の規格化を固定すると、代数曲面 (4.8) は次のようになる:

$$\tilde{K}_{\mathbf{F}_0} \quad : \quad a_1 z + a_2 \frac{t^2}{z} + a_3 + a_4 t + a_5 t^2 = 0, \tag{4.11}$$

$$\tilde{K}_{\mathbf{F}_1} \quad : \quad a_1 z + a_2 \frac{t}{z} + a_3 + a_4 t + a_5 t^2 = 0, \tag{4.12}$$

$$\tilde{K}_{\mathbf{F}_2} \quad : \quad a_1 z + a_2 \frac{1}{z} + a_3 + a_4 t + a_5 t^2 = 0. \tag{4.13}$$

さて、W ボソンは IIA 理論では D2-ブレーンで実現されていた。IIA 理論と IIB 理論の T-双対で、この IIA 側 D2-ブレーンには IIB 側の D3-ブレーンが対応する。これにともなって W ボソンの質量は、IIA 側では 2-サイクルの面積によって表されていたのが、IIB 側では 3-サイクルの体積によって表されることになる。コンパクト化 Calabi-Yau 多様体のミラー対応として考えるならば、質量の等値性は A モデル多様体の Kähler モジュライと B モデル多様体の中間次元周期積分とを同一視するミラー写像を定めることで表現される。ここでもうひとこと踏み込んでおくと、ミラー写像は量子補正された Kähler モジュライ[4] の値と B モデル周期積分の値との間に定義されるということに注意する。2.3 節で見たように Kähler モジュライは世界面理論の量子補正を受けるのに対し複素構造モジュライは量子補正を受けなかった。言いかえると複素構造モジュライは初めから量子論的な量となっている。物理量の具体的な値は古典量ではなく量子量でのみ意味をもつ (場の理論の言葉で言うならば、bare mass ではなく physical mass が意味のある値をもつ) ので、A モデル Kähler モジュライの値と B モデル複素構造モジュライの値の間の写像も量子論的な量で定義されるのである。

W ボソンの質量を用いて説明したが、もちろん上のことは $\mathbf{P}^1_{fiber}$ の Kähler モジュライについてだけでなく、他の Kähler モジュライについても成り立つことである。結局 B モデル側では、中間次元積分を物理量の担い手として追って行くことになる。

[4] 量子補正を受ける前の Kähler モジュライと受けた後の Kähler モジュライを区別するとき、前者を代数的 Kähler モジュライ、後者をシグマモデル Kähler モジュライと呼ぶ言い方がしばしばなされる。

代数曲面として表された Calabi-Yau 多様体は、各アフィン座標変数に適当な重みを割りふることで、重みつき射影空間の中に超曲面の形で埋め込むことができる。このように Calabi-Yau 多様体を表すと、正則 3 形式が明示的な形で与えられ、中間次元積分はこの正則 3 形式と (4.8) の Laurent 多項式を用いて表すことができる。この積分表示から、B モデル Calabi-Yau 多様体の中間次元周期積分は、GKZ(Gelfand-Kapranov-Zelevinsskij) 系と呼ばれる次の微分方程式を満たすことが分かる:

$$\prod_{l_i^{(k)}>0}\left(\frac{\partial}{\partial a_i}\right)^{l_i^{(k)}} = \prod_{l_i^{(k)}<0}\left(\frac{\partial}{\partial a_i}\right)^{-l_i^{(k)}}. \tag{4.14}$$

アフィン座標の規格化を変えると曲面の式 (4.8) の中で a_i の値は変化してしまうので、a_i はこのままではよい変数ではない。しかしながらチャージベクトルをもとに

$$z_k = \prod_i a_i^{l_i^{(k)}} \tag{4.15}$$

という組み合わせを考えることで、アフィン座標の再規格化で不変な複素モジュライ変数をつくることができる。

上の微分方程式をこれらの変数を用いた形に書き直そう。対数微分 $\theta_{a_i} = a_i\frac{\partial}{\partial a_i}$ は

$$\theta_{a_i} = \sum_k l_i^{(k)}\theta_{z_k} \tag{4.16}$$

と置き換えられる。(4.14) に左から $(\prod_{l_i^{(k)}>0} a_i^{l_i^{(k)}})$ をかけたものを z_k 変数で書き直すことにより、各 $\tilde{K}_{\mathbf{F}_n}$ の周期積分が満たす方程式として次の Picard-Fuchs 方程式が得られる:

$$\tilde{K}_{\mathbf{F}_0}: \begin{cases} \mathcal{L}_b &= {\theta_{z_b}}^2 - z_b(2\theta_{z_b}+2\theta_{z_f})(2\theta_{z_b}+2\theta_{z_f}+1) = 0, \\ \mathcal{L}_f &= {\theta_{z_f}}^2 - z_f(2\theta_{z_b}+2\theta_{z_f})(2\theta_{z_b}+2\theta_{z_f}+1) = 0, \end{cases} \tag{4.17}$$

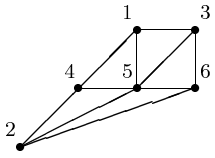
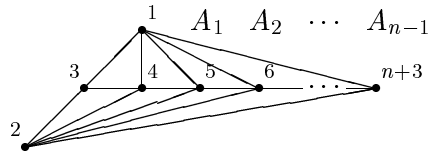
$$\tilde{K}_{\mathbf{F}_1}: \begin{cases} \mathcal{L}_b &= {\theta_{z_b}}^2 - z_b(\theta_{z_b}+2\theta_{z_f})(\theta_{z_b}-\theta_{z_f}) = 0, \\ \mathcal{L}_f &= \theta_{z_f}(-\theta_{z_b}+\theta_{z_f}) - z_f(\theta_{z_b}+2\theta_{z_f})(\theta_{z_b}+2\theta_{z_f}+1) = 0, \end{cases} \tag{4.18}$$

$$\tilde{K}_{\mathbf{F}_2}: \begin{cases} \mathcal{L}_b &= {\theta_{z_b}}^2 - z_b(2\theta_{z_b}-\theta_{z_f})(2\theta_{z_b}-\theta_{z_f}+1) = 0, \\ \mathcal{L}_f &= \theta_{z_f}(-2\theta_{z_b}+\theta_{z_f}) - z_f 2\theta_{z_f}(2\theta_{z_f}+1) = 0. \end{cases} \tag{4.19}$$

一般の A_n 型ゲージ群

上で見たようなローカルミラー対の構成は、ゲージ群が $\prod_i SU(n_i)$、物質場表現が基本表現及び双基本表現 (bifundamental representation) という一般の場合について拡張されている [25]。ここでは簡単な例として基本表現物質場が 1 つの $SU(2)$ 理論、物質場なし $SU(n)$ 理論の場合について、B モデル多様体を求めておこう [24]。

これらの設定を提供するトーリックデータは次で与えられる:

	$SU(2)\ with\ N_f = 1$	$SU(n)$
ニュートン多面体 ∇		
チャージベクトル	$l^{(b)} = (1,1,0,-2,0,0)$ $l^{(e)} = (0,1,-1,0,-1,1)$ $l^{(f-e)} = (0,-1,1,1,-1,0)$	$l^{(b)} = (1,1,-2,0,0,0,\ldots,0,0,0)$ $l^{(1)} = (0,0,1,-2,1,0,0,\ldots,0,0,0)$ $l^{(2)} = (0,0,0,1,-2,1,0,\ldots,0,0,0)$ $\vdots$ $\vdots$ $l^{(n-2)} = (0,0,0,0,0,0,0,\ldots,1,-2,1)$ $l^{(n-1)} = (0,0,0,0,0,0,0,\ldots,0,1,-2,1)$

.

