

修士論文

16 個の超対称電荷を持つ系とその解析

柴 正太郎^{*1}

東京大学大学院理学系研究科物理学専攻素粒子論研究室

2007 年 1 月

^{*1} shiba@hep-th.phys.s.u-tokyo.ac.jp

概要

Lin, Lunin, Maldacena は、M 理論と IIB 型超弦理論における $AdS_{4,7,5} \times S^{7,4,5}$ 時空における 1/2 BPS 励起状態を考察することによって、双対な場の理論において、これらに対応する励起状態が自由フェルミオンの系で記述できることを示した [1]。さらに Lin と Maldacena は M 理論から次元還元して IIA 型理論を得ることで、対応する自由フェルミオンの系が簡単な静電気問題の系で記述できることを示した [2]。

この修士論文は、これらの議論に関するレビューである。特に Lin と Maldacena の論文 [2] に従って、16 個の超対称電荷と離散的なエネルギースペクトルを持った理論を中心とした議論について解説を行っている。特に、この議論を用いると BMN 行列模型において M5-brane で構成される真空解に関して理解を深めることができるので、詳しく解説を行った。

目次

目次	i
第 1 章 はじめに	1
1.1 $SU(2 4)$ 対称性を持つ理論	1
1.2 $SO(4) \times SO(4)$ 対称性を持つ理論	2
第 1 部 $SU(2 4)$ 対称性を持つ理論	5
第 2 章 $\widetilde{SU}(2 4)$ 対称性を持つ場の理論	7
2.1 対称性について	7
2.2 Witten 指数	8
2.3 $R \times S^3/Z_k$ 上の $\mathcal{N} = 4$ 超対称 Yang-Mills 理論	9
2.4 $R \times S^2$ 上の $2 + 1$ 次元超対称 Yang-Mills 理論	11
2.5 BMN 行列模型	13
第 3 章 場の理論の真空中に双対な重力解	15
3.1 $SO(6) \times SO(3)$ 対称性を持つ 11 次元超重力理論の超対称解	15
3.1.1 S^5, S^2 上への reduction	15
3.1.2 4 次元スピノール双線形	18
3.1.3 スピノールの形に課される制限	19
3.1.4 field strength が満たす方程式	20
3.1.5 2 次元計量の評価	22
3.1.6 ベクトル V_i の field strength と Toda 方程式	24
3.1.7 11 次元 ansatz	25
3.2 11 次元の系の解析	25
3.2.1 11 次元時空解の例	28
3.3 次元還元して得られる 10 次元の系の解析	29
3.3.1 静電気問題の系への帰着	30
3.3.2 10 次元重力解とその性質	31
3.3.3 BPS 測地線付近の領域における解析	37
第 4 章 $R \times S^5$ 上の NS5-brane 理論	45
4.1 $SO(6) \times SO(3)$ 対称性を持つ 7 次元ゲージ化超重力理論の超対称解	45
4.1.1 7 次元ゲージ化超重力理論	45
4.1.2 超対称解の導出	46
4.2 7 次元ゲージ化超重力理論の超対称解 (再度)	52
4.3 次元酸化して得られる 11 次元重力解	53

4.3.1	漸近的な振る舞い	54
4.3.2	11 次元 ansatz との比較	55
4.4	次元還元して得られる 10 次元重力解	57
4.5	静電気問題の系に対応する 10 次元重力解	58
第 5 章	$R \times S^2$ 上の D2-brane 理論 (2 + 1 次元超対称 Yang-Mills 理論)	63
5.1	$SO(6) \times SO(3)$ 対称性を持つ 4 次元ゲージ化超重力理論の超対称解	63
5.2	次元酸化して得られる 11 次元重力解	65
5.3	次元還元して得られる 10 次元重力解	66
5.4	静電気問題の系に対応する 10 次元重力解	67
第 6 章	$R \times S^3/Z_k$ 上の $\mathcal{N} = 4$ 超対称 Yang-Mills 理論	71
6.1	対応する droplet の系と静電気問題の系	71
6.1.1	M 理論との関係	72
6.1.2	IIA 型理論との関係	72
6.2	対応する静電気問題の系の解析	74
第 7 章	BMN 行列模型	77
7.1	BMN 行列模型	78
7.2	M2-brane 作用からの導出	79
7.2.1	光錐 Hamiltonian の bosonic 項	80
7.2.2	光錐 Hamiltonian の fermionic 項	81
7.2.3	光錐 Hamiltonian の離散化	84
7.3	D0-brane dynamics からの導出	84
7.3.1	IIA 型弦理論との関係	84
7.3.2	コンパクト化されて reduction された pp-wave 時空上での D0-brane の dynamics	86
7.4	古典的な超対称真空	87
7.4.1	作用と対称性	87
7.4.2	古典的な超対称真空解	89
7.4.3	古典的な真空の周りでの展開	90
7.5	large μ 極限の正確なスペクトル	91
7.5.1	球面調和関数行列による展開	91
7.5.2	既約表現に対応する真空のスペクトル	91
7.5.3	可約表現に対応する真空のスペクトル	95
7.5.4	物理的な状態	97
7.5.5	BPS 状態	98
7.6	超対称性代数について	99
7.7	$SU(4 2)$ の表現	100
7.7.1	最高ウェイト表現	101
7.7.2	テンソル表現と Young 超図	103
7.8	$SU(4 2)$ 表現の物理的な意味づけ	106
7.8.1	超対称指数定理	109
7.9	large μ 極限の $SU(4 2)$ 表現	110
7.9.1	1 枚の M2-brane の真空	111

7.9.2	一般の真空	113
7.10	atypical 表現と BPS 状態の関係	114
7.11	M5-brane のスペクトル	116
7.11.1	摂動論における議論	117
7.11.2	protected 状態を用いた議論	118
7.12	複数の M5-brane がある系 (仮説)	120
7.12.1	仮説を正当化する証拠 (1)	121
7.12.2	仮説を正当化する証拠 (2)	122
7.13	D2/M2-brane 理論の正則化としての BMN 行列模型	124
7.14	NS5/M5-brane 理論の正則化としての BMN 行列模型	126
7.15	静電気問題の系に対応する 10 次元重力解	126
7.15.1	電荷と D0-brane 解の漸近解	128
7.15.2	$N_5 = 1$ の場合に対応する重力解	132
7.16	near BPS 状態についての更なる解析	135
7.16.1	BMN 行列模型の $N_5 = 1$ 真空	135
7.16.2	BMN 行列模型の $N_5 > 1$ 真空	137
7.16.3	世界面理論とゲージ理論の比較	139
第 8 章	4 次元 $\mathcal{N} = 2$ 超共形場理論	143
8.1	AdS_5 時空の因子を持つ 11 次元超重力理論の超対称解	143
8.2	重力解の具体例	147
第 2 部	$SO(4) \times SO(4)$ 対称性を持つ理論	151
第 9 章	$SO(4) \times SO(4)$ 対称性を持つ重力解	153
9.1	$SO(4) \times SO(4)$ 対称性を持つ IIB 型超重力理論の超対称解	153
9.1.1	S^3, \tilde{S}^3 上への reduction	153
9.1.2	4 次元スピノール双線形	155
9.1.3	スピノール双線形が満たす方程式から課される制限	156
9.1.4	IIB 型 ansatz	160
9.2	10 次元の系の解析	160
9.3	円筒にコンパクト化された系の解析	171
9.4	トーラスにコンパクト化された系の解析	176
第 10 章	重力解に双対な場の理論	179
10.1	自由フェルミオンの系における記述について	179
10.2	円筒にコンパクト化された場合	180
10.3	トーラスにコンパクト化された場合	182
10.4	超対称性代数について	185
10.4.1	超対称電荷が 8 個の場合の超対称性代数	185
10.4.2	超対称電荷が 16 個の場合の超対称性代数	188
第 11 章	解析接続して得られる重力解と双対な場の理論	191
11.1	$AdS_3 \times S^3 \times S^1$ への解析接続	191
11.2	$SO(2, 2) \times SO(4)$ 対称性を持つ重力解	192

11.3	重力解に双対な場の理論	195
第 12 章	おわりに	197
付録 A	Witten 指数について	201
A.1	4次元超共形代数とそのユニタリ表現	201
A.1.1	4次元共形代数	201
A.1.2	4次元共形代数のユニタリ表現	202
A.1.3	4次元共形代数における指数	203
A.1.4	4次元超共形代数	205
A.1.5	4次元超共形代数のユニタリ表現	206
A.1.6	short 表現における null ベクトル	207
A.1.7	4次元超共形代数における指数	208
A.2	超共形代数の指数に関するトレース公式	209
A.2.1	交換する部分代数	210
A.2.2	指数 I^{WL} と指数 I^L の関係	210
A.3	BPS 状態を数える指数の計算	211
A.3.1	$N_5 = 1$ 真空について	211
A.3.2	$N_5 > 1$ 真空について	213
付録 B	BMN 行列模型について	217
B.1	生成子	217
B.2	生成子が満たす代数	217
B.3	生成子の表現	218
B.4	$SO(9)$ 対称性があらわになる記法	218
付録 C	ゲージ化超重力理論	219
C.1	スカラー場が存在する最大超対称な超重力理論	219
C.1.1	対称ポテンシャル	219
C.1.2	AdS ドメインウォール解	222
C.2	Kaluza-Klein reduction の ansatz とその無矛盾性	223
C.2.1	Kaluza-Klein reduction の ansatz	223
C.2.2	Bianchi 恒等式 $d\hat{F}_{(D)} = 0$ を満たすことの証明	225
C.2.3	場の方程式 $d\hat{*}\hat{F}_{(D)} = 0$ を満たすことの証明	226
C.2.4	Einstein 方程式を満たすことの証明	228
C.3	さらに Yang-Mills 場を含んだ超重力理論	230
C.3.1	球面上への reduction の可能性	231
参考文献		235

第 1 章

はじめに

第 1 章では、この論文においてどのような理論を扱うのか、そしてそれらの理論に関してどのような解析を行うのかを概観することにしよう。

この論文では、 $AdS \times S$ 時空中における 1/2 BPS 励起状態と関係する、16 個の超対称電荷を持った様々な理論を扱う [1, 2]。ここで扱う理論には質量ギャップ (mass gap) があり、励起状態のスペクトルが離散的であるという特徴がある。

M 理論と関係する $AdS \times S$ 時空としては、M2-brane と M5-brane の near horizon geometry として現れる $AdS_4 \times S^7$ 時空と $AdS_7 \times S^4$ 時空がある。この時空中における 1/2 BPS 励起状態を考えると、エネルギー E と球面方向の角運動量 J が等しいという条件を課すことになるので、系の対称性は

$$\begin{aligned} AdS_4 \times S^7 &\sim SO(3, 2) \times SO(8) \supset U(1)_E \times SO(3) \times U(1)_J \times SO(6) \\ AdS_7 \times S^4 &\sim SO(6, 2) \times SO(5) \supset U(1)_E \times SO(6) \times U(1)_J \times SO(3) \end{aligned} \quad (1.0.1)$$

となる。従って、この場合は bosonic な対称性

$$SO(3) \times SO(6) \times U(1)_E \sim SU(2) \times SU(4) \times U(1)_E \quad (1.0.2)$$

を持つ理論を考えることになる。以下では、この bosonic な部分対称代数を持つ超対称性代数 $SU(2|4)$ を扱うこととする。

また、IIB 型超弦理論と関係する $AdS \times S$ 時空としては、D3-brane の near horizon geometry として現れる $AdS_5 \times S^5$ 時空がある。同様にして、この時空中における 1/2 BPS 励起状態を考えると、系の対称性は

$$AdS_5 \times S^5 \sim SO(4, 2) \times SO(6) \supset U(1)_E \times SO(4) \times U(1)_J \times SO(4) \quad (1.0.3)$$

となる。従って、この場合は bosonic な対称性 $SO(4) \times SO(4)$ を持つ理論を考えることになる。

以上の議論に対応して、この論文は大きく 2 つの部に分かれている。それぞれの部において

第 1 部 16 個の超対称電荷を持った理論のうち、 $SU(2|4)$ 対称性を持つもの

第 2 部 16 個の超対称電荷を持った理論のうち、 $SO(4) \times SO(4)$ 対称性を持つもの

を扱う。

1.1 $SU(2|4)$ 対称性を持つ理論

第 1 部では、 $R \times S^3$ 上の $\mathcal{N} = 4$ 超対称 Yang-Mills 理論において、ある切断をすることによって得られる理論を取り扱う。具体的には

- $R \times S^2$ 上の 2 + 1 次元超対称 Yang-Mills 理論

- $R \times S^3/Z_k$ 上の $\mathcal{N} = 4$ 超対称 Yang-Mills 理論
- BMN 行列模型

を取り上げる。各理論の詳細に立ち入る前に、まず一般的な事柄として、次のような議論を行う。

第 2 章 これらの理論を元の $R \times S^3$ 上の $\mathcal{N} = 4$ 超対称 Yang-Mills 理論から得る手続きや、これらの理論が持つ対称性 $\widetilde{SU}(2|4)$ について簡単に振り返る。また、これらの理論は $SO(6)$ 対称性を持っており、 $SO(6)$ 角運動量 J を持った $1/2$ BPS 状態が存在する。そこで、理論に存在する $1/2$ BPS 状態の個数は Witten 指数を用いて数えられることを示して、実際に計算を行う [3, 4]。さらに、これらの理論の間に成り立っている関係についても概観する。

第 3 章 これらの理論は多数の真空解を持っているのであるが、その真空解に対して双対な重力解を構築する。実際に 11 次元超重力理論における超対称解を導出した上で、その重力解は自由フェルミオンの droplet の系に対応させられることを示す。さらに、10 次元に次元還元することにより、IIA 型超重力理論の超対称解が静電気問題の系に帰着させて解析できることも確認する。

静電気問題の系においては、BPS 状態についてはもちろん、near BPS 状態についても議論を行う。't Hooft 結合の強結合領域において、チャージが大きい near BPS 状態のスペクトルは、一般解の pp-wave 極限を考慮することによって得られる。従って、pp-wave 極限の系と対応する静電気問題の系における議論を行う。そして、一番簡単な例では、IIA 型 plane-wave 時空解が得られることを示す。一般に、光錐 (light-cone) ゲージを取った系において、弦は $\mathcal{N} = (4, 4)$ 超対称性を持った世界面上の massive 場の理論によって記述できるのである。

これらの強結合領域における議論を通して、理論に現れるスペクトルの性質が、弱結合領域におけるゲージ理論の描像と似ていることが確認できる。その上で、near BPS 状態のエネルギーは 't Hooft 結合定数に対して非自明な依存性を持っていることに注目して、弱結合領域と強結合領域の間で非自明な補間がなされているであろうという予想をするに至る。

次に、個々の理論について詳細に立ち入りながら議論を行う。

第 4 章 $R \times S^5$ 上の NS5-brane 理論

まず、第 3 章の議論から興味が生じる NS5-brane 理論について議論を行う。7 次元ゲージ化超重力理論を次元酸化して 11 次元の系を得た後、第 3 章の議論の流れに従って 10 次元の系の解析を行う。

第 5 章 $R \times S^2$ 上の $2 + 1$ 次元超対称 Yang-Mills 理論

ようやく、この節の最初で挙げた 3 つの理論についての解析を始める。この理論は $R \times S^2$ 上の D2-brane 理論と対応していて、議論の流れが第 4 章と似ている。最後に、第 3 章の議論に沿って、重力解と場の理論の真空の間にある双対関係に注目して議論を行い、スペクトルに関して強結合領域と弱結合領域を補間する非自明な関数が存在する可能性を示す。

第 6 章 $R \times S^3/Z_k$ 上の $\mathcal{N} = 4$ 超対称 Yang-Mills 理論

この理論の解析には、トーラス上にコンパクト化した droplet の系や、周期的な静電気問題の系を用いるので、他の章とは議論の内容がかなり異なっている。特に 2 種類の真空解に注目して、第 3 章の議論に沿った解析を行う。

第 7 章 BMN 行列模型

BMN 行列模型はゲージ・重力対応のとても良い例であり、第 3 章の議論を有効に生かして解析することができる。しかしながら、そのためには BMN 行列模型の真空解について、あらかじめある程度の議論を行うておく必要があるので、まずはその議論を行う。中には超群 $SU(4|2)$ の表現論など、第 1 部で扱っている他の理論の解析にも有用な議論も含まれている。

その上で、第 3 章の議論に沿って、特に NS5-brane が存在する真空解に対する near BPS 状態についての

解析を行う。

第 8 章 4 次元 $\mathcal{N} = 2$ 超共形場理論

これは、第 3 章で求めた 11 次元 ansatz を解析接続したものに对应する理論である。実際に解析接続を行い、重力解の例をいくつか示す。

1.2 $SO(4) \times SO(4)$ 対称性を持つ理論

第 2 部の内容は、以下の通りになっている。

第 9 章 最初に第 3 章と同様にして IIB 型超重力理論の超対称解を求める。そして、得られた重力解が非圧縮流体 (incompressible fluid) の droplet の系で記述できることを確認する。この流体が 2 次元無限平面に存在するとき、重力解は $\mathcal{N} = 4$ 超対称 Yang-Mills 理論の $1/2$ BPS 状態に対応していることが知られている。2 次元無限平面における droplet の系について議論した後、2 次元平面が円筒やトーラスにコンパクト化した場合についても議論する。

第 10 章 第 9 章で扱った、2 次元平面を円筒やトーラスにコンパクト化した droplet の系に対応する場の理論について議論を行う。これらの理論には多数の真空が存在するので、様々な droplet の系を考えることができる。興味深い特徴としては、理論が持つ $2+1, 1+1$ 次元の Poincaré 超対称性代数において、右辺に現れるチャージが中心チャージ (central charge) でないことが挙げられる。この超対称性代数は、最大超対称な IIB 型 pp-wave 時空において動く弦を光錐ゲージで記述したときに、線形近似で現れるものである。また、トーラス上の droplet の系と対応する場の理論は、低エネルギー領域において $R \times T^2$ 上の $U(N)_K$ または $U(K)_N$ Chern-Simons 理論であることを示す。また、理論全体としては $K \leftrightarrow N$ の交換の下で明らかな双対性を持っていることにも触れる。

第 11 章 第 8 章と同様にして、第 9 章で得られた IIB 型 ansatz を解析接続することで、滑らかな重力解を得る。これは、 $AdS_3 \times S^1$ 上の $\mathcal{N} = 4$ 超対称 Yang-Mills 理論の Coulomb branch に関連した解になっていることを確認して、簡単な議論を行う。これに双対な場の理論の真空についても議論を行う。

第1部 $SU(2|4)$ 対称性を持つ理論

第 2 章

$\widetilde{SU}(2|4)$ 対称性を持つ場の理論

第 2 章では、 $\widetilde{SU}(2|4)$ 対称性を持つ様々な場の理論について議論する。

2.1 対称性について

$\mathcal{N} = 4$ 超対称 Yang-Mills 理論が持つ超共形群 $SU(2, 2|4)$ の部分群 $\widetilde{SU}(2|4)$ に注目する。

$R \times S^3$ 上の $\mathcal{N} = 4$ 超対称 Yang-Mills 理論から議論を始めよう。この理論は $AdS_5 \times S^5$ 時空における重力理論と dual な関係にあり、対称群は超共形群 $SU(2, 2|4)$ である。この超共形群における bosonic 部分群は $SO(2, 4) \times SO(6)$ である。ここで

$$SU(2)_L \subset SU(2)_L \times SU(2)_R = SO(4) \subset SO(2, 4) \quad (2.1.1)$$

として含まれている部分群 $SU(2)_L$ に注目しよう。 $SO(4)$ 対称群は、場の理論が定義されている S^3 における回転の対称群である。

超共形代数全体を $SU(2)_L$ 変換の下で不変な部分代数で切断すると、新しい代数が得られる。この代数は超群 $\widetilde{SU}(2|4)$ をなす。ここで $\widetilde{}$ は普遍被覆 (universal cover) を取ることを意味している。このとき、bosonic 部分群は $R \times SU(2) \times SU(4)$ となる。以下では、この対称群を持つ理論を扱う。ここで、 R を $U(1)$ にコンパクト化すれば $SU(2|4)$ が得られることに注意しておこう。さらに、この対称群 (bosonic 部分群)

$$R \times SU(2) \times SU(4) \sim R \times SO(3) \times SO(6) \quad (2.1.2)$$

は、 $AdS_4 \times S^7$ 時空や $AdS_7 \times S^4$ 時空における M 理論の解において、1/2 BPS 状態を考えたときに現れるものであることに注意しておこう [1]。

$\mathcal{N} = 4$ 超対称 Yang-Mills 理論を $SU(2)_L$ の部分群で切断すると、馴染みのある理論が得られる。

以下では、 $\mathcal{N} = 4$ 超対称 Yang-Mills 理論を $SU(2)_L$ の様々な部分群で割ることで、興味ある理論を作っていく。簡単にまとめてみると

- $R \times S^3/Z_k$ 上の D3-brane 理論 : $SU(2)_L$ の部分群である Z_k で割ると得られる。
- $R \times S^2$ 上の D2-brane 理論 : $SU(2)_L$ の部分群である $U(1)_L$ で割ると得られる。
- BMN 行列模型 : $SU(2)_L$ 全体で割ると得られる [5, 6]。

となる。

具体的な切断 (truncation) の手続きとしては、対称性の下で不変な場のみを残してから量子化するというところを行う。この手続きは Lagrangian を構築するには便利であり、一般的な方法である。しかしながら、量子化された $\mathcal{N} = 4$ 超対称 Yang-Mills 理論全体において $SU(2)_L$ 部分群の下で不変な状態だけに制限して得られる量子的なスペクトルとは異なるものであることに注意しておこう。

$\mathcal{N} = 4$ 超対称 Yang-Mills 理論を解析接続することにより、興味深い理論が得られる。

bosonic 対称群 $R \times SU(2) \times SU(4)$ と密接に関係している超群として $SU(2, 2|2)$ が挙げられるが、これは 4 次元における $\mathcal{N} = 2$ 超共形群であり、

- 4 次元 $\mathcal{N} = 2$ 超共形場理論

と関係している。これについては第 8 章で議論する。

2.2 Witten 指数

$SO(6)$ 方向の角運動量を持つ 1/2 BPS 状態が存在する。

第 1 部で扱う理論は全て共通の対称群を持っているのであるから、全ての理論が共通した特徴を持っている。

その 1 つとして、 $SO(6)$ 方向の角運動量 J を持つ 1/2 BPS 状態が存在することが挙げられる。これらの状態は、 J を生成子とする $SO(2)$ ($\subset SO(6)$) 方向の角運動量を持ち、それと同じだけのエネルギー E を持っている。エネルギー E と角運動量 J が等しいというのは、BPS 束縛条件から要請されることである。

また、理論のパラメータが変化しても、1/2 BPS 状態のエネルギー E は変化しないことが示されている [7, 8]。このような状態は protected 状態と呼ばれる。これについては、7.7 節以降で詳しく議論する。

BPS 状態のみが寄与する Witten 指数を導入する。

このような 1/2 BPS 状態を正確に数えることを考えよう。そのためには、次のような指数 [4]

$$I(\beta_i) = \text{Tr} \left[(-1)^F e^{-\mu(E-2S-J_1-J_2-J_3)} e^{-\beta_1(E-J_1)} e^{-\beta_2(E-J_2)} e^{-\beta_3(E-J_3)} \right] \quad (2.2.1)$$

を導入するのが便利である。ここで $S = S_3$ は $SU(2)$ 生成子 S_1, S_2, S_3 のうちの 1 つである。また $J_1 = M_{12}$, $J_2 = M_{34}$, $J_3 = M_{56}$ は $SO(6)$ Cartan 生成子である。

なぜ (2.2.1) が指数になっているのかを確認してみよう。まず、超対称電荷 (supercharge) $Q^\dagger = Q_{-+++}^\dagger$ に注目しよう。添字は (S, J_1, J_2, J_3) の下での charge を表している。超共形代数の交換関係 (A.1.12) より、この超対称電荷は $E = 1/2$ を持っていることが確認できる。また、この超対称電荷とその共役は

$$\{Q, Q^\dagger\} = U \equiv E - 2S - (J_1 + J_2 + J_3) \quad (2.2.2)$$

という反交換関係に従う。さらに、 $E - J_i$ という組み合わせは超対称電荷と交換する。以上の事実を用いて、よく知られた議論 [3] を行うことにより、 U が 0 でない値を持つ状態は指数 (2.2.1) に寄与しないことが結論できるのである。このことはすなわち、指数 (2.2.1) を評価することによって、結合定数を変えたとき、どの BPS 表現が不変に保たれるかを調べることができることを意味している。詳しい議論の内容は、付録 A にまとめておいた。

1/2 BPS 状態を数えるために、指数 (2.2.1) において $\beta_3 \rightarrow \infty$ の極限を取って簡単にしてしまおう。この極限では、指数は $q \equiv e^{-\beta_1 - \beta_2}$ のみに依存して

$$I_N(q) \equiv \sum_{J=0}^{\infty} D(N, J) q^J = \lim_{\beta_3 \rightarrow \infty} I(\beta_1, \beta_2, \beta_3), \quad q = e^{-\beta_1 - \beta_2} \quad (2.2.3)$$

となる。ここで $J = J_3$ である。この分配関数 (partition function) $I_N(q)$ は、注目する系の 1/2 BPS 状態の数 $D(N, J)$ を数える。以下では、この指数 (2.2.3) を計算することにする。

様々な領域での解析が行われている。

$1 \ll J \ll N$ の領域においては、これらの BPS 状態は geometric な記述において massless 粒子の測地線と一致することが知られている。これについては第 3 章で実際に確認する。

また near BPS 極限 (J が非常に大きくて $\hat{E} = E - J$ が有限である極限) を調べる。 S^5 方向の励起については、1-loop 摂動補正は元の $\mathcal{N} = 4$ 超対称 Yang-Mills 理論と一致することが分かっている。重力側では、't Hooft coupling の強結合領域において、弱結合領域での結果の素朴な外挿とは異なる結果を出すことが分かる。これはスペクトルに何らかの補間関数 (interpolating function) が存在するべきことを意味している。

他には、 $SO(6)$ の量子数が大きい解は spin chain を用いて調べることができる [9, 10]。

さらに、この理論においては $SO(3)$ の量子数が大きい BPS 状態や near BPS 状態もあるが、以下では扱わない。

主にトンネル効果が無視できる領域で議論する。

以下で扱う理論には多数の真空があるので、原理的には異なる真空の間でトンネル現象が起こる。しかしながら、以下の殆どの議論ではトンネル効果が無視できるようなパラメータ領域 (すなわち、弦の結合定数が小さい領域) において議論することにしよう。

トンネル現象が起こるにもかかわらず、真空は縮退したままであることに注意しよう。真空は全て (2.2.3) の指数に正の符号で寄与することから分かるように、真空のエネルギーは変化しないのである。

2.3 $R \times S^3/Z_k$ 上の $\mathcal{N} = 4$ 超対称 Yang-Mills 理論

$\mathcal{N} = 4$ 超対称 Yang-Mills 理論の Z_k 切断として理論を構成することができる。

$R \times S^3/Z_k$ 上における $U(N)$ $\mathcal{N} = 4$ 超対称 Yang-Mills 理論を考える。ここで、

$$Z_k \subset SU(2)_L \subset SO(4) \subset SO(2, 4) \quad (2.3.1)$$

である。

この理論を構成するには、 $\mathcal{N} = 4$ 超対称 Yang-Mills 理論の自由場理論から議論を始めて、順に

1. Z_k の下で不変でない場を全て射影して取り除く。
2. 残った場に関しては $\mathcal{N} = 4$ 超対称 Yang-Mills 理論と同じ相互作用をするように要請する。

という手続きを行えばよい。ここで、一部の基本場 (elementary field) を取り除いた後で、量子化しているということに注意しよう。従ってこれは、元の $\mathcal{N} = 4$ 超対称 Yang-Mills 理論の量子論全体から不変な状態のみを保持して得られる理論とは異なるものである。

この理論の対称群は $\widetilde{SU}(2|4)$ となる。この理論のパラメータは、 N, k , そして Yang-Mills 結合定数 g_{YM3}^2 である。また、 $R \times S^3$ 上の $\mathcal{N} = 4$ 超対称 Yang-Mills 理論が持っている真空は一つであったが、 $R \times S^3/Z_k$ 上の理論は多数の超対称真空を持っている。

弱結合領域における超対称な真空は、 k 個の整数でパラメータ付けすることができる。

弱結合領域において理論の真空を調べてみよう。この理論には質量ギャップがあるので、全ての励起状態は massive であることに注意しよう。massive な場は弱結合領域では理論に寄与しないので、全て無視してしまっで構わない。よって、ここで考えるべき場はゲージ場の Wilson line だけであることが分かる。

従って、真空は S^3/Z_k 上の flat 接続の空間で与えられることになる。この空間は (ゲージ変換で移り変わる分を除いて) 非自明な生成子 $\pi_1(S^3/Z_k) = Z_k$ に沿った方向における、ゲージ場のホロノミー U によってパラメータ付けすることができる。よって、 U を $k \times k$ 行列で表示すると、 $U^k = 1$ が満たされるように U を対角化することができる。このとき、対角成分は 1 の k 重根 $e^{2\pi il/k}$ ($l = 1, \dots, k$) である。

以上の議論より、異なる真空は異なる U で表現され、また U は $e^{2\pi il/k}$ という成分がそれぞれ何個ずつあるかで区別できることが分かった。よって、それぞれの U を対角化したものに $e^{2\pi il/k}$ が n_l 個ずつ現れているとすると、あらゆる真空は k 個の数 (n_1, \dots, n_k) によって特定できることが分かる。ここで $N = \sum_{l=1}^k n_l$ が満たされている。

また、これらの真空は $R \times S^3$ 上の D-brane 理論を orbifolding することで得ることもできる。この場合は元のゲージ群 $U(N)$ に Z_k を埋め込むことを考えるわけだが、その埋め込み方が異なると、異なる真空が得られることになるのである。それぞれの真空に対応する理論に含まれる場については、quiver diagram の方法で表現することができる (図 2.1) [11]。特に、正則表現 (regular representation) は全ての l に対して $n_l = N/k$ が成り立つ場合に対応しているので、これに対応する真空が存在するためには N は k の倍数でなければならないことが分かる。

結局、真空の数は、整数 N を k 個の 1 以上の整数に分ける方法の数と等しいのであるから

$$D_{S^3/Z_k}(N, k) = {}_N C_{k-1} = \frac{(N+k-1)!}{N!(k-1)!} \quad (2.3.2)$$

であることが結論できる。

1/2 BPS 状態について

$SO(6)$ 生成子の 1 つがチャージ J を持つ 1/2 BPS 状態を考えて、その合計数を数えてみよう。これは分配関数

$$\begin{aligned} I_{S^3/Z_k}(p, q) &= \sum_{N=0}^{\infty} p^N I_N(q) = \sum_{N, J=0}^{\infty} D_{S^3/Z_k}(N, J) p^N q^J \\ &= [I_{\mathcal{N}=4}(p, q)]^k = \frac{1}{\prod_{n=0}^{\infty} (1 - pq^n)^k} \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

を用いて表すことができる。ここで、 $I_{\mathcal{N}=4}(p, q)$ は $\mathcal{N} = 4$ 超対称 Yang-Mills 理論における指数である。また、

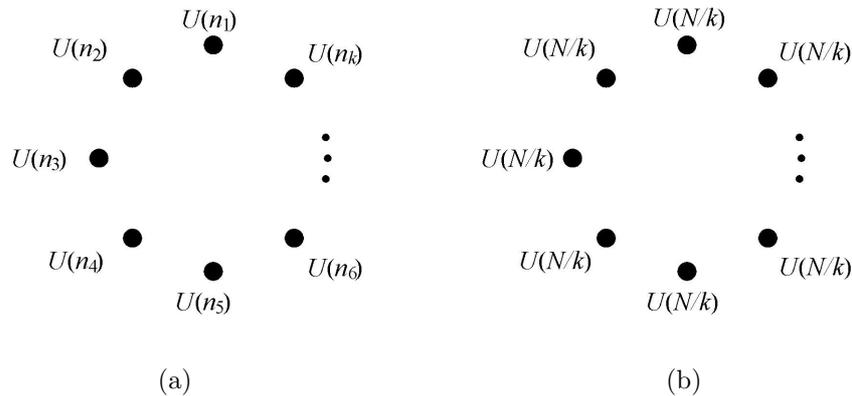


図 2.1: quiver diagram は vertex (●) とそれを結ぶ link (→) で構成される。link については議論に関係ないので、ここでは省略してしまっている。

ここでは、 $\mathcal{N} = 2$ 型超弦理論における D-brane 上に住んでいる超対称 Yang-Mills 理論に含まれる場について表現している場合を考えている。diagram 中の vertex (●) はベクトル多重項を表している。本当の quiver diagram には更に vertex 同士を結ぶ link が描かれており、それらがハイパー多重項を表す。

(a) 一般的な場合 (b) 正則表現の場合 ($n_l = N/k; l = 1, 2, \dots, k$)

$\mathcal{N} = 4$ 超対称 Yang-Mills 理論における状態の縮重度 (degeneracy) については

$$\sum_{N,J=0}^{\infty} p^N q^{N^2/2} q^J D(N, J) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + pq^{n-1/2}) \quad (2.3.4)$$

$$\sum_{J=0}^{\infty} D(N, J) q^J = \frac{1}{\prod_{n=1}^N (1 - q^n)} \quad (2.3.5)$$

$$I_{\mathcal{N}=4}(p, q) \equiv \sum_{N,J=0}^{\infty} p^N q^J D(N, J) = \frac{1}{\prod_{n=0}^{\infty} (1 - pq^n)} \quad (2.3.6)$$

というように、様々な形で表すことができる [12, 13]。

(2.3.4) 式では、調和振動子ポテンシャル中のフェルミオンの系として表現されている。(2.3.6) 式では、調和振動子ポテンシャル中のボソンの系のように表現されている。(2.3.3) 式では、この表式を用いている。

強結合領域においても真空の数は変わらない。

(2.3.2) 式は弱結合領域における真空の数として求めたものであるが、この結果は強結合領域においても有効である。なぜなら、全ての真空は指数 (2.2.3) に寄与することが確認できるからである。

2.4 $R \times S^2$ 上の 2 + 1 次元超対称 Yang-Mills 理論

$\mathcal{N} = 4$ 超対称 Yang-Mills 理論の $U(1)_L$ 切断として理論を構成することができる。

この場の理論は、 $R \times S^3$ 上の $U(N)$ $\mathcal{N} = 4$ 超対称 Yang-Mills 理論から出発して、自由場理論のスペクトルのうち

$$U(1)_L \subset SU(2)_L \subset SU(2)_L \times SU(2)_R = SO(4) \subset SO(2, 4) \quad (2.4.1)$$

として含まれている $U(1)_L$ の下で不変な状態だけを残すことで構成できる。この結果、理論は 1 次元低い次元に住むことになる。すなわち、 $R \times S^2$ 上の理論となるのである。

$U(1)_L$ 切断の具体的な手続きを簡潔に示しておこう。 $R \times S^3$ の計量は

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{1}{4} [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2 + (d\psi + \cos \theta d\phi)^2]; \quad \theta \in [0, \pi], \quad \phi \in [0, 2\pi], \quad \psi \in [0, 4\pi] \quad (2.4.2)$$

と表すことができる。ここで

1. ψ 依存性を全ての場について取り除く。
2. $\mathcal{N} = 4$ 超対称 Yang-Mills 理論におけるゲージ場を $A_{\mathcal{N}=4} = A + \Phi(d\psi + \cos \theta d\phi)$ という形で表す。但し、 A は 2 + 1 次元のゲージ場である。

という手続きを実行すればよい。この結果、 Φ 方向にコンパクト化された 1 次元低い理論が得られることになる。

理論の作用とパラメータについて

こうして得られた理論の作用は

$$\begin{aligned} S = & \frac{1}{g_{YM2}^2} \int dt \frac{d^2 \Omega}{\mu^2} \text{Tr} \left[-\frac{1}{4} F^{mn} F_{mn} - \frac{1}{2} (D_m X^a)^2 - \frac{1}{2} (D_m \Phi)^2 + \frac{i}{2} \bar{\Psi} \Gamma^m D_m \Psi \right. \\ & + \frac{1}{2} \bar{\Psi} \Gamma^a [X^a, \Psi] + \frac{1}{2} \bar{\Psi} \Gamma^\Phi [\Phi, \Psi] + \frac{1}{4} [X_a, X_b]^2 + \frac{1}{2} [\Phi, X^a]^2 - \frac{\mu^2}{8} X_a^2 \\ & \left. - \frac{\mu^2}{2} \Phi^2 - \frac{3i\mu}{8} \bar{\Psi} \Gamma^{012\Phi} \Psi - \mu \Phi dt \wedge F \right] \quad (2.4.3) \end{aligned}$$

となる。 $m = 0, 1, 2, a = 4, \dots, 9$ である。また、 $(\Gamma^m, \Gamma^\Phi, \Gamma^a)$ は 10 次元 Γ 行列である。

ここで、4 次元 $\mathcal{N} = 4$ 超対称 Yang-Mills 理論は 10 次元 $\mathcal{N} = 1$ 超対称 Yang-Mills 理論から次元還元して得られることを思い出しておこう。 a 方向は 10 次元から 4 次元に還元するときにコンパクト化する方向、 Φ 方向はさらに 4 次元から 3 次元に還元するときにコンパクト化する方向に相当している。

transverse 方向に相当するスカラー場が 7 個あるので、得られる理論は $SO(7)$ 対称性を持つように思えるが、このうち 1 つだけ (Φ) を選び出して他の場とは区別して扱うことになるので、結局 $SO(6)$ 対称性に破れるのである。但し、 Φ を選び出しても、超対称性については 16 個の超対称電荷を保持したままである。

この理論を特徴付ける無次元パラメータは、 N と 't Hooft coupling の値 $g_{eff}^2 N \equiv 2\pi g_{YM2}^2 N / \mu$ である。 μ^{-1} は 2 次元球面 S^2 の大きさである。 S^2 の大きさは次元を持つパラメータであり、単に全体のエネルギースケールを設定する役割を持つに過ぎない。作用 (2.4.3) における添字は半径 μ^{-1} を持った 2 次元計量で上げ下げすることになる。単位 S^3 (半径 1 の S^3) 上の $\mathcal{N} = 4$ 超対称 Yang-Mills 理論を $U(1)_L$ 切断するとき $\mu = 2$ が得られるので、以下では $\mu = 2$ とおくことがある。このとき、 $SO(6)$ 方向の角運動量 J を持った BPS 状態のエネルギーは $E = J$ となる。

BMN 行列模型のある極限として得ることもできる。

この理論は BMN 行列模型における fuzzy 球面の真空を考えて、そこで large N 極限を取ることで構成することもできる。large N 極限を取ることで fuzzyness を除去されるので、fuzzy 球面は通常の球面になるのである。その球面上の理論が $R \times S^2$ 上の $2 + 1$ 次元超対称 Yang-Mills 理論であるというわけである。詳しくは 7.13 節で議論する。

理論の真空は整数でパラメータ付けすることができる。

超対称性理論において、真空のエネルギーは 0 であることに注目しよう。球面に沿った方向の field strength を $F = f d^2 \Omega$ と書こう。このとき、Lagrangian において Φ と f は

$$-\frac{1}{2}(f + \mu\Phi)^2 \quad (2.4.4)$$

という平方完成の形で入ることが分かる。従って、真空では $f = -\mu\Phi$ が成り立っていないなければならない。

f の値には量子化条件が課されるので、真空における Φ 場の値も量子化されることになる。よって、この Φ 場を対角化すれば、その要素は N 個の整数 n_1, \dots, n_N を用いて表すことができる。従って、真空はこの N 個の整数でパラメータ付けできることが分かる。この場合は、これらの整数に課されるべき制限は無いので、真空の数は無限大である。よって、指数を書くことはしない。

$R \times S^3/Z_k$ 上の $\mathcal{N} = 4$ 超対称 Yang-Mills 理論において $k \rightarrow \infty$ 極限を取ったものである。

$R \times S^3/Z_k$ 上の $\mathcal{N} = 4$ 超対称 Yang-Mills 理論において large k 極限を取ったものは、まさにこの理論であることに注目しよう。 N の値は同じであり、

$$g_{eff}^2 N = \frac{2\pi g_{YM2}^2 N}{\mu} = g_{YM3}^2 N k \quad (2.4.5)$$

である。 g_{YM3} は $R \times S^3/Z_k$ 上の $\mathcal{N} = 4$ 超対称 Yang-Mills 理論における結合定数である。よって、正確には

$$k \rightarrow \infty, \quad g_{YM3}^2 \rightarrow 0, \quad g_{YM2}^2 : \text{fixed} \quad (2.4.6)$$

という極限を取るようになる。

強結合極限では $R \times S^2$ 上の M2-brane 理論になる。

この理論の強結合極限 $g_{YM2} \rightarrow \infty$ を取ると、 $R \times S^2$ 上の M2-brane 理論を得られると予想される。この理論は 32 個の超対称性を持っていて、 $AdS_4 \times S^7$ と密接に関係している馴染み深い理論である。

従って、強結合極限において理論は完全な $SO(8)$ 対称性を持つことになる。 $R \times S^2$ 上の超対称 Yang-Mills 理論のエネルギー E は、強結合極限を取ると

$$E \longrightarrow \Delta - \tilde{J} \quad (2.4.7)$$

となる。ここで、 Δ は $R \times S^2$ 上の M2-brane 理論の Hamiltonian である。また、 \tilde{J} は $SO(2)$ ($\subset SO(8)$) 生成子であり、作用 (2.4.3) においてあらわに保持されている $SO(6)$ 対称性の生成子とは交換する。

M2-brane が 1 枚 ($N = 1$) の場合ならば、 $R \times S^2$ 上の超対称 Yang-Mills 理論におけるゲージ場の field strength に dual を取ってスカラー場にして、元々 7 個あった transverse 方向に相当するスカラー場に 1 つ追加することで、あらわに確認することができる。これによって、(2.4.4) の周りで記述される真空は M2-brane 理論の 1/2 BPS 状態と関係していることが分かる。

ここで、M2-brane 理論は 32 個の超対称性を持っているので、この 1/2 BPS 状態は 16 個の超対称性を持っていることに注意しよう。この節で扱った理論 (2.4.3) は 16 個しか超対称性を持っていないので、この理論における 1/2 BPS 状態は 8 個しか超対称性を持っていない。同じ 1/2 BPS 状態という表現を使っているが混同してはならないので注意してもらいたい。

2.5 BMN 行列模型

$\mathcal{N} = 4$ 超対称 Yang-Mills 理論の $SU(2)_L$ 切断として理論を構成することができる。

BMN 行列模型は、4 次元 $U(N)$ $\mathcal{N} = 4$ 超対称 Yang-Mills 理論を $0 + 1$ 次元 (空間 0 次元・時間 1 次元) へと次元還元することで得られる。具体的には、自由場理論に含まれる $SU(2)_L$ 不変な状態だけを残して、これらの相互作用は $\mathcal{N} = 4$ 超対称 Yang-Mills 理論におけるものと同じものとする [5, 6]。

$\mathcal{N} = 4$ 超対称 Yang-Mills 理論において、 $S^3 \sim SO(4)$ 上の Kaluza-Klein モードは最低モードを除いては全て $SU(2)_L$ の量子数を持っているので、結果的に $0 + 1$ 次元へ還元されることになるのである。

$SO(6)$ スカラー場についてはゼロモードを保持して、ゲージ場については

$$A_{\mathcal{N}=4} = X_1\omega_1 + X_2\omega_2 + X_3\omega_3 \quad (2.5.1)$$

と分割する。ここで、 ω_i は S^3 上の左不変 (left-invariant) な 1 形式である。 X_i は $SO(3)$ の下で変換するスカラー場である。

真空は次元 N の $SU(2)$ 表現に対応している。

この理論には多数の真空が存在する。これらの真空はスカラー場 X_i を $SU(2)$ Lie 代数の生成子と等しくおくことで得られる。実際、真空は次元 N の $SU(2)$ 表現と一対一対応している。例えば、次元 n の既約表現を $N(n)$ 個ずつ持っているとする、

$$N = \sum_n N(n) \quad (2.5.2)$$

で定義される N の分割の 1 つ 1 つが異なる真空に対応する。よって、真空の数は N の分配 (partition) $P(N)$ に等しい。

BMN 行列模型の異なる真空解は、 $\mathcal{N} = 4$ 超対称 Yang-Mills 理論ではゲージ変換で繋がっている。

$\mathcal{N} = 4$ 超対称 Yang-Mills 理論は唯一つの真空を持っている。一方で、BMN 行列模型のあらゆる真空解は $\mathcal{N} = 4$ 超対称 Yang-Mills 理論の零エネルギー解に持ち上げること (uplift) ができるはずである。BMN 行列模

型を持つ多数の真空は、 $\mathcal{N} = 4$ 超対称 Yang-Mills 理論が持つ唯一の真空と、どのように対応しているのであろうか。

実は、BMN 行列模型の多数の真空は、 $\mathcal{N} = 4$ 超対称 Yang-Mills 理論の真空においてはゲージ変換で繋がっているのである。すなわち、BMN 行列模型の真空解は

$$A_{\mathcal{N}=4} = \omega_1 J_1 + \omega_2 J_2 + \omega_3 J_3 = -i(dg)g^{-1} \quad (2.5.3)$$

というように uplift することができるのである。 g は $SU(2)$ 群の要素で J_i と同じ表現に属するものである。また、この $SU(2)$ 群は S^3 をパラメータ付けするものである。よって、多数の真空解は $A_{\mathcal{N}=4} = 0$ からの純粋な (pure) ゲージ変換になっているのである。

$\mathcal{N} = 4$ 超対称 Yang-Mills 理論においては、これらの異なる真空解はゲージ変換で繋がっている。ところが、BMN 行列模型においては、たとえ実際の系が $SU(2)_L$ 不変であってもゲージ変換は $SU(2)_L$ の下で不変ではない。よって、BMN 行列模型においては、それらはゲージ変換で移り変わることができない (gauge inequivalent) 真空となってしまうのである。

$R \times S^2$ の理論と関係している。(再度)

n 次元の $SU(2)$ 表現を \tilde{N} 個集めてブロック対角に並べたものに $n \rightarrow \infty$ の極限を取ると、 $2+1$ 次元理論を得ることができる。有限の n に対しては fuzzy 球面上の $U(\tilde{N})$ 理論が得られて、 $n \rightarrow \infty$ の極限を取るとその fuzziness は消滅するのである。

1/2 BPS 状態について

$SO(6)$ charge J を持った 1/2 BPS 状態の個数を数えるには

$$I_{BMN}(p, q) = \sum_{N, J=0}^{\infty} D_{BMN}(N, J) p^N q^J = \prod_{m=1}^{\infty} I_{\mathcal{N}=4}(p^m, q) = \frac{1}{\prod_{m=1}^{\infty} \prod_{n=0}^{\infty} (1 - p^m q^n)} \quad (2.5.4)$$

という分配関数に注目すればよい。 $q = 0$ とおくと、真空の数は N の分割で与えられることが分かる。 J と N が非常に大きいときは、

$$D_{BMN}(N, J) \sim e^{(3.189\dots)(NJ)^{1/3}}; \quad \frac{J^2}{N} \gg 1, \quad \frac{N^2}{J} \gg 1 \quad (2.5.5)$$

となる。この表式は $N \leftrightarrow J$ という入れ替えの下で対称であるが、これは (2.5.4) 式が $n = 0$ 因子を除けば、 $p \leftrightarrow q$ という入れ替えの対称性を持っていることに起因している。

第 3 章

場の理論の真空中に双対な重力解

第 2 章で挙げた場の理論は、全て同じ超対称群 $\widetilde{SU}(2|4)$ を持っている。その bosonic 対称性は $R \times SU(2) \times SU(4) \sim R \times SO(3) \times SO(6)$ であるから、これらの場の理論に双対な重力解において、geometric に作用する bosonic 対称性は $R \times SO(3) \times SO(6)$ であることが分かる。ここで、 R の因子は時間座標 t 方向の並進に関する Killing ベクトルが存在することを意味している。さらに、残りの bosonic な生成子が作用する S^2 と S^5 が存在することも直ちに理解することができる。

第 3 章では、このような対称性を持った重力解を求めて、解析を行うことにしよう。各節の内容は次のようになっている。

- 3.1 $SO(6) \times SO(3)$ 対称性を持つ 11 次元超重力理論の超対称解を求める。その結果、あらゆる重力解は 3 次元 Toda 方程式を満たす関数のみでパラメータ付けされることを確認する。
- 3.2 3.1 節で得られた 11 次元重力解について解析を行う。このとき droplet という概念を導入する。特に pp-wave 時空解や $AdS_{4,7} \times S^{7,4}$ 時空解を具体例として扱う。
- 3.3 3.1 節で得られた 11 次元重力解をコンパクト化することにより、10 次元重力解を求める。この解に関する解析は導電円盤が存在する静電気問題の系の解析に帰着させられることを確認した上で、実際に静電気問題の系の解析を行う。

3.1 $SO(6) \times SO(3)$ 対称性を持つ 11 次元超重力理論の超対称解

11 次元超重力理論の超対称解のうち、 $SO(6) \times SO(3)$ の対称性を持ったものを探そう [1]。

3.1.1 S^5, S^2 上への reduction

議論を始めるにあたって

$$ds_{11}^2 = e^{2\lambda} \left(\frac{1}{m^2} d\Omega_5^2 + e^{2A} d\tilde{\Omega}_2^2 + ds_4^2 \right) \quad (3.1.1)$$

$$G_{(4)} = G_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge dx^{\mu_3} \wedge dx^{\mu_4} + \partial_{\mu_1} B_{\mu_2} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge d^2\tilde{\Omega} \quad (3.1.2)$$

という ansatz をおこう。ここで $d\Omega_5^2$ と $d\tilde{\Omega}_2^2$ はそれぞれ 5 次元と 2 次元の単位球上の計量である。 $\mu_i = 0, \dots, 3$ は残りの 4 次元を表す。

11 次元を S^5, S^2 と 4 次元に分解する記法を選ぶ。

11 次元の座標をそれぞれ

$$\Omega_5 : \theta^a, \quad \tilde{\Omega}_2 : \theta^\alpha, \quad ds_4 : x^\mu; \quad ds_{11} : x^m = (\theta^a, \theta^\alpha, x^\mu) \quad (3.1.3)$$

と表そう。ここで $a, b, \dots = 1, \dots, 5$; $\alpha, \beta, \dots = 1, 2$; $\mu, \nu, \dots = 0, 1, 2, 3$; $m, n, \dots = 0, \dots, 10$ である。

また、11次元 Γ 行列の計算を行うときには

$$\begin{aligned}\Gamma^{\hat{a}} &= \rho^{\hat{a}} \otimes \gamma^7, & \Gamma_{\hat{\alpha}} &= 1 \otimes \sigma_{\hat{\alpha}} \otimes \gamma^5, & \Gamma_{\hat{\mu}} &= 1 \otimes 1 \otimes \gamma_{\hat{\mu}}, \\ \gamma^7 &= (\sigma_1 \sigma_2) \otimes (-i\gamma^5) = \sigma_3 \otimes \gamma^5, & (\gamma^7)^2 &= +1, \\ \{\rho^{\hat{a}}, \rho^{\hat{b}}\} &= 2\delta^{\hat{a}\hat{b}}, & \{\sigma_{\hat{\alpha}}, \sigma_{\hat{\beta}}\} &= 2\delta_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}\end{aligned}\quad (3.1.4)$$

という表記を採用することにしよう。ここでは接空間上の座標に $\hat{}$ をつけて表したが、以下では混乱の起こらない限り $\hat{}$ は省略するものとする。すなわち、曲がった時空も接空間も同じ記号を用いて座標を表すこととする。

超対称な解を求めるには、Killing スピノール方程式

$$\delta\psi_{\text{grav}} = \nabla_m \eta + \frac{1}{288} [\Gamma_m{}^{npqr} - 8\delta_m^n \Gamma^{pqrs}] G_{npqr} \eta = 0 \quad (3.1.5)$$

を満たすスピノール η が存在することを要請すればよい。ここで δ は超対称変換を表している。

以下では [14] の議論を参考にしながら方程式 (3.1.5) を解いていくことにする。[14] では、 $SO(2, 4) \times U(1)$ 対称性を持った一般的な超対称解を考えている。いま考えている解の方が超対称性の数は多いが、適切な Wick 回転をすれば、[14] で考えた一般的な状況の特別な場合として扱うことができるので、同様の議論の流れに沿うことができるのである。

11次元 Killing スピノールが S^5 上の Killing スピノールの因子を持つことを要請する。

まずは S^5 上に reduction するために、スピノールを

$$\eta = \psi(\theta^a) \otimes e^{\lambda/2} \xi(\theta^a, x^\mu) \quad (3.1.6)$$

として分解しよう。 $e^{\lambda/2}$ という因子は後で式が煩雑になることを防ぐために入れた。 S^5 上の Killing スピノール $\psi(\theta^a)$ が満たすべき方程式は

$$\delta\psi = D_a \psi - \frac{i}{2} \rho_a \psi \equiv \left(\partial_a - \frac{1}{4} \omega_{abc} \rho^{bc} \right) \psi - \frac{i}{2} \rho_a \psi = 0 \quad (3.1.7)$$

である。ここで D_a は5次元単位球面上に reduction した共変微分である。 ω_{abc} はスピン接続であり、 $\rho^{bc} = \frac{1}{2} [\rho^b, \rho^c]$ である。計量 (3.1.1) より S^5 の半径は $m^{-1}e^\lambda$ であることに注意すれば、この共変微分 D_a は reduction する前の共変微分 ∇_a と

$$\nabla_a = mD_a - \frac{1}{2} \gamma^\mu{}_a \partial_\mu \lambda \quad (3.1.8)$$

という関係を持つことが分かる。以上の結果を (3.1.5) 式に入れるとスピノール ξ に関する方程式

$$\begin{aligned}\left[\gamma^\mu \partial_\mu \lambda + \frac{1}{144} e^{-3\lambda} \tilde{\Gamma}^{npqr} G_{npqr} + im\gamma_7 \right] \xi &= 0 \\ \left[\nabla_\mu - \frac{im}{2} \gamma_\mu \gamma_7 - \frac{1}{24} e^{-3\lambda} \tilde{\Gamma}^{npq} G_{mnpq} \right] \xi &= 0 \\ \left[\tilde{\nabla}_\alpha - \frac{1}{2} \gamma^\mu{}_\alpha \partial_\mu \lambda - \frac{im}{2} \Gamma_\alpha \gamma_7 - \frac{1}{8} e^{-3\lambda} \tilde{\Gamma}^{\beta\mu\nu} G_{\alpha\beta\mu\nu} \right] \xi &= 0\end{aligned}\quad (3.1.9)$$

が得られる。

残りの因子を S^2 上の Killing スピノールの基底で展開する。

次に、 S^2 上への reduction を考えよう。2成分スピノール $\chi_\pm(\theta^a)$ を

$$\tilde{\nabla}_\alpha \chi_\pm = \pm \frac{i}{2} \tilde{e}_\alpha^{\hat{\alpha}} \gamma_{\hat{\alpha}} \chi_\pm = \pm \frac{i}{2} e^{-A} \gamma_\alpha \gamma_5 \chi_\pm \quad (3.1.10)$$

を満たすものとして導入しよう。ここで $\tilde{e}_\alpha^{\hat{\alpha}}$ は S^2 上の vielbein である。これは chiral スピノールと anti-chiral スピノールを導入したことを意味している。この基底 (χ_+, χ_-) を用いて 6 次元スピノール ξ を

$$\xi = \chi_+ \otimes \epsilon_+ + \chi_- \otimes \epsilon_- \quad (3.1.11)$$

と展開しよう。ここで 4 次元スピノール ϵ_\pm を定義した。また、 χ_\pm は $SU(2) \sim SO(3)$ 変換の下で共変であることが要請されるので、一般性を失わずに

$$\chi_- = \hat{\gamma}\chi_+, \quad \hat{\gamma} \equiv i\gamma_7\gamma_5 \quad (3.1.12)$$

とおくことができる。以上の結果を (3.1.9) 式に入れると、 ξ が満たすべき方程式は

$$\left[\gamma^\mu \partial_\mu \lambda + \frac{1}{144} e^{-3\lambda} \tilde{\Gamma}^{npqr} G_{npqr} + im\gamma_7 \right] \xi = 0 \quad (3.1.13)$$

$$\left[ie^{-A} \gamma^5 P + \gamma^\mu \partial_\mu A - im\gamma_7 - \frac{1}{4} e^{-3\lambda-2A} \hat{\gamma} \gamma^{\mu\nu} \partial_\mu B_\nu \right] \xi = 0 \quad (3.1.14)$$

$$\left[\nabla_\mu - \frac{im}{2} \gamma_\mu \gamma_7 - \frac{1}{4} e^{-3\lambda-2A} \partial_{[\mu} B_{\nu]} \gamma^\nu \hat{\gamma} - \frac{1}{24} e^{-3\lambda} \gamma^{\nu\lambda\sigma} G_{\mu\nu\lambda\sigma} \right] \xi = 0 \quad (3.1.15)$$

となることが分かる。ここで χ_\pm に作用する射影演算子 P を $P\chi_\pm = \pm\chi_\pm$ として導入した。

以下の議論では $G_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = 0$ とおくことにする。

ここで field strength $G_{(4)}$ について考察しておこう。field strength の運動方程式

$$d(*_{11}G_{(4)}) = 0 \quad (3.1.16)$$

より、 x^μ に脚を持つ成分に関しては

$$G_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = I_1 e^{-3\lambda-2A} \epsilon_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} \quad (3.1.17)$$

が成り立つことになる。ここで I_1 は定数である。この式は非コンパクトな 4 次元空間に flux I_1 が存在することを意味している。

ここで注目したいのは超対称電荷を 16 個保持する系である。よって、 $AdS \times S$ 時空や pp-wave 時空上の chiral primary 演算子に関係した解を考えることになる。このとき、少なくとも漸近領域においては S^2 や S^5 が萎むことができなくてはならないことに注意しよう。しかしながら、もし flux $I_1 \neq 0$ であれば、これらの球面は特異的な振る舞いをしない限り、萎むことはできない。なぜなら、球面が萎むとその点で flux の密度が発散してしまうからである。

従って、以下の議論では $I_1 = 0$ とおくことにしよう。そうすると、 ξ が満たす方程式は、2 つの変数 $\epsilon_- \pm \gamma_5 \epsilon_+$ が満たす、それぞれ分離した方程式として表せることが分かる。よって、 ξ が満たす方程式は

$$\epsilon_- = -a\gamma_5 \epsilon_+, \quad a = \pm 1 \quad (3.1.18)$$

という関係を課して解くことができる。このときスピノール ξ は

$$\xi = (1 - a\gamma_5 \hat{\gamma}) \cdot \chi_+ \otimes \epsilon_+ \quad (3.1.19)$$

と分解することができる。 $\epsilon \equiv \epsilon_+$ で表せば、運動方程式は

$$\left[\gamma^\mu \partial_\mu \lambda + \frac{a}{12} e^{-3\lambda-2A} \gamma_5 \gamma^{\mu\nu} \partial_\mu B_\nu + am \right] \epsilon = 0 \quad (3.1.20)$$

$$\left[ie^{-A} \gamma_5 + \gamma^\mu \partial_\mu A - \frac{a}{4} e^{-3\lambda-2A} \gamma_5 \gamma^{\mu\nu} \partial_\mu B_\nu - am \right] \epsilon = 0 \quad (3.1.21)$$

$$\left[\nabla_\mu - \frac{am}{2} \gamma_\mu - \frac{a}{8} e^{-3\lambda-2A} F_{\mu\nu} \gamma^\nu \gamma_5 \right] \epsilon = 0 \quad (3.1.22)$$

となる。 $F_{\mu\nu}$ はゲージ場 B_μ の field strength である。

以下では、 $a = 1$ とする。 $a = -1$ は B_μ と m の符号を変えれば得られる。または、4 次元座標 x^μ を全て符号を変えても得ることができる。

3.1.2 4次元スピノール双線形

スピノール双線形 (bilinear) を作る。

4次元スピノール ϵ を使って、スピノール双線形を作ろう。

$$f_1 = \bar{\epsilon}\epsilon, \quad f_2 = \bar{\epsilon}\gamma_5\epsilon, \quad K_\mu = -2\bar{\epsilon}\gamma_\mu\epsilon, \quad L_\mu = 2m\bar{\epsilon}\gamma_\mu\gamma_5\epsilon, \quad Y_{\mu\nu} = \bar{\epsilon}\gamma_{\mu\nu}\epsilon \quad (3.1.23)$$

後で、 $\bar{\epsilon}$ の代わりに転置を取ったスピノール ϵ^\top を用いた双線形も構成する。

双線形 (3.1.23) を微分すると

$$\nabla_\mu f_1 = 0 \quad (3.1.24)$$

$$\nabla_\mu f_2 = L_\mu - 3\partial_\mu \lambda f_2 \quad (3.1.25)$$

$$\nabla_\nu K_\mu = -2mY_{\mu\nu} + \frac{e^{-3\lambda-2A}}{2} F_{\mu\nu} f_2 \quad (3.1.26)$$

となる。 $\nabla_\mu L_\nu$ と $\nabla_\mu Y_{\mu\lambda}$ の具体的な表式については後で使わないので省略する。

議論がしやすい規格化と座標系 (t, y, x^i) を設定する。

(3.1.24) 式に注目して

$$f_1 = -i \quad (3.1.27)$$

という規格化を選ぶことにしよう。また双線形 f_2 は実であるから

$$f_2 = -\sinh \zeta \quad (3.1.28)$$

と表すことにしよう。

これらを用いて (3.1.25), (3.1.26) 式を表すことにより、4次元基底空間 (base space) の計量の形に制限を加えていこう。まず (3.1.25) 式より

$$e^{-3\lambda}\nabla_\mu(e^{3\lambda}\sinh\zeta) = -L_\mu \quad (3.1.29)$$

が得られる。ベクトル L_μ が非自明な成分を1つしか持たないように座標系を選ぶと便利であるから、座標 y を

$$y = -e^{3\lambda}\sinh\zeta \quad (3.1.30)$$

と定義することにしよう。このとき

$$L_\mu dx^\mu = e^{-3\lambda} dy \quad (3.1.31)$$

が成り立つ。

次に (3.1.26) 式に注目すると、 K^μ は Killing 条件

$$\nabla_\mu K_\nu + \nabla_\nu K_\mu = 0 \quad (3.1.32)$$

を満たすことが分かる。これは K^μ が Killing ベクトルであることを意味している。やはりベクトル K^μ の方向に座標軸を選ぶと便利であるから、座標 t を

$$K^t = 2m \quad (3.1.33)$$

と定義することにしよう。実は [14] と同様の議論をすることにより、 e^λ と 4形式の field strength の Lie 微分 \mathcal{L}_K は 0 となることが示せる。これは、 K^μ が 4次元計量だけでなく、全体の重力解の isometry をなすことを意味している。

すぐ後で確認するように、 t 軸と y 軸は直交する。残りの 2次元については、 (t, y) と直交する座標 x^i ($i = 1, 2$) を取ることにしよう。

Fierz 恒等式から課せられる制限を考察する。

Fierz 恒等式を用いて計量の成分をいくつか決めてしまおう。このとき

$$-\frac{1}{4m}K_\mu L^\mu = (\bar{\epsilon}\gamma_\mu\epsilon)(\bar{\epsilon}\gamma^\mu\gamma_5\epsilon) = 0 \quad (3.1.34)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4m^2}L^2 &= (\bar{\epsilon}\gamma_\mu\gamma_5\epsilon)(\bar{\epsilon}\gamma^\mu\gamma_5\epsilon) = (\bar{\epsilon}\gamma_5\epsilon)^2 - (\bar{\epsilon}\epsilon)^2 = f_2^2 - f_1^2 = \cosh^2 \zeta \\ -\frac{1}{4}K^2 &= (\bar{\epsilon}\gamma_\mu\epsilon)(\bar{\epsilon}\gamma^\mu\epsilon) = (\bar{\epsilon}\gamma_5\epsilon)^2 - (\bar{\epsilon}\epsilon)^2 = f_2^2 - f_1^2 = \cosh^2 \zeta \end{aligned} \quad (3.1.35)$$

という関係式が得られる [15]。(3.1.34) 式より、 t 方向と y 方向は直交していること、 t 方向は時間的で y 方向は空間的であることが確認できる。また、 L^2 、 K^2 と座標 t, y の定義を比較すれば g_{tt} と g_{yy} 成分を求めることができる。さらに、 t 方向は解全体の isometry であるから、計量は

$$\begin{aligned} ds_4^2 &= -\frac{1}{m^2} \cosh^2 \zeta (dt + V_i dx^i)^2 + \frac{e^{-6\lambda}}{4m^2 \cosh^2 \zeta} (dy^2 + g_{ij} dx^i dx^j) \\ &\equiv -g_0^2 (dt + V_i dx^i)^2 + h^2 (dy^2 + g_{ij} dx^i dx^j) \end{aligned} \quad (3.1.36)$$

という形で表せることが分かる。ここで $i, j = 1, 2$ である。最後の等号において、後の便宜のために

$$g_0 = \frac{1}{m} \cosh \zeta, \quad h = \frac{e^{-3\lambda}}{2m \cosh \zeta} \quad (3.1.37)$$

という関数を導入した。また、vielbein については

$$e_{\hat{\mu}}^{\hat{\nu}} dx^{\hat{\mu}} = g_0 (dt + V_i dx^i), \quad e_j^{\hat{i}} = h \hat{e}_j^{\hat{i}}, \quad e_y^{\hat{3}} = h, \quad \text{otherwise} = 0 \quad (3.1.38)$$

となるように、flat 時空の座標系を選んでおくことにしよう。

e^{2A} を評価する。

ワープ因子 (warp factor) e^{2A} の表現を求めよう。(3.1.20) 式と (3.1.21) 式の線形結合を作ってベクトル場 B_μ を消去してしまうと

$$\not{\partial}(A + 3\lambda)\epsilon = (-ie^{-A}\gamma_5 - 2m)\epsilon \quad (3.1.39)$$

となる。この方程式とスピノール双線形の定義 (3.1.23) を使うと

$$2\partial_\mu(A + 3\lambda)f_1 = \bar{\epsilon}\{\not{\partial}(A + 3\lambda), \gamma_\mu\}\epsilon = -\frac{i}{m}e^{-A}L_\mu \quad (3.1.40)$$

という関係式が成り立つことが確認できるので、ここに規格化条件 (3.1.27) と (3.1.31) 式を使って

$$2m \cdot d(A + 3\lambda) = e^{-A-3\lambda} dy \quad (3.1.41)$$

という式が得られる。よって、両辺積分することにより e^A の表現が

$$e^A = \frac{y}{2m} e^{-3\lambda} \quad (3.1.42)$$

として得られる。

3.1.3 スピノールの形に課される制限

Killing スピノールに課される射影条件について議論しよう。(3.1.42) 式を (3.1.39) 式に代入して

$$\not{\partial}(A + 3\lambda) = \gamma^\mu \partial_{\hat{\mu}} \log \frac{y}{2m} = \gamma^3 \frac{1}{h} \partial_y \log y = \gamma^3 e^{-A} \cosh \zeta \quad (3.1.43)$$

を用いると

$$(\cosh \zeta e^{-A} \gamma_3 + i e^{-A} \gamma_5 + 2m) \epsilon = 0 \quad (3.1.44)$$

となる。ここで (3.1.38) 式より、 γ_3 の添字である 3 方向とは、 y 方向に対応した flat 時空上の方向である。この射影演算子を単純化するために

$$\left(e^{-\gamma^3 \zeta} + i \gamma_3 \gamma_5 \right) \epsilon = 0 \quad (3.1.45)$$

と書き直しておこう。ここで $2me^A = ye^{-3\lambda} = \sinh \zeta$ を用いた。また

$$\epsilon = e^{\frac{\zeta}{2} \gamma_3} \tilde{\epsilon} \quad (3.1.46)$$

を導入すれば、

$$i \gamma_3 \gamma_5 \tilde{\epsilon} = -\tilde{\epsilon} \quad (3.1.47)$$

という簡単な条件まで持っていける。

ここで K と L の非零成分の表現

$$2m = K^t = \frac{2}{g_0} \epsilon^\dagger \epsilon, \quad e^{-3\lambda} = L_y = 2mh \bar{\epsilon} \gamma_3 \gamma_5 \epsilon \quad (3.1.48)$$

を思い出しておこう。ここで $\bar{\epsilon} = \epsilon^\dagger \gamma^0$ である。これらの関係式の線形結合を取ると

$$\epsilon^\dagger (1 + \gamma^5 \gamma^0 \gamma^3) \epsilon = 0 \quad (3.1.49)$$

が成り立つことが分かる。これは射影条件

$$(1 + \gamma^5 \gamma^0 \gamma^3) \epsilon = 0 \quad (3.1.50)$$

を意味する。また $\gamma^5 = i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$ より、これは

$$(1 - i \gamma^1 \gamma^2) \epsilon = 0 \quad (3.1.51)$$

とも書き表せる。

以上の議論をまとめると、Killing スピノールは (3.1.46) 式のように書き表すことができ、そこで導入した $\tilde{\epsilon}$ は

$$(i \gamma_3 \gamma_5 + 1) \tilde{\epsilon} = 0, \quad (1 + \gamma^5 \gamma^0 \gamma^3) \tilde{\epsilon} = 0 \quad (3.1.52)$$

を満たす。 $\tilde{\epsilon}$ は 2 つの独立な射影演算子で消されてしまうことより、 $\tilde{\epsilon}$ が持つ独立な成分は 1 つだけということが分かる。規格化条件 (3.1.27) は

$$\tilde{\epsilon}^\dagger \gamma^0 \tilde{\epsilon} = -i \quad (3.1.53)$$

と表せるので、結局 1 成分スピノール $\tilde{\epsilon}$ はある定数スピノール $\tilde{\epsilon}_0$ を用いて $\tilde{\epsilon} = e^{i\phi} \tilde{\epsilon}_0$ と表せることが分かる。ここで、位相 ϕ を x_1, x_2, y と独立にするために、vielbein を局所的に回転することができることに注目しよう。但し、 ϕ の時間依存性を消すことはできない。よって、以下では $\tilde{\epsilon}$ が x_1, x_2, y に依存しない系 (frame) で議論を行うことにしよう。

3.1.4 field strength が満たす方程式

4 形式 field strength の運動方程式は

$$dG_{(4)} = 0, \quad d(*_{11} G_{(4)}) = 0 \quad (3.1.54)$$

である。既に議論したように、 $G_{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} = 0$ とおいたので

$$G_{(4)} = \partial_{\mu_1} B_{\mu_2} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge d^2 \tilde{\Omega} \quad (3.1.55)$$

である。よって、field strength が満たす非自明な方程式は

$$d(e^{3\lambda-2A} *_4 dB) = 0 \quad (3.1.56)$$

の 1 つだけということが分かる。

この方程式を 3 + 1 次元に分解しよう。座標 y, x_i ($i = 1, 2$) を表す脚として $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ を使い、 t はあらわに書くことにしよう。ゲージ場については

$$\begin{aligned} B_\mu dx^\mu &= B_t dt + B_\alpha dx^\alpha = B_t(dt + V_i dx^i) + (B_\alpha - B_t V_\alpha) dx^\alpha \\ &\equiv B_t(dt + V_i dx^i) + \hat{B} \end{aligned} \quad (3.1.57)$$

と分解しておくとう便利である。

まず、(3.1.56) 式の空間方向成分について考えよう。3 次元の量で書き直すと

$$d *_3 \left[g_0 e^{3\lambda-2A} \left\{ d\hat{B} + B_t dV \right\} \right] = 0 \quad (3.1.58)$$

となる。よって、局所的には双対ポテンシャル (dual potential) Φ を導入することができて

$$d\hat{B} + B_t dV = g_0^{-1} e^{-3\lambda+2A} *_3 d\Phi \quad (3.1.59)$$

と表せることが分かる。

一方、(3.1.56) 式の時間成分については

$$d \left[V \wedge d\Phi + g_0 g^{tt} e^{3\lambda-2A} *_3 dB_t \right] = 0 \quad (3.1.60)$$

となる。

よって、以下では B_t と Φ の表現を求めればよい。

B_t を評価する。

Killing スピノールから構成される双線形を使って、 B_t を表現しよう。定義より、 $K^\mu/2m$ は t 方向の単位ベクトルであることが分かるので、

$$\partial_\mu B_t = \frac{1}{2m} F_{\mu\nu} K^\nu = -\frac{1}{m} F_{\mu\nu} \bar{\epsilon} \gamma^\nu \epsilon = -\frac{1}{4m} \bar{\epsilon} [\gamma_\mu, \not{F}] \epsilon \quad (3.1.61)$$

と表せる。一方、(3.1.20) 式と (3.1.21) 式を足し上げると

$$\left[ie^{-A} + \gamma_5 \not{\partial}(A + \lambda) \right] \epsilon = \frac{1}{12} e^{-3\lambda-2A} \not{F} \epsilon \quad (3.1.62)$$

となる。よって、これを用いて (3.1.61) 式から \not{F} を消去すると

$$\begin{aligned} \partial_\mu B_t &= -\frac{3}{m} e^{3\lambda+2A} \bar{\epsilon} \left[\gamma_\mu, ie^{-A} + \gamma_5 \not{\partial}(A + \lambda) \right] \epsilon = -\frac{3}{m} e^\lambda f_2 \partial_\mu e^{2A+2\lambda} \\ &= -6e^{A+\lambda} \partial_\mu e^{2A+2\lambda} \end{aligned} \quad (3.1.63)$$

となる。積分すると、 B_t の表現が

$$B_t = -4e^{3A+3\lambda} \quad (3.1.64)$$

として得られる。

Φ を評価する。

次に、 Φ の表現を求めよう。やはり Killing スピノールから構成される双線形を使って表現することを考えると

$$4me^{2A-3\lambda} \partial_\mu \Phi = \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta} K^\nu \quad (3.1.65)$$

という関係式が成り立つことが分かる。右辺については

$$\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta} K^\nu = -i\bar{\epsilon}\gamma_5 \{\gamma_\mu, \mathbb{F}\} \epsilon \quad (3.1.66)$$

となる。ここで

$$\{\gamma_\mu, \gamma_{\alpha\beta}\} = -2i\epsilon_{\mu\alpha\beta\nu}\gamma_5\gamma^\nu, \quad \epsilon_{0123} = \sqrt{-g} \quad (3.1.67)$$

を用いた。(3.1.20) 式とその共役を用いて、(3.1.66) 式から \mathbb{F} を消去すると

$$\begin{aligned} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta} K^\nu &= 24e^{3\lambda+2A} i\bar{\epsilon} (\gamma_5\gamma_\mu\gamma_5(\not{\partial}\lambda + m) + (-\not{\partial}\lambda + m)\gamma_\mu) \epsilon \\ &= -48e^{3\lambda+2A} i\bar{\epsilon}\epsilon\partial_\mu\lambda \\ &= -48e^{3\lambda+2A}\partial_\mu\lambda \end{aligned} \quad (3.1.68)$$

が得られる。最後の等号で規格化条件 (3.1.27) を用いた。以上より、 λ と Φ は

$$\partial_\mu\Phi = -\frac{12}{m}e^{6\lambda}\partial_\mu\lambda \quad (3.1.69)$$

という関係にあることが分かるので、両辺を積分すると Φ の表現が

$$\Phi = -\frac{2}{m}e^{6\lambda} \quad (3.1.70)$$

として得られる。

3.1.5 2次元計量の評価

vielbein \hat{e}_j^i の表現を決定するために、スピノール双線形である 1 形式

$$\omega = \epsilon^t\gamma_2\gamma_\mu\epsilon dx^\mu = \epsilon^t\gamma_2\gamma_a\epsilon h\hat{e}_\mu^a dx^\mu = \epsilon^t\epsilon h(i\hat{e}_\mu^1 + \hat{e}_\mu^2)dx^\mu \quad (3.1.71)$$

を構成しよう。通常のように、 γ^2 が反対称行列となる記法を採用している。 γ_2 の因子は局所 Lorentz 変換の下での不変性を保証するのに必要なのである。

この 1 形式の微分を計算すると

$$d\omega = \epsilon^t\gamma_2 \left(-m\gamma_{\mu\nu} + \frac{1}{4}e^{-3\lambda-2A}F_{\mu\sigma}\gamma_\nu^\sigma\gamma_5 \right) \epsilon dx^\mu \wedge dx^\nu \quad (3.1.72)$$

となる。ここに、交換関係

$$[\gamma_{\mu\nu}, \mathbb{F}] = 2(\gamma_\mu^\alpha F_{\nu\alpha} - \gamma_\nu^\alpha F_{\mu\alpha}) \quad (3.1.73)$$

と (3.1.20) 式とその転置

$$\epsilon^t\gamma^2 \left[-\not{\partial}\lambda + m - \frac{e^{-3\lambda-2A}}{24}\gamma_5\mathbb{F} \right] = 0 \quad (3.1.74)$$

を用いて F を消去すると、

$$d\omega = \epsilon^t\gamma_2 (-m\gamma_{\mu\nu} + 3m\gamma_{\mu\nu} + 3\gamma_\mu\partial_\nu\lambda) \epsilon dx^\mu \wedge dx^\nu \quad (3.1.75)$$

が得られる。

さらに、 ϵ に対する射影条件 (3.1.50) を用いると

$$\epsilon^t\gamma_2\gamma_\mu\epsilon dx^\mu \wedge dx^\nu = 2\epsilon^t\gamma_2\gamma_\mu\gamma_2\epsilon h(i\hat{e}_\nu^1 + \hat{e}_\nu^2)dx^\mu \wedge dx^\nu \quad (3.1.76)$$

が得られるので、結局 1 形式 ω の微分は

$$d\omega = \left(-m\frac{\epsilon^t\gamma_\mu\epsilon}{\epsilon^t\epsilon}dx^\mu - 3d\lambda \right) \wedge \omega \quad (3.1.77)$$

と表せることが分かる。

ここで、 $\epsilon, \tilde{\epsilon}$ の射影条件 (3.1.47), (3.1.50) を用いて、双線形の表現を

$$\epsilon^t \epsilon = \cosh \zeta \tilde{\epsilon}^t \tilde{\epsilon}, \quad \epsilon^t \gamma_0 \epsilon = -i \tilde{\epsilon}^t \tilde{\epsilon}, \quad \epsilon^t \gamma_3 \epsilon = \sinh \zeta \tilde{\epsilon}^t \tilde{\epsilon}, \quad \epsilon^t \gamma_1 \epsilon = \epsilon^t \gamma_2 \epsilon = 0 \quad (3.1.78)$$

として導こう。この表現を用いれば、(3.1.77) 式はさらに簡単に表すことができ

$$d\omega = \left(i(dt + V) + \frac{ye^{-6\lambda}}{2 \cosh^2 \zeta} dy - 3d\lambda \right) \wedge \omega \quad (3.1.79)$$

となり、1 形式 ω の表現も

$$\omega = \tilde{\epsilon}^t \tilde{\epsilon} h \cosh \zeta (i\hat{e}_\mu^1 + \hat{e}_\mu^2) dx^\mu \quad (3.1.80)$$

となる。

先ほど、局所 Lorentz 回転についてゲージ固定をするときに、 $\tilde{\epsilon}^t \tilde{\epsilon}$ が y, x_1, x_2 に依存しないように設定したことを思い出そう。よって、(3.1.79) 式の y 成分は

$$\partial_y (h \cosh \zeta \hat{e}_\mu^i) = \frac{ye^{-6\lambda}}{2 \cosh \zeta} h \hat{e}_\mu^i \quad (3.1.81)$$

となる。この関係式は \hat{e}^1 と \hat{e}^2 が同じ y 依存性を持っていることを意味していることが分かるので、

$$\hat{e}^1 = e^{D/2} (f_1 dx^1 + f_2 dx^2), \quad \hat{e}^2 = e^{D/2} (f_3 dx^1 + f_4 dx^2) \quad (3.1.82)$$

と表せることになる。但し f_i は y に依存しない。従って、 (x_1, x_2) 平面内のパラメータの付け替えをすることができて、それによって vielbein の表現を

$$\hat{e}^1 = e^{D/2} dx^1, \quad \hat{e}^2 = e^{D/2} dx^2 \quad (3.1.83)$$

と単純化することができる。vielbein をこのように選べば、(3.1.79) 式をさらに簡単に表すことができ

$$\left[d \log(e^{D/2} e^{-3\lambda}) + \partial_t \log(\tilde{\epsilon}^t \tilde{\epsilon}) dt \right] \wedge (idx^1 + dx^2) = \left(i(dt + V) + \frac{ye^{-6\lambda}}{2 \cosh^2 \zeta} dy - 3d\lambda \right) \wedge (idx^1 + dx^2) \quad (3.1.84)$$

となる。この関係式を各成分ごとに書き下すと、

$$\partial_y D = \frac{ye^{-6\lambda}}{1 + y^2 e^{-6\lambda}} \quad (3.1.85)$$

$$\partial_t (\tilde{\epsilon}^t \tilde{\epsilon}) = i \tilde{\epsilon}^t \tilde{\epsilon} \quad (3.1.86)$$

$$\frac{1}{2} \partial_i D dx^i \wedge (idx^1 + dx^2) = iV \wedge (idx^1 + dx^2) \quad (3.1.87)$$

という 3 つの方程式が得られる。

(3.1.86) 式は Killing スピノールの時間依存性

$$\tilde{\epsilon} \sim e^{\frac{it}{2}} \quad (3.1.88)$$

を決定する。また、(3.1.87) 式の実部と虚部を分けると、

$$V_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ij} \partial_j D \quad (3.1.89)$$

という関係式が得られる。

3.1.6 ベクトル V_i の field strength と Toda 方程式

最後に、計量に現れているベクトル V_i の表現を決めよう。このためには (3.1.26) 式に注目すればよい。この方程式の右辺には反対称テンソル $Y_{\mu\nu}$ がある。よって、このテンソルの成分を正規直交系において評価することから始めよう。

射影条件 (3.1.50), (3.1.51) を用いると、

$$Y_{\hat{0}\hat{1}} = \epsilon^\dagger \gamma^0 \gamma_{01} \epsilon = \epsilon^\dagger \gamma_1 \epsilon = i \epsilon^\dagger \gamma_2 \epsilon = -i \epsilon^\dagger \gamma_2 \epsilon = 0 \quad (3.1.90)$$

が示せる。同様にして

$$Y_{\hat{0}\hat{2}} = Y_{\hat{0}\hat{3}} = Y_{\hat{1}\hat{2}} = Y_{\hat{1}\hat{3}} = 0 \quad (3.1.91)$$

が成り立つことが確認できる。よって、正規直交系においては Y の成分は

$$\begin{aligned} Y_{\hat{0}\hat{3}} &= \hat{\epsilon} \gamma_{03} \epsilon = \bar{\epsilon} \gamma_5 \epsilon = -\sinh \zeta \\ Y_{\hat{1}\hat{2}} &= \bar{\epsilon} \gamma_{12} \epsilon = -1 \\ \text{otherwise} &= 0 \end{aligned} \quad (3.1.92)$$

となる。よって、

$$Y = Y_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu = -\frac{e^{-3\lambda}}{2m^2} \sinh \zeta (dt + V) \wedge dy - h^2 e^D dx^i \wedge dx^j \quad (3.1.93)$$

という表式が得られる。この表現を用いると、(3.1.26) 式の反対称部分は

$$\begin{aligned} 2m \cdot d [g_0^2 (dt + V)] &= -2 \frac{e^{-3\lambda}}{m} \sinh \zeta (dt + V) \wedge dy - 4mh^2 e^D dx^1 \wedge dx^2 \\ &\quad + e^{-3\lambda-2A} \sinh \zeta d [B_t (dt + V) + \hat{B}] \end{aligned} \quad (3.1.94)$$

と書くことができる。ここで B_t のあらわな表式 (3.1.64) を用いると

$$g_0^2 dV = -2h^2 e^D dx^i \wedge dx^j + \frac{e^{-3\lambda-2A}}{2m} \sinh \zeta [B_t dV + d\hat{B}] \quad (3.1.95)$$

という式が成り立つことが確認できる。 Φ の定義

$$d\hat{B} + B_t dV = g_0^{-1} e^{-3\lambda+2A} *_3 d\Phi \quad (3.1.59)$$

と双対関係

$$-2h^2 e^D dx^1 \wedge dx^2 = -2h *_3 dy \quad (3.1.96)$$

を用いることにより、 dV の Hodge 双対は

$$*_3 dV = -\frac{me^{-3\lambda}}{\cosh^3 \zeta} dy - \frac{1}{2m} g_0^{-3} y e^{-9\lambda} d\Phi = -\frac{e^{-3\lambda}}{m \cosh^3 \zeta} d(ye^{-6\lambda}) \quad (3.1.97)$$

となることが分かる。 V_i の表現として (3.1.89) 式を用いれば、 D が満たすべき方程式は

$$\Delta D = -e^D \frac{1}{(1 + y^2 e^{-6\lambda})^2} \partial_y (y e^{-6\lambda}) \quad (3.1.98)$$

であることが分かる。さらにこれを (3.1.85) 式と合わせると、結局のところ D は 3 次元 Toda 方程式

$$\Delta D + \partial_y^2 e^D = 0 \quad (3.1.99)$$

を満たすべきであるということが分かる。

3.1.7 11次元 ansatz

以上の結果をまとめると

$$\begin{aligned}
ds_{11}^2 &= \frac{e^{2\lambda}}{m^2} \left[-\cosh^2 \zeta (dt + V_i dx^i)^2 + \frac{e^{-6\lambda}}{4 \cosh^2 \zeta} (dy^2 + e^D dx_i^2) d\Omega_5^2 + \frac{y^2 e^{-6\lambda}}{4} d\tilde{\Omega}_2^2 \right] \\
G_{(4)} &= \left[dB_t \wedge (dt + V) + \frac{y^2 e^{-6\lambda}}{4m \cosh \zeta} *_3 d\Phi \right] \wedge d^2 \tilde{\Omega}, \quad \sinh \zeta = -y e^{-3\lambda} \\
e^{-6\lambda} &= \frac{\partial_y D}{y(1 - y \partial_y D)} \\
V_i &= \frac{1}{2} \epsilon_{ij} \partial_j D, \quad B_t = -\frac{y^3 e^{-6\lambda}}{2m^3}, \quad \Phi = -\frac{2}{m} e^{6\lambda},
\end{aligned} \tag{3.1.100}$$

となる。 $i, j = 1, 2$ であり、 $*_3$ は 3次元計量 $dy^2 + e^D dx_i^2$ の ϵ 記号である。

11次元 ansatz

以下では多くの場合、 $m = \frac{1}{2}$ と規格化した表現を使う。よって

$$\begin{aligned}
ds_{11}^2 &= -4e^{2\lambda}(1 + y^2 e^{-6\lambda})(dt + V_i dx^i)^2 + \frac{e^{-4\lambda}}{1 + y^2 e^{-6\lambda}} [dy^2 + e^D (dx_1^2 + dx_2^2)] \\
&\quad + 4e^{2\lambda} d\Omega_5^2 + y^2 e^{-4\lambda} d\tilde{\Omega}_2^2
\end{aligned} \tag{3.1.101}$$

$$\begin{aligned}
G_{(4)} &= F \wedge d^2 \tilde{\Omega} \\
e^{-6\lambda} &= \frac{\partial_y D}{y(1 - y \partial_y D)}
\end{aligned} \tag{3.1.102}$$

$$V_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ij} \partial_j D, \quad dV = \frac{1}{2} *_3 [d(\partial_y D) + (\partial_y D)^2 dy] \tag{3.1.103}$$

$$F = dB_t \wedge (dt + V) + B_t dV + d\hat{B} \tag{3.1.104}$$

$$\begin{aligned}
B_t &= -4y^3 e^{-6\lambda} \\
d\hat{B} &= 2 *_3 [(y \partial_y^2 D + y (\partial_y D)^2 - \partial_y D) dy + y \partial_i \partial_y D dx^i] \\
&= 2 \tilde{*}_3 [y^2 (\partial_y \frac{1}{y} \partial_y e^D) dy + y dx^i \partial_i \partial_y D]
\end{aligned} \tag{3.1.105}$$

を 11次元 ansatz と呼ぶことにする。 $i, j = 1, 2$ であり、 $*_3$ は 3次元計量 $dy^2 + e^D dx_i^2$ の ϵ 記号、 $\tilde{*}_3$ は flat 空間における ϵ 記号である。

Toda 方程式とその共形不変性について

以上で求めた 11次元重力解はたった 1つの関数 D によってパラメータ付けされており、その関数 D が満たすべき方程式は

$$(\partial_1^2 + \partial_2^2)D + \partial_y^2 e^D = 0 \tag{3.1.106}$$

である。これは 3次元の連続 Toda 方程式になっている。(3.1.105) 式を用いれば、 $d\hat{B}$ の表現が closed であること、すなわち $d(d\hat{B}) = 0$ が成り立っていることが確認できる。また、 (x_1, x_2) 平面において次のような共形変換

$$x_1 + ix_2 \rightarrow f(x_1 + ix_2), \quad D \rightarrow D - \log |\partial f|^2 \tag{3.1.107}$$

を行っても 11次元 ansatz (3.1.101)-(3.1.105) は不変に保たれることが確認できる。

3.2 11次元の系の解析

$y = 0$ 平面において S^5 や S^2 は萎んで、ある境界条件を満たす。

計量 (3.1.1), (3.1.101) に注目することにより、座標 y について

$$y = \frac{1}{4} r_2 r_5^2 = e^{2\lambda} e^{\lambda+A}; \quad r_2 = e^{\lambda+A} = y e^{-2\lambda}, \quad r_5 = 2e^\lambda \quad (3.2.1)$$

という関係が成り立っていることが分かる。ここで r_2, r_5 は S^2, S^5 の半径である。従って、 $y = 0$ 平面では S^2 と S^5 のどちらか一方は必ず萎んでしまうことが理解できる。また、 y 座標は S^2 や S^5 の球面座標と解析的 (non-singular) に結びついていることも確認しておこう。

S^2 が萎む領域の境界条件

まず $y \rightarrow 0$ の極限において S^2 は萎んで S^5 は有限の半径を維持する場合を考えよう。このとき $e^\lambda = r_5/2$ は $y \rightarrow 0$ において 0 でない定数にならなければならない。よって、(3.1.102) 式より

$$\partial_y D = \frac{y}{e^{6\lambda} + y^2} \quad (3.2.2)$$

であるから、 $y \rightarrow 0$ において $\partial_y D = 0$ になるということが分かる。よって、この極限において D は x_1 と x_2 のみの関数 $D_0(x_1, x_2)$ となることが分かる。

S^5 が萎む領域の境界条件

次に $y \rightarrow 0$ の極限において S^5 が萎んで S^2 は有限の半径を維持する場合を考えてみよう。このときは $y \rightarrow 0$ において $e^{2\lambda} = r_2^{-1} y$ が成り立つ。これを (3.2.2) 式に代入すれば、 $y \rightarrow 0$ において $D = \log y + D_0(x_1, x_2)$ と振る舞うことが理解できる。ここで $D_0(x_1, x_2)$ は任意の関数である。計量には e^D という形でしか現れないので、この場合も geometry は解析的であることに注意しよう。実際、計量の y 方向と S^5 方向の成分は

$$\begin{aligned} ds_{11}^2 &= \frac{r_2^2 y^{-2}}{1 + r_2^3 y^{-1}} dy^2 + 4r_2^{-1} y d\Omega_5^2 + \dots \\ &\xrightarrow{y \rightarrow 0} r_2^{-1} (y^{-1} dy^2 + 4y d\Omega_5^2) + \dots \underset{y=u^2}{=} 4r_2^{-1} (du^2 + u^2 d\Omega_5^2) + \dots \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

となり、 $y = u^2$ という変数変換を行えば局所的に \mathbb{R}^6 の計量になることが分かる。

以上の結果をまとめると、 $y = 0$ においては 2 種類の境界条件

$$\begin{aligned} \partial_y D = 0, \quad D = D_0(x_1, x_2) = \text{finite} & \quad S^2 \text{ が萎む場合} \\ \partial_y D \rightarrow \infty, \quad D = \log y + D_0(x_1, x_2) \sim \log y & \quad S^5 \text{ が萎む場合} \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

を取ることが可能であると分かった。 S^2 と S^5 の両方が萎む場合は、時空が特異的になってしまうので、以下では考えないことにする。

$y = 0$ 平面において S^2, S^5 が萎む領域の面積と M2, M5-brane の枚数が関係している。

$y = 0$ の境界条件は (3.2.4) 式の 2 通りで尽きていることが分かったのであるから、どちらの条件を満たす領域であるかによって (x_1, x_2) 平面を分割することができる。そうして分割された領域の 1 つ 1 つは droplet と呼ばれる。

S^5 が萎む領域について

ここで、 $y = 0$ 平面において S^2 が萎む領域に端を持つ、 (y, x_1, x_2) 空間上の 2 次元面 Σ_2 を考えよう (図 3.1 a)。そして、 $y = 0$ 平面において萎んでしまう S^2 を Σ_2 上に fiber することで 4-cycle Σ_4 を作ろう。このサ

イクルは非特異 (non-singular) な 4-cycle である。例えば Σ_2 が円盤のトポロジーを持っていれば Σ_4 のトポロジーは S^4 となる。この 4-cycle Σ_4 上の 4 形式 flux は

$$\begin{aligned} N_5 &\sim -\frac{1}{\text{vol } S^2} \int_{\Sigma_4} G_{(4)} = -\int_{\Sigma_2} \left(dB_t \wedge dt + d(B_t V) + d\hat{B} \right) = -\int_{\Sigma_2} d\hat{B} \\ &= \int_{\mathcal{D}} dx_1 dx_2 2y^{-1} e^D|_{y=0} = \int_{\mathcal{D}} dx_1 dx_2 2e^{D_0(x_1, x_2)} \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

と計算することができる。1 行目の最後の等号において、 $B_t V$ は大局的に well-defined なベクトル場であることを用いた。ここで \mathcal{D} は Σ_2 が (x_1, x_2) 平面内に持つ端に囲まれた部分の内部において S^5 が萎む領域を表している。最後の表式において (3.2.4) 式を用いれば、 S^5 が萎む領域の面積はその領域内に存在する M5-brane の数を表していることが確認できる。

S^2 が萎む領域について

今度は、 $y = 0$ 平面において S^5 が萎む領域に端を持つ、 (y, x_1, x_2) 空間上の 2 次元面 Σ'_2 を考えよう (図 3.1(b))。さらに、 $y = 0$ 平面において萎んでしまう S^5 を Σ'_2 上に fiber することで得られる 7-cycle Σ_7 を考えよう。このとき Σ_7 上の 2 形式 flux は

$$\begin{aligned} N_2 &\sim \frac{1}{\text{vol } S^5} \int_{\Sigma_7} *_{11} G_{(4)} = \int_{\Sigma'_2} (\Phi dV + g_0^{-1} e^{3\lambda-2A} *_3 dB_t) \\ &= \int_{\mathcal{D}} 2\tilde{*}_3 [y^3 \partial_y^2 (y^{-1} e^D) dy + y^2 \partial_i \partial_y D dx^i] \\ &= \int_{\mathcal{D}} dx_1 dx_2 2e^D|_{y=0} = \int_{\mathcal{D}} dx_1 dx_2 2e^{D_0(x_1, x_2)} \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

として得られる。ここで $\tilde{*}_3$ は flat 空間の ϵ 記号であり、 \mathcal{D} は Σ'_2 面の中において S^2 が萎む領域を指している。やはり最後の表式において (3.2.4) 式を用いれば、この積分は M2-brane の数を表していることが理解できる。

ここで、どちらの場合も flux は関数 D から作られる計量 $e^{D_0(x_1, x_2)}(dx_1^2 + dx_2^2)$ で測定した面積によって与えられることに注意しよう。従って以上の議論より、Toda 方程式 (3.1.106) を解いて、解である関数 D を見つけることさえできれば、droplet に対応する領域に存在する M2-brane と M5-brane の枚数を計算できるということが分かった。

共形変換不変性は時空解における (おそらく) 唯一の自由度を出す。

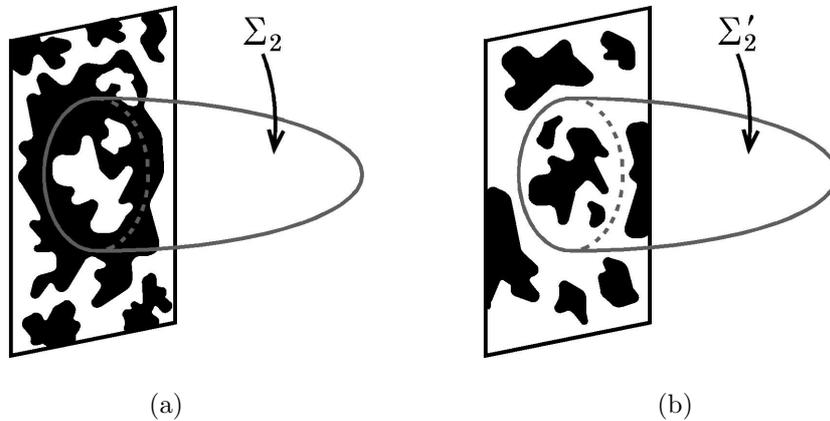


図 3.1: 平面は $y = 0$ 平面を表している。また、黒い領域は S^2 が萎む領域、白い領域は S^5 が萎む領域を表している。

(3.1.107) 式で確認したように ansatz には共形不変性があるので、共形変換で移り変わることができる 2 つの droplet は同じ時空の解を与えるように思われる。例えば、あらゆる大きさの円形の droplet は、共形変換によって特定の大きさの droplet に写像できると予想される。

ここで大切なのは、境界条件 (3.2.4) だけで解を一意に定めることはできないということである。実際、ある解 $D(x_i, y)$ が与えられたとき、関数 $\tilde{D}(x_i, y) = D(x_i, \lambda y) - 2 \log \lambda$ もまた同じ境界条件を満たす解となることが確認できる。これは (3.2.5), (3.2.6) 式において

$$e^{D(x_i, y)} \rightarrow e^{\tilde{D}(x_i, y)} = \lambda^{-2} e^{D(x_i, \lambda y)} \quad (3.2.7)$$

と変換することに相当するので、これは charge のリスケールをすることに対応していると理解できる。

これは時空解を決定する上で残された唯一の自由度であると期待される。すなわち、droplet の形状を特定すれば、その大きさには一切関係なく、時空解を完璧に決定することができると期待することができる。しかしながら、証明はまだなされていない。

また、位相空間における droplet の正確な形状と $y = 0$ 平面における droplet の形状の間に対応があるかは分かっていない*¹。この議論が難しいのは、(3.2.5) 式や (3.2.6) 式で与えられる flux の密度が定数でないことと関係している。しかしながら、それらのトポロジーは同じであることが期待されている。

3.2.1 11 次元時空解の例

11 次元時空解の例をいくつか見てみよう。

例 1 : pp-wave 時空解

pp-wave 時空解は

$$y = \frac{1}{4} r_5^2 r_2, \quad x_2 = \frac{r_5^2}{4} - \frac{r_2^2}{2}, \quad e^D = \frac{r_5^2}{4} \quad (3.2.8)$$

で与えられる。ここで r_5, r_2 は 5 次元球面と 2 次元球面の動径座標 (radial coordinate) である。また x_1 は isometry 方向となる。原理的にはこの表式を用いれば、Toda 方程式 (3.1.106) を解いて $D = D(x_2, y)$ を求めることができる。

直ちに分かるのは、 S^2 が萎む領域 ($r_2 = 0, r_5 \neq 0$) は $x_2 > 0$ であり、 S^5 が萎む領域 ($r_2 \neq 0, r_5 = 0$) は $x_2 < 0$ であるということである。それぞれの領域が半平面を満たしていることを意味している。

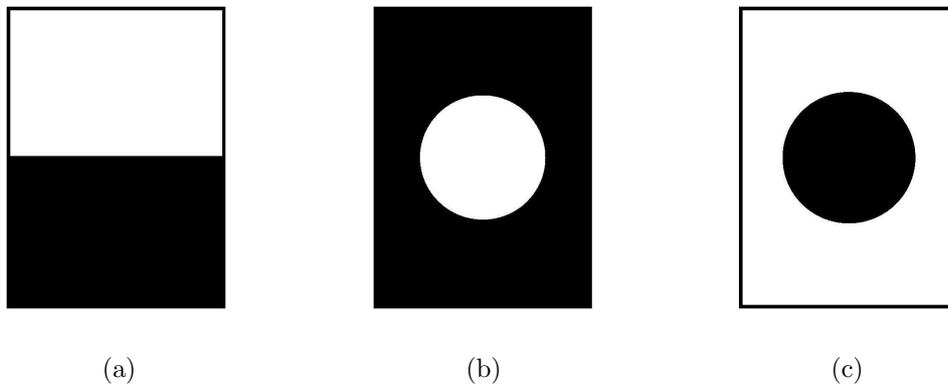


図 3.2: 11 次元時空解に対応する $y = 0$ 平面の例 (a) pp-wave 時空解 (b) $AdS_7 \times S^4$ 時空解 (c) $AdS_4 \times S^7$ 時空解

*¹ 一方、IIB 型理論の議論においては対応が分かっている。

droplet の系をフェルミオンの系と対応させて、 S^5 が萎む領域をフェルミオン、 S^2 が萎む領域は空孔 (hole) と見做すことができるのであるが、この系はこの喩えでいうところの Dirac の海に対応している。

例 2: $AdS_7 \times S^4$ 時空解

$AdS_7 \times S^4$ 時空解についても見ておこう。 $AdS \times S$ 時空解の場合、droplet は円形になるので、ここでは (x_1, x_2) 平面を極座標 $ds_2^2 = dx^2 + x^2 d\psi^2$ で表す。すると

$$e^D = \frac{r^2 L^{-6}}{4 + r^2}, \quad x = \left(1 + \frac{r^2}{4}\right) \cos \theta, \quad y = \frac{1}{4} L^{-3} r^2 \sin \theta \quad (3.2.9)$$

となる。 θ は S^4 上の通常の意味の角度座標、 L は S^4 の動径座標、 r は AdS_7 の動径座標である。

この場合、無限遠方 $r \rightarrow \infty$ においては $D \sim 0$ に漸近することに注意しよう。従って、 $AdS_7 \times S^4$ 時空に漸近する解は全て、Toda 方程式 (3.1.106) を解くときの境界条件として (3.2.4) 式の他に無限遠方で $D \sim 0$ が課されるべきであることが分かる。

例 3: $AdS_4 \times S^7$ 時空解

$AdS_4 \times S^7$ 時空解についても同様に表すことができる。この場合は

$$e^D = 4L^{-6} \sqrt{1 + \frac{r^2}{4} \sin^2 \theta}, \quad x = \left(1 + \frac{r^2}{4}\right)^{1/4} \cos \theta, \quad y = \frac{1}{2} L^{-3} r \sin^2 \theta \quad (3.2.10)$$

となる。 L は AdS_4 の動径座標、 L は S^7 の動径座標である。

その他の例

Toda 方程式を解くのは簡単ではないので、他に知られている解は少ない。

7 次元と 4 次元のゲージ化超重力理論における荷電ブラックホールの extremal 極限に対応する特異解が知られている。 AdS_7 ブラックホールについては [16, 17]、 AdS_4 ブラックホールについては [18] で調べられている。これらの場合、droplet は楕円形になる。但し、これらの時空解は特異的であるから、ここで求めた境界条件 (3.2.4) は満たされないことに注意しよう。

3.3 次元還元して得られる 10 次元の系の解析

異なる場の理論に双対な重力解は、 (x_1, x_2) 平面において異なるトポロジーを持った droplet の系に対応している。さらにそれぞれのトポロジーを比較すると、 S^2 が萎む領域と S^5 が萎む領域の漸近的な (無限遠方での)

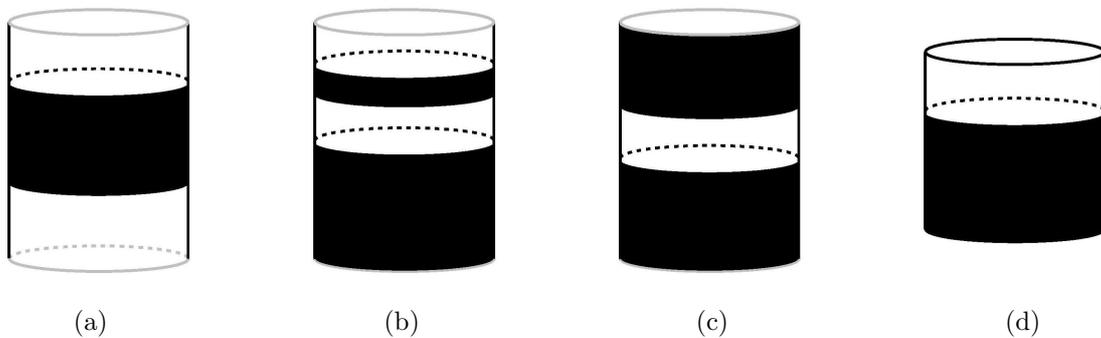


図 3.3: $y = 0$ 平面をコンパクト化したもの。円筒の縁が灰色になっているのは、実際には無限遠方まで続いていることを示している。また、円筒の縁が黒になっているのは、実際には両端が同一視されてトーラスになっていることを示している。

分布が異なっている。一方で、有限の領域においてこれらの分布が異なっても理論は変わらない。その場合は、同じ理論における異なる真空を示すことになるのである。

コンパクト化により次元還元すると、以下のような場の理論に対応する droplet の系が得られる。

- (x_1, x_2) 平面がトーラスにコンパクト化されている場合 — $R \times S^3/Z_k$ 上の $\mathcal{N} = 4$ 超対称 Yang-Mills 理論の真空中に双対な重力解が得られる (図 3.3 d)。
- (x_1, x_2) 平面が円筒にコンパクト化されていて (x_1 がコンパクト方向)、 S^2 が萎む領域が有限の領域に収まっている場合 — $R \times S^2$ 上の $2+1$ 次元超対称 Yang-Mills 理論の真空中に双対な重力解が得られる (図 3.3 c)。
- (x_1, x_2) 平面が円筒にコンパクト化されていて、 S^5 が萎む領域が有限の領域に収まっている場合 — $R \times S^5$ 上の NS5-brane 理論の真空中に双対な重力解が得られる (図 3.3 a)。
- (x_1, x_2) 平面が円筒にコンパクト化されていて、 S^2 が萎む領域が $x_2 \rightarrow -\infty$ まで、 S^5 が萎む領域が $x_2 \rightarrow +\infty$ まで広がっている場合 — BMN 行列模型の真空中に双対な重力解が得られる (図 3.3 b)。

まずは x_1 方向に並進不変性を課すことで、10次元の系を作ってみよう。

3.3.1 静電気問題の系への帰着

x_1 方向に並進不変性を仮定すると、Laplace 方程式の系となる。

円筒上やトーラス上で定義される droplet の系を考えると、並進不変でないものも考えることができる。しかし、ここでは x_1 方向に並進不変な系のみを考える。なぜなら x_1 方向を M 理論における 11 方向としてみると、IIA 型の描像に移るのに適した系になるからである。但し、IIA 型理論の描像に移るには、弦の結合定数が小さく、有効't Hooft 結合定数が大きくなければならぬことに注意しなくてはならない。

もし x_1 方向が並進不変ならば、非線形方程式である Toda 方程式 (3.1.106) は

$$\partial_2^2 D + \partial_y^2 e^D = 0 \quad (3.3.1)$$

となり、さらに変数変換

$$y = \rho \partial_\rho V, \quad x_2 = \partial_\eta V, \quad e^D = \rho^2 \quad (3.3.2)$$

を行うと、線形方程式

$$\frac{1}{\rho} \partial_\rho (\rho \partial_\rho V) + \partial_\eta^2 V = 0 \quad (3.3.3)$$

に帰着することが分かる。ここで現れた V は 11 次元 ansatz における V とは異なるものであることに注意しておこう。これは軸対称な 3 次元系での Laplace 方程式になっている。但し、この 3 次元空間の角度方向は 10 次元や 11 次元の時空座標とは関係が無いことに注意しておこう。この方程式の解は [1, 19] で調べられている。

境界条件を考えると、導電円盤がある静電気問題に帰着できることが分かる。

ここで、滑らかな時空解を得るために V に課されるべき境界条件について考察しよう。(3.2.4) 式を V を用いて表せばよい。

S^5 が萎む領域の境界条件

この場合、境界条件は $y = \rho \partial_\rho V \rightarrow 0$ の極限において

$$\rho^2 = \rho \partial_\rho V \cdot \exp[f(\partial_\eta V)] \quad (3.3.4)$$

として表せる。ここで f は任意の関数である。この条件は $\rho = 0$ において V が 3 次元的に解析的であれば満たされることが分かる。

S^2 が萎む領域の境界条件

$y = 0$ において $\rho = 0$ (すなわち $D \rightarrow -\infty$) が満たされるならば、そこは S^5 が萎む領域になる。2 種類の境界条件は互いに相容れないのであるから、 S^2 が萎む領域では $y = \rho \partial_\rho V = 0$ かつ $\rho \neq 0$ (すなわち $\partial_\rho V = 0$) が満たされなくてはならないことが分かる。

この場合、境界条件は $y \rightarrow 0$ の極限において

$$0 = \frac{1}{2} \partial_y e^D = \rho \frac{\partial \rho}{\partial y} = - \frac{\partial_\eta^2 V}{(\partial_\eta \partial_\rho V)^2 + (\partial_\eta^2 V)^2} \quad (3.3.5)$$

として表せる。よって $\partial_\eta^2 V = 0$ が成り立たなくてはならない*2。このとき (3.3.3) 式より

$$0 = \frac{1}{\rho} \partial_\rho (\rho \partial_\rho V) = \frac{1}{\rho^2} (\rho \partial_\rho V) + \partial_\rho^2 V \xrightarrow{y \rightarrow 0} \partial_\rho^2 V \quad (3.3.6)$$

となることが分かる。以上より、 $y = 0$ かつ $\rho \neq 0$ (すなわち $\partial_\rho V = 0$) を満たす曲線上において η は定数であることが結論できる。なぜなら、 $\partial_\rho V = 0$ で定義される曲線の勾配は

$$\delta \rho \cdot \partial_\rho (\partial_\rho V) + \delta \eta \cdot \partial_\eta (\partial_\rho V) = 0 \iff \frac{\delta \eta}{\delta \rho} = - \frac{\partial_\rho^2 V}{\partial_\eta \partial_\rho V} = 0 \quad (3.3.7)$$

であるからだ。

以下では、 V を静電気問題におけるポテンシャルと見做すことにしよう。すると、 $-\partial_\rho V$ は ρ 方向の電場に相当する。この電場が 0 になる ($\partial_\rho V = 0$) ための条件は、導電面が存在することに相当する。つまり

- S^5 が萎む領域の境界条件： $\rho = 0$ においてポテンシャル V が解析的であること。
- S^2 が萎む領域の境界条件： $\rho \neq 0$, $\eta = \text{const.}$ において導電面が存在すること。

と言い換えることができる。従って、以上の問題は 3 次元の軸対称な静電気問題において、位置 η_i に置かれた半径 ρ_i の導電性の円盤で作られる系に帰着することができるのである。

系の自由度は導電円盤の位置 η_i と全電荷 Q_i のみである。

これらの円盤が無遠慮まで広がる外部電場の中に置かれている状況を考えよう。一般に外部電場が存在する系を考えると、複数の円盤の縁を近づけると電場は発散してしまう。しかし、以下で考える系ではそういうことは起こってはならない。なぜなら、 x_2 座標が円盤の縁で定義できなくなってしまうからである。

よって、円盤の縁において電場は有限であるという条件を課す必要があることが分かる。この条件が満たされるためには、円盤の縁で電荷密度が 0 にならなければならない。すると、この境界条件によって円盤上に誘起される電荷 Q_i と円盤の半径 ρ_i は関係付けられてしまうことになる。従って、各々の円盤が持つ独立なパラメータは位置 η_i と全電荷 Q_i のみであることが分かる。

背景となる電場の詳細については、考えている理論に依存するので、ここではこれ以上詳しく扱うことはしない。いずれの場合も、座標 y, x_2 が必要な範囲で正しく定義できるように、変数変換 (3.3.2) が well-defined でなければならないという条件を要請することで決定することができる。

3.3.2 10 次元重力解とその性質

x_1 方向をコンパクト化して、IIA 型超重力理論の解を作る。

*2 $\partial_\eta^2 V \rightarrow \pm\infty$ でも良さそうに思えるかもしれないが、 $x_2 = \partial_\eta V$ が定義できなくなるので不適である。

さて、以上で x_1 方向に並進不変な解に注目してきたので、この方向をコンパクト化して IIA 型理論における重力解を書き出してみよう。この手続きは、IIA 型理論の結合定数が小さい領域において意味をなすことに注意しておこう。結合定数が大きい領域では、系は 11 次元の性質を持つことになる。

(3.1.101)-(3.1.105) 式に以上の議論を適用すると、10 次元の string frame においては

$$\begin{aligned} ds_{10}^2 &= \left(\frac{\ddot{V} - 2\dot{V}}{-V''} \right)^{1/2} \left(-\frac{4\ddot{V}}{\ddot{V} - 2\dot{V}} dt^2 - \frac{2V''}{\dot{V}} (d\rho^2 + d\eta^2) + 4d\Omega_5^2 + \frac{2V''\dot{V}}{\Delta} d\Omega_2^2 \right) \\ e^{4\Phi} &= -\frac{4(\ddot{V} - 2\dot{V})^3}{V''\dot{V}^2\Delta^2} \\ C_1 &= -\frac{2\dot{V}'\dot{V}}{\ddot{V} - 2\dot{V}} dt \\ F_4 &= dC_3, \quad C_3 = -\frac{4\dot{V}^2 V''}{\Delta} dt \wedge d^2\Omega \\ H_3 &= dB_2, \quad B_2 = 2 \left(\frac{\dot{V}\dot{V}'}{\Delta} + \eta \right) d^2\Omega \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

と表せることが分かる。ここで $\Delta \equiv (\ddot{V} - 2\dot{V})V'' - (\dot{V}')^2$ である。 $\dot{}$ は $\log \rho$ での微分 $\rho\partial_\rho$ を、 $'$ は η での微分 ∂_η を表している。 $V(\rho, \eta)$ は Laplace 方程式 (3.3.3) の解である。

以下では、(3.3.8)-(3.3.9) 式を IIA 型 ansatz と呼ぶことにしよう。

10 次元時空解が得られるようなポテンシャル V の漸近条件を求める。

既に議論したように、平行に置かれた導電円盤の系が静電気問題の解になっていれば、それは 10 次元時空解に対応する。ここで、時空解における計量 (3.3.8) の成分について、時間成分は負、空間成分は正ではなくてはならないことに注目しよう。よって

$$(\ddot{V} - 2\dot{V})V'' \leq 0, \quad (\ddot{V} - 2\dot{V})\dot{V} \geq 0, \quad V''\dot{V} \leq 0, \quad V''\dot{V}\Delta \geq 0 \quad (3.3.10)$$

という条件を保証する必要がある。さらに $\dot{V} = y \geq 0$ を用いれば、

$$V'' \leq 0, \quad \ddot{V} - 2\dot{V} \geq 0, \quad \dot{V} = y \geq 0 \quad (3.3.11)$$

という条件が成り立っていないかなければならないことが理解できる。 $\Delta = (\ddot{V} - 2\dot{V})V'' - (\dot{V}')^2 \leq 0$ も条件として出てくるが、条件 (3.3.11) が満たされるとき、これは自動的に満たされる。

先に述べたように、 ρ や η が十分に大きな領域 (10 次元時空の漸近領域に対応している。) におけるポテンシャル V の境界条件が、それぞれの理論に対応する。従って、ここで (ρ, η) が定義される領域全体でこれらの条件 (3.3.11) を満たすようなポテンシャル V の漸近条件 (漸近領域における境界条件) を求めることにしよう。

V が満たす Laplace 方程式 (3.3.3) は

$$\frac{1}{\rho^2} \ddot{V} + V'' = 0 \quad (3.3.12)$$

と書き表せる。変数 $Z = \dot{V}$ を定義すると、(3.3.12) 式は

$$Z'' + \rho\partial_\rho \left(\frac{1}{\rho} \partial_\rho Z \right) = 0 \quad (3.3.13)$$

と書き直すことができる。 $\rho = 0$ と円盤上 ($\partial_\rho V = 0$) において、 $Z = \rho\partial_\rho V = 0$ が成り立つという境界条件が課されていることに注意しておこう。

方程式 (3.3.13) より、関数 Z を Taylor 展開すると ρ について 2 次以下、 η について 1 次以下になることが分かる。さらに条件 (3.3.11) より $Z = \dot{V} \geq 0$ と $\dot{Z} - 2Z \geq 0$ を課すと、関数 Z が ρ の 1 次式であることは排除される。最も単純な解としては $Z = \text{const.}$ が考えられるが、境界条件より全領域で $Z = 0$ となってしまうため、これは興味の持てる解ではない。よって、以降の議論で扱うのは以下の場合に限られる。

(ρ, η) 平面全体で well-defined な場合

この場合は方程式 (3.3.13) の解の漸近条件として、 $Z \sim \rho^2$ しか許されない。従って、方程式 (3.3.12) の解の漸近条件は、条件 $V'' \leq 0$ に注意すると、 $V \sim \rho^2 - 2\eta^2$ と求められる。

これは、第 5 章で確認するように、 $R \times S^2$ 上の 2+1 次元超対称 Yang-Mills 理論に対応する系の背景電場である。

 $\eta > 0$ の半平面で well-defined な場合

この場合は $Z \sim \rho^2$ の他に、漸近条件 $Z \sim \eta\rho^2$ も許されることが分かる。このとき方程式 (3.3.12) の解の漸近条件は $V \sim \eta\rho^2 - \frac{2}{3}\eta^3$ である。

これは、第 7 章で確認するように、BMN 行列模型に対応する系の背景電場である。この場合は、無限に広がった導電面が $\eta = 0$ を置くことで、 $\eta \geq 0$ のみが物理的に意味を持つようにする。

有限の領域で well-defined な場合

有限の領域に周期的境界条件を課すなど、有限の範囲のみで定義することを許せば、もっと選択肢は広がる。後で見ると、 $R \times S^5$ 上の NS5-brane 理論や、 $R \times S^3/Z_k$ 上の $\mathcal{N} = 4$ 超対称 Yang-Mills 理論などは、この場合に相当する。

得られた重力解が解析的であることを確認する。

以上で方程式 (3.3.12) の解となるポテンシャル V のうち、条件 (3.3.11) を満たすものの漸近条件を求めた。

ところで、いま興味があるのは解析的な重力解であるから、方程式 (3.3.12) にこれらの漸近条件を課して得られた解を IIA 型 ansatz (3.3.8)-(3.3.9) に代入したときに、漸近領域だけでなく (ρ, η) が定義されている全領域で解析的になっているかどうかを確認しておこう。

 $Z = \dot{V} = y > 0$ の確認

漸近条件はいずれの場合も、 $\rho \rightarrow \infty$ において $Z \rightarrow \infty$ となっていることに注意しよう。この漸近条件と $\rho = 0$ と円盤上で $Z = 0$ であるという境界条件を用いると、方程式 (3.3.13) の性質より、($\rho = 0$ と円盤上を除く) 至るところで $Z = y > 0$ が満たされることが確認できる。

 $\dot{Z} = \ddot{V} > 0, V'' < 0$ の確認

関数 $Y = \dot{Z}/\rho^2 = (\partial_\rho Z)/\rho$ を定義しよう。満たすべき漸近条件はいずれの場合も、 $\rho \rightarrow \infty$ において $Y > 0$ となる。さらに、 $\rho \rightarrow 0$ において Y は解析的でなければならず、円盤上では $Y = 0$ となるという境界条件が課せられる。従って、($\rho = 0$ と円盤上を除く) 至るところで $Y > 0$ でなくてはならないことが分かる。

さらに (3.3.12) 式より $Y = -V''$ が成り立つから、($\rho = 0$ と円盤上を除く) 至るところで $V'' < 0$ が満たされることが分かる。

 $\ddot{V} - 2\dot{V} > 0$ の確認

関数 $U = \dot{V}/\rho^2 = (\partial_\rho V)/\rho$ を定義しよう。このとき、示すべき式は

$$\dot{U} = \rho \partial_\rho U = \partial_\rho^2 V - \frac{1}{\rho} \partial_\rho V = \frac{1}{\rho^2} [\rho \partial_\rho (\rho \partial_\rho V) - 2\rho \partial_\rho V] = \frac{1}{\rho^2} (\ddot{V} - 2\dot{V}) > 0 \quad (3.3.14)$$

である。 U は

$$U'' + \frac{1}{\rho^3} \partial_\rho (\rho^3 \partial_\rho U) = 0 \quad (3.3.15)$$

という方程式を満たす。これは $SO(4)$ 回転対称性を持った 5 次元の系の Laplace 方程式である。

漸近条件はいずれの場合も、 $\rho \rightarrow \infty$ において $U > 0$ である。また、 $\rho = 0$ と円盤上において $U = 0$ であるという境界条件が課せられる。従って、系に存在する円盤の大きさが全て有限であれば、($\rho = 0$ と円盤上を除く) は至るところで $\dot{U} > 0$ が成り立つことが分かる。

ところが、系に無限大の円盤がある場合は注意しなくてはならない。例えば、励起していない 11 次元 pp-wave 時空解を次元還元して 10 次元時空解を得たとしよう。第 7 章で確認するように、この時空解に対応する系を考えるとときには $\eta = 0$ に無限大の円盤を 1 枚だけ置くのだが、このときは $\dot{U} = 0$ が成り立つので重力解は特異的になってしまう。これについては、10 次元に次元還元するときに、至るところで null な円周上に還元してしまっていることに注意すれば、当然の結果であることが納得できる。

従って、 $\rho = 0$ と円盤上を除けば、 (ρ, η) が定義されている全ての領域において

$$V'' < 0, \quad \ddot{V} - 2\dot{V}' > 0, \quad \dot{V} = y > 0, \quad \Delta = (\ddot{V} - 2\dot{V}')V'' - (\dot{V}')^2 < 0 \quad (3.3.16)$$

が成り立っていることが確認できた。従って、これらの領域においては、至るところで重力解は特異的でなく、dilaton も有限であることが分かる。

$\rho = 0$ や円盤上の領域においては (3.3.16) 式の不等号が等号になるので、重力解が解析的であることを示すには、さらに詳しい解析が必要になる。例えば $\dot{V} \sim \rho^2$ の場合について解析を行うと、 $\rho = 0$ 付近において $\ddot{V} - 2\dot{V}' \sim a\rho^4$ ($a > 0$), $-V'' > 0$ が成り立つことが分かるので、dilaton が有限のままであり、重力解は特異的でないことを保証してくれる。円盤上の領域においても、同様の議論を行うことにより、重力解は解析的であることが結論できる。

重力解には質量ギャップ (mass gap) が存在する。

具体例として $R^{1,1} \times S^3$ 上の D4-brane 理論を取り上げて、その真空解の解析性を調べてみることにしよう。この D4-brane は 11 次元における M5-brane を次元還元して得られたものである。

一般的な真空解に対応する droplet の系を図 3.4 に示した。ここで、それぞれの解をラベル付けするために、白黒の帯状の droplet の境界となっている x_2 座標の値 a_j, b_j を用いることにしよう。但し、 $a_j < b_j < a_{j+1} \dots$ を満たすものとする。すなわち、黒い帯状の droplet が存在するのは $a_j < x_2 < b_j$ の領域である。

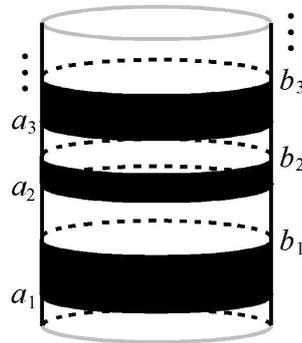


図 3.4: D4-brane 理論の一般的な真空に対応する droplet の系

このような droplet の系に対応する 10 次元時空解

$$ds_{11A}^2 = e^{2\Phi}(-dt^2 + d\tilde{x}_1^2) + \frac{\sqrt{1-4z^2}}{2y}(dy^2 + dx_2^2) + y\sqrt{\frac{1+2z}{1-2z}}d\Omega_3^2 + y\sqrt{\frac{1-2z}{1+2z}}d\tilde{\Omega}_3^2$$

$$e^{-2\Phi} = \frac{1-4z^2-4y^2V_1^2}{2y\sqrt{1-4z^2}} = \frac{1-|2z+i2yV_1|^2}{2y\sqrt{1-4z^2}} \quad (3.3.17)$$

$$F_4 = -\frac{e^{-2\Phi}}{4} \left[\frac{(1-2z)^{3/2}}{(1+2z)^{3/2}} *_2 d\left(y^2 \frac{1+2z}{1-2z}\right) \wedge d\tilde{\Omega}_3 + \frac{(1+2z)^{3/2}}{(1-2z)^{3/2}} *_2 d\left(y^2 \frac{1-2z}{1+2z}\right) \wedge d\Omega_3 \right]$$

$$B_2 = -\frac{4y^2V_1}{1-4z^2-4y^2V_1^2} dt \wedge d\tilde{x}_1 \quad (3.3.18)$$

においては

$$2z = -1 + \sum_j \left(\frac{x-a_j}{\sqrt{(x-a_j)^2+y^2}} - \frac{x-b_j}{\sqrt{(x-b_j)^2+y^2}} \right)$$

$$2yV_1 = \sum_j \left(\frac{y}{\sqrt{(x-a_j)^2+y^2}} - \frac{y}{\sqrt{(x-b_j)^2+y^2}} \right) \quad (3.3.19)$$

という関係式が成り立つ。ここで

$$2z + i2yV_1 = -1 + \sum_j (w_j - z_j); \quad w_j = \frac{x-a_j+iy}{\sqrt{(x-a_j)^2+y^2}}, \quad z_j = \frac{x-b_j+iy}{\sqrt{(x-b_j)^2+y^2}} \quad (3.3.20)$$

が成り立っていることに注目しよう。複素数 w_j, z_j は上半平面の単位円上にある。

g_{tt} 成分が dilaton だけに依存していることに注意しよう。これは、この重力解を 11 次元に持ち上げたものが、 $2+1$ 次元における Lorentz 不変性を持っていることと関係している。

ここで、 $e^{-2\Phi}$ は赤外領域において有限であり 0 にもならないことを確認しておこう*³。 $y \neq 0$ であれば計量 (3.3.17) の分母は 0 でない。分子が 0 でないことは、(3.3.20) 式から分かる。 w_j, z_j は上半平面にある単位円上の点であるから、 $|2z+i2yV_1| < 1$ を満たす。よって、分子も 0 にはならないのである。ここで $y \rightarrow 0$ 極限を取ると、(3.3.17) の分子も分母も 0 に近づくことが確認できる。このとき y の冪乗で展開すれば、 $a_j < x_2 < b_j$ のみならず $x_2 = a_j, b_j$ でも有限で 0 でない結果が得られることが分かる。

従って、dilaton は非特異的であり、いま考えている解においては g_{tt} は決して 0 にならないことが確認できる。これによって、重力解が質量ギャップを持っていることが保証される。もしワープ因子 (warp factor) が 0 になる領域が存在すれば、その領域まで動かして状態のエネルギーを減らすことが可能になるのだが、この場合ワープ因子は決して 0 にならないので、そのようなことはできないのである。

tachyonic モードも massless モードも存在しない。

第 2 章で扱った場の理論は全て、あらゆる真空の周りで質量ギャップを持っているということを思い出しておこう。よって、それらの場の理論に双対な重力解には tachyonic モードや massless モードが存在しないことが予想される。

これまでの議論だけで tachyonic モードや massless モードが存在する可能性を(それらが少数である限り)排除することはできないので、さらに議論をする必要がある。

tachyonic モードについては超対称性により排除されるのである。

massless モードは存在しても解のエネルギーを変えず、また超対称性を保持したままなので、超対称性の議論から排除することはできない。これについては、円盤上の電荷を量子化してしまうと、重力解に連続的なパラメータが存在しなくなることに注目すればよいのである。この結果として massless モードは存在できなくなってしまうことが分かる。

*³ 紫外領域においては $\Phi \rightarrow \infty$ となるから、11 次元の記述に移行しなくてはならない。

対称性について

V をリスケールすると、10次元の計量と B 場は不変である一方で、dilaton と R-R 場はリスケールを受ける。これは、通常の IIA 型超重力理論において dilaton と R-R 場のリスケールを行うときの対称性に対応している。

また、 (ρ, η) と V を同時にリスケールすると、計量と R-R 場がそれぞれのスケール次元 (scaling dimension) に依存してリスケールを受ける。これは、通常の重力のスケール対称性に対応している。このスケール対称性があるおかげで、IIA 型超重力理論の時空解 (3.3.8)-(3.3.9) に、全電荷と dilaton の極大値という2つのパラメータを導入することができる。

さらに面白いことに、円盤の数と電荷や円盤同士の距離は変えることができるのである。これらのパラメータを変えることは、同じ理論における異なる真空を選ぶことと対応している (図 3.6, 3.7 を参照)。

D2, NS5-brane の枚数は、電荷と円盤間の距離と関係している。

ここで考えている重力解は全て S^2 と S^5 を持っていること、また S^2 は円盤上で、 S^5 は $\rho = 0$ で半径 0 に萎むことを既に確認した。従って、 (ρ, η) 平面上の線に S^2 と S^5 を fiber することで、それぞれ 3-cycle と 6-cycle を構成することができる。これらは IIA 型理論の geometry における 3-cycle Σ_3 と 6-cycle Σ_6 に対応させることができる (図 3.5)。

この 3-cycle 上の H_3 flux を計算することができるので、それを N_3 と呼ぼう。また、6-cycle 上の $*\tilde{F}_4$ flux を計算することもできるので、それを N_2 と呼ぼう。(3.2.5), (3.2.6) 式を用いると

$$N_2 = \frac{1}{\pi^3 l_p^6} \int e^D dx_2 \int dx_1 = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\rho_i} d\rho \rho^2 \partial_\rho \left(\partial_\eta V|_{\eta_i^+} - \partial_\eta V|_{\eta_i^-} \right) = \frac{8Q_i}{\pi^2} \quad (3.3.21)$$

$$N_3 = \frac{1}{2\pi^2 l_p^3} \int y^{-1} e^D dx_2 \int dx_1 = \frac{1}{\pi} \int_{\eta_i+d_i}^{\eta_i} d\eta \left. \frac{\rho \partial_\eta^2 V}{\partial_\rho V} \right|_{\rho=0} = \frac{2d_i}{\pi} \quad (3.3.22)$$

となる。これは電荷 Q_i と距離 d_i に関する量子化条件になっていることに注意しよう。ここで $\alpha' = 1$, $l_p = 1$ とおいている。積分領域は、 N_2 については S^2 が萎む領域 ($\partial_\rho V = 0$)、 N_3 については S^5 が萎む領域 ($\rho = 0$) であることが (3.2.5), (3.2.6) 式から確認できる。また $\eta = \eta_i^\pm$ は円盤の表面と裏面を表している。

(3.3.22) 式の最後の等式において、 V は $\rho = 0$ の周りで

$$V = f_0(\eta) + \rho^2 f_1(\eta) + \dots \quad (3.3.23)$$

と展開できることを用いた。 ρ^1 の項が存在しないことに注意しよう。これは、 $\rho \rightarrow 0$ の極限において $e^D \sim y \Leftrightarrow \rho^2 \sim \rho \partial_\rho V$ が成り立つことに注目することで容易に確認できる。さらに Laplace 方程式 (3.3.3) を用いれば、 $\partial_\eta^2 V = 4f_1(\eta)$ が得られる。従って、最後の表式が得られるのである。

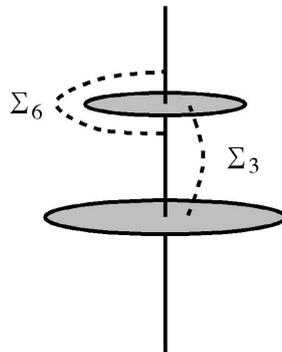


図 3.5: 点線で表した線分に S^2 , S^5 を fiber すると、それぞれ Σ_3 , Σ_6 が得られることを示している。それぞれの線分は S^2 , S^5 が萎む領域に端を持っていることに注意しよう。

量子化条件 (3.3.21), (3.3.22) より、 N_5 は隣の円盤との距離 d_i に比例すること、 N_2 は各円盤の全電荷 Q_i に比例することが分かる。静電気問題を解いたとき、これらのパラメータが量子化されていることが保証されていないといけないことを覚えておこう。但し、厳密に言えば、 N_2 によって与えられる flux が量子化されるのは、4 形式 field strength が量子化されているときだけである。

最後に、重力解のトポロジは円盤の系のトポロジと関係していることを確認しておこう。すなわち、6-cycle と 3-cycle の数は円盤の数とそれらの間の距離に対応する線要素の数には依存しているのだが、円盤の大きさとそれらの間の距離そのものには依存していないのである。

3.3.3 BPS 測地線付近の領域における解析

安定なのは円盤の縁である。

扱っている系の特徴として、 $SO(6)$ 方向 (S^5 上) に角運動量 J を持つ 1/2 BPS 励起状態があることに注目しよう。ここでは 10 次元背景時空 (3.3.8)-(3.3.9) において議論したいので、角運動量 J は充分大きいけれども大きすぎない場合を考えることにしよう。

この場合、このような BPS 励起状態は 10 次元背景時空における light-like な粒子として記述することができる。従って、light-like な測地線が (ρ, η) 平面上において

$$\frac{E^2}{J^2} = -\frac{g_{tt}}{g_{55}} = \frac{\ddot{V}}{\dot{V} - 2\dot{V}} \geq 1 \quad (3.3.24)$$

を最小化する点に止まっているとき、この励起状態のエネルギーは最小となることが分かる。ここで $\sqrt{g_{55}}$ は S^5 の半径である。

これを最小化するには、 $\dot{V} = 0$ が必要である。これは $\rho = 0$ と円盤の表面で実現される。しかしながら、 $\dot{V} = 0$ が成り立つ場合は一般に $\ddot{V} = 0$ も成り立ってしまうので、注意を払わなくてはならない。実際、 $\rho = 0$ の周りで解を展開すると、(3.3.24) は $\rho = 0$ で発散してしまうことが確認できる。これは $\rho = 0$ において S^5 が萎んでしまうことから理解できる。また、円盤上では (3.3.24) は 1 を超えてしまうことが確認できる。

結局、(3.3.24) がちょうど 1 になるのは、円盤の縁のみであることが分かる。これは、円盤の縁においてエネルギーが最小化するという他に他ならない。エネルギー E と角運動量の間には BPS 条件 $E \geq |J|$ があることを思い出せば、エネルギーが最小化するということは、すなわち $E = |J|$ が成り立つことであることが理解で

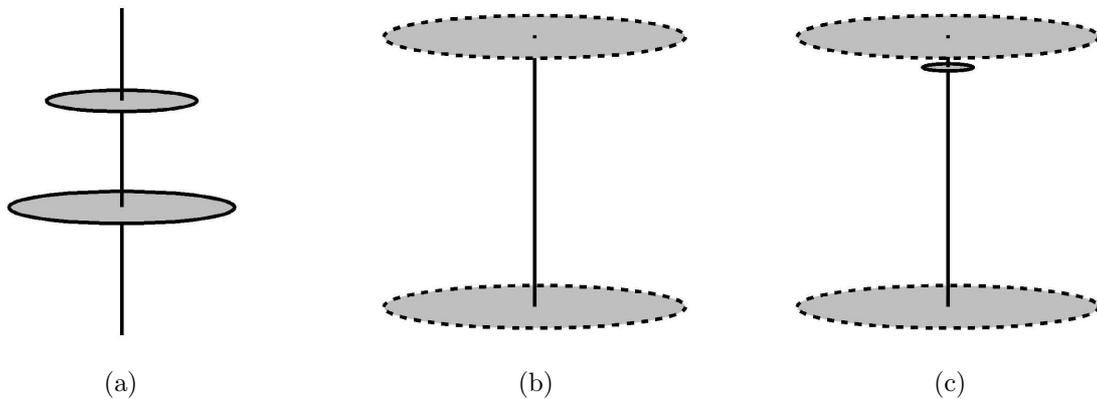


図 3.6: 静電気問題の系の例 (1) : 縁が点線になっている円盤は、実際には無限大の大きさを持った円盤であることを示している。

- (a) $R \times S^2$ 上の 2 + 1 次元超対称 Yang-Mills 理論の真空に対応する系
- (b) $R \times S^5$ 上の NS5-brane 理論の真空に対応する系
- (c) $R \times S^5$ 上の NS5-brane 理論の (b) とは異なる真空に対応する系

きる。

静電気問題の系における円盤の縁は、11次元の表現では $y = 0$ 平面上で $e^D|_{y=0}$ が極大となる点に相当する。

測地線近傍の振る舞いを調べるには、円盤の縁の周りで解を展開すればよい。

以上の議論より、これらの測地線に近い領域における重力解の振る舞いを見るには、円盤の縁の周りで静電気問題の解を展開すればよいことが分かる。円盤の縁付近では、円盤を無限大の半平面と近似できるので、結局2次元の Laplace 方程式が満たされることになる。この方程式は共形変換を用いて問題を解くことができる。実際、充分大きな ρ_0 における解の周りで展開するときは、いつもそうするのがよい。そして、 ρ_0 よりもずっと小さな距離で現れる特徴に注目するのである。しかし、円盤同士の距離よりも大きい領域を調べることはできるので、複数の円盤の縁が近接する場合を後で考えることにしよう。

まずは一般的な議論を試みよう。複素座標

$$z \equiv \xi + i\eta \equiv \rho - \rho_0 + i\eta; \quad \xi, \eta \ll \rho_0 \quad (3.3.25)$$

を定義する。そして点 $(\rho, \eta) = (\rho_0, 0)$ の周りで展開することを考えよう。また、複素変数

$$w(z) = 2\partial_z V = \frac{y}{\rho_0} - ix_2 \quad (3.3.26)$$

を定義しておくると便利である。ここで

$$y = \rho\partial_\rho V \sim \rho_0\partial_\xi V, \quad x_2 = \partial_\eta V \quad (3.3.27)$$

であることを用いた。また、 $y \geq 0, \rho_0 > 0$ より、 w は右半平面 $\text{Re } w \geq 0$ でのみ定義されていることが分かる。さらに Laplace 方程式 (3.3.3) は $\partial_z\partial_{\bar{z}}V = 0$ と書けるので、 $w(z)$ は z の holomorphic 関数でなくてはならないことが理解できる。解は w 半平面を z 平面に写像する共形変換を見つけることで与えられる。一般に、 z 平面において切断 (cut) が存在する場合を考えることができ、これらの切断が系の構成を特徴付けることになる。

この写像を見つけることさえできれば、あとは IIA 型 ansatz (3.3.8)-(3.3.9) に戻って、重力解を書き下すことができる。このとき

$$\dot{V} \sim \rho_0\partial_\xi V, \quad \ddot{V} \sim \rho_0^2\partial_\xi^2 V; \quad \dot{\cdot} = \rho\partial_\rho = (\xi + \rho_0)\partial_\xi \quad (3.3.28)$$

を用いよう。さらに、いま考えている極限では ρ_0 が充分大きいのであるから、 ρ_0 の主要項に注目すればよい。

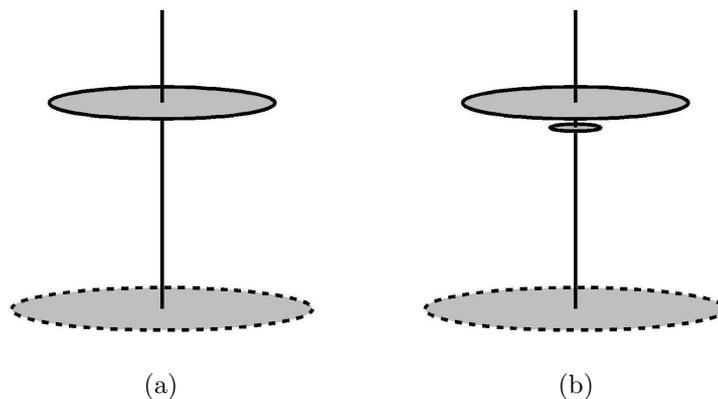


図 3.7: 静電気問題の系の例 (2): 縁が点線になっている円盤は、実際には無限大の大きさを持った円盤であることを示している。

(a) BMN 行列模型の真空中に対応する系

(b) BMN 行列模型の (a) とは異なる真空中に対応する系

従って、計量は

$$ds_{10}^2 \sim 4\rho_0 \left[- \left(1 + \frac{f^{-1} |\partial_w z|^2}{\rho_0} \right) dt^2 + d\Omega_5^2 + \frac{f}{\rho} dw d\bar{w} + \frac{f}{\rho} \left(\frac{w + \bar{w}}{2} \right)^2 d\Omega_2^2 \right] \quad (3.3.29)$$

と求められる。ここで

$$f = \frac{\partial_w z + \partial_{\bar{w}} \bar{z}}{2(w + \bar{w})} \quad (3.3.30)$$

である。

さらに (3.3.29) 式において、一般的な pp-wave 極限を取ってみよう。そのためには、 $\rho_0 \rightarrow \infty$ という極限を取ると同時に、重力解から計量全体にかかっている因子 (overall factor) ρ_0 を消してしまうようにすればよい。具体的には次の操作を行う。まず、 S^5 の計量を

$$d\Omega_5^2 = d\varphi^2 \cos^2 \theta + d\theta^2 + \sin^2 \theta d\Omega_3^2 \sim \left(1 - \frac{\mathbf{r}^2}{4\rho_0} \right) d\varphi^2 + \frac{1}{4\rho_0} d\mathbf{r}^2 \quad (3.3.31)$$

として $\theta = r/\sqrt{4\rho_0} \sim 0$ の周りで展開する。すなわち、 $\rho_0 \rightarrow \infty$ の極限の下で 4 次元ベクトル \mathbf{r} を有限に保つように S^5 のパラメータ付けを行ったのである。さらに、

$$dt = dx^+, \quad d\varphi = dx^+ - \frac{1}{4\rho_0} dx^-, \quad -p_+ = E - J, \quad -p_- = \frac{J}{4\rho_0}, \quad 4\rho_0 = R_{S^5}^2 \quad (3.3.32)$$

として新しい変数 x^\pm , p^\pm を設定することにしよう。ここで、 R_{S^5} は S^5 の半径である。但し $\alpha' = 1$ としている。

以上のようにして、IIA 型 ansatz (3.3.8)-(3.3.9) に pp-wave 極限を取ると、得られる結果は

$$\begin{aligned} ds_{10}^2 &= -2dx^+ dx^- - (4f^{-1} |\partial_w z|^2 + \mathbf{r}^2) (dx^+)^2 + d\mathbf{r}^2 + 4f \left[dw d\bar{w} + \left(\frac{w + \bar{w}}{2} \right)^2 d\Omega_2^2 \right] \\ e^{2\Phi} &= 4f \\ B_2 &= i \left[\frac{w + \bar{w}}{2} (\partial_w z - \partial_{\bar{w}} \bar{z}) - (z - \bar{z}) \right] d^2\Omega \\ C_1 &= i(w + \bar{w}) \frac{\partial_w z - \partial_{\bar{w}} \bar{z}}{\partial_w z + \partial_{\bar{w}} \bar{z}} dx^+ \\ C_3 &= -(w + \bar{w})^3 f dx^+ \wedge d^2\Omega \\ f &\equiv \frac{\partial_w z + \partial_{\bar{w}} \bar{z}}{2(w + \bar{w})} \end{aligned} \quad (3.3.33)$$

となる。以下では、IIA 型 ansatz の pp-wave 極限と呼ぶことにしよう。既に確認したように、 z は w の holomorphic 関数である。これは IIA 型超重力理論の正確な解になっている。また、IIA 型 ansatz のときと同様に、 z と w をリスケールすることで 2 つのパラメータを導入することができる。

例：1 枚の円盤が孤立している場合

簡単な場合として

$$z = w^2 \quad (3.3.34)$$

を取り上げて、以上の議論を具体的に実行してみよう。これは図 3.8 (a) のように、1 枚の円盤が孤立している場合の縁の周りにおける解に対応している。

w 半平面を z 平面に写像すると、 z 平面は負の実軸に走る cut ができる。これは $V \sim \text{Re } z^{3/2}$ となることから確認できる。

この場合は $f = 1$ となるので、(3.3.29) 式より (w, \bar{w}, Ω_2) でパラメータ付けされる 4 次元空間は flat であることが分かる。また、(3.3.24) 式は $w = 0$ において上限を満たすことも確認できる。

従って、計量は

$$ds_{10}^2 = -2dx^+dx^- - (r^2 + 4u^2)(dx^+)^2 + dr^2 + du^2 \quad (3.3.35)$$

と得られる。ここで r, u はそれぞれ \mathbf{R}^4 をパラメータ付けする。この時空解は $SO(4) \times SO(3)$ の isometry を持つ IIA 型 pp-wave 背景時空であることが分かる [20, 21, 22]。

以上の議論より、円盤の縁が他の円盤と充分離れている場合、BPS 粒子の軌跡の周りで計量を展開したものは、局所的に IIA 型 pp-wave 時空 (3.3.35) のようになっているということが結論できる。

他の円盤が近くにある場合には、より一般的な表現 (3.3.33) を用いる必要がある。計量の g_{++} 要素を boost away する極限 ($x^\pm \rightarrow \lambda^{\pm 1}x^\pm$ という boost を行ってから $\lambda \rightarrow 0$ の極限を取る。) においては、計量 (3.3.33) は NS5-brane を重ねた系の transverse な 4 次元部分の時空に $\mathbf{R}^{5,1}$ をかけたものになる。また、 f は (w, \bar{w}, Ω_2) でパラメータ付けされた 4 次元 Laplace 方程式の解であることに注目しよう。このことは、接近した 2 枚の円盤の間の空間は、NS5-brane によって作られたものであると解釈すべきであることと深く関係している。

世界面上を伝播する粒子の描像が得られる。

(3.3.32) 式における J のリスケールに注目してみよう。near BPS 状態のエネルギーを J で表せば、このリスケールはあらわに現れることになる。よって、 J のリスケールは大きな物理的意味を持っていることが予想される。

実は、IIA 型 pp-wave 時空 (3.3.35) 上における弦の光錐 Hamiltonian は、世界面 (worldsheet) 上を伝播する massive な粒子を記述するのである。計量の g_{++} 成分から読み取れるように、世界面に垂直な 8 次元に対応する 8 個のボソンのうち、 r 方向に対応する 4 個のボソンは質量 $m = 1$ を持ち、 u 方向に対応する 4 個のボソンは質量 $m = 2$ を持つ。また超対称性より、パートナーであるフェルミオンも同じく質量 $m = 1, 2$ を持つ。

運動量 n と質量 m を持つ粒子の光錐エネルギーは、それぞれ

$$(E - J)_n = (-p_+)_n = \sqrt{m^2 + \frac{n^2}{p_-^2}} = \sqrt{m^2 + R_{S^5}^4 \frac{n^2}{J^2}} \quad (3.3.36)$$

である。最後の等号で (3.3.32) 式を用いた。但し $\alpha' = 1$ としている。添字 n は、弦に沿った方向に決まった運動量 n を持った粒子からの寄与であることを表すために付けておいた。

弦が千切れないために、弦に沿った方向の全運動量は 0 にならなければならないので、運動量を持った粒子は必ず 2 つ以上必要であることが分かる。そして、各々の粒子から (3.3.36) 式のような寄与があるのである。こ

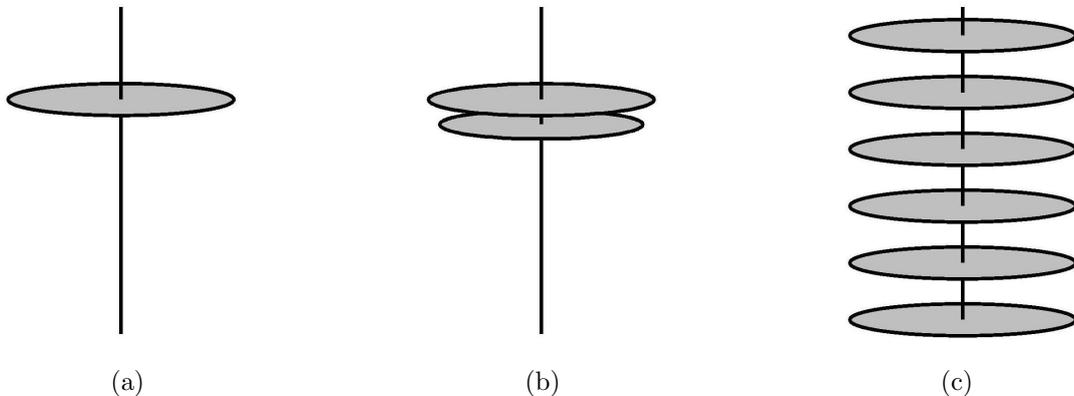


図 3.8: 静電気問題の系の例 (3)

(a) 1 枚の円盤が孤立している場合 (b) 2 枚の円盤が近接している場合 (c) 円盤が周期的に並んでいる場合

ここで、円盤の縁が他の円盤から充分離れている限り、質量スペクトルの形は全ての解に対して完全に同じであることに注意しよう。ただ、円盤の縁における $\rho_0 = R_{S^5}^2/4$ の値は解に依存する。つまり、どの理論を考えているかだけでなく、その理論におけるどの真空の周りで展開するかにも依存するというわけだ。以下の章において、様々な理論のある解に付随するパラメータが、どのような ρ_0 依存性を持っているかについて議論することにする。

1 つの円盤を孤立させるという操作は、この孤立した円盤の縁付近に対応する時空解において pp-wave 極限を取ることを意味している。この結果、IIA 型 pp-wave 時空解が得られることになるのである。一方、他の円盤が近くにあるときは、さらにいろいろな状況が起こりうる。特に、2 枚の円盤に挟まれた領域についても考慮しなくてはならない。これは、NS5-brane によって作られる領域も考慮に入れなくてはならないことを示している。早速、この場合について議論してみることにしよう。

複数の縁が近くにある場合の重力解

複数の円盤が近くに存在している場合には、それらの円盤の縁の付近で解を展開するときに、円盤同士に挟まれた NS5-brane 領域をも考慮に含めなければならない。

2 枚の円盤が近接している場合

まず、図 3.8(b) に示したような、接近した 2 枚の円盤の系を考えてみよう。(3.3.33) 式における holomorphic 関数 $z(w)$ は

$$\partial_w z = \frac{(w - ia)(w + ib)}{w} \quad (3.3.37)$$

で与えられる。ここで a, b は正の実数である。 $w \approx ia, -ib$ や $w \rightarrow \infty$ においては、1 枚の円盤の縁が孤立している場合 (3.3.34) が回復されることが確認できる。

また、この変換 (3.3.37) は w の右半平面 ($\text{Re } w \geq 0$) を 2 つの cut を持った z 平面に写像する。特に、 $w = ia, -ib$ は 2 つの円盤の縁にそれぞれ写像されて、 $w = 0$ は 2 枚の円盤に挟まれた領域において $\text{Re } z \rightarrow -\infty$ に写像される。このことは、2 枚の円盤に挟まれた領域が NS5-brane のように見えることから予想できることである。

実際、IIA 型 ansatz の pp-wave 極限 (3.3.33) に現れている関数 f は

$$f = 1 + \frac{ab}{|w|^2} \quad (3.3.38)$$

で与えられ、このとき 10 次元時空解は単一中心の (single center) NS5-brane 解となることが確認できる。先ほどの予想通り、NS5-brane は $w = 0$ に局在化していることが分かる。NS5-brane 解については第 4 章を参照のこと。

さらに、2 枚の円盤の間の距離 $\text{Im } \Delta z = \Delta \eta$ は

$$\text{Im } \Delta z = \text{Im} \int_{-ib}^{ia} \partial_w z dw = \pi ab \quad (3.3.39)$$

であることより、NS5-brane の charge は距離 $\text{Im } \Delta z$ に比例していることも確認できる。これは (3.3.22) 式で得られた結果と一致している。

さらに、計量の g_{++} 成分に及ぼす寄与は

$$4f^{-1}|\partial_w z|^2 = 4 \frac{|w - ia|^2 |w + ib|^2}{|w|^2 + ab} \quad (3.3.40)$$

という形になることも確認しておこう。光錐ゲージにおいて、この系に対応する時空上を動く弦について考えよう。このとき (3.3.40) 式は世界面上の場のポテンシャルとして現れることになる。よって、pp-wave 極限を取っ

たならば、このポテンシャルの最小点は、 $w = ia, -ib$ に対応する 2 枚の円盤の縁にそれぞれ存在することが結論できる。

$a = b$ の場合は、2 枚の円盤が同じ半径 ρ_i を持っているという対称的な系に対応している。この場合、ポテンシャルの 2 つの最小点は 2 枚の円盤から等距離にある NS5-brane の両面に存在することになる。ここで、NS5-brane の throat 領域は 2 枚の円盤に挟まれた領域に対応することに注意しよう。いま取っている近似においては、 $w \rightarrow 0$ で dilaton が発散してしまうので、この throat 領域は特異的 (singular) である。しかし、そのときには $-\text{Re} z$ も同時に発散してしまうので、throat 領域が特異的になるという現象は近似の範囲外における現象であり、よって物理的に重要ではないことが結論できる。実際には、円盤に挟まれた領域に対応する時空解は、NS5-brane 解 (4.5.6)-と一致していなければならないのである。

$a \neq b$ の場合は、1 枚の円盤がもう 1 枚の円盤よりも大きいという非対称な系に対応している。ここでは、一般性を失わずに $a > b$ の場合を考えることにしよう。もし $a \gg b$ ならば、小さいほうの円盤の縁 $w = -ib$ は NS5-brane の throat 領域に位置することになる。一方、大きい方の円盤の縁 $w = ia$ は NS5-brane の throat 領域から遠く離れたところに位置することになる。

一般に n 枚の円盤が近接している場合

近接する円盤が n 枚ある場合、一般解は

$$\partial_w z = \frac{(w - ia_1)(w - ia_2) \cdots (w - ia_n)}{(w - ic_1)(w - ic_2) \cdots (w - ic_{n-1})}, \quad a_1 < c_1 < a_2 < c_2 < \cdots < c_{n-1} < a_n \quad (3.3.41)$$

となる。 $w = ia_i$ は n 個の縁の位置であり、 $w = ic_i$ は $n - 1$ 枚の NS5-brane の位置を表している。これを IIA 型 ansatz の pp-wave 極限 (3.3.33) に代入すると、pp-wave 時空における多重中心の (multi-center) NS5-brane の系を記述する重力解が得られることになる。全ての場の + 成分を boost away すれば ($x^\pm \rightarrow \lambda^{\pm 1} x^\pm, \lambda \rightarrow 0$)、全ての NS5-brane が 1 本の線に沿って並ぶようになるので、NS5-brane の多重中心系において $SO(4)$ 対称性が $SO(3)$ 対称性に破れる結果となることが確認できる。

補足

トンネル効果について

ゲージ・重力対応においては一般に言えることだが、扱っている領域において重力解が信用に足るかどうかにについては、常に注意深くならなければならない。今の場合はさらに、トンネル効果についても注意しなければならない。

第 2 章で確認したように、対応する場の理論にはたくさんの真空が存在する。よって、真空解の間をトンネル効果によって移り合うことができる。重力側でも同じ状況が起こるはずであるから、やはり違う重力解の間をトンネル効果で移り合うということが考えられる。

このようなトンネル効果に関する問題を理解するためには、ある解ととても近い性質を持つ解に対応する真空を考えるのがよい。例えば、ある解を僅かに変形 (deformation) することで、同じだけの超対称性を保持する解を見つけることができる。11 次元理論の重力解に対応する droplet の系の観点から言えば、この変形は S^2 が萎む領域と S^5 が萎む領域の境界において小さな「さざなみ」(ripple) を入れることに対応している。また IIA 型理論の系の観点から言えば、このさざなみは D0-brane に対応している。

非常に小さな励起状態であれば、これらの D0-brane は円盤が置かれた η 座標の $\rho = 0$ である点において止まることになる。実際、このような位置に D0-brane を追加するには、一切エネルギーが必要ないのである。静電気問題の系の観点から言えば、ある円盤の近くにさらに小さな円盤を置くという状況に対応している。

トンネル振幅を見積もるには、D0-brane が存在しない系から存在する系に遷移するとき、どのようなことが起こるのかを理解していなければならない。有限の大きさの 3-cycle Σ_3 (図 3.5 を参照) を考えたとき、そこ

における flux が N_5 であるような領域では、 Σ_3 を包み込む D2 インスタントンを経由して、 N_5 個の D0-brane が作られることとなる [23, 24]。但し、このような領域において弦の結合定数が小さい場合や Σ_3 が十分に大きい場合には、この過程は suppress されてしまうことが確認できる。

第 4 章

$R \times S^5$ 上の NS5-brane 理論

この章では第 3 章の議論の応用例として、 S^5 に巻きついた IIA 型 NS5-brane 理論を扱うことにしよう。

まずは第 3 章の議論の流れに沿って、 $SO(6) \times SO(3)$ 対称性を持った 11 次元超重力理論の超対称解を作ることから始めよう。 S^5 上の NS5-brane 理論は、7 次元ゲージ化 (gauged) 超重力理論の超対称解を 11 次元に次元酸化し、さらに 10 次元に次元還元することで導出できる。この議論に関係した各節の内容は次の通りである。

- 4.1 7 次元ゲージ化超重力理論について簡単にまとめた後、 $SO(6)$ 時空対称性と $SO(3)$ 内部対称性を持つ超対称解を求める。
- 4.2 7 次元ゲージ化超重力理論の $SO(5)$ ゲージ群を最大可換部分群 $U(1)^2$ 切断して得られる理論を扱う。そして $U(1)^1$ 切断した理論の解が、4.1 節で得られた超対称解に一致することを確認する。
- 4.3 4.1, 4.2 節で得られた解を 11 次元に次元酸化して、 $SO(6) \times SO(3)$ 対称性を持つ 11 次元超重力理論の超対称解を導く。さらにその解を 11 次元 ansatz と比較して、droplet の形状が楕円形になることを確認する。
- 4.4 4.3 節で得られた 11 次元重力解を 10 次元に次元還元することにより、IIA 型超重力理論の超対称解を導く。

一方、第 3 章における議論の結果より、 S^5 上の NS5-brane 理論に対応する静電気問題の系は容易に作ることができる。この議論に関係した節の内容は次の通りである。

- 4.5 静電気問題の系から求めて、4.4 節で得られた解と一致することを確認する。

4.1 $SO(6) \times SO(3)$ 対称性を持つ 7 次元ゲージ化超重力理論の超対称解

11 次元超重力理論を reduction して得られる理論の中で、最も対称性が大きいものは 7 次元球面か 4 次元球面に Kaluza-Klein reduction して得られる理論である。前者の場合は次章で考えることにして、ここでは後者の場合を考えることにしよう。すなわち、7 次元超重力理論を扱うことにする。この理論は S^4 に reduction することによって得られるのであるから、 $SO(5)$ 対称性を持った超対称 Yang-Mills 理論が得られることが期待される。

4.1.1 7 次元ゲージ化超重力理論

7 次元ゲージ化超重力理論について、以下の議論に必要な事項を手短にまとめておこう [25]。

理論を構成する場

7 次元ゲージ化超重力理論の bosonic 場は

- graviton e_μ^a

- $SO(5)_g$ ゲージ場 $A_{\mu I}^J$
- 14 個のスカラー場 V_I^i (剰余群 $SL(5, \mathbf{R})/SO(5)_c$ を構成する。)
- 5 個の 3 形式場 C_3^I

で構成される。ここで μ は曲がった時空の脚、 a は接時空の脚、 I は $SO(5)_g$ ベクトルの脚、 i は $SO(5)_c$ ベクトルの脚である。また、いま興味のある解は $C_3^I = 0$ を満たすので、最初から $C_3^I = 0$ とおいておくことにしよう。fermionic 場は

- 4 個の gravitino ψ_μ^A
- 16 個のスピン 1/2 fermion λ_i^A ($SO(5)_c$ のスピノール表現の下で変換する。)

で構成される。ここで A は $SO(5)_c$ スピノールの脚を表している。

Lagrangian

Lagrangian について、bosonic 部分のみを示すことにすると ($C_3 = 0$ として)

$$2e^{-1}\mathcal{L} = R + \frac{\tilde{m}^2}{2}(T^2 - 2T_{ij}T^{ij}) - \text{Tr}(P_\mu P^\mu) - \frac{1}{2}(V_I^i V_J^j F_{\mu\nu}^{IJ})^2 + e^{-1}\tilde{m}^{-1}p_2(A, F) \quad (4.1.1)$$

となる。ここで、ゲージ化超重力理論における自然なパラメータとして $\tilde{m} = 2m$ を定義した。 m は 11 次元計量 (3.1.1) における m と同じパラメータで、 S^5 の半径に関係した量である。また、ここで

$$T_{ij} = (V^{-1})_i^I (V^{-1})_j^J \delta_{IJ}, \quad (V^{-1})_i^I \nabla_\mu V_I^j \equiv (Q_\mu)_{[ij]} + (P_\mu)_{(ij)} \quad (4.1.2)$$

として T_{ij} , P_μ , Q_μ を定義した。 F はゲージ場 A の field strength である。最後の項 $p_2(A, F)$ については、以下の議論において具体的な形は必要ないので省略する。スカラー場 V は剰余群をなしているので

$$V_I^i \sim V_I^j O_j^i \quad (4.1.3)$$

という同一視が行われていることに注意する。ここで O_j^i は $SO(5)_c$ の要素である*1。

超対称変換

超対称変換は

$$\begin{aligned} \delta\psi_\mu &= \left[\nabla_\mu + \frac{\tilde{m}}{20} T \gamma_\mu - \frac{1}{40} (\gamma_\mu^{\nu\lambda} - 8\delta_\mu^\nu \gamma^\lambda) \Gamma^{ij} V_I^i V_J^j F_{\nu\lambda}^{IJ} \right] \epsilon \\ \delta\lambda_i &= \left[\frac{\tilde{m}}{2} (T_{ij} - \frac{1}{5} \delta_{ij} T) \Gamma^j + \frac{1}{2} \gamma^\mu P_{\mu ij} \Gamma^j + \frac{1}{16} \gamma^{\mu\nu} (\Gamma^{kl} \Gamma^i - \frac{1}{5} \Gamma^i \Gamma^{kl}) V_K^k V_L^l F_{\mu\nu}^{KL} \right] \epsilon \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

で与えられる。

4.1.2 超対称解の導出

目標は $SO(6) \times SO(3) \times U(1)$ 対称性を持った 11 次元超重力理論の超対称解を作ることである。このため、11 次元理論を $7+4$ と次元を分けて、ゲージ化超重力理論を導入しよう。

- S^5 と Killing 方向 $\partial_t \rightarrow 7$ 次元時空に
- $S^2 \rightarrow 4$ 次元内部空間に

*1 (4.1.3) 式について、[1] の (G.3) 式では $V_I^i \sim O_I^j V_j^i$ となっているが、[25] の記法に忠実に従うのであれば $V_I^i \sim V_I^j O_j^i$ と表現するのが正しいと思われる。

とする。このような対称性を課して得られる解は、BPS ゲージ化 Q-ball [26] と同じものである。

解の ansatz をおく。

$SO(6) \times SO(3) \times U(1)$ 対称性を持たせるためには、7 次元ゲージ化超重力理論の解の ansatz に導入される全ての関数は S^5 の回転と t 方向の並進の下で不変になっていなければならない。よって、7 次元時空の計量と matter 場を固定する条件を考えながら ansatz をおこう。

計量に $U(1) \times SO(6)$ 対称性を持たせると

$$ds_7^2 = -e^{2n} d\tilde{t}^2 + g_{rr} dr^2 + e^{2k} d\Omega_5^2 \quad (4.1.5)$$

として表すことができる。ここで、ゲージ化超重力理論における自然な時間座標として $\tilde{t} = t/m$ を定義した。また、内部空間には $SO(3)$ 対称性を要請しよう。適切な $SO(3)$ 変換を行えば、スカラー場 V とゲージ場 A は

$$V_I^i = \begin{pmatrix} e^{-3\chi} g & \mathbf{0}_{2 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 2} & e^{2\chi} \mathbf{1}_{3 \times 3} \end{pmatrix}, \quad A_{\mu I}^J = \begin{pmatrix} iA_\mu \sigma_2 & \mathbf{0}_{2 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 2} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{pmatrix}, \quad A_\mu dx^\mu = h d\tilde{t} \quad (4.1.6)$$

と表現することができる。 σ_i は Pauli 行列である。 A に $SO(3)$ 対称性を要請した結果、 $U(1)^1$ 切断されたことに注目しておこう。これに関連して、次節において $U(1)^2$ 切断した 7 次元ゲージ化超重力理論を扱うことにする。

(4.1.6) 式で導入した g は剰余群 $SU(2, \mathbf{R})/U(1)$ の要素であり、荷電スカラー場に対応する。この g を関数 ρ と θ でパラメータ付けすると

$$g = \exp[i\theta\sigma_2] \exp[-\rho\sigma_3] \quad (4.1.7)$$

と表すことができる。

(4.1.5), (4.1.6) 式において導入されたスカラー関数は全て、1 つの座標 r のみに依存することに注意しよう。 r についてはパラメータ付け替えに関する不変性がまだ残っているので、ここで

$$g_{rr} = r^6 e^{-6k-2n} \quad (4.1.8)$$

とゲージ固定してしまうことにする。

(4.1.2) 式において定義した関数を (4.1.6) 式のような行列の形で書き直すと

$$\begin{aligned} T_{ij} &= \begin{pmatrix} e^{6\chi} (\cosh 2\rho + \sigma_3 \sinh 2\rho) & \mathbf{0}_{2 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 2} & e^{-4\chi} \mathbf{1}_{3 \times 3} \end{pmatrix} \\ P_{ij} &= \begin{pmatrix} -3d\chi - \sigma_3 d\rho + \sigma_1 (\tilde{e}A + d\theta) \sinh 2\rho & \mathbf{0}_{2 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 2} & 2d\chi \mathbf{1}_{3 \times 3} \end{pmatrix} \\ Q_{ij} &= \begin{pmatrix} i\sigma_2 (\tilde{e}A + d\theta) \cosh 2\rho & \mathbf{0}_{2 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 2} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

となる。ここで $\tilde{e} \equiv 2\tilde{m}$ は V_I^i の charge である。

$\theta = 0$ というゲージを選ぶ。

θ は $\tilde{e}A + d\theta$ という組み合わせを通してのみ入っていることに注意しよう。従って、 A_μ について $U(1)$ ゲージ変換をすることによって、 $\theta = 0$ とすることができる。以後はこのゲージを取ることにしよう。このように勝手にゲージを選んでしまっても、漸近領域においては A_μ の値が物理的な意味を持っていることに注意しておこう。

Killing スピノール方程式を解く。

超対称解を見つけるためには、方程式

$$\delta\psi_\mu = 0, \quad \delta\lambda_i = 0 \quad (4.1.10)$$

を解けばよい。左辺の具体的な形は (4.1.4) 式で与えてある。

最初に方程式 $\delta\psi_\alpha = 0$ (α は S^5 上の脚) を解こう。共変微分 ∇_α は

$$\nabla_\alpha \epsilon = \tilde{\nabla}_\alpha \epsilon - \frac{1}{2} \gamma^r{}_\alpha \epsilon \partial_r k = \partial_\alpha \epsilon + \frac{1}{4} \tilde{\omega}_{\alpha\beta\gamma} \gamma^{\beta\gamma} \epsilon - \frac{1}{2} \gamma^r{}_\alpha \epsilon \partial_r k \quad (4.1.11)$$

と定義される。ここで $\tilde{\nabla}_\alpha$ は単位球上における共変微分であり、残りの項はワープ因子から来る寄与である。 S^5 の回転対称性があることより、共变的に定数であるスピノールは

$$\tilde{\nabla}_\alpha \epsilon = \frac{s}{2} e^{-k} \gamma_\alpha \hat{\gamma} \epsilon \quad (4.1.12)$$

の解 ϵ とならなければならないことに注意しよう。 $\hat{\gamma}$ は球面上の chirality 演算子である。 $s = \pm i$ であり [27]、ここでは $-$ を選ぶことにする。この射影を使うと、方程式 $\delta\psi_\alpha = 0$ は

$$\left[s e^{-k} \hat{\gamma} + \frac{\tilde{m}}{2} e^{-4\chi} + \gamma^r \partial_r (k + \chi) \right] \epsilon = 0 \quad (4.1.13)$$

となる。

また、 \tilde{t} は Killing 方向であるから、 ϵ の時間依存性を

$$\epsilon \sim e^{iE\tilde{t}/2} \quad (4.1.14)$$

となるように選べることに注意しよう。

残った方程式を表現するためには、 γ 行列の基底を

$$\gamma^r = e_r^r \sigma_3, \quad \gamma^{\tilde{t}} = i e_{\tilde{t}}^{\tilde{t}} \sigma_2 \quad (4.1.15)$$

として、スピノール ϵ をこの基底において

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_+ \\ \epsilon_- \end{pmatrix} \quad (4.1.16)$$

と分解しておくのが良い。また $\hat{\gamma}$ と $\tilde{\gamma}$ が重なると見にくくなってしまいますので、ここから (4.1.42) 式までは \tilde{t} を単に t と書くことにしよう。この結果、

$$\begin{aligned} & \left[\tilde{m}(e^{-10\chi} - \cosh 2\rho) + \frac{5}{r^3} e^{-6\chi+n+3k} \partial_r \chi \right] \epsilon_+ + \left(i e^{-12\chi+3k} \frac{1}{r^3} \partial_r h \right) \epsilon_- = 0 \\ & \left[\tilde{m}(e^{-10\chi} - \cosh 2\rho) - \frac{5}{r^3} e^{-6\chi+n+3k} \partial_r \chi \right] \epsilon_- + \left(i e^{-12\chi+3k} \frac{1}{r^3} \partial_r h \right) \epsilon_+ = 0 \end{aligned} \quad (4.1.17)$$

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{2} e_r^r \partial_r \log \tanh \rho - \tilde{m} e^{6\chi} \right] \epsilon_+ - 2i \tilde{m} e_{\tilde{t}}^{\tilde{t}} A_t \epsilon_- = 0 \\ & \left[\frac{1}{2} e_r^r \partial_r \log \tanh \rho + \tilde{m} e^{6\chi} \right] \epsilon_- - 2i \tilde{m} e_{\tilde{t}}^{\tilde{t}} A_t \epsilon_+ = 0 \end{aligned} \quad (4.1.18)$$

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\tilde{m}}{2} e^{-4\chi} + e_r^r \partial_r (k + \chi) \right] \epsilon_+ - s e^{-k} \epsilon_- = 0 \\ & \left[\frac{\tilde{m}}{2} e^{-4\chi} - e_r^r \partial_r (k + \chi) \right] \epsilon_- - s e^{-k} \epsilon_+ = 0 \end{aligned} \quad (4.1.19)$$

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\tilde{m}}{2} e^{-4\chi} + e_r^r \partial_r (\chi + n) \right] \epsilon_+ + \left[(iE + 2i\tilde{m} A_t \cosh 2\rho) e_{\tilde{t}}^{\tilde{t}} + i e^{-6\chi+3k} \frac{1}{r^3} \partial_r h \right] \epsilon_- = 0 \\ & \left[\frac{\tilde{m}}{2} e^{-4\chi} - e_r^r \partial_r (\chi + n) \right] \epsilon_- + \left[-(iE + 2i\tilde{m} A_t \cosh 2\rho) e_{\tilde{t}}^{\tilde{t}} + i e^{-6\chi+3k} \frac{1}{r^3} \partial_r h \right] \epsilon_+ = 0 \end{aligned} \quad (4.1.20)$$

となる*2。

*2 (4.1.18) 式について、[1] の (G.20) 式では $\mp \tilde{m} e^{6\chi}$ となっているが、正しくは $\mp \tilde{m} e^{6\chi}$ であると思われる。

$\delta\psi_r = 0$ は ϵ について代数方程式になっておらず、 $\partial_r \epsilon$ を含んだ微分方程式になっているので、ここでは除いておいた。もし $\epsilon(r)$ の r 依存性を求めたいのであれば、まず方程式 (4.1.17)-(4.1.20) を解いて bosonic 背景時空を求めた後で、 $\delta\psi_r = 0$ を解けばよい。しかしながら、ここでの議論においては $\epsilon(r)$ の r 依存性を求める必要がないので、以下では $\delta\psi_r = 0$ について考えないことにする。

ゲージ固定条件 (4.1.8) により

$$e_{\hat{r}}^r = \frac{1}{r^3} e^{n+3k} \quad (4.1.21)$$

が成り立つ。従って、方程式 (4.1.17)-(4.1.20) において、微分 ∂_r は

$$\frac{1}{r^3} \partial_r = \partial_R, \quad R \equiv \frac{r^4}{4} \quad (4.1.22)$$

という組み合わせでのみ現れることが確認できる。

χ を評価する。

方程式 (4.1.17)-(4.1.20) を解くために、一般に

$$\begin{aligned} (a+b)\epsilon_+ + c\epsilon_- &= 0, & (d+e)\epsilon_+ + (f+g)\epsilon_- &= 0 \\ (a-b)\epsilon_- + c\epsilon_+ &= 0, & (d-e)\epsilon_- + (f-g)\epsilon_+ &= 0 \end{aligned} \quad (4.1.23)$$

という形をした方程式群を考えよう。これらは

$$cd = af + bg, \quad ce = ag + bf, \quad a^2 = b^2 + c^2, \quad d^2 - e^2 = f^2 - g^2 \quad (4.1.24)$$

を満たす。この結果を用いると、(4.1.17) 式と (4.1.18) 式より

$$\begin{aligned} \left(ie^{-12\chi+3k} \frac{1}{r^3} \partial_r h \right) (-\tilde{m}e^{6\chi}) &= 0 + \left(\frac{5}{r^3} e^{-6\chi+n+3k} \partial_r \chi \right) (-2i\tilde{m}e_t^t A_t) \\ \Leftrightarrow \partial_R h &= 10h \partial_R \chi \end{aligned} \quad (4.1.25)$$

が得られる。(4.1.5), (4.1.6) 式より $A_t = h$, $e_t^t = e^{-n}$ であることが分かるので、ここで用いた。これは簡単に積分できて、

$$e^\chi = \left(\frac{h}{h_0} \right)^{1/10} \quad (4.1.26)$$

となる。 h_0 は積分定数である。

k を評価する。

(4.1.24) 式の結果を、今度は (4.1.18) 式と (4.1.19) 式に適用すると

$$\begin{aligned} 0 + \left(e^{n+3k} \frac{1}{r^3} \partial_r (k + \chi) \right) (-2i\tilde{m}e_t^t A_t) &= (-se^{-k}) (-\tilde{m}e^{6\chi}) \\ \Leftrightarrow e^{4\chi+4k} \partial_R (k + \chi) &= \frac{is}{2} h_0^{-1} \end{aligned} \quad (4.1.27)$$