$SU(2)\ with\ N_f = 1$ の場合について、拘束条件の式 (4.7) は

$$\begin{cases} Y_1 Y_2 = {Y_4}^2, \\ Y_2 Y_6 = Y_3 Y_5, \\ Y_3 Y_4 = Y_2 Y_5 \end{cases} \tag{4.20}$$

となる。$Y_4 = s, Y_1 = sz, Y_5 = st$ とおいてこれを解けば

$$Y = (sz, \frac{s}{z}, \frac{st}{z}, s, st, st^2) \tag{4.21}$$

と表され、$s = 1$ として定義多項式

$$a_1 z + a_2 \frac{1}{z} + a_3 \frac{t}{z} + a_4 + a_5 t + a_6 t^2 = 0 \tag{4.22}$$

を得る。

$SU(n)$ について、拘束条件の式 (4.7) は

$$\begin{cases} Y_1 Y_2 = {Y_3}^2, \\ Y_{i-1} Y_{i+1} = Y_i \quad (i = 4, 5, \ldots, n+2) \end{cases} \tag{4.23}$$

と書ける。$Y_3 = s, Y_1 = sz, Y_4 = st$ とおいてこれを解くと

$$Y = (sz, \frac{s}{z}, s, st, st^2, \ldots, st^n) \tag{4.24}$$

となる。$s = 1$ と規格化を固定すれば、定義方程式として

$$a_1 z + a_2 \frac{1}{z} + a_3 + a_4 t + a_5 t^2 + \cdots + a_{n+3} t^n = 0 \tag{4.25}$$

を得る。

4.2 ローカル Calabi-Yau 多様体の幾何学的不変量

Calabi-Yau 多様体のモジュライ空間は特殊 Kähler 構造をもち、プリポテンシャルによってその構造が完全に規定される。今、A モデル Calabi-Yau 多様体の Kähler モジュライ空間を考えそのプリポテンシャルを $\mathcal{F}(t_i)$ と書こう。$\mathcal{F}$ は Kähler モジュライ t_i の正則関数であるが、その 1 階微分 $\partial_{t_i}\mathcal{F}$ は t_i と共にミラー写像で B モデル Calabi-Yau 多様体の中間次元周期積分に写る。前節で B モデル周期積分の満たす微分方程式が、複素モジュライ z_k を変数とする Picard-Fuchs 方程式として与えられていた。この方程式の解を正しく $\partial_{t_i}\mathcal{F}, t_i$ に同定する (すなわちミラー写像を定める) ことによって、z_k を媒介変数としてプリポテンシャル $\mathcal{F}(t_i)$ の形を求めることができる。この節では $\tilde{K}_{\mathbf{F}_0}$ を例にとり、実際に Picard-Fuchs 方程式の解からプリポテンシャルの展開係数が定まる様子を見る。

$\tilde{K}_{\mathbf{F}_0}$ の Picard-Fuchs 方程式 (4.17) は級数解を仮定して逐次的に解くことにより[5]、4 つの独立解として以下を得る:

$$1, \tag{4.26}$$

$$\omega_b = \ln z_b + {\sum_{n,m}}' \frac{2(2n+2m-1)!}{n!^2 m!^2} {z_b}^n {z_f}^m, \tag{4.27}$$

$$\omega_f = \ln z_f + {\sum_{n,m}}' \frac{2(2n+2m-1)!}{n!^2 m!^2} {z_b}^n {z_f}^m, \tag{4.28}$$

$$\begin{aligned}\Omega &= \ln z_b \ln z_f + (\ln z_b + \ln z_f) {\sum_{n,m}}' \frac{2(2n+2m-1)!}{n!^2 m!^2} {z_b}^n {z_f}^m \\ &\quad + {\sum_{n,m}}' \left(\sum_{k=n+1}^{2n+2m-1} \frac{1}{k} + \sum_{k=m+1}^{2n+2m-1} \frac{1}{k} \right) \frac{4(2n+2m-1)!}{n!^2 m!^2} {z_b}^n {z_f}^m.\end{aligned} \tag{4.29}$$

ただし ${\sum}'_{n,m}$ は $\{(n,m) \mid n,m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\} \setminus \{(0,0)\}$ にわたってとる和である。

$K_{\mathbf{F}_0}$ の Kähler モジュライ変数として

$$q_b = e^{-t_b},\ q_f = e^{-t_f} \tag{4.30}$$

の指数形がしばしば用いられる。$t_b, t_f \to \infty$ の極限、すなわち Calabi-Yau の全ての 2-サイクルが広がったモジュライ点 (large radius limit) では世界面理論の量子補正がなくなるので、$K_{\mathbf{F}_0}$ の代数的 Kähler モジュライ変数と $\tilde{K}_{\mathbf{F}_0}$ の複素構造モジュライ変数との間の値の対応がつけられる。ミラー写像は、この点で q_b, q_f と z_b, z_f が一致するように定義する。すなわち対数解 ω_b, ω_f を

$$t_b = -\omega_b,\ t_f = -\omega_f \tag{4.31}$$

と同定する。これによって $K_{\mathbf{F}_0}$ の Kähler モジュライ空間と $\tilde{K}_{\mathbf{F}_0}$ の複素構造モジュライ空間との間の写像が定まる。具体的には A モデル変数 t_b, t_f が B モデル変数 z_b, z_f の関数として表される。これを逆に解けば

$$z_b = q_b - 2{q_b}^2 - 2q_b q_f + O({q_k}^3), \tag{4.32}$$

$$z_f = q_f - 2q_b q_f - 2{q_f}^2 + O({q_k}^3) \tag{4.33}$$

[5] 具体的な計算を追うことは本修士論文の主旨から外れるため、詳細は補遺 A.3 に回した。

と、B モデル変数を A モデル変数の関数として表すことができる。これを (4.29) に代入することにより、二重対数解 Ω が t_b, t_f の関数として表される:

$$\Omega = t_b t_f + 4q_b + 4q_f + {q_b}^2 + 16 q_b q_f + {q_f}^2 + O({q_k}^3). \tag{4.34}$$

二重対数解はプリポテンシャルの 1 階微分に対応するものであり、一般形

$$\Omega = t_b t_f + \left(2\partial_{t_b} + 2\partial_{t_f}\right) {\sum_{n,m}}' d_{n,m} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{{q_b}^{nk} {q_f}^{mk}}{k^3} \tag{4.35}$$

にまとめられる。$d_{n,m}$ は、$\mathbf{P}^1_{base}$ に n 回、$\mathbf{P}^1_{fiber}$ に m 回巻きつく有理正則曲線が何通りあるかを表す位相不変量である。k の和は多重被覆 (multiple cover) の足し上げに対応している。(4.34) と (4.35) から、具体的に $d_{n,m}$ の値として以下が得られる:

$n\rightarrow$ $m\downarrow$	0	1	2	3	4	$\cdots$
0		-2	0	0	0	
1	-2	-4	-6	-8	-10	
2	0	-6	-32	-110	-288	
3	0	-8	-110	-756	-3556	
4	0	-10	-288	-3556	-27264	
5	0	-12	-644	-13072	-153324	
6	0	-14	-1280	-40338	-690400	
7	0	-16	-2340	-109120	-2627482	
8	0	-18	-4000	-266266	-8757888	
9	0	-20	-6490	-597888	-26216372	
10	0	-22	-10080	-1253538	-71783040	
11	0	-24	-15106	-2481024	-182298480	
12	0	-26	-21952	-4675050	-434054144	
13	0	-28	-31080	-8443424	-977304976	
14	0	-30	-43008	-14695208	-2095334784	
$\vdots$						
γ_n		-2	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{1890}$	$-\frac{113}{119750400}$	

(γ_n は後に $d_{n,m} \sim \gamma_n m^{4n-3}$ $(m \to \infty)$ で定義される [6] 。) . (4.36)

$d_{n,m}$ は言ってみればプリポテンシャルの展開係数である。プリポテンシャルを 3 階微分 (湯川結合) の形で書くと

$$\partial_{t_i}\partial_{t_j}\partial_{t_k}\mathcal{F} = J_i \cdot J_j \cdot J_k + \sum_{n_i,n_j,n_k=0}^{\infty} n_i n_j n_k d_{n,m} \frac{{q_b}^n {q_f}^m}{1 - {q_b}^n {q_f}^m} \tag{4.37}$$

のように $d_{n,m}$ は現れる。(i,j,k は具体的には b, f の添字をとる。また $n_b \equiv n, n_f \equiv m$ と書いている。) J_i は $\mathbf{F}_0$ の Kähler 類で、第 1 項の三重交差 $J_i \cdot J_j \cdot J_k$ は湯川結合の古典項である。第 2 項が世界面インスタントンによる量子補正を表す。$d_{n,m}$ の値が全て分かれば、$K_{\mathbf{F}_0}$ の量子 Kähler モジュライ空間の構造が完全に分かることになる。

[6] ただし表の γ_n の実際の値は (5.30) の関係式から求めたものである。

第5章　ゲージ理論のモジュライ空間

IIB/$\widetilde{\mathrm{CY}_3}$ 理論においてはコンパクト化多様体 $\widetilde{\mathrm{CY}_3}$ の複素構造モジュライ空間 $\mathcal{M}^{\widetilde{\mathrm{CY}_3}}_{\mathrm{complex}}$ がそのままベクトル多重項のモジュライ空間 $\mathcal{M}^{\mathrm{string}}_V$ を表した。そして重力を分離する極限をとれば $\widetilde{\mathrm{CY}_3}$ の複素構造モジュライ空間から Seiberg-Witten 理論のモジュライ空間 $\mathcal{M}^{\mathrm{SW}}_V$ が読みとれる。モジュライ空間の構造を一番直接的に記述するのはプリポテンシャルである。プリポテンシャルは A モデル変数、つまり物理量で書かれており、重力分離の極限が明示的にとれるという利点がある。4.2 節では具体的に $K_{\mathbf{F}_0}$ の場合についてプリポテンシャルを求めた。しかしながらゲージ群の階数が上がりモジュライ空間の自由度が増えると、プリポテンシャルを具体的に求めることは (多変数偏微分方程式を解かなければならないので) 実際上困難となる。そこで一般のゲージ群の場合には、Seiberg-Witten 理論のモジュライ空間 $\mathcal{M}^{\mathrm{SW}}_V$ を、Seiberg-Witten 曲線[1]の複素モジュライ空間 $\mathcal{M}^{\mathrm{SWcurve}}_{\mathrm{complex}}$ で置きかえることで満足することになる。この場合もコンパクト化ローカル Calabi-Yau 多様体の定義方程式に重力分離の極限操作を施すことで、Seiberg-Witten 曲線が導出できる。ただし、重力分離の極限は A モデル変数について与えられていたのに対し、ローカル Calabi-Yau 多様体及び Seiberg-Witten 曲線の複素構造モジュライを記述しているのは B モデル変数となっている。したがって Seiberg-Witten 曲線の同定では、B モデル変数についての重力分離の極限を A モデル変数の重力分離極限とミラー写像の概形から見積もる必要がある。

5.1　プリポテンシャルの同定

この節では一番簡単な物質場なし $SU(2)$ 理論の場合について、コンパクト化弦理論から Seiberg-Witten 理論の厳密解が得られることを、プリポテンシャルを同定によって確かめる。物質場なし $SU(2)$ Seiberg-Witten 理論を提供するコンパクト化弦理論として IIB/$\tilde{K}_{\mathbf{F}_0}$ を考えよう。この弦理論の Coulomb ブランチは 4.2 節で扱ったプリポテンシャルで完全に規定される。一方 4 次元 $N = 2$ 超対称ゲージ理論の Coulomb ブランチ $\mathcal{M}^{\mathrm{SW}}_V$ の構造もプリポテンシャルによって完全に表されていた。Kähler ポテンシャルがプリポテンシャルによって表される Kähler 多様体は、特殊 Kähler 多様体として知られている。$\mathcal{M}^{\mathrm{string}}_V$ と $\mathcal{M}^{\mathrm{SW}}_V$ がともに特殊 Kähler 構造をもつことより、$\mathcal{M}^{\mathrm{string}}_V$ の中から $\mathcal{M}^{\mathrm{SW}}_V$ を読み出す作業が、プリポテンシャルという正則関数の取り扱いに帰着されるのである。

ただし $\mathcal{M}^{\mathrm{string}}_V$ は超重力理論、すなわち局所超対称性のある理論のモジュライ空間であるのに対し、$\mathcal{M}^{\mathrm{SW}}_V$ は大域的超対称理論のモジュライ空間であり、両者の特殊 Kähler 構造には次のような違いがある。超重力理論の Kähler ポテンシャル、プリポテンシャルをそれぞれ $\mathcal{K}_G(a^i, \bar{a}^i)$、$\mathcal{F}_G(a^i)$ と表すことにすると、$\mathcal{K}_G$ は $\mathcal{F}_G$ によって

$$\mathcal{K}_G = -\ln\left(2i(\mathcal{F}_G - \bar{\mathcal{F}}_G) + \frac{i}{2}\sum_i\left(\frac{\partial\mathcal{F}_G}{\partial a^i}\bar{a}^i - \frac{\partial\bar{\mathcal{F}}_G}{\partial\bar{a}^i}a^i\right)\right) \tag{5.1}$$

[1] もしくは Seiberg-Witten geometry。

のように表される。これは local special Kähler 構造と呼ばれる。一方 $\mathcal{M}_V^{\rm SW}$ では Kähler ポテンシャル $\mathcal{K}(a^i, \bar{a}^i)$ はプリポテンシャル $\mathcal{F}(a^i)$ によって

$$\mathcal{K} = -\frac{i}{2}\sum_i \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial a^i}\bar{a}^i - \frac{\partial \bar{\mathcal{F}}}{\partial \bar{a^i}}a^i\right) \tag{5.2}$$

と表された。これは rigid special Kähler 構造と呼ばれる。

重力分離の極限操作には、local special Kähler 構造から rigid special Kähler 構造への Coulomb ブランチの構造の変化がともなうことになる。この移行の仕組みは次のように理解できる。プリポテンシャル $\mathcal{F}_G$ と $\mathcal{F}$ が

$$\mathcal{F}_G = -\frac{i}{4\epsilon^2} + \mathcal{F} \tag{5.3}$$

で関係づけられていたとすると、$\epsilon \to 0$ とするとき

$$\mathcal{K}_G = \ln \epsilon^2 + \epsilon^2 \mathcal{K} + O(\epsilon^4) \tag{5.4}$$

であることが分かる。右辺第 1 項はモジュライ変数 a^i によらない定数であり、Kähler ポテンシャルを微分して計量を得る過程で落ちる項である。よって第 2 項が $\epsilon \to 0$ のもとで有効な項として残る。このことから、重力分離の極限操作で $\mathcal{M}_V^{\rm string}$ の構造から $\mathcal{M}_V^{\rm SW}$ の構造を抽出する際、$\tilde{K}_{\mathbf{F}_0}$ のプリポテンシャルをそのまま Seiberg-Witten 理論のプリポテンシャルに読み替えればよいことが分かる。ただし、$\tilde{K}_{\mathbf{F}_0}$ のプリポテンシャルは q_b, q_f の 2 変数関数であったのに対し、Seiberg-Witten 理論のプリポテンシャルは a の 1 変数関数であり、関数としては全く異なる。ここでこれらの変数間には 3.3 節で調べた対応関係がついていた。物質場なしの $SU(2)$ ゲージ理論で (3.28)(3.29) の重力分離の極限は、$b = 4$ を入れて

$$q_b = e^{-t_b} \sim \epsilon^4, \tag{5.5}$$

$$q_f = e^{-t_f} \sim 1 - \epsilon\frac{a}{\Lambda} \tag{5.6}$$

と表される。重力分離の極限操作とは今の場合、これらの対応関係を用いて 2 変数関数 $\mathcal{F}(q_f, q_b)$ から 1 変数関数 $\mathcal{F}(a)$ を引き出す操作となる。

実際の同定はプリポテンシャルの 2 階微分 (ゲージ結合定数) について行うことにしよう。湯川結合 (4.37) を t_f の 3 階微分の場合について表すと

$$\partial_{t_f}{}^3\mathcal{F} = \sum_{n,m=0}^{\infty} m^3 d_{n,m}\frac{{q_b}^n {q_f}^m}{1 - {q_b}^n {q_f}^m} \tag{5.7}$$

となる。t_f について積分した形では

$$\partial_{t_f}{}^2\mathcal{F} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m,k=1}^{\infty} d_{n,m} m^2 \frac{{q_b}^{nk}{q_f}^{mk}}{k} \tag{5.8}$$

と書ける。これを

$$\equiv \sum_{n=0}^{\infty} \partial_{t_f}{}^2\mathcal{F}^{(n)} \tag{5.9}$$

と、n の和の各項毎に分けて表すことにする。

$n=0$ の項

$$\partial_{t_f}{}^2\mathcal{F}^{(0)} = \sum_{m,k=1}^{\infty} d_{0,m} m^2 \frac{{q_f}^{mk}}{k} \tag{5.10}$$

をまず調べよう。表 (4.36) から、インスタントン数 $d_{0,m}$ は

$$\begin{cases} d_{0,1} = -2, \\ d_{0,m} = 0 \quad for \quad m > 1 \end{cases} \tag{5.11}$$

と $m=1$ のみ値をもつことが分かる。インスタントンは世界面が有理正則曲線に巻きつくものだった。今は $\mathbf{P}^1_{base}$ への巻きつきがない $(n=0)$ としているのでインスタントンの巻きつき先は $\mathbf{P}^1_{fiber}$ のみを考えている。(5.11) は、$\mathbf{P}^1_{fiber}$ への巻きつきのうち有理正則なものは 1 回巻きのみであることを表す。$d_{0,1}$ の値は符号の違いを除いて $\mathbf{P}^1$ の Euler 数になっている[2]。

さて (5.11) を用いると (5.10) は

$$\partial_{t_f}{}^2\mathcal{F}^{(0)} = -2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{{q_f}^k}{k} \tag{5.12}$$

$$= 2\ln(1-q_f) \tag{5.13}$$

となる。重力分離の極限 (5.6) を考えると

$$\partial_{t_f}{}^2\mathcal{F}^{(0)} = 2\ln\frac{a}{\Lambda} + const. + O(\epsilon) \tag{5.14}$$