が得られる。これも簡単に積分できて、

$$e^{4\chi+4k} = \frac{is}{2} h_0^{-1} (r^4 + c_1) \quad (4.1.28)$$

となる。 c_1 は積分定数である。

n を評価する。

(4.1.19) 式を行列の形に書き直すと

$$\begin{pmatrix} \frac{\tilde{m}}{2}e^{-4\chi} + e^{n+3k}\partial_R(k+\chi) & -se^{-k} \\ -se^{-k} & \frac{\tilde{m}}{2}e^{-4\chi} - e^{n+3k}\partial_R(k+\chi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_+ \\ \epsilon_- \end{pmatrix} = 0 \quad (4.1.29)$$

となり、非自明な解 (ϵ_+, ϵ_-) が存在する条件は、この行列の行列式が 0 になることであると分かる。従って

$$\frac{1}{16}e^{2n}[\partial_R e^{4k+4\chi}]^2 = \frac{\tilde{m}^2}{4}e^{2k} - s^2e^{8\chi} \quad (4.1.30)$$

という方程式が得られる。よって、 n の値が

$$e^{2n} = -\frac{1}{s^2}h_0^2[\tilde{m}^2e^{2k} - 4s^2e^{8\chi}] = h_0^2[\tilde{m}^2e^{2k} + 4e^{8\chi}] \quad (4.1.31)$$

として求められる。

ρ を評価する。

(4.1.17) 式についても同様に、行列の形に書き直した上で (行列式) = 0 を要請すれば

$$\cosh 2\rho = h_0\partial_R \left[\left(R + \frac{c_1}{4} \right) h^{-1} \right] \quad (4.1.32)$$

という方程式が得られる*3。

以上で ansatz に含まれている全ての未知数 $(\theta = 0, \chi, k, n, \rho)$ を評価することができた。ここまでの結果をまとめると

$$h \equiv h_0H^{-1}; \quad e^\chi = H^{-\frac{1}{10}}, \quad e^k = (r^4 + c_1)^{1/4}H^{\frac{1}{10}}(2h_0)^{-1/4}, \quad e^{2n} = (2h_0)^2fH^{-4/5} \quad (4.1.33)$$

となる。ここで

$$f \equiv 1 + \frac{\tilde{m}^2}{4}e^{2k-8\chi} = 1 + \frac{\tilde{m}^2}{4\sqrt{2}h_0}H(r^4 + c_1)^{1/2} \quad (4.1.34)$$

を定義した。

これらの表現を方程式 (4.1.17)-(4.1.20) に代入して、解 (ϵ_+, ϵ_-) が存在する条件を書き出すと、非自明な方程式は

$$2f\tilde{R}^{1/2}\partial_R^2(\tilde{R}H) = -\frac{\tilde{m}^2}{\sqrt{2}h_0}([\partial_R(\tilde{R}H)]^2 - 1) \quad (4.1.35)$$

$$\tilde{m} - 2 \left(\frac{E}{2h_0} + \tilde{m}H^{-1}\partial_R(\tilde{R}H) \right) - 2\tilde{m}\tilde{R}H\partial_RH^{-1} = 0 \quad (4.1.36)$$

だけであることが分かる。ここで

$$\tilde{R} \equiv R + \frac{c_1}{4} \quad (4.1.37)$$

を定義した。さらに、(4.1.35) 式を用いると (4.1.36) 式は

$$E = -\tilde{m}h_0 \quad (4.1.38)$$

と書き表せることが確認できる。これによって、残された非自明な微分方程式は (4.1.35) 式のみとなる。

積分定数 h_0, c_1 を固定する。

*3 (4.1.32) 式について、[1] の (G.33) 式では $r + \frac{c_1}{4}$ となっているが、正しくは $R + \frac{c_1}{4}$ であると思われる。

Killing スピノール方程式を解いた結果、解は (4.1.33), (4.1.34) 式で与えられることが分かった。但し、関数 H は (4.1.35) 式を満たす。ここで、積分定数 h_0, c_1 が存在していることに注目して、その値を固定してしまうことにしよう。(4.1.33) 式を (4.1.5) 式に代入すると、ゲージ化超重力理論の解は

$$ds_7^2 = -(2h_0)^2 f H^{-4/5} dt^2 + \frac{H^{1/5}}{\sqrt{2h_0}} \left[\frac{r^6 dr^2}{f(r^4 + c_1)^{3/2}} + (r^4 + c_1)^{1/2} d\Omega_5^2 \right]$$

$$A_t = h_0 H^{-1}, \quad e^X = H^{-\frac{1}{10}}, \quad \cosh 2\rho = \partial_R(\tilde{R}H) \quad (4.1.39)$$

となる。 h_0 の値を自由に変更しても t, r, c_1 のリスケールによって吸収できるので、式の形が簡単になるように $h_0 = \frac{1}{2}$ と固定することにしよう。次に計量と matter 場と (4.1.35) 式を見ると、全て座標 \tilde{R} で表現できて、 c_1 はあらわには現れないことが確認できる。よって、座標 r を $r = (4R)^{1/4} \rightarrow (4\tilde{R})^{1/4}$ として定義し直すことにしよう。これは実質的に $c_1 = 0$ とおくことと同等である。このことは、一般性を失わずに $c_1 = 0$ と固定できたことを意味している。

7 次元ゲージ化超重力理論の超対称解

以上の議論から得られた解の最終的な形を書き下すと

$$ds_7^2 = -f H^{-4/5} dt^2 + H^{1/5} \left[\frac{dr^2}{f} + r^2 d\Omega_5^2 \right]$$

$$A_t = \frac{1}{2} H^{-1}, \quad e^X = H^{-\frac{1}{10}}, \quad \cosh 2\rho = \partial_R(RH), \quad R \equiv \frac{r^4}{4} \quad (4.1.40)$$

となる。先に $c_1 = 0$ とおいたので、 $R = \tilde{R}$ が成り立っていることを用いた。ここで

$$f = 1 + \frac{\tilde{m}^2 r^2}{4} H \quad (4.1.41)$$

であり、 H は非線形微分方程式

$$2fR^{1/2} \partial_R^2(RH) = -\tilde{m}^2 ([\partial_R(RH)]^2 - 1) \quad (4.1.42)$$

を満たす。この微分方程式をより簡潔な形で表現するには、新たな変数 x を

$$x \equiv 4m^4 r^4 \quad (4.1.43)$$

として導入して変数変換を行うのがよい。ここで $\tilde{m} = 2m$ であったことを思い出せば、このとき

$$ds_7^2 = -f H^{-4/5} d\tilde{t}^2 + H^{1/5} \left[\frac{dr^2}{f} + r^2 d\Omega_5^2 \right]$$

$$A_{\tilde{t}} = \frac{1}{2} H^{-1}, \quad e^X = H^{-\frac{1}{10}}$$

$$f = 1 + m^2 r^2 H, \quad \cosh 2\rho = \partial_x(xH) \quad (4.1.44)$$

となる。しばらく \tilde{t} を t と表記していたが、ここで元に戻した。そして非線形微分方程式 (4.1.42) は、関数 $F(x) = xH(x)$ を用いて

$$(2\sqrt{x} + F)F'' = 1 - (F')^2 \quad (4.1.45)$$

と表される。

特異点を持たない解は、ある境界条件を満たす。

特異点を持たない解は、 $H(x=0)$ が有限でなくてはならない。また

$$\cosh 2\rho = H + x\partial_x H \geq 1 \quad (4.1.46)$$

が満たされなくてはならないので、結局

$$F(x=0) = 0, \quad H(x=0) = C \geq 1 \quad (4.1.47)$$

という境界条件を満たさなくてはならないことが分かる。このような条件を満たす解は完全に滑らかで、事象の地平面 (horizon) を持たないことが確認できる。

一方で、特異解を得るには荷電スカラー場を 0 とおけばよい。すると、7 次元ゲージ化超重力理論の荷電ブラックホール解に extremal 極限を取ったものが得られる [16, 17]。この場合、方程式の解 $H_{BH} = 1 + \frac{Q}{x}$ に対応するが、 $x=0$ で特異点を持つので、今の境界条件には合わないことが分かる。

また (4.1.45) 式は、(4.1.47) 式における定数 C でパラメータ付けされる解の族 (family) を作る事が分かる。実は、 C は解の charge (質量) と関係していることを後で確認する。

4.2 7次元ゲージ化超重力理論の超対称解 (再度)

前節では $SO(3)$ 内部対称性を課すと、 $SO(5)$ ゲージ群が $U(1)^1$ に切断されることを確認した。一方、 $U(1)^n$ 切断したゲージ化超重力理論については、詳しく研究されている。この節では、 $U(1)^n$ 切断した理論のアプローチから同じ超対称解を導出することにしよう [28]。

一般次元での議論は付録 C において示した。ここでは、その議論の結果を利用することとする。

Lagrangian

$\mathcal{N} = 4$ ゲージ化超重力理論の Lagrangian のうち、以下の議論に必要な部分は

$$\mathcal{L} = R * \mathbf{1} - \frac{1}{4} T_{ij}^{-1} * DT_{jk} \wedge T_{k\ell}^{-1} DT_{\ell i} - \frac{1}{4} T_{ik}^{-1} T_{j\ell}^{-1} * F_{(2)}^{ij} \wedge F_{(2)}^{k\ell} - V * \mathbf{1} \quad (4.2.1)$$

である。これは $SO(5)$ ゲージ化超重力理論 (S^4 にコンパクト化したもの) の矛盾の無い切断になっている。但し、ゲージ場に $F_{(2)}^{[ij} \wedge F_{(2)}^{k\ell]} = 0$ という条件をかけて、3 形式場が励起しないようにした。

14 個のスカラー場はユニモジュラー^{*4}対称行列 T_{ij} で記述される。共変微分は

$$DT_{ij} = dT_{ij} + gA_{(1)}^{ik} T_{kj} + gA_{(1)}^{jk} T_{ik} \quad (4.2.2)$$

と定義される。 $SO(5)$ ゲージ場の field strength は

$$F_{(2)}^{ij} = dA_{(1)}^{ij} + gA_{(1)}^{ik} \wedge A_{(1)}^{kj} \quad (4.2.3)$$

であり、スカラーポテンシャルは

$$V = \frac{1}{2} g^2 (2T_{ij} T_{ij} - T_{ii}^2) \quad (4.2.4)$$

である。

理論の $U(1)^2$ 切断を行う。

ここで、ゲージ場とスカラー場に制限を課して切断を行おう。但し、不用意に選んだ場を 0 とおいてしまうと、その場の運動方程式が source 項が存在して、さらにその source となる場が 0 でない場合には、運動方程式は矛盾したものになってしまうことに注意する。このような矛盾が出ない切断として

$$\begin{aligned} A_{(1)}^{12} &= A_{(1)}^1, & A_{(1)}^{34} &= A_{(1)}^2, & \text{otherwise} &= 0 \\ T_{ij} &= \text{diag.} (X_1 e^{-\varphi_1}, X_1 e^{\varphi_1}, X_2 e^{-\varphi_2}, X_2 e^{\varphi_2}, (X_1 X_2)^{-2}) \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

^{*4} 行列式が 1 の行列である。

を採用しよう。これは $SO(5)$ ゲージ場を最大トラス $U(1)^2$ におけるゲージ場へと切断したことに相当する。また、この切断を行うと 4 個のスカラー場 $X_1, X_2, \varphi_1, \varphi_2$ を得る。さらに標準的なパラメータ付け

$$X_1 = e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}\phi_1 - \frac{1}{\sqrt{10}}\phi_2}, \quad X_2 = e^{\frac{1}{\sqrt{2}}\phi_1 - \frac{1}{\sqrt{10}}\phi_2} \quad (4.2.6)$$

を行っておこう。このような切断を行った結果、得られる Lagrangian は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_7 = R * \mathbf{1} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 *d\varphi_i \wedge d\varphi_i - \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^2 *d\phi_\alpha \wedge d\phi_\alpha - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 X_i^{-2} *F_{(2)}^i \wedge F_{(2)}^i \\ - 2g^2 \sum_{i=1}^2 \sinh^2 \varphi_i *A_{(1)}^i \wedge A_{(1)}^i - V * \mathbf{1} \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

となる。また、スカラーポテンシャルは

$$\begin{aligned} V = g^2(2X_1^2 \sinh^2 \varphi_1 + 2X_2^2 \sinh^2 \varphi_2 - 2X_1^{-1} X_2^{-2} \cosh \varphi_1 - 2X_2^{-1} X_1^{-2} \cosh \varphi_2 \\ - 4X_1 X_2 \cosh \varphi_1 \cosh \varphi_2 + \frac{1}{2} X_1^{-4} X_2^{-4}) \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

と表せる。

7 次元 AdS bubble 解

このような Lagrangian から、7 次元 $SO(5)$ ゲージ化超重力理論の AdS bubble 解

$$\begin{aligned} ds_7^2 = -(H_1 H_2)^{-4/5} f dt^2 + (H_1 H_2)^{1/5} (f^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_5^2) \\ A_{(1)}^i = -H_i^{-1} dt, \quad X_i = (H_1 H_2)^{2/5} H_i^{-1}, \quad \cosh \varphi_i = (R H_i)' \\ f = 1 + \frac{1}{4} g^2 r^2 H_1 H_2 \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

を得ることができる。 $R \equiv \frac{1}{4} r^3$ であり、' は $\partial/\partial R$ である。但し、関数 H_i は

$$2R^{1/2} f(R H_i)'' = -g^2 [(R H_i)'^2 - 1] (H_1 H_2) H_i^{-1} \quad (4.2.10)$$

を満たす。このとき、Lagrangian (4.2.7) から得られる運動方程式は時空解 (4.2.9) を満たしていることが確認できる。

もし $H_1 = H, H_2 = 1$ とすれば、先の 1/2 BPS 解と一致することが示せる。一般に 1/4 BPS 解となっているのである。

こうして得られた時空解は AdS 時空であり、この場合 $SO(6)$ 対称性があることが確認できる。 $SO(3)$ 対称性については、既に述べた通りである。よって、確かに $SO(6) \times SO(3)$ 対称性を持つ 7 次元ゲージ化超重力理論の 1/2 BPS 解を得ることができた。

4.3 次元酸化して得られる 11 次元重力解

11 次元へ持ち上げる方法が知られている。

7 次元ゲージ化超重力理論の解を次元酸化することによって、11 次元超重力理論の解を構成できることが知られている。一般的な手法は [29, 30] で導出されている。その結果を示すと、

$$\begin{aligned} ds_{11}^2 = \Delta^{1/3} ds_7^2 + \frac{1}{\tilde{m}^2} \Delta^{-2/3} T_{IJ}^{-1} (dY^I + 2\tilde{m}(A_\mu)^{IK} Y^K) (dY^J + 2\tilde{m}(A_\mu)^{JL} Y^L) \\ \frac{\sqrt{2}}{3} F_{(4)} = \epsilon_{A_1 \dots A_5} \left[\frac{2}{\tilde{m} \Delta} F^{A_1 A_2} (DY)^{A_3} (DY)^{A_4} (T \cdot Y)^{A_5} + \frac{1}{\tilde{m}} F^{A_1 A_2} F^{A_3 A_4} Y^{A_5} \right. \\ \left. + \frac{1}{3\tilde{m}^3} (DY)^{A_1} (DY)^{A_2} (DY)^{A_3} \left\{ -\frac{1}{\Delta} (DY)^{A_4} (T \cdot Y)^{A_5} + 4D \left(\frac{(T \cdot Y)^{A_4}}{\Delta} \right) Y^{A_5} \right\} \right] \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

となる。ここで Y^I は 5 次元の単位ベクトル $Y \cdot Y = 1$ であり、

$$\Delta = Y \cdot T \cdot Y, \quad DY^I = dY^I + 2\tilde{m}A^{IJ}Y_J \quad (4.3.2)$$

である。よって、この手法を用いてゲージ化超重力理論の正則な超対称解を構築して、M 理論の解まで次元を引き上げることができるのである。

実際に 11 次元時空解に持ち上げる。

実際にこの手法を用いて、7 次元ゲージ化超重力理論の解を 11 次元時空解に持ち上げてみよう。5 次元単位ベクトル Y^I について

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} Y_3 \\ Y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \psi \cos \zeta \\ \sin \theta \cos \psi \sin \zeta \end{pmatrix}, \quad Y_5 = \sin \theta \sin \psi \quad (4.3.3)$$

とパラメータ付けするものとしよう。また、 S^2 は (ψ, ζ) でパラメータ付けされているものとする。すると、11 次元時空解が

$$\begin{aligned} ds_{11}^2 = \Delta^{1/3} ds_7^2 + \frac{1}{4m^2} \Delta^{-2/3} \{ & e^{4\chi} (\cos^2 \theta d\theta^2 + \sin^2 \theta d\tilde{\Omega}_2^2) \\ & + e^{-6\chi-2\rho} [d(\cos \theta \cos \phi) + 2mH^{-1} \cos \theta \sin \phi d\tilde{t}]^2 \\ & + e^{-6\chi+2\rho} [d(\cos \theta \sin \phi) - 2mH^{-1} \cos \theta \cos \phi d\tilde{t}]^2 \} \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

として得られる。ここで

$$\begin{aligned} \Delta &= \cos^2 \theta (e^{6\chi+2\rho} \cos^2 \phi + e^{6\chi-2\rho} \sin^2 \phi) + e^{-4\chi} \sin^2 \theta \\ ds_7^2 &= -fH^{-4/5} d\tilde{t}^2 + H^{1/5} \left[\frac{dr^2}{f} + r^2 d\Omega_5^2 \right] \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

である。

4.3.1 漸近的な振る舞い

非線形微分方程式 (4.1.45) を近似することにより、7 次元ゲージ化超重力理論を次元酸化して得られる M 理論の 1/2 BPS 正則解の charge と漸近的な振る舞いを調べることができる。

$x \rightarrow \infty$ の極限

x が非常に大きい極限では、漸近解は

$$F(x) = [x^2 + 2Px + (P^2 - d)]^{1/2}, \quad x \gg P, d \quad (4.3.6)$$

となる。このとき

$$H(x) = \frac{F(x)}{x} = 1 + \frac{P}{x} - \frac{d}{x^2} + \dots, \quad x \gg P, d \quad (4.3.7)$$

であることに注目すれば、 P は解の charge に、 d は解の「双極子モーメント」とも言うべき量に関するパラメータであることが確認できる。また P, d はどちらも C の関数である。ここで $x = 4m^4 r^4$ であることを思い出せば

$$H \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 1 + \frac{Q}{r^4} \quad (4.3.8)$$

であることが分かる。 $Q = P/4m^2$ は解の charge である。

$F'(x) \gg 1$ の極限

他の有益な近似は $F'(x) \gg 1$ の場合である。このとき (4.1.45) 式は

$$(2\sqrt{x} + F)F'' = -(F')^2 \quad (4.3.9)$$

となる。変数変換

$$x = C^{-2}e^t, \quad F(x) = \sqrt{x}G(t) \quad (4.3.10)$$

を行うと、

$$2(G+2)\ddot{G} + 2\dot{G}^2 + 2G\dot{G} - G = 0 \quad (4.3.11)$$

となる。' は d/dt を表す。解 $G(t)$ は C に依存しないことを確認しておこう。

$C \rightarrow \infty$ の極限

C が非常に大きい極限においては、(4.3.6) 式と (4.3.11) 式を一致させることにより、

$$Q \approx \frac{1}{8m^4}(\ln C)^2, \quad d \approx (4m^4Q)^2 + O((\ln C)^2), \quad C \rightarrow \infty \quad (4.3.12)$$

という関係式が得られる。

4.3.2 11 次元 ansatz との比較

これまでの議論より、ゲージ化超重力理論の正則解を次元酸化して得られた 11 次元重力解 (4.3.4) は、11 次元 ansatz (3.1.101)-(3.1.105) を満たすはずであると考えられる。このことを実際に確認してみよう。

λ, y を評価する。

計量の $d\Omega_5^2$ の係数を比較することにより

$$e^{2\lambda} = m^2 r^2 \Delta^{1/3} H^{1/5} \quad (4.3.13)$$

が得られる。但し、(3.1.101) 式では $m = \frac{1}{2}$ とおいていることに注意しよう。

また、計量の $d\tilde{\Omega}_2^2$ の係数を比較することにより

$$y = m^2 r^2 \sin \theta \quad (4.3.14)$$

が得られる。さらに、以上より

$$\cosh^2 \zeta = 1 + \sinh^2 \zeta = 1 + (-ye^{-3\lambda})^2 = 1 + m^{-2} r^{-2} \Delta^{-1} H^{-3/5} \sin^2 \theta \quad (4.3.15)$$

という関係式も得られる。

D, x_i を評価する。

11 次元計量 (4.3.4) から $d\Omega_5^2$ と $d\tilde{\Omega}_2^2$ の成分を除いて

$$ds_{11}^2 = e^{2\lambda} ds_4^2 + \dots \quad (4.3.16)$$

と定義した 4 次元基底空間の計量は

$$ds_4^2 = \frac{1}{m^2 r^2} \left[-f H^{-1} d\tilde{t}^2 + \frac{dr^2}{f} + \frac{H^{-1/5}}{4m^2 \Delta} \left\{ e^{4\lambda} \cos^2 \theta d\theta^2 + e^{-6\lambda-2\rho} [d(\cos \theta \cos \phi) + 2mH^{-1} \cos \theta \sin \phi d\tilde{t}]^2 + e^{-6\lambda+2\rho} [d(\cos \theta \sin \phi) - 2mH^{-1} \cos \theta \cos \phi d\tilde{t}]^2 \right\} \right] \quad (4.3.17)$$

となる。同じ計量は 11 次元 ansatz (3.1.101)-(3.1.105) において

$$ds_4^2 = -\frac{\cosh^2 \zeta}{m^2} (dt + V)^2 + \frac{e^{-6\lambda}}{4m^2 \cosh^2 \zeta} [e^D(dx^2 + x^2 d\psi^2) + dy^2] \quad (4.3.18)$$

と表される。ここで (x, ψ) は (x_1, x_2) 平面の極座標であり、 D, x, ψ は r, θ, ϕ の関数である。

(4.3.17) 式と (4.3.18) 式を比較すると、

$$dt + V_i dx_i = m d\tilde{t} - \frac{m^4 r^4 e^{-6\lambda}}{2 \cosh^2 \zeta} \left[\frac{\sin 2\theta \sin 2\phi}{2} \sinh 2\rho d\theta - (e^{-2\rho} \sin^2 \phi + e^{2\rho} \cos^2 \phi) \cos^2 \theta d\phi \right] \quad (4.3.19)$$

という関係が成り立つことが分かる。但し $\tilde{t} = t/m$ である。

以上の結果を用いて、 D, x, ψ を r, θ, ϕ で表すと、 (x_1, x_2) 平面の 2 次元計量は

$$\begin{aligned} & \frac{e^{-6\lambda}}{4m^2 \cosh^2 \zeta} [e^D(dx^2 + x^2 d\psi^2)] \\ &= \frac{1}{m^2 r^2 f} dr^2 - \frac{e^{-6\lambda}}{4m^2 \cosh^2 \zeta} (2m^2 r \sin \theta dr + m^2 r^2 \cos \theta d\theta)^2 \\ & \quad + \frac{H^{2/5}}{4m^4 r^2 \Delta} \{ (e^{-2\rho} \cos^2 \phi + e^{2\rho} \sin^2 \phi) \sin^2 \theta d\theta^2 + H^{-1} \cos^2 \theta d\theta^2 \\ & \quad \quad - \sin 2\theta \sin 2\phi \sinh 2\rho d\theta d\phi + (e^{-2\rho} \sin^2 \phi + e^{2\rho} \cos^2 \phi) \cos^2 \theta d\phi^2 \} \\ & \quad + \frac{1}{\cosh^2 \zeta} \frac{m^6 r^8}{4e^{12\lambda}} \left[\frac{1}{2} \sin 2\theta \sin 2\phi \sinh 2\rho d\theta - (e^{-2\rho} \sin^2 \phi + e^{2\rho} \cos^2 \phi) \cos^2 \theta d\phi \right]^2 \end{aligned} \quad (4.3.20)$$

と表せることが分かる。

ここで、(4.1.40) 式を用いて微分方程式 (4.1.42) 式を

$$\partial_r \rho = \frac{-2m^2 r \sinh 2\rho}{f} \quad (4.3.21)$$

と書き直しておこう。この式を用いて、(4.3.20) 式から得られる非線形微分方程式群を解けば

$$e^D = \frac{m^2 r^2 f}{\tilde{F}(r)^2}, \quad x = \sqrt{e^{-2\rho} \cos^2 \phi + e^{2\rho} \sin^2 \phi} \tilde{F}(r) \cos \theta, \quad \psi = \arctan(e^{2\rho} \tan \phi) \quad (4.3.22)$$

という表現が得られる。但し、関数 $F(r)$ は

$$\partial_r \tilde{F}(r) = \frac{2m^2 r \tilde{F}(r) \cosh 2\rho}{f} \quad (4.3.23)$$

を満たす。よって再度 (4.3.21) 式を用いれば、(4.3.23) 式の解は

$$\tilde{F}(r) = \sqrt{\frac{\sinh 2\rho(r=0)}{\sinh 2\rho(r)}} \quad (4.3.24)$$

となることが分かる。ここで分子の $\sinh 2\rho(r=0)$ は、解の charge に関係した規格化因子である。

また (4.3.22) 式より、 (x, ψ) は (x_1, x_2) 平面内の複素座標 w を用いて

$$w = x e^{i\psi} = (e^{i\phi} \cosh \rho - e^{-i\phi} \sinh \rho) \tilde{F}(r) \cos \theta \quad (4.3.25)$$

として表現することもできる。

得られた 11 次元時空解を 11 次元 ansatz と比較する。

以上の議論の結果をまとめよう。解の charge に関係した規格化因子を $\sinh 2\rho(r=0) = 1$ として規格化すれば、

$$\begin{aligned} x_1 + ix_2 &= (e^{i\phi} \cosh \rho - e^{-i\phi} \sinh \rho) \frac{\cos \theta}{\sqrt{\sinh 2\rho}} \\ y &= m^2 r^2 \sin \theta \\ e^D &= m^2 r^2 f \sinh 2\rho \end{aligned} \quad (4.3.26)$$

という関係が成り立っており、7 次元ゲージ化超重力理論の解を次元酸化したものは、11 次元 ansatz によって droplet で記述される解でもあることが確認できた。ここで

$$\begin{aligned} \cosh 2\rho &= F', \quad f = 1 + \frac{F}{2\sqrt{x}}, \quad x \equiv 4m^4 r^4 \\ (2\sqrt{x} + F)F'' &= 1 - (F')^2 \end{aligned} \quad (4.3.27)$$

である。' は x の微分を表す。

D の振る舞いに注目することにより、 $y = 0$ において S^5 が萎む領域は (x_1, x_2) 平面で楕円形になっていることが分かる。この楕円解は C が大きくなるとより細長くなることも理解できる。

$\rho \rightarrow 0$ の極限で $AdS_7 \times S^4$ 時空解を再現する。

Toda 方程式の解 (4.3.22) は $\rho \rightarrow 0$ の極限で $AdS_7 \times S^4$ 時空解 (3.2.9) となる。よって、 $AdS_7 \times S^4$ 時空解は

$$e^D = \frac{m^2 r^2}{1 + m^2 r^2}, \quad w = (1 + m^2 r^2) \cos \theta e^{i\phi}, \quad \tilde{F} = f = 1 + m^2 r^2 \quad (4.3.28)$$

であり、 (x_1, x_2) 平面上で S^5 が萎む領域は完全な円盤状になることが分かる。この円盤の外の領域では S^2 が萎むのである (図 3.2 b)。

すなわち、荷電スカラー場 $\rho(r)$ をゲージ化超重力理論の解に入れる効果は、完全な円盤を楕円形の円盤に変形することに現れると結論できる。この場合、 (x_1, x_2) 平面上で S^5 が萎む領域は

$$x^2 = (a^2 \sin^2 \phi + b^2 \cos^2 \phi) \cos^2 \theta \leq (a^2 \sin^2 \phi + b^2 \cos^2 \phi) = (a^{-2} \sin^2 \psi + b^{-2} \cos^2 \psi)^{-1} \quad (4.3.29)$$

と表される。ここで

$$a = \tilde{F} e^\rho \Big|_{r=0}, \quad b = \tilde{F} e^{-\rho} \Big|_{r=0} \quad (4.3.30)$$

である。この領域の境界は、長軸 a で短軸 b の楕円形になる。 $\frac{a}{b} = e^{2\rho(r=0)}$ であるから楕円形の楕円率 (ellipticity) は解の charge の関数となることが分かる。

完全円盤が楕円円盤へと変形されることは、 $SO(5)$ ゲージ群における $U(1)^1$ 切断の ansatz (4.1.6) において ρ を非零にすることで、ゲージ群 $SO(2)$ を破ってしまうことと関係している。

4.4 次元還元して得られる 10 次元重力解

ある極限を取ることによって次元還元を行う。

得られた 11 次元重力解に対応する楕円形の droplet は、 (x_1, x_2) 平面内において

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1; \quad a = \frac{e^\rho}{\sqrt{\sinh 2\rho}} \Big|_{r=0}, \quad b = \frac{e^{-\rho}}{\sqrt{\sinh 2\rho}} \Big|_{r=0} \quad (4.4.1)$$

として記述することができる。

ここで、 $a \rightarrow \infty, b \rightarrow 1$ という極限を取ること考えよう。このとき

$$\sinh 2\rho \approx \frac{1}{2}e^{2\rho} \approx \cosh 2\rho, \quad \rho_0 = \rho|_{r=0} \rightarrow \infty \quad (4.4.2)$$

となる。この極限を取ること、楕円形だった droplet は無限に長い帯状の droplet に変形される。よって、帯が伸びた方向に並進対称性ができて、その方向にコンパクト化することができるようになる。この結果、M5-brane を記述していた解は次元還元されて、NS5-brane の解になることが分かる。

さらに (3.1.107) 式に基づいて、単純なリスケール

$$f(x_1 + ix_2) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + ix_2), \quad e^D \rightarrow |\partial f|^{-2}e^D = 2e^D \quad (4.4.3)$$

を行うと、2次元 Toda 方程式の解

$$\begin{aligned} e^D &= m^2 r^2 f e^{2\rho} \approx (\sqrt{x} + \frac{1}{2}F)F' \\ x_2 &= e^{-2\rho} \cos \theta \approx (2F')^{-1} \cos \theta \\ y &= m^2 r^2 \sin \theta = \frac{\sqrt{x}}{2} \sin \theta \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

が得られる。 $F' = \cosh 2\rho \rightarrow \infty$ であるから、関数 F は $(2\sqrt{x} + F)F'' = -(F')^2$ を満たすことに注意しよう。

4.5 静電気問題の系に対応する 10 次元重力解

第 3 章の議論より、図 4.1 (b) のような droplet の系は、図 4.2 (a) のような静電気問題の系に対応することが分かる。よって、この節では距離 $d = \frac{1}{2}\pi N$ だけ離れた 2 枚の無限大の円盤が置かれた系を考えることにしよう (図 4.2 a)。(3.3.22) 式より、これは N 枚の IIA 型 NS5-brane が $R \times S^5$ に巻きついている系に対応していることが分かる。

10 次元重力解を求める。

geometry を求めるには Laplace 方程式

$$\frac{1}{\rho} \partial_\rho (\rho \partial_\rho V) + \partial_\eta^2 V = 0 \quad (3.3.3)$$

に対して

$$\partial_\rho V = 0; \quad \eta = 0, \frac{1}{2}\pi N \quad (4.5.1)$$

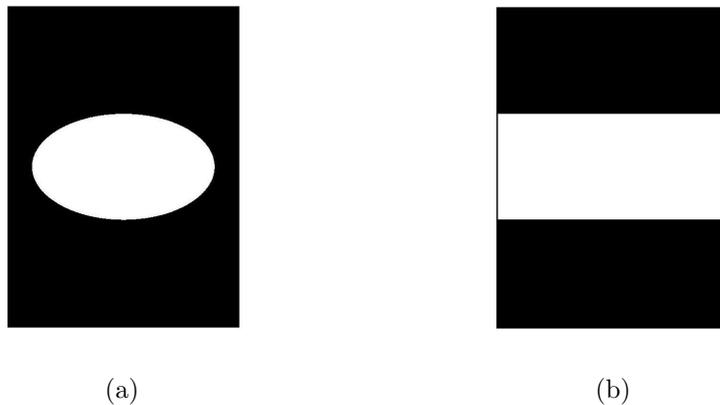


図 4.1: (a) $SO(6) \times SO(3)$ 対称性を持つ 7 次元ゲージ化超重力理論の解を 11 次元まで次元還元したもの
(b) (a) の重力解を 10 次元まで次元還元したもの

という境界条件を課したときの解 V を IIA 型 ansatz (3.3.8)-(3.3.9) に代入すればよい。ここでは、最も単純な解として

$$V(r, \theta) = I_0(r) \sin \theta; \quad r = \frac{2}{N} \rho, \quad \theta = \frac{2}{N} \eta \quad (4.5.2)$$

を考えることにしよう (図 4.3)。但し $V(r, \theta)$ は $r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$ においてのみ定義されているものとする。ここで $\alpha' = 1$ とおいている。また $I_n(r)$ は第 1 種変形 Bessel 関数 (modified Bessel function) であり、微分方程式

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial}{\partial r} I_n(r) \right] - \left(1 + \frac{n^2}{r^2} \right) I_n(r) = 0 \quad (4.5.3)$$

や漸化式

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{n}{r} \right) I_n(r) = I_{n+1}(r), \quad \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{n}{r} \right) I_n(r) = I_{n-1}(r) \quad (4.5.4)$$

を満たすことが知られている。漸化式 (4.5.4) を用いると

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \rho \partial_\rho V = r \frac{\partial}{\partial r} V = r I_1(r) \sin \theta \\ \ddot{V} &= \rho \partial_\rho \dot{V} = r \frac{\partial}{\partial r} \dot{V} = [r^2 I_2(r) + 2r I_1(r)] \sin \theta \\ V'' &= \partial_\eta^2 V = \frac{4}{N^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} V = -\frac{4}{N^2} I_0(r) \sin \theta \\ \dot{V}' &= \partial_\eta \dot{V} = \frac{2}{N} \frac{\partial}{\partial \theta} \dot{V} = \frac{2}{N} r I_1(r) \cos \theta \\ \Delta &= (\ddot{V} - 2\dot{V})V'' - (\dot{V}')^2 = -\frac{4}{N^2} r^2 [I_0(r)I_2(r) \sin^2 \theta + I_1^2(r) \cos^2 \theta] \end{aligned} \quad (4.5.5)$$

と計算できるので、この結果を IIA 型 ansatz (3.3.8)-(3.3.9) に代入することにより、10 次元重力解が

$$\begin{aligned} ds_{10}^2 &= N \left[-2r \sqrt{\frac{I_0}{I_2}} dt^2 + 2r \sqrt{\frac{I_2}{I_0}} d\Omega_5^2 + \sqrt{\frac{I_2}{I_0}} \frac{I_0}{I_1} (dr^2 + d\theta^2) + \sqrt{\frac{I_2}{I_0}} \frac{I_0 I_1 \sin^2 \theta}{I_0 I_2 \sin^2 \theta + I_1^2 \cos^2 \theta} d\Omega_2^2 \right] \\ B_2 &= N \left[\frac{-I_1^2 \cos \theta \sin \theta}{I_0 I_2 \sin^2 \theta + I_1^2 \cos^2 \theta} + \theta \right] d^2 \Omega \\ e^\Phi &= g_0 N^{\frac{3}{2}} \frac{1}{2} \left(\frac{I_2}{I_0} \right)^{\frac{3}{4}} \left(\frac{I_0}{I_1} \right)^{\frac{1}{2}} (I_0 I_2 \sin^2 \theta + I_1^2 \cos^2 \theta)^{-\frac{1}{2}} \\ C_1 &= -g_0^{-1} \frac{4}{N} \frac{I_1^2 \cos \theta}{I_2} dt \\ C_3 &= -g_0^{-1} \frac{4 I_0 I_1^2 \sin^3 \theta}{I_0 I_2 \sin^2 \theta + I_1^2 \cos^2 \theta} dt \wedge d^2 \Omega \end{aligned} \quad (4.5.7)$$

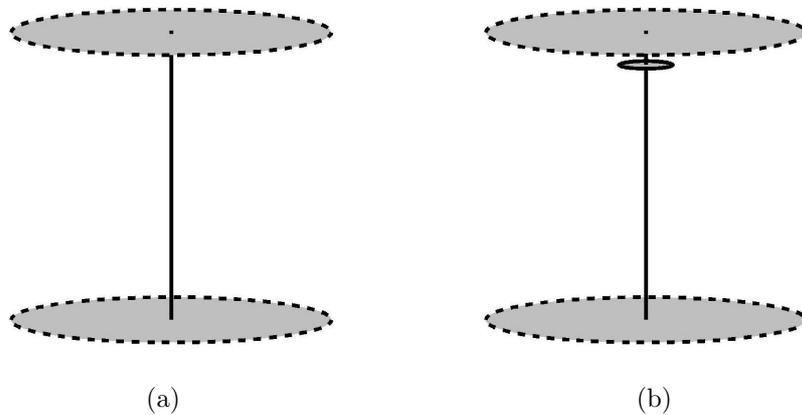


図 4.2: (a) ここで考えている解 (b) 別の真空に対応する解
縁が点線になっている円盤は、実際には無限大の大きさを持った円盤であることを示している。

として得られる。ここで結合定数 g_0 を復活させた。ここで H_3 の規格化条件として

$$\frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{\Sigma_3} H_3 = 2\pi N, \quad \alpha' = 1 \quad (4.5.8)$$

を用いた。

droplet の系における変数との対応関係

(4.4.4) 式と (4.5.2) 式を比較することにより

$$x = \frac{1}{4} C^{-2} \rho^2 I_1^2(\rho), \quad F = \frac{1}{2} C^{-1} \rho^2 I_2(\rho), \quad F' = C I_0^{-1}(\rho) \quad (4.5.9)$$

という対応関係が得られる。このとき確かに微分方程式 $(2\sqrt{x} + F)F'' = -(F')^2$ が成り立つことも確認しておこう。

小弦理論と双対な関係にある重力解である。

この 10 次元重力解は $R \times S^5$ 上の小弦理論 (little string theory) [31, 32, 33] と双対であることを確認しよう。 $r \rightarrow \infty$ の極限において、修正 Bessel 関数は

$$I_n(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{e^r}{\sqrt{2\pi r}} \quad : n \text{ に依存しない} \quad (4.5.10)$$

と漸近することを用いると、 r が非常に大きい領域において解 (4.5.6)-(4.5.7) は

$$\begin{aligned} ds_{10}^2 &= N\alpha' [2r(-dt^2 + d\Omega_5^2) + dr^2 + (d\theta^2 + \sin^2\theta d\Omega_2^2)] \\ H_3 &= 2N\alpha' \sin^2\theta d\theta \wedge d^2\Omega, \quad B_2 = N\alpha'(-\sin\theta \cos\theta + \theta)d^2\Omega \\ e^\Phi &= \frac{1}{2} g_0 N^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\pi r} e^{-r} \sim g_s e^{-r} \\ C_1 &= -g_0^{-1} \frac{4}{N} \frac{e^r}{\sqrt{2\pi r}} \cos\theta dt \sim -g_s N^{\frac{1}{2}} e^r \cos\theta dt \\ C_3 &= -4g_0^{-1} \frac{4}{N} \frac{e^r}{\sqrt{2\pi r}} \sin^3\theta dt \wedge d^2\Omega \sim -g_s N^{\frac{1}{2}} e^r \sin^3\theta dt \wedge d^2\Omega \end{aligned} \quad (4.5.11)$$

に漸近することが分かる。これは $R \times S^5$ 上の IIA 型 NS5-brane 解の漸近解である。

ここで R-R 場 C_1, C_3 に注目しよう。これらの場が存在することによって、NS5-brane に垂直な方向の $SO(4)$ 回転対称性は $SO(3)$ 対称性に破れている。また、これらの場は r が非常に大きい領域で指数関数的に増大して

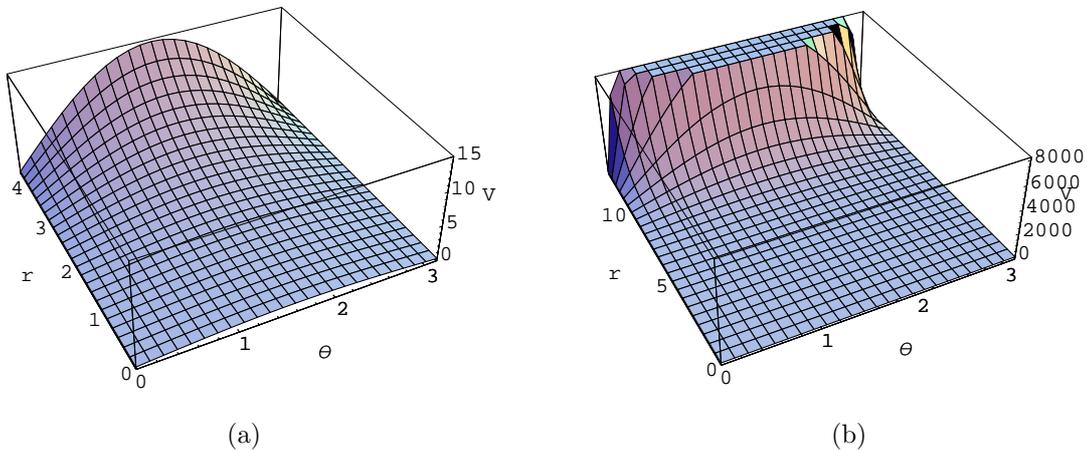


図 4.3: $V = I_0(r) \sin \theta$ のグラフ

いるが、この領域では弦の結合定数 e^Φ も指数関数的に変化するので、R-R 場の存在が計量に与える影響は、 r に依存しない物理量 (H_3 など) と比較すると $1/r$ の幂で suppress されていることが結論できる。

重力解は至るところで解析的である。

この 10 次元重力解 (4.5.6)-(4.5.7) は至るところで正則である。ここでは特に、 S^5 や S^2 が萎む領域での解析性を確認しておこう。

S^5 が萎む領域について

S^5 が萎むのは $r \rightarrow 0$ のときである。このとき計量の (r, Ω_5) 成分について

$$\begin{aligned} ds_{10}^2 &= N \sqrt{\frac{I_2}{I_0}} \left[\frac{I_0}{I_1} dr^2 + 2rd\Omega_5^2 \right] + \dots \\ &\stackrel{r \ll 1}{=} N \sqrt{\frac{\frac{1}{8}r^2 + \mathcal{O}(r^4)}{1 + \mathcal{O}(r^2)}} \left[\frac{1 + \mathcal{O}(r^2)}{\frac{1}{2}r + \mathcal{O}(r^3)} dr^2 + 2rd\Omega_5^2 \right] + \dots \\ &\xrightarrow{r \rightarrow 0} N \frac{1}{\sqrt{2}} (dr^2 + r^2 d\Omega_5^2) + \dots \end{aligned} \quad (4.5.12)$$

となる。よって、 $r \rightarrow 0$ のとき (r, Ω_5) が局所的に \mathbf{R}^6 を作ることが確認できた。ここで $I_n(r)$ の展開式

$$I_n(r) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!(s+n)!} \left(\frac{r}{2}\right)^{n+2s} \quad (4.5.13)$$

を用いた。計量の形だけを見ると θ 方向を含めて \mathbf{R}^7 を作りそうにも思えるが、 θ 方向は $0 \leq \theta \leq \pi$ のみで定義されているので、これを \mathbf{R} と見做すことはできない。

S^2 が萎む領域について

S^2 が萎むのは $\theta \rightarrow 0$, $\frac{1}{2}\pi N$ のときである。系の対称性より $\theta \rightarrow 0$ のみ考えれば充分である。このとき計量 (4.5.6) の (r, θ, Ω_2) 成分について

$$\begin{aligned} ds_{10}^2 &= N \sqrt{\frac{I_2}{I_0}} \left[\frac{I_0}{I_1} (dr^2 + d\theta^2) + \frac{I_0 I_1 \sin^2 \theta}{I_0 I_2 \sin^2 \theta + I_1^2 \cos^2 \theta} d\Omega_2^2 \right] + \dots \\ &\stackrel{\theta \ll 1}{=} N \sqrt{\frac{I_2}{I_0}} \left[\frac{I_0}{I_1} (dr^2 + d\theta^2) + \frac{I_0 I_1 (\theta^2 + \mathcal{O}(\theta^4))}{I_0 I_1 (\theta^2 + \mathcal{O}(\theta^4)) + I_1^2 (1 + \mathcal{O}(\theta^2))} d\Omega_2^2 \right] + \dots \\ &\xrightarrow{\theta \rightarrow 0} N \sqrt{\frac{I_2}{I_0}} \frac{I_0}{I_1} (dr^2 + d\theta^2 + \theta^2 d\Omega_2^2) + \dots \end{aligned} \quad (4.5.14)$$

となる。よって、 $\theta \rightarrow 0$ のとき (r, θ, Ω_2) が局所的に \mathbf{R}^4 を作ることが確認できた。

g_s が大きく r が小さい領域では、この重力解は信用できなくなる。

この重力解は $r \rightarrow 0$ において

$$\begin{aligned} ds_{10}^2 &= \frac{N}{\sqrt{2}} \left[-8dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega_5^2 + d\theta^2 + \frac{2 \sin^2 \theta}{2 - \sin^2 \theta} d\Omega_2^2 \right] \\ e^\Phi &= g_0 N^{\frac{3}{2}} 2^{-\frac{5}{4}} (2 - \sin^2 \theta)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (4.5.15)$$

となる。従って、曲率と弦の結合定数の特徴的な大きさはそれぞれ $\mathcal{R} \sim \frac{1}{\alpha' N}$, $g_s \sim g_0 N^{3/2}$ であることが確認できる。また、弦の結合定数 e^Φ は境界 $\theta = 0$, $\frac{1}{2}\pi N$ に近づくとき減少するという性質を持っている。よって、 g_s を充分小さく、また N を充分大きく取るならば、ここで求めた重力解は至るところで信用できることが分かる。

ところが、 g_s を大きくすると r が小さい領域では IIA 型 ansatz そのものが信用できなくなり、11 次元の描像に移らなければならない*5。つまり、この場合は x_1 依存性を含めて (3.1.106) 式を解かなくてはならないことになる。

g_s が非常に大きい系では、IIA 型 NS5-brane は M5-brane の性質を示すようになるので、適切な droplet の系を選べば非常に低エネルギーな (extreme IR) 領域で $AdS_7 \times S^4$ 時空を回復することになる。例えば、円形の droplet が x_1 方向に周期的に並んだ系を考えることにしよう。このとき $g_s \rightarrow \infty$ の極限を取ると、それぞれの円形 droplet は孤立して、それぞれが $AdS_7 \times S^4$ 時空解を与えるようになることが確認できる (図 4.4)。

$R \times S^2$ 上の 2+1 次元超対称 Yang-Mills 理論や 3 次元の超共形 M2-brane 理論の関係においても、同じようなことが起こる。詳しくは第 9 章で議論する。

他の真空解

さらに、この 2 枚の無限大の円盤の間に小さい円盤を付け足す系を考えることもできる。これらはこの理論における、異なる真空に対応する (図 4.2 b)。

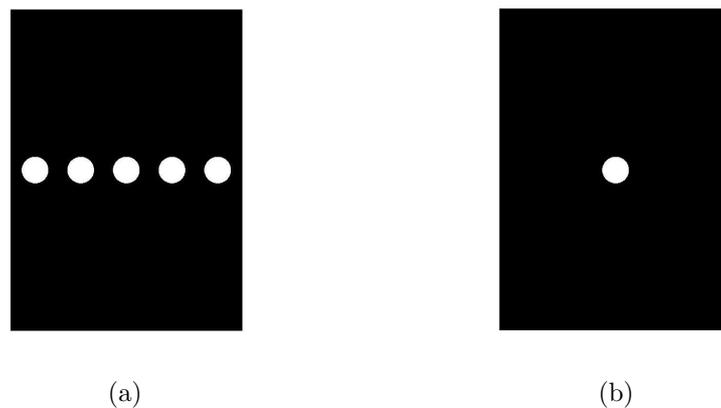


図 4.4: 結合定数について $g_s \rightarrow \infty$ という極限を取ると、(a) \rightarrow (b) のようにして droplet が孤立する。これは第 9 章で扱う希釈ガス近似に対応している。

(a) droplet が x_1 方向に周期的に並んでいる系 (b) $AdS_7 \times S^4$ 時空解に対応する droplet の系

*5 但し、 r が大きい領域における信用性は g_s を大きくしても保持される。

第 5 章

$R \times S^2$ 上の D2-brane 理論 (2 + 1 次元超対称 Yang-Mills 理論)

第 3 章において、静電気問題の系には S^2 が存在して、D2-brane の存在を表現できることを確認した。よって、 S^2 に巻きついた D2-brane の理論を考えることができると予想される。この章では、この理論を扱うことにしよう。

まずは第 3 章の流れに沿って、この理論と関係する $SO(6) \times SO(3)$ 対称性を持つ 11 次元超重力理論の超対称解を導くことにしよう。ここでは 4 次元ゲージ化 (gauged) 超重力理論の超対称解を 11 次元まで次元酸化したものが、それに相当する。

各節の内容は次の通りである。

- 5.1 4 次元ゲージ化超重力理論の $SO(8)$ ゲージ群を $U(1)^4$ 切断して得られる理論を扱って、 $U(1)$ 切断した理論の解が、 $SO(6) \times SO(3)$ 対称性を持つ超対称解に一致することを確認する。
- 5.2 以上で得られた解を 11 次元に次元酸化して、 $SO(6) \times SO(3)$ 対称性を持つ 11 次元超重力理論の超対称解を導く。droplet の ansatz と比較する。
- 5.3 5.2 節で得られた 11 次元重力解を 10 次元に次元還元することにより、IIA 型超重力理論の超対称解を導く。

5.1 $SO(6) \times SO(3)$ 対称性を持つ 4 次元ゲージ化超重力理論の超対称解

第 4 章と同様に議論することにしよう。4 次元ゲージ化超重力理論は、11 次元超重力理論を S^7 上に Kaluza-Klein reduction することで構築される。よって、 $SO(8)$ ゲージ群を持った超対称 Yang-Mills 理論が得られることが期待される。ところで、いま興味を持っているのは $U(1) \times SO(6) \times SO(3)$ 対称性を持つ 11 次元理論の解である。この解を得るためには 4 + 7 次元に分けて

- S^2 と Killing 方向 $\partial_t \rightarrow$ 4 次元時空に入れる。
- $S^5 \rightarrow$ 7 次元内部空間に入れる。

としよう。このためには、計量に $U(1) \times SO(3)$ 対称性、内部空間に $SO(6)$ 対称性を要請することになる。

よって、4 次元ゲージ化超重力理論の解が持つ $SO(8)$ 対称性を $SO(6)$ 対称性に破ればよいことが分かる。従って、適切な $SO(6)$ 変換を行えば、ゲージ場 A は (4.1.6) 式に対応して

$$A_{\mu I}{}^J = \begin{pmatrix} iA_\mu \sigma_2 & \mathbf{0}_{2 \times 6} \\ \mathbf{0}_{6 \times 2} & \mathbf{0}_{6 \times 6} \end{pmatrix} \quad (5.1.1)$$

と表現することができる。つまり、この場合は $SO(6)$ 内部対称性を要請することは $SO(8)$ ゲージ群を $U(1)^1$ 切断することに対応するのである。従って、ここでも $U(1)^n$ 切断したゲージ化超重力理論の議論を用いることが

できる。後は時空解に $SO(3)$ 対称性が存在すれば、求める解が得られたことになる。早速やってみよう。

一般次元での議論は付録 C において示した。ここでは、その議論の結果を利用することとする。

Lagrangian

$\mathcal{N} = 8$ ゲージ化超重力理論の Lagrangian のうち、以下の議論で必要な部分は

$$\mathcal{L} = R * \mathbf{1} - \frac{1}{4} T_{ij}^{-1} * D T_{jk} \wedge T_{k\ell}^{-1} D T_{\ell i} - \frac{1}{4} T_{ik}^{-1} T_{j\ell}^{-1} * F_{(2)}^{ij} \wedge F_{(2)}^{k\ell} - V * \mathbf{1} \quad (5.1.2)$$

である。これは $SO(8)$ ゲージ化超重力理論の矛盾の無い切断になっている。

スカラー場はユニモジュラー対称行列 T_{ij} で記述される。共変微分は

$$D\mu^i \equiv d\mu^i + g A_{(1)}^{ij} \mu^j, \quad \Delta \equiv T_{ij} \mu^i \mu^j \quad (5.1.3)$$

と定義される。ここで、 $\mu^i \mu^i = 1$ は 7 次元単位球面を定義している。また、スカラーポテンシャルは

$$V = \frac{1}{2} g^2 (2T_{ij} T_{ij} - T_{ii}^2) \quad (5.1.4)$$

である。このような切断が首尾一貫したものであるためには、2 形式 field strength が

$$F_{(2)}^{[ij} \wedge F_{(2)}^{kl]} = 0 \quad (5.1.5)$$

という条件を満たさなくてはならない。一般に field strength の 2 次の積は 0 にならず、 $\mathcal{N} = 8$ 超重力理論に登場する 35 個の擬スカラー場の源 (source) として作用する。そのため、このような条件を課さない場合、reduction の ansatz は信じられないほど複雑になる。よって、ここでは条件 (5.1.5) を課すことで、簡単な場合を扱うこととする。

理論の $U(1)^4$ 切断を行う。

以上の議論を基に、矛盾が出ない切断として

$$\begin{aligned} A_{(1)}^{12} &= A_{(1)}^1, & A_{(1)}^{34} &= A_{(1)}^2, & A_{(1)}^{56} &= A_{(1)}^3, & A_{(1)}^{78} &= A_{(1)}^4 \\ T_{ij} &= \text{diag.} (X_1 e^{-\varphi_1}, X_1 e^{\varphi_1}, X_2 e^{-\varphi_2}, X_2 e^{\varphi_2}, X_3 e^{-\varphi_3}, X_3 e^{\varphi_3}, X_4 e^{-\varphi_4}, X_4 e^{\varphi_4}) \end{aligned} \quad (5.1.6)$$

を採用しよう。つまり、計量と 4 個のゲージ場と 7 個のスカラー場のみを残したことになる。また、これは $SO(8)$ ゲージ場を最大トラス $U(1)^4$ におけるゲージ場へと切断したことに相当する。さらに、スカラー場 X_i は $X_1 X_2 X_3 X_4 = 1$ を満たすので、標準的なパラメータ付け

$$X_1 = e^{\frac{1}{2}(-\phi_1 - \phi_2 - \phi_3)}, \quad X_2 = e^{\frac{1}{2}(-\phi_1 + \phi_2 + \phi_3)}, \quad X_3 = e^{\frac{1}{2}(\phi_1 - \phi_2 + \phi_3)}, \quad X_4 = e^{\frac{1}{2}(\phi_1 + \phi_2 - \phi_3)} \quad (5.1.7)$$

を行っておこう。このような切断を行った結果、得られる Lagrangian は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4 &= R * \mathbf{1} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 * d\varphi_i \wedge d\varphi_i - \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^3 * d\phi_\alpha \wedge d\phi_\alpha - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 X_i^{-2} * F_{(2)}^i \wedge F_{(2)}^i \\ &\quad - 2g^2 \sum_{i=1}^4 \sinh^2 \varphi_i * A_{(1)}^i \wedge A_{(1)}^i - V * \mathbf{1} \end{aligned} \quad (5.1.8)$$

であり、スカラーポテンシャルは

$$V = 2g^2 \sum_{i=1}^4 X_i^2 \sinh^2 \varphi_i - 2g^2 \sum_{i \neq j} X_i X_j \cosh \varphi_i \cosh \varphi_j \quad (5.1.9)$$

と表せる。

4 次元 AdS bubble 解

このような Lagrangian から、4 次元 $SO(8)$ ゲージ化超重力理論の AdS bubble 解

$$\begin{aligned} ds_4^2 &= -(H_1 H_2 H_3 H_4)^{-1/2} f dt^2 + (H_1 H_2 H_3 H_4)^{1/2} (f^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_2^2) \\ A_{(1)}^i &= -H_i^{-1} dt, \quad X_i = (H_1 H_2 H_3 H_4)^{1/4} H_i^{-1}, \quad \cosh \varphi_i = (RH_i)' \\ f &= 1 + 4g^2 r^2 H_1 H_2 H_3 H_4 \end{aligned} \quad (5.1.10)$$

を得ることができる。ここで $R = 2r$ であり、' は $\partial/\partial R$ である。但し、関数 H_i は

$$R^{-1} f (RH_i)'' = -g^2 [(RH_i)'^2 - 1] (H_1 H_2 H_3 H_4) H_i^{-1} \quad (5.1.11)$$

を満たさなくてはならない。このとき、Lagrangian (5.1.8) から得られる運動方程式は時空解 (5.1.10) を満たしていることが確認できる。

この時空解は一般に 1/8 BPS 解になっている。いま求めたいのは 1/2 BPS 解であるが、1/2 BPS 解は

$$H_1 = H, \quad H_2 = H_3 = H_4 = 1 \quad (5.1.12)$$

という特別な場合に相当している。つまり、 $SO(8)$ ゲージ化超重力理論の解を $U(1)^1$ 切断した場合に相当しているのである。このとき、重力解は

$$\begin{aligned} ds_4^2 &= -H^{-1/2} f dt^2 + H^{1/2} (f^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_2^2) \\ A_{(1)}^1 &= -H^{-1} dt, \quad A_{(1)}^{2,3,4} = -dt, \quad X_1 = H^{-3/4}, \quad X_{2,3,4} = H^{1/4} \\ \cosh \varphi_1 &= \frac{\partial}{\partial R} (RH), \quad \cosh \varphi_{2,3,4} = 1, \quad f = 1 + 4g^2 r^2 H \end{aligned} \quad (5.1.13)$$

となる。また、 H が満たすべき方程式は

$$R^{-1} f (RH)'' = -g^2 [(RH)'^2 - 1] \quad (5.1.14)$$

となる。

5.2 次元酸化して得られる 11 次元重力解

11 次元時空解に持ち上げて、11 次元 ansatz と比較する。

以上の議論で得られた 4 次元ゲージ化超重力理論の時空解を 11 次元まで次元酸化して、その 11 次元時空解を 11 次元 ansatz (3.1.101)-(3.1.105) と比較しよう。議論の流れは第 4 章と全く同様であるので、具体的な計算は省略することにする。

4 次元ゲージ化超重力理論の解を次元酸化することによって、11 次元超重力理論の解を構成するには、計量と 4 形式 field strength を

$$\begin{aligned} ds_{11}^2 &= \Delta^{2/3} ds_4^2 + \frac{1}{g^2} \Delta^{-1/3} T_{ij}^{-1} D\mu^i D\mu^j \\ F_{(4)} &= -g U \epsilon_{(4)} + g^{-1} T_{ij}^{-1} * DT_{jk} \wedge (\mu^k D\mu^i) - \frac{1}{2} g^{-2} T_{ik}^{-1} T_{jl}^{-1} * F_{(2)}^{ij} \wedge D\mu^k \wedge D\mu^l \end{aligned} \quad (5.2.1)$$

として求めればよい [28]。ここで

$$\Delta = T_{ij} \mu^i \mu^j, \quad D\mu^i = d\mu^i + g A_{(1)}^{ij} \mu^j, \quad U \equiv 2T_{ij} T_{jk} \mu^i \mu^k - \Delta T_{ii} \quad (5.2.2)$$

であり、 $\epsilon_{(4)}$ は計量 ds_4^2 における体積要素である。

このようにして得られた 11 次元重力解を、11 次元 ansatz (3.1.101)-(3.1.105) と比較すると

$$e^D = 4\sin^2\theta(1 + z^2H(z)) \sinh \varphi \quad (5.2.3)$$

$$x_2 + ix_1 = (e^{-\frac{1}{2}\varphi} \cos\phi + ie^{\frac{1}{2}\varphi} \sin\phi) \frac{\cos\theta}{\sqrt{\sinh\varphi}} \quad (5.2.4)$$

$$y = z \sin^2\theta \quad (5.2.5)$$

$$\partial_z \varphi = \frac{-z \sinh \varphi}{1 + z^2 H(z)}, \quad \partial_z(zH(z)) = \cosh \varphi \quad (5.2.6)$$

となることが確認できる。境界条件 (3.2.4) を思い出すと、これは S^2 が萎む領域が楕円形の droplet になっている系に相当する解であることが分かる。ここで、4 次元ゲージ化超重力理論の曲率スカラー R を z と書き換えた。変数としては全く同じものである。また、簡単のため $g = 1$ とおいた。

1 階微分方程式 (5.2.6) に同等な方程式として、 $zH(z)$ に対する 2 階微分方程式

$$[z^{-1} + zH(z)] \partial_z^2(zH(z)) = 1 - [\partial_z(zH(z))]^2 \quad (5.2.7)$$

を書くことができる。解を見つけるには、この方程式を解く必要がある。

特異解について

第 9 章での議論と同じようにして、extremal な AdS_4 ブラックホールに対応する解を書くこともできる。この解も M2-brane の帯に対応する解も、一般解

$$e^D = 4\sin^2\theta \frac{1 + z^2H(z)}{\tilde{F}(z)^2}, \quad x_2 + ix_1 = \left(e^{-\frac{1}{2}\varphi} \cos\phi + ie^{\frac{1}{2}\varphi} \sin\phi \right) \tilde{F} \cos\theta \quad (5.2.8)$$

に属している。ここで \tilde{F} と H は

$$\partial_z \tilde{F} = \frac{z\tilde{F}}{2(1 + z^2H(z))}, \quad [z^{-1} + zH(z)] \partial_z^2(zH(z)) = 1 - [\partial_z(zH(z))]^2 \quad (5.2.9)$$

を満たす。extremal な AdS_4 ブラックホールに対応するのは

$$H = 1 + \frac{2Q}{z} \quad (5.2.10)$$

である。従って、

$$\log \tilde{F} = \int \frac{z dz}{2(1 + z^2H(z))} \quad (5.2.11)$$

という関係式が得られる。 AdS_4 ブラックホールの半径を r とすると、 $z = 2r$ という関係が成り立っている。

5.3 次元還元して得られる 10 次元重力解

以上の議論により得られた 11 次元重力解に対応する楕円形の droplet は、 (x_1, x_2) 平面内において

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1; \quad a = \frac{e^{\frac{\varphi_0}{2}}}{\sqrt{\sinh\varphi}} \Big|_{z=0}, \quad b = \frac{e^{-\frac{\varphi_0}{2}}}{\sqrt{\sinh\varphi}} \Big|_{z=0} \quad (5.3.1)$$

として記述することができる。

ここで、 $a \rightarrow \infty, b = 1$ という極限を取ることを考えよう。このとき

$$\sinh \varphi \approx \frac{1}{2} e^\varphi \approx \cosh \varphi, \quad \varphi_0 = \varphi(z=0) \rightarrow \infty \quad (5.3.2)$$

となる。また、微分方程式 (5.2.7) は

$$[z^{-1} + zH(z)] \partial_z^2(zH(z)) = -[\partial_z(zH(z))]^2 \quad (5.3.3)$$

となる。

$\cos \phi \approx 1$ の周りで展開すると、(5.2.4) 式より x_1 依存性を無視することができるので、2 次元 Toda 方程式を解けばよいことになる。また、 $\varphi = \varphi_0 + \tilde{\varphi}$ と展開すると、 $\tilde{\varphi}$ はこの極限において定数であることが分かる。さらに、共形変換 (3.1.107) に従って

$$e^D \rightarrow e^{-2\varphi_0} e^D, \quad x_2 + ix_1 \rightarrow (x_2 + ix_1)e^{\varphi_0}, \quad y \rightarrow y \quad (5.3.4)$$

という変換を行うと、11 次元重力解に影響を与えずに φ_0 依存性を取り去ることができる。

以上の操作を行った結果、 (x_1, x_2) 平面において、1 枚の M2-brane の帯に対応する解

$$e^D = 4 \sin^2 \theta (1 + z^2 H(z)) e^{\tilde{\varphi}}, \quad x_2 = e^{-\tilde{\varphi}} \cos \theta, \quad y = z \sin^2 \theta \quad (5.3.5)$$

が得られる。ここで $\tilde{\varphi}$ は $e^{\tilde{\varphi}} = 2\partial_z(zH(z))$ として定義される。また、 $H(z)$ は方程式 (5.3.3) を満たす。さらに、境界条件 $e^{\tilde{\varphi}(0)} = 2C$ を得る。

5.4 静電気問題の系に対応する 10 次元重力解

静電気問題の系における全ポテンシャル V を求める。

(5.3.5) 式で表される 10 次元重力解を静電気問題の系において解析するために、変数変換 (3.3.2) を用いて、静電気問題の系のポテンシャルを求めよう。すると

$$V = -z + \sin^2 \theta \left(zH(z)e^{-\tilde{\varphi}} + \frac{z}{2} \right) \quad (5.4.1)$$

$$\rho = 2 \sin \theta \sqrt{(1 + z^2 H(z))e^{\tilde{\varphi}}}, \quad \eta = -2zH(z) \cos \theta \quad (5.4.2)$$

であることが確認できる。

S^5 が萎む領域は、droplet の系においては $\sin \theta = 0$ であったから、静電気問題の系においては $\rho = 0$ であることが分かる。 S^2 が萎む領域は、droplet の系においては $z = 0$ であったから、静電気問題の系においては $\eta = 0$ 平面上で原点に中心を持つ、有限の大きさの円盤に対応する。以下では、この円盤の半径を

$$\rho_0 = 2\sqrt{2C} \quad (5.4.3)$$

と表すことにしよう。

一方、前節の議論より、この 10 次元重力解は D2-brane の系であることが分かっている。従って第 3 章の議論より、この解は図 5.2 (b) に示されているような、有限の大きさの円盤が 1 枚だけ置かれている系に相当する

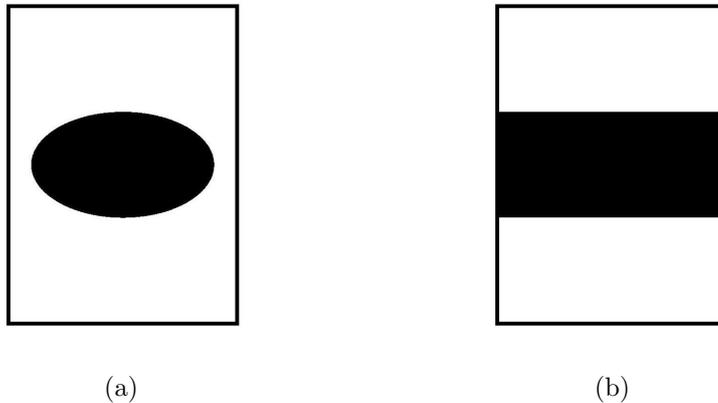


図 5.1: (a) $SO(6) \times SO(3)$ 対称性を持つ 4 次元ゲージ化超重力理論の解を 11 次元まで次元酸化したもの (b) (a) の重力解を 10 次元まで次元還元したもの

ことが分かる。ここで、 $-\infty < \eta < \infty$ で定義される静電気問題の系の背景ポテンシャル (漸近領域におけるポテンシャル) は

$$V_{bg} \sim \rho^2 - 2\eta^2 \quad (5.4.4)$$

であったことを思い出しておこう。ここでは $V_{bg} = (\rho^2 - 2\eta^2)/8\beta$ と表すことにしよう。

このような背景ポテンシャル中に、半径 ρ_0 の導電円盤が 1 枚だけ置かれているとき、円盤上に誘起される電荷密度 $\sigma(\rho)$ を求めてみよう。この電荷密度は電場の η 成分 $-\partial_\eta V = -x_2$ の飛び (jump) に比例して

$$\sigma(\rho) = \frac{1}{4\pi C} \frac{\sqrt{\rho_0^2 - \rho^2}}{\rho_0} \quad (5.4.5)$$

となる。よって、密度が最大となるのは中心 $\rho = 0$ であり、端 $\rho = \rho_0$ で $\sigma = 0$ となることが分かる。

以上より、全ポテンシャルは積分形で

$$V = \frac{\rho^2 - 2\eta^2}{8\beta} + \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\rho_0} r dr \frac{\frac{1}{4\pi C} \frac{\sqrt{\rho_0^2 - r^2}}{\rho_0}}{\sqrt{\rho^2 + \eta^2 - 2\rho r \cos \phi + r^2}} \quad (5.4.6)$$

として表せることが分かる。

10 次元重力解の具体的な形を書き下す。

(5.4.1) 式と (5.4.6) 式は、同じ静電気問題の系のポテンシャルなのだから等しいはずである。よって、両者を比較してみよう。 $\rho = 0, \eta > 0$ を満たす領域に注目しよう。(5.4.2) 式より、これは $\cos \theta = -1$ の領域に対応する。(5.4.6) 式を $\rho = 0$ 上で積分して、さらに (5.4.2) 式より、 $\eta = 0$ において $z = 0$ が成り立つという条件を要請する。このとき、 z と η の関係が

$$z = \frac{\eta^2}{4\beta} - \frac{1}{4C\rho_0} \left[(\rho_0^2 + \eta^2) \arctan \frac{\rho_0}{\eta} - \rho_0\eta - \frac{\pi}{2}\rho_0^2 \right] \quad (5.4.7)$$

として得られる。さらに、 $zH(z)$ を η で表すことができ

$$zH(z) = \frac{\eta}{2} \quad (5.4.8)$$

となる。よって、 $H(z)$ の解をパラメータを用いて表せる。また、 β と C の関係も

$$\beta = \frac{4\sqrt{2}}{\pi} C^{3/2} \quad (5.4.9)$$

として表せる。

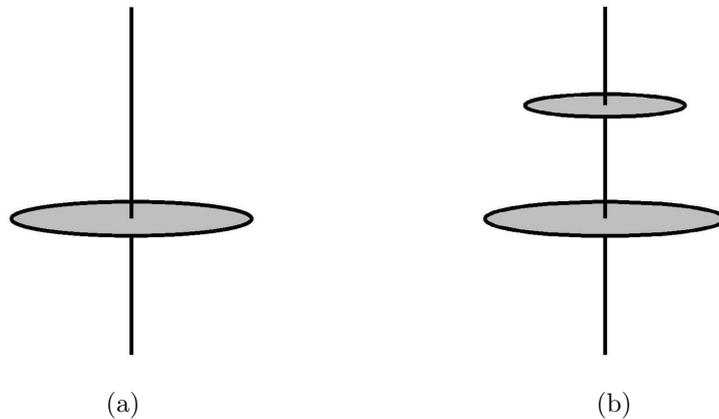


図 5.2: 静電気問題の系の例: (a) ここで考えている解 (b) 別の真空に対応する解

10 次元重力解の表式をなるべく単純な形にするために、新しい変数 $r = \eta/\rho_0$ を導入しよう。このとき

$$zH(z) = \sqrt{2C}r, \quad z = \frac{1}{\sqrt{2C}}[r + (1+r^2)\arctan r] \quad (5.4.10)$$

と表せる。また

$$\begin{aligned} e^D &= 8C(1+r^2)\sin^2\theta \\ x_2 &= \frac{1}{2C}[1+r\arctan r]\cos\theta, \quad y = \frac{1}{\sqrt{2C}}[r+(1+r^2)\arctan r]\sin^2\theta \end{aligned} \quad (5.4.11)$$

という関係式が得られる。ここで $r \in [0, \infty)$ で定義されていることに注意しよう。 C はリスケールのパラメータであり、時空解の charge に関係している。

よって、適切にリスケールすることにより、解に定数 C が現れないようにすることができて、その結果 10 次元重力解は

$$\begin{aligned} ds_{10}^2 &= \lambda^{1/3} \left[-8(1+r^2)fdt^2 + 16f^{-1}\sin^2\theta d\Omega_5^2 + \frac{8rf}{r+(1+r^2)\arctan r} \left(\frac{dr^2}{1+r^2} + d\theta^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2r[r+(1+r^2)\arctan r]f}{1+r\arctan r} d\Omega_2^2 \right] \end{aligned} \quad (5.4.12)$$

$$B_2 = -\lambda^{1/3} \frac{2\sqrt{2}[r+(-1+r^2)\arctan r]\cos\theta}{1+r\arctan r} d^2\Omega \quad (5.4.13)$$

$$e^\Phi = g_0\lambda^{1/2}8r^{1/2}(1+r\arctan r)^{-1/2}[r+(1+r^2)\arctan r]^{-1/2}f^{-1/2} \quad (5.4.14)$$

$$C_1 = -g_0^{-1}\lambda^{-1/3} \frac{[r+(1+r^2)\arctan r]\cos\theta}{2r} dt \quad (5.4.15)$$

$$C_3 = -g_0^{-1} \frac{r[r+(1+r^2)\arctan r]^2 f^2}{\sqrt{2}(1+r\arctan r)} dt \wedge d^2\Omega \quad (5.4.16)$$

$$f \equiv \sqrt{\frac{2}{r}[r+(\cos^2\theta+r^2)\arctan r]} \quad (5.4.17)$$

として得られる。ここで λ と g_0 は定数である。

双対な場の理論の真空解との対応

この重力解は、 $\Phi = 0$ かつ $U(N)$ ゲージ対称性を持つ $2+1$ 次元超対称 Yang-Mills 理論の真空と双対である。この解のトポロジーは $R \times B_3 \times S^6$ であり、 B_3 の境界は場の理論が定義されている S^2 である。円盤の配置が異なる系は他のトポロジーを持つ。

この重力解 (5.4.12) は至るところで正則である。 r が大きい領域で展開すると、漸近解として $R \times S^2$ 上の D2-brane 解 [34]

$$\begin{aligned} \frac{ds_{10}^2}{\alpha'} &= (6\pi g_{YM2}^2 N)^{1/3} \left[r^{5/2}(-dt^2 + \frac{1}{4}d\Omega_2^2) + \frac{dr^2}{r^{5/2}} + r^{-1/2}(d\theta^2 + \sin^2\theta d\Omega_5^2) \right] \\ e^\Phi &= g_{YM2}^2 (6\pi g_{YM2}^2 N)^{-1/6} r^{-5/4} \\ C_3 &= -g_{YM2}^{-2} r^5 (6\pi g_{YM2}^2 N)^{-2/3} \frac{1}{4} dt \wedge d^2\Omega \end{aligned} \quad (5.4.18)$$

が得られる。ここで S^2 の半径は $1/\mu$ であるが、 $\mu = 2$ と設定した。

重力解 (5.4.12) とその漸近解 (5.4.18) を比較することにより、重力解のパラメータ λ と g_0 と超対称 Yang-Mills 理論のパラメータとの関係を求めることができる。

まず、 S^5 の半径を計算しよう。これは $r = 0$, $\theta = \pi/2$ において計算すればよい。なぜなら、 S^5 に沿って動く BPS 測地線はこの点に安定に止まるからである。その結果

$$\frac{R_{S^5}^2}{\alpha'} = \left(\frac{6\pi^3 g_{YM2}^2 N}{\mu} \right)^{1/3}, \quad \mu = 2 \quad (5.4.19)$$

を得る。 S^5 方向に運動量を持つ粒子の測地線の周りで展開した計量は、plane wave 計量 (3.3.35) になる。これを (3.3.36) 式に代入すれば、大きな角運動量 J を持った near BPS 励起状態のスペクトルが求められる。

弱結合領域と強結合領域を補間する非自明な関数が存在している。

S^5 における transverse 方向、つまり (3.3.35) 式の \mathbf{r} でパラメータ付けされる方向の揺らぎについて計算すると、 $\hat{E} = E - J$ に対する補正の主要項は

$$(E - J)_n = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{6\pi^3 g_{YM2}^2 N}{\mu} \right)^{2/3} \frac{n^2}{J^2} + \dots \quad (5.4.20)$$

となる。これは、重力近似から得られた結果なのだから、場の理論の観点からは強結合の結果ということになる。一般に large J 極限における主要な補正は、結合定数の全ての領域において

$$(E - J)_n = 1 + f \left(\frac{g_{YM2}^2 N}{\mu} \right) \frac{n^2}{J^2} + \dots \quad (5.4.21)$$

となることが期待される。

一方、弱結合領域においては、基本的に $\mathcal{N} = 4$ 超対称 Yang-Mills 理論と同じ解答が得られる。つまり、1-loop レベルで

$$f \left(\frac{g_{YM2}^2 N}{\mu} \right) = \frac{\pi g_{YM2}^2 N}{\mu} \quad (5.4.22)$$

となるはずである。よってこの場合、関数 f は自明であってはいけないことが結論される。4 次元 $\mathcal{N} = 4$ 超対称 Yang-Mills 理論においては、関数 f は弱結合領域と強結合領域で同じ形をしていた [35, 36]。よって f は自明である。ところが、今の場合はそうではないというのである。

この補間 (interpolating) 関数 f をゲージ理論側から求めることができれば素晴らしい。実は、BMN 行列模型でもこれと同じようなことが起きる。

このような現象は強・弱結合問題の一般的な性質であって、例えば、熱的な Yang-Mills エントロピーにおける 3/4 問題^{*1}[37] や、near plane wave 時空における弦のスペクトルが対応する場の理論の演算子の共形次元と 3-loop レベルで合わない問題 [38, 39] など登場する。つまり、結合定数が異なる領域から得られる結果はお互いに合致しないという現象が起きてしまっているのである。これらの問題は、このような補間関数の存在によって説明できるものと予想される。

複数の円盤が配置された一般解を考えることもできる。

複数の円盤に相当するより一般解を求めることもできる。円盤の配置が異なる系は、スカラー Φ に対する Higgs 真空のうち、異なった真空解に対応する。また、複数の円盤の系に対応する解において、円盤の縁の付近を伝播する弦を考えることもできる。この場合、補間関数 f の強結合領域における値 (円盤の縁の位置に関係する量) は普遍的でなくなる。つまり、どの真空解の周りで展開するかに依存してしまうのだ。但し第3章で議論したように、どの円盤の縁の周りで展開しようとも、他の円盤が近くにない限りは、IIA 型 plane wave 時空 (3.3.35) を与えてくれるということに変わりはない。

^{*1} IIB 型超重力理論において、わずかに non-extremal な black 3-brane の Bekenstein-Hawking エントロピーを求めて、D3-brane の non-BPS 励起状態を数え上げて導いたエントロピーと比較すると、ほぼ一致するのだが係数が合わないという問題。

第 6 章

$R \times S^3/Z_k$ 上の $\mathcal{N} = 4$ 超対称 Yang-Mills 理論

$R \times S^3/Z_k$ 上の $\mathcal{N} = 4$ 超対称 Yang-Mills 理論は、 $R \times S^3$ 上の $\mathcal{N} = 4$ 超対称 Yang-Mills 理論を単純に orbifolding したものであり、大変興味があるものである。spin chain に対応させてより詳しく解析することができる。ここでは、 (x_1, x_2) 平面をトーラスにコンパクト化した droplet の系や、それに対応する静電気問題の系を考えることで解析してみよう。

6.1 対応する droplet の系と静電気問題の系

$R \times S^3$ 上の $\mathcal{N} = 4$ 超対称 Yang-Mills 理論と dual の関係にあるのは $AdS_5 \times S^5$ 時空解であることはよく知られている。ここでは、その時空解を Z_k で orbifolding したものの中最も単純である $(AdS_5/Z_k) \times S^5$ 時空解から議論を始めることにしよう。

弦理論側において、通常の (twist が入らない) string orbifold で orbifolding するのであれば、こうして得られた重力解には Z_k の離散対称性があることになる。これは弦理論の視点から見ると、一番単純な orbifold を考えていることになる。一方、場の理論側から見ると、ホロノミー行列 U を対角化したときに、その k 個の成分のうち $e^{2\pi i l/k}$ である成分の個数 n_l が全て $n_l = N/k$ となるような真空が、そのような重力解と dual な関係にあることが分かる。但し、 N は場の理論のゲージ群が $U(N)$ であることに由来している。よって、この場合は N は k の倍数でなければならないことが分かる。そして、この系はゲージ群における orbifold 群作用 (orbifold group action) の正則表現に対応している [40]。

ホロノミー行列 U の他の選択肢としては、例えば $U = 1$ がある。このようなホロノミー行列に対応する真空と dual な関係にある重力解を導くためには、通常の string orbifold を用いることはできない。orbifold の特異点に住む、twist された弦のモードを導入する必要があるのである。

以下では、特に正則表現に対応する場合

$$U = \begin{pmatrix} e^{2\pi i/k} \mathbf{1}_{N/k} & & & 0 \\ & e^{2 \cdot 2\pi i/k} \mathbf{1}_{N/k} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{k \cdot 2\pi i/k} \mathbf{1}_{N/k} \end{pmatrix} \quad (6.1.1)$$

と

$$U = \mathbf{1}_N = 1 \quad (6.1.2)$$

の場合に注目することとする。但し $\mathbf{1}_m$ は $m \times m$ の単位行列である。

$AdS_5 \times S^5$ 時空解は D3-brane 理論の near horizon 極限として得られることから分かるように、 $(AdS_5/Z_k) \times S^5$ 時空解は IIB 型理論の解である。ところが、第 1 部で扱っている 11 次元 ansatz (3.1.101)-(3.1.105) や IIA

型 ansatz (3.3.8)-(3.3.9) は、16 個の超対称性を持つ M 理論や IIA 型理論の重力解になっている。よって、M 理論・IIA 型理論・IIB 型理論を繋ぐ dual の関係を用いることにより、これらの ansatz に帰着させられる重力解を導出してみることにしよう。

6.1.1 M 理論との関係

最初に、IIB 型理論と M 理論の関係について考えてみよう。そのためには、まず Z_k が作用する 1 次元円周に注目する。次に、この円周上にコンパクト化した IIB 型理論を T^2 上にコンパクト化した M 理論に持ち上げる。ここで、 T^2 とは 11 次元 ansatz (3.1.101)-(3.1.105) において座標 (x_1, x_2) でパラメータ付けされるトーラスである。

このようにして得られる 11 次元時空解は、コンパクト化する方向である x_1, x_2 には依存しない。従って、 x_1, x_2 方向に並進対称性を持つ Toda 方程式

$$\partial_y^2 e^D = 0 \quad (6.1.3)$$

の解に注目すればよいことが分かる。この Toda 方程式 (6.1.3) の一般解は

$$e^D = c_1 y + c_2 \quad (6.1.4)$$

となる。実際に $(AdS_5/Z_k) \times S^5$ 時空解から dual の関係を用いて計算を行うと、係数を

$$c_1 = \frac{g_s k}{2}, \quad c_2 = \frac{\pi g_s N}{4} \quad (6.1.5)$$

と定めることができる。

対応する静電気問題の系は η 軸に線電荷を持つ。

この解を x_1 方向にコンパクト化して 10 次元に次元還元した上で、静電気問題の系に対応させてみると

$$V = -\frac{\pi N}{2k} \log \rho + V_{bg}, \quad V_{bg} = \frac{1}{g_s k} (\rho^2 - 2\eta^2) \quad (6.1.6)$$

となる。これは外部ポテンシャル V_{bg} が存在する状況で、 $\rho = 0$ (η 軸) に線電荷を持っている系を表している。

得られた時空解は $y = 0$ に特異点を持つ。

N は正の整数であることより、これらの解は境界条件 (3.2.4) に従っていない。これは、 $y = 0$ において特異点を持つことを示している。また、 $y = 0$ においては

$$4\rho_0 = R_{S^5}^2 = \sqrt{4\pi g_s N \alpha'} \quad (6.1.7)$$

が満たされる。IIB 型理論の視点から見れば、この特異点 $y = 0$ は単に Z_k orbifold の固定点にすぎない。また、2-トーラスの半径が $R_{x_1} = g_s, R_{x_2} = 1/g_s$ であることも確認できる。これは IIB 型理論から M 理論に移るときに一般的に期待される通りの結果である。

6.1.2 IIA 型理論との関係

次に、IIB 型理論と IIA 型理論の関係について考えてみよう。IIB 型理論の解と IIA 型理論の解は、円周方向に T-dual を取ることでお互いに写像される。このとき、 Z_k は円周上の座標の並進 $\psi \sim \psi + \frac{4\pi}{k}$ として作用する。よって、特異点に近い領域であっても、 k が十分に大きければ T-dual を取ることが許されることが分かる。

対応する静電気問題の系は η 方向に周期性を持つことができる。

IIA 型理論の変数に移ってしまえば、解に η 依存性を持たせることができる。実際、 η 依存性を持たせて特異点を解消することにより、滑らかな時空解を得ることができるのである。

このとき、静電気問題の系は η 方向に周期性を持つものとなる。つまり、ポテンシャルが V_{bg} であるという状況において、円盤が周期的に配置される系となるのだ。ここで、外部ポテンシャル V_{bg} は η 方向について周期的ではないけれども、円盤上の電荷分布に影響を及ぼす部分は全て η 方向に周期的であることに注意しよう。(3.3.8) 式には V の微分が現れているが、これも η 方向に周期的である。(6.1.6) 式における η 依存部分は、 η の周期を超えたときに x_2 の周期を超えることを保証してくれている。但し、この x_2 は Z_k が作用した円周に T-dual を取ったものである。

$U = 1$ の系は、 k 枚の NS5-brane が全て重なった系に対応する。

第 4 章でも確認したように、IIA 型理論の描像では、円盤の間の領域は NS5-brane によって生じると解釈することができる。一方で、重なった k 枚の NS5-brane は、IIB 型理論の解の A_{k-1} 特異点 (A_{k-1} で与えられる ALE 特異点) に T-dual を取ると生じることが知られている [41, 42]。実際、 η 方向の周期は k 単位の長さであるから、 k 枚の NS5-brane が存在することに相当していることが確認できる ($N_5 = k$)。

このような観点から見ると、 k 枚の NS5-brane が全て重なっているときに最も単純な状況であることになる。これは、ホロノミー行列 U を単位行列に比例するように取った場合に相当している。

正則表現の系は、 k 枚の NS5-brane が 1 枚ずつ並んだ系に対応する。

一方、通常の弦理論の orbifold に対応するのは、1 単位ずつ間隔を空けて並んだ k 枚の円盤の系である。これは NS5-brane が 1 枚ずつ等間隔に並んでいる状況に対応する。このように NS5-brane が 1 枚ずつ存在している場合は、geometric な記述は不正確であると予想できる。

しかしながら、重力解全体としては特異的にはならないことに注意しておこう。後で確認するように、この NS5-brane の系は狭い間隔で並んだ大きな円盤の系の良い近似になっているのである。

また、 $\rho \rightarrow 0$ という極限において、円盤同士の間隔は NS5-brane 解 (4.5.6) に漸近していく。この解が特異的でないことは第 4 章で既に議論した通りである。

一般の真空解について

第 2 章において議論したように、この理論には多数の真空解が存在する。

ここで、(3.3.22) 式で確認したように、 η 方向は長さが量子化されていることに注意しよう。よって、円盤の位置は $\eta \sim \frac{\pi}{2}l$ ($l = 1, \dots, k$) とラベル付けすることができる。これはつまり、円周上に円盤を置くことができ

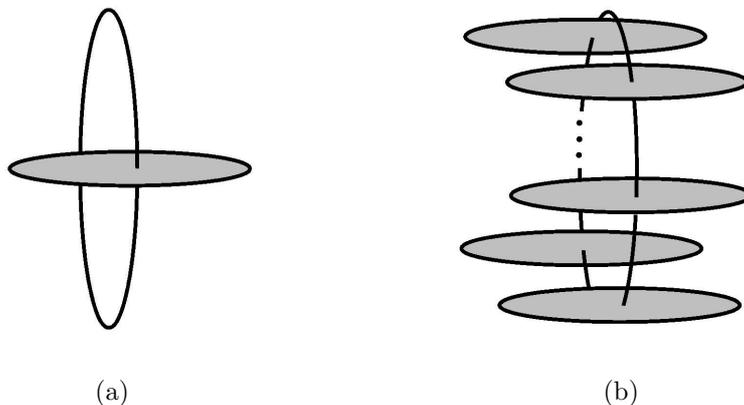


図 6.1: (a) $U = 1$ の系に対応する静電気問題の系 (b) 正則表現の系に対応する静電気問題の系

る特別な位置が k 個だけ存在していることを意味している。

従って、各々の真空解は $\sum_l n_l = N$ を満たす電荷 n_l を $\eta \sim \frac{\pi}{2}l$ にある円盤に割り当てた系に相当することが分かる。また、geometric な記述が信頼できるのは、NS5-brane が重なって存在している場合のみであった。これは、いくつかの l について $n_l = 0$ が成り立つ場合に相当することが分かる。

ある極限で $2 + 1$ 次元超対称 Yang-Mills 理論になる。

N を有限にしたまま $k \rightarrow \infty$ とする極限を取ると、 η 方向はコンパクトではなくなり、第5章で扱った $2 + 1$ 次元超対称 Yang-Mills 理論になる。これは、場の理論側からも予想されることである。

6.2 対応する静電気問題の系の解析

円盤の縁の周りで展開した解を求める。

このような静電気問題の系において、方程式をあらわに解くことはできない。しかし第3章で議論したように、円盤がとても大きく、その円盤の縁の近傍に注目するという特殊な極限では正確に解くことができる。この極限で方程式を解くことは、large N 極限を取ることに対応している。

η 方向の1周期に1枚ずつ円盤をおく場合を考えてみよう。これは正則表現に対応する系である。(3.3.41) 式を用いて解を見つけると

$$\partial_w z = ik \prod_{n=-\infty}^{\infty} \frac{w - ia n}{w - ia(n + \frac{1}{2})} = k \tanh \frac{\pi w}{a} \quad (6.2.1)$$

となる。 k は重なっている NS5-brane の枚数であり、 a は η 方向の周期である。3.3 節での議論を思い出せば、周期 a で同じ大きさの円盤が並んでいるのであるから、NS5-brane はそれらの円盤の中間に位置することが確認できる。

この結果を IIA 型 ansatz の pp-wave 極限 (3.3.33) に代入すると、 k 枚の NS5-brane が空間方向 χ に沿って周期的に並んでいる系に対応した解

$$f = \frac{k \sinh r}{2r(\cosh r + \cos \chi)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{k}{r^2 + (\chi + \pi + 2\pi n)^2} \quad (6.2.2)$$

$$r + i\chi \equiv \frac{2\pi}{a} w, \quad \chi \sim \chi + 2\pi \quad (6.2.3)$$

$$g_{++} = 8k \frac{r}{\sinh r} (\cosh r - \cos \chi) \quad (6.2.4)$$

が得られる。(6.2.2) 式において、円盤の縁は $w = ia$ または $r = \chi = 0$ に対応している。よって、計量の g_{++} 項によって、これらの縁に留まっていれば光錐エネルギーが最小になるということが確認できる。NS5-brane は $r = 0$, $\chi = \pi$ に存在しているのであるから、これらの縁は NS5-brane の中間に位置していることが分かる。

flat 空間において、 A_{k-1} 特異点の T-dual は円周上の k 枚の NS5-brane の系の near horizon 領域に対応することが知られている。今の場合は R-R 場が存在しているのであるが、それでも同じ結果が得られることが分かった。

$w \rightarrow \infty$ の極限を取ると、IIA 型 ansatz の pp-wave 極限 (3.3.33) は pp-wave 時空の orbifold に T-dual を取ったもので、その transverse 方向が $R^4 \times (R^4/Z_k)$ であるような時空

$$ds_{10}^2 = -2dx^+ dx^- - (r^2 + u^2)(dx^+)^2 + dr^2 + \left[du^2 + \frac{u^2}{4} d\Omega_2^2 + \frac{k^2}{u^2} d\chi^2 \right] \quad (6.2.5)$$

となることが分かる。 $u \rightarrow \infty$ の極限において T-dual を取ると、IIB 型 pp-wave 時空を Z_k で割った解が得られる。

正則表現に対応する orbifold の場合

まず、通常の弦理論の orbifold の固定点における理論について理解しよう。既に述べたように、これは $n_l = N/k$ ($l = 1, \dots, k$) を満たす真空に対応する。 $R \times S^3/Z_k$ 上の $U(N)$ 超対称 Yang-Mills 理論は、D3-brane 上の理論を orbifolding したものと解釈すると便利である [11]。そのためには、 Z_k の表現を選んで、それを $U(N)$ に埋め込む必要がある。正則表現 (regular representation) を選んだ場合には、 n_l が全て等しい場合の真空解と対応するのである。

この場合には、「 $1/N$ 展開の主要項において、orbifold 理論における Z_k 不変な状態のスペクトルは $\mathcal{N} = 4$ 超対称 Yang-Mills 理論における Z_k 不変な状態のスペクトルと完全に一致する」という相続定理 (inheritance theorem) [43] を用いることができる。よって、orbifold 上における弦の状態と超対称 Yang-Mills 理論における状態は、orbifolding する前の弦理論と $\mathcal{N} = 4$ 超対称 Yang-Mills 理論の場合と同じように、一致することが結論できるのである。

IIA 型理論の描像においては、この正則な orbifold は、円周上に等間隔で並ぶ k 枚の NS5-brane の描像になる。この場合、NS5-brane は 1 枚ずつ存在するので、NS5-brane 付近の重力解を信用することはできない。また、orbifold の描像は弦の結合定数が小さければ、orbifold の固定点に近くても、弦の状態の記述は正確で有効であるはずだと期待することができる。

orbifolding された 4 次元方向を含む、弦の状態のスペクトルは、 $E - J = 1$ を満たす励起状態から生じると考えられる。この励起状態は Z_k 生成子の下で $e^{\pm i2\pi/k}$ の因子がついてしまうので、 Z_k 不変となる励起状態の組み合わせを選ばなくてはならない。この議論は $AdS_5 \times (S^5/Z_k)$ について議論した [44] に似ている。

$U = 1$ に対応する orbifold の場合

他の真空についても考えてみよう。つまり、異なる Wilson line の表現と関係した真空解について考えることにする。例えば、ホロノミー行列が $U = 1$ である場合に対応して、 $n_k = N$, $n_i = 0$ ($i \neq k$) を選ぶことにしよう。この場合、IIA 型理論における重力の記述は、't Hooft 結合定数が大きく、 k も十分に大きく、そして原点に充分近づいたときに信用することができる。

この解において pp-wave 極限を取った場合について、もっと詳しく考察してみよう。pp-wave 極限を考えるには、 k 枚の重なった NS5-brane の geometric な記述が正確になるように、 k は十分に大きい定数であるとする。さらに、 $\mathcal{N} = 4$ 超対称 Yang-Mills 理論のときと全く同じように

$$J, N \rightarrow \infty, \quad \frac{J^2}{N} : \text{fix} \quad (6.2.6)$$

という操作を行う。

コンパクト化されない 4 次元方向の世界面理論について

コンパクト化されない 4 次元方向の世界面理論については、 $\mathcal{N} = 4$ 超対称 Yang-Mills 理論と全く同じになることが分かる。特に光錐ゲージを取ったとき、世界面の励起状態が満たす分散関係 (dispersion relation) は $\mathcal{N} = 4$ 超対称 Yang-Mills 理論と係数まで完全に一致していることが知られている [45]。

コンパクト化される 4 次元方向の世界面理論について

Z_k でコンパクト化される残りの 4 次元方向に関しては、さらに興味深い。原点から充分離れた距離においては、世界面の場の理論は通常の IIB 型 plain wave 時空解を orbifolding したものになっているのである [46]。これは正則表現に対応する真空を考えた場合と同じであることに注意しよう。

IIB 型理論の記述が適切になるように、弦の世界面が原点から遠く離れている状況を考えてみると、弦は大きく励起された状態になってしまう。よって、このような状態のスペクトルは今選んだ真空に注目する状況においてはあまり効いてこないと考えられる。この領域のスペクトルは正則表現の真空のスペクトルと同じであることから

も、そう結論付けるのが正しいと確認できる。

一方、弦の世界面のポテンシャルが最小となる点に近い領域（つまり静電気問題の系において円盤の縁に近い領域）における弦の状態を考えるときには、IIA 型理論の描像において k 枚の NS5-brane が重なって存在している系に注目すればよい。具体的な重力解は (6.2.2) 式を用いれば得られるのであった。

この場合、弦の世界面上の励起状態のスペクトルは、通常の orbifold の固定点において得られるものとは異なり、世界面質量 $E - J = 2$ を持つ Z_k 不変な励起状態が存在しているのである。このスペクトルは、今考えている真空において弦の上を伝播する不純物 (impurity) を考えた結果、期待されることと一致している。この真空は全ての場に対して $E - J \geq 2$ を満たすたった 1 つの粒子が励起されている状態であり、これはコンパクト化される 4 次元に関係した励起状態であると解釈することができる。

このことについてもう少し詳しく確認してみよう。これらの $E - J = 2$ を満たす励起状態の中には、 $\epsilon^{\dot{\beta}\dot{\beta}'} \partial_{\alpha\dot{\beta}} \partial_{\alpha'\dot{\beta}'} Z$ で与えられる Z 場の Kaluza-Klein モードが含まれている。この励起状態は $SU(2)_L$ の下では一重項になっているから、 $Z_k \subset SU(2)_L$ の作用は自明になってしまう。よって、この Kaluza-Klein モードは Z_k で割った後も存在し続けることが分かる。一方、 α, α' の脚があるので、 $SU(2)_R \subset \widetilde{SU}(2|4)$ の下ではスピン 1 のモードを与えることが分かる。ここでさらに α, α' の脚を潰して得られるスピン 0 のモードは運動方程式によって消えてしまうことが確認できる。 $E - J = 2$ を満たすスピン 0 の励起状態は、orbifolding している円周 ψ 方向の 4 次元ゲージ場の Kaluza-Klein モードから現れる。これらの基本場 (elementary field) は $E - J = 2$ を満たし、IIA 型 plane wave 時空においてコンパクト化される 4 次元方向の $E - J = 2$ 励起状態と関係しているのである。

2 + 1 次元超対称 Yang-Mills 理論や BMN 行列模型においても同様の議論をすることができて、これらの励起状態は BPS 状態であり、't Hooft 結合定数が大きい極限においても存在することが確認できる。

補足

AdS_5/Z_k に漸近する他の重力解も研究されている [47, 48]。この解は、4 次元空間における Eguchi-Hanson instanton [49] の重力解と似ている。

この章で扱った解においては、フェルミオンは円周 ψ 方向に沿って周期的であった。一方、これらの解においては、フェルミオンは ψ 方向に沿って反周期的になっている。よって、このような重力解は少し異なった場の理論を考えたときに現れるものである。つまり、 $R \times S^3/Z_k$ 上の超対称 Yang-Mills 理論において、 Z_k が作用する円周上ではフェルミオンが反周期的になる場合を考えるのである。よって、このとき k は偶数でなくてはならないことが分かる。また、この理論は超対称性を破ってしまう。

[47] の解は、このような理論（ ψ 方向に反周期的なフェルミオンの境界条件を持った理論）の状態（おそらく最低エネルギー状態）を記述しているのである。orbifold はこの理論において、この解とは別の状態である。従って、局所的な tachyon 凝縮 [50] が起こることにより、orbifold が崩壊して [47] で記述される解になるのだろうと予想することができる。

第 7 章

BMN 行列模型

第 3 章の議論は、BMN 行列模型の解析に大変役立つものである。

ところが、その議論を行うためには BMN 行列模型の真空解について、様々な事柄をあらかじめ理解しておかなくてはならない。従って、かなりのページ数を割いてしまうことになるが、まずは BMN 行列模型の真空解とその表現について議論する。この議論に関係した各節の内容は次の通りである。

- 7.1 BMN 行列模型について概観する。
- 7.2 M2-brane 作用を離散光錐量子化 (DLCQ) することにより、BMN 行列模型を導く。
- 7.3 pp-wave 時空上における D0-brane の dynamics を考えることにより、BMN 行列模型が導けることを確認する。
- 7.4 BMN 行列模型の古典的な超対称真空解について調べる。さらに、その真空解の周りで展開することにより、摂動論を得る。その結果、large μ 極限において理論が free になることを確認する。
- 7.5 7.4 節の結果より、large μ 極限における理論の正確なスペクトルを求める。自由理論のスペクトルであるから、単に行列を対角化するだけで求めることができる。さらに、そのスペクトルにおいて、物理的な状態であるための条件と BPS 状態であるための条件について議論する。
- 7.6 次に、BMN 行列模型の超対称性代数に注目することにより、物理的な状態の表現として typical 表現・atypical 表現と呼ばれる 2 種類の表現があることを確認する。
- 7.7 実際に超群の $SU(4|2)$ 表現論について議論する。
- 7.8 7.7 節で議論した内容に対して、BMN 行列模型における物理的な意味づけを行いながら議論する。特にパラメータ μ を動かしたときにスペクトルがどのように変わる可能性があるのかに注目して、議論を進める。
- 7.9 7.7 節の議論を基にして、large μ 極限におけるスペクトルに現れる状態の $SU(4|2)$ 表現について議論する。特に、1 枚の M2-brane が置かれた真空解と自明な真空解 $X = 0$ を取り上げて議論する。
- 7.10 以上の議論から、atypical 表現の中には large μ 極限を離れても厳密にスペクトルが維持される状態 (protected 状態) に対応するものがあることが結論付けられる。これは BPS 状態を思い出させる性質であるから、atypical 表現と BPS 状態の関係について議論する。
- 7.11 ここで話の流れが少し変わって、自明な真空 $X = 0$ と M5-brane が 1 枚置かれた真空解が同じものであるという仮説を紹介する。摂動論と protected 状態を用いた議論から、この仮説を支持する証拠を提示する。
- 7.12 さらに、複数枚の M5-brane が置かれた真空解がどのような $SU(4|2)$ 表現に対応しているのかについて仮説を紹介する。また、それを支持する証拠を提示する。
- 7.13 第 5 章と関係する内容として、BMN 行列模型が D2/M2-brane 理論の正則化として見做せることを示す。
- 7.14 第 4 章と関係する内容として、BMN 行列模型が NS5/M5-brane 理論の正則化として捉えられることを示す。

以上の前提知識を基にして、第 3 章の議論の結果を用いて、BMN 行列模型の解析を行う。この議論に関係した各節の内容は次の通りである。

- 7.15 BMN 行列模型に対応した静電気問題の系を求めて、簡単な解析を行う。さらに、NS5-brane が 1 枚だけ置かれた真空解に注目して、対応する場の理論との関係について議論する。特に、弦に対して transverse な 8 次元方向のうち、NS5-brane に平行な 4 次元方向の情報について注目する。
- 7.16 1 枚の NS5-brane の系は near horizon 領域を持たないことに注目して、NS5-brane に垂直な 4 次元方向の情報について、対応する場の理論を解析することで議論する。特に NS5-brane が 1 枚の系と複数枚の系との違いに注目する。

7.1 BMN 行列模型

初めに BMN 行列模型について概観しておこう [45]。11 次元 pp-wave 背景時空は、 $AdS_4 \times S^7$ 時空や $AdS_7 \times S^4$ 時空において pp-wave 極限を取ることにより

$$ds^2 = -2dx^+ dx^- + \sum_{A=1}^9 dx^A dx^A - \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\mu^2}{9} x^i x^i + \sum_{a=4}^9 \frac{\mu^2}{36} x^a x^a \right) dx^+ dx^+ \\ F_{123+} = \mu \quad (7.1.1)$$

と表すことができる。この計量は 32 個の超対称電荷を持つ大きな超対称群を持っている。この超対称性代数は $AdS_{4,7} \times S^{7,4}$ の超対称性代数を縮約 (contraction) することにより得られる。

ここで、11 次元 pp-wave 時空における M2-brane の作用を考えて、 x^- 方向に $x^- \sim x^- + 2\pi R$ として離散光錐量子化 (DLCQ, Discrete Light-Cone Quantization) をする。その上で、運動量が $p^+ = -p_- = N/R$ である理論のセクターを考える。すると、理論の dynamics は $U(N)$ 行列模型

$$S = S_0 + S_{mass} \\ S_0 = \int dt \text{Tr} \left[\frac{1}{2R} (D_0 X^A)^2 + \frac{i}{2} \Psi^\dagger D_0 \Psi + \frac{R}{4} [X^A, X^B]^2 + \frac{R}{2} \Psi^\dagger \gamma^A [X^A, \Psi] \right] \\ S_{mass} = \int dt \text{Tr} \left[-\frac{1}{2R} \left(\frac{\mu}{3} \right)^2 (X^i)^2 - \frac{1}{2R} \left(\frac{\mu}{6} \right)^2 (X^a)^2 - \frac{i\mu}{8} \Psi^\dagger \gamma_{123} \Psi - \frac{i\mu}{3} \epsilon_{ijk} X^i X^j X^k \right] \quad (7.1.2)$$

で与えられることが分かる。これが BMN 行列模型である。ここで $A, B = 1, \dots, 9$ であり、 $l_p = 1$ とおいている。また、 $t = x^+$, $X = r/2\pi$ と定義した。 r は 11 次元における物理的な距離である。

S_0 は BMN 行列模型において $\mu = 0$ と設定したものであり、BFSS 行列模型 [51] になっていることが分かる。 S_{mass} は μ に依存する部分であり、scalar 場と fermion 場の質量項と、Myers 効果 [52] に関係した相互作用項が含まれている。

作用 (7.1.2) における超対称変換は

$$\delta X^A = \Psi^\dagger \gamma^A \epsilon(t) \\ \delta \Psi = \left[\frac{1}{R} D_0 \phi^A \gamma^A + \frac{\mu}{6R} \sum_{i=1}^3 \phi^i \gamma^i \gamma_{123} - \frac{\mu}{3R} \sum_{a=4}^9 \phi^a \gamma^a \gamma_{123} + \frac{i}{2} [\phi^A, \phi^B] \gamma_{AB} \right] \epsilon(t) \\ \delta A_0 = \Psi^\dagger \epsilon(t) \\ \epsilon(t) = e^{-\frac{\mu}{12} \gamma_{123} t} \epsilon_0 \quad (7.1.3)$$

である。

BMN 行列模型の大きな特徴として、超対称性があるにも関わらず、ボソンとフェルミオンが異なる質量を持っているということが挙げられる。これは、超対称電荷が時間変化するため、Hamiltonian と交換しないことに起因している。

また、真空エネルギーは通常の超対称性理論と同じく 0 である。よって、 $p_+ = 0$ を満たす状態が存在して、それが single type の graviton モードに対応する。

giant graviton に関係する 1/2 BPS 解が存在する。

ここで、BMN 行列模型の 1/2 BPS 解を探してみよう。 $\delta\Psi = 0$ を要請すると、唯一の解は

$$[X^i, X^j] = i\frac{\mu}{3R}\epsilon_{ijk}X^k, \quad X^a = 0, \quad \dot{X}^A = 0 \quad (7.1.4)$$

であることが分かる。ここで $i, j, k = 1, 2, 3$; $a = 4, \dots, 9$; $A = 1, \dots, 9$ である。この解は $X^{1,2,3}$ 方向に広がった半径

$$r \sim 2\pi\sqrt{\frac{\text{Tr}[\sum_i (X^i)^2]}{N}} \sim \pi\frac{\mu}{3}\frac{N}{R} \quad (7.1.5)$$

の非可換球面 (fuzzy sphere) である。

質量項があるおかげで moduli 空間は完全になくなってしまい、ゲージ変換を除けば解は全て離散的な組に分かれてしまう。よって、半古典近似を用いて基底状態を構成することができるので、BMN 行列模型を解析することは比較的容易であることが分かる。つまり、基底状態の波動関数について縮退を考慮するなど、量子力学的な問題を考慮する必要はないということである。これは BFSS 行列模型において度々出てくる問題であり、解くのが厄介なのであった。

この解 (7.1.4) は $SU(2)$ の N 次元表現を既約表現に分解する方法によってラベル付けされる。これは N を分割する方法と同じだけの数がある。Fock 空間において $p_+ = 0$, $-p_- = N/R$ を持った複数個の graviton がある状態の数と同じであると表現することもできる。

実は、解 (7.1.4) は giant graviton [53] と関係していることが知られている。すなわち、 $\sum_{i=1}^3 x_i^2 = \text{const.}$ で定義される S^2 に巻きついた M2-brane になっているのである。古典的には x^- 座標は固定されていて、光錐エネルギー $-p_+$ は 0 であるが、運動量 p_- は 0 でないという状態である。

一方、pp-wave 時空には S^5 ($\sum_{a=4}^9 x_a^2 = \text{const.}$) に巻きついた M5-brane である giant graviton も存在できるはずである。超重力理論における計算によって、この giant graviton の半径は

$$r^4 = \frac{8\pi^2}{3}\mu(-p_-) \quad (7.1.6)$$

であることが分かっている。しかしながら、行列模型 (7.1.2) の古典解としては現れない。このことについて少し考察してみよう。

M2-brane 解 (7.1.5) のスケールは、作用の全体にかかる因子 (overall factor) を $1/g^2$ としたときの結合定数 g を用いると $X \sim \mu/g$ となる。よって、これは古典解のスケールであることが分かる。一方、M5-brane 解 (7.1.6) のスケールは、 $X^4 \sim \mu/g$ である。よって、これは古典解のスケールではないので、むしろ古典解として現れないのが自然なのである。

このような状況は、mass deformation された $\mathcal{N} = 4$ 超対称 Yang-Mills 理論の真空解における解析でも現れる [54]。そこでは D3-brane が D5-brane に blow up する過程は古典的に記述できるのであるが、D3-brane が NS5-brane に blow up する過程は量子効果を考慮しなければいけないという結論が導かれた。

従って、真空解 $X^A = 0$ が量子論的には 1 枚の M5-brane 解に対応していると類推することができる。以下では、このような立場で議論を進めていくことにしよう。

7.2 M2-brane 作用からの導出

BMN 行列模型は pp-wave 背景時空における M2-brane 理論を離散化して導出できる。

BFSS 行列模型 [51] は flat な背景時空における光錐 (light-cone) ゲージの M2-brane 作用を離散化して導出できることが知られている。具体的には、M2-brane の世界体積上の Poisson 括弧を行列の交換子に置き換える

ことで離散化するのだ。この結果、M2-brane の作用は面積保存変換 (area preserving diffeomorphism) の下での不変性を持っていたが、得られた理論は次元還元した超対称 Yang-Mills 理論の $U(N \rightarrow \infty)$ ゲージ不変性を持つことになる。この次元還元した超対称 Yang-Mills 理論こそ、行列模型を定義する理論である。

BMN 行列模型は pp-wave 背景時空における理論であるが、これと同様の議論をすることができる。すなわち、11 次元で最大超対称な pp-wave 背景時空上において、光錐ゲージの M2-brane 作用を離散化して導出した理論こそが、BMN 行列模型になるのである [55]。

M2-brane 作用について

以下、実際にこの議論を実行していこう。M2-brane 作用 [56]

$$S[Z(\sigma)] = \int d^3\sigma \sqrt{-G(Z(\sigma))} + \int C \quad (7.2.1)$$

から始めよう。ここで $Z^M(\sigma)$ は超空間 (superspace) に埋め込まれた座標 $(X^\mu(\sigma), \theta^\alpha(\sigma))$ をまとめて表したものであり、 σ^i ($i = 0, 1, 2$) は M2-brane の世界体積における座標である。また

$$G(Z(\sigma)) = \det [\Pi_i^\mu \Pi_j^\nu G_{\mu\nu}]; \quad \Pi_j^M = \frac{\partial Z^M}{\partial \sigma^j} E_N^M \quad (7.2.2)$$

である。すなわち、 Π_j^M は supervielbein E_N^M を M2-brane の世界体積に引き戻したもの (pull-back) であり、 $G_{\mu\nu}$ は背景時空の計量である。今の場合には当然、 $G_{\mu\nu}$ として pp-wave 計量

$$ds^2 = -2dX^+dX^- + \sum_{A=1}^9 dX^A dX^A - \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\mu^2}{9} X^i X^i + \sum_{a=4}^9 \frac{\mu^2}{36} X^a X^a \right) dX^+ dX^+ \\ F_{123+} = \mu \quad (7.1.1)$$

を採用するものとする。R-R 3 形式場 C については

$$C = \frac{1}{3!} e^r \wedge e^s \wedge e^t C_{rst} + C_F; \quad e^r = e_\mu^r dX^\mu \quad (7.2.3)$$

と表すことにしよう。ここで e_μ^r は vielbein であり、 C_F 項は fermionic な寄与を表している。 C_F の具体的な表式を書くのは、もう少し議論が進んでからにしよう。

7.2.1 光錐 Hamiltonian の bosonic 項

光錐ゲージ固定を行う。

M2-brane 作用から行列模型を得るためには、光錐ゲージ固定を行う必要がある。このためには背景時空の座標として (X^+, X^-, X^A) ($A = 1, \dots, 9$) を用いるのが便利である。また M2-brane の世界体積座標としては (τ, σ^r) ($r = 1, 2$) を用いることにしよう。このとき光錐条件は

$$X^+ = \tau, \quad g_{0r} \equiv G_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial X^\nu}{\partial \sigma^r} = 0 \quad (7.2.4)$$

となる。後者の条件より、位相空間の変数には

$$P_A \partial_r X^A + P_- \partial_r X^- = 0 \quad (7.2.5)$$

という条件が課せられることが確認できる。ここで P_A, P_- はそれぞれ X_A, X_- の共役運動量である。

Lagrangian から Hamiltonian を求める。

Lagrangian は作用 (7.2.1) から読み取ることができる。以上のように光錐ゲージ固定を行った上で、Hamiltonian の bosonic 部分を求めると

$$H_{bos} = \int d^2\sigma \left(\frac{G_{+-}}{P_- - C_-} \left[\frac{1}{2} \left(P_A - C_A - \frac{P_- - C_-}{G_{+-}} G_{A+} \right)^2 + \frac{1}{4} (\epsilon^{rs} \partial_r X^A \partial_s X^B)^2 \right] - \frac{P_- - C_-}{2G_{+-}} G_{++} - C_+ + \frac{1}{P_- - C_-} [\epsilon^{rs} \partial_r X^A \partial_s X^B P_A C_{+-B} + C_- C_{+-}] \right) \quad (7.2.6)$$

となる [56]。ここで

$$\begin{aligned} C_A &= -\epsilon^{rs} \partial_r X^- \partial_s X^B C_{-AB} + \frac{1}{2} \epsilon^{rs} \partial_r X^B \partial_s X^C C_{ABC} \\ C_{\pm} &= \frac{1}{2} \epsilon^{rs} \partial_r X^A \partial_s X^B C_{\pm AB} \\ C_{+-} &= \epsilon^{rs} \partial_r X^- \partial_s X^A C_{+-A} \end{aligned} \quad (7.2.7)$$

である。pp-wave 背景時空の場合には、計量に関して

$$\begin{aligned} G_{--} = G_{A-} = 0, \quad G_{+-} = -1, \quad G_{AB} = \delta_{AB}, \\ G_{++} = -F^2 \equiv - \left(\frac{\mu^2}{9} \sum_{i=1}^3 X_i^2 + \frac{\mu^2}{36} \sum_{a=1}^6 X_a^2 \right) \end{aligned} \quad (7.2.8)$$

であり、R-R 3 形式場に関して

$$C_- = C_{+-} = C_A = 0, \quad C_+ = \frac{1}{2} \epsilon^{rs} \partial_r X^A \partial_s X^B C_{+AB} = \frac{\mu}{3!} \epsilon_{ijk} \epsilon^{rs} \partial_r X^i \partial_s X^j X^k \quad (7.2.9)$$

であるから、結局、光錐 Hamiltonian は

$$\begin{aligned} H_{bos} = \frac{1}{p^+} \int d^2\sigma \left[\frac{1}{2} P_A^2 + \frac{1}{4} \{X^i, X^j\}^2 + \frac{1}{4} \{X^a, X^b\}^2 + \frac{1}{2} \{X^i, X^a\}^2 \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\mu p^+}{3} \right)^2 (X^i)^2 + \left(\frac{\mu p^+}{6} \right)^2 (X^a)^2 \right) - \frac{\mu p^+}{6} \epsilon^{ijk} \{X^i, X^j\} X^k \right] \end{aligned} \quad (7.2.10)$$

と求められる。ここで $i, j = 1, 2, 3$; $a, b = 1, \dots, 6$ である。また $p^+ = -P_-$ と定義した。さらに

$$\{X^A, X^B\} = \epsilon^{rs} \partial_r X^A \partial_s X^B \quad (7.2.11)$$

は Poisson 括弧である。後で量子化するとき、これを交換子に置き換えるという手続きを実行する。

7.2.2 光錐 Hamiltonian の fermionic 項

光錐 Hamiltonian の fermionic 項を求めるためには、supervielbein とテンソル場について θ の全ての order について調べる必要がある。それぞれについて議論していこう。

supervielbein を θ で展開した形で表す。

pp-wave 時空は coset 空間の一例であるが、coset 空間における supervielbein E_N^B を世界体積上の場と背景時空の場の成分を用いて表現するとどうなるかについては [57] で調べられている。ここで $B = (r, a)$ は接空間 (tangent space) の脚であり、 $N = (\mu, \alpha)$ は曲がった空間の脚である。また r, μ は bosonic 成分で、 a, α は fermionic 成分である。

よって、その結果を用いると

$$\begin{aligned} E &= D\theta + \sum_{n=1}^{16} \frac{1}{(2n+1)!} \mathcal{M}^{2n} D\theta \\ E^r &= e^r + \bar{\theta} \Gamma^r D\theta + 2 \sum_{n=1}^{15} \frac{1}{(2n+2)!} \bar{\theta} \Gamma^r \mathcal{M}^{2n} D\theta \end{aligned} \quad (7.2.12)$$

である。ここで E^r は下付き添字 μ, α を省略している。また E については fermionic 生成子 Q_α を用いて $E = E^r P_r + \bar{E}^\alpha Q_\alpha$ と定義している (付録 B を参照のこと)。さらに

$$\begin{aligned} e^r &= e_\mu^r dX^\mu, \quad \omega^{rs} = \omega_\mu^{rs} dX^\mu, \\ D\theta &\equiv d\theta + e^r T_r^{stuv} \theta F_{stuv} - \frac{1}{4} \omega^{rs} \Gamma_{rs} \theta \end{aligned} \quad (7.2.13)$$

である。 ω^{rs} はスピン接続 (spin connection) であり、 F_{stuv} は R-R 3 形式場 C の field strength である。また

$$T_r^{stuv} = \frac{1}{2!3!4!} \left(\Gamma_r^{stuv} - 8\delta_r^{[s} \Gamma^{tuv]} \right) \quad (7.2.14)$$

であり、さらに行列 \mathcal{M}^2 は

$$(\mathcal{M}^2)_b^a = 2(T_r^{stuv} \theta)^a F_{stuv} (\bar{\theta} \Gamma^r)_b - \frac{1}{288} (\Gamma_{rs} \theta)^a (\bar{\theta} [\Gamma^{rstuvw} F_{tuv} + 24\Gamma_{tu} F^{rstu}])_b \quad (7.2.15)$$

で与えられる。

pp-wave 背景時空の場合には

$$e^-_+ = e^+_+ = 1, \quad e^A_B = \delta^A_B, \quad e^-_+ = \frac{F^2}{2}, \quad \text{otherwise} = 0 \quad (7.2.16)$$

であるから、スピン接続の成分は

$$\omega^A_+ = \frac{1}{2} \partial_A F^2, \quad \text{otherwise} = 0 \quad (7.2.17)$$

と求められる。

さらに θ を 16 成分 Majorana スピノール場 Ψ で表す。

fermionic 場を用いてあらわな形で書くには、 Γ 行列の表現を選ぶ必要がある。11 次元であるから、 Γ 行列の大きさは 32×32 であり、これを

$$\Gamma^+ = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i\mathbf{1}_{16} & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma^- = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & i\mathbf{1}_{16} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma^A = \begin{pmatrix} \gamma^A & 0 \\ 0 & -\gamma^A \end{pmatrix} \quad (7.2.18)$$

と表すことにしよう。ここで γ^A は 16×16 の Euclidean $SO(9)$ Γ 行列である。ここで $\Gamma^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Gamma^0 \pm \Gamma^{10})$ と定義した。

さらに、光錐ゲージ固定をするために κ 対称性を使おう。すなわち、

$$\Gamma^+ \theta = 0, \quad \bar{\theta} \Gamma^+ = 0 \quad (7.2.19)$$

を要請するのである。ここで $\bar{\theta} = i\theta^\dagger \Gamma^0$ である。このゲージを取ると

$$\bar{\theta} \Gamma^{+-} \partial \theta = \bar{\theta} \Gamma^{+A} \partial \theta = \bar{\theta} \Gamma^{+AB} \partial \theta = \bar{\theta} \Gamma^A \partial \theta = \bar{\theta} \Gamma^{AB} \partial \theta = 0, \quad \dots \quad (7.2.20)$$

が成り立つので、計算が簡単になるという利点がある。(7.2.19) 式をあらわに解くと

$$\theta = \frac{1}{2^{1/4}} \begin{pmatrix} 0 \\ \Psi \end{pmatrix}, \quad \bar{\theta} = \frac{1}{2^{1/4}} (-\Psi^\top 0) \quad (7.2.21)$$

となる。ここで Ψ は 16 成分 Majorana スピノールである。 Ψ の規格化条件として

$$i\bar{\theta} \Gamma^- \theta = \Psi^\top \Psi \quad (7.2.22)$$

を採用していた。

Hamiltonian における fermionic な寄与を Majorana スピノール場 Ψ で表す。

以下では、16 成分 Majorana スピノール Ψ を用いて、作用をあらわな形で表現しよう。pp-wave 時空の場合、 \mathcal{M}^2 に現れる背景場の成分のうち、非自明なのは $F_{+123} = -F^{-123}$ のみであることに注意しよう。従って、(7.2.19) 式を用いると

$$\mathcal{M}^2 = 0 \quad (7.2.23)$$

であることが示せる。よって、(7.2.12) 式より fermionic な寄与は supervielbein による展開において

$$E_\nu^r = e_\nu^r + \bar{\theta}\Gamma^r D_\nu\theta, \quad E_\alpha^r = \bar{\theta}\Gamma^r D_\alpha\theta \quad (7.2.24)$$

となることが直ちに分かる。また、ここで

$$\bar{\theta}\Gamma^r D_\nu\theta = \frac{i\mu}{4}\delta_\nu^+\delta_-^r \Psi^\top\gamma^{123}\Psi, \quad E_\alpha^r = -(\bar{\theta}\Gamma^r)_\alpha \quad (7.2.25)$$

が成り立つことを確認しておこう。

Dirac-Born-Infeld 項について

作用 (7.2.1) に戻って、まずは $\sqrt{-G}$ 項からの fermionic な寄与に注目しよう。

$$\Pi_i^r = E_\nu^r \partial_i X^\nu + E_\alpha^r \partial_i \theta^\alpha \quad (7.2.26)$$

に以上の結果を用いることにより

$$\begin{aligned} \Pi_i^- &= \partial_i X^- + \partial_i X^+ \left[\frac{F^2}{2} + \frac{i\mu}{4} \Psi^\top \gamma^{123} \Psi \right] + i\Psi^\top \partial_i \Psi \\ \Pi_i^+ &= \partial_i X^+, \quad P i_i^A = \partial_i X^A \end{aligned} \quad (7.2.27)$$

が得られる。従って、背景時空が pp-wave 時空である影響は Π_i^- の $\partial_i X^+$ の項のみに現れることが分かる。 G_{++} の bosonic 成分は $-F^2$ であったことを思い出せば (7.2.8)、fermionic な効果も含めた M2-brane の Hamiltonian は、Hamiltonian の bosonic 部分 (7.2.6) において G_{++} を

$$G_{++} + \frac{i\mu}{2} \Psi^\top \gamma^{123} \Psi \quad (7.2.28)$$

で置き換えることによって得られることが分かる。追加された項は、fermion の「質量項」というべき形をしていることが確認できる。

ここで Π_i^- には $i\Psi^\top \partial_i \Psi$ という項があることが気になるが、この項は 1 階の時間微分を含むので、光錐 Hamiltonian には寄与しない。よって、この議論においては無視してよい。

Chern-Simons 項について

最後に、テンソル場の fermionic な寄与 C_F

$$C_F = - \int_0^1 t dt \bar{\theta}\Gamma_{rs} E(t) \wedge E^r(t) \wedge E^s(t) \quad (7.2.29)$$

について考えよう。ここで t は補助パラメータであり、 $E(t)$, $E^r(t)$ は (7.2.12) 式において $\theta \rightarrow t\theta$ とすることで得られる。ゲージ固定条件 (7.2.19) を用いれば、 $\mathcal{M}^2 = 0$ であったので、

$$C_F = - \int_0^1 t^2 dt \bar{\theta}\Gamma_{rs} D\theta \wedge (e^r + t^2 \bar{\theta}\Gamma^r D\theta) \wedge (e^s + t^2 \bar{\theta}\Gamma^s D\theta) \quad (7.2.30)$$

となる。

ゲージ固定条件 (7.2.19) より、 $\{rs\} = \{+A\}$ でなければ $\bar{\theta}\Gamma_{rs} D\theta = 0$ になってしまう。また、 $r = +$ であれば $\bar{\theta}\Gamma^r D\theta = 0$ になってしまう。以上より、結局

$$\begin{aligned} C_F &= - \int_0^1 t^2 dt \bar{\theta}\Gamma_{rs} D\theta \wedge e^r \wedge e^s \\ &= \frac{1}{3} \epsilon^{ijk} \bar{\theta}\Gamma^{-A} \partial_i X^+ \partial_j \theta \partial_k X^A = \frac{i}{2} \Psi^\top \gamma^A \{X^A, \Psi\} \end{aligned} \quad (7.2.31)$$

となることが結論できる。

7.2.3 光錐 Hamiltonian の離散化

光錐 Hamiltonian を離散化すると、BMN 行列模型の Hamiltonian が得られる。

bosonic 項と fermionic 項を合わせると、最大超対称 pp-wave 背景時空における membrane の光錐ゲージ Hamiltonian を κ 対称性で固定したものは、全体として

$$H_{total} = \int d^2\sigma \left[\frac{1}{p^+} \left\{ \frac{1}{2} P_A^2 + \frac{1}{4} \{X^A, X^B\}^2 + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\mu p^+}{3} \right)^2 (X^i)^2 + \left(\frac{\mu p^+}{6} \right)^2 (X^a)^2 \right) - \frac{\mu p^+}{6} \epsilon^{ijk} \{X^i, X^j\} X^k \right\} - \frac{i}{2} \Psi^\top \gamma^A \{X^A, \Psi\} - \frac{i}{4} \mu \Psi^\top \gamma^{123} \Psi \right] \quad (7.2.32)$$

となることが結論できる。

BMN 行列模型の Hamiltonian は正則化 (regularization) の手続き [58] を踏めば、直ちに得られることが分かる。その手続きとは

- M2-brane 世界体積上の関数を $N \times N$ の Hermite 行列にする。 $X^A(\sigma) \longleftrightarrow \frac{1}{N} X^A$, $\Psi(\sigma) \longleftrightarrow \Psi$
- 積分を行列の trace にする。 $p^+ \int d^2\sigma \longleftrightarrow \frac{1}{R} \text{Tr}$
- Poisson 括弧を行列の交換子にする。 $\{, \}_{PB} \longleftrightarrow -i[,]$

であり、その結果として得られる Hamiltonian は

$$H = R \text{Tr} \left[\frac{1}{2} \Pi_A^2 - \frac{1}{4} [X_A, X_B]^2 - \frac{1}{2} \Psi^\top \gamma^A [X_A, \Psi] \right] + \frac{R}{2} \text{Tr} \left[\sum_{i=1}^3 \left(\frac{\mu}{3R} \right)^2 X_i^2 + \sum_{a=4}^9 \left(\frac{\mu}{6R} \right)^2 X_a^2 + i \frac{\mu}{4R} \Psi^\top \gamma^{123} \Psi + i \frac{2\mu}{3R} \epsilon^{ijk} X_i X_j X_k \right] \quad (7.2.33)$$

である。

7.3 D0-brane dynamics からの導出

M 理論の記述としての行列模型を得るための方法は他にもある。それを実行するには、

- M 理論を離散光錐量子化 (DLCQ) [59] して得られた理論において、light-like 方向の運動量を N 単位持っているような系
- IIA 型弦理論において N 個の D0-brane が存在する系において、異なる D0-brane に端を持つ開弦が最低エネルギーのモードの自由度のみを持つようになる極限を取ったもの

が同等であるという事実を用いればよい。

以下では、この D0-brane の観点から BMN 行列理論を導出することに挑戦してみよう [55]。

7.3.1 IIA 型弦理論との関係

M 理論においてある極限をとると、D0-brane のみが自由度である IIA 型理論が得られる。

離散光錐量子化 (DLCQ) した M 理論を考えよう。具体的には、light-like なコンパクト方向 x^- の半径が R であり、space-like なコンパクト方向 x^{10} の半径が R_s である系において、boost パラメータ

$$\gamma = \sqrt{\frac{R^2}{2R_s^2} + 1}; \quad R_s \rightarrow 0, \quad R: \text{fix} \quad (7.3.1)$$

で boost するという状況を考えればよい [60]*1。ここで boost パラメータとは、相対性理論における通常の γ パラメータ $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$ である。

M 理論の系で N 単位の運動量を持ち、半径 R_s の space-like なコンパクト方向があるものは、 $g_s \rightarrow 0, \alpha' \rightarrow 0$ の極限において N 個の D0-brane が存在する IIA 型弦理論と同等である。この極限においては、低エネルギーの D0-brane の自由度だけが理論の自由度として残る。実際に D0-brane 状態のエネルギー（から発散する定数 N/R_s を引いたもの）が DLCQ による記述における光錐エネルギーと一致していることを確認するためには、極限を取る前の D0-brane 理論において、次元を持つ全ての量に関して $m \rightarrow \frac{R}{R_s}m$ というリスケールを行えばよいことが知られている。

11 次元 pp-wave 背景時空から IIA 型背景時空を得る。

今の場合は、pp-wave 背景時空において DLCQ された M 理論を考えることになる。よって、適切な行列理論は 11 次元 pp-wave 背景時空を boost した上でコンパクト化して得られる IIA 型背景時空における D0-brane で記述できるはずである。

この IIA 型背景時空（この背景時空は flat に近くなくてよい）を決定したいわけであるが、ここで x^\pm 平面において速度 v で boost すると

$$x^+ \longrightarrow \sqrt{\frac{1-v}{1+v}} x^+, \quad x^- \longrightarrow \sqrt{\frac{1+v}{1-v}} x^- \quad (7.3.2)$$

となることに注意しておこう。従って、pp-wave 計量

$$ds^2 = -2dx^+ dx^- + \sum_{A=1}^9 dx^A dx^A - \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\mu^2}{9} x^i x^i + \sum_{a=4}^9 \frac{\mu^2}{36} x^a x^a \right) dx^+ dx^+ \quad (7.1.1)$$

は boost 共変であり、boost の影響は μ のリスケールに現れるだけであることが分かる。さらに、この因子について

$$\frac{1-v}{1+v} = \frac{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}} = \frac{\sqrt{1 + \frac{2R_s^2}{R^2}} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2R_s^2}{R^2}} + 1} \xrightarrow{R_s \rightarrow 0, R: \text{fix}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{R_s}{R} \right)^2 \quad (7.3.3)$$

であることに注意しよう。

実際、($\sqrt{2}$ の因子を除けば) 光錐エネルギーを D0-brane の系のエネルギーと一致させるために次元を持つパラメータをリスケールする ($m \rightarrow \frac{R}{R_s}m$) ときに、このリスケールを取り除くことができるのである [60]。よって、両方のリスケールを一度に考えることにすると、結局 $\mu \rightarrow \mu/\sqrt{2}$ というリスケールのみを行えばよいことがわかる。従って、結果的には boost しない状況を考えることができるのである。

それでは、「boost しない」系における M 理論の計量を space-like な円周上にコンパクトすることにより、IIA 型理論の計量を得ることにしよう。このような M 理論の計量は

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{F^2}{4} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{F^2}{4} \right) (dx^{10})^2 - \frac{F^2}{2} dt dx^{10} + \sum_{i=1}^3 dx_i dx_i + \sum_{a=4}^9 dx_a dx_a \quad (7.3.4)$$

である。 F^2 は (7.2.8) 式で定義されている。また、R-R 4 形式 field strength は

$$F_{123,10} = -F_{0123} = \frac{1}{2}\mu \quad (7.3.5)$$

*1 [55] では $\gamma = \sqrt{\frac{R^2}{2R_s^2} + 1}$ となっているが、正しくは $\gamma = \sqrt{\frac{R^2}{2R_s^2} + 1}$ であると思われる。

である。これを x^{10} 方向にコンパクト化すると、対応する IIA 型背景時空は string frame において

$$\begin{aligned} ds_{10}^2 &= g_{00}dt^2 + g_{AB}dx^A dx^B \\ g_{00} &= -e^{-2\phi/3}, \quad g_{AB} = \delta_{AB}e^{2\phi/3}; \quad A, B = 1, \dots, 9 \\ e^{4\phi/3} &= 1 - \frac{1}{4}F^2 \\ C_0 &= \frac{G_{0,10}}{G_{10,10}} = -\frac{F^2}{4 - F^2} \\ F_{0123} &= -\frac{1}{2}\mu, \quad H_{123} = \frac{1}{2}\mu \end{aligned} \quad (7.3.6)$$

となることが分かる。 C_0 は R-R 1 形式ポテンシャル (の時間成分) であり、 H_{123} と F_{0123} はそれぞれ NS-NS 3 形式 field strength、R-R 4 形式 field strength である。

ここで得られた結果が有効なのは $F^2 \ll 4$ のときである。

11 次元の pp-wave 計量においては、Ricci スカラーの非零成分は $R_{++} = \frac{1}{2}\mu^2$ のみであることと

$$\begin{pmatrix} g_{++} & g_{+-} \\ g_{-+} & g_{--} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -F^2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} g^{++} & g^{+-} \\ g^{-+} & g^{--} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & F^2 \end{pmatrix} \quad (7.3.7)$$

であることより、スカラー曲率は 0 であることが理解できる。一方、10 次元計量においては曲率が 0 ではない。これは、effective なコンパクト化半径 $e^{2\phi/3}$ が x に非自明に依存していることによる。あらわな計算により、スカラー曲率は

$$\mathcal{R} = -\frac{\mu^2}{8} \left(1 - \frac{F^2}{4}\right)^{-3/2} \left[a - b\mu^2 \sum_{i=1}^3 x_i x_i - c\mu^2 \sum_{a=4}^9 x_a x_a \right] \quad (7.3.8)$$

となる。ここで定数 $a, b, c > 0$ である。

超重力理論の計算は曲率が小さいときのみ信頼できることを思い出そう。よって今の場合、信頼できるのは $F^2 \ll 4$ のときのみということになる。実際、(7.3.4) 式より、 $F^2 = 4$ において計量は特異的 (singular) になること、そして $F^2 > 4$ になると計量が ill-defined になることが直ちに確認できる。11 次元の観点からすると、このようなことが起こる原因は、 x^{10} 方向が $F^2 \geq 4$ のとき time-like になってしまうことにある。time-like な方向をコンパクト化することは、因果律を破ってしまうことを意味するので、ナンセンスなのだ。

従って、 $F \sim 4$ に近い領域ではこの時空解の信頼性は薄いように感じる。しかしながら、この IIA 型背景時空の振る舞いが良い領域 ($F < 4$) においては、DLCQ された M 理論の自由度が pp-wave 背景時空の弱結合領域に存在する系の記述として、この背景時空 (7.3.4) における D0-brane の作用は有効な記述なのである。

低曲率極限において、IIA 型理論の背景場は F^2 の冪乗で展開できる。実際に展開してみると、 F^2 の order で

$$\begin{aligned} e^{4\phi/3} &= 1 - \frac{F^2}{4} \implies \phi \sim -\frac{3}{16}F^2 \\ C_0 &= -\frac{F^2}{4 - F^2} \sim -\frac{F^2}{4} \\ g_{00} &= -e^{-2\phi/3} \sim -1 - \frac{F^2}{8} \\ g_{AB} &= e^{2\phi/3}\delta_{AB} \sim \left(1 - \frac{F^2}{8}\right)\delta_{AB} \end{aligned} \quad (7.3.9)$$

となる。

7.3.2 コンパクト化されて reduction された pp-wave 時空上での D0-brane の dynamics

11 次元 pp-wave 時空を IIA 型超重力理論の背景時空と関係付けられるのは、 $F^2 \ll 4$ の領域であることを既に確認した。この低曲率領域においては、この背景時空 (7.3.9) における D0-brane を記述する作用を、一般の

低曲率の背景時空での低エネルギーかつ弱結合領域における D0-brane の作用 [60] を参照することで読み取ることができる。

11 次元計量に由来する項からは bosonic な質量項が出てくる。

D0-brane 作用のうち、11 次元 pp-wave 計量から現れる項は

$$S_2 = \frac{1}{2} (\partial_A \partial_B \phi) I_\phi^{(AB)} + \frac{1}{4} (\partial_A \partial_B h_{\mu\nu}) I_h^{\mu\nu(AB)} + \frac{1}{2} (\partial_A \partial_B C_0) I_0^{0(AB)} \quad (7.3.10)$$

である。 $I_\phi^{(AB)}$ は ϕ に結合するカレントの AB 方向のモーメントであり、他の I についても同様に定義されるものとする。これらの具体的な形は [60] で与えられており、それをを用いると、背景時空 (7.3.9) は

$$S_2 = -\frac{1}{4} \partial_A \partial_B F^2 \left(T^{++(AB)} + \dots \right) \\ T^{++(AB)} = \frac{1}{R} \text{Tr} [X^A X^B] \quad (7.3.11)$$

であることが分かる。ここで \dots は高次の項を表しており、これらの項は $\alpha' \rightarrow 0$ の極限で 0 になる。 F^2 の表現を代入すれば、まさに BMN 行列模型の bosonic な質量項が得られることが確認できる。

11 次元 3 形式場に由来する項からは fermionic な質量項と Myers 相互作用項が出てくる。

D0-brane 作用のうち、11 次元における 3 形式場に由来する項は

$$S_3 = (\partial_A B_{\mu\nu}) I_s^{\mu\nu(A)} + (\partial_A C_{\alpha\beta\gamma}) I_2^{\alpha\beta\gamma(A)} \quad (7.3.12)$$

である。field strength $H_{(3)}$, $F_{(4)}$ が (7.3.6) 式で与えられる形になるように、ここでポテンシャルを

$$B_{ij} = \frac{\mu}{6} \epsilon_{ijk} x_k, \quad C_{0ij} = \frac{\mu}{6} \epsilon_{ijk} x_k \quad (7.3.13)$$

と選ぼう。この表現を使って、[60] で与えられるカレントの具体形を用いると

$$S_3 = \mu \epsilon_{ijk} \left(J^{+ij(k)} + \dots \right) \\ J^{+ij(k)} = -\frac{1}{6R} \text{Tr} \left[i [X^i, X^j] X^k + \frac{i}{8} \Psi^\top \gamma^{ijk} \Psi \right] \quad (7.3.14)$$

であることが分かる。 \dots はより高次の項を表し、やはり $\alpha' \rightarrow 0$ の極限で 0 となる。従って、BMN 行列模型における fermionic な質量項と bosonic な 3 点相互作用項 (Myers 項) が出てくることが確認できる。

以上で、BMN 行列模型の全ての項が、超重力理論の十分に平坦に近い背景時空における D0-brane を考えることで再現されることが確認できた。この観点からすると、行列模型がいかなる補正をも受けないというのは驚くべきことに思える。なぜなら、IIA 型背景時空は原点から遠ざかるほど曲率が大きくなり、実際に $F^2 \geq 4$ では意味を成さなくなるからである。

7.4 古典的な超対称真空

BMN 行列模型がどのように構築されているかが分かったところで、古典的に得られる超対称な真空解について調べてみることにしよう。

7.4.1 作用と対称性

$SO(6) \times SO(3)$ 対称性があらわになる形で、作用を書き下してみる。

真空を議論する上で最も便利な形で、作用を書き直そう。そのためには $SO(6) \times SO(3)$ 対称性をあらわにできるようにするのがよい。

スカラー場については X^i ($i = 1, 2, 3$) と X^a ($a = 4, \dots, 9$) に分けられればよい。フェルミオンについては $\psi_{I\alpha}$ と表すことにしよう。 I は $SU(4) \sim SO(6)$ の基本表現の脚であり、 α は $SU(2) \sim SO(3)$ の基本表現の脚である。具体的には $SO(9) \rightarrow SO(6) \times SO(3)$ と分解するとき、スピノール表現を

$$\begin{aligned} 16 &\longrightarrow (4, 2) + (\bar{4}, \bar{2}) \\ \Psi &\longrightarrow \psi_{I\alpha}, \tilde{\psi}^{J\beta} \end{aligned} \quad (7.4.1)$$

と分ける。ここでスピノールに課せられている実条件より、

$$(\psi^\dagger)^{I\alpha} = \tilde{\psi}^{I\alpha} \quad (7.4.2)$$

という制限が付いていることに注意しよう。

作用の各項を分解していく上で、2つの $SU(4)$ の4表現の反対称積を $SO(6)$ ベクトルに関係付ける計量 g_{IJ}^a が必要になるので、ここで導入することにしよう。このとき、表現を

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_{I\alpha} \\ \epsilon_{\alpha\beta} \psi^{\dagger I\beta} \end{pmatrix}; \quad \gamma^a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \times g^a \\ 1 \times (g^a)^\dagger & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} -\sigma^i \times 1 & 0 \\ 0 & \sigma^i \times 1 \end{pmatrix} \quad (7.4.3)$$

と選ぶことにしよう。ここで、 σ^i は通常の Pauli 行列である。この表現において、Dirac 行列とフェルミオン Ψ は実にならないけれども、スピノール ψ は実条件に従っていて、16個の独立な実成分で表すことができることに注意しておこう。また、Dirac 行列は Clifford 代数を満たすように

$$g^a (g^b)^\dagger + g^b (g^a)^\dagger = 2\delta^{ab} \quad (7.4.4)$$

と規格化されているものとする。よって、作用 (7.1.2) においてフェルミオンの2次の項は

$$\begin{aligned} \frac{i}{2} \Psi^\dagger D_0 \Psi &\longrightarrow i \psi^{\dagger I\alpha} D_0 \psi_{I\alpha} \\ -\frac{i}{8} \Psi^\dagger \gamma^{123} \Psi &\longrightarrow -\frac{1}{4} \psi^{\dagger I\alpha} \psi_{I\alpha} \\ \frac{1}{2} \Psi^\dagger \gamma^i [X^i, \Psi] &\longrightarrow -\psi^{\dagger I\alpha} \sigma^i_{\alpha\beta} [X^i, \psi_{I\beta}] \\ \frac{1}{2} \Psi^\dagger \gamma^a [X^a, \Psi] &\longrightarrow \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta} \psi^{\dagger I\alpha} g_{IJ}^a [X^a, \psi^{\dagger I\beta}] - \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta} \psi_{\alpha I} (g^\dagger)^{IJ} [X^a, \psi_{\alpha J}] \end{aligned} \quad (7.4.5)$$

と書き直すことができる。

以上の結果を用いれば、Lagrangian は

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \text{Tr} &\left[\frac{1}{2R} D_0 X^i D_0 X^i + \frac{1}{2R} D_0 X^a D_0 X^a + i \psi^{\dagger I\alpha} D_0 \psi_{I\alpha} \right] \\ &+ R \text{Tr} \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\mu}{3R} \right)^2 (X^i)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\mu}{6R} \right)^2 (X^a)^2 - \frac{\mu}{4R} \psi^{\dagger I\alpha} \psi_{I\alpha} - \frac{i\mu}{3R} \epsilon_{ijk} X^i X^j X^k \right. \\ &\quad - \psi^{\dagger I\alpha} \sigma^i_{\alpha\beta} [X^i, \psi_{I\beta}] + \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta} \psi^{\dagger I\alpha} g_{IJ}^a [X^a, \psi^{\dagger I\beta}] - \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta} \psi_{\alpha I} (g^\dagger)^{IJ} [X^a, \psi_{\alpha J}] \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} [X^i, X^j]^2 + \frac{1}{4} [X^a, X^b]^2 + \frac{1}{2} [X^i, X^a]^2 \right] \end{aligned} \quad (7.4.6)$$

と表せることが理解できる。但し $l_P = 1$ とおいている。 l_P を回復するには、 R と $1/\mu$ が長さの次元を持っていることに注意すれば良い。

flat 時空の場合 (BFSS 行列模型) と比較すると、その違い (μ に依存する項) は2行目に現れている。これらは行列理論の変数 X, ψ の質量項と、M2-brane の charge の双極子モーメントを持つ存在 (giant graviton) を作る3次の相互作用項である。

理論の $U(N)$ 対称性のうち、 $U(1)$ 部分は残りの $SU(N)$ 部分と decouple する。

flat 時空の場合と同様に、理論の $U(1)$ 部分（重心の自由度）は $SU(N)$ 部分から decouple する。BMN 行列模型の場合、 $U(1)$ 部分は

- $SO(6)$ 方向の bosonic 振動子：質量 $\mu/6$
- $SO(3)$ 方向の bosonic 振動子：質量 $\mu/3$
- 8 個の fermionic 振動子：質量 $\mu/4$

の調和振動子の Hamiltonian で記述される。flat 時空の場合 ($\mu \rightarrow 0$) とは異なり、異なる偏極状態は異なる質量を持つことに注意しておこう。

BMN 行列模型の対称性代数は、かなり特殊な性質を持っている。

行列模型の超対称性代数は、付録 B に示した。flat 時空の場合と比較して特徴的なこととして、超対称電荷が Hamiltonian と交換しないこと

$$[H, q_{I\alpha}] = -\frac{\mu}{4}q_{I\alpha}, \quad [H, Q_{I\alpha}] = \frac{\mu}{12}Q_{I\alpha} \quad (7.4.7)$$

が挙げられる。従って、同じ多重項に属していても、超対称電荷を作用させて作られる異なる成分ならば、違うエネルギーを持つことがある。そして、そのエネルギーの違いは超対称性代数によって完全に決定されるということになるのである。

また、flat 時空の場合と違う性質として、角運動量を持った非零エネルギーの BPS 状態が存在できることも挙げておこう。実際、基底状態である $1/2$ BPS 状態の他に、 $1/4$, $3/16$, $1/8$, $1/16$ BPS 状態（順に 8, 6, 4, 2 個の超対称電荷を保存する状態）が存在するのである。この場合、回転生成子は中心電荷（central charge）にはならない。つまり、超対称生成子と交換しないのである。この結果、この代数の表現理論は通常のものとはかなり違った様子を示す。特に BPS 多重項の概念が変わってしまうのである。

flat 時空の場合と同じ点は多々あるが、特に重要なこととして

$$\{Q^{\dagger I\alpha}, Q_{J\beta}\} = 2\delta_J^I \delta_\beta^\alpha H - \frac{\mu}{3}\epsilon^{ijk}\sigma_\beta^\alpha \delta_J^I M^{ij} - \frac{i\mu}{6}\delta_\beta^\alpha (g^{ab})_J^I M^{ab} \quad (7.4.8)$$

より、 $\{Q^{\dagger I\alpha}, Q_{I\alpha}\} \propto H$ であるから、状態が完全に超対称であることと、状態のエネルギーが 0 であることは同値になっていることを挙げておこう。

7.4.2 古典的な超対称真空解

ポテンシャルの bosonic 部分は正定値な項の和で表せて

$$V = \frac{R}{2} \text{Tr} \left[\left(\frac{\mu}{3R} X^i + i\epsilon^{ijk} X^j X^k \right)^2 + \frac{1}{2} (i[X^a, X^b])^2 + (i[X^a, X^i])^2 + \left(\frac{\mu}{6R} \right)^2 (X^a)^2 \right] \quad (7.4.9)$$

となる。従って、超対称解は 4 つの項が全て 0 になるような解であることが分かる。最後の項は

$$X^a = 0 \quad (7.4.10)$$

のとき 0 になり、最初の項が 0 となるためには

$$X^i = \frac{\mu}{3R} J^i \quad (7.4.11)$$

でなくてはならない。ここで J^i は $SU(2)$ 代数の表現であり、 $[J^i, J^j] = i\epsilon^{ijk} J^k$ を満たす。

従って、 X は $N \times N$ の Hermite 行列であったことを思い出せば、古典的な超対称解は $SU(2)$ の N 次元表現でラベル付けされることが分かる。また、解の数は N の分割の個数で与えられることも理解できる。

geometry の観点から見ると、 $\{N_1, \dots, N_k\}$, $N = \sum_{i=1}^k N_i$ という分割でラベル付けされる解は、半径 $r_i \sim \frac{\mu}{6R} N_i$ の fuzzy な 2 次元球面の集まりに対応する。この fuzzy な 2 次元球面というのは

- ポテンシャルの 2 次と 4 次の項：球面を萎めようとする。
- ポテンシャルの 3 次の項：球面を膨らまそうとする。

というように、ポテンシャルの各項からの寄与が合わさった結果として、一定の半径を保って安定している状態である。これらの効果を全て合わせると、pp-wave 背景時空における M2-brane は光錐運動量に比例した半径で膨らむことになるのである。flat 背景時空の場合 [52] とは異なり、これらの解はいずれもエネルギーは 0 であり、古典的に安定である。

ここで面白いのは、古典的な真空状態が決まった枚数の M2-brane に対応していることである。BFSS 行列模型においては、M2-brane が 1 枚の状態と複数枚の状態を区別することに困難が伴うのであるが、BMN 行列模型においては（低エネルギーでは）そのような問題は起こらないのである。

7.4.3 古典的な真空の周りでの展開

古典的な真空の周りで作用を展開することを考えよう。つまり

$$X^i = \frac{\mu}{3R} J^i + Y^i \quad (7.4.12)$$

とするのである。 J^i は、注目している真空解に対応する $SU(2)$ 表現である。ここで、

$$Y^i \rightarrow \sqrt{\frac{R}{\mu}} Y^i, \quad X^a \rightarrow \sqrt{\frac{R}{\mu}} X^a, \quad t \rightarrow \frac{1}{\mu} t \quad (7.4.13)$$

とリスケールしよう。よって、以下ではエネルギーの単位は μ となる。

(7.4.12) 式を作用に代入して、リスケールを行うと、 $A_0 = 0$ ゲージを取れば

$$S = S_2^Y + S_2^X + S_2^\psi + S_3 + S_4 \quad (7.4.14)$$

となる。2 次の項（運動項と質量項）は

$$\begin{aligned} S_2^Y &= \text{Tr} \left[\frac{1}{2} (\dot{Y}^i)^2 - \frac{1}{2} \frac{1}{3^2} (Y^i + i\epsilon^{ijk} [J^j, Y^k])^2 \right] \\ S_2^X &= \text{Tr} \left[\frac{1}{2} (\dot{X}^a)^2 - \frac{1}{2} \frac{1}{3^2} \left(\frac{1}{4} (X^a)^2 - [J^i, X^a]^2 \right) \right] \\ S_2^\psi &= \text{Tr} \left[i\psi^\dagger \dot{\psi} - \frac{1}{4} \psi^\dagger \psi - \frac{1}{3} \sigma^i \psi^\dagger [J^i, \psi] \right] \end{aligned} \quad (7.4.15)$$

となる。3 次以上の項（相互作用項）は

$$\begin{aligned} S_3 &= \left(\frac{R}{\mu} \right)^{\frac{3}{2}} \text{Tr} \left[\frac{1}{3} [J^i, X^a] [Y^i, X^a] + \frac{1}{3} [J^i, Y^j] [Y^i, Y^j] - \frac{i}{3} \epsilon^{ijk} Y^i Y^j Y^k \right. \\ &\quad \left. - \psi^\dagger \sigma^i [Y^i, \psi] + \frac{1}{2} \epsilon \psi^\dagger \mathbf{g}^a [X^a, \psi^\dagger] - \frac{1}{2} \epsilon \psi (\mathbf{g}^\dagger)^a [X^a, \psi] \right] \\ S_4 &= \left(\frac{R}{\mu} \right)^3 \text{Tr} \left[\frac{1}{4} [Y^i, Y^j]^2 + \frac{1}{4} [X^a, X^b]^2 + \frac{1}{2} [Y^i, X^a]^2 \right] \end{aligned} \quad (7.4.16)$$

となる。

μ/R が非常に大きな領域においては、相互作用項は 2 次の項に比べて R/μ の冪乗で suppress されることが分かる。よって、古典的な真空の周りでの低エネルギー励起状態について調べるときは、 R/μ の摂動論を用いればよいことが理解できる。特に $\mu/R \rightarrow \infty$ の極限においては、理論は $SU(2)$ の N 次元表現でラベル付けさ

れる超選択セクター (superselection sector) に分離してしまうので、各セクターは bosonic と fermionic な調和振動子で全てを記述することができるのである。

従って次節では、この極限において得られる 2 次の理論について調べることにしよう。

7.5 large μ 極限の正確なスペクトル

N と R を固定した上で large μ 極限を取ると、様々な古典的真空が無限に高いエネルギー障壁で分離されてしまうので、それぞれを超選択則セクターとして取り扱うことができる。それぞれ分離されたセクターは、2 次の Hamiltonian で記述できる。

ここでは、作用における 2 次の項を対角化して large μ 極限におけるスペクトルを調べてみよう。

7.5.1 球面調和関数行列による展開

$N \times N$ 行列の組は $SU(2)$ の N^2 次元可約表現を構成する。この表現は既約表現に

$$N^2 = 1 \oplus 3 \oplus \cdots \oplus (2N - 1) \quad (7.5.1)$$

と分解できる。つまり、 $j = N - 1$ までのスピンに分けることができる。よって $N \times N$ 行列は

$$A = \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{m=-j}^j a_{jm} Y_{jm} \quad (7.5.2)$$

と展開できる。 Y_{jm} はスピン j の既約表現として変換する。Hermite 行列に関しては、実条件

$$a_{jm}^* = (-1)^m a_{j,-m} \quad (7.5.3)$$

が満たされなければならない。

球面調和関数行列のあらわな表現を得るためには、通常の球面調和関数を $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ を満たす x_i について対称な多項式で書き、さらに x_i を J_i に置き換えればよい。このようにして、スピン j の表現は j 個の J^i 行列で書き表せる。ここで添字は traceless な対称テンソルで縮約されることとなる。

その結果

$$Y_{00} = 1, \quad Y_{10} = \sqrt{\frac{12}{N^2 - 1}} J^3, \quad Y_{1,\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{6}{N^2 - 1}} J^\pm, \dots \quad (7.5.4)$$

が得られる (複号同順)。ここで $J^\pm = J^1 \pm iJ^2$ であり、規格化条件として

$$\text{Tr} [Y_{j'm'}^\dagger Y_{jm}] = N \delta_{j'j} \delta_{m'm} \quad (7.5.5)$$

を選んだ。この定義を用いれば、角運動量生成子の間の交換関係は

$$\begin{aligned} [J^3, Y_{jm}] &= m Y_{jm}, & [J^i, [J^i, Y_{jm}]] &= j(j+1) Y_{jm} \\ [J^\pm, Y_{jm}] &= \sqrt{(j \mp m)(j+1 \pm m)} Y_{j,m \pm 1} \end{aligned} \quad (7.5.6)$$

と表せる (複号同順)。

7.5.2 既約表現に対応する真空のスペクトル

まずは M2-brane が 1 枚の真空、 N 次元の $SU(2)$ 既約表現に対応する真空を考えよう。

$SO(6)$ 方向のボソンについて

古典解は $X_{\text{cl}}^a = 0$ であるから、作用 (7.4.15) より

$$X^a = X_{\text{cl}}^a + X^a = 0 + X^a \quad (7.5.7)$$

と展開すると、2 次のポテンシャルは

$$V^X = \frac{1}{2} \frac{1}{3^2} \text{Tr} \left[X^a \left(\frac{1}{4} X^a + [J^i, [J^i, X^a]] \right) \right] \quad (7.5.8)$$

となる。この場合、 $SU(2)$ の既約表現の基底において質量行列は対角になっているので、直ちに

$$X^a = \frac{1}{\sqrt{N}} x_{jm}^a Y_{jm} \quad (7.5.9)$$

であり、その固有値 (質量) は

$$M^2 = \left[\frac{1}{3} \left(j + \frac{1}{2} \right) \right]^2 \quad (7.5.10)$$

であることが分かる。それぞれ縮重度 (degeneracy) は 6 である。以上より、2 次の Lagrangian は

$$\mathcal{L} = \sum_{j=0}^{N-1} \left[\frac{1}{2} |\dot{x}_{jm}^a|^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{j + \frac{1}{2}}{3} \right)^2 |x_{jm}^a|^2 \right] \quad (7.5.11)$$

となる。ここで $m = -j, -j+1, \dots, j-1, j$ である。

$SO(3)$ 方向のボソンについて

古典解は $X_{\text{cl}}^i = \frac{\mu}{3R} J^i$ であるから、作用 (7.4.15) より

$$X^i = X_{\text{cl}}^i + Y^i = \frac{\mu}{3R} J^i + Y^i \quad (7.5.12)$$

と展開すると、2 次のポテンシャルは

$$V^Y = \frac{1}{2} \frac{1}{3^2} (Y^i + i\epsilon^{ijk} [J^j, Y^k])^2 \quad (7.5.13)$$

となる。固有値問題

$$Y^i + i\epsilon^{ijk} [J^j, Y^k] = \lambda Y^i \quad (7.5.14)$$

を解けば、質量固有値は $M^2 = (\frac{1}{3}\lambda)^2$ と求められる。

固有値と固有ベクトルを求めるために

$$Y^i = y_{jm}^i Y_{jm} \quad (7.5.15)$$

と書こう。添字について $i = +, -, 3$ として、各々の成分が満たす方程式を書き下すと

$$\begin{aligned} (\lambda + m)y_{j,m+1}^+ &= \sqrt{j(j+1) - m(m+1)} y_{jm}^3 \\ (\lambda - m)y_{j,m-1}^- &= -\sqrt{j(j+1) - m(m-1)} y_{jm}^3 \\ (\lambda - 1)y_{jm}^3 &= \frac{1}{2} \sqrt{j(j+1) - m(m+1)} y_{j,m+1}^+ - \frac{1}{2} \sqrt{j(j+1) - m(m-1)} y_{jm}^- \end{aligned} \quad (7.5.16)$$

となる。よって、 $m = -j-1, -j, \dots, j, j+1$ の各々について分かれた方程式を得ることができる。 $m = \pm j$ については、方程式のうち 1 つが両辺 0 となり、 $m = \pm(j+1)$ のときは 2 つが 0 となる。

3 番目の方程式において、 y^+ と y^- に最初の 2 つの方程式の表現を代入しよう。そうすると固有値に関する方程式は

$$\lambda(\lambda + j)(\lambda - (j+1)) = 0 \implies \lambda = 0, -j, j+1 \quad (7.5.17)$$

となる。よって、最初の 2 つの方程式を用いると、これらの 3 つの固有値に対応する固有状態を読み取ることができる。

$\lambda = 0$ に対応する固有状態

この固有状態は質量 $M = 0$ を持った振動子に対応する。このとき

$$Y^i = [J^i, Y_{jm}]; \quad 1 \leq j \leq N-1, \quad -j \leq m \leq j \quad (7.5.18)$$

となる。よって、合計で $N^2 - 1$ 個の零モードがあることが分かる。これらはゲージ軌道 (gauge orbit) 方向の揺らぎに対応していて、物理的な零モードには対応していない。このことを確認するためには、無限小のゲージ変換の下では

$$\frac{1}{3}J^i \longrightarrow \frac{1}{3}J^i + \frac{1}{3}i [J^i, \Lambda] \quad (7.5.19)$$

となることに注意すればよい。よって、 $Y^i = [J^i, \Lambda]$ という形の揺らぎはゲージ変換に対応していることが分かる。さらに $[J^i, Y_{00}] = 0$ であるから、(N 個ではなく) $N^2 - 1$ 個のゲージ軌道方向を持つことが分かる。

 $\lambda = -j$ に対応する固有状態

この固有状態は質量 $M = \frac{j}{3}$ を持った振動子に対応する。よって

$$\begin{aligned} Y^+ &= -\frac{\alpha_{j-1,m}}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{(j+m)(j+1+m)}{j(2j+1)}} Y_{j,m+1} \\ Y^- &= \frac{\alpha_{j-1,m}}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{(j-m)(j+1-m)}{j(2j+1)}} Y_{j,m-1} \\ Y^3 &= \frac{\alpha_{j-1,m}}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{(j+m)(j-m)}{j(2j+1)}} Y_{jm} \end{aligned} \quad (7.5.20)$$

となる。ここで $1 \leq j \leq N-1$, $-j+1 \leq m \leq j-1$ である。また実条件 $\alpha_{jm}^* = (-1)^m \alpha_{j,-m}$ を満たす。

 $\lambda = j+1$ に対応する固有状態

この固有状態は質量 $M = \frac{j+1}{3}$ を持った振動子に対応する。よって

$$\begin{aligned} Y^+ &= \frac{\beta_{j+1,m}}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{(j-m)(j+1-m)}{(j+1)(2j+1)}} Y_{j,m+1} \\ Y^- &= -\frac{\beta_{j+1,m}}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{(j+m)(j+1+m)}{(j+1)(2j+1)}} Y_{j,m-1} \\ Y^3 &= \frac{\beta_{j+1,m}}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{(j+1+m)(j+1-m)}{(j+1)(2j+1)}} Y_{jm} \end{aligned} \quad (7.5.21)$$

となる。ここで $0 \leq j \leq N-1$, $-j-1 \leq m \leq j+1$ である。また実条件 $\beta_{jm}^* = (-1)^m \beta_{j,-m}$ を満たす。

いま定義した α と β を用いると 2 次の Lagrangian の $SO(3)$ 部分は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^Y &= \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{m=-j+1}^{j-1} \left[\frac{1}{2} |\dot{\alpha}_{j-1,m}|^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{j}{3}\right)^2 |\alpha_{j-1,m}|^2 \right] + \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{m=-j-1}^{j+1} \left[\frac{1}{2} |\dot{\beta}_{j+1,m}|^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{j+1}{3}\right)^2 |\beta_{j+1,m}|^2 \right] \\ &= \sum_{j=0}^{N-2} \left[\frac{1}{2} |\dot{\alpha}_{jm}|^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{j+1}{3}\right)^2 |\alpha_{jm}|^2 \right] + \sum_{j=0}^N \left[\frac{1}{2} |\dot{\beta}_{jm}|^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{j}{3}\right)^2 |\beta_{jm}|^2 \right] \end{aligned} \quad (7.5.22)$$

となる。最後の表式では、通常通り $m = -j, \dots, j$ までを足し上げる。

フェルミオンについて

古典解は $\psi_{cl} = 0$ であるから、この周りで展開すると、2 次のフェルミオンポテンシャルは

$$V^\psi = \psi^\dagger \alpha \left(\frac{1}{4} \psi_\alpha + \frac{1}{3} \sigma_\alpha^{i\beta} [J^i, \psi_\beta] \right) \quad (7.5.23)$$

であることが分かる。式が煩雑になるのを避けるため $SU(4)$ の脚は隠した。このとき固有値に関する方程式は

$$\sigma_\alpha^{i\beta} [J^i, \psi_\beta] = \lambda \psi_\alpha \quad (7.5.24)$$

となる。このときフェルミオンの質量は

$$m = \left| \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \lambda \right| \quad (7.5.25)$$

となる。ここで

$$\psi_\alpha = \psi_\alpha^{jm} Y_{jm} \quad (7.5.26)$$

と展開して、それを固有値方程式に入れると

$$\begin{aligned} (\lambda - m) \psi_+^{jm} &= \sqrt{(j - m)(j + 1 + m)} \psi_-^{j, m+1} \\ (\lambda + m + 1) \psi_-^{j, m+1} &= \sqrt{(j - m)(j + 1 + m)} \psi_+^{jm} \end{aligned} \quad (7.5.27)$$

という方程式が得られる。ここで $SU(2)$ の脚の固有値は $+$ と $-$ でラベル付けした。これは σ^3 の固有値である。これらの方程式から

$$(\lambda + j + 1)(\lambda - j) = 0 \implies \lambda = -j - 1, j \quad (7.5.28)$$

が得られる。

$\lambda = -j - 1$ の場合

この場合、質量は $M = \frac{1}{3}(j + \frac{3}{4})$ である。固有状態は

$$\begin{aligned} \psi_+ &= \frac{\eta^{j+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}}}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{j+1+m}{2j+1}} Y_{jm} \\ \psi_- &= \frac{\eta^{j+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}}}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{j-m}{2j+1}} Y_{j, m+1} \end{aligned} \quad (7.5.29)$$

である。ここで $0 \leq j \leq N-1$, $-j-1 \leq m \leq j$ である。

$\lambda = j$ の場合

この場合、質量は $M = \frac{1}{3}(j + \frac{1}{4})$ である。固有状態は

$$\begin{aligned} \psi_+ &= -\frac{(\chi^\dagger)^{j-\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}}}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{j-m}{2j+1}} Y_{jm} \\ \psi_- &= \frac{(\chi^\dagger)^{j-\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}}}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{j+1+m}{2j+1}} Y_{j, m+1} \end{aligned} \quad (7.5.30)$$

である。ここで $1 \leq j \leq N-1$, $-j \leq m \leq j-1$ である。

いま定義した η と χ を用いると、2 次の Lagrangian の fermionic 部分は

$$\mathcal{L}^\psi = \sum_{j=\frac{1}{2}}^{N-\frac{3}{2}} \left[i \chi_{jm}^\dagger D_0 \chi_{jm} - \frac{1}{3} \left(j + \frac{3}{4} \right) \chi_{jm}^\dagger \chi_{jm} \right] + \sum_{j=\frac{1}{2}}^{N-\frac{1}{2}} \left[i \eta_{jm}^\dagger D_0 \eta_{jm} - \frac{1}{3} \left(j + \frac{1}{4} \right) \eta_{jm}^\dagger \eta_{jm} \right] \quad (7.5.31)$$

となる。同様に $-j \leq m \leq j$ となるように j の変数変換を行った。また、 m について和を取るものと了解する。

ここでは隠しているが、 η と χ はそれぞれ $SU(4)$ の fundamental な脚と antifundamental な脚を持っていることに注意しよう。

まとめ

以上の結果を表にまとめると、表 7.1 のようになる。

ボソンの質量の合計とフェルミオンの質量の合計は両方とも $\frac{2}{9}N(8N^2 + 1)$ で等しいことを確認しておこう。よって、真空状態の零点エネルギーは 0 となることが保証されている。

また、質量が N に依存していないことに注目しよう。 N はスピン j の上限を設定していて、またスピンは球面上のモードの波長と関係していることより、 N は短距離における cut-off の役目をしていることが理解できる。

特に、スペクトルは large N 極限で well-defined であることに注意しよう。この極限において、pp-wave 時空上の M2-brane の連続的な場の理論の 2 次の部分のスペクトルが再現されるはずであるから、これは良い結果である。

また有限の μ の場合は、摂動論はあるエネルギースケールより上では破綻してしまって、信用できないことに注意すべきである。

7.5.3 可約表現に対応する真空のスペクトル

一般の古典的な真空状態は、 $SU(2)$ の N 次元可約表現に対応する。これはブロック対角行列

$$X^i = \begin{pmatrix} J_1^i & & \\ & \ddots & \\ & & J_K^i \end{pmatrix} \quad (7.5.32)$$

で表すことができる。ここで J_l^i は $SU(2)$ の N_l 次元既約表現であり、 $N_1 + \dots + N_K = N$ を満たす。

これらの状態を扱うときには、

$$X_{kl}^i = \delta_{kl} J_l^i \quad (7.5.33)$$

として、 X^i がブロック対角になっていることをあらわに表現するのが便利である。ここで $k, l = 1, \dots, K$ であ

種類	ラベル	質量 / μ	スピン	$SO(6) \times SO(3)$ 表現	縮重度
$SO(6)$ ボソン	x_{jm}^a	$\frac{1}{6} + \frac{j}{3}$	$0 \leq j \leq N - 1$	$(6, 2j + 1)$	$6(2j + 1)$
$SO(3)$ ボソン	α_{jm}	$\frac{1}{3} + \frac{j}{3}$	$0 \leq j \leq N - 2$	$(1, 2j + 1)$	$(2j + 1)$
	β_{jm}	$\frac{j}{3}$	$1 \leq j \leq N$	$(1, 2j + 1)$	$(2j + 1)$
フェルミオン	χ_{jm}^I	$\frac{1}{4} + \frac{j}{3}$	$\frac{1}{2} \leq j \leq N - \frac{3}{2}$	$(\bar{4}, 2j + 1)$	$4(2j + 1)$
	$\eta_{I,jm}$	$\frac{1}{12} + \frac{j}{3}$	$\frac{1}{2} \leq j \leq N - \frac{1}{2}$	$(4, 2j + 1)$	$4(2j + 1)$

表 7.1: 既約表現に対応する真空の周りにおける振動子モードの質量

る。このとき、作用の 2 次の項 (7.4.15) は

$$\begin{aligned} V^X &= \frac{1}{2} \frac{1}{3^2} \text{Tr} \left[X_{kl}^{a\dagger} \left(\frac{1}{4} X_{kl}^a + J^i \circ (J^i \circ X_{kl}^a) \right) \right] \\ V^Y &= \frac{1}{2} \frac{1}{3^2} |Y_{kl}^i + i\epsilon^{ijm} J^j \circ Y_{kl}^m|^2 \\ V^\psi &= \psi_{kl}^{\dagger\alpha} \left(\frac{1}{4} \psi_{kl\alpha} + \frac{1}{3} \sigma_{\alpha}^i{}^\beta J^i \circ \psi_{kl\beta} \right) \end{aligned} \quad (7.5.34)$$

と表すことができる。ここで、演算子 \circ を

$$J^i \circ B_{kl} \equiv J_k^i B_{kl} - B_{kl} J_l^i \quad (7.5.35)$$

を定義した。

既約表現の場合を思い出すと、行列 X は 2 つの N 次元 $SU(2)$ 表現をテンソル積にしたものになっていて、 $1 \oplus 3 \oplus \dots \oplus (2N-1)$ 次元の表現に分解することができた。一方で、一般の長方形のブロック B_{kl} は N_k 次元表現と N_l 次元表現のテンソル積であり、これらを分解するとスピンの

$$\frac{1}{2} |N_k - N_l| \leq j \leq \frac{1}{2} (N_k + N_l) - 1 \quad (7.5.36)$$

の既約表現に分解されることになる。従って、例えば

$$X_{kl}^a = \sum (x_{kl}^a)_{jm} Y_{jm}^{N_k N_l} \quad (7.5.37)$$

と表すことができるのである。ここで Y は (7.5.5) 式の性質を持った $N_k \times N_l$ 行列であり、 J と J_3 の固有状態になっているものである。この分解を用いれば、既約表現の場合と同じように対角化することができる。

以上のようにすれば、一般の真空の振動子のスペクトルを求めることができる。その結果は、表 7.2 のようになる。

既約表現のときと同じように、 Y^i 行列から得られる質量 0 の振動子は非自明なゲージ軌道方向にそれぞれ対応していて、任意の Λ に対して

$$Y^i = [J^i, \Lambda] \quad (7.5.38)$$

という形を取ることが確認できる。非自明なゲージ軌道方向の数は、 N^2 から J^i と交換する行列の空間の次元を引いて求めることができ

$$N^2 - \sum_i M_i^2 \quad (7.5.39)$$

であることが分かる。 M_i は i 番目の既約表現の多重度 (multiplicity) を表す。

種類	ラベル	質量 / μ	スピン	$SO(6) \times SO(3)$ 表現
$SO(6)$ ボソン	$(x_{kl}^a)_{jm}$	$\frac{1}{6} + \frac{j}{3}$	$\frac{1}{2} N_k - N_l \leq j \leq \frac{1}{2} (N_k + N_l) - 1$	$(6, 2j + 1)$
$SO(3)$ ボソン	α_{kl}^{jm}	$\frac{1}{3} + \frac{j}{3}$	$\frac{1}{2} N_k - N_l - 1 \leq j \leq \frac{1}{2} (N_k + N_l) - 2$	$(1, 2j + 1)$
	β_{kl}^{jm}	$\frac{j}{3}$	$\frac{1}{2} N_k - N_l + 1 \leq j \leq \frac{1}{2} (N_k + N_l)$	$(1, 2j + 1)$
フェルミオン	$\chi_{kl}^{I,jm}$	$\frac{1}{4} + \frac{j}{3}$	$\frac{1}{2} N_k - N_l - \frac{1}{2} \leq j \leq \frac{1}{2} (N_k + N_l) - \frac{3}{2}$	$(\bar{4}, 2j + 1)$
	$\eta_{I,kl}^{jm}$	$\frac{1}{12} + \frac{j}{3}$	$\frac{1}{2} N_k - N_l + \frac{1}{2} \leq j \leq \frac{1}{2} (N_k + N_l) - \frac{1}{2}$	$(4, 2j + 1)$

表 7.2: 可約表現に対応する真空の周りにおける振動子モードの質量

7.5.4 物理的な状態

物理的な状態は $SU(N)$ 不変でなくてはならない。

large μ 極限においては、それぞれの古典解を超選択則セクターとして見ることができる。そして、それぞれのセクターの物理的なスペクトルは、振動子の生成演算子を Fock 空間の真空に任意個数だけ作用させて得られる。

唯一複雑なのは、Gauss の法則が満たされなければならないという条件である。つまり、先に $A_0 = 0$ というゲージ条件を取ったので、 A_0 の運動方程式について制限が課されることになるのである。この条件は $N^2 - 1$ 個あって

$$i [X^i, \Pi^i] + i [X^a, \Pi^a] + 2\psi_{I\alpha}\psi^{\dagger I\alpha} = 0 \quad (7.5.40)$$

と表せる。

対応する演算子は $SU(N)$ 変換の生成子になるように要請され、さらに量子的な拘束条件によって、この演算子を物理的な状態に作用させると消滅することが要請される。つまり、物理的な状態は $SU(N)$ 不変でなくてはならないということになる。

零モードは物理的な状態ではない。

この条件を $X^i = \frac{\mu}{3R} J^i$, $X^a = 0$, $\psi = 0$ の周りで展開すると

$$\left(\frac{\mu}{3R} i [J^i, \Pi^i] + i [Y^i, \Pi^i] + i [X^a, \Pi^a] + 2\psi_{I\alpha}\psi^{\dagger I\alpha} \right) |\psi\rangle = 0 \quad (7.5.41)$$

となる ($X^i = \frac{\mu}{3R} J^i + Y^i$)。

$\mu \rightarrow \infty$ の極限においては、最初の項が 0 になるかどうかで、これらの $N^2 - 1$ 個の拘束条件を 2 つのグループに分けることができる。規格化された $SO(3)$ 方向の振動子は、固有値方程式

$$\Pi^i + i\epsilon^{ijk} [J^j, \Pi^k] = \lambda \Pi^i \quad (7.5.42)$$

を満たす。この方程式と J^i の間の交換関係を取ることににより

$$\lambda [J^i, \Pi^i] = 0 \quad (7.5.43)$$

が得られる。従って、Gauss の法則による拘束条件の最初の項が 0 にならないのは、ゲージ軌道方向に対応する $Y^i = [J^i, \Lambda]$ 振動子の零モード ($\lambda = 0$) に関連した運動量に対してのみであることが分かる。すなわち、このような $N^2 - \sum M_i^2$ 個の拘束条件については (M_i は i 番目の $SU(2)$ 既約表現の縮重度) large N 極限において最初の項以外は全て無視することができるのである。