となり、これはゲージ理論の結合定数の one-loop 補正項であることが分かる。

次に一般の n の項

$$\partial_{t_f}{}^2\mathcal{F}^{(n)} = \sum_{m,k=1}^{\infty} d_{n,m} m^2 \frac{{q_b}^{nk}{q_f}^{mk}}{k} \tag{5.15}$$

を見る。$n \neq 0$ の場合重力分離の極限 (5.5) では q_b の最低次の項のみが有効となる。従って k の和については初項のみ残して

$$\partial_{t_f}{}^2\mathcal{F}^{(n)} \sim {q_b}^n \sum_{m=1}^{\infty} d_{n,m} m^2 {q_f}^m \tag{5.16}$$

としたものを取り扱うことにしよう。$q_f \to 1$ の極限では上の和の漸近的な増大の仕方のみが有効な情報である。これを引き出すために m の増加にともなう $d_{n,m}$ のふるまいを

$$d_{n,m} \sim \gamma_n m^{\alpha_n} \tag{5.17}$$

の形で仮定して、(5.16) を評価する。和 $\sum_m m^k x^m$ の漸近増大のふるまいは、恒等式

$$\sum_{m=1}^{\infty} \underbrace{m(m+1)\ldots(m+k-1)}_{k\text{ 個}} x^m = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} \tag{5.18}$$

[2] 負号は $(-1)^{\dim_{\mathbb{C}} K_{\mathbf{F}_0}}$ に由来する。

で評価できる。これを用いて

$$\partial_{t_f}{}^2\mathcal{F}^{(n)} \sim \gamma_n {q_b}^n \sum_m m^{2+\alpha_n} {q_f}^m \tag{5.19}$$

$$\sim \gamma_n {q_b}^n \frac{(2+\alpha_n)!}{(1-q_f)^{3+\alpha_n}} \tag{5.20}$$

を得る。重力分離の極限 (5.6)、(5.5) を入れると

$$\partial_{t_f}{}^2\mathcal{F}^{(n)} \sim \gamma_n (\epsilon^4)^n \frac{(2+\alpha_n)!}{(\epsilon a/\Lambda)^{3+\alpha_n}} \tag{5.21}$$

と書かれる。ここで $\epsilon \to 0$ の極限をとるが、

$$\alpha_n = 4n-3 \tag{5.22}$$

ならば $\partial_{t_f}{}^2\mathcal{F}^{(n)}$ は非自明な極限値

$$\partial_{t_f}{}^2\mathcal{F}^{(n)} \to (4n-1)!\gamma_n \left(\frac{\Lambda}{a}\right)^{4n} \tag{5.23}$$

を残すことになる。これはゲージ理論の結合定数のインスタントン項の形をしている。$d_{n,m}$ のデータを調べると、実際 $m \gg 1$ で

$$d_{n,m} \sim \gamma_n m^{4n-3} \tag{5.24}$$

の漸近形をとることが確かめられる (表 (4.36) からも概ね確認できる)。$n=1$ の場合について見てみると、$d_{1,m}$ は

$$d_{1,m} \sim \gamma_1 m \tag{5.25}$$

のように m とともに線形に増加するはずだが、表 (4.36) を見ると

$$d_{1,m} = -(2m+2) \tag{5.26}$$

であり確かにそうなっている。

結局 $\epsilon \to 0$ の極限で

$$\partial_{t_f}{}^2\mathcal{F} \to 2\ln\frac{a}{\Lambda} + const. + \sum_{n=1}^{\infty}(4n-1)!\gamma_n \left(\frac{\Lambda}{a}\right)^{4n} \tag{5.27}$$

となる。規格化を合わせるとき、これは Seiberg-Witten 理論の結合定数

$$\tau_{\rm SW} \equiv \frac{1}{2}\partial_a{}^2\mathcal{F}_{\rm SW} \tag{5.28}$$

$$= \frac{i}{\pi}\left(\ln\frac{a}{\Lambda} + \ln 2 - \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(4n-2)(4n-1)\mathcal{F}_n\left(\frac{\Lambda}{a}\right)^{4n}\right) \tag{5.29}$$

を正しく再現する。このとき γ_n と $\mathcal{F}_n$ は

$$\gamma_n = -\frac{2^{5n-2}}{(4n-3)!}\mathcal{F}_n \tag{5.30}$$

によって対応づけられる。これをもとに (1.99) の $\mathcal{F}_n$ の値から求めた係数 γ_n の最初のいくつかを表 (4.36) に挙げてある。γ_n は漸近形の式 (5.24) によりインスタントン数 $d_{n,m}$ のデータから求まる係数であったから、上式は世界面インスタントン数からゲージ理論のインスタントン係数が得られることを意味する[3]。本修士論文で順を追って見てきたように、Geometric Engineering の手続きは全て弦理論によって筋道立った説明がつけられるので、正しい結果が出るのはもっともではあるが、このように非摂動論的厳密解のレベルでコンパクト化弦理論とゲージ理論の対応が見えるのは驚くべきことである。今は $K_{\mathbf{F}_0}$ の場合で見たが、$K_{\mathbf{F}_1}, K_{\mathbf{F}_2}$ を使っても同じ議論ができる。(特に $K_{\mathbf{F}_2}$ のインスタントン数は、[37] によれば

$$d^{\mathbf{F}_2}_{n,m} = \begin{cases} d^{\mathbf{F}_0}_{n,m-n} & for \quad m-n \geq 0, \\ -\frac{1}{2} & for \quad (n,m) = (1,0), \\ 0 & for \quad others \end{cases} \tag{5.31}$$

のように $K_{\mathbf{F}_0}$ の場合と係数がずれているだけであり、同じ 4 次元ゲージ理論の情報が得られるのはほとんど明らかである[4]。)

5.2 Seiberg-Witten 曲線の同定

$\tilde{K}_{\mathbf{F}_n}$ の定義方程式 (4.11) (4.12) (4.13) はいずれも楕円曲線となっており、重力を分離することにより Seiberg-Witten 曲線に移行する。プリポテンシャルの同定の議論では変数 t_b, t_f と a との間の対応が物理量の対応として直接分かっていたのに対し、今から扱う複素構造モジュライの同定では物理的考察から決まるモジュライ変数 z_f, z_b と u との間の直接対応はない。この場合は、曲線 $\tilde{K}_{\mathbf{F}_n}$ の族と Seiberg-Witten 曲線の族の全体としての対応を見ることになる。

さて、具体的に 1 章で見た形で物質場なし $SU(2)$ Seiberg-Witten 曲線を出してくるには $\tilde{K}_{\mathbf{F}_2}$ の場合が一番扱いやすい。$\tilde{K}_{\mathbf{F}_2}$ の定義方程式 (4.13)

$$\tilde{K}_{\mathbf{F}_2} \quad : \quad a_1 z + a_2 \frac{1}{z} + a_3 + a_4 t + a_5 t^2 = 0 \tag{5.32}$$

の係数 a_i のうち 3 つまでは z, t 及び方程式全体の再規格化によって吸収できる。そこで

$$a_1 = 1, \ a_2 = \Lambda^4, \ a_5 = 2 \tag{5.33}$$

とおくと、上の方程式は t について平方完成した形で

$$z + \frac{\Lambda^4}{z} + 2\left(t + \frac{a_4}{4}\right)^2 - \frac{{a_4}^2}{8} + a_3 = 0 \tag{5.34}$$

と書ける。これを

$$x = t + \frac{a_4}{4}, \tag{5.35}$$

$$u = \frac{1}{2}\left(\frac{{a_4}^2}{8} - a_3\right) \tag{5.36}$$

と書き換えれば Seiberg-Witten 曲線

$$z + \frac{\Lambda^4}{z} + 2(x^2 - u) = 0 \tag{5.37}$$

[3] もっともこれは理論の上での話で、実際に (5.24) をもとに γ_n を読み取って $\mathcal{F}_n$ を求めるのは現実的ではない。

[4] 同じ $K_{\mathbf{F}_n}$ の幾何学をもとに、5 次元へ持ち上げられた Seiberg-Witten 理論の情報が引き出せることが知られている [38]。この場合 $K_{\mathbf{F}_0}$ と $K_{\mathbf{F}_2}$ の差異が具体的な物理の違いとして現れることになる。

の形になる。ただしここまでで行ったことは $\tilde{K}_{\mathbf{F}_2}$ の定義方程式 (5.32) の形式的な書き換えに過ぎない。複素モジュライ a_3, a_4 について重力分離の極限をとった時に、ゲージ理論のモジュライ u が有限な量として残って初めて、Seiberg-Witten 曲線が導出されたことになる。

アフィン座標の規格化によらないよいモジュライ座標

$$z_b = \frac{a_1 a_2}{{a_3}^2}, \quad z_f = \frac{a_3 a_5}{{a_4}^2} \tag{5.38}$$