このとき拘束条件は、波動方程式がゲージ軌道方向に対応する座標に依存しないことを意味している。つまり、零モードは物理的な状態にはならないのである。

物理的な状態は $\prod_i U(M_i) (\subset SU(N))$ 不変であることが分かる。

残りの拘束条件は $\sum M_i^2 - 1$ 個である。この数は、 $SU(N)$ の中で真空状態が不変となる部分群の生成子の数と等しいことに注意しよう。これらの拘束条件は、この部分群の下で物理的な状態が不変であることを要請しているのである。 N_i 次元既約表現を M_i 個集めたものに対応する真空において、破れない対称群は $U(M_1) \times \cdots \times U(M_n)$ である。 $U(1)$ に関しては拘束条件は自明に満たされるので、ここに $U(1)$ 因子が含まれてもよいことを確認しておこう。

表 7.2 より、あるブロックに対応する振動子のスペクトルは、ブロックを定義する 2 つの表現の次元のみに依存していることが分かる。従って、 N_i, N_j 次元既約表現の組に関して、 $M_i M_j$ 個の同じスペクトルが得られることになる。これによって、 $U(M_i) \times U(M_j)$ の bifundamental 表現の行列が作られるのである。但し、 $N_i = N_j$ の場合は $U(M_i)$ の随伴表現となる。

従って、Gauss の法則の拘束条件を満たす状態は、生成演算子行列から作られる $U(M_1) \times \cdots \times U(M_N)$ 不変なものであるということになる。以上より、一般の物理的な状態は Fock 空間の真空に生成演算子行列の積の trace を任意個数だけ作用させて得られることが分かった。

以上で、 $\mu \rightarrow \infty$ 極限における行列模型の物理的な状態を完全に区別することができた。

7.5.5 BPS 状態

既に述べたように、行列模型の超対称性代数は特殊なので、16 個の超対称性の一部を保存したまま角運動量を持つ状態が存在することができる。これらの状態は演算子 Q によって生成される。それでは、large μ 極限の物理的な状態の中でどれが BPS 状態なのかを調べてみることにしよう。

Q の満たす反交換関係を、 $SO(9)$ 対称性があらわとなる記法で書くと (付録 B)

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = 2\delta_{\alpha\beta}H - \frac{\mu}{3}(\gamma^{123}\gamma^{ij})_{\alpha\beta}M^{ij} + \frac{\mu}{6}(\gamma^{123}\gamma^{ab})_{\alpha\beta}M^{ab} \quad (7.5.44)$$

となる。状態にラベル付けをするために、 $SO(3) \times SO(6)$ 代数における Cartan 生成子 $M^{12}, M^{45}, M^{67}, M^{89}$ の固有値を使うことにしよう。それぞれの Cartan 生成子に結合する γ 行列はお互いに交換するので、それらは

$$\begin{aligned} (\gamma^{12312})\gamma^3 &= \sigma^3 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1, & \gamma^{12345} &= 1 \otimes \sigma^3 \otimes 1 \otimes 1, \\ \gamma^{12367} &= 1 \otimes 1 \otimes \sigma^3 \otimes 1, & \gamma^{12389} &= -1 \otimes \sigma^3 \otimes \sigma^3 \otimes 1 \end{aligned} \quad (7.5.45)$$

と表現することができる。このとき

$$\gamma^{12345}\gamma^{12367}\gamma^{12389} = -\gamma^{123456789} = -1 \quad (7.5.46)$$

を満たすことに注意しておこう。

非自明な BPS 状態は角運動量が 0 でないことが特徴である。このことは、非自明な $SO(3) \times SO(6)$ 表現を持っていることを意味している。この $SO(3) \times SO(6)$ 多重項に関して、全ての非 Cartan 生成子が $\langle M^{AB} \rangle = 0$ を満たすような、唯一つの最高ウェイト状態 $|\psi\rangle$ が存在する。よって、表現 (7.5.45) を用いれば、最高ウェイト状態 $|\psi\rangle$ に対する (7.5.44) の期待値は

$$\langle \psi | \{Q_\alpha, Q_\beta\} | \psi \rangle = 2\delta_{\alpha\beta}\Delta_\beta \quad (7.5.47)$$

となることが分かる。ここで Δ_α は

$$\Delta = H + \epsilon_1 \frac{\mu}{3} M^{12} + \epsilon_2 \frac{\mu}{6} M^{45} + \epsilon_3 \frac{\mu}{6} M^{67} - \epsilon_2 \epsilon_3 \frac{\mu}{6} M^{89} \quad (7.5.48)$$

の 16 個の対角成分を表している。 $\epsilon_i = \pm 1$ は独立して選べる。最高ウェイト BPS 状態はこれらの固有値のいくつか 0 になるものである。

以上の議論を用いて表 7.2 を調べることにより、BPS 状態を全て書き出すことができる。振動子 $x, \alpha, \beta, \chi, \eta$ に関して

$$\frac{12}{\mu} \left(H, \frac{\mu}{3} M^{12}, \frac{\mu}{6} M^{45}, \frac{\mu}{6} M^{67}, \frac{\mu}{6} M^{89} \right) \quad (7.5.49)$$

の固有値はそれぞれ

- $\beta_{jm} : (4j, 4m, 0, 0, 0)$
- $\alpha_{jm} : (4j + 4, 4m, 0, 0, 0)$
- $x_{jm} : (4j + 2, 4m, \pm 2, 0, 0), (4j + 2, 4m, 0, \pm 2, 0), (4j + 2, 4m, 0, 0, \pm 2)$
- $\chi_{jm} : (4j + 3, 4m, 1, 1, 1), (4j + 3, 4m, 1, -1, -1), (4j + 3, 4m, -1, 1, -1), (4j + 3, 4m, -1, -1, 1)$
- $\eta_{jm} : (4j + 1, 4m, -1, -1, -1), (4j + 1, 4m, 1, 1, -1), (4j + 1, 4m, 1, -1, 1), (4j + 1, 4m, -1, 1, 1)$

である。よって、 $\{Q, Q\}$ 固有値はこれらのベクトルに

$$\frac{\mu}{12} (1, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, -\epsilon_2\epsilon_3) \quad (7.5.50)$$

をかけて求めることができる。こうして計算した結果が 0 であれば、その振動子に対応する状態は $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ に対応する超対称電荷の組の下で不変であることになる。また、この内積が常に 0 以上であり、0 となるのは $m = \pm j$ のときだけであることが、あらわな計算から確認することができる。内積が 0 以上であることは BPS 条件から保証されている。

以上のような計算を行うと、 $\beta, \eta, x, \chi, \alpha$ の振動子はそれぞれ 4, 3, 2, 1, 0 個の超対称電荷の組と交換することが確認できる。但し、 x_{00} モードは例外的であり、4 個の超対称電荷の組と交換する。

それぞれの超対称電荷を保存する振動子は表 7.3 にまとめた。但し、フェルミオン振動子 η, χ については (M^{45}, M^{67}, M^{89}) の固有値の符号でラベル付けしてある。また、 $\epsilon_1 = -1$ に対応する超対称電荷と交換する演算子が省略されているが、この表において単に $m = j$ を $m = -j$ と書き換えたものである。

全ての量子数は加算的 (additive) であるから、表 7.3 において横 1 行に並んだ演算子の任意の線形結合で作られた状態であれば、対応する超対称電荷の下で不変になる。従って、このような線形結合を Fock 空間の真空に作用させることにより、理論に含まれる全ての BPS 状態を構成することができることが分かる。実際、表 7.3 において k 行に現れている演算子のみで作られた状態であれば、 $2k$ 個の超対称電荷を保存することが分かる。例えば、 β に対応する生成演算子を b とすると

$$\prod_j (b_{jj}^\dagger)^{n_j} |0\rangle \quad (7.5.51)$$

は 8 個の超対称電荷を保存する状態 (1/4 BPS 状態) であることになる。

7.6 超対称性代数について

以上では BMN 行列模型のスペクトルについて調べてきた。これは理論の $U(1)$ 部分に

超対称性代数について

BMN 行列模型の超対称性代数に注目しよう (付録 B)。この超対称性代数は「基本古典超対称 Lie 代数」の条件、すなわち

- 代数 G が単純 (simple) であること
- bosonic な部分代数が reductive であること
- G 上に縮退せず (non-degenerate) 不変な双線形形式 (bilinear form) があること

を全て満たす [61]。多くの例外超対称性代数と同じように、bosonic な単純 Lie 代数に関しては、いくつかの無限列になる。これらの超対称性代数の中で、ここで注目したい bosonic 部分代数

$$SO(6) \times SO(3) \times U(1)_H \sim SU(4) \times SU(2) \times U(1)_H \quad (7.6.1)$$

$(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$	β	η			x			χ
(+, +, +)	β_{jj}	η_{jj}^{---}	η_{jj}^{-++}	η_{jj}^{+--}	$(x^4 - ix^5)_{jj}$	$(x^6 - ix^7)_{jj}$	$(x^8 + ix^9)_{jj}$	χ_{jj}^{--+}
(+, +, -)	β_{jj}	η_{jj}^{---}	η_{jj}^{-++}	η_{jj}^{+-}	$(x^4 - ix^5)_{jj}$	$(x^6 + ix^7)_{jj}$	$(x^8 - ix^9)_{jj}$	χ_{jj}^{+-}
(+, -, +)	β_{jj}	η_{jj}^{---}	η_{jj}^{+-}	η_{jj}^{++}	$(x^4 + ix^5)_{jj}$	$(x^6 - ix^7)_{jj}$	$(x^8 - ix^9)_{jj}$	χ_{jj}^{+-}
(+, -, -)	β_{jj}	η_{jj}^{+-}	η_{jj}^{++}	η_{jj}^{+-}	$(x^4 + ix^5)_{jj}$	$(x^6 + ix^7)_{jj}$	$(x^8 + ix^9)_{jj}$	χ_{jj}^{++}

表 7.3: 超対称電荷 $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ と交換する振動子 β, η, x, ξ

つまり $A_{3,1}$ 代数を持つ群は、コンパクト型 (compact form) が $SU(4|2)$ として知られているものである。BMN 行列模型においては Hamiltonian が非コンパクトな $U(1)$ 生成子に対応することが気になるが、表現理論 (representation theory) を議論する上では気にしなくて良いのである。

従って、理論のパラメータ N, μ がどのような値を取ろうとも、前節までに求めてきた BMN 行列模型のスペクトルは、 $SU(4|2)$ の (すぐ後で示すように、有限次元の) 表現に属さなくてはならないということになる。特に、Hamiltonian H は $SU(4|2)$ 生成子に含まれているのであるから、 N と μ の値が決まっているとき、状態のエネルギースペクトルはどのような $SU(4|2)$ 表現が現れているかによって決まってしまうのである。

また、後の議論の結果として、ある表現に対応する状態のエネルギーは、同じ $SU(4) \times SU(2)$ 表現に対応する異なるエネルギーを持つという nearby 状態が存在するときに限って、 μ の関数として変化することができることが分かる。

物理的状态の表現には、typical 表現と atypical 表現がある。

すぐ後で、物理的に許容される $SU(4|2)$ 表現は 2 つのタイプ (typical 表現と atypical 表現) に分類されることを示す。

typical 表現は、エネルギー固有値のみが異なる表現の 1 パラメータ族 (family) に属するものである。従って、typical 表現に対応する状態は μ の関数としてこの 1 パラメータの軌跡を行ったり来たりして、そのエネルギーはこのパラメータの関数として変化する。

一方、atypical 表現は、対応する状態が nearby 状態を持たないようなものである。よって、この意味で atypical 表現は孤立している。従って、atypical 表現に対応する物理的状态のエネルギーは、 μ の値が変わっても変化しないのである。例外として、2 つの atypical 表現が結合して typical 表現になり、その typical 表現に対する nearby 表現に移るということは起こり得る。これに関しては、後で詳しく議論することにしよう。

$SU(4|2)$ の表現理論を理解して、さらにスペクトルが完全に知られている $\mu = \infty$ の場合に現れる表現を正確に調べれば、 $\mu = \infty$ から離れてもエネルギーが不変になる状態の無限列が調べられる。これが達成できれば、摂動論が使えなくなる μ が小さい領域や、pp-wave 時空上の M 理論が定義される large N 極限においても、BMN 行列模型のスペクトルを知ることができるのである。

7.7 $SU(4|2)$ の表現

それでは、 $SU(4|2)$ の表現理論において、BMN 行列模型に関係した様々な側面を見ていこう。

$SU(4|2)$ 代数は、 $U(1)$ 生成子 (この場合はエネルギー $H = P^+$) が特定の固有値を持つ部分空間に分解することができる。

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 \oplus \mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{G}_{-1} \quad (7.7.1)$$

ここで \mathcal{G}_0 は bosonic な部分代数 $\{M^{ab}, M^{ij}, H\}$ (これらは H と交換する) $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_{-1}$ は fermionic な部分代数 $\{Q_{I\alpha}\}$ と $\{Q^{\dagger I\alpha}\}$ を表す。これらの H 固有値は $\pm\mu/12$ である。

全ての $SU(4|2)$ 表現は、エネルギーでラベル付けされた $SU(4) \times SU(2)$ の既約表現に分類できる。ある状態に \mathcal{G}_1 や \mathcal{G}_{-1} に含まれる fermionic な生成子を作用させると、よりエネルギーが高い状態や低い状態が得られる。但し $\{Q_{I\alpha}, Q_{J\beta}\} = 0$ という関係があるので、物理的状态の個数は無限ではなく有限次元の表現に属する。

具体的にやってみよう。もし $|\psi_i\rangle$ が $SU(4) \times SU(2)$ のある表現に対応する状態であれば、状態

$$|\psi_i; \{\epsilon_j, \tilde{\epsilon}_k\}\rangle \equiv (Q_1^\dagger)^{\epsilon_1} \cdots (Q_8^\dagger)^{\epsilon_8} (Q_1)^{\tilde{\epsilon}_1} \cdots (Q_8)^{\tilde{\epsilon}_8} |\psi_i\rangle; \quad \epsilon_j, \tilde{\epsilon}_j = 0, 1 \quad (7.7.2)$$

は $SU(4) \times SU(2)$ 表現に対応する状態の完全な基底となる。実際、代数の交換関係を用いて、一番左に Q^\dagger を、一番右に bosonic 生成子を、その間に Q を持つてくることにすれば、 $|\psi_i\rangle$ に作用する $SU(4|2)$ 生成子の任意の積を、(7.7.2) 式の形に書き直すことができる。ここで、 $|\psi_i\rangle$ に作用している bosonic 生成子は単に線形結合 $c_{ij}|\psi_j\rangle$ を与えることになる。

物理的な要請として、行列模型のスペクトルに現れる表現は有限次元であるだけでなく、全ての状態が正のエネルギーを持ち、表現はユニタリーにでき（正定値の内積を持つ）なければならない。従って、以下ではこのような条件を満たす状態のみに注目する。

7.7.1 最高ウェイト表現

単純 Lie 代数と同じようにして、BMN 行列模型の超対称性代数に関する表現を構築していこう。

表現を構成して、最高ウェイト状態を定義する。

まず、 \mathcal{G}_0 に属する bosonic 生成子のうち、互いに交換する生成子の最大の集まりを選び出す。そして、それらの bosonic 生成子を H_i と書き表すことにする。つまり、Cartan 部分代数を構成する。

次に、残った bosonic と fermionic 生成子を用いて適当に線形結合を作ることにより、 H_i の固有ベクトルを構成する。そして、その固有値をルートと呼ぶ。さらにルートを「正」と「負」に分けて、正ルートを持つ生成子と H_i を合わせると最大の部分代数を構成することができる。

正ルートのうち、他の正ルートの線形結合で表せないものは「単純」正ルートと呼ばれる。この超対称性代数においては 5 つの「単純」正ルートがあり、そのうちの 3 つは $SU(4)$ 部分群の単純正ルートに対応して、1 つは $SU(2)$ の単純正ルートに対応することが確認できる。残りの 1 つは fermionic 生成子である。

ここでは、Dynkin 基底を取って議論を行うことにしよう。このとき、各々の単純正ルート α_i に対して、ルート α_i と $-\alpha_i$ を持つ生成子 E_i と F_i は

$$[H_i, H_j] = 0, \quad [E_i, F_j] = H_i \delta_{ij}, \quad [H_i, E_j] = a_{ij} E_j, \quad [H_i, F_j] = -a_{ij} F_j \quad (7.7.3)$$

を満たす。ここで Cartan 行列 (a_{ij}) は

$$a = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & -1 & 0 & 1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (7.7.4)$$

で与えられるものである。この Cartan 行列と関連付けられた Kac-Dynkin 図は図 7.1 に示した。左から 4 個目のノード (node) が fermionic 単純正ルートに対応している。一般に i 番目と j 番目のノードは $|a_{ij} a_{ji}|$ 本の線で繋がっている。生成子 H_1, H_2, H_3 は Dynkin 基底において $SU(4)$ の Cartan 部分代数であり、生成子 H_5 は $SU(2)$ の Cartan 生成子である。このことに対応して、Kac-Dynkin 図の左 3 つのノードは $SU(4)$ の Dynkin 図になっており、一番右のノードは $SU(2)$ の Dynkin 図になっていることが確認できる。

Dynkin 基底において、有限次元表現を求めることは簡単である。通常通り、基底の成分が Cartan 部分代数の固有ベクトルになるように、表現に属する状態の基底を選べばよいのである。この固有ベクトルが持つ固有値をウェイトと呼ぶ。全ての有限次元表現に対して、最高ウェイト Λ を持つ唯一の状態が存在する。これは、どの正ルートを作用させても消滅してしまう状態である。

Dynkin 基底において、この最高ウェイトを

$$\Lambda = (a_1, a_2, a_3 | a_4 | a_5) \quad (7.7.5)$$



図 7.1: BMN 行列模型の超対称性代数に関する Kac-Dynkin 図

と表そう。有限次元表現は、 a_1, a_2, a_3, a_5 が非負の整数である場合に対応している。但し、 a_4 は任意の実数であり。逆に、このような最高ウェイトの一つ一つに対応して、唯一つの有限次元既約表現が存在するのである。

実際に、最高ウェイト状態に bosonic 生成子を作用させることにより、 $SU(4) \times SU(2)$ の既約表現 $V_0(\Lambda)$ を得ることができる。この既約表現は、 $SU(4)$ Dynkin ラベル (a_1, a_2, a_3) と $SU(2)$ Dynkin ラベル a_5 でラベル付けされるものである。このとき、エネルギー固有値を求めると

$$h \equiv \frac{H}{\mu} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4}a_1 + \frac{1}{2}a_2 + \frac{3}{4}a_3 + a_4 - \frac{1}{2}a_5 \right) \quad (7.7.6)$$

となる。超対称性代数より、bosonic 生成子は全て H と交換することに注意しておこう。

$SU(4|2)$ に含まれる残りの状態は、既約表現これらの状態に負ルートに対応する fermionic 生成子を作用させれば得られる。該当する fermionic 生成子は \mathcal{G}_1 に属している $Q_{I\alpha}$ であり、これらは全て正のエネルギー $h = 1/12$ を持っている。従って、最高ウェイト表現 $V_0(\Lambda)$ は常に唯一つの既約表現であり、 $SU(4|2)$ 多重項全体の中の $SU(4) \times SU(2)$ 表現において、最低エネルギーを持つ状態に対応していることが分かる。

以上より、最高ウェイト表現の状態を $|\psi_i\rangle$ と書き表すことにすると、 $SU(4|2)$ 表現全体の基底は

$$|\psi_i; \{\epsilon_j\}\rangle \equiv (Q_1)^{\epsilon_1} \cdots (Q_8)^{\epsilon_8} |\psi_i\rangle, \quad \epsilon_j = 0, 1 \quad (7.7.7)$$

与えられることが分かる。

これらの状態が全て非零で独立であれば、この表現は “typical” であり、そうでなければ “atypical” であると言われる。最高ウェイト $\Lambda = (a_1, a_2, a_3|a_4|a_5)$ で表現すれば、表現が atypical であることと

$$\begin{aligned} a_4 \in \{a_5 + 1, a_5 - a_3, a_5 - a_3 - a_2 - 1, a_5 - a_3 - a_2 - a_1 - 2\} \\ \cup \{0, -a_3 - 1, -a_3 - a_2 - 2, -a_3 - a_2 - a_1 - 3\} \end{aligned} \quad (7.7.8)$$

は同値である [61]。もし、 a_4 が右辺の 2 つの条件を共に満たす ($\cup \rightarrow \cap$) 場合は、特に “doubly atypical” と呼ばれる表現であり、さらなる特徴を持っている。これについては後で詳しく議論する。

typical 表現については、($Q_{I\alpha}$ が 8 成分あるのでどれを最高ウェイト状態にかけるかによって) 9 個の等間隔なエネルギーレベルを持った $SU(4) \times SU(2)$ 表現を持っている。よって、完全な表現の次元は

$$\dim V(\Lambda) = 2^8 \dim V_0(\Lambda) \quad (7.7.9)$$

となる。atypical 表現は常に 9 個よりも小さいエネルギーレベルしかないので、表現の次元も typical よりは小さくなる。

物理的に許容される既約表現はさらに制限される。

以下の議論では、これらの有限次元既約表現の中でユニタリー性と正のエネルギーを持ったものだけを扱うことにしたい。ここで、表現をユニタリー化することが可能であるための条件を最高ウェイトで表すと

$$\begin{aligned} a_4 \in [a_5 + 1, \infty), \quad a_5 \geq 1 \\ a_4 \in \{0\} \cup [1, \infty), \quad a_5 = 0 \end{aligned} \quad (7.7.10)$$

となることが知られている [62]。つまり、最低エネルギーを持つ $SU(4) \times SU(2)$ 既約表現が与えられたとき、その既約表現が含まれた $SU(4|2)$ 表現の中で、atypical 表現のうち最高エネルギーを持つものと、それ以上のエネルギーを持つ表現は、全てユニタリー化が可能である。さらに、最低エネルギーを持つ $SU(4) \times SU(2)$ 既約表現が自明な $SU(2)$ 部分を持つ ($a_5 = 0$) 場合には、さらに低いエネルギーを持った atypical 表現でユニタリー化可能なものが存在する ($a_4 = 0$)。

以上の結果をまとめると、物理的に許容される表現は、最高ウェイト $\Lambda = (a_1, a_2, a_3|a_4|a_5)$ において a_1, a_2, a_3, a_5 が非負整数であり、 a_4 が (7.7.10) 式を満たすものである。

7.7.2 テンソル表現と Young 超図

通常の Lie 代数の場合、あらゆる有限次元表現はある基本表現のテンソル積として得られる。しかし超対称性代数の場合には、これは必ずしも成り立たない。なぜなら、表現のラベルに連続パラメータ（今の場合なら a_4 ）が含まれているからである。しかしながら、テンソル表現は BMN 行列模型のスペクトルの解析において重要な役目を果たすので、ここで調べておくことにしよう。

基本表現を書き表すために、超対称性代数 $SU(4|2)$ は

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} A & \theta \\ \theta^\dagger & B \end{pmatrix} \quad (7.7.11)$$

という形の行列生成子で表現できることに注目しよう。ここで A と B は 4×4 , 2×2 の Hermite 行列であり、 $\text{Tr}A = \text{Tr}B$ を満たす。また、 θ は 4×2 の複素 Grassmann 数の行列であり、生成子 $Q_{I\alpha}$ の任意の線形結合で表される。よって、この行列が作用するベクトルを用いて、基本表現を定義することができる。

そのようなベクトルを ϕ_A と書こう。ここで添字 A は、 $SU(4)$ の基本表現の脚 I と、 $SU(2)$ の基本表現の脚 α をまとめて表したものである。つまり

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_I \\ \phi_\alpha \end{pmatrix} \quad (7.7.12)$$

である。 ϕ は \mathcal{H} が作用して変換するのであるから、 ϕ_I と ϕ_α は fermionic 生成子が作用して互いに入れ替わることになる。従って、 ϕ_I と ϕ_α は異なる統計性を持っていなければならないことが分かる。以下の議論では、 ϕ_I を bosonic、 ϕ_α を fermionic とすることしよう。もちろん逆に選んでも、同等な表現の組を得ることができる。

この表現に対応する最高ウェイトを決定するために、Dynkin 基底において Cartan 生成子を行列の形で表すことにすると

$$\begin{aligned} H_1 &= \text{diag.} (1, -1, 0, 0, 0, 0) \\ H_2 &= \text{diag.} (0, 1, -1, 0, 0, 0) \\ H_3 &= \text{diag.} (0, 0, 1, -1, 0, 0) \\ H_4 &= \text{diag.} (0, 0, 0, 1, 1, 0) \\ H_5 &= \text{diag.} (0, 0, 0, 0, 1, -1) \end{aligned} \quad (7.7.13)$$

となる。よって、 $U(1)$ 生成子の固有値であるエネルギーは (7.7.6) 式より

$$h = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4}H_1 + \frac{1}{2}H_2 + \frac{3}{4}H_3 + H_4 - \frac{1}{2}H_5 \right) = \text{diag.} \left(\frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6} \right) \quad (7.7.14)$$

となることが分かる。一方、 $SU(4)$ と $SU(2)$ の部分代数はそれぞれ、左上と右下のブロック A , B における traceless 生成子に対応する。bosonic 部分代数 $SU(4) \times SU(2) \times U(1)_H$ の下では、基本表現は

- $(4, 1) = (1, 0, 0) \times (0)$ 表現でエネルギーが $h = 1/12$
- $(1, 2) = (0, 0, 0) \times (1)$ 表現でエネルギーが $h = 1/6$

に分かれる。それぞれ $SU(4) \times SU(2)$ を表している。前者がより低エネルギーであるから、これが最高エネルギー表現 V_0 になっている。よって、すぐに $(a_1, a_2, a_3) = (1, 0, 0)$, $a_5 = 0$ と求めることができる。さらに、 $h = 1/12$ を (7.7.6) 式に代入することにより、 $a_4 = 0$ と求められる。従って、基本表現は

$$\Lambda = (1, 0, 0|0|0) \quad (7.7.15)$$

である。高次のテンソル表現は $SU(N)$ の場合と同じように、添字 $A = (I, \alpha)$ を複数個並べて対称化したものを考えることによって、得ることができる。

物理的状態の表現には、反基本表現の脚は含まれない。

$SU(N)$ の場合と同じように、基本表現の複素共役を取ることで、反基本表現を得ることができるはずである。そして、その最高ウェイトは $(0, 0, 0|0|1)$ であることが予想される。ただ、 $SU(N)$ の場合と異なるのは、反基本表現が基本表現のテンソル積から得ることはできないという点である。なぜなら、 $SU(N)$ における ϵ テンソルに対応する不変テンソルが、この場合には存在しないからである。従って、 $SU(4|2)$ の最も一般的なテンソル表現を得るには、基本表現と反基本表現の脚を両方とも含まなくてはならない。

しかしながら、テンソル表現のうち反基本表現の脚を含むものはいずれも、負のエネルギーを含むか、ユニタリ化不可能であることが分かっている。従って、このようなテンソル表現については、以降では考えない。従って、以降でテンソル表現というときには、基本表現の脚のみを持ったテンソル表現を意味するものとする。

$SU(4|2)$ テンソル表現は $SU(4)$, $SU(2)$ テンソル表現の組み合わせで表される。

テンソル表現の脚を対称にするための方法はそれぞれ、置換群の表現でラベル付けすることができる。よって、 $SU(4|2)$ のテンソル表現も Young 図でラベル付けできることが分かる。これを Young 超図 (supertableau) と呼ぼう。 $SU(4)$, $SU(2)$ 部分群を表現するために通常の Young 図を用いることがあるので、これらと Young 超図を区別するために、箱の 1 つ 1 つに斜線を引くこととしよう。

例えば、2 つの反対称化した超脚 (super-index) を持つもの $\phi_{[AB]}$ は



という Young 超図で表される。 $SU(4|2)$ のテンソル表現を $SU(4) \times SU(2)$ 表現に分解するのは、超脚 A_i を $SU(4)$ と $SU(2)$ のどちらの基本表現の脚に割り当てるかということに対応する。そして、分解された $SU(4) \times SU(2)$ 既約表現のエネルギーは

$$h = \frac{1}{12}n_4 + \frac{1}{6}n_2 \quad (7.7.16)$$

で与えられる。ここで n_4 と n_2 はそれぞれ $SU(4)$ と $SU(2)$ の脚の数である。例えば、テンソル $\phi_{[AB]}$ は $SU(4) \times SU(2)$ テンソル

- $\phi_{[IJ]} : (n_4, n_2) = (2, 0)$, エネルギー $h = 1/6$
- $\phi_{I\alpha} : (n_4, n_2) = (1, 1)$, エネルギー $h = 1/4$
- $\phi_{(\alpha\beta)} : (n_4, n_2) = (0, 2)$, エネルギー $h = 1/3$

に分解することができる。ここで $SU(2)$ の脚は fermionic であるから、 AB を反対称化することは $\alpha\beta$ を対称化することに相当するので、注意が必要である。この分解を Young 図で表すと

$$\begin{array}{|c|} \hline \diagup \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \diagdown \\ \hline \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}, 1 \right)_{\frac{1}{6}} + \left(\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \right)_{\frac{1}{4}} + \left(1, \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \right)_{\frac{1}{3}} \quad (7.7.17)$$

となる。より一般的な $SU(4) \times SU(2)$ 表現の $SU(4) \times SU(2)$ 表現への分解も、同じように Young 図で表せば効率的に行うことができる。

許容される Young 超図は 3 列目の箱が 4 個以下のものである。

$SU(4)$ と $SU(2)$ の Young 図の形が受ける制限が、 $SU(4|2)$ の Young 超図が受ける制限となる。 $SU(N)$ の場合、反対称化された脚を N 個よりも多く持つことはできないことを思い出そう。なぜなら、基本表現の各脚は N 個しか値を取りえないからだ。従って、 $SU(N)$ の Young 図の高さの最大値は N ということになる。さらに、 N 個の反対称化された脚は不変 ϵ テンソルと縮約されてスカラーになってしまうから、Young 図において N 個の箱が並ぶ列 (column) は消すことができる。

$SU(4|2)$ の Young 超図に課せられる条件は、許容される $SU(4)$ と $SU(2)$ の Young 図に分解できる方法が 1 通り以上存在することである。これは、3 列目が 4 個より多くの箱を持つてはいけないという条件を満たさなければいけないことを意味している。そうでなければ、分解したときに $SU(4)$ の Young 図の高さが 4 を超えてしまうか、または $SU(2)$ の Young 図の高さが 2 を超えてしまうからだ。一般例を図 7.2 に描いた。

Young 超図から対応する最高ウェイトを求める。

与えられた Young 超図に対応する最高ウェイトを求めるには、以下のようにすればよい。(7.7.16) 式より、 $SU(4) \times SU(2)$ 表現のうち最も低エネルギーのものは、できるだけ $SU(2)$ に割り当てる脚を少なくしたものであることが分かる。このためには、Young 超図のうち 4 行 (row) 目よりも下の箱だけを $SU(2)$ に割り当てることにして、 $SU(4)$ の Young 図は Young 超図の上から 4 行までをそっくりそのまま持ってくるようにすればよい。このとき、 $SU(2)$ の脚は fermionic であるから、 $SU(2)$ の Young 図は Young 超図の 5 行目以下を対角線に関して折り返したものとなることに注意しよう。つまり、対称と反対称を入れ替える必要があるということだ。具体的な例を図 7.3 に示す。

このようにして最低エネルギーを持つ $SU(4) \times SU(2)$ 表現 V_0 が与えられると、最高ウェイトの成分 $(a_1, a_2, a_3), (a_5)$ は、 V_0 における $SU(4), SU(2)$ 表現の Dynkin ラベルと同じものになる。 a_4 を求めるには、(7.7.16) 式を用いてエネルギー h を求めてから、それを (7.7.6) 式に代入すればよい。この場合、 n_4 と n_2 は Young 超図における上 4 行の箱の数とそれより下の箱の数ということになる。

一般に許容される Young 超図は図 7.2 に示した。この Young 超図に対応する最高ウェイトは

$$\Lambda = (a - b, b - c, c - d | d + e | e - f) \quad (7.7.18)$$

であることに注目すれば

$$(a, b, c, d, e, f) \longleftrightarrow (a + k, b + k, c + k, d + k, e - k, f - k) \quad (7.7.19)$$

という対応関係にある Young 超図は互いに同等であることが分かる。但し、 k は任意の整数であるが、どちらも Young 超図として許容されるものでなくてはならない。この同等性を用いて $k = f$ とすれば、あらゆるテンソル表現は 5 行目に 1 個以下の箱を持つ Young 超図を使って、一対一に対応させられることを確認しておこう。

最高ウェイトを用いて singly atypical, doubly atypical 表現の条件と物理的条件を表す。

表現が atypical であるための条件 (7.7.8) と最高ウェイト (7.7.18) を比較することにより、atypical なテンソル表現は 2 列目に 3 個以下の箱しかない Young 超図に対応することが分かる。さらに doubly atypical な表現は、1 列目に 2 個以下の箱しかないものに対応することも確認できる。(singly) atypical や doubly atypical 表現である一般の Young 超図は図 7.4 に示した。

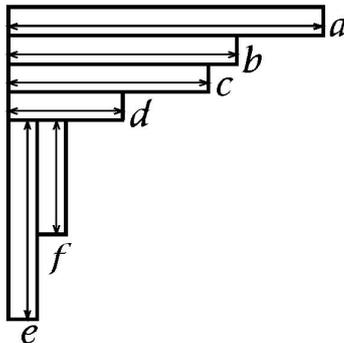


図 7.2: 一般的な Young 超図の例 : Dynkin ラベルは $(a_1, a_2, a_3 | a_4 | a_5) = (a - b, b - c, c - d | d + e | e - f)$ となる。

それぞれのテンソル表現について次元を計算すると

$$\begin{aligned} \dim(\text{typical}) &= \frac{64}{3}(a-b+1)(b-c+1)(c-d+1)(a-c+2)(b-d+2)(a-d+3)(e-f+1) \\ \dim(\text{singly atypical}) &= \frac{8}{3}(a-b+1)(b-c+1)(a-c+2)(4abce+6abc-2abe+2ace+6bce \\ &\quad -2ab+4ac-2ae+10bc-4be+2ce-3a-5b+5c-3e-6) \\ \dim(\text{doubly atypical}) &= \frac{1}{3}(a-b+1)(4a^2b^2+4a^2b+12ab^2+2a^2+10b^2+8ab+4a+4b+3) \quad (7.7.20) \end{aligned}$$

となる。

また、それぞれのテンソル表現におけるボソンとフェルミオンの数の差を計算すると、typical 表現や singly atypical 表現では等しいのであるが、doubly atypical 表現では異なっていることが確認できる。doubly atypical 表現では、bosonic 状態の方が $a-b+1$ 個だけ多いのである。

最後に、正エネルギーとユニタリー性の条件 (7.7.10) と最高ウェイト (7.7.18) を比較してみよう。すると、全てのテンソル表現はエネルギーが正であり、ユニタリー化が可能であることが分かる。さらに、エネルギーが正であり、かつユニタリー化が可能な有限次元既約表現の中で、最高ウェイトが整数であるものは、テンソル表現であることが確認できる。

テンソル積の計算は、通常 $SU(N)$ の場合に用いる方法で行えば良い。

テンソル表現同士のテンソル積は、 $SU(N)$ 表現のテンソル積を計算するときに用いる Littlewood-Richardson 則に従って、Young 超図を計算すればよい。そして、得られた表現のうち、 $SU(4|2)$ 表現として許容されるものだけを残せばよいのである。

7.8 $SU(4|2)$ 表現の物理的な意味づけ

前節では物理的に許容される $SU(4|2)$ 表現を調べて、それらが typical 表現と atypical 表現から構成されていることを確認した。typical 表現には、 $SU(4) \times SU(2)$ の内容は同じであるが状態のエネルギーだけが異なる状態に対応する表現が存在しており、それらが集まって 1 パラメータ族を構成するのであった。一方で、atypical 表現にはそのような関係にある表現は存在しない。

パラメータ N, μ を任意の値に固定したとき、BMN 行列模型のスペクトルは $SU(4|2)$ 表現の離散的な組から

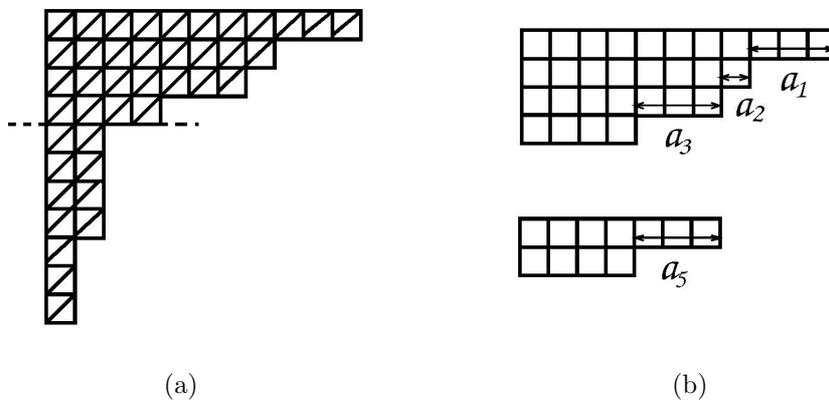


図 7.3: (a) 一般的な Young 超図の例、(b) 分解した Young 図のうち、最高ウェイトを持つもの。上が $SU(4)$ 、下が $SU(2)$ の Young 図である。

構成される。これには typical 表現も atypical 表現も含まれる。この情報を

$$S = \{\Lambda_i\}(N, \mu) \tag{7.8.1}$$

と表すことにしよう。つまり、様々な表現に対応する最高ウェイト状態の組で表現するのである。

パラメータ μ を動かすと、 $SU(4) \times SU(2)$ の量子数は変化せず、エネルギーは変化する。

それでは、 μ を動かしたとき、表現のスペクトルがどう変わるかを調べてみることにしよう。この場合は一般に、状態が持つ $SU(4) \times SU(2)$ の量子数は変化せず、エネルギーのみが連続的に変化しうることが分かる。これについて確認してみよう。

typical 表現の状態については、 μ が変化すればエネルギーも変化する。なぜなら、 $SU(4) \times SU(2)$ の内容が同じで、エネルギーが異なる状態 (nearby 表現に対応する状態) が存在しているからである。つまり、 $S = \{\Lambda_i\}(N, \mu)$ において最高ウェイトが 1 パラメータ族に沿って連続的に変化するのである。

一方で、atypical 表現の状態については、一般にエネルギーの変化は起こらない。なぜなら、 $SU(4) \times SU(2)$ の内容が同じでエネルギーだけ異なる状態が存在していないからである。しかしながら、複数の atypical 表現が結合して typical 表現になったり、逆に typical 表現が分裂して複数の atypical 表現になったりする可能性はある。これは、 $S = \{\Lambda_i\}(N, \mu)$ において atypical 表現の最高ウェイトが現れたり消えたりするという、不連続な転移が起こることに相当している。

$S = \{\Lambda_i\}(N, \mu)$ の不連続な転移について

この不連続な転移を起こす可能性のある表現とはどういうものかを調べてみよう。

$\mu = \mu_0$ を不連続な転移が起こる点だとしよう。このとき、 μ_0 に非常に近い μ を持った多重項の状態から議論を始めて、それを μ_0 に近づけていくという状況を考えることにする。このような不連続な転移に関係のある状態の中で、最高ウェイトを持った状態 $|\phi\rangle$ に注目しよう。

この状態 $|\phi\rangle$ のウェイトは、 $\mu = \mu_0$ でも $\mu \neq \mu_0$ でも、 $S = \{\Lambda_i\}(N, \mu)$ において最高ウェイトとして表されなくてはならない。一方で、不連続な転移を起こすという仮定より、 $|\phi\rangle$ が持つ $SU(4|2)$ 表現の $SU(4) \times SU(2)$ の内容は、 μ が μ_0 から動くときに変化しなくてはならない。

ここで (7.7.8), (7.7.10) 式より、最高ウェイトが無限小の変化をするときに表現の $SU(4) \times SU(2)$ の内容が変わるのは、typical 表現に対応する最高ウェイトが 1 パラメータ族において a_4 が最小値を取る場合のみである

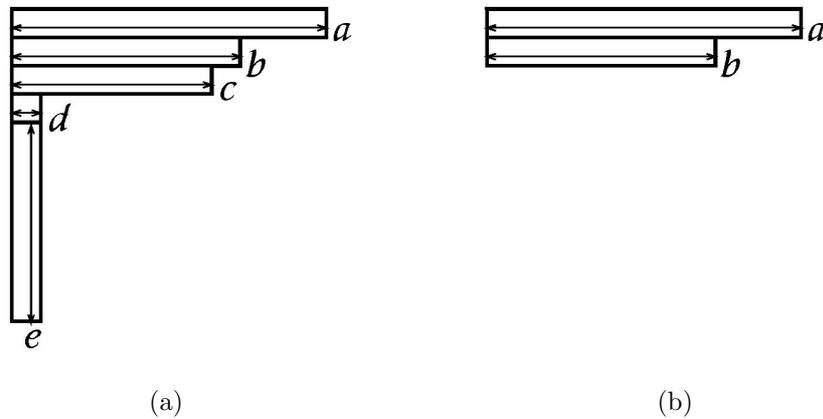


図 7.4: atypical 表現の Young 超図 : (7.7.19) 式の対応関係を用いて、 $f = 0$ としてある。よって、最高ウェイトは $\Lambda = (a - b, b - c, c - d | d + e | e)$ である。

- (a) singly atypical 表現の Young 超図 : $c \neq 0, d = 0, 1, e = 0, 1, 2, \dots$ のとき
- (b) doubly atypical 表現の Young 超図 : $c = 0, d = 0, e = 0$ のとき

ことに注目しよう。さらに a_4 が小さくなると表現は atypical になるので、近隣の typical 表現より状態数が少なくなるのである。但し、この転移が可能となるためには、転移によって元の表現から抜け落ちた表現が、より小さい最高ウェイトを持った他の $SU(4|2)$ の表現を形成しなくてはならない。

このような転移が可能であるかどうかを確かめるために、一般に最高ウェイト $\Lambda = (a_1, a_2, a_3 | a_5 + 1 + \epsilon | a_5)$ に対応する typical 表現の 1 パラメータ族を考えることにしよう。但し $\epsilon > 0$ である。これらの表現は全て同じ $SU(4) \times SU(2)$ の内容を持っていて、さらに ϵ に線形に依存したエネルギーを持っている。

ここで、 $A = \{(R_i, h_i)\}$ を $\epsilon \rightarrow 0$ 極限における $SU(4) \times SU(2)$ 表現とエネルギーの組としよう。同様に、 B を最高ウェイト $(a_1, a_2, a_3 | a_5 + 1 | a_5)$ を持った atypical 表現の、 $SU(4) \times SU(2)$ 表現とエネルギーの組としよう。 B は A の部分集合であるから、集合 C を A の要素であるが B の要素でないものの集合と定義しよう。

C の要素が $SU(4|2)$ 表現の集合に含まれているかどうかを確認してみよう。実際に typical 表現が atypical 表現と C の要素に分解される状況を調べてみると、 C の要素について

- $a_5 > 0$ の場合： C の状態は最高ウェイト $\Lambda = (a_1, a_2, a_3 + 1 | a_5 | a_5 - 1)$ の表現と一致する。
- $a_5 = 0$ の場合： C の状態は最高ウェイト $\Lambda = (a_1, a_2, a_3 + 2 | 0 | 0)$ の表現と一致する。

であることが分かる。但し、atypical 表現の最高ウェイトは C における最低エネルギー表現を見つけることで求めることができる。よって、確かに C の要素は $SU(4|2)$ の表現になっている。さらに、各々の表現の次元 (7.7.20) を用いれば

$$\dim A = \dim B + \dim C \quad (7.8.2)$$

であることが確認できるので、確かにこの場合、不連続な転移が可能であることが分かった。

以上より、不連続な転移が可能な組は

- $a_5 > 0$ の場合

$$(a_1, a_2, a_3 | a_5 + 1 + \epsilon | a_5) \longleftrightarrow (a_1, a_2, a_3 | a_5 + 1 | a_5) \oplus (a_1, a_2, a_3 + 1 | a_5 | a_5 - 1) \quad (7.8.3)$$

- $a_5 = 0$ の場合

$$(a_1, a_2, a_3 | 1 + \epsilon | 0) \longleftrightarrow (a_1, a_2, a_3 | 1 | 0) \oplus (a_1, a_2, a_3 + 2 | 0 | 0) \quad (7.8.4)$$

であることが分かった。Young 超図で表すと、2 つの atypical 表現が結合して 1 つの typical 表現を作るとき、その 2 つの atypical 表現を比較すると 1 番左の列 (column) に 1 つ少ない箱を、上から 3 つの行 (row) には 1 つ多い箱を持った表現になっていなければならないことが分かる (図 7.5)。

従って、ある値 $\mu = \mu_0$ におけるスペクトルにおいて atypical 表現が存在するとき、 μ が動いたときにエネルギーの変化が起こるとすれば、このような形をした表現が別に存在していて、それが結合して typical 表現をなす場合だけであることが結論できる。但し、そのときエネルギーは必ず増加することも同時に確認できる。

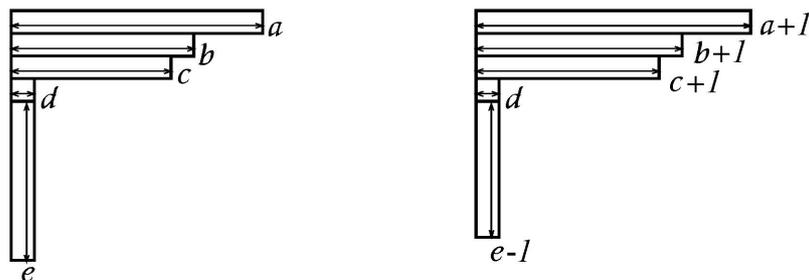


図 7.5: 結合して typical 表現を作ることができる 2 つの atypical 表現

他の atypical 表現と結合できない、exactly protected 表現が存在する。

図 7.5 のような atypical 表現の組だけが結合して typical 表現になることができるのであるから、逆に図 7.6 のような Young 超図に対応する表現は、決して他の atypical 表現と結合することができないことが分かる。このような表現を exactly protected 表現と呼ぼう。また、doubly atypical 表現は全てこの表現に含まれていることを確認しておこう。

ある μ において、もしスペクトルにこれらの表現が含まれていれば、これらは μ がいかなる値にあらうとも必ず存在して、さらに状態のエネルギーも摂動的にも非摂動的にも保持されるのである。

7.8.1 超対称指数定理

以上の議論で、doubly atypical 表現の占有数 (occupation number) は exactly protected な量であることが分かった。しかし、singly atypical 表現をも含めた exactly protected な量が存在するので、ここではそれに注目してみよう。

まず初めに、全ての atypical 表現は図 7.7 で表せるような有限の鎖 (chain) をなすことを確認しておこう。1 番左の表現は必ず 4 行以下であり、1 番右の表現には 3 行目に箱が 1 つ以下しかない。そして、各々の atypical 多重項が現れる鎖は、ただ 1 つだけであることも確認できる。

それぞれの鎖は、1 番左の多重項が持つ最高ウェイト状態の (a_1, a_2, a_3) 、すなわち最低エネルギーを持った $SU(4)$ 表現の最高ウェイトでラベル付けすることができる。そして、その鎖に含まれる atypical 表現の数は $\max(a_3, 1)$ である。

ある μ で protected 状態であっても、 μ の全ての範囲において protected であるとは限らない。

ここで atypical 多重項の鎖 (A_1, \dots, A_n) を考えよう。以上の議論より、 (A_i, A_{i+1}) という組は結合して typical 多重項 T_i を作ることができて、その後 T_i の 1 パラメータ族に沿って連続的に動くことができるようになることが分かる。

従って、 $\mu = \mu_0$ において A_i が存在するとき、 $\mu = \mu_0$ のスペクトルにおける鎖において A_{i-1} も A_{i+1} も存在しなければ、 μ が μ_0 から離れてしまっても、 A_i は存在することになる。しかし、だからと言って A_i が μ がいかなる値を取っても必ず存在するかと言えば、そう結論することはできない。なぜなら、ある値 $\mu = \mu_1$ において A_{i-1} や A_{i+1} が現れる可能性があるからだ。つまり、 T_{i+1} や T_{i-2} が 1 パラメータ族の最下点 (a_4 の最小値) まで動いて、さらに分裂するという可能性があるのだ。

具体的に表すと、次のようになる。 T_{i+1} が分裂する場合、 $\mu = \mu_1$ において A_i, A_{i+1}, A_{i+2} を得ることになる。 μ がさらに動けば、 A_i と A_{i+1} が結合して、表現 T_i に移行することができる。 T_{i-2} が分裂する場合も同様である。

$$\begin{aligned} (A_i, T_{i+1}) &\xrightarrow{T_{i+1} \text{ が分裂}} (A_i, A_{i+1}, A_{i+2}) \xrightarrow{A_i, A_{i+1} \text{ が結合}} (T_i, A_{i+2}) \\ (A_i, T_{i-2}) &\xrightarrow{T_{i-2} \text{ が分裂}} (A_i, A_{i-1}, A_{i-2}) \xrightarrow{A_i, A_{i-1} \text{ が結合}} (T_{i-1}, A_{i-2}) \end{aligned} \quad (7.8.5)$$

従って、 $\mu = \mu_0$ のとき多重項が protected だからと言って、あらゆる μ に対して protected とは限らないのである。



図 7.6: 他の atypical 表現と結合して typical 表現を作ることができない atypical 表現

全ての μ において exactly protected な「超対称指数」が存在する。

μ が変化するとき、スペクトルにおける多重項 A_i の数 \mathcal{N}_i は変化するが、集合 $\{\mathcal{N}_i\}$ は任意に変わることはできないことに注目しよう。実際、 μ が変化することによって A_i が結合したり T_i が分裂したりする様子を考察すると、占有数の最も一般的な変化は

$$(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \dots, \mathcal{N}_{n-1}, \mathcal{N}_n) \longrightarrow (\mathcal{N}_1 + n_1, \mathcal{N}_2 + n_1 + n_2, \dots, \mathcal{N}_{n-1} + n_{n-2} + n_{n-1}, \mathcal{N}_n + n_{n-1}) \quad (7.8.6)$$

と表せる。 n_i は整数であって、右辺の全ての数は非負である。これらの変換の下で不変な、占有数の線形結合は 1 つだけ存在して

$$\mathcal{I} = \sum_k (-1)^k \mathcal{N}_k \quad (7.8.7)$$

と表せる。従って、これを「超対称指数」と呼ぼう。これは全ての μ において exactly protected な量である。

まとめ

以上の結果をまとめると、1 番左の多重項の $SU(4)$ の最高ウェイト (a_1, a_2, a_3) でラベル付けされる atypical 表現の鎖が存在して、その鎖に含まれる多重項の占有数の交代和 (alternating sum) で与えられる exactly protected な量

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(a_1, a_2, a_3) = & \mathcal{N}(a_1, a_2, a_3 | 0|0) - \sum_{n \geq 0} \mathcal{N}(a_1, a_2, a_3 - (2n+2) | 2n+1 | 2n) \\ & + \sum_{n \geq 0} \mathcal{N}(a_1, a_2, a_3 - (2n+3) | 2n+2 | 2n+1) \end{aligned} \quad (7.8.8)$$

が存在することが分かった。ここで $\mathcal{N}(\Lambda)$ は最高ウェイト Λ を持ったスペクトルにおける多重項の数を表している。

以上の結果を BMN 行列模型の物理的なスペクトルに適用してみよう。 $\mu = \infty$ におけるスペクトルは既に求めてあるので、 $\mu = \infty$ で現れる表現が分かれば、それらのうち μ が ∞ からずれても protect される状態はどれであるかを見つけることができる。

7.9 large μ 極限の $SU(4|2)$ 表現

large μ 極限における BMN 行列模型の正確なスペクトルは既に求めた。ここでは、その $SU(4|2)$ 表現を求めよう。

任意の N , $\mu \neq 0$ において、BMN 行列模型は全 DLCQ 運動量 N を各々の graviton に分け与える方法にそれぞれ対応した様々な真空解を持つ。pp-wave 背景時空においては、これらの graviton は、分け与えられた運

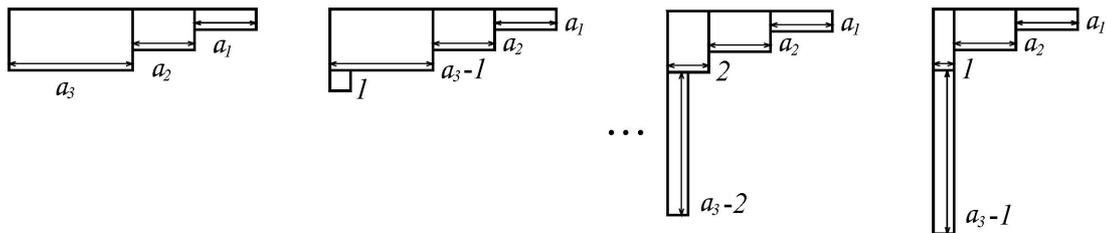


図 7.7: 全ての atypical 表現は、このような有限の鎖を構成することができる。隣同士に並び atypical 表現は、結合して typical 表現を作ることができる。

動量に依存した半径を持つ fuzzy 球面 (giant graviton) として存在することになる。これらの真空解の周りで BMN 行列模型の作用を展開すると、large μ 極限においては相互作用項が $1/\mu$ の冪乗で suppress されるので、2 次の Hamiltonian を得ることになる。

従って、large μ 極限において、様々な真空は超選択セクター (superselection sector) になり、それぞれは 2 次の Hamiltonian で記述され、この Hamiltonian を対角化することによりスペクトルを生成する振動子のタワーを見つけることができる。

以上については既に議論が終わっている。その結論として、M2-brane が 1 枚の真空と一般の真空における振動子のスペクトルは表 7.1 と表 7.2 にそれぞれ示したのであった。

どの表現がスペクトルに現れているかを調べるためには、超対称電荷 Q を真空解の周りで展開する必要がある。この計算を行うと、Hamiltonian と同様に、large μ 極限において 2 次となり、1 つの生成演算子と 1 つの消滅演算子を含む項で構成されることが確認できる。実際、M2-brane が 1 枚の真空においては、

$$\begin{aligned}
Q_{I\alpha} = & \sum_{j=1}^{N-1} i\sqrt{\frac{2\mu}{3}} a_{j-1,m} \begin{pmatrix} -\sqrt{j-m} (\chi^\dagger)_I^{j-\frac{1}{2},m-\frac{1}{2}} \\ -\sqrt{j+m} (\chi^\dagger)_I^{j-\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}} \end{pmatrix}_\alpha \\
& + \sum_{j=1}^{N-1} i\sqrt{\frac{\mu}{3}} g_{IJ}^a a_{jm}^{a\dagger} \begin{pmatrix} -\sqrt{j+m} (\chi^J)_{j-\frac{1}{2},-m-\frac{1}{2}} \\ -\sqrt{j-m} (\chi^J)_{j-\frac{1}{2},-m+\frac{1}{2}} \end{pmatrix}_\alpha \\
& + \sum_{j=0}^{N-1} i\sqrt{\frac{\mu}{3}} g_{IJ}^a a_{jm}^a \begin{pmatrix} \sqrt{j-m+1} \eta_{j+\frac{1}{2},m-\frac{1}{2}}^\dagger \\ -\sqrt{j+m+1} \eta_{j+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}}^\dagger \end{pmatrix}_\alpha \\
& + \sum_{j=0}^{N-1} i\sqrt{\frac{2\mu}{3}} b_{j+1,m}^\dagger \begin{pmatrix} \sqrt{j+m+1} \eta_I^{j+\frac{1}{2},-m-\frac{1}{2}} \\ -\sqrt{j-m+1} \eta_I^{j+\frac{1}{2},-m+\frac{1}{2}} \end{pmatrix}_\alpha
\end{aligned} \tag{7.9.1}$$

と展開できる [7]。一般の真空については、振動子が k, l の脚を持っていること、それからスピンの足し上げが表 7.2 に従うこと以外は同じである。

従って、large μ 極限において固有状態に超対称性代数が作用しても、振動子の総数は不変であることが分かる。その結果、ある決まった個数の振動子を持った状態の部分セクターは、 $SU(4|2)$ 表現の部分集合に組み込まれていることになる。以下では、この部分セクターを「粒子」と呼ぶことがある。

まず、それぞれの生成演算子に対応する表現を決定しよう。そうすればスペクトルの残りに対応する表現は 1 つの振動子に対応する表現のテンソル積として得ることができる。

7.9.1 1 枚の M2-brane の真空

物理的に許容される $SU(4|2)$ 表現は、最低エネルギー状態のエネルギーと $SU(4) \times SU(2)$ 表現で決まってしまうという事実を用いることとしよう。表 7.1 における最低エネルギー状態は $U(1)$ 振動子 x_{00} であり、その $SU(4) \times SU(2)$ 表現とエネルギーは

$$\left(\begin{array}{c} \square \\ \square \end{array}, 1 \right)_{\frac{1}{6}} \tag{7.9.2}$$

である。これが

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{c} \square \\ \square \end{array}, 1 \right)_{\frac{1}{6}} + \left(\square, \square \right)_{\frac{1}{4}} + \left(1, \square \square \right)_{\frac{1}{3}} \tag{7.9.3}$$

で記述される $SU(4|2)$ 表現に含まれる最低エネルギー状態であることは直ちに確認できる。残りの 2 つの状態は $\eta_{\frac{1}{2}}$ と β_1 に対応することも確認できる。 $\eta_{\frac{1}{2}}, \beta_1$ は残りの $U(1)$ 振動子であるから、これら全てのモードは単行列に比例する。従って、 $U(1)$ 振動子は最高ウェイト $(0, 1, 0|0|0)$ を持った 1 つの表現を作ることが分かる。

次にエネルギーが小さい単一振動子の状態はエネルギーが $h = 1/3$ であり、 $SU(4) \times SU(2)$ の一重項状態は

α_{00} に対応する。対応する $SU(4|2)$ 表現は

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}, 1 \right)_{\frac{1}{3}} + \left(\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}, \square \right)_{\frac{5}{12}} + \left(\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}, \square \square \right)_{\frac{1}{2}} + \left(\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}, \square \square \square \right)_{\frac{7}{12}} + \left(1, \square \square \square \square \right)_{\frac{2}{3}} \quad (7.9.4)$$

である。最高ウェイトは $(0, 0, 0|1|0)$ である。表 7.1 より、この表現における残りの 4 つの成分は振動子 $\chi_{\frac{1}{2}}, x_1, \eta_{\frac{3}{2}}, \beta_2$ に対応していることが分かる。これらは $SU(2)$ 理論の振動子になっている。

このように続けていくと、他の振動子も全て、最高ウェイト $(0, 0, 0|2j + 1|2j)$ を持った $SU(4|2)$ 表現に組み込めることが分かる。そして、それぞれの $SU(4) \times SU(2)$ 表現が $\alpha_j, \chi_{j+\frac{1}{2}}, x_{j+1}, \eta_{j+\frac{3}{2}}, \beta_{j+2}$ に対応するのである。これらは全て、スピン $j + 1$ の行列球面調和関数 Y_{j+1} に結合する振動子であることに注意しよう (図 7.8)

従って、BMN 行列模型において $P^+ = N/R$ であれば、1 枚の M2-brane の真空に対する生成演算子は、図 7.9 で与えられる N 個の $SU(4|2)$ のテンソル表現であることが理解できる。従って、超脚の記法を用いれば、表 7.1 に示された振動子を全て繋げて「超振動子」(super-oscillator) の組

$$a_{[A_1 A_2]}^\dagger, a_{[A_1 A_2 A_3 A_4]}^\dagger, \dots, a_{[A_1 \dots A_{2N}]}^\dagger \quad (7.9.5)$$

を作ることができるのである。複数の振動子を持った状態に対応する $SU(4|2)$ 表現は、Fock 空間の真空上のこれらの超振動子の任意の結合を作用させて得られるものである。

$SU(N)$ 理論における 1 枚の M2-brane の真空について、 $SU(4|2)$ 表現の完全集合は、図 7.10 のようなテンソル積で与えられる。これらのテンソル積には、 $U(1)$ 振動子に対応する因子が含まれていないことに注意しよう。 μ が変化しても理論の free な $U(1)$ 部分に対応する表現は変化しないので、どの状態が protected であるかについて議論するときには、理論の $SU(N)$ 部分における表現のみを扱えばよいのである。

$U(1)$ 部分に由来する可能な表現 ($U(1)$ 理論における $SU(4|2)$ 表現の正確なスペクトル) は

$$\text{sym} \left(\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \right)^n \quad (7.9.6)$$

で与えられ、ここには許容される Young 超図で各列 (column) に偶数個の箱があるものが含まれている。以下では、この波動関数の $U(1)$ 部分を無視して、 $SU(N)$ 理論におけるスペクトルに注目することにしよう。

一番単純な場合として、 $SU(2)$ 理論について考えてみよう ($N = 2$)。この場合、図 7.9 (a) より、表現は

$$\text{sym} \left(\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \right)^n \quad (7.9.7)$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \\ \updownarrow \\ 2j \\ \vdots \\ \updownarrow \\ \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} \left(\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}, \overleftrightarrow{\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}} \right)_{\frac{j-1}{3}}^{2j-4} \\ + \left(\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}, \overleftrightarrow{\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}} \right)_{\frac{4j-3}{12}}^{2j-3} \\ + \left(\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}, \overleftrightarrow{\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}} \right)_{\frac{2j-1}{6}}^{2j-2} \\ + \left(\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}, \overleftrightarrow{\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}} \right)_{\frac{4j-1}{12}}^{2j-1} \\ + \left(1, \overleftrightarrow{\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}} \right)_{\frac{j}{3}}^{2j} \end{array}$$

図 7.8: 一般の分解

で与えられる。これらの表現のあらわな振動子表現はすぐに決定することができる。例えば、2 個の振動子がある表現における最高エネルギー状態は、状態 $\beta_{2m}^\dagger \beta_{2\bar{m}}^\dagger |0\rangle$ の線形結合でスピン $4, 2, 0$ を持ったものである。この表現に含まれる他の状態は、(7.9.1) 式で与えられた超対称電荷 $Q_{I\alpha}$ を作用させてあらわに求めることができる。

一般に $SU(N)$ の場合も、同様に求めることができる。

7.9.2 一般の真空

一般の真空に対する解析も、1 枚の M2-brane の真空の場合と同様に行うことができる。一般の真空は、 M_i 枚の M2-brane が集まって、それぞれの M2-brane の運動量 N_i に比例した半径を持って広がっている系に対応している。一般の真空に対する振動子は表 7.2 に示してある。

運動量の組 (N_i, N_j) に対して (但し $N_i \leq N_j$ と並べるものとする。), 1 枚の M2-brane の真空と同様の振動子の組を持つことになる。1 枚の M2-brane の真空の場合と異なるのは、振動子が $M_i \times M_j$ 行列で表されることと、振動子のスピンの範囲が $|N_i - N_j|/2$ から $(N_i + N_j)/2$ になることである。対応する Young 超図は図 7.9 (b) に示した。

7.5 節で議論したように、Gauss の法則を満たす物理的状態は、Fock 空間の真空上の行列振動子の任意の積のトレースを取ることで得られる。ここで、トレースを取るのだから、行列の積は正方行列になっていなければならないことに注意しておこう。これらの物理的状態に対応する $SU(4|2)$ 表現を書き出すと、超振動子

$$\left(a_{[I_1 I_2 \dots I_{|N_i - N_j| + 2}] }^\dagger \right)_{M_i \times M_j}, \dots, \left(a_{[I_1 I_2 \dots I_{(N_i + N_j)}]}^\dagger \right)_{M_i \times M_j} \quad (7.9.8)$$

を定義することができる。そして、表現の組は、これらの超振動子のトレースの積に対応する Young 超図のテンソル積で決められる。

ここで注意しなければならないのは、トレースのサイクリック対称性などの対称性に留意して、全ての可能な対称化の下で不変なテンソル積だけを保持することである。また、有限の N の場合は、表現を数えすぎないように、多数の行列のトレースとより少数の行列のトレースの積との間にある関係に留意する必要がある。

例: $X = 0$ 真空

ここで $X = 0$ 真空について考えてみよう。これは $M_1 = N, N_1 = 1$ の場合に相当する。このとき、超振動子行列は

$$\left(a_{[I, J]}^\dagger \right)_{N \times N} \quad (7.9.9)$$

の 1 個だけである。従って、スペクトルに現れる表現はこの振動子を掛け合わせてトレースを取ったものの積を計算すれば得られる。先ほど述べたように、この議論においては理論の $U(1)$ 部分を無視してよいので、振動子 a^\dagger は traceless であると仮定しよう。

$N \rightarrow \infty$ の場合

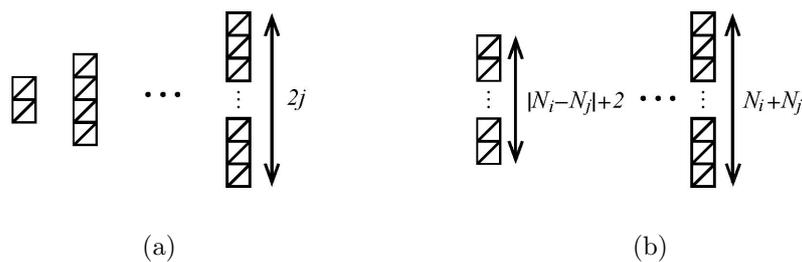


図 7.9: 1 個の振動子多重項に対応する Young 超図 (a) 1 枚の M2-brane の真空の場合 (b) 一般の真空の場合

large N 極限においてはトレース関係（多数の行列のトレースとより少数の行列のトレースの積の間に成り立つ関係）が無いので、 $X = 0$ 真空の完全なスペクトルは

$$\sum_{\{n_k\}_{k>1}} \prod_{\text{sym}} \left\{ \text{cyc} \left(\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \right)^k \right\}^{n_k} \quad (7.9.10)$$

というテンソル積で与えられる。ここで sym は完全対称化テンソル積であることを、 cyc はサイクリックに対称化されたテンソル積であることを示している。

N が有限の場合

この場合は、トレース関係に気をつけなければならない。 $SU(2)$ の場合であれば、traceless 行列は $A = A_i \sigma^i$ と分解することができる。但し、 σ^i は Pauli 行列である。このとき

$$\text{Tr} AB = 2A_i B_i, \quad \text{Tr} ABC = 2i\epsilon^{ijk} A_i B_j C_k \quad (7.9.11)$$

という関係が成り立つので、偶数個の行列のトレースは 2 つの行列のトレースの積で書き表せるが、奇数個の行列のトレースは 3 つの行列の単一トレースと 2 つの行列の積の組を掛け合わせたものとして表せることが分かる。

従って、 $SU(2)$ の場合のスペクトルは (7.9.10) 式において $n_3 = 0, 1$ と $n_i = 0, i > 3$ に制限することで得られる。実際に計算してみると、3 個以下の振動子を含む表現のスペクトルは、あらゆる N において同じであることが分かる。

7.10 atypical 表現と BPS 状態の関係

以上で large μ 極限において、スペクトルに現れる $SU(4|2)$ 表現を求めることができた。この中で μ が小さくなくてもスペクトルに現れる $SU(4|2)$ 表現は、7.8 節で議論した exactly protected 表現である。

この節では exactly protected 表現を含めた atypical 表現が、BPS 表現と関係していることを確認してみよう。

atypical 表現と BPS 状態は互いに共通する性質を持っている。

BMN 行列模型のスペクトルは全て超対称性代数 $SU(4|2)$ の表現に落とし込むことができることを確認した。この超対称性代数には特殊な性質を持った、atypical 多重項が存在している。この多重項には、同じ $SU(4) \times SU(2)$ の内容を持ち、エネルギーだけ違うという nearby 多重項が存在しない。また、atypical 多重項はほぼ同じ最高ウェイトを持った typical 多重項よりも状態数が少ない。さらに、atypical 多重項に属する状態のエネルギーは、atypical 多重項同士が結合して typical 多重項を作る場合以外は、変化することが無い。

このように atypical 多重項の性質を見てみると、これらは BPS 多重項の性質と同じであることに気が付く。ここで、BPS 状態とはエルミートな超対称生成子で消滅する、通常の意味で用いられているものとする。また、

$$\sum_{n_i} \text{sym} \left(\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \right)^{n_4} \otimes \cdots \otimes \text{sym} \left(\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \vdots \\ \square \\ \hline \end{array} \right)^{n_{2N}}$$

図 7.10:

BMN 行列模型は BPS 状態が無限タワーになったスペクトルを持っていることを既に確認した。従って、これらの BPS 状態は atypical 多重項と関係していることが期待される。

以下では、全ての typical 多重項は BPS 状態を含み、全ての BPS 状態は atypical 多重項に属することを示していこう。

ここで Cartan 生成子と Dynkin 基底の関係を適切に選ぶと、 $SU(4) \times SU(2)$ の回転生成子は

$$\begin{aligned} M^{12} &= \text{diag.} \left(0, 0, 0, 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} H_5 \\ M^{45} &= \text{diag.} (1, 1, -1, -1, 0, 0) = \frac{1}{2} (H_1 + 2H_2 + H_3) \\ M^{67} &= \text{diag.} (1, -1, 1, -1, 0, 0) = \frac{1}{2} (H_1 + H_3) \\ M^{89} &= \text{diag.} (-1, 1, 1, -1, 0, 0) = \frac{1}{2} (-H_1 + H_3) \\ 3h &= \text{diag.} \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4} H_1 + \frac{1}{2} H_2 + \frac{3}{4} H_3 + H_4 - \frac{1}{2} H_5 \end{aligned} \quad (7.10.1)$$

と表すことができる。いかなる $SU(4|2)$ 表現においても、 $SU(4) \times SU(2)$ 表現を求めることができ、Dynkin 基底の最高ウェイトを求めることができ、(7.5.48) 式において $\Delta = 0$ が満たされるかどうかを確認することができる。

typical 表現に対応する状態は BPS 状態ではない。

ある typical 表現が BPS 状態に対応しているとしよう。この場合、 a_4 が僅かに小さな nearby 表現が必ず存在するので、これに注目しよう。この nearby 表現は、元の表現とは同じ $SU(4) \times SU(2)$ 量子数を持つが、エネルギーは僅かに小さい。よって、この nearby 表現に対応する状態は BPS 束縛条件を破ってしまうことになる。以上より、typical 表現に対応する状態はどれも、BPS 状態ではない。

atypical 表現に対応する BPS 状態が存在する。

次に、atypical 表現に注目しよう。(7.5.48) 式において $\Delta = 0$ となるような $\epsilon_i = \pm 1$ の組が存在する $SU(4) \times SU(2)$ 表現のうち、 $SU(2)$ が一重項 (singlet) でないものは

$$\left(\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}, \square \right), \left(\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}, \square \right), \left(\square, \square \right), \left(1, \square \right) \quad (7.10.2)$$

であることが確認できる。左から順に、 $1/16, 1/8, 3/16, 1/4$ BPS 状態 (2, 4, 6, 8 個の超対称電荷を保持する状態) である。一方、 $SU(2)$ が一重項である表現は

$$\left(\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}, 1 \right), \left(\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}, 1 \right), \left(\square, 1 \right), \left(1, 1 \right) \quad (7.10.3)$$

であることが確認できる。左から順に、 $1/8, 1/4, 3/8, 1/2$ BPS 状態 (4, 8, 12, 16 個の超対称電荷を保持する状態) である。よって、これらの $SU(4) \times SU(2)$ 表現を持つ $SU(4|2)$ 多重項のみが BPS 状態を持つことが分かる。

atypical 多重項に属していても BPS 状態でないものも存在する。

但し、atypical 多重項に属する状態の中には BPS 状態でないものも存在するので注意しなくてはならない。例えば、 $SU(2)$ 理論において 1 枚の M2-brane の真空において 1 個の振動子状態を考えることにしよう。このとき atypical 多重項には、振動子 $\beta_2, \eta_{\frac{3}{2}}, x_1, \xi_{\frac{1}{2}}, \alpha_0$ が含まれており、それぞれ 8, 6, 4, 2, 0 個の超対称電荷を保持する。従って、 α_0 は BPS 状態ではないのであるが、エネルギーは保持されるのである。

7.11 M5-brane のスペクトル

以上の議論では M2-brane のスペクトルのみを扱ってきた。しかしながら、7.1 節で述べたように、BMN 行列模型には M5-brane のスペクトルも存在しているはずである。

M5-brane の光錐 Hamiltonian を求める。

11 次元最大超対称 pp-wave 背景時空

$$ds^2 = -2dx^+ dx^- + \sum_{A=1}^9 dx^A dx^A - \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\mu^2}{9} x^i x^i + \sum_{a=4}^9 \frac{\mu^2}{36} x^a x^a \right) dx^+ dx^+ \\ F_{123+} = \mu \quad (7.1.1)$$

における、M5-brane 作用の bosonic 部分は、M2-brane 作用の場合 (7.2 節) と同様にして求めることができる。但し、M5-brane の世界体積上には自己双対な 3 形式 field strength を持つ 2 形式場が存在するのであるが、ここではそれが 0 となる重力解に注目することとする。

M5-brane 作用を光錐ゲージ固定すると、そこから得られる Hamiltonian は

$$\mathcal{H} = P^+ \dot{X}^- - \mathcal{L} \\ = \int d^5\sigma \frac{1}{2p^+} (P_A^2 + |g_{AB}|) - \frac{p^+}{2} g_{++}(X) - i_+ C^{(6)} \\ = \frac{1}{2p^+} \left(P_A^2 + \frac{1}{5!} \{X^{A_1}, \dots, X^{A_5}\} \{X^{A_1}, \dots, X^{A_5}\} \right) \\ + \frac{p^+}{2} \left(\frac{\mu^2}{9} X^i X^i + \frac{\mu^2}{36} X^a X^a \right) + \frac{\mu}{6!} \epsilon_{a_1 \dots a_6} X^{a_1} \{X^{a_2}, \dots, X^{a_6}\} \quad (7.11.1)$$

となる。ここで σ_α は世界体積上の座標であり、 $d\sigma_1 \dots d\sigma_5$ が世界体積要素になるように定義した。また、記号を

$$\{A_1, \dots, A_5\} = \epsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_5} \partial_{\alpha_1} A_1 \dots \partial_{\alpha_5} A_5 \quad (7.11.2)$$

を定義した。

球面状の M5-brane は 11 次元 pp-wave 背景時空における安定な古典解である。

7.1 節において、11 次元 pp-wave 時空には球面状の M5-brane (giant graviton) が安定解として存在することを述べた。このことを確認しておこう。

光錐 Hamiltonian (7.11.1) において $X^i = 0$ とおくと、ポテンシャル項は

$$V_{X^a} = \frac{\mu^2 p^+}{72} X^a X^a + \frac{\mu}{6!} \epsilon_{a a_1 \dots a_5} X^a \{X^{a_1}, \dots, X^{a_5}\} + \frac{1}{2 \cdot 5! p^+} \{X^{a_1}, \dots, X^{a_5}\}^2 \\ = \frac{1}{2p^+} \left(\frac{\mu p^+}{6} X^a + \frac{1}{5!} \epsilon^{a a_1 \dots a_5} \{X^{a_1}, \dots, X^{a_5}\} \right)^2 \quad (7.11.3)$$

となる。ここで、世界体積を 5 次元単位球面の target space に写像する関数 $x^a(\sigma)$ を定義すると

$$x^a x^a = 1, \quad \{x^{a_1}, \dots, x^{a_5}\} = \epsilon^{a a_1 \dots a_5} x^a \quad (7.11.4)$$

を満たす。この関数を用いると、最低エネルギーの解 $V = 0$ は

$$X^a = 0, \quad X^a = r x^a = \left(\frac{\mu p^+}{6} \right)^{\frac{1}{4}} x^a \quad (7.11.5)$$

であることが分かる。従って、半径 r が

$$r^4 = \frac{\mu p^+}{6} \quad (7.11.6)$$

を満たす球面状の M5-brane が、古典解として安定に存在することが確認できた。

M5-brane 解は $X = 0$ 真空に対応していると考えられる。

7.1 節で述べたように、BMN 行列模型は

$$X^i = \frac{\mu}{3R} J^i \quad (7.11.7)$$

で与えられる古典的な超対称真空解の離散的な組を持っている。 J^i は任意次元の $SU(2)$ 表現であり、一般に可約表現である。このような BMN 行列模型における解は、2 次元の fuzzy 球面が集まった重力解に対応していることが知られている [52]。古典的半径は J^i を構成する各々の既約表現の次元 N_i と関係していて

$$r_i^2 = \frac{\mu^2}{9R^2} \frac{N_i^2 - 1}{4} \quad (7.11.8)$$

を満たす。11 次元 pp-wave 背景時空における M 理論には、半径 $r = \mu p^+ / 6$ 、光錐エネルギー $-p_+ = 0$ を持つ球面状の M2-brane が安定解として存在するので、以上の議論の正当性を確認することができる。

前節までは、これらの M2-brane が集まった系に対応する量子力学的真空について議論してきた。そして、BMN 行列模型における真空状態は全て、これらの真空に対応していることが分かった [7]。従って、球面状の M5-brane に対応する真空解も、これらの真空状態の線形結合で表されるものでなければならないことになる。

古典的な M5-brane 解は、M2-brane が広がっている 3 次元時空の原点に存在するのであるから、この解の自然な候補は M2-brane 真空において自明な $X = 0$ 真空であると考えられる。すなわち、 J^i が $SU(2)$ の自明な表現を任意個数並べたもの (零行列) の場合に対応していると考えられる。これは Polchinski-Strassler [54] の状況によく似ている。

7.11.1 摂動論における議論

7.4 節で示したように、BMN 行列模型の相互作用項を摂動的に扱うパラメータ領域がある。実際、 $X = 0$ 真空に関しては、展開パラメータが

$$\frac{NR^3}{\mu^3} = \frac{g_0^2 N}{\mu^3} = \frac{N^4}{(\mu p^+)^3} \quad (7.11.9)$$

であるような摂動論を考えることができる [55]。 g_0 は D0-brane の結合定数である。

$X = 0$ 真空状態と球面状 M5-brane とは、一見似ても似つかないように思える。古典的には、 μp^+ がどのような値を取ろうが、 $X = 0$ 状態は原点に存在する。一方、球面状 M5-brane の半径は $r \propto (\mu p^+)^{1/4}$ である。また弱結合領域において、摂動論によって計算を行うと

$$\bar{r}^2 \equiv \langle 0 | \frac{1}{N} \text{Tr} [X_a]^2 | 0 \rangle = \frac{18N^2}{\mu p^+} \left[1 + \mathcal{O} \left(\frac{N^4}{(\mu p^+)^3} \right) \right] \quad (7.11.10)$$

となる。従って、摂動論が有効な領域において N を固定すると、 μp^+ が増加するときには、 $X = 0$ 状態の大きさは $N^2 / \mu p^+$ で減少していくのだ。一方、球面状 M5-brane の半径は、 μp^+ が増加するときには $(\mu p^+)^{1/4}$ で増加するはずである。

従って、この仮説が尤もらしいことを理解する前に、この矛盾を解決することから始めよう。M5-brane の半径の表現 (7.11.6) は古典論の表現であるから、 μ と $p^+ = N/R$ を固定した上で large N 極限を取ったときのみ再現されればよいことに注目しよう。この極限において、effective な結合定数 (7.11.9) は大きくなってしまっているので、摂動論を使うことはできないのである。

つまり、「large N 極限を取ると、 $X = 0$ 真空状態の大きさは (7.11.10) 式から (7.11.6) 式へと転移する」と考えれば、以上の矛盾が解決することが分かる。興味深いことに、結合定数 (7.11.9) がオーダー 1 のとき、(7.11.6)

式と (7.11.10) 式は同じオーダーである。このことは、以上の議論を裏付けていると解釈することができるだろう。

7.11.2 protected 状態を用いた議論

以上の議論の結果より、 $X = 0$ 真空状態を持つ M5-brane らしい特徴は、BMN 行列模型の摂動論を考えたとき、その強結合領域でしか現れないということが分かる。強結合領域を解析することは難しいので、これは残念な結論である。

しかしながら幸いなことに、7.5 節で議論したように、BMN 行列模型の $SU(4|2)$ 代数には、パラメータ $\mu > 0$ の全ての値に対して exactly protected な物理量が存在するのであったことを思い出そう [7]。これらの物理量は、任意の N に対して $\mu \rightarrow \infty$ の領域において計算することができる。この領域では相互作用項が suppress される (理論が free になる) ので、目的の物理量を簡単に計算することが出来て、さらに $\mu > 0$ の望む値まで外挿することができるのである。このようにすれば、たとえ強結合領域 (large N 極限) における情報であっても、BMN 行列模型に関して信頼に値する情報を得られることが分かる。

$X = 0$ 真空の周りの励起状態に関する protected な量を求める。

ここで注目したい物理量は、 $X = 0$ 真空の周りの励起状態が持っているエネルギーと量子数である。その中で、特に protected な物理量に注目することにしよう。

BMN 行列模型の物理的状態は $SU(4|2)$ 表現に属しており、この表現は bosonic 部分代数 $SO(6) \times SO(3) \times \text{energy}$ の表現を有限個集めたものである。そして、物理的に許容される $SU(4|2)$ 表現の中で、 μ を変化させても (μ を単位としたときの) エネルギーと $SO(6) \times SO(3)$ 状態の内容が変化しないものが存在する。これが、exactly protected な状態であり、また BPS 表現に対応する状態であった。このような表現は、7.5 節で求めた $\mu = \infty$ におけるスペクトルに現れているならば、 $\mu > 0$ のいかなる値においてもスペクトルの中に現れることになるのである。

$X = 0$ 真空の周りの励起状態のスペクトルには、これらの exactly protected な表現の無限タワーが現れる。このことを確認しよう。7.4 節で確認したように、 $\mu = \infty$ において理論は free になり、その Hamiltonian は

$$H_2 = \mu \text{Tr} \left[\frac{1}{3} A_i^\dagger A_i + \frac{1}{6} A_a^\dagger A_a + \frac{1}{4} \psi^\dagger I \alpha \psi I \alpha \right] \tag{7.11.11}$$

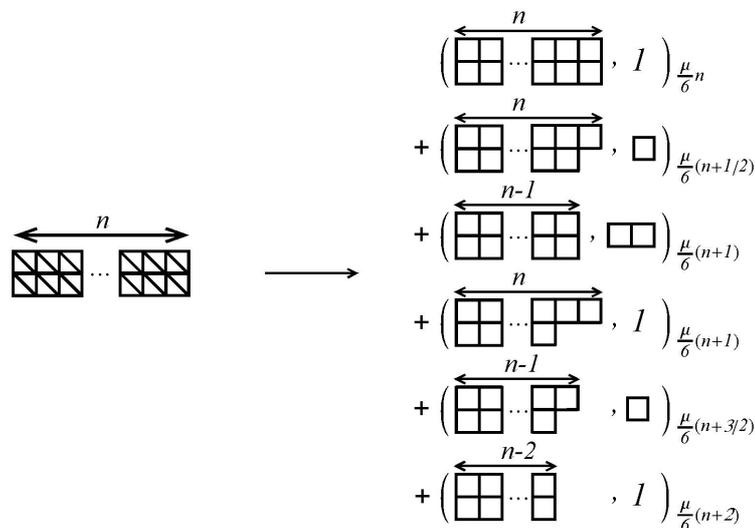


図 7.11: $X = 0$ 真空の周りでの exactly protected な励起状態に関する $SU(4) \times SU(2)$ の Young 図とエネルギー

となる。ここで

$$A_i = \sqrt{\frac{\mu}{6R}} X^i + i\sqrt{\frac{3R}{2\mu}} \Pi^i, \quad A_a = \sqrt{\frac{\mu}{12R}} X^a + i\sqrt{\frac{3R}{\mu}} \Pi^a \quad (7.11.12)$$

と定義した。よって、 $X = 0$ 真空での周りの励起状態のスペクトルは生成演算子 $A_i^\dagger, A_a^\dagger, \psi_{I\alpha}^\dagger$ の積のトレースで表されることになる。

単一トレース状態に注目することになると、その中で exactly protected な $SU(4|2)$ 多重項に属する状態は、プライマリー状態 (primary state)

$$C^{a_1 \dots a_n} \text{Tr} [A_{a_1}^\dagger \dots A_{a_n}^\dagger] |0\rangle \quad (7.11.13)$$

と、この状態に超対称生成子を作用させて得られる状態である。ここで $C^{a_1 \dots a_n}$ は完全対称で traceless な $SO(6)$ テンソルである。これらのプライマリー状態に由来する exactly protected な $SO(6) \times SO(3)$ 表現を、図 7.11 に示した。

M 理論が定義されるのは large N 極限であるが、図 7.11 は、この極限における $X = 0$ 真空の周りでの exactly protected な単一トレース状態の多重項を表しているのである。従って、 $X = 0$ 真空が球面状 M5-brane と対応しているのであれば、これらの励起状態は M5-brane の励起状態と対応していなければいけないことになる。

球面状 M5-brane 解の周りでの線形揺らぎは、 $X = 0$ 真空状態の周りでの励起状態と、スペクトルが一致する。

よって、次に求めなければいけないのは、球面状 M5-brane の励起状態のスペクトルである。これは 7.5 節での議論と全く同様にして求めることができる。

X^a 方向の揺らぎについて

例として、 X^a 方向の線形揺らぎのスペクトルを求めてみよう。真空解 $V = 0$ は $X^a = rx^a, r^4 = \mu p^+ / 6$ であったから $X^a = rx^a + Y^a$ とおくと、2 次のポテンシャル (7.11.3) は

$$V_2^a = \frac{p^+ \mu^2}{2 \cdot 36} \left(Y^a + \frac{1}{4!} \epsilon^{aa_1 \dots a_5} \{x^{a_1}, \dots, x^{a_4}, Y^{a_5}\} \right)^2 \quad (7.11.14)$$

となる。よって、固有値方程式

$$\mathcal{L}_{ab} Y_b \equiv \frac{1}{4!} \epsilon^{aa_1 \dots a_5} \{x^{a_1}, \dots, x^{a_4}, Y^{a_5}\} = \lambda Y^a \quad (7.11.15)$$

の解が標準的なモードであり、その質量は

$$M^2 = \left[\frac{\mu}{6} (1 + \lambda) \right]^2 \quad (7.11.16)$$

であることが分かる。ここで \mathcal{L}_{ab} は $SO(6)$ 生成子であり、固有ベクトルは $SO(6)$ のベクトル球面調和関数

$$\begin{aligned} Y_l^a &= S_{aa_1 \dots a_l} x^{a_1} \dots x^{a_l} & M &= \frac{\mu}{6} (l + 1) \\ \tilde{Y}_l^a &= x^a \tilde{S}_{aa_1 \dots a_{l-1}} x^{a_1} \dots x^{a_{l-1}} - \frac{l}{2l+2} \tilde{S}_{aa_1 \dots a_{l-2}} x^{a_1} \dots x^{a_{l-2}} & M &= \frac{\mu}{6} (l + 3) \\ \hat{Y}_l^a &= A_{a_1 \dots a_l}^a x^{a_1} \dots x^{a_l} & M &= 0 \end{aligned} \quad (7.11.17)$$

である。ここで S, \tilde{S} は traceless で対称な $SO(6)$ テンソルであり、 A は添字 a と a_i が反交換する $SO(6)$ テンソルである。これらの球面調和関数は順に、 $SO(6) \sim SU(4)$ の Dynkin ラベル $(0, l + 1, 0), (0, l - 1, 0), (1, l - 1, 1)$ を持った traceless で対称な表現とベクトルのテンソル積になっている。

図 7.11 に示したスペクトルと比較すると、 $n = l + 1$ として

- Y モード：図 7.11 の上から 1 番目のモード
- \tilde{Y} モード：図 7.11 の上から 6 番目のモード

と対応していることが分かる。残りの \hat{Y} モードについては、体積保存変換 (volume-preserving diffeomorphism) のゲージ軌道方向に対応していたモードであり、物理的なモードではないことが結論できる。

他の場の揺らぎについても同様に議論することができて、その結果

- X^a 方向の揺らぎ：図 7.11 の上から 1 番目と 6 番目のモード
- X^i 方向の揺らぎ：図 7.11 の上から 3 番目のモード
- フェルミオン場の揺らぎ：図 7.11 の上から 2 番目と 5 番目のモード
- 2 形式場の揺らぎ：図 7.11 の上から 4 番目のモード

にそれぞれ対応していることが確認できる [63]。

さらに同様の議論を繰り返すことにより、複数のトレースを含む exactly protected 状態についても、球面状 M5-brane 解において複数の励起状態を含んだ揺らぎとスペクトルが一致することを確認することができる。

以上で、 $X = 0$ 真空状態の周りでの励起状態のスペクトルと球面状 M5-brane 解の周りでの線形揺らぎのスペクトルが一致することが確認できた。これは $X = 0$ 真空状態と球面状 M5-brane 解が対応しているという仮説を強力に支持するものである。

7.12 複数の M5-brane がある系 (仮説)

前節では 1 枚の M5-brane の系を考えてきたが、pp-wave 時空上の M 理論には任意の半径の同心球状の M5-brane が集まった系も解として含まれる。これらの状態を BMN 行列模型で記述するにはどうすればよいのか、最初に仮説を提案して、次にその証拠を提示してみよう。

あらゆる真空は M2-brane の系とも M5-brane の系とも解釈できる。

N が有限のとき、 N 単位の運動量を任意個数の M2-brane に分け与える方法の数と、行列模型の真空とは自然な一対一対応の関係にある。 $N = N_1 + \dots + N_m$ という分割に対応する真空 (N_i は対応する $SU(2)$ 既約表現行列の大きさ) は、各々の半径が運動量 N_i/R に比例した fuzzy 球面が同心球状に集まった系であるという解釈が成り立つ。一方、同じように多数の M5-brane が集まった状態が存在することが期待できる。なぜなら、 N 単位の全運動量を k 枚の M5-brane に分け与えた状態もまた、 N の分割でラベル付けできるからである。もちろん、さらに M2-brane と M5-brane が共存する系も考えることができるであろう。

しかしながら、全ての真空は M2-brane の状態と関係付けられることを既に確認している。よって、M5-brane の状態を表す真空があることと矛盾しないためには、 N が有限のときには M2-brane の状態と M5-brane の状態を完全に区別することはできないと考えないと辻褄が合わない。実際、 $N = 1 + \dots + 1$ という分割に対応する状態は、 N 枚の M2-brane がそれぞれ 1 単位の運動量を運んでいる系であると解釈できる。しかし同時に、前節で示した仮説を信じるとすれば、この状態は 1 枚の M5-brane が N 単位の運動量を運んでいる系であるとも解釈できるのである。($SU(2)$ の 1 次元表現は自明な表現 0 である。)

ここで、各々の真空状態を dual な M5-brane の観点から見た自然な解釈が存在する。これを記述するために、あらゆる N の分割は Young 図で表現できることを思い出そう。列 (column) の長さが分割の要素に対応する。

- M2-brane 解釈：Young 図の各列 (column) が 1 枚の M2-brane に対応して、その列に並ぶ箱の数がその M2-brane の運動量に対応する。
- M5-brane 解釈：Young 図の各行 (row) が 1 枚の M5-brane に対応して、その行に並ぶ箱の数がその M5-brane の運動量に対応する。

この解釈 (仮説) が正しいとすると、M5-brane の数は最大の既約表現の大きさに等しいことになる。そして、

n 番目の M5-brane が持っている運動量は n 以上の大きさを持った既約表現の数に等しいことになる。

弱結合領域では M2-brane 解釈を、強結合領域では M5-brane 解釈を採用すべきである。

ここで示した仮説は、各々の真空に対して M2-brane 解釈と M5-brane 解釈の両方が行えると主張しているわけであるから、どういう場合にどちらの解釈をするのが適切なのかを明白にしておく必要がある。

どちらの解釈を採用するかは、一般には、 μp^+ , N と真空をラベル付けするパラメータの値に依存すると考えられる。どれか 1 つの真空に注目したとき、そこで M2-brane 解釈が成り立つのは、effective な結合定数が充分小さいとき (μp^+ が充分大きいとき) であろう。なぜなら、この極限において理論は free になり、同心球状の fuzzy な M2-brane に対応する古典的な geometry が量子補正を受けなくなるからである。

一方、前節では 1 枚の M5-brane の系を取り扱ったが、摂動論における議論より、M5-brane 解釈が適切になるのは、表現の個数が充分多いとき、すなわち結合定数が充分に大きいときであることが示唆される。また、パラメータが一般の中間的な値を取るときには、M2-brane と M5-brane の区別が曖昧になると考えられる。

M 理論が定義される large N 極限においては、状況はさらに明確になる。ある個数の M2-brane が様々な運動量を持った状態を定義するには、既約表現の個数とそれらの大きさの比を固定したまま、large N 極限を取らなくてはならない。各々の表現の大きさ N_i は無限大に発散するが、各々の M2-brane が持っている運動量の割合 N_i/N は連続パラメータとなる。一方、ある個数の M5-brane が存在する状態を定義するには、表現の大きさを固定して、表現の個数を無限大に持っていくことになる。この場合、M5-brane の個数は既約表現のうち最大のものの大きさに対応するので、 n 番目の M5-brane が持っている運動量の割合は M_n/N となる。ここで、 M_n は Young 図において n 番目の行に並ぶ箱の数である。すなわち、M2-brane/M5-brane 状態は、large N 極限において列/行が決まった個数を持つ Young 図に対応するのである。

さらに一般的な極限として、行も列も大きさを無限大にする状況を考えることができるだろう。これは m 個の無限大の行と k 個の無限大の列を持った状態は、 m 個の同心球状の M2-brane と k 個の同心球状の M5-brane の系と対応させるのが自然である。しかしながら、無限大の大きさを持つ行や列が無制限あるような状態はどのように解釈したらよいのだろうか。 N が有限の場合とは違った意味で、M2-brane と M5-brane の区別が曖昧になるのではないだろうか。

また、複数個の M5-brane の状態を記述するには、通常の古典的な描像と大変異なることに注意したい。古典的な描像では、ブロック対角化された行列において、異なるブロックというのは異なる物体に対応していた。ところがこの場合はそうではない。1 枚の M5-brane に対応する古典的な行列を表現する各々のブロックが、ブロック対角になっているものが複数個の M5-brane の系になっているかと言えば、決してそうはなっていない。

7.12.1 仮説を正当化する証拠 (1)

以上の仮説に対する簡単な証拠を提示してみよう。構築の段階で、 N 単位の全運動量を k 枚の M5-brane に分割する方法の数と、 k 次元の既約表現を含む BMN 行列模型の真空の間の一対一対応があることを確認した。これは証拠の 1 つになっている。

さらなる証拠としては、様々な真空の周りでの exactly protected 状態を考えてみるとよい。

複数枚の M5-brane が重なった系に注目すると、励起状態のスペクトルが一致している。

M 理論において、 k 個の M5-brane が重なって存在する (coincident) 状態を考えよう。つまり、M5-brane が全て同じ半径、同じ運動量を持っている系を考えるのである。仮説が正しいとすれば、これに対応する真空は k 次元の既約表現が N/k 個集まった表現に large N 極限を取ったものである。

7.10 節までの議論より、 N が無限大であろうと有限であろうと、この真空の周りでの exactly protected な励起状態は k の値に関わらず同じであることが正当化できる [55, 7]。これは、重なって存在する (coincident) k

個の M5-brane が束縛状態を作り、その状態を持つ protected な揺らぎは 1 枚の M5-brane と同じになるという事実と合致するものである。よって、これも仮説を支持する証拠の 1 つになる。

より一般的な M5-brane の系においても、励起状態のスペクトルが一致していることが確認できる。

次に、さらに一般的な真空を考えてみよう。具体的には

$$N = (1 + \cdots + 1) + (2 + \cdots + 2) + \cdots + (k + \cdots + k) \quad (7.12.1)$$

という分割に対応する真空を考えて、各々の表現の個数が無限大に発散するが、その個数の比は固定されるという極限を取るものとする。実際に計算を行うと、単一トレースの exactly protected 状態のスペクトルは、1 枚の M5-brane の場合の単一トレースの exactly protected 状態のスペクトルを k 個集めたものになる。

仮説が正しいとすれば、このような真空は k 個の同心球状の M5-brane で異なる半径を持つものが集まった系であると解釈することになる。従って、以上の議論は仮説を支持すると考えられる。なぜなら、1 枚の M5-brane の場合のスペクトルを k 個集めるということは、 k 個の M5-brane の揺らぎを各々独立なものとして扱うことを示唆しているからである。

もし、ある $n < k$ において、 n 次元既約表現の個数 (の比) が 0 になっている場合、つまり

$$N = (1 + \cdots + 1) + (2 + \cdots + 2) + \cdots + [(n-1) + \cdots + (n-1)] \\ + [(n+1) + \cdots + (n+1)] + \cdots + (k + \cdots + k) \quad (7.12.2)$$

となっている場合には、protected 状態を 1 組失ってしまうことになるが、これは n 番目に大きい M5-brane が萎んで $(n+1)$ 番目に大きい M5-brane と束縛状態を作っているのだと解釈すればよいと考えられる。

ここで、7.11.2 節で計算した励起状態 (揺らぎ) のスペクトルは M5-brane の半径に依存しないことに注意しよう。この事実があったからこそ、任意の半径を持つ k 個の M5-brane の系に対応する BMN 行列模型の状態を考えるのに、1 枚の M5-brane の揺らぎのスペクトルを単に k 個集めればよかったのである。

k 個の M5-brane が重なっている状態については、対応する BMN 行列模型の状態は正しい物理的な大きさを持つという証拠を得ることができる。実際、 k 次元表現を m 個集めた状態 ($N = mk$) については、摂動論を用いて

$$\bar{r}^2 \equiv \left\langle \frac{1}{N} \text{Tr} [X_a]^2 \right\rangle = 18 \frac{R}{\mu} m \left[1 + \mathcal{O} \left(\frac{mR^3}{\mu^3} \right) \right] \quad (7.12.3)$$

と計算できる。 $\mu p^+ = \mu mk/R$ を固定したまま m を増加させた場合、状態の大きさもその摂動補正も大きくなる。そして、それらは期待値が $\bar{r} \approx (\mu p^+/k)^{1/4}$ となるときに一致する。これは、7.11.1 節で effective な結合定数がオーダー 1 になったときの状況とちょうど同じである。もちろん、このような計算によって期待通りの半径が得られる保証はない。期待される半径は $m \rightarrow \infty$ のときに再現されるべきものであるから、具体的に計算することは不可能であるからだ。

7.12.2 仮説を正当化する証拠 (2)

さらに仮説を正当化する証拠を提示するために、 k 次元既約表現を m 個集めたもの ($N = mk$) で表される BMN 行列模型の真空について、もう少し詳しく調べてみよう。詳しくは 7.9 節の議論の内容を参照して頂きたい。

この真空は m 個の重なった M2-brane の系や k 個の重なった M5-brane の系を記述する。先に述べたように、どちらの解釈を採用するかはパラメータに依存するのであった。 $N \rightarrow \infty$ の場合はその区別が明確で、前者は $k \rightarrow \infty$ の、後者は $m \rightarrow \infty$ の極限を取った場合に採用すべき解釈であった。

μ が非常に大きい場合、この真空状態の周りでの励起状態は、一般に $SU(4|2)$ 表現のうち $2, 4, \dots, 2k$ 個の箱が 1 列 (column) に並んだ Young 超図に対応するものの $m \times m$ 行列の振動子によって生成されるのであった。

単一トレースの exactly protected 状態は、2 つの箱を持った振動子を m 個以下だけ含むトレースで作られる。 m 個より多い振動子を含むものは、独立ではないことに注意しよう。 $m \rightarrow \infty$ の場合は、図 7.11 のスペクトルが全て得られて、これらの状態は k 個の M5-brane の束縛状態の protected な揺らぎに対応している。一方、 m を固定したまま $k \rightarrow \infty$ の極限を取ると、M2-brane の描像が得られるはずであるが、このときは図 7.11 のスペクトルのうち一部が得られるに過ぎない。

従って、この M2-brane 描像をどのように解釈するべきかについて考える必要がある。

複数枚の M2-brane の励起状態は、M2-brane 上の理論の chiral 演算子と対応付けられる。

この疑問に答えるためには、M 理論において m 個の重なった M2-brane の低エネルギー理論を記述する $SO(8)$ 超共形理論には、 m 個以下の脚を持つ traceless で対称な $SO(8)$ 表現の chiral 演算子が存在していることを思い出せばよい。

これらの演算子は $R \times S^2$ 上の M2-brane 理論の状態と対応しているはずである。また pp-wave 背景時空中においては、球面状 M2-brane 上で定義されている理論は、 R 対称性 $SO(8)$ のうち $SO(6)$ の部分対称性のみを保持している。

従って、chiral 演算子に対応する状態が pp-wave 背景時空中において球面状 M2-brane として存在しているのであれば、それらは m 個以下の脚を持った traceless で対称な $SO(6)$ 表現に属する状態として現れていると考えられる。

ここで注目している exactly protected 状態が持っている、量子数や脚の数の cutoff、それからエネルギーと量子数の関係を調べると、まさに chiral 演算子と同じであることが確認できる。よって、これらの exactly protected 状態は chiral 演算子と対応していると結論付けるのが自然である。

複数枚の M5-brane の励起状態は、 $\mathcal{N} = (0, 2)$ 超共形理論の chiral 演算子と対応付けられる。

複数枚の M2-brane の励起状態が $SO(8)$ 超共形理論の chiral 演算子と対応付けられたので、次に k 枚の M5-brane の励起状態が $\mathcal{N} = (0, 2)$ 超共形理論の chiral 演算子と対応付けられるかどうかを確認してみよう。

この場合、chiral 演算子は R 対称性 $SO(5)$ の traceless で対称な表現のうち k 個以下の脚を持ったものになっている。pp-wave 背景時空中における球面状 M5-brane は、 $SO(5)$ 対称性のうち $SO(3)$ 部分対称性のみを保持するので、protected 状態としてはスピンの k 以下の $SU(2) \sim SO(3)$ 表現であると考えられる。

実際、スペクトルの中にこれらの量子数を持った単一トレース状態の組が存在していることが確認できる。 $2n$ 個の箱が 1 列 (column) に並んだ $SU(4|2)$ 表現には、スピン n の $SU(2)$ 量子数を持ったプライマリー状態とそれに超対称電荷を作用させて得られる状態が含まれているので、このような振動子のトレースを取ることで得られるのである。

ここでは、このような単一振動子状態を $\mathcal{N} = (0, 2)$ 超共形理論の chiral 演算子と対応付けたいのであるが、これが protected 状態であることを確認することはできない。これらの多重項は BPS 多重項ではあるのだが、7.10 節で議論したように、4 行以上の (または 3 行目に 2 つ以上の箱が並んでいる) Young 超図に対応する $SU(4|2)$ 多重項は、BPS 多重項であっても他の BPS 多重項と結合してエネルギーが変わってしまうことがあるからである。

しかしながら、特別な場合であればエネルギーが変わらないの確認することができる。 $m = 1$ の場合は、4 個か 6 個の箱が 1 列に並んだ単一振動子状態は摂動論の任意の次数において補正を受けず、8 個か 10 個の箱が 1 列に並んだ状態も摂動論の最低次において補正を受けないことが確認できる [55]。

より一般的な議論によれば、pp-wave 背景時空中における球面状 M2-brane の 2 次の揺らぎのスペクトルは偶数個の箱が 1 列に並んだ Young 超図に対応する $SU(4|2)$ 表現の組で表せるのであった。M5-brane の場合と同様に、これらの状態は BMN 行列模型の protected 状態と large N 極限で対応すると考えられる。このような protected 状態の自然な候補は単一振動子状態である。

すなわち、large k 極限において M2-brane の揺らぎのスペクトルと一致するような状態は protected 状態であり、そのような状態は k を固定したまま large m 極限を取ったときに M5-brane の chiral 演算子と対応するべきなのである。

7.13 D2/M2-brane 理論の正則化としての BMN 行列模型

$SU(2)$ の高次元表現に対応する真空の周りで展開した D0-brane 行列模型は fuzzy 球面上の D2-brane 理論に似ているので、この行列模型を D2-brane 理論の正則化 (regularization) として考えられるのではないだろうか。BMN 行列模型は D2-brane 理論が持っている 16 個の超対称性を保持しているので、正則化と見做せるならば興味深いものである。一般に、正則化は超対称性を破ってしまうことが多いからである (格子正則化など)。

これらの超対称電荷は Hamiltonian に球面上の回転生成子を足したものと反交換する。球面を大きくする極限において、この球面上の回転は空間的な平面における並進と回転になる。

decouple 極限

k 枚の M2-brane の真空の周りで展開された BMN 行列模型を考えよう。この真空は、同じ N 次元の $SU(2)$ 表現が k 個集まったものである。この理論は半径 μ^{-1} の fuzzy 球面上で定義された理論として見做すことができる。このとき、非可換パラメータ θ と結合定数 g_{YM} は

$$\theta = \frac{1}{\mu^2 N}, \quad g_{YM}^2 = \frac{g_{0YM}^2}{\mu^2 N} \quad (7.13.1)$$

である。ここでは、 g_{YM}^2 と μ を固定したまま $N \rightarrow \infty$ 極限を取ることにしよう。この極限において非可換パラメータは 0 になるので、16 個の超対称電荷を持った 2 次元球面上の連続的な理論が得られることになる。その作用は

$$\begin{aligned} S = \frac{1}{g_{YM}^2} \int dt \frac{d\Omega}{\mu^2} \text{tr} \left[-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{2} (D_\mu X^a)^2 - \frac{1}{2} (D_\mu \phi)^2 + \frac{i}{2} \Psi^\dagger D_0 \Psi \right. \\ \left. - \frac{i}{2} \epsilon^{ijk} \Psi^\dagger \gamma^i x^j D_k \Psi + \frac{1}{2} \Psi^\dagger \gamma^i x^i [\phi, \Psi] + \frac{1}{2} \Psi^\dagger \gamma^a [X^a, \Psi] + \frac{1}{4} [X_a, X_b]^2 + \frac{1}{2} [\phi, X^a]^2 \right. \\ \left. - \frac{\mu^2}{8} X^a X^a - \frac{\mu^2}{2} \phi^2 - \frac{3i\mu}{8} \Psi^\dagger \gamma^{123} \Psi + \frac{\mu}{2} \phi \epsilon^{ijk} x^i F_{jk} \right] \quad (7.13.2) \end{aligned}$$

である [63]。最後の行に μ 依存の項をまとめておいた。ここで、トレースと交換子は $k \times k$ 行列に関する演算子であり、 x^i は $x_i^2 = 1$ を満たす演算子である。1 行目と 2 行目は通常の 2 + 1 次元超対称 Yang-Mills 理論において現れる項であり、3 行目はスカラー場とフェルミオン場の質量項と ϕF 相互作用項が現れている。また、球面の半径は μ^{-1} に比例している。

$\mu \rightarrow 0$ 極限を取ると、この作用は平坦な空間における 2 + 1 次元超対称 Yang-Mills 理論の作用になる。このとき、理論の超対称性も平坦な 2 + 1 次元超対称 Yang-Mills 理論の超対称性と一致する。また、 μ を固定したまま $g_{YM}^2 \rightarrow \infty$ 極限を取ると、 $R \times S^2$ 上の M2-brane 理論と関連する超共形理論となる。

作用 (7.13.2) においてスカラー場 ϕ は、基本的に動径方向に関連づいている。 S^2 上に磁気的な flux を加える状況を考えてみよう。まず $U(Nk)$ 行列模型を用意して S^2 上に磁気的な flux を加えることは、 $U(Nk + n)$ 行列模型を考えることと等価である。ここで、flux F は

$$\int_{S^2} \text{Tr} F = n \quad (7.13.3)$$

を満たすものとした。その結果、作用 (7.13.2) の理論が持つ真空は、 $\phi \sim n\mu/k$ で与えられる。ここで、 $SU(Nk)$ 行列模型を考えたとき、ゲージ群は $U(k)$ であるが、球面上の零モードである重心の $U(1)$ 自由度が除去された M2-brane 理論 (7.13.2) が得られることに注意しておこう。

M2-brane 理論 (7.13.2) において、 $\int_{S^2} \text{Tr} F = 0$ であるが、 F は ϕ と同時対角化されていて対角に沿って異なる成分が入っている (単位行列に比例していない) 場合の真空を考えよう。例えば、 $k = 2$ であれば、

$$F \sim \mu\phi \sim \text{diag.} (n, -n) \quad (7.13.4)$$

と選ぶことができる。この真空はエネルギーが 0 であり、 $N + n$ 次元と $N - n$ 次元の既約表現を集めた $SU(2)$ 表現に対応するものであると考えられる。この系は、明らかに理論 (7.13.2) の経路積分に含まれるべき系である。

実際、BMN 行列模型において、この真空と 2 つの表現の次元が同じ ($n = 0$) 場合の真空の間におけるトンネル振幅を評価することができる。そのためには、超対称量子力学において、2 つの超対称真空の間のトンネル振幅は、それらの間の superpotential の違いとして見積もることができることを思い出せばよい。今の場合、superpotential は

$$W \sim \frac{1}{g_0^2} \text{Tr} [\epsilon_{ijk} X^i X^j X^k + \mu X^i X^i] \quad (7.13.5)$$

であるから、superpotential の違いは、真空を定義する $SU(2)$ 表現の 2 次の Casimir 演算子のトレースを取ったものの違いに比例する。例えば、 N 次元表現が 2 つ集まった真空と、 $N + 1$ 次元表現と $N - 1$ 次元表現が集まった真空との間の superpotential の違いは $N/g_0^2 g_{YM}^2$ のオーダーになる。いま考えている極限においては、この定数は保持されるので、トンネル振幅は suppress されないことが分かる。

つまり、これらの真空をそれぞれ孤立させることができないのである。しかしながら、D2-brane 理論の観点から見れば、トンネルして移り合える真空というのは非常によい解釈を持っている。実際 $N \rightarrow \infty$ の極限において、表現の次元の違いが無限大になる真空同士は遠く離れてしまい、有限時間内にお互いにトンネルすることはできなくなってしまうことが理解できる。

作用 (7.13.2) が M2-brane 理論と関係していることを理解するには、(7.13.2) 式において $U(1)$ ゲージ群を取り出してみるのがよい。そして、 $U(1)$ 場の field strength の双対を取ろう。 ϕF 相互作用があるので平坦時空における D2-brane 作用よりも双対を取るの難しいが、実際に計算を行うと双対スカラーは

$$d\varphi = \frac{1}{g^2} (*F + \mu\phi dt) \quad (7.13.6)$$

と定義されることが分かる。よって、 ϕ と φ の満たす運動方程式は

$$\nabla^2 \varphi + \frac{\mu}{g^2} \partial_0 \phi = 0, \quad \nabla^2 \phi - \mu g^2 \partial_0 \varphi = 0 \quad (7.13.7)$$

と書くことができる。これらは M2-brane 理論における transverse (方向に対応する) スカラー場のうちの 2 つが満たす方程式である。

より正確に表現するために、これらのスカラーの場を複素に組んだもの (complex combination) を Z と表そう。まず古典的に回転している系 $Z_0 = g^2 e^{i\mu t}$ を取って、次に 1 次の展開 $Z = (g^2 + \phi) e^{i\mu t + i\varphi}$ を行おう。ここで、 Z の運動方程式は振動数 μ の調和振動方程式である。すると、この結果は運動方程式 (7.13.7) と一致する。

large g^2 極限を取ると、 $SO(8)$ の部分群 $SO(2)$ の角運動量が非常に大きい状態の周りで展開した M2-brane 理論が得られる。従って、理論 (7.13.2) においては $SO(6)$ 対称性しかあらわに確認することができないのである。

重力理論側から見た描像

このような decoupling 極限を重力側から解析してみよう。M2-brane の半径が Planck 単位において非常に大きくなる極限を取ろう。そのためには $r = \mu p^+$ が非常に大きくなる極限を取ればよい。この M2-brane が巻きついている 2 次元球面の周りで計量を展開すると

$$\begin{aligned} ds^2 &= -2dx^+ dx^- - \mu^2 r^2 (dx^+)^2 + r^2 d\Omega_2^2 + \dots \\ &= \frac{1}{r^2 \mu^2} (dx^-)^2 - \mu^2 r^2 (d\tilde{x}^+)^2 + r^2 d\Omega_2^2 + \dots \end{aligned} \quad (7.13.8)$$

となる。ここで $\tilde{x}^+ = x^+ + x^- / (r\mu)^2$ を定義した。… に含まれる項は議論に必要なので省略する。

ここでは、 μ を固定したまま $r \rightarrow \infty$ 極限を取ってみよう。 x^- 方向のコンパクト化半径は $\tilde{R} = R/(\mu r)$ である。よって、D2-brane 理論は

$$g_{YM} = \frac{\tilde{R}}{l_p^{3/2}} \quad (7.13.9)$$

という(通常の)次元を持った結合定数で特徴付けられることになる。世界体積上の理論においては、球面が単位半径を持つように計量をリスケールするのが便利である。このとき、理論は無次元の結合定数

$$g_{YM} r^{1/2} = \tilde{R} \sqrt{r} = \frac{R}{r^{1/2} \mu} \quad (7.13.10)$$

で特徴付けられることになる。但し $l_p = 1$ としている。これがいま考えている極限において有限であるためには、 $R^2/r \sim R^3/N \sim g_0^2/N$ が有限でなければならないことになる。これは $r \sim \mu p^+ = \mu N/R$ のとき、(7.13.1) 式と矛盾しないことを確認しておこう。

7.14 NS5/M5-brane 理論の正則化としての BMN 行列模型

BMN 行列模型から弱結合領域における NS5-brane 理論を導くことができないので、この場合は超重力理論における議論に頼るしかない。既に示したように、M5-brane の半径と運動量の関係は

$$r^4 = \frac{\mu p^+}{6} \quad (7.11.6)$$

であった。(7.13.8) 式と同様に計量を書き直そう。その上で R を適切にリスケールして、 $N \rightarrow \infty$ の極限を取れば、半径 r の 5 次元球面上の NS5-brane 理論が得られると期待することができる。

NS5-brane 理論は小弦理論 (little string theory) と呼ばれるが、これは弦の張力

$$1/\alpha' = \tilde{R}/l_p^3 \quad (7.14.1)$$

で特徴付けられる。この場合、極限において有限に固定されるべき無次元量は、単位球面における張力

$$\frac{r^2}{\alpha'} = \tilde{R} r^2 = \frac{R}{\mu r} r^2 = \frac{(g_0^2 N)^{1/4}}{\mu^{3/4}} \quad (7.14.2)$$

である。これは $\lambda^{1/4}$ と書くこともできる。 $\lambda = N^4/(\mu p^+)^3$ は $X = 0$ 真空の周りでの摂動論におけるパラメータであったことを思い出しておこう。

ここでは μ が固定されているので、NS5-brane 理論が得られる極限は、BMN 行列模型における 't Hooft 極限に対応する。小弦理論における弦は通常の 't Hooft 弦である。従って、D3-brane に対する Polchinski-Strassler の議論 [54] と同様にして議論を行うことができる。

M5-brane 理論を定義するには、パラメータ (7.14.2) を無限大とする極限を取る必要がある。これは 16 個の超対称性をあらわに保持する M5-brane 理論の定義となる。

7.15 静電気問題の系に対応する 10 次元重力解

BMN 行列模型の真空について一通り調べたところで、それに対応する静電気問題の系を扱って、第3章に沿った議論を進めていくことにしよう。

11 次元 pp-wave 時空解に対応する静電気問題の系を求める。

11 次元 pp-wave 時空解を droplet の系で表現すると、(3.2.8) 式のようになることを第3章で確認した。これは x_1 方向に並進不変な系になっているので、静電気問題の系に帰着させることができる。実際、11 次元

pp-wave 時空解は、背景ポテンシャルが

$$V = \rho^2 \eta - \frac{2}{3} \eta^3 \quad (7.15.1)$$

であるような静電気問題の系に対応していることが分かる。ここで、変数変換 (3.3.2) より

$$y = \rho \partial_\rho V = 2\rho^2 \eta, \quad x_2 = \partial_\eta V = \rho^2 - 2\eta^2 \quad (7.15.2)$$

であるから、これを (3.2.8) 式と比較することにより、

$$\rho = \pm \frac{r_5}{2}, \quad \eta = \frac{r_2}{2} \quad (7.15.3)$$

という対応関係が読み取れる。

ここで第 3 章での議論より、ポテンシャル $V = \rho^2 \eta - \frac{2}{3} \eta^3$ が定義できるのは領域 $\eta > 0$ のみであることを思い出しおこう。これは $r_2 > 0$ という条件に相当しているので都合が良い。また、 $y = 0$ において $x_2 < 0$ は $\rho = 0$ に射影され、 $x_2 > 0$ は $\eta = 0$ に射影されることも確認しておこう。

従って、11 次元 pp-wave 時空解に対応する静電気問題の系は、 $\eta = 0$ に無限大の導電円盤を置いた、背景ポテンシャル $V = \rho^2 \eta - \frac{2}{3} \eta^3$ の系であることが分かる (図 7.12)。

さらに、BMN 行列模型の真空解に対応する静電気問題の系を求める。

この背景ポテンシャル V に漸近するような Laplace 方程式 (3.3.3) の他の解を考えると、さらに複雑な境界条件を考えることができる。これについてさらに解析してみよう。

このような解は、pp-wave 時空解に漸近するような重力解に対応することが予想される。つまり、 x^- 方向に並進不変で $-p_- \neq 0$ を満たす粒子を表す系に漸近するような重力解が (古典解のレベルで) 得られるのである。ここで、 x^- 方向をコンパクト化して IIA 型に移行することを考えよう。すると、解析的な geometry を持ち、かつ BMN 行列模型の重力双対である解が得られることになる。

これに対応する droplet の系は、Polchinski-Strassler 近似を用いて詳しく解析することができる [64]。この方法を用いれば、BMN 行列模型の様々な真空に対応する非特異な解を得ることができるのである。第 9 章で x_1 方向に並進不変な droplet の系と Young 図の対応関係について議論するのであるが、その対応関係を用いることにより、BMN 行列模型の様々な真空に対応する Young 図を得ることができる。

例えば、図 7.13 (a) のような droplet の系は、D0-brane が NS5-brane (M5-brane) に膨らむ真空解に対応している [63]。また、図 7.13 (b) のような droplet の系は、D0-brane が S^2 上の D2-brane に膨らむ真空解に対応している。但し、第 9 章での議論を繰り返すことにより、これら 2 つの真空解のトポロジーは同じであることが結論される。実際、図 7.13 に示した弧 1, 2 に S^5 または S^2 を fiber させることによって、IIA 型理論の重力解において、両者とも萎まない S^3 と萎まない S^6 を持っていることが確認できる。

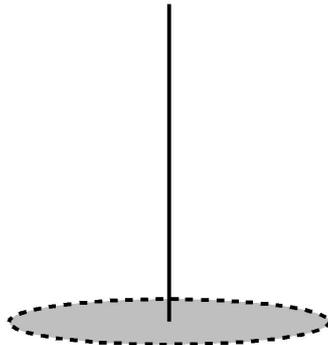


図 7.12: 11 次元 pp-wave 時空解に対応する静電気問題の系：背景ポテンシャルは $V = \rho^2 \eta - \frac{2}{3} \eta^3$ である。

以上の議論より、BMN 行列模型の真空解に対応する静電気問題の系としては、 $\eta = 0$ に無限大の円盤が置いてあり、さらに $\eta > 0$ に有限の大きさの円盤を有限個だけ置いたような系を考えればよいことが分かる (図 7.14)。このとき、背景ポテンシャルは

$$V_{bg} \sim \rho^2 \eta - \frac{2}{3} \eta^3 \quad (7.15.4)$$

である。この系を充分遠方から見たとき、電気ポテンシャルの主要項は

$$V = V_{bg} + \frac{P \eta}{(\rho^2 + \eta^2)^{3/2}} + \dots \quad (7.15.5)$$

となる。第 2 項は有限の大きさの円盤によって作られる双極子モーメント P からの寄与である。静電気問題においては、 $\eta = 0$ に無限大の導電円盤を置くことは有限の大きさの円盤とは逆の電荷を持った仮想電荷を置くことと同等である。従って、 ρ や η が大きい領域では場の単極子の成分は寄与しなくなってしまう。その結果、双極子モーメントが主要な寄与をすることになるのである。また、 \dots は多重極モーメントからの寄与を表している。

7.15.1 電荷と D0-brane 解の漸近解

充分遠方では D0-brane 解に漸近する。

以上の結果を IIA 型 ansatz (3.3.8)-(3.3.9) に代入すると、紫外領域において、 N_0 個の D0-brane が存在する時空解の紫外領域と一致することが確認できる。このとき、 N_0 は双極子モーメント P に比例する。以下で、実際に確認してみよう。

ここでは簡単な場合として、 $\eta = 0$ に無限大の導電円盤を置いて、さらにそこから $d \sim N_5$ だけ距離が離れたところに有限だが充分大きな円盤を 1 枚だけ置いた状況を考えよう。この系は N_5 枚の NS5-brane を持つ真空解に対応していることが直ちに分かる。

漸近領域におけるポテンシャルの主要項は、既に確認したように

$$V = \alpha \left(\rho^2 \eta - \frac{2}{3} \eta^3 \right) + \Delta; \quad \alpha = \frac{8}{g_s}, \quad \Delta = \frac{P \eta}{(\rho^2 + \eta^2)^{3/2}} \quad (7.15.6)$$

である。係数 α は実際に計量を求めて超重力理論の解と比較することで求めた。これを IIA 型 ansatz (3.3.8)-(3.3.9) に代入して、さらに $r = 4\sqrt{\rho^2 + \eta^2}$ として r 座標を設定すると、 r が大きい領域における解の主要

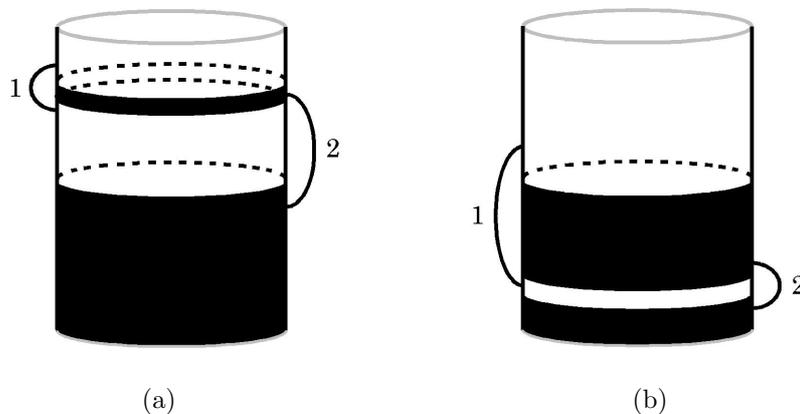


図 7.13: BMN 行列模型の真空解に対応する droplet の系の例

項は

$$ds_{10}^2 = -\frac{\alpha^{1/2}r^{7/2}}{2^4\sqrt{15}P^{1/2}}dt^2 + \frac{2^4\sqrt{15}P^{1/2}}{\alpha^{1/2}r^{7/2}}dr^2 + \frac{2^4\sqrt{15}P^{1/2}}{\alpha^{1/2}r^{3/2}}d\Omega_8^2$$

$$\equiv Z^{-\frac{1}{2}}dt^2 + Z^{\frac{1}{2}}(dr^2 + r^2d\Omega^2) \quad (7.15.7)$$

であることが分かる。ここでワープ因子 (warp factor)

$$Z \equiv \frac{2^8 15 P}{\alpha r^7} \quad (7.15.8)$$

を定義した。これは明らかに、 r が大きい領域における標準的な D0-brane 解 [34]

$$ds^2 = -\frac{r^{7/2}}{2\pi g_s^{1/2}\sqrt{15\pi N_0}}dt^2 + \frac{2\pi g_s^{1/2}\sqrt{15\pi N_0}}{r^{7/2}}dr^2 + \frac{g_s\sqrt{15\pi N_0}}{r^{3/2}}d\Omega^2$$

$$= -\frac{r^{7/2}}{4\pi^2 g_{YM0}\sqrt{15\pi N_0}}dt^2 + \frac{4\pi^2 g_{YM0}\sqrt{15\pi N_0}}{r^{7/2}}dr^2 + \frac{4\pi^2 g_{YM0}\sqrt{15\pi N_0}}{r^{3/2}}d\Omega^2 \quad (7.15.9)$$

と対応していることが見て取れる。ここで N_0 は D0-brane の個数である。 g_s は弦の結合定数である。 $g_{YM0}^2 = g_s/(2\pi)^2$ は双対な超対称 Yang-Mills 理論^{*2}の結合定数である。また、一貫して $\alpha' = 1$ としている。

双極子モーメント P を計算する。

そもそも仮想電荷は $\eta = 0$ にある無限大の導電円盤によって作られるものであるから、双極子モーメント P 、有限の大きさの円盤の持つ電荷 Q 、その円盤と無限大の円盤との距離 d の間には

$$P = 2Qd \quad (7.15.10)$$

という関係が成り立っていることが直ちに理解できる。また、距離 d と N_5 の関係は既に (3.3.22) 式で

$$d = \frac{\pi}{2}N_5 \quad (7.15.11)$$

と与えられていることを思い出そう。

電荷 Q を計算するために、半径が $\rho_0 \gg N_5$ を満たす有限だが十分に大きな円盤を 1 枚だけ置いて、さらに系全体を充分遠方から見るという状況を考えることにしよう。するとこのとき、無限大の導電円盤が $\eta = 0$ に置かれていて、さらに $(\rho, \eta) = (\rho_0, 0)$ の円周上に局所的な源 (source) が存在しているように見えるのである (図 7.15)。つまりこれは、半径 ρ_0 の円盤上にある誘導電荷は、 $\eta = 0$ の導電面上の誘導電荷として近似することが

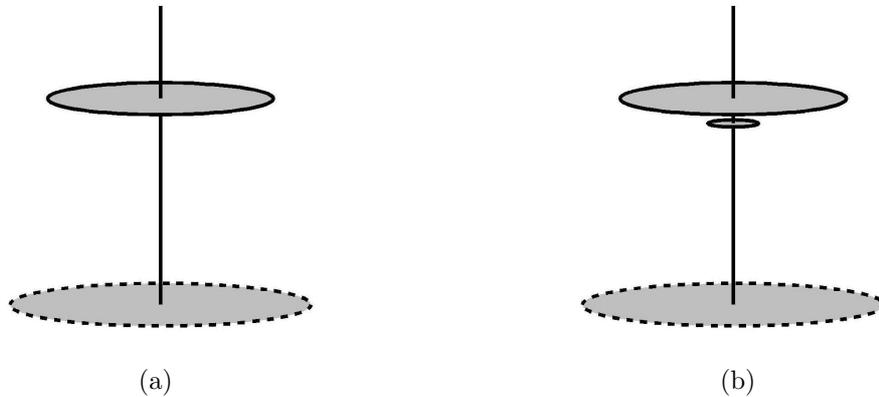


図 7.14: BMN 行列模型の真空解に対応する静電気問題の系の例

^{*2} 但し、この場合は超対称量子力学になる。

できるということを意味している。この誘導電荷は単純に (7.15.6) 式の第 1 項の外部ポテンシャルで与えられる。従って、良い近似として

$$Q = \frac{1}{4\pi} \int \partial_\eta V_{ext} = \frac{1}{4\pi} \int (2\pi\rho) d\rho \alpha (\rho^2 - 2\eta^2) \Big|_{(\rho,\eta)=(\rho_0,0)} = \frac{\alpha\rho_0^4}{8} \quad (7.15.12)$$

と求めることができる。以上より、双極子モーメントは

$$P = 2Qd = \frac{1}{8} \alpha \pi N_5 \rho_0^4 \quad (7.15.13)$$

と求めることができた。

ワーブ因子について

従って、計量 (7.15.7) におけるワーブ因子 (7.15.8) は

$$Z = \frac{2^8 15 P}{\alpha r^7} = \frac{2^5 15 \pi \rho_0^4 N_5}{r^7} \quad (7.15.14)$$

である。但し、最後の等号は有限の大きさの円盤が $\eta = 0$ 平面のごく近くに置かれているという近似を用いたことに注意しておこう。一方、D0-brane 解の計量 (7.15.9) において、ワーブ因子は

$$Z = \frac{2^4 15 \pi^5 g_{YM0}^2 N_0}{r^7} \quad (7.15.15)$$

と読み取ることができる。これらのワーブ因子は一致しているはずであるから、両者を比較すると

$$\rho_0^4 = \frac{1}{2} \pi^4 g_{YM0}^2 N_2 \quad (7.15.16)$$

という関係式が得られる。但し、flux について $N_0 = N_2 N_5$ という関係式が成り立つことを用いた。

双極子モーメント P は N_2, N_5 で表せる。

以上では、有限サイズの円盤が 1 枚だけの場合を考えた。そして、双極子モーメント P は

$$P = \frac{1}{16} \alpha \pi^5 g_{YM0}^2 N_2 N_5; \quad \alpha = \frac{8}{g_s}, \quad N_2 N_5 = N_0 \quad (7.15.17)$$

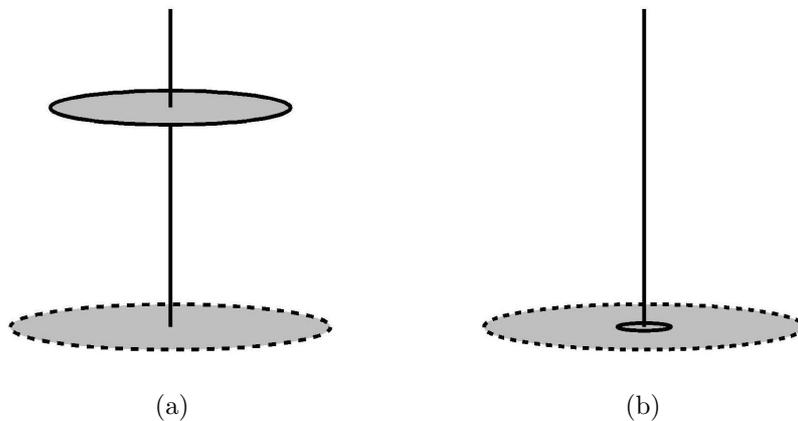


図 7.15: (a) \rightarrow (b) とする極限を考える。(a) 系を充分近傍から見た場合。(b) 系を充分遠方から見た場合。有限の大きさの円盤に誘導された電荷の寄与は、無限大の円盤上において円周上に局所的に存在する電荷として扱うことができる。

と表せることが分かった。一般に複数枚の円盤があるとき、円盤を i, j, \dots でラベル付けして、無限大の円盤 $\eta = 0$ からの距離をそれぞれ η_i と表すことにすると、双極子モーメントは

$$P = 2 \sum_i \eta_i Q_i \sim \sum_i N_2^i \left(\sum_{j < i} N_5^j \right) = N_0 \quad (7.15.18)$$

と計算することができる。(3.3.22) 式より、隣の円盤との距離 $d_i = \eta_{i+1} - \eta_i$ は NS5-brane の charge に比例していることに注意しておこう。よって、距離 d_i は量子化されている。また、関係式 (7.15.18) は、(2.5.2) 式において $n \sim d_i$, $N(n) = N_2^i$ としたものと一致していることも確認しておこう。

ある極限では円盤を点電荷と見做せる。

この問題は Polchinski-Strassler の方法 [54] を使って解析されている [64]。具体的には、球面状の D2-brane に D0-brane charge を与える (D0-brane を smear する) という操作を行うのである。

このような操作は、静電気問題の系では有限の大きさの円盤を $\rho = 0$ に置かれた点電荷に置き換えるという操作に相当する (図 7.16)。または、点電荷と見做せるような極限を考えているとも表現できる。円盤間の距離が円盤の大きさよりも十分に大きく、また円盤から十分に離れたところから観測する限りは、この近似は正しいものである。

以上の議論について詳しく見てみよう。ポテンシャルの漸近形

$$V = \rho^2 \eta - \frac{2}{3} \eta^3 + \Delta \quad (7.15.19)$$

において Δ を摂動として扱おう。先ほどの双極子モーメント P を計算する議論と比較すると、ポテンシャル V のスケールを適当に変えている。このとき、 V を IIA 型 ansatz (3.3.8)-(3.3.9) に代入すると

$$\begin{aligned} ds_{10}^2 &= -Z^{1/2} dt^2 + Z^{1/2} dx^2, \quad Z = \frac{-1}{2\rho^2 \eta} \left(\frac{2}{\rho} \partial_\rho \Delta + \partial_\eta^2 \Delta \right) \\ B_2 &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{4\eta^2}{\rho} \partial_\rho \Delta + 2\eta \partial_\eta \Delta - 2\Delta \right) d^2 \Omega \end{aligned} \quad (7.15.20)$$

となる。主要項のみを取り出す近似

$$Z = \frac{R^7}{r^7}, \quad H_3 = \frac{\alpha}{r^7} \left(T_3 - \frac{7}{3} V_3 \right), \quad G_6 = \frac{\alpha}{g_s r^7} \left(\frac{1}{3} *_9 T_3 - \frac{7}{3} *_9 V_3 \right); \quad r = \sqrt{\rho^2 + \eta^2} \quad (7.15.21)$$

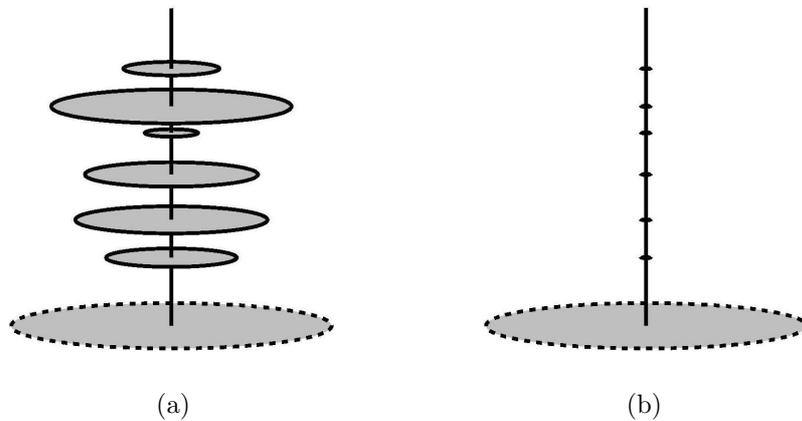


図 7.16: (a) \rightarrow (b) とする極限を考える。(a) 系を充分近傍から見た場合。(b) 系を充分遠方から見た場合。円盤が η 軸上の点電荷に近似されている。

と比較すると、摂動項の表式が

$$\Delta = \frac{P\eta}{(\rho^2 + \eta^2)^{3/2}} \quad (7.15.22)$$

と得られる。この結果は既に何度も用いているものである。 ρ と η は $SO(6)$ と $SO(3)$ 方向の半径変数である。 Z をいくつかの S^2 上に均一に塗りつけた多重中心 (multi-center) D0-brane に対応する表現と置き換えれば、

$$\Delta = \sum_i Q_i \left(\frac{1}{\sqrt{(\eta - \eta_0^{(i)})^2 + \rho^2}} - \frac{1}{\sqrt{(\eta + \eta_0^{(i)})^2 + \rho^2}} \right) \quad (7.15.23)$$

となり、これは $\eta = 0$ の上にあった円盤を点電荷として扱ったときの極限と正確に一致していることがわかる。

7.15.2 $N_5 = 1$ の場合に対応する重力解

N_5 の値が小さい場合は、まず大きい場合を考えてから共形場理論によって外挿すればよい。

場の理論の観点から見ると、最も単純な真空は $X^A = 0$ ($A = 1, \dots, 9$) となるものである。これは、 $SU(2)$ の自明な (1 次元の) 表現が N_0 個並んだ場合に相当する。前節までの議論より、これを重力側で記述すると、無限大の導電面 $\eta = 0$ から 1 単位だけ離れたところに 1 枚の有限な大きさの円盤があるという状況に相当することが分かる。しかしながら、この真空解は NS5-brane が 1 枚だけ存在している場合に相当している。よって、この NS5-brane の近くでは重力の近似が使えなくなってしまうのである。

一方、 $SU(2)$ の $N_5 (\gg 1)$ 次元表現を集めたものに対応する真空ならば容易に扱うことができる。これらの解には N_5 枚の NS5-brane が存在しており、少なくとも near BPS 状態に関係した領域においては興味深い解を与えてくれるのである。従って、このような真空解を考えてから、共形場理論によって N_5 が小さい値の真空解に外挿することができるはずである。

このようにして、 $\eta = 0$ の無限大の円盤から僅かな距離しか離れていない円盤が 1 枚だけある場合を考えてみよう。つまり、 $N_5 \ll N_0$ という状況に相当する。前節までの議論に基づけば、 N_0 個の D0-brane が N_5 個の NS5-brane に膨らむことが予想される。もちろん、この重力解は滑らかであろうが、 N_5 個の NS5-brane が存在する影響が現れるはずである。ここで NS5-brane が現れることは、1/2 BPS 状態を球面状の NS5-brane 上における固有値で表現した描像 [65, 66] と関係しているものと思われる。

円盤の縁で解を展開することができる。

残念ながら Laplace 方程式 (3.3.3) の完全な解を得ることはできないが、第 3 章の議論に基づいて、円盤の縁で解を展開することならできる。いまの場合は、2 枚の円盤の縁の近くの領域に対応する解

$$\partial_w z = \frac{(w - ia)(w + ib)}{w} \quad (3.3.37)$$

を考えて、片方の円盤を無限遠方まで引き離してしまえばよいのである ($b \rightarrow \infty$)。その上で、適当なりスケールを行うと

$$\partial_w z = i \frac{w - ia}{w} \quad (7.15.24)$$

という関係式が得られる。これを IIA 型 ansatz の pp-wave 極限 (3.3.33) に代入すると、計量は

$$ds_{10}^2 = 2dx^+ dx^- - \left(\frac{8}{a} |w - ia|^2 + \mathbf{r}^2 \right) (dx^+)^2 + d\mathbf{r}^2 + \frac{2a}{|w|^2} \left[dw d\bar{w} + \left(\frac{w + \bar{w}}{2} \right)^2 d\Omega_2^2 \right] \quad (7.15.25)$$

となることが分かる。問題の設定より、これは NS5-brane の near horizon 領域における計量になっているはずである。

ここで、 g_{++} に対する寄与が

$$4f^{-1} |\partial_w z|^2 = \frac{8}{a} |w - ia|^2 \quad (7.15.26)$$

であることに注目しよう。これは光錐ゲージにおける弦の世界面上でのポテンシャルを意味していて、ポテンシャルの形に応じて throat に沿った特別な位置に弦が局所化する（局所に追いやられる）ことが知られている。この場合は $w = ia$ 、すなわち円盤の縁に対応する位置に局所化することが読み取れる。

よって、 $w = ia e^{\phi+i\theta}$ とパラメータ付けを行うと、10 次元重力解は結局

$$\begin{aligned} ds_{10}^2 &= -2dx^+ dx^- + d\mathbf{r}^2 - \mathbf{r}^2 dx^{+2} - 4N_5(e^{2\phi} + 1 - 2e^\phi \cos\theta) dx^{+2} \\ &\quad + N_5(d\phi^2 + d\theta^2 + \sin^2\theta d\Omega_2^2) \\ e^\Phi &= g_s e^{-\phi} \\ C_1 &= -\frac{1}{g_s} 2\sqrt{N_5}(e^{2\phi} - e^\phi \cos\theta) dx^+ \\ C_3 &= \frac{1}{g_s} N_5^{3/2} 2e^\phi \sin^3\theta dx^+ \wedge d^2\Omega \\ H_3 &= 2N_5 \sin^2\theta d\theta \wedge d^2\Omega \end{aligned} \quad (7.15.27)$$

と表すことができる。但し $\alpha' = 1$ としている。 g_s は円盤の縁における dilaton の値である。

$x^\pm \rightarrow \lambda^{\pm 1} x^\pm$ というブーストを行った上で $\lambda \rightarrow 0$ とすると、 dx^+ を含んだ非自明な項を全て 0 にすることができて、通常の NS5-brane の near horizon geometry [67]

$$\begin{aligned} ds^2 &= -2dx^+ dx^- + d\mathbf{r}^2 + N_5(d\phi^2 + d\theta^2 + \sin^2\theta d\Omega_2^2) \\ &= (-dt^2 + dx^2 + d\mathbf{r}^2) + N_5(d\phi^2 + d\theta^2 + \sin^2\theta d\Omega_2^2) \end{aligned} \quad (7.15.29)$$

を回復することができる。但し、 $x^\pm = (t \pm x)/\sqrt{2}$ とした。

また、 ϕ と θ が小さい極限を取ると、これは $w \rightarrow ia$ という極限を取ることを意味することからも分かるように、IIA 型 pp-wave 時空解 (3.3.35) を得ることができる。

場の理論との関係を考察する。

第 3 章の議論より、補関数 f について

$$E - J = \sqrt{1 + 2f \frac{n^2}{J^2}} \sim 1 + f \frac{n^2}{J^2}; \quad f = \frac{1}{2} R_{S^5}^4, \quad R_{S^5}^2 = 4\rho_0 \quad (7.15.30)$$

が成り立つことが分かる。また、 ρ については

$$\rho_0^4 = \frac{1}{2} \pi^4 g_{YM0}^2 N_2 \quad (7.15.16)$$

であることが分かっている。よって、強結合領域において

$$\frac{R_{S^5}^2}{\alpha'} = 4 \left(\frac{1}{2} \pi^4 g_{YM0}^2 N_2 \right)^{1/4}, \quad f = 4\pi^2 (2g_{YM0}^2 N_2)^{1/2} \quad (7.15.31)$$

となる。以上では、世界面上のスカラー場の質量を $m = 1$ とおいていたので、 m を復活させると

$$\frac{R_{S^5}^2}{\alpha'} = 4 \left(\frac{\pi^4 g_{YM0}^2 N_2}{2m^3} \right)^{1/4}, \quad f = 4\pi^2 \left(\frac{2g_{YM0}^2 N_2}{m^3} \right)^{1/2}; \quad N_2 = \frac{N_0}{N_5} \quad (7.15.32)$$

という関係式が得られる。

重要なパラメータは、円盤の縁における弦理論の単位における S^5 の大きさである。 m は $SO(6)$ スカラー場の質量である。作用としては

$$S = \frac{1}{g_{YM0}^2} \int \text{Tr} \left[\frac{1}{2} (D_0 Y_i)^2 - \frac{1}{2} m^2 Y_i^2 + \frac{1}{4} [Y_i, Y_j]^2 + \dots \right] \quad (7.15.33)$$

という規格化を用いていることを明記しておこう。ここで Y_i が $SO(6)$ スカラーである。無次元パラメータは g_{YM0}^2/m^3 となることにも注意しておこう。

N_0 は D0-brane の個数であり、BMN 行列理論におけるゲージ群のランクと言い換えることもできる。よって、重力近似が信用できるのは、 $N_5 \ll N_0$ であり、かつ S^5 の大きさが弦理論の単位系において十分に大きいときである。

NS5-brane に平行な 4 次元空間方向について

以上の結果を用いれば、十分に大きい角運動量 J を持つ near BPS 励起状態のスペクトルを計算することができる。その結果、計量 (7.15.27) における r 方向の揺らぎについて、そのスペクトルは

$$\begin{aligned} (E - J)_n &= \sqrt{1 + \frac{R_{S^5}^4 n^2}{\alpha'^2 J^2}} = \sqrt{1 + (4\pi)^2 \left(\frac{g_{YM}^2 N_0}{2m^3 N_5} \right)^{1/2} \frac{n^2}{J^2}} \\ &= 1 + 4\pi^2 \left(\frac{2g_{YM}^2 N_0}{m^3 N_5} \right)^{1/2} \frac{n^2}{J^2} + \dots \end{aligned} \quad (7.15.34)$$

であることが分かる。

より一般的な状況において、 N_5 を固定したまま 't Hooft 極限を取ると、スペクトルは large J 極限において

$$(E - J)_n = 1 + f \left(\frac{g_{YM}^2 N_0}{m^3 N_5}, N_5 \right) \frac{n^2}{J^2} + \dots \quad (7.15.35)$$

となることが予想される。

$N_5 = 1$ の場合は、4-loop レベルまで解析されていて

$$\begin{aligned} f_{pert} \left(\frac{g_{YM}^2 N_0}{m^3}, N_5 = 1 \right) &= \frac{2\pi^2 g_{YM}^2 N_0}{m^3} \left[1 - \frac{7}{8} \frac{g_{YM}^2 N_0}{m^3} + \frac{71}{32} \left(\frac{g_{YM}^2 N_0}{m^3} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{7767}{1024} \left(\frac{g_{YM}^2 N_0}{m^3} \right)^3 + \dots \right] \end{aligned} \quad (7.15.36)$$

であることが分かっている [68]。ここで、関数 f は弱結合における結果 (7.15.36) と強結合における結果 (7.15.34) の間で滑らかに繋がっていると期待をしているのである。

特にこの計算に関係する領域において、ここで求めた重力解は $N_5 = 1$ の場合は有効ではないはずである。一方、 f を決定する量は S^5 の半径であることを確認した。それでは、この解の信用性についてどのように判断すればよいのだろうか。

まず、Polchinski-Strassler の方法 [54, 64] に似た近似を使って、 S^5 上に D0-brane を塗り付けて解を近似しよう。つまり、D0-brane charge を入れることで、D0-brane charge を持った NS5-brane として扱うというわけである。次に、この NS5-brane を外場と couple させる。外場は D0-brane の世界体積に質量を誘発させるので、これによって NS5-brane は決まった半径を得るのである。正確な数値係数を除けば、これは (7.14.2) 式と一致する。従って、(7.15.34) 式は $N_5 = 1$ においても信用してよい式であると考えられるのである。

言い換えれば、[68] において結合定数の「繰り込み」と考えられていた現象を、ここでは重力による記述の強結合領域において、NS5-brane の半径を与える物理的な量であると解釈することができるのである。

NS5-brane に垂直な 4 次元空間方向について

単一の NS5-brane は near horizon 領域を持たないという事実は、この NS5-brane に垂直な方向である 4 つの方向にも何か大きな変化を起こすことを示唆している。 $N_5 = 1$ の場合のこの特徴は、ゲージ理論側からも観測できるので、次節で詳しく議論する。

異なる真空の間でのトンネル現象

最後に、異なる真空の間でのトンネルの問題について論じよう。一般には、行列模型の異なる真空の間においてトンネルできる。しかし、トンネル現象はある状況では suppress されてしまう。

例えば、先程 $\eta = 0$ の平面から距離 N_5 だけ離れた 1 枚の大きな円盤がある状況に対応する真空を考えたが、重力理論の観点からすると、大きな円盤から 1 単位の電荷を取り出して、違う円盤に置くことができる。この過程において電荷は保存しないが、 N_0 は保存しなくてはならない。大きな円盤の電荷を 1 単位減らすと、geometry において N_5 個の D0-brane が残ってしまう。従って、例えば $\eta = 0$ から 1 単位の距離だけ離れた別の円盤に N_5 単位の電荷を置くことはできることが分かる。geometry においては、この転移は D-brane インスタントンによって媒介される。もとの円盤と $\eta = 0$ 平面の間の geometry は NS5-brane 解 (4.5.6) で近似される。図 3.5 より、この重力解には萎められない Σ_3 が存在していることに注目しよう。この Σ_3 を Euclidean な D2-brane で包み込むとすると、 N_5 単位の flux が D2-brane を突き抜けるので、D2-brane の端には N_5 個の D0-brane が現れることになる [23, 24]。従って、このインスタントンは N_5 個の D0-brane の生成を表すことが理解できる。また、インスタントンの作用は Euclidean D2-brane の作用に比例する。

もし Σ_3 の体積が十分に大きくて、弦の結合が十分に小さければ、この過程は suppress される。このため、今の場合においては、場の理論のパラメータを適切に選ばなくてはならない。より少数の D0-brane を生成するインスタントンは無いということを記憶しておこう。これは場の理論においてもそうである。次元 N_5 の $SU(2)$ 表現をたくさん集めてできる真空において、その中から 1 つの表現を取り出して、その N_5 個の D0-brane の表現をより低次元の表現にしていく。これは基本的に、上のインスタントンによって記述される過程である。言い換えれば、D-brane インスタントンが N_5 個の D0-brane を作るという事実は、場の理論において得られることと合致しているのである。

7.16 near BPS 状態についての更なる解析

ここまで、NS5-brane に平行な 4 次元方向における弦の振動に関連した near BPS 状態について解析してきた。これらの状態は世界面上の free な massive 場で記述することができた。従って、次に NS5-brane に垂直な 4 次元方向に注目しよう。これは NS5-brane が作る geometry に関連する。得られるスペクトルはどの真空の周りで展開するかには依存するのであるが、ここでは大きな J を持った near BPS 励起状態が存在するような、BMN 行列模型の特定の真空に注目することにしよう。

以下では $N_5 = 1$ と $N_5 > 1$ の場合に分けて、ゲージ理論と重力理論の両方の観点から議論をしていくことにしよう。

7.16.1 BMN 行列模型の $N_5 = 1$ 真空

BMN 行列模型の自明な真空から議論を始めよう。すなわち、古典解 $X^A = 0$ ($A = 1, \dots, 9$) の周りで展開したスペクトルに注目することにしよう。この真空は 1 枚の NS5-brane が存在する解に対応しているのであるから、 $N_5 = 1$ 真空と呼ぶことにしよう。

7.6 節の議論より、この真空の周りで展開すると、bosonic な励起が 9 個、fermionic な励起が 8 個得られるこ

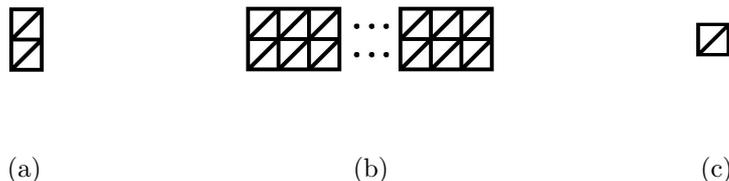


図 7.17: (a) $N_5 = 1$ 真空の励起状態 (b) $\text{Tr}[Z^J]$ に対応する励起状態 (c) 場 Y^i の表現

とが分かる。これらは $\widetilde{SU}(2|4)$ の Young 超図 7.17 (a) に対応する 1 つの表現を構成する。

以下では、単一トレース励起状態 (single trace excitation) に注目しよう。この状態は、geometry における 1 個の弦状態に対応する状態である。

BPS 状態について

例えば、 $SU(4) \sim SO(6)$ の下で変換するスカラー場 Y^i ($i = 1, \dots, 6$) で構成される場 $Z = Y^5 + iY^6$ に注目しよう。さらに、この場 Z の生成演算子も Z と表すことにして、 $\text{Tr}[Z^J]$ という形で表される単一トレース状態を考えることにしよう。これは $\widetilde{SU}(2|4)$ の Young 超図 7.17 (b) に対応する表現となる。よって、これは doubly atypical 表現に分類されるものであり、BPS 状態であることが確認できる。

$E - J = 1$ を満たす場で構成される near BPS 励起状態について

near BPS 状態 [45]

$$\sum_l \text{Tr}[Y^i Z^l Y^j Z^{J-l}] e^{2\pi i l n/J}; \quad i, j = 1, 2, 3, 4 \quad (7.16.1)$$

についても考察してみよう。このとき、挿入された場 Y^i は振動子 Z で構成された chain に沿って伝搬する不純物 (impurity) と見做すことができる。この不純物は運動量 $p = n/J$ と分散関係 (dispersion relation) $\epsilon(p)$ で特徴付けることができる。ここで ϵ は $\hat{E} \equiv E - J$ に対する不純物の寄与を表す。境界の効果が無視できるように、無限に長い chain を考えることにすると、不純物 Y^i に対しては $\epsilon(p = 0) = 1$ が成り立ち、これを場 Y^i の「質量」と見做すことができる。

このことは Goldstone の定理からの帰結として、次のように理解することができる。

場 Y^i ($i = 1, \dots, 6$) から場 $Z = Y^5 + iY^6$ を選んで、 Z の冪乗で表される弦の基底状態を構成したことで、もともとの $SO(6)$ 対称性を $SO(4)$ 対称性に破ってしまった。 Y^i ($i = 1, \dots, 4$) が、その破れた対称性 $SO(4)$ の生成子である。

このとき、超対称性もまた破れてしまうことが予想されるので、この chain において保持される超対称性を考えてみよう。超群 $\widetilde{SU}(2|4)$ の中で場 Z を選ぶことによって、対称群がその部分群 $SU(2)_G \times \widetilde{SU}(2|2)$ に破れてしまう。ここで、添字 G は超対称性と可換な大局的対称性であることを示している。

この部分群 $SU(2)_G \times \widetilde{SU}(2|2)$ は弦に沿って伝播する励起状態に作用することを確認しよう。群 $SU(2)_G$ は $\widetilde{SU}(2|2)$ の部分群 $SU(2)$ と合わさって $SO(4)$ ($\subset SO(6)$) を作り、NS5-brane に沿った 4 次元方向の回転対称性を表す。そして、 $\widetilde{SU}(2|2)$ 群における残りの部分群 $SU(2)$ は、もとの $\widetilde{SU}(2|4)$ に含まれていた $SU(2) \sim SO(3)$ 因子であり、 $SO(3)$ の下で変換する 3 つのスカラー場 X^i を回転させる。従って、 $\widetilde{SU}(2|2)$ をこれらの励起状態を分類するのに使えることが分かる。さらに、 $\widetilde{SU}(2|2)$ の中の非コンパクトな $U(1)$ 群は生成子 $\hat{E} = E - J$ に対応していて、粒子の質量を与えるのである。つまり

$$\widetilde{SU}(2|4) \supset SU(2)_G \times \widetilde{SU}(2|2) \supset \underbrace{SU(2)_G \times SU(2)_1}_{SO(4) (\subset SO(6))} \times \underbrace{SU(2)_2}_{SO(3)} \times \underbrace{\widetilde{U}(1)}_{\hat{E}=E-J} \quad (7.16.2)$$

という構造になっているのである。

場 Y^i は $\widetilde{SU}(2|2)$ の基本表現に属している。よって、 $\widetilde{SU}(2|4)$ の Young 超図は 7.17 (c) となる。更に、場 Y^i は $SU(2)_G$ のスピン 1/2 表現で変換される。よって、 Y^i の励起状態は弦に沿って伝播する「準粒子」(quasiparticle) と見做すことができる。 Y^i の励起状態を考えることにより、この準粒子には 4 つのボソンと 4 つのフェルミオンが含まれていることが確認できる。

$E - J = 2$ を満たす場で構成される near BPS 励起状態について

$E - J = 2$ を満たす基本場は、場 \bar{Z} と $SO(3)$ スカラー場 X^i 、それから 4 つのフェルミオン場である。以上の議論から素朴に考えると、これらの場は弦に沿って伝播する質量 2 の不純物となることが予想されるのである

が、実際にはそうはならない。これらの場合は既に挙げた場と混ざり合ってしまうと、新しい準粒子が生成されることはないのである [69]。

例えば、 \bar{Z} 場を挿入してできた状態 $\text{Tr} [\bar{Z} Z^{J+1}]$ は同じ共形次元を持つ状態 $\text{Tr} [Y^i Z^l Y^i Z^{J-l}]$ と混じり合う。このような混合が起こる結果として、得られるスペクトルは弦に沿って質量 1 の準粒子が 2 個伝播しているものと理解されることになるのである。また、 $SO(3)$ スカラー場 X^i を挿入してできた状態に関しても、同様にして質量 1 のフェルミオンを 2 個挿入してできた状態と混合するのである。

実際、このセクターの 1-loop レベルの Hamiltonian は $\mathcal{N} = 4$ 超対称 Yang-Mills 理論の Hamiltonian [70] を 1-loop レベルまでで切断したものと同じになることが知られている。よって、以上のことは Hamiltonian を対角化することによって直接確認することもできる。

't Hooft 結合定数が大きい領域において

第 3 章における議論を思い出しながら、't Hooft 結合定数が大きい領域において議論をしてみよう。このとき、NS5-brane の半径は (7.15.32) 式において $N_5 = 1$ ($\Leftrightarrow N_2 = N_0$) とすることで与えられる。さらに、near BPS 状態は pp-wave 時空解 (7.15.27) で記述される。この時空解は N_5 個の NS5-brane が重なった系の near horizon 領域に対応している。

NS5-brane に平行な 4 次元方向について

NS5-brane に平行な 4 次元方向は、NS5-brane が広がっている方向における弦の動きと対応している。スペクトルには $\widetilde{SU}(2|2)$ の基本表現と $SU(2)_G$ の基本表現として変換する粒子が含まれる。これは弱結合の解析と同じ結果である。分散関係は通常相対論的公式 (7.15.34) で与えられる。

NS5-brane に垂直な 4 次元方向について

NS5-brane に垂直な 4 次元方向を geometric に記述しようとするのが困難が付きまとう。これは、pp-wave 時空解 (7.15.27) が $N_5 = 1$ の場合には使えないことに起因する。なぜ使えないかという問いに答えるには、near horizon 領域はレベル $k = N_5 - 2$ の bosonic WZW 模型で記述されることを思い出せばよい。この理論がユニタリーであるのは $k = N_5 - 2 \geq 0$ のときであるから、NS5-brane が 1 枚しか無い系には near horizon 領域が存在しないと考えられるのである [67]。

ここで考えている系には、弦を near horizon 領域に押し込もうとする R-R 場が存在することに注目しよう。ところが $N_5 = 1$ の場合には near horizon 領域が存在しないと考えられている。従って、NS5-brane に垂直な 4 次元は pp-wave 極限において消えてしまうのではないだろうか、ということが予想される。't Hooft 結合定数が小さい場合の解析において、この 4 次元方向に対応する準粒子が観測できなかったことを思い出せば、この予想は正しいのではないかと考えられる。

これについては、(光錐ゲージ固定するのではなく) 共変的な定式化を行うことで、より詳しく議論されるべき問題であろうと思われる。

7.16.2 BMN 行列模型の $N_5 > 1$ 真空

次に、 $N_5 > 1$ に対応する BMN 行列模型の真空解の周りで展開してみよう。この真空は X^i 行列が次元 N_5 の $SU(2)$ 表現の生成子になっているときに対応する。このような真空の周りで展開すれば、 N_5 個の $\widetilde{SU}(2|4)$ 超対称多重項が得られる。これらの状態は $\widetilde{SU}(2|4)$ の Young 超図 7.18 (a) で表現されるのであった ($l = 1, \dots, N_5$)。また、これらの状態は fuzzy S^2 上の Kaluza-Klein モードと見做すことができる。

第一 Kaluza-Klein モードについて

この理論において、第一 Kaluza-Klein モードの励起状態のみを扱うセクターは、 $N_5 = 1$ のセクターと同じものである。このことは、真空の周りで展開して得られる超対称多重項に対応する Young 超図が 7.18 (b) であることから予想されることであるが、実際に、第一 Kaluza-Klein モードの励起状態の Hamiltonian は $N_5 = 1$ の場合の Hamiltonian と 1-loop レベルで正確に一致するのである。このことは次のように確認できる。

第一 Kaluza-Klein モードの場合は、fuzzy 球面を表現する $N_5 \times N_5$ 行列が単位行列に比例するので、これらの相互作用は $N_5 = 1$ の真空の周りと同じになってしまうのである。唯一の違いは 1-loop レベルの propagator 補正を含む diagram を考えるときに現れる。propagator 補正の値は BPS 状態 $\text{Tr}[Z^J]$ のエネルギーが変わらないという条件から決められることに注意すると、1-loop レベルの Hamiltonian が、 $N_5 > 1$ 真空において $g_{YM0}^2 N_2 / N_5$ に比例している一方、 $N_5 = 1$ 真空の場合は $g_{YM0}^2 N_0$ に比例しているということが、その違いをもたらすのである ($N_0 = N_2 N_5$)。より正確には、't Hooft 結合定数が小さい領域において、(7.15.35) 式で定義した関数 f が

$$f\left(\frac{g_{YM0}^2 N_0}{m^3 N_5}, N_5\right) = 2\pi^2 \frac{g_{YM0}^2 N_0}{m^3 N_5^2} + \dots \quad (7.16.3)$$

という形になるのである。この結果は次のようにして得られる。

$\hat{E} = E - J = 1$ の励起状態は fuzzy 球面によって作られる $N_5 \times N_5$ のブロックに分かれた対角行列によって与えられる。それぞれのブロックは $N_2 \times N_2$ 行列である。つまり、 Y^i 場は $Y^i = \mathbf{1}_{N_5 \times N_5} \otimes \tilde{Y}^i$ というように表現される。ここで \tilde{Y}^i は $N_2 \times N_2$ 行列であり、 $N_2 \equiv N_0 / N_5$ である。従って、 \tilde{Y}^i 場に限定した作用は、対角行列 $\mathbf{1}_{N_5 \times N_5}$ をトレースすることから生じる因子 N_5 を除けば、 $N_5 = 1$ の作用と同じになる。このことが、実質的に結合定数を g_{YM0}^2 から $\tilde{g}_{YM0}^2 = g_{YM0}^2 / N_5$ に変えるのである。 \tilde{Y}^i 場は $N_2 \times N_2$ 行列であるから、この部分セクターにおける補正は $\tilde{g}_{YM0}^2 N_2$ に比例した形になることが分かる。

ここで、(7.16.3) 式は強結合における結果 (7.15.34) とは異なる N_0, N_5 の組み合わせを持っていることに注意しよう。よって、(7.15.35) 式における補間関数は非自明な N_5 依存性を持っていると予想することができる。

以上の議論をまとめると、1-loop レベルにおいて、fuzzy S^2 上の第一 Kaluza-Klein モードの励起状態を不純物 Y^i を挿入することによって構成すると、 $N_5 = 1$ の場合と同じく、質量 $\hat{E} = 1$ の 4 個のボソンと 4 個のフェルミオンが入った準粒子が得られることが結論できる。

第二 Kaluza-Klein モードについて

次に、第二 Kaluza-Klein モードに注目しよう。これは $\widetilde{SU}(2|4)$ の Young 超図 7.18 (c) に対応する超対称多重項から得られる。この超対称多重項には質量 $\hat{E} = E - J = 2$ の 4 個の bosonic 状態と 4 個の fermionic 状態が含まれていて、これら 8 個の状態は $\widetilde{SU}(2|2)$ の Young 超図 7.18 (b) に対応する表現として変換する。

どのように bosonic 状態が現れるのかを確認してみよう。まず、fuzzy 球面上の Kaluza-Klein 調和関数 \mathcal{J}^i

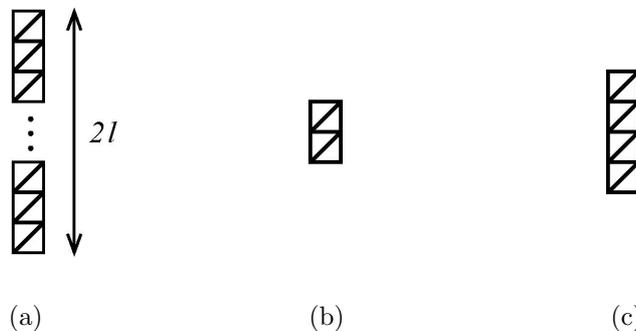


図 7.18: (a) $N_5 > 1$ 真空の周りで展開して出てくる $\widetilde{SU}(2|4)$ 多重項: $l = 1, \dots, N_5$ の N_5 個の多重項が現れる。(b) 第一 Kaluza-Klein モード (c) 第二 Kaluza-Klein モード

を定義して、場 Z を $Z = \tilde{Z} + \mathcal{J}^i Z_i + \dots$ と展開する。但し \mathcal{J}^i は $SU(2)$ の $N_5 \times N_5$ 行列による表現である。8 個の状態のうち 3 個はこの不純物 Z_i に対応している。これらは $SU(2) \times SU(2)$ の $(1, 0)$ 表現、 $SU(2)_G$ の一重項になっている。但し $SU(2) \times SU(2) \subset \widetilde{SU}(2|2)$, $SU(2)_G \times \widetilde{SU}(2|2) \subset \widetilde{SU}(2|4)$ であったことを思い出しておこう。

4 番目の状態を Φ と表すことにすると、これは $X^i = \mathcal{J}^i(1 + \Phi) + \dots$ と展開したときに現れる。これは $E = 2$ の状態であり、全ての $SU(2)$ の下でスピン 0 を持つ。よって、 $\hat{E} = E - J = 2$ でスピン 0 の励起状態をもたらすことが分かる。

さらに、これら 4 個の bosonic 状態には対応する fermionic パートナーが存在する。 $E - 2S - \sum_i J_i = 0$ を満たす BPS 状態を調べると、寄与する bosonic 状態は Z_+ だけであることが分かる。これは $S = 1$ の状態である。従って、状態 $\text{Tr}[Z_+ \tilde{Z}^J]$ は BPS 状態であることになる。このエネルギーが補正を受けないことを確認するためには、他の BPS 状態と結びつくことができないことを確認しなくてはならない。

具体的には 7.7 節の議論を用いて、どのような状態が他の BPS 状態と結びついて非 BPS 状態になることができるのかを調べればよい。単一トレース状態を作ったときに現れる表現について具体的に調べると、それと結合するような他の表現は現れないことが確認できる。planar 極限では、同じ結果を正確に得ることができる。このことは、付録 A において、指数 (2.2.1) を用いて証明している。

既に確認したように、 $N_5 > 1$ の場合は $N_5 = 1$ の場合と違って、弦に沿って伝播する質量 2 の準粒子が存在する。実は、同様の議論が第 5 章の $R \times S^2$ 上の $(2+1)$ 次元超対称 Yang-Mills 理論の場合にも通用するのである。このときは、自明な真空の周りで展開すると、新しい超対称多重項が 3 つの微分 D_i ($i = 0, 1, 2$) と 7 番目のスカラー場 Φ 、そしてそれらの超対称パートナーに対応する。このような超対称多重項に属する状態は質量 2 を持っていて、IIA 型 pp-wave 時空における NS5-brane に垂直な 4 個の座標に対応するのである。全ての場合において、弦に沿って伝播する余分な準粒子が現れることが確認できる。このことは、弦理論には弦にとって transverse な方向が 8 個存在しているという事実と合致している。

NS5-brane に平行な 4 次元の振る舞いは先に示した通りであって、これらが存在することで $SO(6)$ 対称性が保証されていた。NS5-brane に垂直な 4 次元の振る舞いについては、どの真空の周りで展開するかに依存するので、次にこれについてより詳しく調べることにしよう。

7.16.3 世界面理論とゲージ理論の比較

弦の世界面理論について

pp-wave 時空 (7.15.27) における NS5-brane に垂直な 4 次元空間を光錐ゲージの弦が動く様子に注目して、それを記述する $1+1$ 次元の場の理論を議論することにしよう。この 2 次元理論の target space は $R \times S^3$ であり、 S^3 上の H_3 flux は N_5 であり、 R 方向に線形 dilaton が存在している。また、 R 方向と S^3 方向はそれぞれ計量 (7.15.27) において ϕ と (θ, Ω_2) でパラメータ付けされている方向に対応している。

ここで、計量 (7.15.27) の g_{++} 成分

$$-g_{++} = 4N_5 (e^{2\phi} + 1 - 2e^\phi \cos \theta) \quad (7.16.4)$$

から、NS5-brane の throat に沿った点や S^3 上の点に弦を局所化する (留めておく) ポテンシャルが生じることに注目しよう。

もしこのポテンシャルが無ければ、 N_5 個の NS5-brane の throat 領域を記述する共形場理論が得られることが知られている [67]。ここにポテンシャルを導入すると、このポテンシャルは S^3 における θ 方向に依存しているので、throat 領域が持っていた $SO(4) \sim S^3$ 回転対称性は $SO(3) \sim S^2$ 対称性に破れてしまうことになる。

また、もしポテンシャルが無ければ、得られる σ 模型は世界面上に $\mathcal{N} = (4, 4)$ 超対称性を持つ。ところがポテンシャルが非零になると、この $1+1$ 次元の世界面理論の超対称性は特殊なものとなる [71]。通常の大局的

(global) な $\mathcal{N} = (4, 4)$ 超対称性は超対称生成子が $SU(2) \times SU(2)$ の R 対称性の下で変換するのであるが、ここで得られる超対称性はそれが成り立たないのである。

超対称電荷を Q_{\pm}^i ($i = 1, \dots, 4$) として表そう。ここで i は $SO(4) = SU(2) \times SU(2)$ の脚を表し、 \pm は 2 次元の chirality を表す。すると、これらの超対称電荷の反交換関係は

$$\{Q_+^i, Q_+^j\} = \delta^{ij}(E + P), \quad \{Q_-^i, Q_-^j\} = \delta^{ij}(E - P), \quad \{Q_+^i, Q_-^j\} = m\epsilon^{ijkl} J^{kl} \quad (7.16.5)$$

となる。ここで J^{kl} は $SO(4)$ の生成子で、 m は次元を持ったパラメータであり、ポテンシャルのスケールと関係している。特に、 $SO(4)$ の量子数を持った BPS 粒子の質量を決めるものであり、 $m = 1$ と設定することができる。また、ポテンシャルが零となる時は $m = 0$ である。このとき、通常の $\mathcal{N} = (4, 4)$ 超対称性代数における反交換関係が得られることを確認しておこう。

ここでは、大局的な超対称性を議論しているので、超共形代数の生成子 G_n^i の中で G_0^i モードに限った議論をしていることに注意してもらいたい。通常の $\mathcal{N} = (4, 4)$ 超対称性代数であっても、 $G_{n \neq 0}^i$ の反交換関係の右辺に $SU(2)$ カレントが現れることがある。

以下では、超対称性代数 (7.16.5) のことを $(4, 4)_m$ と書き表すことにしよう。これは Poincaré 超代数であり、右辺に非可換群の charge を持っていることが特徴である。これは全体の時空の次元が $d \leq 3$ であれば可能だが、 $d > 3$ であれば不可能であることが知られている。この代数は $(2 + 1)$ 次元の Poincaré 超代数を次元還元したもので、10.4 節において詳しく論じている。

ポテンシャルの形より、光錐エネルギーが最小になるのは、弦が $\phi = \theta = 0$ または $\phi = -\infty$, $\theta = 0$ に止まっているときであると考えられる。ところが $\phi \rightarrow -\infty$ の領域では $e^{\Phi} = g_s e^{-\phi} \rightarrow \infty$ となるため、計量 (7.15.27) を導くために用いた pp-wave 近似が成り立たないことに注意しなければならない。従って、 $\phi \rightarrow -\infty$ の領域では NS5-brane 解 (4.5.6)-(4.5.7) を用いて議論する必要がある。その結果、オーダー $N_5|p_-|$ の有限なエネルギーギャップが存在していて、弦は $\phi \rightarrow -\infty$ 領域には入らないことが確認できる。以上より、光錐エネルギーが最小になるのは、弦が

$$\phi = \theta = 0 \quad (7.16.6)$$

に止まっているときであることが分かる。このとき光錐エネルギーは 0 である。

ここで興味があるのは H_3 の flux が 0 でない模型であるので、IIA 型 ansatz の (一般的な) pp-wave 極限 (3.3.33) に対する、光錐ゲージの弦理論を書き下すと

$$S = S_1 + S_2 \quad (7.16.7)$$

$$S_1 = \int dt \int_0^{2\pi\alpha'|p_-} d\sigma d^2\theta \frac{1}{2} (D_+ R^i D_- R^i + R^i R^i) \quad (7.16.8)$$

$$S_2 = \int dt \int_0^{2\pi\alpha'|p_-} d\sigma d^2\theta \left\{ \frac{1}{2} f(W, \bar{W}) (D_+ W D_- \bar{W} + D_+ \bar{W} D_- W) + z(W) + \bar{z}(\bar{W}) + [f(W, \bar{W}) (W + \bar{W})^2 g_{ij}(\Theta) + B_{ij}(\Theta, W, \bar{W})] D_+ \Theta^i D_- \Theta^j \right\} \quad (7.16.9)$$

となる。 S_1 は NS5-brane に平行な 4 次元の座標について記述しており、4 個の free で massive な超場 (superfield) で構成されていることが読み取れる。また、 S_2 は NS5-brane に垂直な 4 次元の座標について記述する作用になっている。

ここでは超対称電荷のうち 1 つを選び出して、 $\mathcal{N} = 1$ の超空間における作用を書いた。この特別視する超対称電荷 Q_{\pm}^1 は通常の超 Poincaré 代数に従うので、通常の超空間の定式化を使うことができる。また、 B 場と関数 f は (3.3.33) 式と同じものである。

この理論は $\mathcal{N} = (4, 4)_m$ 超対称性を持っている。このことを Lagrangian から明らかにすることはできないが、超重力理論の解析から確認することができる。NS5-brane の通常の WZW 作用と比較すると、違いはポテンシャルの項が付け加わっていることだけである。また、IIA 型 ansatz の pp-wave 極限 (3.3.33) における R-R

場は、 S_1 に含まれている 4 個の free なフェルミオンと、 S_2 に含まれている 4 個の相互作用するフェルミオンとして現れている。

まずは N_5 が十分に大きい場合について、理論 (7.16.9) を議論しよう。この場合は、ポテンシャルの最小点の周りで場を展開することができる。2 次の揺らぎに注目すると、4 個の free なボソンとフェルミオンが存在することが分かる。これらの粒子の静止系に移って議論してみよう。(7.16.5) 式において $P = 0$ と設定すると $\widetilde{SU}(2|2)$ 代数になることが分かる。よって、これらの粒子は $\widetilde{SU}(2|2)$ 群において

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}, 1 \right) + \left(\square, \square \right) + \left(1, \square \square \right) \tag{7.16.10}$$

と表現される。すなわち、 $SU(2) \times SU(2)$ の量子数で表すと $(0, 0) + (1/2, 1/2) + (0, 1)$ という表現である。半整数のスピンはフェルミオンである。これはエネルギー $\hat{E} = 2$ を持つ short 表現になっている。実際、運動量 0 を持ったこのような粒子が 2 個の重ね合わさった状態や閉弦は、Young 超図 7.19 (a) に対応する表現として変換する。これらの状態も protected 状態である。

N_5 の値を小さくしていても、これらの protected 表現は同じエネルギーを持ち続けなくてはならない。但し N_5 は連続パラメータではないので、そうなるのは $1/N_5$ が十分に小さいときだけである。 N_5 が変化すると同時に protected 状態の数も飛び移ることはあり得る。

どのような状態が protected であるのかを、より正確に理解するためには

$$\mathcal{I}(\gamma) = \text{Tr} \left[(-1)^F 2S_3 e^{-\hat{\mu}(\hat{E} - S_3 - \tilde{S}_3)} e^{-\gamma \hat{E}} \right] \tag{7.16.11}$$

という指数を導入するのがよい。ここで S_3 と \tilde{S}_3 は $SU(2) \times SU(2) \subset \widetilde{SU}(2|2)$ として含まれる 2 つの $SU(2)$ 群の生成子である。付録 A における議論より、指数 (7.16.11) には short 表現だけが寄与すること、そして最終的に得られる結果は $\hat{\mu}$ に依存しないことが結論できる。