は、(5.33) の規格化のもとで

$$z_b = \frac{\Lambda^4}{{a_3}^2}, \quad z_f = \frac{2a_3}{{a_4}^2} \tag{5.39}$$

と表される。これらについての重力分離の極限を知りたい。さて t_b についての重力分離の極限 (5.5) は large radius limit となっている。このときミラー写像は半古典的であり

$$z_b \sim q_b \tag{5.40}$$

と対応がつけられる。$q_b \sim \epsilon^4$ より z_b も同じように極限をとればよいことが分かる。そこで

$$z_b \equiv \epsilon^4 \tag{5.41}$$

として、この式で無限小パラメータ ϵ を定義し $\epsilon \to 0$ を重力分離の極限としよう。(5.39) よりこれは

$$a_3 = \frac{\Lambda^2}{\epsilon^2} \tag{5.42}$$

を意味する。このとき単純には (5.36) の u は発散してしまう。これを避けるには、$\epsilon \to 0$ のもとで a_4 もうまく発散させて、(5.36) の右辺が全体として有限量としてとどまるようにする。言いかえれば (5.36) によって a_4 の極限を定義してしまう。

a_3, a_4 の極限から z_f の極限が分かる。(5.36) と (5.39) の z_f の式から a_4 を消去すれば

$$z_f = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{2u}{a_3}\right)^{-1} \tag{5.43}$$

となる。これに $a_3 = \frac{\Lambda^2}{\epsilon^2}$ を代入して

$$z_f = \frac{1}{4}\left(1 + 2\epsilon^2 \frac{u}{\Lambda^2}\right)^{-1} \tag{5.44}$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 - 2\epsilon^2 \frac{u}{\Lambda^2}\right) \tag{5.45}$$

を得る。B モデル変数 z_b, z_f についての (5.41)(5.45) の極限は、重力を分離しつつ有限なパラメータ u を残す特殊な極限操作である (しばしば double scaling limit と呼ばれる)。このもとで $\tilde{K}_{\mathbf{F}_2}$ の定義方程式は、モジュライパラメータ u を含む楕円曲線の式、すなわち Seiberg-Witten 曲線となる。

次に応用として、4.1 節でとりあげた $N_f = 1$ $SU(2)$ の場合についても、うまい極限をとることで Seiberg-Witten 曲線が出ることを見る。(4.22) の定義方程式

$$a_1 z + a_2 \frac{1}{z} + a_3 \frac{t}{z} + a_4 + a_5 t + a_6 t^2 = 0 \tag{5.46}$$

は、

$$a_1 = 1,\ a_3 = \Lambda^3,\ a_6 = 2 \tag{5.47}$$

と規格化を固定するとき次のようにまとめられる:

$$z + \frac{\Lambda^3}{z}\left(t + \frac{a_2}{\Lambda^3}\right) + 2(t + \frac{a_5}{4})^2 - \frac{{a_5}^2}{8} + a_4 = 0. \tag{5.48}$$

ここで

$$x = t + \frac{a_5}{4}, \tag{5.49}$$

$$u = \frac{1}{2}\left(\frac{{a_5}^2}{8} - a_4\right), \tag{5.50}$$

$$m = \frac{a_2}{\Lambda^3} - \frac{a_5}{4} \tag{5.51}$$

と書けば、上の方程式は $N_f = 1$ の Seiberg-Witten 曲線

$$z + \frac{\Lambda^3}{z}(x + m) + 2(x^2 - u) = 0 \tag{5.52}$$

の形となる。パラメータ m, u を有限に残すような重力分離極限を求めよう。複素モジュライは (5.47) の規格化の固定で

$$z_b = \frac{a_1 a_2}{{a_4}^2} = \frac{a_2}{{a_4}^2}, \tag{5.53}$$

$$z_e = \frac{a_2 a_6}{a_3 a_5} = \frac{2}{\Lambda^3}\frac{a_2}{a_5}, \tag{5.54}$$

$$z_e z_{(f-e)} = \frac{a_4 a_6}{{a_5}^2} = 2\frac{a_4}{{a_5}^2} \tag{5.55}$$

と書かれる。これを m, u を用いて

$$z_e = \frac{1}{2} + \frac{2m}{a_5}, \tag{5.56}$$

$$z_e z_{(f-e)} = \frac{1}{4} - \frac{4u}{{a_5}^2}, \tag{5.57}$$

$$z_b = \frac{2\Lambda^3}{{a_5}^3} {z_e}^{-1} {z_{(f-e)}}^{-2} = 16\Lambda^3 \frac{a_5 + 4m}{({a_5}^2 - 16u)^2} \tag{5.58}$$

と表す。z_b の極限は large radius limit として

$$z_b \sim q_b \sim \epsilon^3 \tag{5.59}$$

で規定されている。そこで

$$z_b = 2\epsilon^3 \tag{5.60}$$

と ϵ を定義し、$\epsilon \to 0$ をもって重力分離の極限とする。(5.58) において、m, u を有限に保ちつつ $z_b \to 0$ にするのは $a_5 \to \infty$ ととる場合である。この極限で (5.58) は

$$2\epsilon^3 = 16\Lambda^3 {a_5}^{-3} \tag{5.61}$$

となる。これから a_5 の極限

$$a_5 = \frac{2\Lambda}{\epsilon} \tag{5.62}$$

が分かる。(5.56)(5.57) に代入すると、

$$z_e = \frac{1}{2} + \epsilon\frac{m}{\Lambda}, \tag{5.63}$$

$$z_e z_{(f-e)} = \frac{1}{4} - \epsilon^2\frac{u}{\Lambda^2} \tag{5.64}$$

を得る。結局 (5.60)(5.63)(5.64) の極限操作のもとで、(5.46) のローカル CY_3 から $N_f = 1$ Seiberg-Witten 曲線 (5.52) が出る。

$SU(n)$ の場合の Seiberg-Witten 曲線及び重力分離極限の導出法も、もはや明らかであろう。(4.25) の定義方程式

$$a_1 z + a_2\frac{1}{z} + a_3 + a_4 t + a_5 t^2 + \cdots + a_{n+3}t^n = 0 \tag{5.65}$$

で

$$a_1 = 1,\ a_2 = \Lambda^{2n},\ a_{n+3} = 2 \tag{5.66}$$

と規格化を固定する。アフィン座標変数を

$$x \equiv t + \frac{a_{n+2}}{2n} \tag{5.67}$$

と書き換えれば、上の定義方程式は (1.126) の Seiberg-Witten 曲線

$$z + \frac{\Lambda^{2n}}{z} + 2\left(x^n - \sum_{k=1}^{n-1} u_{k+1}x^{n-k-1}\right) = 0 \tag{5.68}$$

の形にまとめることができる。あとは $z_b, z_i\ (i = 1, \ldots, n-1)$ と $u_k\ (k = 2, 3, \ldots, n)$ の関係を見て、$z_b \sim \epsilon^{2n} \to 0$ のもとで u_k が全て有限にとどまるような z_i の極限を求めればよい。

5.3 結び

本修士論文では Seiberg-Witten 理論と Geometric Engineering の両方のアプローチにより 4 次元 $N = 2$ 物質場なし $SU(2)$ ゲージ理論の厳密解を求めた。物質場なし $SU(2)$ の場合については 1 章で詳しく見たように、ゲージ理論の枠内でも論理の飛躍なしに厳密解を求めることができた。しかしこの方法は物質場なし $SU(2)$ の場合の双対構造 $SL(2,\mathbb{Z})$ の性質を巧みに利用しており、他のゲージ群・物質場の設定へ一般化することは容易ではない。実際に場の理論の枠内で一般のゲージ群・物質場の設定を扱うときにとられた方法は、「ゲージ理論の Coulomb ブランチモジュライ空間は、何らかの超楕円曲線 (hyperelliptic curve) のモジュライ空間として表される」との仮定をおいて、様々な整合性条件から曲線の形を決定するというものであった。しかしながら複雑な設定になると、ゲージ理論のモジュライ空間を記述する代数多様体として超楕円曲線が必ずしも適当でない場合も出てくる。このような場合に場の理論の枠内では、発見的方法に頼る以外に厳密解を得る手段がなくなってしまう。

一方の Geometric Engineering は汎用性に優れた方法である。IIA 理論コンパクト化の特異点さえ正しく設定してやれば、概念上はどんなゲージ群・物質場の場合についても、決められた手続きに従えば厳密解を得ることができる。5.2 節では $N_f = 1$ $SU(2)$ と $SU(n)$ の場合について少し触れたが、全く同じようにしてゲージ群が $\prod_i SU(n_i)$、物質場表現が基本表現及び双基本表現 (bifundamental representation) という一般の場合について、総括的な取り扱いができている [25]。これは MQCD による解析 [19] と綺麗に対応している。

A 型以外のゲージ群については、トーリック幾何を用いた特異点の記述の仕方がそれほど自明ではなくなるため、統一的な議論はなされていない。望むゲージ場・物質場を含む設定を作ることはできるが、余計な場を全く出さないようなローカル CY_3 を直接与えることはできないようである。しかし各論としては、狭い意味での Geometric Engineering からは外れるが、やはり弦理論コンパクト化による解析がなされている。これは F 理論の文脈で調べられた様々なゲージ群・物質場設定の $\mathrm{Het}/(\mathrm{K3}\times\mathrm{T}^2)$ と $\mathrm{IIA}/\mathrm{CY}_3$ の双対対応の「辞書」[34,39,40] を利用するものである。この辞書にはヘテロティック理論側で同定されたゲージ群・物質場とトーリックデータで表された IIA コンパクト化 CY_3 の対応が載っている。これをもとに望むゲージ群・物質場の設定を含む IIA コンパクト化 CY_3 のミラー $\widetilde{\mathrm{CY}}_3$ をつくり、不要な場を後から取り除くことで A 型以外の様々な場合[5]についてもゲージ理論の厳密解を求めることができる。実際場の理論、MQCD、ブレーンプローブいずれの方法でも扱いが困難であった例外群の場合について、弦理論コンパクト化の立場から Seiberg-Witten geometry が導出されている [41, 42]。

ゲージ対称性の一般化とは別の方向性で大域的対称性に関する拡張が考えられるが、この場合にも Geometric Engineering の方法は広く応用できる。ひとつの拡張として、Geometiric Engineering の 5 次元 ($\mathbb{R}^{3,1} \times S^1$) へのリフト (持ち上げ) が行われている [38]。この 5 次元理論は、弦コンパクト化の立場からはモジュライパラメータに対する制限 (極限操作) を取り外した理論として自然に構成されるもので、4 次元ゲージ理論の M 理論的リフトを具体的に説明する例として興味深い。また超対称性を減らす方向として、4 次元 $N = 1$ 超対称ゲージ理論についても Geometric Engineering が行われている [43, 44]。

謝辞

本修士論文で扱った話題に私が興味を抱くきっかけを下さり、またいつでも快く質問に答えて下さった指導教官の江口先生に感謝します。何人もの方に勉強内容・勉強法の両面で相談にのっていただきました。中でもこの一年間私のあらゆる疑問質問に応じ、惜しみなく議論に時間を割いて下さった PD の寺嶋さんにはとりわけ感謝の気持ちを深くします。また那珂さんには具体的な修士論文の書き進め方、議論の組み立て方に関して多くの御指導を受けました。副査の細野先生からは私の誤解や修士論文の記述の誤りについて丁寧な御指摘を頂きました。合わせて感謝致します。実際の執筆にあたっては、研究室の沢山の方々、同僚、及び友人の日々の励ましが精神的な支えとなりました。一々名前を挙げきれませんがここにまとめて御礼を述べさせていただく次第です。

[5] あるいは A 型ゲージ群でテンソル表現物質場のある場合。

補遺

A.1 One-loop ベータ関数の係数公式

4 次元ゲージ理論の結合定数 g の one-loop ベータ関数の係数は、ゲージ群及び物質場の表現を指定すると決まる。(1.26) で導入したようにベータ関数を

$$\beta(g)_{one-loop} = -\frac{g^3}{16\pi^2}b \tag{A.1}$$

と表すとき、係数 b は次の公式で与えられる:

$$b = \left(\frac{11}{3}\sum_{R_g} C_2^G(R_g) - \frac{2}{3}\sum_{R_f} C_2^G(R_f) - \frac{1}{6}\sum_{R_s} C_2^G(R_s) \right). \tag{A.2}$$

ここで R_g, R_f, R_s はそれぞれ massless ゲージ場、Weyl スピノル場、実スカラー場のとるゲージ群 G の表現とする。$C_2^G(R)$ はゲージ群 G の表現 R についての 2 次の Casimir 固有値である。これは T_a を G の正規直交規格化された生成子、その R 表現を $R(T_a)$ として

$$C_2^G(R)\delta_{ab} = \mathrm{Tr}\left[R(T_a)R(T_b)\right] \tag{A.3}$$

で与えられる。具体的に $SU(n)$ の随伴表現、基本表現、及び $U(1)$ のチャージ q 表現については

$$C_2^{SU(n)}(\text{adjoint rep.}) = n, \tag{A.4}$$

$$C_2^{SU(n)}(\text{fund. rep.}) = \frac{1}{2}, \tag{A.5}$$

$$C_2^{U(1)}(\text{charge} = q) = \frac{q^2}{2} \tag{A.6}$$

となっている。

$N = 2$ ゲージ理論において、ゲージ場を担うベクトル多重項 1 つ分に対して (A.2) は

$$b = \left(\frac{11}{3}\cdot 1 - \frac{2}{3}\cdot 2 - \frac{1}{6}\cdot 2 \right) C_2^G(G) = 2C_2^G(G) \tag{A.7}$$

と書ける。表現 R の物質場 (ハイパー多重項) 1 つについては

$$b = \left(\frac{11}{3}\cdot 0 - \frac{2}{3}\cdot 2 - \frac{1}{6}\cdot 4 \right) C_2^G(R) = -2C_2^G(R) \tag{A.8}$$

となる。これからすぐに、随伴表現物質場が 1 つのゲージ理論について $\beta(g) = 0$ となることが分かる。これは理論のスケール不変性を示唆するが、実際この系は、ゲージ場と物質場が (3.4) のようにひとつの大きな多重項をなす $N = 4$ ゲージ理論となる。

ゲージ群が $SU(N_c)$ で基本表現物質場が N_f 個ある場合のベータ関数の係数は

$$b = 2N_c - N_f \tag{A.9}$$

と表せる。$SU(2)$ 理論では

$$b = 4 - N_f \tag{A.10}$$

であり、漸近自由な理論として基本表現物質場の数 N_f は 4 つまで許されることが確かめられる。

物質場なし $SU(2)$ 理論の強結合領域有効理論、すなわちチャージ 1 物質場が 1 つの $U(1)$ ゲージ理論についても、(A.6)(A.8) より

$$b = -2 \cdot \frac{1^2}{2} = -1 \tag{A.11}$$

が説明される。

A.2 超幾何関数の公式

(1.112)-(1.117) の計算では以下のように超幾何関数の公式を使った:

$$\begin{aligned}
a_D(u) &= \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_{\Lambda^2}^{u}\frac{dx\sqrt{x-u}}{\sqrt{x^2-\Lambda^4}} && \text{(A.12)}\\
&\overset{[積]}{=} i\frac{u-\Lambda^2}{2\Lambda}F(\frac{1}{2},\frac{1}{2},2;\frac{\Lambda^2-u}{2\Lambda^2}) && \text{(A.13)}\\
&\overset{[Ku1]}{=} i\frac{u-\Lambda^2}{2\Lambda}\frac{u+\Lambda^2}{2\Lambda}F(\frac{3}{2},\frac{3}{2},2;\frac{\Lambda^2-u}{2\Lambda^2}) && \text{(A.14)}\\
&\overset{[Ku2]}{=} i\frac{u^2-\Lambda^4}{4\Lambda^3}F(\frac{3}{4},\frac{3}{4},2;1-\frac{u^2}{\Lambda^4}), && \text{(A.15)}\\
& && \text{(A.16)}\\
a(u) &= \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_{-\Lambda^2}^{\Lambda^2}\frac{dx\sqrt{x-u}}{\sqrt{x^2-\Lambda^4}} && \text{(A.17)}\\
&\overset{[積]}{=} \sqrt{2}(u+\Lambda^2)^{\frac{1}{2}}F(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;\frac{2\Lambda^2}{u+\Lambda^2}) && \text{(A.18)}\\
&\overset{[Ga]}{=} \sqrt{2u}F(-\frac{1}{4},\frac{1}{4},1;\frac{\Lambda^4}{u^2}). && \text{(A.19)}
\end{aligned}$$

ここで

$$[積]: F(a,b,c;z) = \frac{1}{1-e^{2\pi ib}}\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\oint_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a}dt, \tag{A.20}$$

$$[\text{Ku1}]: F(a,b,c;z) = (1-z)^{c-a-b}F(c-a,c-b,c;z), \tag{A.21}$$

$$[\text{Ku2}]: \begin{array}{l} F(2a,2b,a+b+\frac{1}{2};z) \\ \quad = F(a,b,a+b+\frac{1}{2};4z(1-z)) \end{array} \quad for \begin{cases} |z| < \frac{1}{2}, \\ |z(1-z)| < \frac{1}{4} \end{cases}, \tag{A.22}$$

$$[\text{Ga}]: F(a,b,2b;2z) = (1-z)^{-a}F(\frac{a}{2},\frac{a+1}{2},b+\frac{1}{2};\left(\frac{z}{1-z}\right)^2) \tag{A.23}$$