N_5 が十分に大きい場合には、free な世界面理論を使って指数を計算することができて、

$$\mathcal{I}(\gamma)_{N_5=\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n\gamma} \tag{7.16.12}$$

が得られる。 N_5 は連続パラメータではないので、 N_5 を小さくすると (7.16.12) 式は変わると考えられる。しかし、それは $1/N_5$ 展開における非摂動的な変化である。従って N_5 が固定されていて十分に大きいときは、(7.16.12) 式に対する補正は $e^{-(\text{const.})N_5\gamma}$ という形の項であることが予想される。

ゲージ理論側と比較する。

このことをゲージ理論側から期待されることと比較してみよう。ゲージ理論側で protected 状態を見つけるには、指数 (2.2.1) を用いればよい。単一トレース状態に対する指数を計算しよう。 $SU(2)$ の N_5 次元表現が N_2

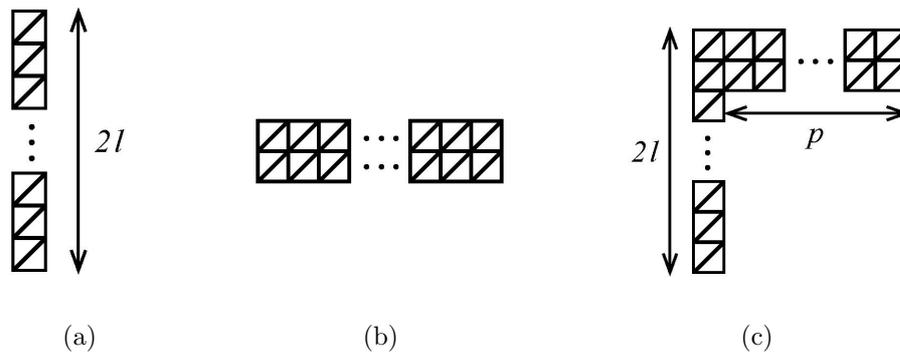


図 7.19: Young 超図の例

個集まったものに対応する真空の周りで展開すると

$$I_{s.t.}(N_5) = I_{s.t.}(N_5 = 1) + \frac{e^{-2N_5(\beta_1+\beta_2+\beta_3)}}{1 - e^{-2N_5(\beta_1+\beta_2+\beta_3)}} - \frac{e^{-2(\beta_1+\beta_2+\beta_3)}}{1 - e^{-2(\beta_1+\beta_2+\beta_3)}} \quad (7.16.13)$$

$$I_{s.t.}(N_5 = 1) = \frac{e^{-\beta_2-\beta_1}}{1 - e^{-\beta_2-\beta_1}} + \frac{e^{-\beta_3-\beta_1}}{1 - e^{-\beta_3-\beta_1}} + \frac{e^{-\beta_3-\beta_2}}{1 - e^{-\beta_3-\beta_2}} \quad (7.16.14)$$

が得られる。付録 A において、 $N_5 = 1$ の場合には、Young 超図 7.19 (b) に対応する表現を足し上げたものからしか、指数は寄与を受けないことを示した。この寄与は、弦理論において NS5-brane に平行な 4 次元方向に関連した BPS 状態から受ける寄与と同じである。従って、(7.16.13) 式における他の寄与は、NS5-brane に垂直な 4 次元から受ける寄与に対応しているはずであると考えられる。

以上より、2 次元の場の理論 (7.16.9) は NS5-brane に垂直な 4 次元について記述しており、その理論の BPS 状態は (7.16.13) 式における $I_{s.t.}(N_5 = 1)$ 以外の寄与と関係しているということが分かる。この寄与を実際に取り出すためには、(7.16.13) 式におけるこの寄与が、protected 表現から期待される寄与と一致することを確認すればよい。つまり、指数 I を様々な protected 表現について計算して、(7.16.13) 式と比較すればよい。その結果、付録 A において、atypical 表現について指数を計算することにより、Young 超図 7.19 (c) に対応する表現を足し上げれば (7.16.13) 式が再現されることを示した。この表現の Dynkin ラベルは

$$(a_1, a_2, a_3 | a_4 | a_5) = (0, p, 0 | a_5 + 1 | a_5); \quad p \geq 0, \quad a_5 = 2(n-1), \quad n = 1, \dots, \quad n \neq 0 \pmod{N_5} \quad (7.16.15)$$

であり、同じ p と n の値を持つ Young 超図が 1 回ずつ寄与するように足し上げれば期待される結果が得られることが確認できる。ここで p が様々な値を持つ表現は、Young 超図 7.19 (a) と (b) に対応する表現の積として得られる。ここで、Young 超図 7.19 (b) の表現は NS5-brane に平行な 4 次元方向と関係していることを思い出そう。従って、 p で足し上げるということは、 Z 場に掛かる冪数の合計で与えられる様々な長さを持った弦を作って、その弦の上に NS5-brane に平行な 4 次元に関連した BPS 状態を持たせる状況を考えていると解釈することができる。以上より、NS5-brane に垂直な 4 次元と関係した BPS 状態は、 n についての和と関係していると結論付けられる。従って、ゲージ理論側からは、NS5-brane に垂直な 4 次元と関係づいた弦上の場の理論において指数を計算すると

$$\mathcal{I}_{expected} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n\gamma} - \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2nN_5\gamma} \quad (7.16.16)$$

が得られることが予想される。詳しい議論は付録 A に示した。

これを (7.16.12) 式と比較すると、 $e^{-2N_5\gamma}$ という形をした、 $1/N_5$ に関して非摂動的な項だけ異なっていることが分かる。従って、(7.16.16) 式は弦理論側の BPS 状態に関して、ゲージ理論側から予想したものであると考えることができる。

以上で、 $1/N_5$ 展開の主要項について、弦理論とゲージ理論の予想が一致することが確認できた。(7.16.16) の第 2 項 (非摂動的な補正) については、WZW 模型にポテンシャルを持った線形 dilaton 理論を加えたものを基にした 2 次元場の理論から解析することができるかもしれないと考えられる [2]。

第 8 章

4 次元 $\mathcal{N} = 2$ 超共形場理論

11 次元超重力理論において、 AdS_5 時空と 6 次元コンパクト多様体を含んだ解を考えよう。このような重力解は 4 次元の共形場理論としても解釈することができる。4 次元の $\mathcal{N} = 1$ 超共形対称性を持った解は全て [14] において調べられているが、この論文では 16 個の超対称電荷を保持する解に注目したいので、4 次元の $\mathcal{N} = 2$ 超共形対称性を持った全ての解について考えることにしよう。超共形代数を見ると、超共形対称性の他に $SU(2) \times U(1)$ bosonic 対称性があることが分かる。実は、超対称代数全体は、先に議論した M 理論 1/2-BPS geometry によって保存される超対称代数を Wick 回転したものになっているのである。

超対称性条件の解析は局所的なものである。よって単純な Wick 回転をした後、 $\mathcal{N} = 2$ 超共形場理論と dual な M 理論 geometry を記述する、同じ一般解を用いる。

8.1 AdS_5 時空の因子を持つ 11 次元超重力理論の超対称解

11 次元 ansatz を Wick 回転する。

AdS_5 時空を持つ計量を求めるためには、 S^5 座標の解析接続

$$d\Omega_5^2 \rightarrow -ds_{AdS_5}^2 \quad (8.1.1)$$

を行えばよい。具体的には

$$d\Omega_5^2 = \cos^2 \alpha d\psi^2 + d\alpha^2 + \sin^2 \alpha d\Omega_3^2 \quad (8.1.2)$$

とパラメータ付けした上で

$$\psi \rightarrow \tau, \quad \alpha \rightarrow i\rho \quad (8.1.3)$$

という解析接続を行うことで

$$ds_{AdS_5}^2 = -\cosh^2 \rho d\tau^2 + d\rho^2 + \sinh^2 \rho d\Omega_3^2 \quad (8.1.4)$$

を得る。

さらに解析接続

$$\lambda \rightarrow \tilde{\lambda}; \quad \lambda = \tilde{\lambda} + i\frac{\pi}{2} \quad (8.1.5)$$

を行い、他の座標やパラメータについては解析接続を行わないものとする。ここで、正しい符号を持った計量を作るためには、 $\tilde{\lambda}$ は実数でなければならないことに注意しよう。

また、このとき t は空間的 (space-like) な座標となる。空間的な座標を t と表記すると誤解を生じてしまう恐れがあるので、これを χ と書き換えよう。さらに χ は Killing 方向であるから、コンパクト化することにしよう。

さらに、このような Wick 回転を行うことで、考慮しなければならない微妙な点がいくつか出てくる。それらの問題を解決した上で、Wick 回転した ansatz を導くことにしよう。

χ 方向と S^2 方向がトポロジカルな混合を起こす可能性を考慮しなければならない。

第3章の議論では、そもそも ansatz をおく段階で S^2 と 4次元基底空間の間でトポロジカルな混合 (mixing) は起きない計量を仮定した。しかしながら、 $SO(3) \sim SU(2)$ 対称性と矛盾せずに、この ansatz を拡張することは可能であるように思える。実際、基底空間が space-like な Killing 方向 χ を持っている場合、

$$f(d\chi + A_\alpha dx^\alpha)^2 \quad (8.1.6)$$

という形の項が計量に存在してもいいのである。ここで f は定数、 x^α は S^2 上の座標、 A_α は S^2 上のゲージ場であり、このゲージ場の field strength は体積要素に比例している ($F_{\alpha\beta} = \text{const.} \times \epsilon_{\alpha\beta}$)。

3.1節において、 S^5 上に reduction することで得られる 6次元スピノール ξ が満たすべき方程式 (3.1.9) は

$$[\nabla_\mu - W_\mu]\xi = 0 \quad (8.1.7)$$

という形になっていたことを思い出そう。ここで、 μ は 4次元基底空間のうち χ 方向を除いた 3次元空間と S^2 で張られる 5次元空間の方向を表している。そして、いま議論したトポロジカルな混合を考慮して、4次元基底空間と S^2 で張られる 6次元空間の計量は

$$ds^2 = f^2(d\chi + V_\mu dx^\mu)^2 + \eta_{MN} e_\mu^M e_\nu^N dx^\mu dx^\nu \quad (8.1.8)$$

という形であると仮定しよう。従って

$$\nabla_\mu - V_\mu \nabla_\chi = \hat{\nabla}_\mu - V_\mu \partial_\chi \quad (8.1.9)$$

という組み合わせに注目すると、 $\hat{\nabla}_\mu$ には V_μ や f についての情報が現れないことが分かる。すなわち、 $\hat{\nabla}_\mu$ は reduction された 5次元計量のみを使って得られるスピン接続から構成されているのである。

この 5次元座標 x^μ を S^2 方向 α, β, \dots とその他の方向とに分けると、6次元スピノールの満たす方程式 (8.1.7) の S^2 方向成分は

$$[\hat{\nabla}_\alpha - V_\alpha \partial_\chi + W_\alpha - V_\alpha W_\chi]\xi = 0 \quad (8.1.10)$$

と書くことができる。

(3.1.11) 式のようにして、 S^2 上のスピノールと 3次元基底空間上のスピノールに分けよう。すると、2次元単位球面上のスピノール η が満たすべき方程式は

$$[\nabla_\alpha - V_\alpha \partial_\chi]\eta = a\gamma_\alpha \eta + b\epsilon_{\alpha\beta}\gamma_\beta \eta \quad (8.1.11)$$

となることが分かる。

以下で、定数 a, b を決定しよう。まず、回転

$$\eta \rightarrow e^{\mu\gamma_1\gamma_2}\eta; \quad \tan 2\mu = -\frac{b}{a} \quad (8.1.12)$$

を行うことにより、 $b = 0$ とおけることに注意しよう。(8.1.11) 式の異なる成分間の交換関係をとると

$$[-\gamma_{12} - F_{12}\partial_\chi]\eta = 2a^2\gamma_{12}\eta \quad (8.1.13)$$

という関係式が得られる。この解としては次の 2通りが考えられる。

$F_{12} = 0$ の場合

この場合は $a = \pm i/\sqrt{2}$ となり、(8.1.11) 式は (3.1.10) 式に帰着することが確認できる。これは、 χ 方向と S^2 方向のトポロジカルな混合が起こらない状況に対応している。

$\eta \sim e^{i\chi/2}$ の場合

この場合は

$$F_{12} = \pm 2(2a^2 + 1); \quad \gamma_{12}\eta = \mp i\eta \quad (8.1.14)$$

となることを確認できる（複号同順）。ここでは上の符号を取ることにしよう。(8.1.11) 式の両辺に $(\gamma_{12} + i)$ という因子を掛けると、 $a = 0$ であることが分かる。 b については、既に $b = 0$ とおいたことを思い出しておこう。

従って、Killing スピノールが χ 方向の並進変換の下で非自明なチャージを持てば、超対称電荷は $SU(2)$ 二重項を構成できないことが分かった。

以上より、 $F_{12} = 0$ または $F_{12} = \pm 2$ が成り立つことが分かった。

後者の場合は、 \pm の符号をどちらか選ぶと、2 次元球面上のスピノールのうちカイラルスピノールが 1 つだけ残るということに注意しよう。このことはトポロジカル・ツイスト (topological twist) と見做すことができる。すなわち、スピノールの共変微分におけるスピン接続の寄与とゲージ場からの寄与が打ち消して、スピノールは実質的に S^2 上のスカラーとして振る舞うのである。

基底空間方向の flux I_1 を摂動的に非零にすることはできない。

次に、flux I_1 について考えよう。3.1 節で $S^5 \times S^2$ に reduction したときには、非コンパクト基底空間には flux が存在しないことを根拠に $G_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = 0$ とおくことができた。しかし $AdS_5 \times S^2$ に reduction する場合は、4 次元基底空間はコンパクトにすることができるので、同じ議論は成り立たない。

ここでは、 $I_1 = 0$ の解から議論を始めて、解析的に $I_1 \neq 0$ とすることはできないことを示すことにしよう。

(3.1.13) 式と (3.1.14) 式の線形結合を取って \mathcal{F} を消去した上で、(3.1.17) 式を用いると

$$\left[\not{\partial}(A + 3\lambda) + ie^{-A}\gamma^5 P + 2im\gamma_7 + \frac{i}{12}e^{-6\lambda-2A}I_1\gamma_5 \right] \xi = 0 \quad (8.1.15)$$

が得られる。この式を ϵ_{\pm} を用いて書き直すと

$$\left[\pm ie^{-A} + \gamma_5 \not{\partial}(A + 3\lambda) + \frac{i}{48}I_1 e^{-6\lambda-2A} \right] \epsilon_{\pm} = \pm 2m\epsilon_{\mp} \quad (8.1.16)$$

となる。

もし $I_1 = 0$ であれば、3.1 節で議論したように、6 次元スピノールが満たす方程式 (3.1.13)-(3.1.15) は

$$\psi_+ \equiv \epsilon_- + \gamma_5 \epsilon_+, \quad \psi_- \equiv \epsilon_- - \gamma_5 \epsilon_+ \quad (8.1.17)$$

がそれぞれ満たす方程式に分離することができたのであった。しかし、 $I_1 \neq 0$ ならば分離することができない。実際、(8.1.16) 式は

$$[ie^{-A} + \gamma_5 \not{\partial}(A + 3\lambda) - 2m\gamma_5] \psi_+ = -\frac{i}{48}I_1 e^{-6\lambda-2A} \psi_- \quad (8.1.18)$$

$$[ie^{-A} + \gamma_5 \not{\partial}(A + 3\lambda) + 2m\gamma_5] \psi_- = -\frac{i}{48}I_1 e^{-6\lambda-2A} \psi_+ \quad (8.1.19)$$

となってしまうのである。

$I_1 = 0$ の場合の解から議論を始めよう。このときの解を $\psi^{(0)}$ と表すことにしよう。この解は $\psi_+^{(0)} = 0$ が $\psi_-^{(0)} = 0$ が成り立っているため、ここでは $\psi_+^{(0)} = 0$ が成り立つ解を選ぶことにしよう。

I_1 を摂動パラメータとして、(8.1.18)-(8.1.19) 式を I_1 の 0 次と 1 次のオーダーで書き下してみよう。そのために $\psi = \psi^{(0)} + I_1 \psi^{(1)}$ と展開する。ボソン場についても同じように展開するが、bosonic 背景場の補正は含めなくてよいことが確認できる。

(8.1.19) 式の 0 次のオーダーは

$$[ie^{-A} + \gamma_5 \not{\partial}(A + 3\lambda) + 2m\gamma_5] \psi_-^{(0)} = 0 \quad (8.1.20)$$

であり、(8.1.18) 式の 1 次のオーダーは

$$I_1 [ie^{-A} + \gamma_5 \partial(A + 3\lambda) - 2m\gamma_5] \psi_+^{(1)} = -\frac{iI_1}{48} e^{-6\lambda-2A} \psi_-^{(0)} \quad (8.1.21)$$

$\psi_-^{(0)}$ は ϵ と同じスピノールであることに注意しておこう。(3.1.45) 式を導いた議論と同様にして、ボソン場が運動方程式の解であることを用いることで、これらの式を単純な形に書き直すことができ

$$\begin{aligned} [e^{-\gamma_3 \zeta} + i\gamma_3 \gamma_5] \psi_-^{(0)} &= 0 \\ I_1 e^{-A} [e^{\gamma_3 \zeta} + i\gamma_3 \gamma_5] \psi_+^{(1)} &= -\frac{iI_1}{48} e^{-6\lambda-2A} \gamma_3 \gamma_5 \psi_-^{(0)} \end{aligned} \quad (8.1.22)$$

となる。ここで、スピノール $\tilde{\epsilon}, \tilde{\eta}$ を

$$\psi_-^{(0)} = e^{\frac{\zeta}{2} \gamma_3} \tilde{\epsilon}, \quad \psi_+^{(1)} = e^{-\frac{\zeta}{2} \gamma_3} \tilde{\eta} \quad (8.1.23)$$

として導入すると、(8.1.22) 式は

$$\begin{aligned} [1 + i\gamma_3 \gamma_5] \tilde{\epsilon} &= 0 \\ I_1 e^{\frac{\zeta}{2} \gamma_3} [1 + i\gamma_3 \gamma_5] \tilde{\eta} &= -\frac{iI_1}{48} e^{-6\lambda-A} e^{-\frac{\zeta}{2} \gamma_3} \gamma_3 \gamma_5 \tilde{\epsilon} \end{aligned} \quad (8.1.24)$$

と、さらに単純な形にすることができる。2 番目の式の両辺に $[1 - i\gamma_3 \gamma_5] e^{-\frac{\zeta}{2} \gamma_3}$ をかけると、 $\tilde{\eta}$ を含まない方程式

$$\frac{iI_1}{48} e^{-6\lambda-A} \cosh \zeta \tilde{\epsilon} = 0 \quad (8.1.25)$$

が得られる。よって、摂動論の範囲においては $I_1 \neq 0$ とすることはできないことが示された。

以上の議論の簡単なまとめ

以上の議論の結果を簡単にまとめておこう。これらが証明できれば、次に示す解析接続された 11 次元 ansatz (8.1.26)-(8.1.29) が最も一般的な重力解であることが理解できるので、その意味でも次に挙げる事項は重要である。

円周 χ は S^2 上に自明に fiber する。

解析接続する前であれば、 χ は時間的な方向であったから、これは当然の結論であった。しかし、解析接続をすると議論する必要がある。

超共形代数より、スピノールの $U(1)$ charge は 0 でないことが分かる。よって、もし円周 χ が S^2 上に非自明に fiber するのであれば、 S^2 上のスピノールの有効 (effective) スピンが変化して、Killing スピノール方程式の解は $SO(3) \sim SU(2)$ 群の適切な表現として変換しなくなってしまうと考えられる。

従って、円周 χ は S^2 上には自明にしか fiber できないことが分かる。

flux については $I_1 = 0$ とおけばよい。

もし (3.1.17) 式において定義した I_1 が 0 でなければ、 S^2 も S^5 も萎むことができないことになる。

上で行った議論より、 $I_1 = 0$ を満たす解から議論を始めて、 I_1 を無限小だけ付け足すと、超対称性が破れてしまうことが分かった。この理由から、 $I_1 = 0$ とおくことにしたのであるが、実際に $I_1 \neq 0$ を満たす超対称解があるかどうかについては、何も主張できないことには注意すべきである。

解析接続した 11 次元 ansatz

従って、解析接続することで得られる 11 次元 ansatz は

$$ds_{11}^2 = e^{2\tilde{\lambda}} \left(4ds_{AdS_5}^2 + y^2 e^{-6\tilde{\lambda}} d\tilde{\Omega}_2^2 + ds_4^2 \right)$$

$$ds_4^2 = 4(1 - y^2 e^{-6\tilde{\lambda}}) (d\chi + V_i dx^i)^2 + \frac{e^{-6\tilde{\lambda}}}{1 - y^2 e^{-6\tilde{\lambda}}} [dy^2 + e^D (dx_1^2 + dx_2^2)] \quad (8.1.26)$$

$$G_{(4)} = F \wedge d^2 \tilde{\Omega}$$

$$e^{-6\tilde{\lambda}} = -\frac{\partial_y D}{y(1 - y \partial_y D)} \quad (8.1.27)$$

$$V_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ij} \partial_j D, \quad dV = \frac{1}{2} *_3 [d(\partial_y D) + (\partial_y D)^2 dy] \quad (8.1.28)$$

$$F = dB_\chi \wedge (d\chi + V) + B_\chi dV + d\hat{B}, \quad B_\chi = 4y^3 e^{-6\tilde{\lambda}}$$

$$d\hat{B} = 2 *_3 [(y \partial_y^2 D + y (\partial_y D)^2 - \partial_y D) dy + y \partial_i \partial_y D dx^i]$$

$$= 2 \tilde{*}_3 \left[y^2 \left(\partial_y \frac{1}{y} \partial_y e^D \right) dy + y dx^i \partial_i \partial_y D \right] \quad (8.1.29)$$

となる。ここで D はやはり Toda 方程式 (3.1.106) を満たす。しかしながら、以前の議論と同じ解は得られないことに注意しなくてはならない。例えば、 $e^{2\tilde{\lambda}} = -e^{2\lambda}$ の値が負になるような解をここで考えることはできない。つまり、Toda 方程式 (3.1.106) は (3.2.4) 式とは異なる境界条件を課して解く必要があるのである。

8.2 重力解の具体例

例 1 :

解析接続した 11 次元 ansatz (8.1.26)-(8.1.29) の具体例として、

$$ds_{11}^2 = e^{2\tilde{\lambda}} \left(4ds_{AdS_5}^2 + y^2 e^{-6\tilde{\lambda}} d\tilde{\Omega}_2^2 + ds_4^2 \right)$$

$$ds_4^2 = 4(1 - y^2 e^{-6\tilde{\lambda}}) \left(d\chi + \frac{1}{x_2} dx^1 \right)^2 + \frac{e^{-6\tilde{\lambda}}}{1 - y^2 e^{-6\tilde{\lambda}}} \left[dy^2 + \frac{1}{x_2^2} \left(\frac{1}{4} - y^2 \right) (dx_1^2 + dx_2^2) \right] \quad (8.2.1)$$

を取り上げてみよう。この重力解は、 $SO(4, 2)$ 対称性を持った 7 次元ゲージ化超重力理論の超対称解に、 (χ, x_1, x_2, y) でパラメータ付けされる S^4 を fiber させて 11 次元まで次元酸化して得ることができる [72]。また、 $\mathcal{N} = 2$ 超共形不変性から要請される通り、 $SU(2) \times U(1)$ isometry があることも確認できる。

この重力解は、Toda 方程式 (3.1.106) において

$$e^D = \frac{1}{x_2^2} \left(\frac{1}{4} - y^2 \right) \quad (8.2.2)$$

とした場合に相当していることが確認できる。 (x_1, x_2) でパラメータ付けされた 2 次元空間の計量は、2 次元双曲面空間 (hyperbolic space) の計量になっている。

χ でパラメータ付けされた円周は解析的に萎む。

(8.2.2) 式より、 $y = \frac{1}{2}$ において $e^D = 0$ が成り立つことに注目しよう。このとき、 χ でパラメータ付けされた円周の半径は

$$2e^{2\tilde{\lambda}} \sqrt{1 - y^2 e^{-6\tilde{\lambda}}} \xrightarrow{y \rightarrow \frac{1}{2}} 0 \quad (8.2.3)$$

となることが確認できる。これは $y \rightarrow \frac{1}{2}$ の極限で円周 χ が萎むことを意味している。

一般に、 e^D が

$$e^D = \text{const.} \times (y_c - y), \quad y_c \neq 0 \quad (8.2.4)$$

というように、ある $y = y_c$ において線形に 0 へと漸近する場合を考えよう。(8.1.27) 式より、 $y = y_c + \epsilon$ において

$$e^{-6\tilde{\lambda}} = -\frac{\partial_y D}{y(1-y\partial_y D)} = \frac{1}{(y_c + \epsilon)y_c} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{y_c^2} \quad (8.2.5)$$

となることより、円周 χ は $\chi \sim \chi + 2\pi$ と同一視されている限りにおいては、滑らかに萎むことが確認できる。既に 8.1 節で確認したように、Killing スピノールは χ 依存性が $e^{i\frac{1}{2}\chi}$ であることから、円周 χ の周期条件 $\chi \sim \chi + 2\pi$ が尤もであることが理解できる。よって、このとき Killing スピノールも滑らかに振る舞うことが分かる。

円周 χ は Riemann 面上に非自明に fiber する。

また、この重力解は円周 χ が Riemann 面上に非自明な fiber をするという特徴を持っている。実際、 dV の flux を計算すると

$$\int_{\Sigma_2 = H_2/\Gamma} dV = g(4\pi) \quad (8.2.6)$$

と求められる。ここで Σ_2 は 2 次元双曲面空間 H_2 を離散群 Γ で割った商空間 (quotient) として得られる Riemann 面を表しており、 g は Riemann 面 Σ_2 の genus を表している。

ここで、 V は円周 χ 上への Kaluza-Klein reduction に対応するゲージ場であり、またスピノールは charge を $1/2$ 単位だけ運ぶので、Killing スピノールは χ 依存性を持つことと $\chi \sim \chi + 2\pi$ と同一視されていることに注意すれば、flux (8.2.6) は正しく量子化されていることが理解できる。

解析接続しない 11 次元 ansatz (3.1.101)-(3.1.105) で表される、 $1/2$ BPS chiral primary に対応する重力解には、 dV を積分して非自明な flux が得られるような、非自明なトポロジーを持った 2 次元の閉じた多様体が存在しなかった。この場合には $\chi = t$ はコンパクトでない時間的 (time-like) な方向であったから、そのような多様体が存在しなくて当然なのである。

例 2 : 7 次元 flat 時空と 4 次元 hyper-Kähler 多様体の積となる極限

$AdS_5 \times S^2$ 時空が 7 次元 flat 時空になって、残りの 4 次元多様体が回転方向の Killing ベクトルが 1 つ存在する hyper-Kähler 多様体となる極限が興味深いので調べてみることにしよう [73]。この場合、 $y_0 < 0$ で $|y_0|$ が十分に大きい $y = y_0$ 付近の領域に注目する。

まず

$$D(x_1, x_2, y) = \tilde{D}(x_1, x_2, Cy) - 2 \log C, \quad \tilde{y} = Cy \quad (8.2.7)$$

という形で表せる Toda 方程式の解 $D(x_1, x_2, y)$ を見つけよう。ここで C は定数である。 \tilde{D} は Toda 方程式

$$(\partial_1^2 + \partial_2^2) \tilde{D} + \partial_{\tilde{y}}^2 e^{\tilde{D}} = 0 \quad (8.2.8)$$

を満たすことが確認できる。 $y\partial_y D$ が十分に大きいとすると、

$$y\partial_y D \sim y_0\partial_y D \rightarrow \infty, \quad e^{-6\tilde{\lambda}} \sim \frac{1}{y_0^2} \left(1 + \frac{1}{y_0\partial_y D}\right) \quad (8.2.9)$$

が得られる。よって、これを解析接続した 11 次元 ansatz (8.1.26) に代入すると、 S^2 と AdS_5 の計量は

$$e^{2\tilde{\lambda}} \left(4ds_{AdS_5}^2 + y^2 e^{-6\tilde{\lambda}} d\tilde{\Omega}_2^2\right) \Big|_{y \sim y_0} = |y_0|^{2/3} \left(4ds_{AdS_5}^2 + d\tilde{\Omega}_2^2\right) \quad (8.2.10)$$

となるので、適切な座標のリスケールを行えば、flat 時空になっていることが確認できる。残りの 4 次元空間の計量は

$$e^{2\tilde{\lambda}} ds_4^2 = \frac{e^{2\tilde{\lambda}}}{C|y_0|} \left[\frac{4}{\partial_{\tilde{y}} \tilde{D}} (d\chi + V_i dx^i)^2 + \partial_{\tilde{y}} D (d\tilde{y}^2 + e^{\tilde{D}} dx^i dx^i) \right] \quad (8.2.11)$$

$$V_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ij} \partial_j \tilde{D} \quad (8.2.12)$$

となる。従って

$$C = |y_0|^{-1/3} \implies \frac{e^{2\tilde{\lambda}}}{C|y_0|} \Big|_{y=y_0} = 1 \quad (8.2.13)$$

とおけば、回転方向の Killing ベクトルが 1 つ存在する、一般の 4 次元 hyper-Kähler 多様体を持った ansatz [73] が得られることが確認できる。

例 3 :

第 4 章では、7 次元ゲージ化超重力理論の $SO(5)$ ゲージ対称性を $U(1)^2$ に矛盾なく切断することで、 AdS_7 時空における 1/4 BPS 状態に対応する重力解を求めた。この重力解は $SO(5)$ 方向において J_{12}, J_{34} のみが非零の角運動量を持つような解であった。ここでは、 AdS_5 時空の因子を持つ解を解析接続することによって、このような重力解が得られることを示す。

まず、一般に 11 次元計量を AdS_5 時空へと reduction を行ったものに注目しよう [14]。こうして得られた計量は

$$ds_{11}^2 = e^{2\lambda} \left[ds_{AdS_5}^2 + e^{-6\lambda} \left(g_{ij} dx^i dx^j + \frac{dy^2}{\cos^2 \zeta} \right) + \frac{\cos^2 \zeta}{9m^2} (d\psi + \rho)^2 \right] \quad (8.2.14)$$

$$\cos^2 \zeta = 1 - 4m^2 y^2 e^{-6\lambda} \quad (8.2.15)$$

となる。ここで (8.1.1), (8.1.5) 式で表されるような解析接続を行うと、

$$ds_{AdS_5}^2 \rightarrow -ds_{S^5}^2, \quad \lambda \rightarrow \tilde{\lambda} + \frac{i\pi}{2}, \quad \zeta \rightarrow i\tilde{\zeta} \quad (8.2.16)$$

となるので、結局 $SO(6)$ 対称性を持った計量

$$d\tilde{s}_{11}^2 = e^{2\tilde{\lambda}} \left[ds_{S^5}^2 + e^{-6\tilde{\lambda}} \left(g_{ij} dx^i dx^j + \frac{dy^2}{\cosh^2 \tilde{\zeta}} \right) - \frac{\cosh^2 \tilde{\zeta}}{9m^2} (d\psi + \rho)^2 \right] \quad (8.2.17)$$

$$\cosh^2 \tilde{\zeta} = 1 + 4m^2 y^2 e^{-6\tilde{\lambda}} \quad (8.2.18)$$

が得られることが分かる。

補足

$AdS_2 \times S^5$ への reduction を考えることもできる。この場合は、座標の解析接続 $d\Omega_2^2 \rightarrow -ds_{AdS_2}^2$ を行った上で、さらに $y = iy', x_i = ix'_i$ という解析接続を行えばよい。この結果、得られる計量は

$$ds_{11}^2 = e^{2\tilde{\lambda}} \left(4ds_{S^5}^2 + y^2 e^{-6\tilde{\lambda}} ds_{AdS_2}^2 - ds_4^2 \right) \quad (8.2.19)$$

となる。ここで ds_4^2 と $e^{-6\tilde{\lambda}}$ はそれぞれ (8.1.26) 式と (8.1.27) 式で与えられるものと同じである。但し、正しい符号を持った計量を得るためには、 $y^2 e^{-6\tilde{\lambda}} > 1$ を満たす領域を考えなくてはならないことに注意すべきである。

第2部 $SO(4) \times SO(4)$ 対称性を持つ理論

第 9 章

$SO(4) \times SO(4)$ 対称性を持つ重力解

第 2 部では、16 個の超対称電荷を持った場の理論において、bosonic 部分群が $U(1) \times SO(4) \times SO(4)$ であるような超対称群を持ったものを取り扱うことにしよう。第 1 部では場の理論の特徴に触れてから重力解を求めたが、ここでは先に場の理論に双対な重力解を求めてしまうことにする。 $R \times SO(4) \times SO(4)$ の bosonic 対称性を持った IIB 型超重力理論は [1] で一般形が調べられているので、第 9 章ではその議論を追うことにしよう。

各節の内容は次のようになっている。

- 9.1 $SO(4) \times SO(4)$ 対称性を持つ IIB 型超重力理論の超対称解を求める。その結果、計量に登場する様々な関数は全てたった 1 つの関数と関係づいていることが分かる。さらに、この方程式は単純な微分方程式に従うことも分かる。
- 9.2 9.1 節で得られた 10 次元重力解について解析を行う。第 1 部のときと同様、droplet という概念を用いて議論することができる。
- 9.3 10 次元重力解を円筒にコンパクト化した解について解析を行う。
- 9.4 10 次元重力解をトーラスにコンパクト化した解について解析を行う。

9.1 $SO(4) \times SO(4)$ 対称性を持つ IIB 型超重力理論の超対称解

10 次元 IIB 型超重力理論の超対称解のうち、 $SO(4) \times SO(4)$ 対称性を持ったものを探そう [1]。

9.1.1 S^3, \tilde{S}^3 上への reduction

議論を始めるにあたって

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + e^{H+G} d\Omega_3^2 + e^{H-G} d\tilde{\Omega}_3^2 \quad (9.1.1)$$

$$F_{(5)} = F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge d\Omega_3 + \tilde{F}_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge d\tilde{\Omega}_3 \quad (9.1.2)$$

という ansatz をおこう。ここで $d\Omega_3^2$ と $d\tilde{\Omega}_3^2$ はそれぞれ 3 次元の単位球上の計量である。 $\mu, \nu = 0, \dots, 3$ は残りの 4 次元方向を表す。

さらに、dilaton や axion は定数であり、3 形式 field strength は 0 とする。よって、励起されている R-R 場は 5 形式 field strength のみである。この 5 形式 field strength には自己双対条件が課されており、この条件は $F_{\mu\nu}$ と $\tilde{F}_{\mu\nu}$ が 4 次元において双対であることを意味する。すなわち

$$F = e^{3G} *_4 \tilde{F}, \quad \tilde{F} = -e^{3G} *_4 F; \quad F = dB, \quad \tilde{F} = d\tilde{B} \quad (9.1.3)$$

である。

10次元を S^3 , \tilde{S}^3 と4次元に分解する記法を選ぶ。

10次元の座標をそれぞれ

$$\Omega_3 : \theta^a, \quad \tilde{\Omega}_3 : \theta^{\tilde{a}}, \quad ds_4 : x^\mu; \quad ds_{10} : x^M = (x^\mu, \theta^a, \theta^{\tilde{a}}) \quad (9.1.4)$$

と表そう。ここで $a, b, \dots = 1, 2, 3$; $\tilde{a}, \tilde{b}, \dots = 1, 2, 3$; $\mu, \nu, \dots = 0, 1, 2, 3$; $M, N, \dots = 0, \dots, 9$ である。

また、10次元 Γ 行列に関する計算を行うときには

$$\Gamma_\mu = \gamma_\mu \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1, \quad \Gamma_a = \gamma_5 \otimes \sigma_a \otimes 1 \otimes \hat{\sigma}_1, \quad \Gamma_{\tilde{a}} = \gamma_5 \otimes 1 \otimes \tilde{\sigma}_a \otimes \hat{\sigma}_2 \quad (9.1.5)$$

という基底を採用することにしよう。ここで $\sigma_a, \tilde{\sigma}_a, \hat{\sigma}_a$ は Pauli 行列である。この基底においては

$$\Gamma_{11} = \Gamma_0 \cdots \Gamma_3 \prod \Gamma_a \prod \Gamma_{\tilde{a}} = \gamma^5 \hat{\sigma}^3, \quad \gamma^5 = i\Gamma_0\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3 \quad (9.1.6)$$

という表現が得られる。

超対称な重力解を求めるには、Killing スピノール方程式

$$\nabla_M \eta + \frac{i}{480} \Gamma^{M_1 M_2 M_3 M_4 M_5} F_{M_1 M_2 M_3 M_4 M_5}^{(5)} \Gamma_M \eta = 0 \quad (9.1.7)$$

を満たすスピノール η が存在することを要請すればよい。ここで δ は超対称変換を表している。さらに、この10次元 Killing スピノールは chirality 条件

$$\Gamma_{11} \eta = \gamma^5 \hat{\sigma}_3 \eta = \eta \quad (9.1.8)$$

を満たすことに注意しておこう。

10次元 Killing スピノールが S^3, \tilde{S}^3 上の Killing スピノールの因子を持つことを要請する。

まず、3次元球面上の Killing スピノール方程式から議論を始めることにしよう。3次元単位球面上のスピノールで

$$\nabla_c \chi = a \frac{i}{2} \gamma_c \chi, \quad a = \pm 1 \quad (9.1.9)$$

という方程式に従うものを考えよう。この方程式の解は3次元球面の $SO(4)$ isometry の下でスピノール表現として変換する。 a の符号は $SO(4)$ スピノール表現の chirality と関係していることに注意しよう。実際、 $SO(4)$ の下で chirality が $+$ $[-]$ のスピノールは、 $SO(4) = SU(2) \times SU(2)$ の下で $(1, 2)$ $[(2, 1)]$ のスピノール表現を持つことが確認できる。

次に、計量全体を考えよう。すると、ワープ因子 (warp factor) に由来した球面方向のスピン接続が存在するので、共変微分は

$$\nabla_a = \nabla'_a - \frac{1}{4} \Gamma^\mu_a \partial_\mu (H + G), \quad \nabla_{\tilde{a}} = \nabla'_{\tilde{a}} - \frac{1}{4} \Gamma^\mu_{\tilde{a}} \partial_\mu (H - G) \quad (9.1.10)$$

となる。ここで ∇' は3次元単位球面上のスピン接続を含んだ共変微分である。

ここで、 S^3, \tilde{S}^3 上に reduction するために、10次元スピノールを

$$\eta = \epsilon_{a,b} \otimes \chi_a \otimes \tilde{\chi}_b \quad (9.1.11)$$

として分解しよう。ここで χ_a と $\tilde{\chi}_b$ は (9.1.9) 式に従うスピノールである。また、 $\epsilon_{a,b}$ は4次元 γ 行列と $\hat{\sigma}$ 行列が作用するスピノールである。以下では、簡単のため ϵ の添字は落とすこととする。

今ここで興味があるのは、 $AdS_5 \times S^5$ 時空や pp-wave 時空に漸近する重力解のうち、元の ($AdS_5 \times S^5$ 時空や pp-wave 時空が持つ) 超対称性の半分を保持するような解である。ここで、元の超対称性は $SO(2, 4)$ と $SO(6)$ の下でそれぞれ chirality を持っていたことに注意しておこう。いま注目している重力解が持つ $SO(4) \times SO(4)$ 対称性は

$$SO(2, 4) \supset U(1)_\Delta \times SO(4), \quad SO(6) \supset U(1)_J \times SO(4) \quad (9.1.12)$$

というように含まれているので、BPS 条件 $H' = \Delta - J = 0$ を満たす超対称電荷を探すことにすると、これらの超対称電荷は $SO(4) \times SO(4)$ 生成子の下で同じ ($++$ または $--$) chirality を持っていなければならないことが分かる。

Killing スピノール方程式 (9.1.7) における因子について

$$M \equiv \frac{i}{480} \Gamma^{M_1 M_2 M_3 M_4 M_5} F_{M_1 M_2 M_3 M_4 M_5}^{(5)} \quad (9.1.13)$$

$$= \frac{i}{48} \left(e^{-\frac{3}{2}(H+G)} \Gamma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \epsilon_{abc} \Gamma^{abc} - e^{-\frac{3}{2}(H-G)} \Gamma^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} \epsilon_{\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}} \Gamma^{\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}} \right) \quad (9.1.14)$$

$$= -\frac{1}{4} e^{-\frac{3}{2}(H+G)} \gamma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \gamma^5 \hat{\sigma}^1 \quad (9.1.15)$$

と計算できることが分かる。ここで (9.1.3) 式と、 M は負の 10 次元 chirality を持ったスピノールに作用するという事実を使った。よって、(9.1.7) 式は

$$(iae^{-\frac{1}{2}(H+G)} \gamma_5 \hat{\sigma}_1 + \frac{1}{2} \gamma^\mu \partial_\mu (H+G)) \epsilon + 2M\epsilon = 0 \quad (9.1.16)$$

$$(ibe^{-\frac{1}{2}(H-G)} \gamma_5 \hat{\sigma}_2 + \frac{1}{2} \gamma^\mu \partial_\mu (H-G)) \epsilon - 2M\epsilon = 0 \quad (9.1.17)$$

$$\nabla_\mu \epsilon + M\gamma_\mu \epsilon = 0 \quad (9.1.18)$$

と表すことができる。これらは実質的に 4 次元の方程式になっていることに注意しよう。また、 a と b は (9.1.9) 式のように、それぞれ S^3 と \tilde{S}^3 における $SO(4)$ スピノール表現の chirality を表している定数である。

ここで、(9.1.8) 式を用いて 4 次元 γ 行列を $\gamma^\mu \rightarrow \hat{\sigma}^1 \gamma^\mu$ と定義しなおせば、これらの式から $\hat{\sigma}$ 行列を取り除くことができる。確かに取り除いた方が表式は簡単になるが、ここでは残しておくことにする。なぜなら、残しておけば 2 つの 3 次元球面 S^3 , \tilde{S}^3 の間にある対称性がより明らかになるからである。

9.1.2 4 次元スピノール双線形

4 次元スピノール双線形を作る。

これからの議論を行う上で、スピノール双線形 (bilinear) を作っておくと便利である。以下の議論では

$$K_\mu = -\bar{\epsilon} \gamma_\mu \epsilon, \quad L_\mu = \bar{\epsilon} \gamma^5 \gamma_\mu \epsilon, \quad f_1 = i\bar{\epsilon} \hat{\sigma}_1 \epsilon, \quad f_2 = i\bar{\epsilon} \hat{\sigma}_2 \epsilon, \quad Y_{\mu\nu} = \bar{\epsilon} \gamma_{\mu\nu} \hat{\sigma}_1 \epsilon \quad (9.1.19)$$

というスピノール双線形を用いる。ここで $\bar{\epsilon} = \epsilon^\dagger \gamma^0$ である。

(9.1.18) 式を用いて、スピノール双線形 (9.1.19) を微分すると

$$\nabla_\mu f_1 = -e^{-\frac{3}{2}(H-G)} \tilde{F}_{\mu\nu} K^\nu = \frac{e^{-\frac{3}{2}(H+G)}}{2} \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} F^{\lambda\rho} K^\nu \quad (9.1.20)$$

$$\nabla_\mu f_2 = -e^{-\frac{3}{2}(H+G)} F_{\mu\nu} K^\nu \quad (9.1.21)$$

$$\begin{aligned} \nabla_\nu K_\mu &= -e^{-\frac{3}{2}(H+G)} \left[F_{\mu\nu} f_2 - \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} F^{\lambda\rho} f_1 \right] \\ &= -e^{-\frac{3}{2}(H+G)} F_{\mu\nu} f_2 - e^{-\frac{3}{2}(H-G)} \tilde{F}_{\mu\nu} f_1 \end{aligned} \quad (9.1.22)$$

$$\nabla_\nu L_\mu = e^{-\frac{3}{2}(H+G)} \left[-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} F_{\lambda\rho} Y^{\lambda\rho} - F_\mu{}^\rho Y_{\rho\nu} - F_\nu{}^\rho Y_{\rho\mu} \right] \quad (9.1.23)$$

$$\nabla_\sigma Y_{\mu\nu} = e^{-3A} \left[-F_{\mu\nu} L_\sigma - \frac{1}{2} F_{\mu\sigma} L_\nu + \frac{1}{2} F_{\nu\sigma} L_\mu \right] \quad (9.1.24)$$

と求めることができる。

また、スピノールとその転置を取ったもの ϵ^\top を含んだスピノール双線形も用いる。特に

$$\omega_\mu = \epsilon^\top \Gamma^2 \gamma_\mu \epsilon \quad (9.1.25)$$

$$d\omega = 0 \quad (9.1.26)$$

を満たす 1 形式が後で重要な役割を果たすことになる。ここで採用している記法では $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_3$ が対称行列で Γ_2 が反対称行列であるから、 $\Gamma^2 \gamma_\mu^\top \Gamma^2 = -\gamma_\mu$ が成り立つことに注意しておこう。

Fierz 恒等式から課せられる制限がある。

Fierz 恒等式より

$$\begin{aligned} K \cdot L &= -(\bar{\epsilon} \gamma_\mu \epsilon)(\bar{\epsilon} \gamma^5 \gamma^\mu \epsilon) = 0 \\ L^2 &= (\bar{\epsilon} \gamma^5 \gamma_\mu \epsilon)(\bar{\epsilon} \gamma^5 \gamma^\mu \epsilon) = -(\bar{\epsilon} \hat{\sigma}_1 \epsilon)(\bar{\epsilon} \hat{\sigma}_1 \epsilon) - (\bar{\epsilon} \hat{\sigma}_2 \epsilon)(\bar{\epsilon} \hat{\sigma}_2 \epsilon) = f_1^2 + f_2^2 \\ -K^2 &= -(\bar{\epsilon} \gamma_\mu \epsilon)(\bar{\epsilon} \gamma^\mu \epsilon) = -(\bar{\epsilon} \hat{\sigma}_1 \epsilon)(\bar{\epsilon} \hat{\sigma}_1 \epsilon) - (\bar{\epsilon} \hat{\sigma}_2 \epsilon)(\bar{\epsilon} \hat{\sigma}_2 \epsilon) = f_1^2 + f_2^2 \end{aligned} \quad (9.1.27)$$

という関係式が得られる [15]。よって、ベクトル L_μ の方向とベクトル K_μ の方向は直交していること、 L_μ 方向は空間的で K_μ 方向は時間的事実であることが確認できる。

9.1.3 スピノール双線形が満たす方程式から課される制限

以上の結果を用いて、計量とゲージ場にかかる束縛条件を求めていく。

議論しやすい座標系 (t, y, x^α) を設定する。

まず最初に、 K^μ が Killing ベクトルであり、 $L_\mu dx^\mu$ が局所的な完全形式 (exact form) になっていることを確認しよう。

ベクトル L_μ が非自明な成分を 1 つしか持たないように座標系を選ぶと便利であるから、座標 y を

$$\zeta dy = L_\mu dx^\mu, \quad \zeta = \pm 1 \quad (9.1.28)$$

として定義することにしよう。 ζ の符号は後で決定する。そして、 y に直交する 3 次元部分空間を張る他の 3 つの座標については

$$ds^2 = h^2 dy^2 + \hat{g}_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (9.1.29)$$

として定義することにしよう。ここで $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ である。

ベクトル K^μ に注目しよう。(9.1.27) 式より

$$0 = K^\mu L_\mu = K^y L_y = \zeta K^y \quad (9.1.30)$$

という関係式が成り立つので、これより直ちに K^α は x^α で張られる 3 次元空間におけるベクトルであることが分かる。やはりベクトル K^α に沿った方向に座標軸を選ぶと便利であるから、座標 t を

$$K^t = 1 \quad (9.1.31)$$

と定義することにしよう。

従って、4 次元計量は

$$ds^2 = -h^{-2}(dt + V_i dx^i)^2 + h^2(dy^2 + \tilde{h}_{ij} dx^i dx^j) \quad (9.1.32)$$

と表せることが分かる。ここで $i, j = 1, 2$ である。また (9.1.27) 式より $K^2 = -L^2$ であるから、計量の g_{tt} 成分と g^{yy} 成分は関係していることを用いた。さらに、後の便宜のために h^2 という因子を括り出しておいた。

f_2, B_t を評価する。

(9.1.21) 式に注目しよう。定義より、 K^μ は t 方向の単位ベクトルであり、また B_i は t に依存しないので

$$\partial_\mu B_t = F_{\mu\nu} K^\nu = -F_{\mu\nu} \bar{\epsilon} \gamma^\nu \epsilon = -\frac{1}{4} \bar{\epsilon} [\gamma_\mu, \mathbb{F}] \epsilon \quad (9.1.33)$$

が成り立つ。よって、(9.1.21) 式は

$$\partial_\mu f_2 = -e^{-\frac{3}{2}(H+G)} \partial_\mu B_t \iff df_2 = -e^{-\frac{3}{2}(H+G)} dB_t \quad (9.1.34)$$

となる。また、(9.1.16) 式とその共役 (adjoint) を取った式は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} e^{-\frac{3}{2}(H+G)} \not{F} \epsilon &= \left(iae^{-\frac{1}{2}(H+G)} + \frac{1}{2} \gamma_5 \not{\partial} (H+G) \hat{\sigma}_1 \right) \epsilon \\ \frac{1}{2} e^{-\frac{3}{2}(H+G)} \bar{\epsilon} \not{F} &= \bar{\epsilon} \left(iae^{-\frac{1}{2}(H+G)} + \frac{1}{2} \gamma_5 \not{\partial} (H+G) \hat{\sigma}_1 \right) \end{aligned} \quad (9.1.35)$$

であるから、(9.1.33) 式と合わせると

$$\partial_\mu B_t = e^{\frac{3}{2}(H+G)} \frac{1}{2} \partial_\mu (H+G) \cdot \epsilon^\dagger \gamma^0 \gamma_5 \hat{\sigma}_1 \epsilon = -e^{\frac{3}{2}(H+G)} \frac{1}{2} \partial_\mu (H+G) \cdot f_2 \quad (9.1.36)$$

という関係式が得られる。よって、

$$\partial_\mu f_2 = \frac{1}{2} f_2 \partial_\mu (H+G) \quad (9.1.37)$$

という方程式が得られるので、これは簡単に解けて

$$f_2 = 4\alpha e^{\frac{1}{2}(H+G)}, \quad B_t = -\alpha e^{2(H+G)} \quad (9.1.38)$$

という表式が得られる。ここで α は積分定数であり、後で固定する。

f_1, \tilde{B}_t を評価する。

(9.1.20), (9.1.17) 式に注目して、同様の議論を繰り返すことにより

$$f_1 = 4\beta e^{\frac{1}{2}(H-G)}, \quad \tilde{B}_t = -\beta e^{2(H-G)}, \quad 4\beta = 1 \quad (9.1.39)$$

という表式が得られる。ここで $4\beta = 1$ と設定することができたのは、5 形式 field strength の overall な符号を選ぶ自由度と、Killing スピノールを適当にリスケールする自由度があったためである。先ほど $K^t = 1, L_y = \zeta$ という条件を選んだので、 t と y の規格化条件は決まっているのだが、Killing スピノールの規格化はまだ決まっていなかったことに注意しよう。

ζ の符号を固定する。

H が y 座標のみに依存する関数であることを示そう。そのためには、(9.1.16) 式と (9.1.17) 式を足しあげたものとその共役

$$\hat{\sigma}_1 \not{\partial} H \epsilon = \left(-iae^{-\frac{1}{2}(H+G)} \gamma_5 + be^{-\frac{1}{2}(H-G)} \right) \epsilon \quad (9.1.40)$$

$$\bar{\epsilon} \hat{\sigma}_1 \not{\partial} H = -\bar{\epsilon} \left(-iae^{-\frac{1}{2}(H+G)} \gamma_5 + be^{-\frac{1}{2}(H-G)} \right) \quad (9.1.41)$$

に注目すればよい。これらの式より

$$\begin{aligned} \partial_\mu H \cdot f_1 &= i \partial_\mu H \bar{\epsilon} \hat{\sigma}_1 \epsilon = \frac{i}{2} \bar{\epsilon} \left[\gamma_\mu, \left(-iae^{-\frac{1}{2}(H+G)} \gamma_5 + be^{-\frac{1}{2}(H-G)} \right) \right] \epsilon \\ &= -ae^{-\frac{1}{2}(H+G)} \bar{\epsilon} \gamma_5 \gamma_\mu \epsilon = -ae^{-\frac{1}{2}(H+G)} L_\mu \end{aligned} \quad (9.1.42)$$

という関係式が得られる。 L_μ は y 方向のベクトルであったから、 H は y のみの関数であることが分かる。

さらに (9.1.39) 式を用いると、この関数 $H(y)$ の形を決定することができて

$$e^H = -a\zeta y = y, \quad \zeta = -a \quad (9.1.43)$$

となる。よって、 $\zeta = \pm 1$ の符号を固定することができた。

積分定数 α の値を固定する。

(9.1.40) 式に $\bar{\epsilon}\gamma^5\hat{\sigma}^1$ を掛けると

$$h^{-2}\gamma\partial_y e^H = -ah^{-2} = -a\left(f_1^2 + \frac{ba}{4\alpha}f_2^2\right) \quad (9.1.44)$$

という関係式が得られる。これを (9.1.27) 式と比較すると、 $a, b = \pm 1$ より

$$4\alpha ab = 1 \quad (9.1.45)$$

が成り立たなくてはならないことが分かる。よって、 $4\alpha = 4\beta = 1$ と選ぶことにしよう。ここで $\alpha = \pm\beta$ の符号を選ぶことは、 $b = \pm a$ の符号を選ぶことを意味しており、さらにこのことは先ほど議論したように、chiral primary 演算子のうち $\Delta \mp J = 0$ のどちらを満たすものに注目するかを決めることに対応している。

この選択を行ったことで、以後は $b = a$ を満たす超対称性のみが保持されることに注意しよう。但し、 a の符号は依然としてどちらを選んでも良いのである。

射影条件を求め。

(9.1.40) 式に戻って、 $g_{yy} = h^2$ であることを用いれば

$$\left(\frac{1}{hy}\hat{\sigma}_1\gamma^3 + iae^{-\frac{1}{2}(H+G)}\gamma_5 - be^{-\frac{1}{2}(H-G)}\right)\epsilon = 0 \quad (9.1.46)$$

となることが分かる。 γ^3 の添字である 3 方向とは、 y 方向に対応した flat 時空上の方向である。さらに (9.1.27), (9.1.38), (9.1.39) 式を使うと、この式は射影演算子

$$\left(\sqrt{1+e^{-2G}}\hat{\sigma}_1\gamma^3 + aie^{-G}\gamma_5 - a\right)\epsilon = 0 \quad (9.1.47)$$

の形で表すことができる。

また、定義 (9.1.19) と $K^t = 1, L_y = -a$ より

$$\epsilon^\dagger\epsilon = 1, \quad \epsilon^\dagger\gamma^0\gamma^5\gamma^3\epsilon = -a \quad (9.1.48)$$

という関係式が得られる。ここで $\gamma^0\gamma^5\gamma^3$ はユニタリ演算子であるから、射影条件

$$[1 + a\gamma^0\gamma^5\gamma^3]\epsilon = 0 \quad (9.1.49)$$

が成り立たなくてはならないことが分かる。この式は $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ を用いて

$$[1 + ai\gamma_1\gamma_2]\epsilon = 0 \quad (9.1.50)$$

と書き直すこともできる。

(9.1.47) 式と (9.1.49) 式の 2 つの射影条件に注目することにより、Killing スピノール ϵ は

$$\epsilon = e^{i\delta}\gamma^5\gamma^3\hat{\sigma}^1\epsilon_1; \quad \gamma^3\hat{\sigma}^1\epsilon_1 = a\epsilon_1, \quad \sinh 2\delta = ae^{-G} \quad (9.1.51)$$

と表せることが分かる。この式を $f_2 = i\bar{\epsilon}\hat{\sigma}_2\epsilon$ に代入すれば、 ϵ_1 のスケールを固定することができて

$$\epsilon_1 = e^{\frac{1}{4}(H+G)}\epsilon_0, \quad \epsilon_0^\dagger\epsilon_0 = 1 \quad (9.1.52)$$

となる。以下では、 (x_1, x_2) 平面における局所 Lorentz 変換を適切に行うことで、 ϵ_0 の位相を 0 と設定するものとしよう。つまり、 ϵ_0 は constant なスピノールとして扱うことにする。

1 形式 ω_μ について

以上で得られた Killing スピノールの表現を、1 形式 ω_μ の定義 (9.1.25) に代入すると

$$\begin{aligned}\omega_2 &= \epsilon^\top \gamma^2 \gamma^2 \epsilon = e^{\frac{1}{2}(H+G)} \cosh 2\delta \epsilon_0^\top \epsilon_0 = h^{-1} \epsilon_0^\top \epsilon_0 \\ \omega_{\hat{1}} &= \epsilon^\top \gamma^2 \gamma^1 \epsilon = -iah^{-1} \epsilon_0^\top \epsilon_0 \\ \omega_\mu &= \omega_{\hat{c}} e_{\hat{\mu}}^{\hat{c}} dx^\mu = \text{const.} (\tilde{e}_{\hat{i}}^{\hat{1}} + ia \tilde{e}_{\hat{i}}^{\hat{2}}) dx^i\end{aligned}\quad (9.1.53)$$

となる。ここで $\tilde{e}_{\hat{i}}^{\hat{c}}$ は (9.1.32) 式で定義された計量 $\tilde{h}_{ij} = \tilde{e}_{\hat{i}}^{\hat{c}} \tilde{e}_{\hat{j}}^{\hat{c}}$ の vielbein であり、 $e_{\hat{i}}^{\hat{c}} = h \tilde{e}_{\hat{i}}^{\hat{c}}$ は 4 次元計量の (x_1, x_2) 方向における完全な vielbein である。

(9.1.26) 式を用いれば、これらの vielbein は y に依存しないこと、そして 2 次元空間 (x_1, x_2) の計量は flat であることが確認できる。よって、以下では $\tilde{h}_{ij} = \delta_{ij}$ となる計量を選ぶことにしよう。

ゲージ場 B とベクトル V を評価する。

ここで (9.1.3) 式を用いれば、ゲージ場についての表現が

$$B = B_t(dt + V) + \hat{B}, \quad d\hat{B} + B_t dV = -h^2 e^{3G} \star_3 d\tilde{B}_t \quad (9.1.54)$$

$$\tilde{B} = \tilde{B}_t(dt + V) + \hat{\tilde{B}}, \quad d\hat{\tilde{B}} + \tilde{B}_t dV = h^2 e^{-3G} \star_3 dB_t \quad (9.1.55)$$

として得られる。ここで \hat{B} , $\hat{\tilde{B}}$ は時間方向の成分は持たない。 \star_3 は (y, x_1, x_2) の 3 次元 flat 空間の ϵ 記号である。

ここでベクトル V の表現を求めることができる。Killing スピノールが満たす方程式 (9.1.22) の反対称部分

$$-\frac{1}{2}d[h^{-2}(dt + V)] = \frac{1}{2}dK = e^{-(H+G)}F + e^{-(H-G)}\tilde{F} \quad (9.1.56)$$

から議論を始めよう。最左辺と最右辺が等しいという方程式に注目すると、非自明な関係式

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}h^{-2}dV &= -e^{-(H+G)}(d\hat{B} + B_t dV) - e^{-(H-G)}(d\hat{\tilde{B}} + \tilde{B}_t dV) \\ &= h^2(e^{-H+2G} \star_3 d\tilde{B}_t - e^{-H-2G} \star_3 dB_t)\end{aligned}\quad (9.1.57)$$

$$dV = 2h^4 y \star_3 dG = \frac{1}{y} \star_3 dz, \quad z \equiv \frac{1}{2} \tanh G \quad (9.1.58)$$

が得られる。ここで (9.1.27) 式より

$$h^{-2} = y(e^G + e^{-G}) \quad (9.1.59)$$

が成り立つことを用いた。ここに無矛盾条件 $d(dV) = 0$ を課すと、関数 z が満たすべき方程式

$$\frac{1}{y} \partial_i^2 z + \partial_y \left(\frac{1}{y} \partial_y z \right) = 0 \quad (9.1.60)$$

が得られる。さらに (9.1.54), (9.1.55), (9.1.58) 式から、ゲージ場の表現は

$$d\hat{B} = -\frac{1}{4}y^3 \star_3 d\left(\frac{z + \frac{1}{2}}{y^2}\right) \quad (9.1.61)$$

$$d\hat{\tilde{B}} = -\frac{1}{4}y^3 \star_3 d\left(\frac{z - \frac{1}{2}}{y^2}\right) \quad (9.1.62)$$

と決定できる。

以上で、計量とゲージ場の完全な形を導くことができた。さらに、Killing スピノールの表現 (9.1.51), (9.1.52) も得られた。この Killing スピノールは他の全ての方程式に従うことが示せるので、consistent な解になっていることが確認できる。

9.1.4 IIB 型 ansatz

以上の結果をまとめると

$$ds^2 = -h^{-2}(dt + V_i dx^i)^2 + h^2(dy^2 + dx^i dx^i) + ye^G d\Omega_3^2 + ye^{-G} d\tilde{\Omega}_3^2 \quad (9.1.63)$$

$$h^{-2} = 2y \cosh G \quad (9.1.64)$$

$$y\partial_y V_i = \epsilon_{ij}\partial_j z, \quad y(\partial_i V_j - \partial_j V_i) = \epsilon_{ij}\partial_y z \quad (9.1.65)$$

$$z = \frac{1}{2} \tanh G \quad (9.1.66)$$

$$F_{\mu\nu} = dB_t \wedge (dt + V) + B_t dV + d\hat{B}$$

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = d\tilde{B}_t \wedge (dt + V) + \tilde{B}_t dV + d\hat{\tilde{B}}$$

$$B_t = -\frac{1}{4}y^2 e^{2G}, \quad \tilde{B}_t = -\frac{1}{4}y^2 e^{-2G} \quad (9.1.67)$$

$$d\hat{B} = -\frac{1}{4}y^3 *_3 d\left(\frac{z + \frac{1}{2}}{y^2}\right), \quad d\hat{\tilde{B}} = -\frac{1}{4}y^3 *_3 d\left(\frac{z - \frac{1}{2}}{y^2}\right) \quad (9.1.68)$$

となる。 $i = 1, 2$ であり、 $*_3$ は (y, x_1, x_2) でパラメータ付けされた 3 次元 flat 空間における ϵ 記号である。

完全な解はたった 1 つの関数 z によって決まることが分かる。解は x_1, x_2, y という 3 つの座標に非自明に依存していて、 $y \geq 0$ を満たす。

9.2 10 次元の系の解析

前節で得られた解について解析を行う。

関数 z が正則であるためには、 $y = 0$ において境界条件を満たさなくてはならない。

IIB 型 ansatz (9.1.63)-(9.1.68) は関数 $z(x_1, x_2, y)$ でパラメータ付けされていて、この関数は線型方程式

$$\partial_i \partial_i z + y \partial_y \left(\frac{\partial_y z}{y} \right) = 0 \quad (9.2.1)$$

に従っている。

ここで、計量 (9.1.63) より、2 つの 3 次元球面 S^3, \tilde{S}^3 の半径の間には

$$y = R_{S^3} R_{\tilde{S}^3}; \quad R_{S^3} = \sqrt{ye^G}, \quad R_{\tilde{S}^3} = \sqrt{ye^{-G}} \quad (9.2.2)$$

という関係が成り立つことに注目しよう。すなわち、 y は S^3 と \tilde{S}^3 の半径の積であるから、 $z(x_1, x_2, y)$ は何か特別な振る舞いをしない限り $y = 0$ において特異点を持つことになる。実際、計量 (9.1.63) を G や h を用いずに z で表すと

$$ds^2 = -\frac{2y}{\sqrt{1-4z^2}}(dt + V_i dx^i)^2 + y\sqrt{\frac{1+2z}{1-2z}}d\Omega_3^2 + y\sqrt{\frac{1-2z}{1+2z}}d\tilde{\Omega}_3^2 + \frac{\sqrt{1-4z^2}}{2y}(dy^2 + dx^i dx^i) \quad (9.2.3)$$

となることから、 z が正則であるためには $y = 0$ 平面において $z(x_1, x_2, 0) = \pm \frac{1}{2}$ でなければならないことが理解できる。

ここでは $z(x_1, x_2, 0) = \frac{1}{2}$ の場合を考えてみよう。 z を $y = 0$ の周りで

$$z \sim \frac{1}{2} - e^{-2G} = \frac{1}{2} + yg(x) - y^2 f(x) + \mathcal{O}(y^3) \quad (9.2.4)$$

と展開してみると、(9.2.1) 式より

$$y\partial_i^2 g(x) - y^2\partial_i^2 f(x) + \mathcal{O}(y^3) = -\frac{g(x)}{y} + 0 + \mathcal{O}(y) \quad (9.2.5)$$

となる。 $y \rightarrow 0$ の極限で両辺が一致するには $g(x) = 0$ が必要であるから、結局 $e^{-2G} \sim y^2 f(x)$ と表せることが分かる。このとき $f(x)$ は $y = 0$ 近傍では正でなければならない。従って、 $e^{-G} \sim yc(x)$ を満たす関数 $c(x) > 0$ を定義することができる。よって、 y 方向と \tilde{S}^3 方向の計量は $y = 0$ 近傍において

$$\begin{aligned} h^2 dy^2 + ye^{-G} d\tilde{\Omega}_3^2 &= \left[y \left(\frac{1}{yc + \mathcal{O}(y^2)} + \mathcal{O}(y) \right) \right]^{-1} dy^2 + y [yc + \mathcal{O}(y^2)] d\tilde{\Omega}_3^2 \\ &\sim c(x)(dy^2 + y^2 d\tilde{\Omega}_3^2) \end{aligned} \quad (9.2.6)$$

となることが分かる。よって $h \sim \sqrt{c(x)}$ は有限のまま、 S^3 の半径 $\sqrt{ye^G} \sim c(x)^{-\frac{1}{2}}$ も有限のままであることが分かる。 V が有限のままであることも、すぐ後で確認する。

$z = -\frac{1}{2}$ のときも全く同様に議論することができる。これらの議論の結果をまとめると、 $y = 0$ 平面において2種類の境界条件

$$\begin{cases} z(x_1, x_2, 0) = \frac{1}{2} & \tilde{S}^3 \text{が萎む場合} \\ z(x_1, x_2, 0) = -\frac{1}{2} & S^3 \text{が萎む場合} \end{cases} \quad (9.2.7)$$

を取ることが可能であると分かる。以下では、 $z = \frac{1}{2}$ 領域を白い droplet で、 $z = -\frac{1}{2}$ 領域を黒い droplet で表すことにしよう。また、dropletの系は調和ポテンシャル中の自由フェルミオンの系と対応させて考えることができるので、このアナロジーに基づいて $z = \frac{1}{2}$ 領域を空孔、 $z = -\frac{1}{2}$ 領域をフェルミオンと表現することもある。

$z = \frac{1}{2}$ の場合と $z = -\frac{1}{2}$ の場合で同様の議論を行うことができたのは、 $z \rightarrow -z$ という変換は S^3 と \tilde{S}^3 を入れ替えるという変換に相当しており、これは方程式が持つ対称性になっていることに起因している。さらに、これはフェルミオンの系においてフェルミオンと空孔を交換する対称性に相当していることが分かる。

但し、フェルミオンの系においてフェルミオンと空孔が対称でなければ、重力解が持つ対称性にはならないことに注意しよう。例えば、後で確認するように、 $AdS_5 \times S^5$ 時空解の場合は2種類の droplet は入れ替えに関して対称に配置されていないので、(方程式は対称性を持っているけれども)解の持つ対称性とはならないのである。

異なる droplet の境界においても、重力解は正則である。

これら2種類の droplet 領域では特異点を持たないことを示そう。重力解を決定するために、 $z = \pm\frac{1}{2}$ の (x_1, x_2) 平面の特定の領域が必要となる。フェルミオンの系で表現すれば、 (x_1, x_2) 平面は位相空間に対応する。

$\Phi = z/y^2$ を定義すると(9.2.1)式は Φ に対する6次元の Laplace 方程式

$$\partial_i \partial_i \Phi + \frac{1}{y^3} \partial_y (y^3 \partial_y \Phi) = 0 \quad (9.2.8)$$

となる。そのうち4つの次元において球対称性を持ち、 y はその4次元の半径を表す変数となっている。 $y = 0$ 上の z の境界値は6次元におけるこの方程式の charge の源となる。よって、この境界値を決めてしまえば一般解

$$z(x_1, x_2, y) = \frac{y^2}{\pi} \int_{\mathcal{D}} dx'_1 dx'_2 \frac{z(x'_1, x'_2, 0)}{[(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2 + y^2]^2} = -\frac{1}{2\pi} \oint_{\partial\mathcal{D}} dl n'_i \frac{x_i - x'_i}{[(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2 + y^2]} + \sigma \quad (9.2.9)$$

$$V_i(x_1, x_2, y) = \frac{\epsilon_{ij}}{\pi} \int_{\mathcal{D}} dx'_1 dx'_2 \frac{z(x'_1, x'_2, 0)(x_j - x'_j)}{[(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2 + y^2]^2} = \frac{\epsilon_{ij}}{2\pi} \oint_{\partial\mathcal{D}} \frac{dx'_j}{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2 + y^2} \quad (9.2.10)$$

を書くことができる。ここで $z(x'_1, x'_2, 0)$ は局所的な定数である。また最後の等号において部分積分を行った結果、droplet \mathcal{D} 上の積分から droplet の境界 $\partial\mathcal{D}$ 上の積分になっていることに注意しよう。 n_i は $z = \frac{1}{2}$ 領域の方向を向いた単位標準ベクトル (unit normal vector) である。 σ は充分大きな半径の円周の外側において z が定数の状況 (すなわち $AdS_5 \times S^5$ 時空に漸近する状況) を考えて、そのとき無限遠方からの受ける寄与を表している。つまり、漸近的に $z = \pm\frac{1}{2}$ であるときは $\sigma = \pm\frac{1}{2}$ となる。(9.2.10)式における周回積分は $z = -\frac{1}{2}$ 領域が左になるように方向付けされている (図 9.1)。

(9.2.10) 式における V の 2 番目の表現から、droplet の内部において $y \rightarrow 0$ のとき V は有限であることが分かる。また、 V は大局的に well-defined なベクトル場であることも確認できる。ここで、 x_1 と x_2 が共にコンパクトでない限りは、 (x_1, x_2, y) 空間においてコンパクトな 2-cycle は存在しない。従って、この場合 dV の積分が 0 にならないようなコンパクトな 2-cycle は存在しないことが分かる。この結果、 t でパラメータ付けされている時間方向が well-defined であること、すなわち NUT charge を持たないことが保証される。

重力解の具体例

これらの重力解は、第 1 部で扱った $SO(6) \times SO(3)$ 対称性を持つ重力解を求めるよりはずっと簡単である。なぜなら方程式が線形であるし、境界条件も単純だからである。

例えば、 $AdS_5 \times S^5$ 時空解において $\tilde{S}^3 (\subset S^5)$ は $y = 0$ 平面の円の外側(白い領域)で萎む。一方、 $S^3 (\subset AdS_5)$ は $y = 0$ の円の内側(黒い領域)で萎む。

(x_1, x_2) 平面は無人大で droplet は有限の大きさを持っている場合、解は $AdS_5 \times S^5$ 時空における 1/2 BPS 状態に対応する。

例 1 : pp-wave 時空解

pp-wave 時空解は

$$z(x_1, x_2, 0) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x_2 > 0 \text{ の場合} \\ 0 & x_2 = 0 \text{ の場合} \\ -\frac{1}{2} & x_2 < 0 \text{ の場合} \end{cases} \quad (9.2.11)$$

という単純な境界条件の場合に対応している。このことを確認してみよう。 x_1 が isometry 方向になっていることに注意すると、(9.2.9) 式と (9.2.10) 式より

$$z(x_2, y) = \frac{1}{2} \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 + y^2}}; \quad V_1 = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x_2^2 + y^2}}, \quad V_2 = 0 \quad (9.2.12)$$

となる。これを IIB 型 ansatz (9.1.63)-(9.1.68) に入れて、変数変換

$$y = r_1 r_2, \quad x_2 = \frac{1}{2} (r_1^2 - r_2^2) \quad (9.2.13)$$

を行うと、pp-wave 計量の標準的な形 [46]

$$ds^2 = -2dt dx_1 - (r_1^2 + r_2^2) dt^2 + dr_1^2 + dr_2^2 \quad (9.2.14)$$

が得られる。従って、 $y = 0$ 平面上の 2 つの領域の境界(今の場合は $x_2 = 0$)において V は発散するにも関わらず、時空解は滑らかになることが確認できる。このことはさらに、一般に異なる droplet 領域の境界は滑らか

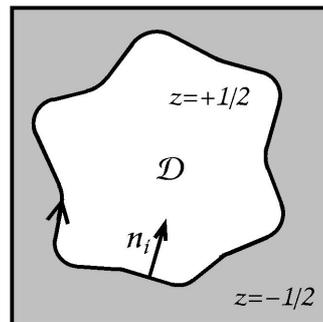


図 9.1: 記号の定義について

であることを示している。なぜなら、領域の境界は局所的には pp-wave 時空になるのであり、その計量は非特異だからである。

例 2: $AdS_5 \times S^5$ 時空解

$AdS_5 \times S^5$ 時空解を得るためには、新たに関数 $\tilde{z} = z - \frac{1}{2}$ を定義しておくのが便利である。そして、半径 r_0 の円盤状の源 (source) を持つ場合の \tilde{z}/y^2 が満たす Laplace 方程式を考えればよい。 (x_1, x_2) 平面において極座標 (r, ϕ) を取ると

$$\begin{aligned} \tilde{z}(r, y) &= -\frac{y^2}{\pi} \int_{\text{disk}} \frac{r' dr' d\phi}{[r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \phi + y^2]^2} \\ \tilde{z}(r, y; r_0) &\equiv \frac{r^2 - r_0^2 + y^2}{2\sqrt{(r^2 + r_0^2 + y^2)^2 - 4r^2 r_0^2}} - \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (9.2.15)$$

$$\begin{aligned} V_\phi &= -r \sin \phi V_1 + r \cos \phi V_2 = -\frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \frac{rr' \cos \phi' d\phi'}{r^2 + r'^2 + y^2 - 2rr' \cos \phi'} \\ V_\phi(r, y; r_0) &\equiv -\frac{1}{2} \left(\frac{r^2 + y^2 + r_0^2}{\sqrt{(r^2 + r_0^2 + y^2)^2 - 4r^2 r_0^2}} - 1 \right) \end{aligned} \quad (9.2.16)$$

と得られる。これを IIB 型 ansatz (9.1.63)-(9.1.68) に代入して、変数変換

$$y = r_0 \sinh \rho \sin \theta, \quad r = r_0 \cosh \rho \cos \theta, \quad \tilde{\phi} = \phi - t \quad (9.2.17)$$

を実行すると、標準的な $AdS_5 \times S^5$ の計量

$$ds^2 = r_0 \left[-\cosh^2 \rho dt^2 + d\rho^2 + \sinh^2 \rho d\Omega_3^2 + d\theta^2 + \cos^2 \theta d\tilde{\phi}^2 + \sin^2 \theta d\tilde{\Omega}_3^2 \right] \quad (9.2.18)$$

が得られる。ここで、 $r_0 = R_{AdS}^2 = R_{S^5}^2$ であることが確認できる。実際、overall な座標のスケーリング $(x_i, y) \rightarrow (\lambda x_i, \lambda y)$ を行うと、計量のスケールが λ 倍ずれることが分かる。後で確認するように、droplet の全面積は brane の数と等しいので、これは期待通りの結果であるということが出来る。

(9.2.18) 式で得られた AdS の半径と、標準的な関係 $R_{AdS}^4 = 4\pi l_p^4 N$, $l_p = g^{1/4} \sqrt{\alpha'}$ と比較することにより、 (x_1, x_2) 平面における droplet の面積の量子化条件

$$(\text{Area}) = 4\pi^2 l_p^4 N = 2\pi \hbar N; \quad \hbar = 2\pi l_p^4 \quad (9.2.19)$$

を求めることができる。ここで N は整数である。また、 (x_1, x_2) 平面を位相空間と見做したときの effective な \hbar を定義した。

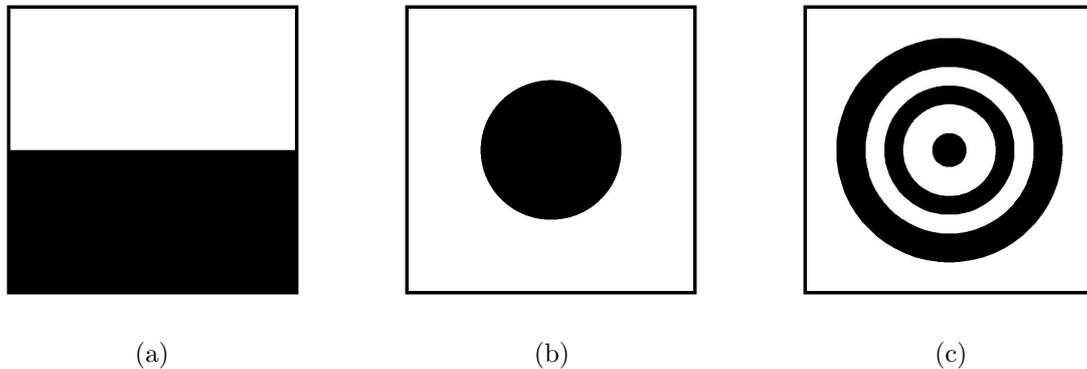


図 9.2: droplet の例 (a) pp-wave 時空解に対応する droplet の系 (b) $AdS_5 \times S^5$ 時空解に対応する droplet の系 (c) 円形 droplet を同心円状に重ね合わせた系

例3: 円形 droplet の重ね合わせに対応する時空解

$AdS_5 \times S^5$ 時空解に対応する droplet は円形であることを確認した。(9.2.1) 式は線型方程式であるから、円形 droplet の重ね合わせに対応している解は簡単に作るができる(図 9.2)。これらの解の中で、droplet が同心円状になっている系に対応する解はさらに Killing ベクトルを持っていて、 AdS 時空において時間に依存しない系に対応する。droplet が同心円状になっていない系は $\phi = t + \tilde{\phi}$ に依存する。ここで t や $\tilde{\phi}$ は (9.2.18) 式と同じで、 AdS 時空における時間と漸近的な S^5 における角度である。

同心円状の droplet に対応する解は (9.2.15) 式や (9.2.16) 式を適切に重ね合わせて、

$$\tilde{z} = \sum_i (-1)^{i+1} \tilde{z}(r, y; r_0^{(i)}), \quad V_\phi = \sum_i (-1)^{i+1} V_\phi(r, y; r_0^{(i)}) \quad (9.2.20)$$

として構成することができる。ここで $r_0^{(1)}$ は最も大きな円の半径であり、 $r_0^{(2)}, r_0^{(3)}, \dots$ とするにつれて小さい円の半径を表す。

簡単な場合として、黒い輪の中心に小さな白い円が入っている解について注目してみよう(図 9.3 a)。空孔(白い領域)が十分に小さい場合は、空孔を S^5 に埋め込まれている最大の \tilde{S}^3 に巻きついた D3-brane と見做すことができる。また、この空孔の面積 N_h が droplet 全体の面積 N よりも充分に小さければ、この解は空孔の近くで局所的に $AdS_5 \times S^5$ 時空解と見做せるはずである。

ここで、 \tilde{S}^3 上に巻きついた brane の枚数を増やしていくことで、空孔の面積を充分に大きくすると、極限としては黒い輪が大変細いものになる(図 9.3 b)。この系は AdS_5 に埋め込まれている S^3 に巻きついた D3-brane の重ね合わせと見做すことができる。

解のトポロジーについて

正則な重力解は (x_1, x_2) 平面における非圧縮流体の droplet と一対一に対応する。これらの droplet は $y = 0$ において取りうる $z = \pm \frac{1}{2}$ という2つの境界条件に対応していて、これらの条件は geometric には2つの S^3 のうち、どちらが $y = 0$ において滑らかに萎むかに関係している。 $y = 0$ 平面において $z = -\frac{1}{2}$ ならば S^3 が正則に萎んでいき、 $z = \frac{1}{2}$ ならば \tilde{S}^3 が萎むのである。2つの領域の境界においては、両方が萎むことが確認できる。実際にこれらの点では S^7 が萎むのである。なぜなら geometry が局所的には pp-wave 時空と同じになり、 S^3 と \tilde{S}^3 の区別が無くなってしまうからだ。

 \tilde{S}^3 が萎む領域について

ここで、 (y, x_1, x_2) 空間における2次元平面 $\tilde{\Sigma}_2$ を考えよう。これは $y = 0$ 平面において $z = \frac{1}{2}$ の領域にある

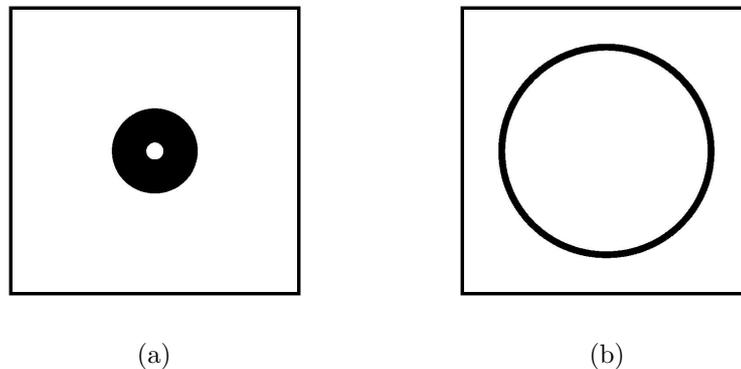


図 9.3: (a) \tilde{S}^3 に巻きついた D3-brane に対応する droplet の系 (b) S^3 に巻きついた D3-brane に対応する droplet の系

自己交差しない (non-intersecting) 閉曲線に端を持つ (図 9.4 a)。この $\tilde{\Sigma}_2$ に 3次元球面 \tilde{S}^3 を fiber させると滑らかな 5次元多様体を作ることができる。この滑らかな多様体は 5次元球面のトポロジーを持っている。

それでは、この 5次元球面上の 5形式 field strength F_5 の flux を測ってみよう。field strength の表現 (9.1.2) を 4次元ゲージ場 (9.1.67) を用いて書き直すと、空間成分は

$$\tilde{F}|_{spatial} = d(\tilde{B}_t V) + d\hat{B} \tag{9.2.21}$$

で与えられる。 $B_t V$ は大局的に well-defined なベクトル場なので、flux は

$$\tilde{N} = -\frac{1}{2\pi^2 l_p^4} \int d\hat{B} = -\frac{1}{8\pi^2 l_p^4} \int_{\tilde{\Sigma}_2} y^3 *_3 d\left(\frac{z - \frac{1}{2}}{y^2}\right) = \frac{(\text{Area})_{z=-\frac{1}{2}}}{4\pi^2 l_p^4} \tag{9.2.22}$$

となる。ここで $\tilde{\Sigma}_2$ は (y, x_1, x_2) で張られる 3次元空間の中の 2次元面である。この式は、被積分領域に囲まれた領域に存在する charge の合計が、 $y = 0$ 平面において $\tilde{\Sigma}_2$ が作る閉曲線で囲まれる領域に含まれる $z = -\frac{1}{2}$ 領域の全面積に等しいことを示している。

この式から、面積の量子化 (9.2.19) が導かれる。 $AdS_5 \times S^5$ 時空の場合は非自明な 5次元球面は 1 つしかないので、この球面上での積分が全 flux を与えることになる。

S^3 が萎む領域について

今度は、別の 5次元球面を考えてみよう。今度の球面は $y = 0$ 平面において $z = -\frac{1}{2}$ の領域に端を持つものを考える (図 9.4 b)。この 5次元多様体上の flux は

$$N = \frac{1}{2\pi^2 l_p^4} \int d\hat{B} = -\frac{1}{8\pi^2 l_p^4} \int_{\Sigma_2} y^3 *_3 d\left(z + \frac{1}{2}y^2\right) = \frac{(\text{Area})_{z=\frac{1}{2}}}{4\pi^2 l_p^4} \tag{9.2.23}$$

で与えられる。やはり、非積分領域に囲まれた領域の flux が、閉曲線に囲まれた領域に含まれている $z = \frac{1}{2}$ 領域の全面積と関係していることが分かる。

つまり、これらの flux が 0 でなければ、3次元球面は萎まないということが確認できる。従って、たくさんの droplet が存在するような系を考えると、複雑なトポロジーを持った重力解が得られるということになる。

さらに、 Σ_2 や $\tilde{\Sigma}_2$ よりも複雑な 2次元平面を考えることによって、5次元球面のトポロジーを持たない 5次元多様体も構築することができる。例えば、 $S^4 \times S^1$ のトポロジーを持ったものなどを作ることが可能である。

重力解から系のエネルギーを求めることができる。

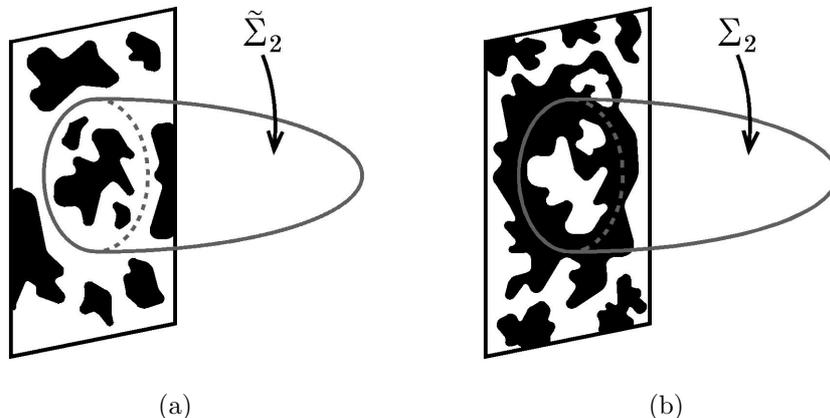


図 9.4: 平面は $y = 0$ 平面を表している。黒い領域は $z = -\frac{1}{2}$ 領域、白い領域は $z = \frac{1}{2}$ 領域に対応している。

ここでエネルギーに注目しよう。これは BPS 条件より、角運動量 J と等しくなければならない ($\Delta = J$)。このエネルギーを (1/2 BPS 状態と対応する) 自由フェルミオンの系で表現した場合には、調和振動子ポテンシャル中のフェルミオンのエネルギーから N 個のフェルミオンの系の基底状態のエネルギーを引いたものであることが知られている [74]。または、量子 Hall 問題における角運動量として表現することもできる。

角運動量を求めるには、重力解から読み取ればよい。これは計量の $g_{\phi+t,t}$ 成分の主要項を計算することで求められる。この計算をするときには、3次元球面の半径 u, v を独立な変数として扱うのが便利である。すなわち $u = \sqrt{ye^G}$, $v = \sqrt{ye^{-G}}$ として、計量を

$$ds^2 = -(u^2 + v^2)(dt + V_i dx^i)^2 + \frac{1}{u^2 + v^2}(dy^2 + d\mathbf{x}^2) + u^2 d\Omega_3^2 + v^2 d\tilde{\Omega}_3^2 \quad (9.2.24)$$

と表すこととする。 x_1, x_2 については、(9.2.9) 式より

$$\tilde{z} \equiv -\frac{y^2}{\pi} \int_{\mathcal{D}} \frac{d^2 x'}{[(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2 + u^2 v^2]^2} = -\frac{y^2}{v^2(v^2 + u^2)} \quad (9.2.25)$$