はそれぞれ超幾何関数の積分表示式、Kummer の変換式、Gauss の変換式である [17]。[積] の積分は、$t=0, t=1$ の点を左手に見ながら反時計回りに 1 周する経路にわたってとる。

A.3 Picard-Fuchs 方程式の解の導出

(4.17) の Picard-Fuchs 方程式を級数解を仮定して解く。この節では変数を $z \equiv z_b, w \equiv z_f$ と表そう。$\tilde{K}_{\mathbf{F}_0}$ の周期の満たす Picard-Fuchs 方程式は

$$\mathcal{L}_1 = {\theta_z}^2 - z(2\theta_z + 2\theta_w)(2\theta_z + 2\theta_w + 1) = 0, \tag{A.24}$$

$$\mathcal{L}_2 = {\theta_w}^2 - w(2\theta_z + 2\theta_w)(2\theta_z + 2\theta_w + 1) = 0 \tag{A.25}$$

と表される。パラメータ ρ_1, ρ_2 を導入して

$$f(z, w; \rho_1, \rho_2) = \sum_{n,m=0}^{\infty} a_{n,m}(\rho_1, \rho_2) z^{n+\rho_1} w^{m+\rho_2} \tag{A.26}$$

の形の解を仮定する。これを (A.24) に代入すると、
$n \geq 1, m \geq 0$ について

$$(n+\rho_1)^2 a_{n,m} - (2n + 2m + 2\rho_1 + 2\rho_2 - 2)(2n + 2m + 2\rho_1 + 2\rho_2 - 1) a_{n-1,m} = 0, \tag{A.27}$$

$n = 0, m \geq 0$ について

$${\rho_1}^2 a_{0,m} = 0 \tag{A.28}$$

を得る。同様に (A.25) に代入すると、
$n \geq 0, m \geq 1$ について

$$(m+\rho_2)^2 a_{n,m} - (2n + 2m + 2\rho_1 + 2\rho_2 - 2)(2n + 2m + 2\rho_1 + 2\rho_2 - 1) a_{n,m-1} = 0, \tag{A.29}$$

$n \geq 0, m = 0$ について

$${\rho_2}^2 a_{n,0} = 0 \tag{A.30}$$

を得る。(A.27)(A.29) を形式的に解くと、$(n, m) \neq (0, 0)$ として $a_{n,m}$ は

$$a_{n,m} = \frac{\prod_{j=0}^{2n+2m-1}(j + 2\rho_1 + 2\rho_2)}{\prod_{j=1}^{n}(j+\rho_1)^2 \prod_{j=1}^{m}(j+\rho_2)^2} a_{0,0} \tag{A.31}$$

と表せる。これを (A.26) に戻せば

$$f(z, w; \rho_1, \rho_2) = a(\rho_1, \rho_2) \left(z^{\rho_1} w^{\rho_2} + \sum_{n,m}{}' \frac{\prod_{j=0}^{2n+2m-1}(j + 2\rho_1 + 2\rho_2)}{\prod_{j=1}^{n}(j+\rho_1)^2 \prod_{j=1}^{m}(j+\rho_2)^2} z^{n+\rho_1} w^{m+\rho_2} \right) \tag{A.32}$$

となる。ただし $a_{0,0}(\rho_1, \rho_2)$ を単に $a(\rho_1, \rho_2)$ と書くことにした。

改めて、解をこの形に仮定したと思うことにしよう。このとき (A.27)(A.29) に対応する部分は解かれているので本質的に (A.28)(A.30) の部分だけが残り、この f に Picard-Fuchs 演算子を作用させると

$$\mathcal{L}_i f(z, w; \rho_1, \rho_2) = {\rho_i}^2 a(\rho_1, \rho_2) z^{\rho_1} w^{\rho_2} \tag{A.33}$$

が成り立つ。この式で、あるいは両辺に $\partial_{\rho_1}, \partial_{\rho_2}, \partial_{\rho_1}\partial_{\rho_2}$ を作用させた式で $\rho_1 = \rho_2 = 0$ とすると右辺が 0 になることが確かめられるので、

$$f|_{\rho_1=\rho_2=0}\,,\ \left.\frac{\partial f}{\partial \rho_1}\right|_{\rho_1=\rho_2=0},\ \left.\frac{\partial f}{\partial \rho_2}\right|_{\rho_1=\rho_2=0},\ \left.\frac{\partial^2 f}{\partial \rho_1 \partial \rho_2}\right|_{\rho_1=\rho_2=0} \tag{A.34}$$

は Picard-Fuchs 方程式の解となる。(A.32) の f についてこれらを実際に計算すると、定数項を

$$a|_{\rho_1=\rho_2=0} = 1, \tag{A.35}$$

$$\left.\frac{\partial a}{\partial \rho_1}\right|_{\rho_1=\rho_2=0} = \left.\frac{\partial a}{\partial \rho_2}\right|_{\rho_1=\rho_2=0} = \left.\frac{\partial^2 a}{\partial \rho_1 \partial \rho_2}\right|_{\rho_1=\rho_2=0} = 0 \tag{A.36}$$

とおいて、4.2 節の解

$$1, \tag{A.37}$$

$$\omega_1 = \ln z + {\sum_{n,m}}' \frac{2(2n+2m-1)!}{n!^2 m!^2} z^n w^m, \tag{A.38}$$

$$\omega_2 = \ln w + {\sum_{n,m}}' \frac{2(2n+2m-1)!}{n!^2 m!^2} z^n w^m, \tag{A.39}$$

$$\begin{aligned}\Omega &= \ln z \ln w + (\ln z + \ln w) {\sum_{n,m}}' \frac{2(2n+2m-1)!}{n!^2 m!^2} z^n w^m \\ &\quad + {\sum_{n,m}}' \left(\sum_{k=n+1}^{2n+2m-1} \frac{1}{k} + \sum_{k=m+1}^{2n+2m-1} \frac{1}{k} \right) \frac{4(2n+2m-1)!}{n!^2 m!^2} z^n w^m \end{aligned} \tag{A.40}$$

を得る。${\sum}'_{n,m}$ は $\{(n,m) \,|\, n,m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\} \setminus \{(0,0)\}$ にわたってとる和である。

$t_b \equiv -\omega_1, t_f \equiv -\omega_2$ とし、上の解を $q_b = e^{\omega_1}, q_f = e^{\omega_2}$, 及び Ω の展開として

$$q_b = z + 2z^2 + 2zw + O((z,w)^3), \tag{A.41}$$

$$q_f = w + 2zw + 2w^2 + O((z,w)^3), \tag{A.42}$$

$$\Omega = t_b t_f + 4z + 4w + 9z^2 + 32zw + 9w^2 + O((z,w)^3) \tag{A.43}$$

のように表す。(対数項が直接現れない形にした。) (A.41)(A.42) を逆に解くと

$$z = q_b - 2{q_b}^2 - 2q_b q_f + O({q_k}^3), \tag{A.44}$$

$$w = q_f - 2q_b q_f - 2{q_f}^2 + O({q_k}^3) \tag{A.45}$$

となり、(A.43) に代入すれば

$$\Omega = t_b t_f + 4q_b + 4q_f + {q_b}^2 + 16 q_b q_f + {q_f}^2 + O({q_k}^3) \tag{A.46}$$

が得られる。これと (4.35) の一般形の展開

$$\begin{aligned}\Omega &= t_b t_f - 2d_{1,0} q_b - 2d_{0,1} q_f \\ &\quad - \left(\frac{1}{2} d_{1,0} + 4d_{2,0}\right) {q_b}^2 - 4d_{1,1} q_b q_f - \left(\frac{1}{2} d_{0,1} + 4d_{0,2}\right) {q_f}^2 \\ &\quad + O({q_k}^3) \end{aligned} \tag{A.47}$$

を比較すれば、$d_{n,m}$ を

$$\begin{gathered} d_{1,0} = -2, \quad d_{0,1} = -2, \\ d_{2,0} = 0, \quad d_{1,1} = -4, \quad d_{0,2} = 0, \\ \cdots \end{gathered} \tag{A.48}$$

のように求めてゆくことができる。

参考文献

[1] N. Seiberg and E. Witten, "Electric - magnetic duality, monopole condensation, and confinement in N=2 supersymmetric Yang-Mills theory," Nucl. Phys. **B426** (1994) 19, hep-th/9407087, erratum: ibid **B430** (1994) 396.

[2] N. Seiberg and E. Witten, "Monopoles, duality and chiral symmetry breaking in N=2 supersymmetric QCD," Nucl. Phys. **B431** (1994) 484, hep-th/9408099.

[3] N. Seiberg, "Electric - magnetic duality in supersymmetric nonAbelian gauge theories," Nucl. Phys. **B435** (1995) 129, hep-th/9411149.

[4] J. Polchinski, "Dirichlet-Branes and Ramond-Ramond Charges," Phys. Rev. Lett. **75** (1995) 4724, hep-th/9510017.

[5] A. Klemm, W. Lerche, S. Yankielowicz and S. Theisen, Phys. Lett. **B344** (1995) 169, hep-th/9411048.

[6] P. C. Argyres and A. E. Faraggi, Phys. Rev. Lett. **74** (1995) 3931, hep-th/9411057.

[7] A. Hanany and Y. Oz, Nucl. Phys. **B452** (1995) 283, hep-th/9505075.

[8] P. C. Argyres, M. R. Plesser and A. D. Shapere, Phys. Rev. Lett. **75** (1995) 1699, hep-th/9505100.

[9] J. A. Minahan and D. Nemeschansky, Nucl. Phys. **B464** (1996) 3, hep-th/9507032.

[10] P. C. Argyres and A. D. Shapere, Nucl. Phys. **B461** (1996) 437, hep-th/9509175.

[11] U. H. Danielsson and B. Sundborg, Phys. Lett. **B370** (1996) 83, hep-th/9511180.

[12] E. Martinec and N. Warner, "Integrable systems and supersymmetric gauge theory," Nucl. Phys. **B459** (1996) 97, hep-th/9509161.

[13] N. Seiberg, "Supersymmetry And Nonperturbative Beta Functions," Phys. Lett. **B206** (1988) 75.

[14] R. Flume, M. Magro, L. O'Raifeartaigh, I. Sachs and O. Schnetz, "Uniqueness of the Seiberg-Witten effective Lagrangian," Nucl. Phys. **B494** (1997) 331, hep-th/9611123.

[15] A. Klemm, W. Lerche and S. Theisen, "Nonperturbative effective actions of N=2 supersymmetric gauge theories," Int. J. Mod. Phys. **A11** (1996) 1929, hep-th/9505150.

[16] I. Gradshteyn and I. Ryzhik, "Table of Integrals, Series, and Products" Academic Press (1980).

[17] 森口, 宇田川, 一松, "岩波 数学公式 III 特殊関数," 岩波書店 (1960).

[18] W. Lerche and N. P. Warner, "Exceptional SW geometry from ALE fibrations," Phys. Lett. **B423** (1998) 79, hep-th/9608183.

[19] E. Witten, "Solutions of four-dimensional field theories via M-theory," Nucl. Phys. **B500** (1997) 3, hep-th/9703166.

[20] A. Sen, "F-theory and Orientifolds," Nucl. Phys. **B475** (1996) 562, hep-th/9605150.

[21] T. Banks, M. R. Douglas and N. Seiberg, "Probing F-theory with branes," Phys. Lett. **B387** (1996) 278, hep-th/9605199.

[22] S. Kachru, A. Klemm, W. Lerche, P. Mayr and C. Vafa, "Nonperturbative results on the point particle limit of N=2 heterotic string compactifications," Nucl. Phys. **B459** (1996) 537, hep-th/9508155.

[23] A. Klemm, W. Lerche, P. Mayr, C. Vafa and N. Warner, "Self-Dual Strings and N=2 Supersymmetric Field Theory," Nucl. Phys. **B477** (1996) 746, hep-th/9604034.

[24] S. Katz, A. Klemm and C. Vafa, "Geometric engineering of quantum field theories," Nucl. Phys. **B497** (1997) 173, hep-th/9609239.

[25] S. Katz, P. Mayr and C. Vafa, "Mirror symmetry and exact solution of 4D N = 2 gauge theories. I," Adv. Theor. Math. Phys. **1** (1998) 53, hep-th/9706110.

[26] P. Candelas and X. de la Ossa, "MODULI SPACE OF CALABI-YAU MANIFOLDS," Nucl. Phys. **B355** (1991) 455.

[27] C. Vafa and E. Witten, "Dual string pairs with N = 1 and N = 2 supersymmetry in four dimensions," Nucl. Phys. Proc. Suppl. **46** (1996) 225, hep-th/9507050.

[28] E. Witten, "String theory dynamics in various dimensions," Nucl. Phys. **B443** (1995) 85, hep-th/9503124.

[29] A. Strominger, "Massless black holes and conifolds in string theory," Nucl. Phys. **B451** (1995) 96, hep-th/9504090.

[30] K. Becker, M. Becker and A. Strominger, "Five-branes, membranes and nonperturbative string theory," Nucl. Phys. **B456** (1995) 130, hep-th/9507158.

[31] M. Bershadsky, C. Vafa and V. Sadov, "D-Strings on D-Manifolds," Nucl. Phys. **B463** (1996) 398, hep-th/9510225.

[32] S. Katz, D. R. Morrison and M. Ronen Plesser, "Enhanced Gauge Symmetry in Type II String Theory," Nucl. Phys. **B477** (1996) 105, hep-th/9601108.

[33] J. Strathdee, "Extended Poincare Supersymmetry," Int. J. Mod. Phys. **A2** (1987) 273.

[34] S. Katz and C. Vafa, "Matter from geometry," Nucl. Phys. **B497** (1997) 146, hep-th/9606086.

[35] A. Strominger, S. Yau and E. Zaslow, "Mirror symmetry is T-duality," Nucl. Phys. **B479** (1996) 243, hep-th/9606040.

[36] V. V. Batyrev, "Dual Polyhedra and Mirror Symmetry for Calabi-Yau Hypersurfaces in Toric Varieties," alg-geom/9310003.

[37] T. M. Chiang, A. Klemm, S. T. Yau and E. Zaslow, "Local mirror symmetry: Calculations and interpretations," hep-th/9903053.

[38] T. Eguchi and H. Kanno, "Five-dimensional gauge theories and local mirror symmetry," Nucl. Phys. **B586** (2000) 331, hep-th/0005008.

[39] P. Candelas and A. Font, "Duality between the webs of heterotic and type II vacua," Nucl. Phys. **B511** (1998) 295, hep-th/9603170.

[40] M. Bershadsky, K. Intriligator, S. Kachru, D. R. Morrison, V. Sadov and C. Vafa, "Geometric singularities and enhanced gauge symmetries," Nucl. Phys. **B481** (1996) 215, hep-th/9605200.

[41] J. H. Brodie, "Exact solutions of exceptional gauge theories from toric geometry," Nucl. Phys. **B506** (1997) 183, hep-th/9705068.

[42] J. Hashiba and S. Terashima, "Geometry and N = 2 exceptional gauge theories," JHEP**9909** (1999) 020, hep-th/9909032.

[43] S. Katz and C. Vafa, "Geometric engineering of N = 1 quantum field theories," Nucl. Phys. **B497** (1997) 196, hep-th/9611090.

[44] C. Vafa, "On N = 1 Yang-Mills in four dimensions," Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1998) 497, hep-th/9801139.

[45] A. Bilal, "Duality in N=2 SUSY SU(2) Yang-Mills Theory: A pedagogical introduction to the work of Seiberg and Witten," hep-th/9601007.

[46] L. Alvarez-Gaume and S. F. Hassan, "Introduction to S-duality in N = 2 supersymmetric gauge theories: A pedagogical review of the work of Seiberg and Witten," Fortsch. Phys. **45** (1997) 159, hep-th/9701069.

[47] T. Eguchi, "Seiberg-Witten theory and S-duality," *Prepared for NATO Advanced Study Institute on Strings, Branes and Dualities, Cargese, France, 26 May - 14 Jun 1997.*

[48] W. Lerche, "Introduction to Seiberg-Witten theory and its stringy origin," Nucl. Phys. Proc. Suppl. **55B** (1997) 83, hep-th/9611190.

[49] A. Klemm, "On the geometry behind N = 2 supersymmetric effective actions in four dimensions," hep-th/9705131.

[50] P. Mayr, "Geometric construction of N = 2 gauge theories," Fortsch. Phys. **47** (1999) 39, hep-th/9807096.

[51] P. S. Aspinwall, "K3 surfaces and string duality," hep-th/9611137.

[52] P. S. Aspinwall, "Compactification, geometry and duality: N = 2," hep-th/0001001.

[53] J. Hashiba, "Geometry and N=2 Supersymmetric Gauge Theories," Doctor Thesis (1999).

[54] B. R. Greene, "String theory on Calabi-Yau manifolds," hep-th/9702155.

[55] J. Bagger and J. Wess, "Supersymmetry And Supergravity," JHU-TIPAC-9009.

[56] J. Polchinski, "String Theory," Cambridge University Press (1998).