という関係式が得られるので、これを使えば u, v を用いて表すことができる。ここで \mathcal{D} は $y = 0$ 平面における $\tilde{z} = z - \frac{1}{2} = -1$ 領域であるとしている。この $\tilde{z} = -1$ 領域は (x_1, x_2) 平面において十分に大きい半径の円周内だけに存在していると仮定しよう (図 9.5)。すると、 $r \equiv |\mathbf{x}|$ と y がこの半径より大きいときには、 \tilde{z} と V_i について多重極展開ができて

$$\begin{aligned} \tilde{z} &= -\frac{y^2}{\pi} \left[\frac{1}{(r^2 + y^2)^2} \int_{\mathcal{D}} d^2 x' - \frac{2}{(r^2 + y^2)^3} \int_{\mathcal{D}} d^2 x' \left\{ (\mathbf{x}')^2 - \frac{6r^2(\mathbf{x}' \cdot \mathbf{n})^2}{r^2 + y^2} \right\} \right] \\ V_i &= -\frac{1}{2\pi} \frac{2r}{(r^2 + y^2)^2} \int_{\partial\mathcal{D}} dx'_i (\mathbf{x}' \cdot \mathbf{n}) \end{aligned} \quad (9.2.26)$$

となる。ここで $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ は (x_1, x_2) 方向の単位ベクトルである。また、二重極 (双極) が 0 となるように原点を選んでいる ($\int_{\mathcal{D}} d^2 x' x'_i = 0$)。さらに、ここで

$$\begin{aligned} Q^2 &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathcal{D}} d^2 x' \\ W &= Q^{-2} \frac{1}{\pi} \int_{\mathcal{D}} d^2 x' |x'|^2 \\ W_{\mathbf{n}} &= Q^{-2} \frac{1}{\pi} \int_{\mathcal{D}} d^2 x' n_i n_j x'_i x'_j \equiv \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tilde{W} \cos \phi \end{aligned} \quad (9.2.27)$$

という記号を定義しておこう。 n_i は x^i 方向の単位ベクトルである。また、角度 ϕ の原点は W_{ij} が対角化され

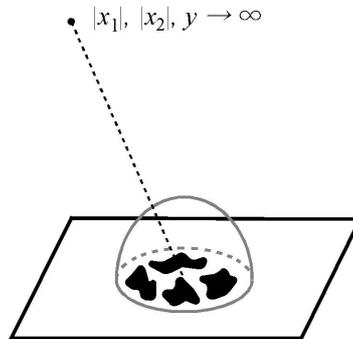


図 9.5: 設定: $|x_1|, |x_2|, y$ が共に充分大きい領域から見て多重極展開をする。

るように選んでいることに注意しよう。これらを用いると (9.2.26) 式は

$$\begin{aligned}\tilde{z} &= -\frac{Q^2}{(r^2 + y^2)^2} \left[1 - \frac{2}{(r^2 + y^2)} \left(W - \frac{6r^2 W_{\mathbf{n}}}{r^2 + y^2} \right) \right] \\ V_\phi &= -Q^2 \frac{r^2}{2(r^2 + y^2)^2} \left[1 + 24 \frac{r^2}{(r^2 + y^2)^2} W_{\mathbf{n}} - \frac{4W}{(r^2 + y^2)} - \frac{8W_{\mathbf{n}}}{(r^2 + y^2)} \right] \\ V_r &= -Q^2 \frac{1}{2} \frac{4\tilde{W}r \sin 2\phi}{(r^2 + y^2)^3}\end{aligned}\quad (9.2.28)$$

と表せることが分かる。

以上の結果を用いて、 r, y が充分大きい領域における計量 (9.2.24) の漸近形を求めよう。いま $y = uv$ が充分に大きいことに注意して、さらに (9.2.28) 式の形を見ることにより、求める漸近形は $1/v^2$ で展開された形で表すことができると考えられる。 v は S^3 の半径であった。従って、変数変換

$$u = \tilde{u} + \frac{f_1}{\tilde{v}^2} + \frac{f_2}{\tilde{v}^4}, \quad v = \tilde{v} \left(1 + \frac{g_1}{\tilde{v}^2} + \frac{g_2}{\tilde{v}^4} \right), \quad \phi = \tilde{\phi} + \frac{h_1}{\tilde{v}^2} + \frac{h_2}{\tilde{v}^4}\quad (9.2.29)$$

を行っておこう。実際に $1/\tilde{v}^2$ 展開を行うとゲージ場が現れて、次元 $\Delta = 2$ のスカラーモードがいくつか得られる。また、 $\tilde{W} \neq 0$ のときにはスカラーモードのうちの 1 つが励起されることが分かる。

ここで、いま $\tilde{z} = -1$ 領域は有限な領域内だけに存在していることから、漸近的には $AdS_5 \times S^5$ 時空になっていることに注意しておこう。そして、ゲージ場の影響で $AdS_5 \times S^5$ 時空が deform されると考えることができるのである。ここで、この deformation はゲージ化超重力理論で用いられる方法で行われること、そして $1/\tilde{v}^4$ までのオーダーでは AdS_5 時空と S^5 空間が混合 (mixing) を起こすのはゲージ場の影響のみであることを仮定することにしよう。すると、(9.2.29) 式で定義された展開係数は

$$\begin{aligned}f_1 &= \frac{u^3(Q^2 - 2W)}{4Q^2} + \frac{u(Q - u^2)\tilde{W} \cos 2\phi}{2Q^2} \\ g_1 &= \frac{Q^2 - 2W}{6Q} - \frac{u^2(Q^2 - 2W)}{4Q^2} - \frac{(Q - u^2)\tilde{W} \cos 2\phi}{2Q^2} \\ h_1 &= -\frac{\tilde{W} \sin 2\phi}{Q}, \quad h_2 = 0\end{aligned}\quad (9.2.30)$$

と求めることができ、計量は

$$\begin{aligned}ds^2 &= \left[1 + \frac{(3u^2 - 2Q)(Q^2 - 2W) + 6(Q - u^2)\tilde{W} \cos 2\phi}{6Q^2 v^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{((2Q - 3u^2)(Q^2 - 2W) - 6(Q - u^2)\tilde{W} \cos 2\phi)^2}{48Q^4 v^4} - \frac{2g_2}{v^4} \right] \\ &\quad \times \left\{ - \left(v^2 + Q + \frac{Q^2 - 2W}{3v^2} \right) dt^2 + \frac{Q}{v^2} \left(1 - \frac{Q}{v^2} \right) dv^2 + v^2 d\tilde{\Omega}_3^2 \right\} \\ &\quad + g_{uu} du^2 + 2g_{u\phi} du D\phi + g_{\phi\phi} D\phi^2 + g_{\Omega\Omega} d\tilde{\Omega}_3^2\end{aligned}\quad (9.2.31)$$

と表せることが分かる。但し、 $g_{uu}, g_{u\phi}, g_{\phi\phi}, g_{\Omega\Omega}$ は形が煩雑なので省略した。また、ここで

$$D\phi = d\phi + dt - \frac{2W - Q^2}{Qv^2} dt\quad (9.2.32)$$

である。よって、ここから角運動量 J を読み取ると、それは BPS 条件によりエネルギー Δ に等しくて

$$\Delta = J = \frac{2\pi^2}{16\pi G_N^5} \frac{2W - Q^2}{Q^2} = \frac{1}{16\pi^2 l_p^8} \left(WQ^2 - \frac{Q^4}{2} \right)\quad (9.2.33)$$

であると求められる。 WQ^2 に比例する項はフェルミオンのエネルギーに対応していて、 Q^4 に比例する項は N 個のフェルミオンの基底状態のエネルギーに対応している。

以上の議論で得られた結果に (9.2.27) 式を代入すれば、結局

$$\begin{aligned} \Delta = J &= \frac{1}{16\pi^3 l_p^8} \left[\int_{\mathcal{D}} d^2x (x_1^2 + x_2^2) - \frac{1}{2\pi} \left(\int_{\mathcal{D}} d^2x \right)^2 \right] \\ &= \int_{\mathcal{D}} \frac{d^2x}{2\pi\hbar} \frac{x_1^2 + x_2^2}{2\hbar} - \frac{1}{2} \left(\int_{\mathcal{D}} \frac{d^2x}{2\pi\hbar} \right)^2 \end{aligned} \quad (9.2.34)$$

が成り立つことが分かる。ここで \mathcal{D} は $z = \tilde{z} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ 領域であり、フェルミオンが存在する領域に対応する。(9.2.19) 式で示した \hbar の定義を用いると、これがフェルミオンの量子エネルギーから基底状態のエネルギーを差引いたものであることが確認できる。

droplet 同士を十分に近づけると、対応する重力解において **geometric** な相転移が起こる。

他の droplet から遠く離れている droplet に注目してみよう。このような droplet は、局所的には $AdS_5 \times S^5$ 時空解に対応する droplet として扱うことができる。ここでは、充分大きな $z = \frac{1}{2}$ 領域に取り囲まれた $z = -\frac{1}{2}$ 領域の droplet を考えることにしよう。但し、漸近領域において $S^3 \subset AdS_5$, $\tilde{S}^3 \subset S^5$ である。

まず、 $z = -\frac{1}{2}$ 領域では S^3 が萎むことができるが、 $z = \frac{1}{2}$ 領域では S^3 は萎むことができないことに注目しよう。従って、充分大きな $z = \frac{1}{2}$ 領域に囲まれた $z = -\frac{1}{2}$ 領域の droplet は、 S^3 に巻きついた D3-brane と見做せることが分かる。

ところで、この $z = -\frac{1}{2}$ 領域の droplet 上では \tilde{S}^3 は萎むことができないのであるから、 $z = \frac{1}{2}$ 領域に端を持つ 2 次元面 $\tilde{\Sigma}_2$ 上に 3 次元球面 \tilde{S}^3 を fiber して作られた S^5 は萎むことができないことが分かる (図 9.4 a)。これは、 S^3 に巻きついた D3-brane は萎んで、新しく構成された S^5 に 5 形式 field strength の flux が存在していることを意味している。

従って、ここに **geometric** な転移が起こっていることが理解できる。つまり

- flux が小さいとき (droplet が小さいとき): $z = -\frac{1}{2}$ 領域の droplet に対応する geometry は、背景時空に広がる D3-brane と見做すことができる。
- flux が大きいとき (droplet が大きいとき): $z = -\frac{1}{2}$ 領域の droplet に対応する geometry は、flux を持った滑らかな geometry と見做すことができる。

というような転移が起こるのである。このことについて少し詳しく調べてみよう。

いま $z = -\frac{1}{2}$ 領域の droplet は十分に小さいのであるから、面積の量子化条件 (9.2.19) より、この droplet の面積は $\hbar = 2\pi l_p^4$ のオーダーであると仮定しよう。この droplet が充分に大きな $z = \frac{1}{2}$ 領域に囲まれていれば、D3-brane と見做すことができるのであった。このとき、D3-brane の枚数は 1 のオーダーである。

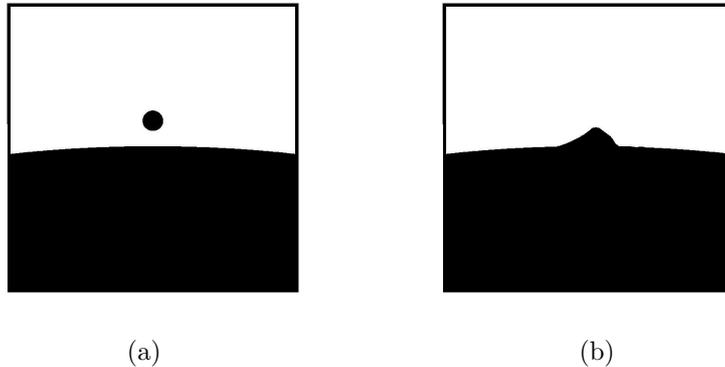


図 9.6: droplet の系で見る **geometric** な相転移

それでは、この droplet を十分に大きな $z = -\frac{1}{2}$ 領域の droplet に近づけていくことを考えよう (図 9.6 a)。議論が複雑にならないように、大小 2 つの droplet は円形である場合を考えることにしよう。よって、大きな droplet は AdS 基底状態に対応している。このとき、大小 2 つの droplet の間の距離 d を小さくしていくと、(9.2.34) 式より

- $d \sim \sqrt{\hbar}$ まで接近したとき：得られる geometry は滑らかではあるが、曲率が十分に大きくなる。系のエネルギーは 10 次元での Planck スケール M_{pl} のオーダーになる。
- $d \ll \sqrt{\hbar}$ まで接近したとき：得られる geometry はさらに大きな曲率を持つ。しかしながら、系のエネルギーは形式的には非常に小さくなる。

となることが分かる。

一方で、重力モードで記述される低エネルギー励起状態は、大きな円形 droplet における長波長の小さな揺らぎに対応する。このことは、自由フェルミオンの描像において、Fermi 面に非常に近いエネルギーを持ったフェルミオンは、フェルミオン流体の長波長の励起状態で特徴付けられるボソンとして記述されることから理解することができる。

従って、大小 2 つの droplet を十分に近づけて得られる励起状態は、時空の曲率が大きくて、非自明なトポロジーを持っていて、エネルギーが小さいという共通点から、droplet の重力モードとして含まれているものであると結論付けることができる (図 9.6 b)。

以上では、時空の曲率を Planck 単位で議論していたことに注意しよう。よって、弦の結合定数が小さい場合には、geometry はもっと小さな曲率スケールでも弦理論の補正を受けてしまって、geometry の記述は有効でなくなってしまうと考えられる。

$\mathcal{N} = 1^*$ 理論 [54] においても、同じような状況が起きていることが予想されている。すなわち、geometry は特異的でないが、flux のうちいくつかを小さくすると大きな曲率を持つような解が存在すると思われるのである。

希釈ガス近似と Coulomb branch

このような geometry な相転移は、 $\mathbf{R}^{1,3}$ 上の D3-brane 理論において現れる Coulomb branch 解と何となく似ているように思われる。実際、IIB 型 ansatz (9.1.63)-(9.1.68) に適切な極限を取ると $SO(4)$ 不変な Coulomb branch 解を得ることができるので、ここで実際にやってみよう [75]。

まず、 $y = 0$ 平面において面積 A_i の droplet が分布するという境界条件を考える。そして、droplet 間の距離を長くして、 A_i を固定するという希釈ガス (dilute gas) 近似を取る (図 9.7)。すなわち、計量 (9.1.63) や関数

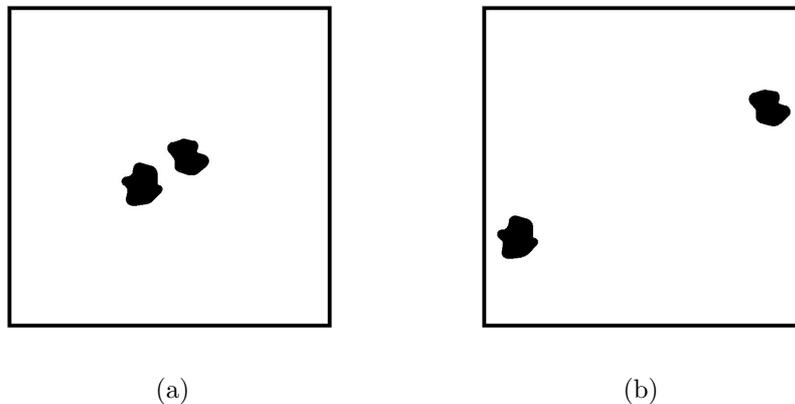


図 9.7: droplet の系で見る希釈ガス近似

z の表式 (9.2.9) において

$$\mathbf{x} \rightarrow \lambda \tilde{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{x}' \rightarrow \lambda \tilde{\mathbf{x}}', \quad y \rightarrow \lambda \tilde{y}, \quad A_i : \text{fixed} \quad (9.2.35)$$

というリスケールを行った上で、droplet の位置 $\tilde{\mathbf{x}}_i$ は固定したまま $\lambda \rightarrow \infty$ という極限を取るのである。

ここで (9.2.9) 式、(9.1.64) 式、(9.1.66) 式より、IIB 型 ansatz における近似的な表現として

$$e^{2G} = \frac{\tilde{y}^2}{\pi \lambda^2} \sum_i \frac{A_i}{[(\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{x}}'_i)^2 + \tilde{y}^2]^2} \equiv \frac{\tilde{y}^2}{\lambda^2} H, \quad h^{-2} = y e^{-G} = \lambda^2 H^{-1/2} \quad (9.2.36)$$

が得られる。また、 $V_i dx^i \sim \lambda^{-2}$ を含む項は、 $\lambda \rightarrow \infty$ の極限において主要項にはならないことに注意しよう。以上より、計量 (9.1.63) において希釈ガス極限を取ると

$$ds^2 = H^{-1/2} [-d\tilde{t}^2 + dw_i dw_i] + H^{1/2} (d\tilde{\Omega}_3^2 + \tilde{y}^2 d\Omega_3^2 + dx^i dx^i) \quad (9.2.37)$$

となることが分かる。ここで $\tilde{t} = \lambda t$ である。また (w_1, w_2, w_3) で張られる 3 次元 flat 空間は $d\tilde{\Omega}_3$ を半径を大きくする極限を取った結果として得られたものである。すなわち $\lambda^2 d\tilde{\Omega}_3^2 \sim dw_i dw_i$ である。

さらに (9.2.36) 式で定義したように、 H は調和関数

$$H = \frac{1}{\pi} \sum_i \frac{A_i}{[(\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{x}}'_i)^2 + \tilde{y}^2]^2} \quad (9.2.38)$$

であるから、結局 (9.2.37) 式は多重中心 (multi-center) 解になっていることが分かる。この解は超対称 Yang-Mills 理論の Coulomb branch の $SO(4)$ 不変なセクターに対応している [75]。

pp-wave 時空に漸近する解について

(x_1, x_2) 平面において droplet がコンパクトな領域に分布している場合、この系は $AdS_5 \times S^5$ に漸近する重力解に対応する。また、droplet が半平面だけに分布している場合は、それに対応する重力解は pp-wave 時空解に漸近する。後者についてもう少し議論してみよう。

十分に大きな $z = \pm \frac{1}{2}$ 領域の中に小さい $z = \mp \frac{1}{2}$ 領域の droplet が存在しているような解 (図 9.8) は、それぞれ S^3 や \tilde{S}^3 に巻きついた D3-brane に対応する。また、大きな droplet は flux を持った別の geometry に対応するのであった。

x_1 方向に並進不変な解を考えることもできる。これらは、帯に対応する解である。この系は、無限大のエネルギーを持っているが、有限のエネルギー密度を持っている。

さらに x_1 方向をコンパクト化することもできる。これは DLCQ (離散光錐量子化) コンパクト化であり、この解は $x_1 = x^-$ としたときの pp-wave 解 (9.2.14) に漸近する。これらの解は pp-wave の DLCQ に対応する。運動量 $-p_-$ は、Fermi 面をフェルミオン数と空孔数が同じになるところにおいたときの、フェルミオン系のエネルギーとなる。

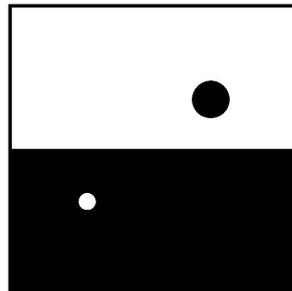


図 9.8: 十分に大きな $z = \pm \frac{1}{2}$ 領域の中に小さい $z = \mp \frac{1}{2}$ 領域の droplet が存在している系

特異解について

ここまでで取り上げた解は、どれも事象の地平 (horizon) を持たず、解析的な重力解になっている。

IIB 型 ansatz で扱える特異解としては、superstar などが知られている [76]。この解はゲージ化超重力理論における荷電ブラックホールの extremal 極限として得られる [77, 78]。この解も BPS 解であるから、線型方程式 (9.2.1) は満たす。ところが、 $y = 0$ 平面における境界条件は、AdS 時空解の場合と同じように円盤が存在するのであるが、その値は $z = -\frac{1}{2}$ ではなく $z = -\frac{1}{2(1+q)}$ となる。ここで q は特異解の charge パラメータである。解が特異的なのであるから、境界条件 $z = \pm\frac{1}{2}$ を満たさないのである。

9.3 円筒にコンパクト化された系の解析

IIB 型弦理論に DLCQ (Discrete Light-Cone Quantization, 離散的な光錐量子化) を施して得られた理論は、トラス上の M2-brane 理論と対応していることが知られている。よって、IIB 型理論のコンパクト化を考えるならば、M2-brane の理論を調べておくとよい。

まずはコンパクト化していない、広がった M2-brane の理論から議論を始めよう。ここで mass deformation を行うと、超対称電荷を 16 個だけ保持する理論が得られる [79, 80]。M2-brane の共形場理論は R 対称性として $SO(8)$ 対称性を持つが、この deformation を行うとその部分群である $SO(4) \times SO(4)$ 対称性だけが保持されるようになる。

こうして得られた理論は、mass deformation された $\mathcal{N} = 4$ 超対称 Yang-Mills 理論とよく似た特徴を持っている。例えば、両者とも dielectric brane (giant graviton) で表現される真空を持っていることが挙げられる。ここで dielectric brane と言っているのは、8 次元 transverse 方向のうちの 4 次元に入っている S^3 、またはその残りの 4 次元に入っている \tilde{S}^3 に巻きついた M5-brane のことである (表 9.1 を参照されたい)。このような dielectric brane で表される重力解は、IIB 型 ansatz (9.1.63)-(9.1.68) で表される重力解に U-dual を取ることによって得られる。この操作は、ある調和方程式の解を見つける問題に帰着させて実行することができる [80]。

先ほど少し触れたように、IIB 型弦理論に DLCQ (離散的な光錐量子化) を施して、さらに DLCQ 運動量を N 単位だけ持たせたものは、トラス上の N 枚の M2-brane の理論と同じであることが知られている [81, 82]。

ここで最大超対称な 10 次元 pp-wave 時空における DLCQ を考えよう。そのためには、light-like な Killing 方向を $x^- \sim x^- + 2\pi R$ として同一視すればよい。すると、この理論における N 単位の運動量を持つセクター $-p_- = N/R$ は、トラス上の mass deformation された M2-brane 理論によって与えられるのである。これとは異なる DLCQ 極限を考えることも可能であるが [83]、以下ではこのような極限を考えることにしよう。

10 次元 pp-wave 時空の視点から見ると、 S^3 または \tilde{S}^3 に巻きついた D3-brane に対応する超対称解が存在することが予想できる。M 理論に移行すると、この解は M2-brane 理論の真空に写像されることになる。この真空は M5-brane が S^3 または \tilde{S}^3 に巻きついてコンパクト化された M2-brane に相当するのである。

真空の数は N の分割で与えられる。

このように考えると、真空を構成する各々の brane に N 単位の DLCQ 運動量を分け与えることになるので、 N の分割に一対一対応した真空が存在していることが理解できる。

また、これらの真空は orbifold 理論の特定の large N 極限における chiral primary 演算子で表現できること

表 9.1:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
M2-brane			$SO(4) \sim S^3$				$SO(4) \sim \tilde{S}^3$			

が分かっており [44]、これを用いた議論からも、真空の数は N の分割であることが確認できる。

さらに、pp-wave 時空に対応するフェルミオン流体の描像との関係を用いて議論することもできる。 x^- 方向をコンパクト化する場合には、cylinder 上のフェルミオンを扱うことになる。既に確認したように、pp-wave 時空に対応する系では、cylinder の半分をフェルミオンで満たすことになる。このとき、 $x_2 \rightarrow \pm\infty$ における漸近条件は、フェルミオンと空孔が持つ $U(1)$ charge の合計が 0 の状態にだけ注目せよ、ということの意味する。この $U(1)$ charge は Fermi レベルの位置と関係しており、フェルミオンと空孔の charge の合計が 0 になるように Fermi レベルの位置を設定することになる。

フェルミオンのエネルギーは M2-brane の枚数 N と同じである。ここで扱っているフェルミオンは相対論的なフェルミオンであるから、ボソン化が可能であり、またエネルギーが $E = N$ である状態の数は N の分割で与えられる。

M5-brane が S^3 に巻きついて \tilde{S}^3 に巻きついて、得られる解のトポロジーは同じである。

図 9.9 に示したように、高エネルギーのフェルミオンや空孔が存在する状態は、 S^3 または \tilde{S}^3 に巻きついた M5-brane に対応している。一方、低エネルギーのフェルミオンや空孔が存在する状態は、既に議論したように、flux のある滑らかな geometry に対応しているのだと考えられる。

ここで、高エネルギーのフェルミオンに対応する geometry (図 9.9 a) と、高エネルギーの空孔に対応する geometry (図 9.9 b) はトポロジーが同じであることに注目しよう。図中に示された弧 1, 2 に注目すれば、それぞれの geometry が 2 つの区別できる S^4 を持っていて、そこには非零の flux が通っていることが確認できる。よって、両者のトポロジーは等しいのである。

それでは、この 2 つの S^4 に注目してみよう。ここでは図 9.9 a の場合を取り上げてみることにする。片方の S^4 は弧 2 に \tilde{S}^3 が fiber することによって得られる。この S^4 は M5-brane に垂直な方向に存在するので、特に興味深いことはない。もう片方の S^4 は弧 1 に S^3 が fiber することによって得られるのである。この S^4 は M5-brane に沿った方向に存在するので、時空においてどのように広がっているのかを調べてみると面白い。ここで少し確認してみよう。

高エネルギーのフェルミオンは (\tilde{S}^3 ではなく) S^3 に巻きついた M5-brane と解釈できることを思い出しておこう。そして、 S^3 が潰れている点を出発点として、そこから S^3 の半径が有限である領域を進んでいき、このフェルミオンに対応する M5-brane が巻き付いている S^3 に到着するという 1 次元的な道のりを考える。このと

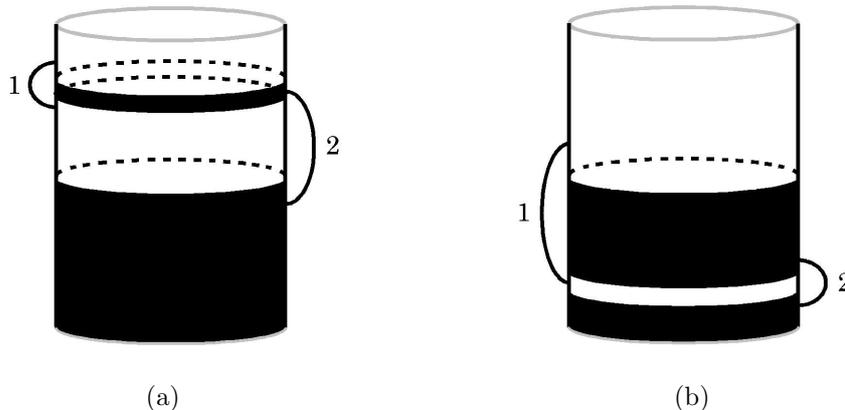


図 9.9: mass deformation された M2-brane 理論の真空について。弧 1 は S^3 に、弧 2 は \tilde{S}^3 に fiber することにより、 S^4 を得ることができる。

- (a) dielectric M5-brane が S^3 に巻きついている様子。
- (b) dielectric M5-brane が \tilde{S}^3 に巻きついている様子。

き、M5-brane が存在することによる反作用として、M5-brane 世界体積上の S^3 は萎んでしまうというのである。従って、出発点と到着点 (M5-brane) では S^3 が潰れており、その途中では S^3 が有限の半径を持っているような 1 次元の道のりを考えているのであるから、これによって S^4 が得られるというわけなのである。

図 9.9b の場合は、高エネルギーの空孔の系であり、M5-brane が \tilde{S}^3 に巻きついた系に対応しているのであるが、既に指摘したように、トポロジーとしては高エネルギーのフェルミオンの系と同じである。両者の違いは、2 つの S^4 上の 4 形式 flux の量の違いのみに帰着されるのである。

S^3 と \tilde{S}^3 の交換に関する双対性がある。

高エネルギーのフェルミオンの系と空孔の系でトポロジーが同じということより、 S^3 と \tilde{S}^3 の交換に関して双対性があることが予想される。実際、これらの交換に関する正確な双対性があるのだ。

また、この双対性の下で不変であるような特別な解も存在する。これは、自由フェルミオンの描像における粒子・空孔双対性に対応するものである。

IIB 型 ansatz から次元酸化して得られた 11 次元 ansatz

以上のようにして、IIB 型 ansatz で表される重力解に U-dual を取って 11 次元まで持ち上げると、11 次元重力解の ansatz が

$$\begin{aligned}
 ds_{11}^2 &= e^{\frac{4\Phi}{3}}(-dt^2 + dw_1^2 + dw_2^2) + e^{-\frac{2\Phi}{3}} \left[h^2(dy^2 + dx_2^2) + ye^G d\Omega_3^2 + ye^{-G} d\tilde{\Omega}_3^2 \right] \\
 e^{2\Phi} &= \frac{1}{h^2 - h^{-2}V_1^2} \\
 F_4 &= -d(e^{2\Phi}h^{-2}V_1) \wedge dt \wedge dw_1 \wedge dw_2 \\
 &\quad - \frac{1}{4}e^{-2\Phi}[e^{-3G} *_2 d(y^2e^{2G}) \wedge d\tilde{\Omega}_3 + e^{3G} *_2 d(y^2e^{-2G}) \wedge d\Omega_3]
 \end{aligned} \tag{9.3.1}$$

で与えられる。ここで、 $*_2$ は平坦な 2 次元空間 (y, x_2) における ϵ 記号である。また、 h, G は IIB 型 ansatz (9.1.64)-(9.1.68) で与えたものと同じである。これらの関数は、 x_1 方向に並進不変な帯に対応する境界条件や pp-wave 時空に対応する境界条件 (9.2.12) を考慮することで決定できる (図 9.10)。

ここで、もともとの IIB 型理論の重力解に x_1 方向の並進対称性があるので、 V_1 成分だけが 0 ではないことに注意しよう。また、M 理論の重力解を求める段階で U-dual を取っているのので、この ansatz (9.3.1) には x_1 座標が現れていないことにも注意しよう。

従って、関数 z と V_1 は pp-wave 時空解における関数 (9.2.12) の重ね合わせで与えられることが分かる。すなわち

$$z(x_2, y) = \sum_i (-1)^{i+1} z^{pp}(x_2 - x_2^i, y), \quad V_1(x_2, y) = \sum_i (-1)^{i+1} V_1^{pp}(x_2 - x_2^i, y) \tag{9.3.2}$$

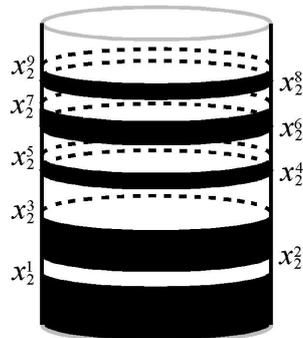


図 9.10:

である。ここで z^{pp}, V_1^{pp} は (9.2.12) 式の関数であり、 x_2^i は Fermi の海の底 ($x_2 \rightarrow -\infty$) から数えて i 番目の境界の x_2 座標を表す。よって、 i が奇数の境界は黒から白に、 i が偶数の境界は白から黒に変わる (図 9.10)。

droplet の系は Young 図と対応付けができる。

これらの重力解に対応する droplet の系は、図 9.11 のようにして Young 図と簡単に関係付けることができる。この手続きを言葉で説明すると、次のようになる。

- Young 図の底から始めて、境界に沿って動いていく。
- 上に動いていくときは、同数のフェルミオンを追加する。
- 右に動いていくときは、同数の空孔を追加する。
- Fermi レベルはフェルミオンの個数と空孔の個数が等しくなるように設定する。

この結果、フェルミオン系のエネルギーは Young 図に描かれた箱の数と等しく、さらに今の場合には M2-brane の枚数と等しくなる。

従って、曲率の小さい重力解に対応する Young 図は、隅の数が少なく箱の数が多いものであることが分かる。少数の箱が飛び出て隅を作っているような Young 図は同種の droplet が十分に近づいている系に対応するので、既に議論したように Planck スケールの曲率を持った重力解が得られるのである。

(x_1, x_2) 平面における円対称な droplet の系についても、同様にして Young 図を用いて簡単に記述することができる。円対称で無い解については、これらの図の重ね合わせで表すことができる。つまり、Young 図はフェルミオンの運動量基底と直接的に対応しているのである。一般に並進や回転の下で不変でない状態は、Hilbert 空間において重ね合わせることで与えられるというわけである。滑らかな geometry を持った重力解に対応するのは、Fermi の海において well-defined な droplet を形成している系なのである。

例：孤立した帯状の droplet に対応する系

$AdS_5 \times S^5$ 時空や pp-wave 時空に漸近しないような重力解に対応するフェルミオンの分布を考えてみるのも興味深い。例えば、フェルミオンの帯が 1 本だけ孤立しているような系を考えよう (図 9.12)。 x_1 座標をコンパクト化すると、このフェルミオンの系は円筒上の 2 次元 QCD において得られるものと同じ系になる。

この孤立した帯の系に双対な場の理論の系は、 N 枚の M5-brane が $R \times T^2 \times S^3$ に巻きついたものである。ここで N は帯状 droplet の面積で与えられる。また、この理論を $R \times S^1 \times S^3$ 上の超対称 Yang-Mills 理論と見做すこともできる。

求める重力解は D4-brane の系に対応している。

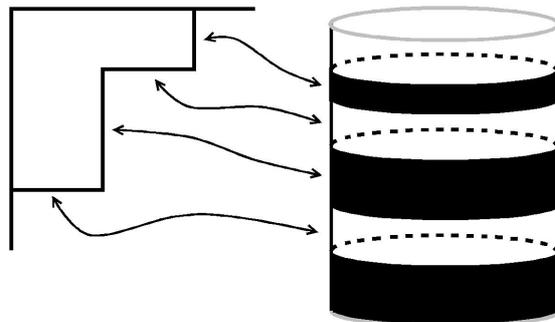


図 9.11: Young 図と droplet の対応関係

$R^{1,2} \times S^3$ に巻きついた M5-brane の系から議論を始めよう。 R^2 のうちの 1 次元をコンパクト化すると、低エネルギー領域では $R^{1,1} \times S^3$ 上の 4 + 1 次元超対称 Yang-Mills 理論 (D4-brane 理論) が得られる。これは孤立した帯状 droplet の系と対応している。実際、孤立した帯状 droplet の幅 (の合計) と D4-brane の枚数が対応するのである。

このような IIA 型理論の重力解は、IIB 型 ansatz から得られる 11 次元 ansatz (9.3.1) に dual を取ることで

$$\begin{aligned} ds_{IIA}^2 &= e^{2\Phi}(-dt^2 + dw^2) + h^2(dy^2 + dx^2) + ye^G d\Omega_3^2 + ye^{-G} d\tilde{\Omega}_3^2 \\ e^{2\Phi} &= \frac{1}{h^2 - h^{-2}V^2}, \quad \mathcal{B}^{NS} = -\frac{h^{-2}V}{h^2 - h^{-2}V^2} dt \wedge dw \\ F_4 &= -\frac{1}{4}e^{-2\Phi} \left[e^{-3G} *_2 d(y^2 e^{2G}) \wedge d\tilde{\Omega}_3 + e^{3G} *_2 d(y^2 e^{-2G}) \wedge d\Omega_3 \right] \end{aligned} \quad (9.3.3)$$

として得られる。 $*_2$ は平坦な 2 次元の ϵ 記号である。この重力解は $R^{1,1} \times S^3$ 上の D4-brane (または $R^{1,1} \times S^1 \times S^3$ 上の M5-brane) に対応しているので、孤立した 1 本の帯状 droplet に対応した系の計量になっていることが分かる。

ここで、源 (source) となる関数 z を帯状の形

$$\tilde{z}(y=0) = -\theta(x)\theta(1-x) \quad (9.3.4)$$

に取ろう。 $\theta(x)$ は階段関数である。ここで (9.3.2) 式を用いると

$$\begin{aligned} \tilde{z}(x,y) &= \frac{1}{2} \frac{x-x'}{\sqrt{(x-x')^2 + y^2}} \Big|_L^R = -\frac{1}{2} \left[\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} \right] \\ V &= -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + y^2}} \Big|_L^R = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} \right] \end{aligned} \quad (9.3.5)$$

として解が求められる。 $x, y \rightarrow \infty$ における主要項は

$$\tilde{z} = -\frac{y^2}{2(x^2 + y^2)^{3/2}}, \quad V = -\frac{x}{2(x^2 + y^2)^{3/2}}, \quad h^{-2} = \sqrt{2}(x^2 + y^2)^{3/4} \quad (9.3.6)$$

である。ここで (x, y) 平面において極座標を導入すると、計量の漸近形は

$$ds_{IIA}^2 = \sqrt{2}r^{3/2} [-dt^2 + dw^2 + d\Omega_3^2] + \frac{1}{\sqrt{2}r^{3/2}} [dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\tilde{\Omega}_3^2] \quad (9.3.7)$$

となる。 r が大きい領域において、D4-brane の計量に漸近することが確認できる。これを 11 次元に持ち上げると、M5-brane の計量に漸近することになる。

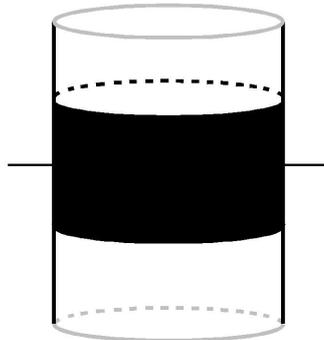


図 9.12: 孤立した帯状の droplet の系。横線は Fermi レベルを表す。

11次元へ持ち上げて、M5-brane の計量を求める。

IIB 型 ansatz から得られる 11 次元 ansatz (9.3.1) に、孤立した帯状の droplet を重ね合わせた系に対応する境界条件を課せば、M5-brane の計量を求めることができる。この計量を x_2, y が大きい領域で展開すると、主要項は 7 次元ゲージ化超重力理論によって記述することができる

$$ds_{11}^2 = \left(\frac{2}{P_0}\right)^{1/3} \Delta^{1/3} \left[\left(r + \frac{P_0}{2} + \frac{P_0^2}{10r}\right) (-dt^2 + dw^2) + rd\Omega_3^2 + P_0 \frac{dr^2}{2r^2} \left(1 - \frac{9P_0}{10r} + \frac{39P_0^2}{100r^2}\right) \right] + \left(\frac{P_0}{2}\right)^{2/3} \Delta^{-2/3} (T^{-1})_{IJ} dY^I dY^J \quad (9.3.8)$$

となる。ここで、座標 x_2, y は

$$\begin{aligned} x_2 &= r' \cos \theta', & y &= r' \sin \theta' \\ r' &= r + \left(\frac{3P_0}{10} + \frac{P_1 \cos \theta}{2P_0}\right) + \frac{3P_0^4 - 5P_1^2 + 15P_0P_2 - 25 \cos 2\theta(P_1^2 - P_0P_2)}{100rP_0^2} \\ \theta' &= \theta - \frac{P_1 \sin \theta}{2rP_0} + \frac{6P_0^2P_1 + 5 \cos \theta(5P_1^2 - 4P_0P_2) \sin \theta}{40r^2P_0^2} \end{aligned} \quad (9.3.9)$$

というように対応している。また、deformation した S^4 を 5 次元単位ベクトル Y_I

$$Y_5 = \cos \theta, \quad Y_i = \sin \theta \mu_i; \quad Y_I Y_I = 1 \quad (9.3.10)$$

でパラメータ付けをした。ここで、4 次元単位ベクトル μ_i は \tilde{S}^3 をパラメータ付けしている。さらに、行列 T_{IJ} は

$$T_{IJ} = \text{diag.}(T, T, T, T, T^{-4}), \quad T = 1 - \frac{P_0}{10r} + \frac{P_0^4 - 15P_1^2 + 20P_0P_2}{100r^2P_0^2} \quad (9.3.11)$$

であり、また

$$\begin{aligned} \Delta \equiv Y_I T_{IJ} Y_J &= 1 + \frac{(3 + 5 \cos 2\theta)P_0}{20r} + \frac{2 \cos^2 \theta}{r^2} \left(\frac{P_0^2}{20} - \frac{P_0^4 - 15P_1^2 + 20P_0P_2}{50P_0^2}\right) \\ &+ \frac{P_0^4 - 15P_1^2 + 20P_0P_2}{100P_0^2 r^2} \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (9.3.12)$$

である。 P_n は

$$P_n \equiv (n+1) \int_{\mathcal{D}} dx x^n \quad (9.3.13)$$

で定義されている関数である。 x 座標を適切に並進させることにより、 $P_1 = 0$ となる系へ移ることができる。

以上ではゲージ化超重力理論の ansatz を用いて計算を行ったが、 $1/r$ 展開における次のオーダーまで考えると、一般の計量に対してこの ansatz を用いることはできない。但し、具体的に計算を行うと、解の charge P_n が

$$P_3 = -\frac{P_1^3 - 2P_0P_1P_2}{P_0^2} \quad (9.3.14)$$

という関係を満たすときに限っては、次のオーダーでもゲージ化超重力理論において得られる場しか励起しないことが確認できる。

9.4 トーラスにコンパクト化された系の解析

(x_1, x_2) 平面がトーラスにコンパクト化される場合を考えよう。すなわち、2次元において周期的な droplet の列を考えよう。特に重力解の漸近的な振る舞いに注目して調べることにする。

関数 z は Laplace 方程式 (9.2.1) に従うので、 y が十分に大きい領域では定数になる。この定数の値は y を固定した上で z をトーラス上で積分すれば得られる。さらに、この積分の結果は y に依存しないので、 $y = 0$ とお

いてしまえばよい。 $y = 0$ 平面においては境界条件 $z = \pm \frac{1}{2}$ が課されているので、このとき定数の値が簡単に計算できてしまうのである。その結果、漸近領域において

$$z = \frac{1}{2} \frac{N - K}{N + K} \quad (9.4.1)$$

であることが分かる。flux の量子化条件より面積が量子化されたことを思い出しておこう。ここで N はフェルミオン ($z = -\frac{1}{2}$) 領域の面積、 K は空孔 ($z = \frac{1}{2}$) 領域の面積である。

IIB 型 ansatz (9.1.63)-(9.1.68) から始めて、トーラス T^2 を構成する 2 つの circle にそれぞれ T-duality を課して、さらに S-duality を課す。すると、漸近領域における IIB 型重力解が

$$\begin{aligned} ds_{10}^2 &= -dt^2 + du_1^2 + du_2^2 + N\alpha' d\Omega_3^2 + K\alpha' d\tilde{\Omega}_3^2 + \frac{NK}{N+K}\alpha' d\rho^2 \\ e^\Phi &= g_s \sqrt{NK} \sqrt{N+K} \alpha'^{3/2} e^{-\rho} \\ H_3 &= 2N\alpha' d^3\Omega + 2K\alpha' d^3\tilde{\Omega} \end{aligned} \quad (9.4.2)$$

として得られることが分かる。これは 2 + 1 次元の小弦理論 (little string theory) と見做すことができる。

この漸近解は $\rho \rightarrow -\infty$ で dilaton が非常に大きくなるので、このような領域においては解析的でないことに注意しよう。このような領域では再び S-duality と T-duality を取ることで、もともとの IIB 型 ansatz による記述まで戻って考える必要があるのだ。このようにすれば、droplet の構成に対応する解析的な重力解がいつでも得られることが分かる。但し、この手続きは座標 u_1, u_2 がコンパクトなときだけ有効である。

座標 u_1, u_2 がコンパクトでない場合も考えられるわけであるが、このような重力解は 2 枚の交差する NS5-brane 解の near horizon 極限として現れることが知られている [84, 85, 86]。実際、重力解 (9.4.2) において変数変換

$$e^{2\rho} = \sqrt{N+K} \alpha'^{1/2} r_1 r_2, \quad u_2 = \frac{\alpha'^{1/2}}{\sqrt{N+K}} (N \log r_1 - K \log r_2) \quad (9.4.3)$$

を行うと、 r_1, r_2 は near horizon 領域における 2 枚の NS5-brane に対する transverse な半径方向となることが確認できる。

また、重力解 (9.4.2) は

$$K \leftrightarrow N \quad (9.4.4)$$

の下で不変になっていることにも注意しておこう。この対称性はそもそも $z \leftrightarrow -z$ の対称性と関係しているのである。従って、これは場の理論においても正確に成り立つべき対称性であると考えられる。第 10 章において議論することにしよう。

第 10 章

重力解に双対な場の理論

第 9 章で扱った重力解に双対な場の理論として、16 個の超対称電荷を持ち、 $SO(4) \times SO(4)$ の bosonic 対称性を持った理論について議論することにしよう。

各節の内容は次のようになっている。

- 10.1 第 9 章でも度々用いた、1/2 BPS 状態と自由フェルミオンの系との関係性について、簡単にまとめておく。
- 10.2 円筒にコンパクト化された droplet の系について、場の理論の観点から議論する。
- 10.3 トーラスにコンパクト化された droplet の系について、場の理論の観点から議論する。

10.1 自由フェルミオンの系における記述について

ここでも第 1 部のときと同じように、 $R \times S^3$ 上の $U(N)$ $\mathcal{N} = 4$ 超対称 Yang-Mills 理論から議論を始めよう。超対称性を 1/2 だけ保持する BPS 状態に注目する。これらの状態は、chiral primary 演算子に関連付けられた状態である。すなわち、 $\mathcal{N} = 4$ 超対称 Yang-Mills 理論に登場する 6 個のスカラー場を ϕ^i と表すことにすると、ある 1 つの chiral なスカラー場 $Z = \phi^1 + i\phi^2$ のみを用いて $\prod_i (\text{Tr } Z^{n_i})^{r_i}$ と表される演算子と関連付いた状態に注目するのである。

1/2 BPS 状態は自由フェルミオンを用いて記述することができる。

このような BPS 状態は様々な方法で表現することができるが、第 9 章では繰り返し自由フェルミオン (free

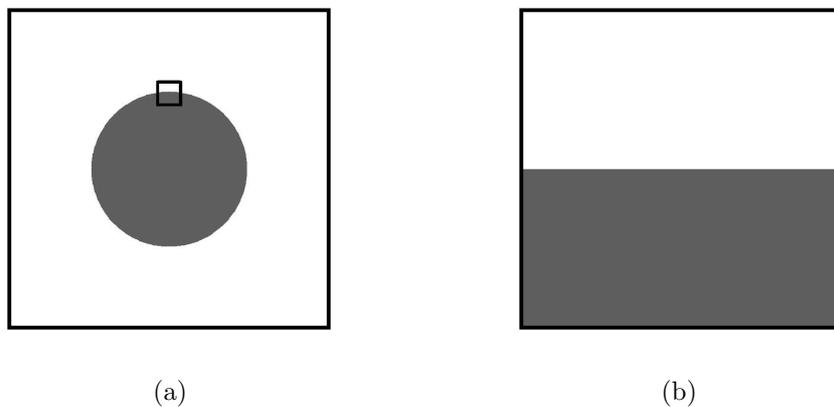


図 10.1: (a) AdS 時空に対応した重力解の droplet の例
(b) 拡大して得られる pp-wave 時空に対応した重力解の droplet の例

fermion) による記述を採用してきた [87, 74, 88]。ここで少し詳しく議論してみよう。

今は BPS 条件 $\Delta - J = 0$ を満たす状態に注目しているのであった。このような状態は、 S^3 上の場 Z の最低 Kaluza-Klein モードからしか出てこない。そして、このモードは S^3 の曲率と共形結合することによって生じる調和振動子ポテンシャルを持っていることが知られている [89]。

従って、今の場合は、調和振動子ポテンシャル中におかれた、行列 Z で表されるゲージ不変状態に注目することになるのである。そして、行列量子力学の標準的な議論の帰結として、このような系は調和振動子ポテンシャル中の N 個のフェルミオンの系に還元して扱えることが知られている [90]。ここで N はゲージ群 $U(N)$ に由来する N である。

このようにして得られたフェルミオンは、位相空間において droplet を形成する。そして、基底状態は円形の droplet に対応するのである。

全く同じことであるが、「量子 Hall 流体を考える」と言い換えることもできる。自由フェルミオンの系の Hamiltonian を H として、さらに新しい Hamiltonian を $H' = H - J = \Delta - J$ として構成しよう。ここで J は 1-2 平面における角運動量である。この新しい Hamiltonian H' において、Landau レベル問題について考えよう。1/2 BPS 状態は H' の基底状態であり、最低 Landau レベルに対応する。そして、この基底状態は円形の droplet に対応する。さらに、あらゆる BPS 励起状態の共形次元 Δ は、Hall 平面上の角運動量 J で与えられるのである ($\Delta = J$)。この角運動量は自由フェルミオンの調和振動子エネルギーと言い換えることができる。

これらの系の pp-wave 極限を取ることを考えてみよう。droplet で表現するならば、この極限は droplet の端を拡大することに相当する (図 10.1)。よって、plane wave 時空は下半平面 ($x_2 < 0$) を満たす量子 Hall 流体の系として扱うことができる。また、BPS 励起状態はフェルミオン粒子や空孔の励起状態に対応する。これらは相対論的フェルミオンの状態のように見える。実際、これらの状態の光錐エネルギー $-p_- \sim J$ は、相対論的フェルミオンのエネルギーの表現で与えられる。

これらの BPS 状態は 16 個の非自明な超対称性を保持して、 $SO(4) \times SO(4) \times R$ の bosonic 対称性を持つ。 R は Hamiltonian $H' = H - J$ に対応している。この生成子は保存される超対称電荷と交換する。

10.2 円筒にコンパクト化された場合

droplet が $x_2 \rightarrow \pm\infty$ まで広がらない場合 (図 10.2) は、双対な場の理論は $R \times T^2 \times S^3$ 上の N 枚の M5-brane 理論であると考えられる。もしトーラス $T^2 \sim S^1 \times S^1$ を構成する一方の S^1 が非常に小さければ、 $R \times S^1 \times S^3$ 上の D4-brane 理論と見做すことができる。この理論を簡単に理解するには次のようにすればよい。

$\mathcal{N} = 4$ 超対称 Yang-Mills 理論において、transverse 方向に対応する複素スカラー場を 1 つだけ選ぼう。これ

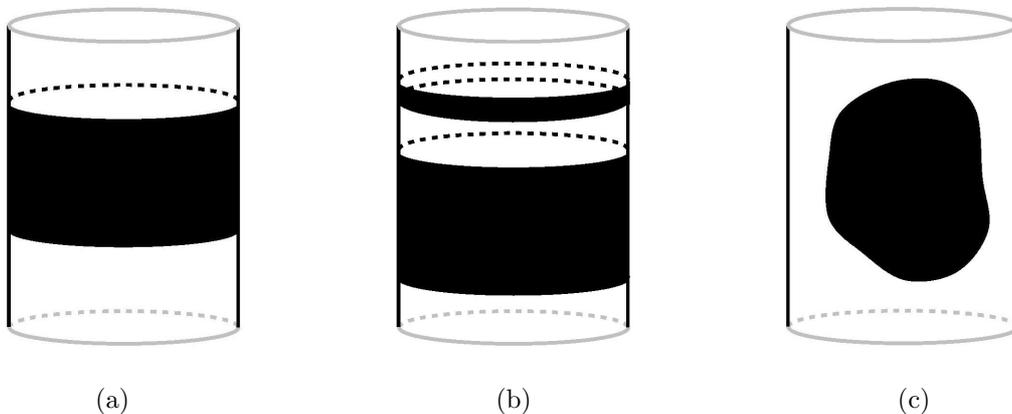


図 10.2: 円筒上で droplet が $x_2 \rightarrow \pm\infty$ まで広がらない系

を Z とする。超対称 Yang-Mills 理論が $R \times S^3$ 上で定義されている場合、Lagrangian には

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(|DZ|^2 + |Z|^2) + \dots \quad (10.2.1)$$

という形の項が含まれる。ここで $Z = e^{it}(Y + iX)$ と表すと、Lagrangian は

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(DX)^2 - \frac{1}{2}(DY)^2 - 2YD_0X + \dots \quad (10.2.2)$$

となる。この (X, Y) 座標は重力解に現れる (x_1, x_2) 座標と対応している。これは磁場中の粒子の系に似ており、 X 方向に並進不変性があることに注意しよう。また、この Lagrangian に対応する Hamiltonian は $H' = H - J$ である。ここで H は時間方向の並進に共役な (通常の) Hamiltonian であり、 J は場 Z を回転させる $SO(6)$ 対称性の生成子である。

X 方向をコンパクト化すると D4-brane 上の場の理論が得られる。

X 方向に並進不変性があるので、この方向にコンパクト化することができる。この場合、D4-brane 上の 4+1 次元場の理論が得られる。この理論による記述は、弱結合領域または D4-brane 上の長距離スケール領域において信頼できるものである。

$R \times S^3$ 上の $\mathcal{N} = 4$ 超対称 Yang-Mills 理論において、6 個のスカラー場の質量項は $-\frac{1}{2}\mu^2 X_a^2$ ($a = 4, \dots, 9$) と表すことができる。(10.2.1) 式では $\mu = 1$ とおいていた。ここで 2 個のスカラー場とフェルミオン場について

$$X_4 + iX_5 = e^{i\mu t}(Y + i\phi), \quad \Psi_{old} = e^{\frac{1}{2}\mu\Gamma_{45}t}\Psi \quad (10.2.3)$$

と定義し直す*1。そして、さらに

$$\phi \longrightarrow i\frac{\partial}{\partial x_4} + A_4, \quad -i[\phi, \mathcal{O}] \longrightarrow \partial_4\mathcal{O} - i[A_4, \mathcal{O}] \quad (10.2.4)$$

という置き換えをする [91]。これによって、 $R^{1,1} \times S^3$ 上の 4+1 次元超対称 Yang-Mills 理論に mass deformation をしたもの

$$S = \frac{2}{g_{YM4}^2} \int d^2x d^3\Omega \text{Tr} \left[-\frac{1}{4}F_{MN}F^{MN} - \frac{1}{2}D_M X_a D^M X_a - \frac{i}{2}\bar{\Psi}\Gamma^M D_M \Psi - \frac{1}{2}\bar{\Psi}\Gamma^a [X_a, \Psi] \right. \\ \left. - \frac{1}{2}\bar{\Psi}\Gamma_5 [Y, \Psi] + \frac{1}{4}[X_a, X_b]^2 + \frac{1}{2}[Y, X_a]^2 + \frac{\mu}{2}i\bar{\Psi}\Gamma_{045}\Psi - \frac{1}{2}\mu^2 X_a^2 - 2\mu Y F_{04} \right] \quad (10.2.5)$$

が得られる。ここで $M, N = 0, 1, \dots, 4$; $a = 6, 7, 8, 9$ である。 $\Gamma_M, \Gamma_5, \Gamma_a$ は 10 次元 Γ 行列である。

5 個の transverse 方向に対応するスカラー場のうち 4 個は球面の半径の逆数によって与えられる質量を持っている。5 番目のスカラー場 Y は質量項を持っていないが、 $\text{Tr}[Y F_{01}]$ という形の相互作用項があることに注目しておこう。

この理論は 4+1 次元の Poincaré 不変性を持っていないが、 (x_0, x_4) で張られる部分空間 $R^{1,1}$ は Poincaré 不変性を持っていることに注意しよう。また、 $SO(4)$ の R 対称性を持っている。

さらに、この $R^{1,1} \times S^3$ 上の理論を S^1 上に reduction すれば、 $\mathcal{N} = 4$ 超対称 Yang-Mills 理論に戻ることができる。このとき結合定数の間には $g_{YM4}^2 = 2\pi R_{x_1} g_{YM3}^2$ という関係が成り立つ。

また、この 4+1 次元超対称 Yang-Mills 理論は S^3 上の $U(1)_L \subset SU(2)_L \subset SO(4)$ で切断することによって、 $R^{1,1} \times S^2$ 上の 3+1 次元超対称 Yang-Mills 理論に reduction することもできる。この理論は第 5 章の最後で扱った手続きに従って次元酸化して得ることもできる。

紫外領域では M5-brane 理論に移行する。

*1 [2] の Appendix F では $X_4 + iX_5 = e^{i\mu t}(Y + \phi)$ となっているが、 $X_4 + iX_5 = e^{i\mu t}(Y + i\phi)$ だと思われる。

この理論の紫外領域における正確な定義は、M5-brane 上の 6 次元 $\mathcal{N} = (0, 2)$ 理論で与えられる。つまり、紫外領域においては $R^{1,1} \times S^1 \times S^3$ 上の M5-brane 理論を扱うことになるのである。または、コンパクト化を解いて $R^{2,1} \times S^3$ 上の M5-brane 理論を考えても良いだろう。これらの理論において x_1 方向にコンパクト化を行うと、図 10.2 (a), (b) に対応する droplet の系が得られる。

もともとの理論には 32 個の超対称性があったが、座標 X をコンパクト化するという操作を行ったことにより、これらの理論には 16 個の超対称性しかないことに注意しよう。

理論の真空について調べる。

$R \times S^1 \times S^3$ 上の D4-brane 理論 (紫外極限では $R \times T^2 \times S^3$ 上の M5-brane 理論) について考えてみよう。この理論には多数の超対称な真空が存在する。ここで、 $R^{1,1} \times S^3$ 上の 4+1 次元超対称 Yang-Mills 理論において、 S^3 上に作用する $SU(2)_L$ の下で不変な状態のみを残して切断することにより、1+1 次元超対称 Yang-Mills 理論を得ることにしよう。こうして得られる 1+1 次元の Lagrangian

$$\int \text{Tr} \left[-\frac{1}{2} F^2 + (DY)^2 + YF + \dots \right] \quad (10.2.6)$$

を用いれば、真空の構造を把握することができる。

この理論には、円筒上の 2 次元超対称 Yang-Mills 理論における状態と対応する BPS 状態が存在していることが知られている [92, 93, 94]。つまり、真空が構成する空間は円筒上で定義された 2 次元超対称 Yang-Mills 理論の Hilbert space と同じなのである [1]。また、全ての真空は (超対称であるから) エネルギーが 0 である。ここで、電場が

$$E = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_1} = F_{01} + Y = Y \quad (10.2.7)$$

である超対称基底状態が存在することに注目しよう。最後の等号で、基底状態 (零エネルギー) では $F_{01} = 0$ が成り立つことを用いた。従って、素朴に考えると $R^{1,1} \times S^3$ 上の理論には Y の取りうる期待値に対応した真空が連続的なグループを作るのではないかと思われるが、電場に関する量子化条件によって Y の値も量子化されてしまうことが分かる。従って、このような真空状態は $\text{Tr} E^2 \sim \text{Tr} Y^2$ の値で特徴付けられるのである。

また、 Y の値が量子化される影響で、超対称性代数は massless 粒子の存在を許容しなくなってしまう。実際に、それぞれの真空の周りの状態のスペクトルは質量ギャップを持つことを第 3 章で議論した。重力解 (3.3.17) を見れば、dilaton Φ もワーブ因子も低エネルギー領域に束縛されることが確認できる。つまり、dilaton もワーブ因子も決して 0 にはならず、時空解は至るところで正則になっているのである。このことは、この重力解に双対な場の理論においても質量ギャップが存在することを意味している。

また、 $\text{Tr} E^2 \sim \text{Tr} Y^2$ の値で特徴付けられる真空状態は、フェルミオンの描像においてエネルギー

$$E_{NR} = \int_{strips} dx \frac{1}{2} x^2 \quad (10.2.8)$$

を持った非相対論的フェルミオンに対応する。

重力理論の描像においては、この量は計量から (9.3.8) からのずれ (deviation) の主要項として得られる。これは双極子モーメントに似た量である。そして、いま考えている BPS 解については well-defined な量である。超対称基底状態上において (10.2.8) 式に reduction するような、相互作用を完全に含んだ理論が得られれば、保存量を用いてこの量に関して更なる議論をすることができるだろう。

10.3 トーラスにコンパクト化された場合

$R^{1,2} \times S^3$ 上の D5-brane 理論を得る。

$R^{1,1} \times S^3$ 上の D4-brane 理論から議論を始めよう。まず transverse な Y 方向をコンパクト化して、さらに

$$Y \longrightarrow i \frac{\partial}{\partial x_5} - A_5, \quad -i[Y, \mathcal{O}] \longrightarrow \partial_5 \mathcal{O} + i[A_5, \mathcal{O}] \quad (10.3.1)$$

という置き換えを行えば、次元を持ち上げることができる [91]。Lagrangian (10.2.6) は Y 方向の無限小並進の下で不変ではないが、 Y の周期を適切に選べば離散的な並進の下で不変にすることができる。よって、 $R^{2,1} \times S^3$ 上の 5 + 1 次元超対称 Yang-Mills 理論

$$\begin{aligned} S = & \frac{2}{g_{YM5}^2} \int \text{Tr} \left[-\frac{1}{4} F_{MN} F^{MN} \right] + \frac{K}{4\pi} \int \text{Tr} \left[A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A \right] \wedge \frac{d^3 \Omega}{\text{Vol}_{S^3}} \\ & + \frac{2}{g_{YM5}^2} \int d^3 x d^3 \Omega \text{Tr} \left[-\frac{1}{2} D_M X_a D^M X_a + \frac{1}{4} [X_a, X_b]^2 - \frac{1}{2} \mu^2 X_a^2 \right. \\ & \left. - \frac{i}{2} \bar{\Psi} \Gamma^M D_M \Psi - \frac{1}{2} \bar{\Psi} \Gamma^a [X_a, \Psi] + \frac{\mu}{2} i \bar{\Psi} \Gamma_{045} \Psi \right] \quad (10.3.2) \end{aligned}$$

を得ることができる。ここで $M, N = 0, 1, \dots, 4, 5$; $a = 6, 7, 8, 9$ である。結合定数は $g_{YM5}^2 = 2\pi R_{x_2} g_{YM4}^2$ であり、 K は

$$\frac{K}{4\pi} = \frac{2\mu \text{Vol}_{S^3}}{g_{YM5}^2} \quad (10.3.3)$$

を満たす整数である。また Vol_{S^3} は S^3 の体積である。これはももとの $\mathcal{N} = 4$ 超対称 Yang-Mills 理論が定義されていた S^3 である。この理論は (x_0, x_4, x_5) で張られる部分空間 $R^{2,1}$ においてのみ、Poincaré 不変性がある。この 5 + 1 次元超対称 Yang-Mills 理論において、 S^3 を S^3/Z_k で置き換えて fiber 方向に reduction すれば ($k \rightarrow \infty$)、 $R^{2,1} \times S^2$ 上の 4 + 1 次元超対称 Yang-Mills 理論に戻ることができる。

得られた理論の作用に Chern-Simons 項が含まれている。

作用に 2 + 1 次元ゲージ場の Chern-Simons 項が含まれていることに注目しよう。この理論 (10.3.2) は $R^{1,1} \times S^1 \times S^3$ に巻きついた N 枚の D5-brane 理論であり、 S^3 上に R-R 3 形式 flux を K 単位持っている。この R-R flux が存在しているために、レベル K の 3 次元 Chern-Simons 項が存在しているのである。実際、この理論を S^3 上で作用する $SU(2)_L$ の下で不変な状態だけを取り出して切断すると、2 + 1 次元超対称 Yang-Mills Chern-Simons 理論 (超対称 Yang-Mills 理論で Chern-Simons 項を含むもの)

$$\frac{K}{4\pi} \int \text{Tr} \left[-\frac{1}{4} F^2 + \omega_{cs} \right] \quad (10.3.4)$$

が得られる。ここで ω_{cs} が Chern-Simons 項である。もちろん、この理論は Lagrangian (10.2.6) において Y をコンパクト化しても得ることができる。

理論の結合定数 g_{YM5} が Chern-Simons 項のレベル K と関係している。

結合定数 g_{YM5} が K で与えられることに注目しよう。(10.3.3) 式は、 K の大きい領域が結合定数の小さい領域に対応していることを表している。この対応については、Chern-Simons 項に由来するゲージボソンの質量が、3 次元球面 S^3 の半径によって設定される質量スケールと超対称性によって関係付けられていることによるのだと理解するのが良いだろう。通常は S^3 の半径を 1 とおくのであるが、これは $g_{YM5}^2 K \sim 1$ と設定することに相当するのである。

この議論が信頼できるのは、 K/N が有限である効果を見捨てるほど K/N が十分に大きい場合である。この極限において、重力解 (9.4.2) は \tilde{S}^3 が S^3 よりも十分に大きくなる。但し、 N 枚の D5-brane が存在しているのは \tilde{S}^3 の方であることに注意しておこう。

レベル K とランク N の間に双対性があると考えられる。

ゲージ理論の記述が有効であるのは低エネルギー領域であり、高エネルギー領域における正しい定義は小弦理論 (9.4.2) によって与えられるのであった。

ここで、この理論では伝播する励起状態に質量ギャップがあり、低エネルギー領域においては $U(N)_K$ Chern-Simons 理論に支配されていることを確認しておこう。ここで $U(1)$ 部分は自由場理論であり、重力側の記述において “singleton” と関連付けられるものである。

一方で、前章で議論したように、この理論は全てのエネルギー領域において $K \leftrightarrow N$ の交換の下で対称であると考えられるのであった。もしこれが正しいなら、 N/K が大きい極限を取ると、 K 枚の D5-brane が S^3 の方に巻きついている系の理論において、 $U(K)_N$ Chern-Simons 理論が得られることになる。大変面白いことに、 $U(N)_K$ と $U(K)_N$ の Chern-Simons 理論はお互いに双対になっていることが知られている [95, 96]。従って、これらの理論は N と K が有限な場合の正確な低エネルギー理論になっているのではないかと思われる。同様の結論が [86] でも導かれている。

低エネルギー理論だけでなく、弦のスケールの質量スケールを持つ massive な理論全体を得ることができればいいのであるが、一般の小弦理論の場合と同様に、漸近的な重力解 (9.4.2) を与える以外に理論を記述する方法は無い。一方で、超対称性代数を用いて理論に質量ギャップがあることが示せる。これについては 10.4 節で議論する。

真空解の個数

重力側から真空の数を数えてみよう。トーラス上の全 flux は $N + K$ であり、 N 個のフェルミオンと K 個の空孔があるのであった。第 9 章の議論より、真空の合計数は

$$D_{grav}(N, K) = \frac{(N + K)!}{N! K!} \quad (10.3.5)$$

と求められる。充填率 (filling fraction) は $\frac{N}{N+K}$ である。

この Landau レベルの描像をもう少し詳しく見てみよう。トーラス上の droplet の形状に対応して得られる重力解を考えよう。そして、これらの重力解を量子化することになるのであるが、この量子化は磁場中の N 個のフェルミオンの系の最低 Landau レベルにある非圧縮流体の量子化と同じであることが知られている [97, 98]。さらに流体が広がる平面をコンパクト化すると、 N と K が大きい領域で正しい値が得られることが知られている [97, 98]。

この結果、 $U(N)_K$ Chern-Simons 理論で計算した真空の個数は、 N, K 程度のオーダーの因子を除けば (10.3.5) 式と一致する。実際、 $SU(N)_K$ Chern-Simons 理論の真空の個数は

$$\frac{(N + K - 1)!}{K!(N - 1)!} \quad (10.3.6)$$

であると求められる。残りの $U(1)$ 部分からの寄与を正確に計算することができれば、これと (10.3.5) 式の差となっているオーダー N, K の量を合わせることができると考えられる。そのためには、“singleton” の正確な役割を理解する必要がある。とりあえずここでは、重力解が有効である N や K が大きい領域において、真空の個数に関して、場の理論から得られる答えと重力理論から得られる答えが一致していることを主張するに留めておこう。

最後に、Landau 問題における粒子・空孔双対性は、Chern-Simons 理論におけるレベル・ランク双対性に対応しており、あらゆる領域において $K \leftrightarrow N$ 双対性が成り立っていると考えられるということを述べておこう。

10.4 超対称性代数について

以上で扱った理論は変わった性質を持っていたが、これは $2+1$ 次元（または $1+1$ 次元）における超対称性代数が特殊であることに起因する。

超対称性代数が非中心電荷を持っている。

通常の Poincaré 超対称性においては、超対称性代数の右辺に現れる生成子は他の全ての生成子と交換する。これは 4 次元以上においては定理になっていて、そのような生成子は中心電荷 (central charge) と呼ばれている。ところが今の場合、超対称性代数は

$$\{Q_{\alpha i}, Q_{\beta j}\} = 2\tilde{\gamma}_{\alpha\beta}^{\mu} p_{\mu} \delta_{ij} + 2m\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon_{ijkl} M_{kl} \quad (10.4.1)$$

という形をしている。 m は質量の次元を持った定数であり、 i は $SO(4)$ の脚であり、 M_{ij} は $SO(4)$ 生成子である。ここでは便宜のため、 $m = 1$ とおいてしまおう。この設定は、質量スケール (S^3 の半径など) を選ぶことと対応している。

後で具体的に示すが、 M_{ij} は超対称電荷と交換しない生成子である。よって、これは非中心電荷 (non-central charge) を持った Poincaré 超対称性代数ということになる。これは AdS 超対称性代数において共通して見られる性質である。また、Euclidean な Poincaré 超対称性代数を deformation して得られることもある [99]。

(10.4.1) 式における $SO(4) \sim SU(2)_1 \times SU(2)_2$ は、geometric な記述において現れる 3 次元球面 S^3 , \tilde{S}^3 に対して、それぞれ $SU(2)_1$, $SU(2)_2$ が作用する。そして、他の超対称電荷はもう一方の $SO(4)$ の下で変換するのである。この超対称性代数を $1+1$ 次元に切断して得られる代数が (7.16.5) 式であることに注意しておこう。

BPS 測地線が存在する位置を調べる。

以上で扱った理論には全て、興味深い BPS 粒子が存在する。 J が大きい領域では、単純に pp-wave 極限を取ることができる。今の場合、標準的な IIB 型 pp-wave 時空に対応する pp-wave 時空が得られる。ここでは第 3 章と同様にして、このような BPS 粒子の測地線が pp-wave 時空のどこに存在しているかを調べてみよう。

(\tilde{S}^3 ではなく) S^3 を回転させる $SO(4)$ 対称性の生成子の 1 つ $J = J_{12}$ に注目しよう。そして、この生成子 J の下で変換するスピンを持った粒子を考えよう。このとき、IIB 型 ansatz の計量 (9.1.63) より

$$\frac{E^2}{J^2} = -\frac{g_{tt}}{g_{\Omega\Omega}} = \frac{e^G + e^{-G}}{e^G} = \frac{1}{\frac{1}{2} + z} \quad (10.4.2)$$

であることが分かる。ここで $\sqrt{g_{\Omega\Omega}}$ は S^3 の半径である。いま考えている解は $|z| \leq \frac{1}{2}$ を満たしているので、エネルギーが最小となるのは $z = \frac{1}{2}$ のときであることが分かる。これは $y = 0$ 平面において、 \tilde{S}^3 が萎む領域に対応している。

さらに、測地線は $V_i = 0$ を満たす点に存在していなければならない。この点の位置は他の droplet の分布に依存するが、各々の droplet の中には $V_i = 0$ となる点が 1 つ存在することが確認できる。従って、多数の droplet が存在する系においては、 \tilde{S}^3 が萎む領域の droplet の数と同じ数の BPS 測地線が存在することが分かる。

10.4.1 超対称電荷が 8 個の場合の超対称性代数

それでは、mass deformation が入った場合の Poincaré 超対称性代数について詳しく議論していこう [71]。まず超対称電荷が 8 個の場合を扱ってから、16 個の場合についても議論する。以下では $(\gamma^{\mu})_{\alpha}^{\beta}$ を

$$\gamma^0 = i\sigma^2, \quad \gamma^1 = \sigma^1, \quad \gamma^2 = \sigma^3 \quad (10.4.3)$$

と定義しよう。 σ^i は Pauli 行列である。また

$$\tilde{\gamma}_{\alpha\beta}^{\mu} = (\gamma^{\mu})_{\alpha}^{\gamma} \epsilon_{\gamma\beta}, \quad \tilde{\gamma}^0 = -\delta^{\alpha\beta}, \quad \tilde{\gamma}^1 = -\sigma^3, \quad \tilde{\gamma}^2 = \sigma^1 \quad (10.4.4)$$

と定義しておこう。 $(\tilde{\gamma}^\mu)_{\alpha\beta}$ は添字 α, β に関して対称である。

超対称電荷を $Q_{\alpha i}$ と表そう。ここで i は $SO(4)$ の添字であり、 α は $SO(2, 1)$ スピノール ($2 + 1$ 次元の Lorentz 空間) の脚である。また、実条件 $Q_{\alpha i}^\dagger = Q_{\alpha i}$ が課してあるものとする。

8 個の超対称性が存在するとき、超対称性代数は

$$\begin{aligned}
\{Q_{\alpha i}, Q_{\beta j}\} &= 2\tilde{\gamma}_{\alpha\beta}^\mu p_\mu \delta_{ij} + 2m\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon_{ijkl}M_{kl} & (10.4.5) \\
[p_\mu, Q_{\alpha i}] &= 0, \quad [p_\mu, p_\nu] = 0, \\
[\Sigma_{\mu\nu}, Q_{\alpha i}] &= \frac{1}{2}(\tilde{\gamma}_{\mu\nu})_\alpha^\beta Q_{\beta i} \\
[M_{jl}, Q_{\alpha i}] &= i(\delta_{ij}Q_{\alpha l} - \delta_{il}Q_{\alpha j}) \\
[M_{ij}, M_{kl}] &= i(\delta_{ik}M_{jl} + \delta_{jl}M_{ik} - \delta_{jk}M_{il} - \delta_{il}M_{jk}) \\
[\Sigma_{\mu\nu}, p_\lambda] &= i(\eta_{\nu\lambda}p_\mu - \eta_{\mu\lambda}p_\nu) \\
[\Sigma_{\mu\nu}, \Sigma_{\lambda\rho}] &= i(\eta_{\nu\lambda}\Sigma_{\mu\rho} + \eta_{\mu\rho}\Sigma_{\nu\lambda} - \eta_{\mu\lambda}\Sigma_{\nu\rho} - \eta_{\nu\rho}\Sigma_{\mu\lambda}) \\
[M_{jl}, p_\mu] &= 0, \quad [M_{jl}, \Sigma_{\mu\nu}] = 0 & (10.4.6)
\end{aligned}$$

となる。 M_{ij} は $SO(4)$ 生成子であり、 M_{ij} 自身や $Q_{\alpha i}$ と交換しないので、 $2 + 1$ 次元の超対称 Poincaré 代数における非中心電荷 (non-central charge) であることが分かる。 $\Sigma_{\mu\nu}$ は $SO(2, 1)$ の Lorentz 生成子である。

この超対称性代数が閉じていることを確認するためには、Jacobi 恒等式が成立することを確かめればよい。bosonic 生成子が含まれる Jacobi 恒等式は、各項が適切な対称性の下で共変的に変換することを要請するだけなので、自動的に成り立つ。よって、自明でない Jacobi 恒等式は

$$[Q_{\alpha i}, \{Q_{\beta j}, Q_{\gamma l}\}] + [Q_{\beta j}, \{Q_{\gamma l}, Q_{\alpha i}\}] + [Q_{\gamma l}, \{Q_{\alpha i}, Q_{\beta j}\}] = 0 \quad (10.4.7)$$

だけであるが、実際に成り立つことが確認できる。

理論に現れる粒子は全て massive である。

この超対称性代数に基づいた理論の粒子のスペクトルには、伝播する massless 粒子が存在しないという特徴がある。これについて簡単に確認してみよう。まずは $p_- = 0, p_+ \neq 0, p_2 = 0$ を満たす massless 粒子があると仮定しよう。この場合、超対称性代数により、 Q_-^i と M_{ij} はこの超対称多重項に属する全ての状態を消滅させてしまうことが分かる。一方、 Q_+^i 生成子は生成演算子や消滅演算子として作用して、多重項に属する状態の $SO(4)$ 量子数を変えるはずである。従って矛盾が生じてしまう。massless 粒子は存在しないのである。また、これはトポロジカルな理論であるから Chern-Simons 相互作用が存在できることが分かる。以上より、伝播する粒子は全て massive であることが結論できる。

それでは、massive 粒子の静止系 $p_1 = p_2 = 0$ へと移ろう。超対称性代数 (10.4.5)-(10.4.6) において運動量 $p_1 = p_2 = 0$ を不変にする生成子だけに切断して得られる「小群」(little group) は $\widetilde{SU}(2|2)$ である。ここで \sim は普遍被覆を表している。これは部分群 $U(1)$ が非コンパクトであることを意味している。通常通り、BPS 条件が満たされるとき short 表現が存在する。このとき粒子の質量は $M = 2m(j_1 + j_2)$ であり、 m は (10.4.5) 式における質量パラメータ m と同じものである。

ある切断を行って $1 + 1$ 次元の代数に reduction することができる。

超対称性代数 (10.4.5)-(10.4.6) を $1 + 1$ 次元に reduction したければ、 $p_2 = 0$ とおいて、さらに Lorentz 生成子のうち 2 つを取り除いてしまえばよい。このとき、第 7 章で扱った σ 模型 (7.16.9) の超対称性代数 (7.16.5) が得られることが確認できる。なぜこのような関係にあるかを理解するには、次のように考えればよい。

$\widetilde{SU}(2|4)$ 超群を持つ理論から議論を始めよう。 $SO(6)$ の部分群 $SO(2)$ の生成子 J の下で charge J を持つ $1/2$ BPS 状態に注目すると、この状態を消滅させる超対称電荷は $\widetilde{SU}(2|2)$ 超群を作る。弦の光錐 Lagrangian (7.16.9) はこれらの BPS 状態の周りの小さな揺らぎを記述して、 $\widetilde{SU}(2|2)$ 超群はそれらの状態に線形に作用す

る。一方、世界面作用は世界面に沿った方向の boost の下で不変でなくてはならないので、この超群は (10.4.5) のように拡張されなくてはならないことが確認できる。

BMN 行列模型から 1 + 1 次元超対称 Yang-Mills 理論、2 + 1 次元超対称 Yang-Mills Chern-Simons 理論を得てみよう。

この超対称性代数を持った理論の例をさらに挙げてみよう。BMN 行列模型において、行列理論のコンパクト化の手続き [91] を用いることで、この超対称性代数を持った 1 + 1 次元超対称 Yang-Mills 理論を構成することができる [100]。さらに 1 + 1 次元超対称 Yang-Mills 理論のスカラー場をコンパクト化することにより、2 + 1 次元超対称 Yang-Mills Chern-Simons 理論 (超対称 Yang-Mills 理論に Chern-Simons 項が加わったもの) が得られる。

BMN 行列模型から議論を始めよう。 $SO(6)$ スカラー場の質量項は $-\frac{1}{2}(X_a)^2$ ($a = 1, 2, \dots, 6$) であるとす。ここでスカラー場の質量を 1 とおいた。コンパクト化するには、transverse 方向に対応するスカラー場のうち 1 つについて並進不変性を持った作用を書かなくてはならない。そのためには、 $SO(6)$ スカラー場のうち 2 つとフェルミオンについて

$$X_1 + iX_2 = e^{it}(Y + i\phi), \quad \Psi = e^{\frac{1}{2}\Gamma_{12}t\theta} \quad (10.4.8)$$

と書き換えればよい。このとき、BMN 行列模型の作用は

$$\begin{aligned} S = \frac{1}{g_{YM0}^2} \int dx_0 \operatorname{Tr} & \left[-\frac{1}{2}(D_0 X_I)^2 - \frac{1}{2}(D_0 Y)^2 - \frac{1}{2}(D_0 \phi)^2 - \frac{i}{2}\bar{\theta}\Gamma^0 D_0 \theta - \frac{1}{2}\bar{\theta}\Gamma_I [X_I, \theta] \right. \\ & - \frac{1}{2}\bar{\theta}\Gamma_1 [\phi, \theta] - \frac{1}{2}\bar{\theta}\Gamma_2 [Y, \theta] + \frac{1}{2}[\phi, X_I]^2 + \frac{1}{2}[\phi, Y]^2 + \frac{1}{2}[Y, X_I]^2 + \frac{1}{4}[X_I, X_J]^2 \\ & \left. - \frac{1}{2}(X_a)^2 - \frac{1}{2}2^2 (X_i)^2 + \frac{3}{2}i\bar{\theta}\Gamma_{789}\theta + 2i\epsilon^{ijk} X_i X_j X_k - \frac{1}{2}i\bar{\theta}\Gamma_0 \Gamma_{12}\theta - 2YD_0\phi \right] \quad (10.4.9) \end{aligned}$$

となる。スカラー場は 3 + 4 + 2 個ある。7 個のスカラー場 $I = 3, 4, \dots, 9$ は $a = 3, 4, 5, 6$ と $i = 7, 8, 9$ に分かれて、残りの 2 つは Y と ϕ である。

従って、作用を ϕ 方向に並進不変にすることができた。この方向をコンパクト化するには、 ϕ をゲージ共変な微分に置き換えればよい。つまり

$$\phi \longrightarrow i\frac{\partial}{\partial x_1} + A_1, \quad -i[\phi, \mathcal{O}] \longrightarrow \partial_1 \mathcal{O} - i[A_1, \mathcal{O}] \quad (10.4.10)$$

とすればよい。この手続きを行うと、 $R^{1,1}$ 上の 1 + 1 次元超対称 Yang-Mills 理論を mass deformation したものの

$$\begin{aligned} S = \frac{1}{g_{YM1}^2} \int dx_0 dx_1 \operatorname{Tr} & \left[-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{2}(D_\mu X_I)^2 - \frac{1}{2}(D_\mu Y)^2 - \frac{i}{2}\bar{\theta}\Gamma^\mu D_\mu \theta - \frac{1}{2}\bar{\theta}\Gamma_I [X_I, \theta] \right. \\ & - \frac{1}{2}\bar{\theta}\Gamma_2 [Y, \theta] + \frac{1}{2}[Y, X_I]^2 + \frac{1}{4}[X_I, X_J]^2 - \frac{1}{2}(X_a)^2 - \frac{1}{2}2^2 (X_i)^2 + \frac{3}{2}i\bar{\theta}\Gamma_{789}\theta \\ & \left. + 2i\epsilon^{ijk} X_i X_j X_k - \frac{1}{2}i\bar{\theta}\Gamma_{012}\theta - Y\epsilon^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \right] \quad (10.4.11) \end{aligned}$$

が得られる。 ϕ をコンパクト化したので当然ではあるが、スカラー場は 3 + 4 + 1 個になっていることが確認できる。ここで $\mu = 0, 1$ である。この理論は $SU(2)_1 \times SU(2)_2$ の R 対称性を持った $R^{1,1}$ 上の超対称 Poincaré 代数を持っている。ここで $SU(2)_1$ は 3 個のスカラー場 $i = 7, 8, 9$ を回転させる群であり、 $SU(2)_2$ は 4 個のスカラー場 $a = 3, 4, 5, 6$ を回転させる $SO(4) \sim SU(2)_2 \times SU(2)_3$ の部分群である。残りの $SU(2)_3$ 部分群は理論の大局的 (global) 対称性になっている。

x_1 方向にコンパクト化して半径を 0 にすると、対称群が大きくなって BMN 行列模型に戻る。このとき、これら 2 つの理論の結合定数は $g_{YM1}^2 = 2\pi R_{x_1} g_{YM0}^2$ という関係を持っている。 R_{x_1} は x_1 方向の円周の半径である。

このように BMN 行列模型から構成された $1+1$ 次元超対称 Yang-Mills 理論は、IIA 型 pp-wave 理論を DLCQ (光錐離散量子化) して得られる理論と同じである [20, 21, 22]。この IIA 型 pp-wave 理論は、M2-brane 作用を 11 次元最大超対称 pp-wave 時空上で κ 対称性による固定条件の下で reduction して得られる理論である。こうして再び得られた作用 (10.4.11) は、 $1+1$ 次元において明らかに Lorentz 不変であることが確認できる。

さらにこの理論において場 Y を周期的にすることによって、次元酸化させよう。具体的には

$$Y \rightarrow i \frac{\partial}{\partial x_2} - A_2, \quad -i[Y, \mathcal{O}] \rightarrow \partial_2 \mathcal{O} + i[A_2, \mathcal{O}] \quad (10.4.12)$$

という置き換えをすればよい。これによって、相互作用項 $Y F_{01}$ は $2+1$ 次元 Chern-Simons 項になる。Chern-Simons 作用のレベルは量子化されるので、これによって Y のコンパクト化半径も量子化されることになる。この量子化条件は、相互作用 $Y F_{01}$ が Y の任意の並進の下で不変でなく、 e^{iS} が周期的になるのは Y を特定の値だけ並進させたときだけであることに由来している。結局、このようにして $2+1$ 次元超対称 Yang-Mills Chern-Simons 理論

$$S = \frac{k}{4\pi} \left(\int \text{Tr} \left[-\frac{1}{2} F \wedge *F + A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A - \frac{i}{12} \bar{\psi} \Gamma_{\mu\nu\lambda} \psi dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\lambda \right] \right. \\ \left. + \int d^3x \text{Tr} \left[-\frac{1}{2} (D_\mu X_I)^2 - \frac{i}{2} \bar{\psi} \Gamma^\mu D_\mu \psi - \frac{1}{2} \bar{\psi} \Gamma^I [X_I, \psi] + \frac{1}{4} [X_I, X_J]^2 \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} (X_a)^2 - \frac{1}{2} 2^2 (X_i)^2 + 2i\epsilon^{ijk} X_i X_j X_k + \frac{i}{4} \epsilon^{ijk} \bar{\psi} \Gamma_{ijk} \psi \right] \right) \quad (10.4.13)$$

が得られる。スカラー場は $3+4$ 個ある。7 個のスカラー場 $I = 3, 4, \dots, 9$ が $a = 3, 4, 5, 6$ と $i = 7, 8, 9$ に分かれたのである。世界面の脚は $\mu = 0, 1, 2$ である。理論の結合定数は $g_{YM2}^2 = 2\pi R_{x_2} g_{YM1}^2$ という関係にある。また k は $\frac{k}{4\pi} = \frac{1}{g_{YM2}^2}$ を満たす整数である。従って、この理論においては k は単に結合定数に過ぎず、 k が大きいときは弱結合であることが確認できる。

10.4.2 超対称電荷が 16 個の場合の超対称性代数

超対称電荷が 16 個ある理論について考えてみよう。超対称電荷が 8 個の場合と比べると、 $SO(4)$ 対称群が 1 つから 2 つに増えるのである。よって、2 個目の $SO(4)$ 対称性に対応する超対称電荷 $\tilde{Q}_{\alpha m}$ の組を追加しよう。そして、 $\tilde{Q}_{\alpha m}$ に関する反交換関係

$$\{\tilde{Q}_{\alpha m}, \tilde{Q}_{\beta n}\} = 2\tilde{\gamma}_{\alpha\beta}^\mu p_\mu \delta_{mn} + 2m' \epsilon_{\alpha\beta\epsilon mnrs} \tilde{M}_{rs} \quad (10.4.14)$$

を追加しよう。 \tilde{M}_{rs} は 2 番目の $SO(4)$ の生成子である。また

$$\{Q_{\alpha i}, \tilde{Q}_{\alpha m}\} = 0 \quad (10.4.15)$$

である。残りの代数については自明であろう。

原理的には (10.4.5) 式の m と (10.4.14) 式の m' とは異なる値を持たせることができるが、以下では $m = m'$ としよう。もし Q と \tilde{Q} の両方の下で BPS 状態となる状態が存在するためには、 m/m' が有理数 (rational number) でなくてはならない。また、先ほどと同様の議論をすることにより、massive 粒子が作る小群は $\widetilde{SU}(2|2) \times \widetilde{SU}(2|2)$ であることが分かる。

理論が持つ対称性である $SO(4) \times SO(4)$ 群について、もう少し詳しく調べておこう。重力理論においては、この 2 つの $SO(4)$ 群は 2 つの 3 次元球面に作用していた。この 2 つの $SO(4)$ 群を $SO(4)_i$ ($i = 1, 2$) と表そう。このとき、それぞれについて $SO(4)_i = SU(2)_{L_i} \times SU(2)_{R_i}$ が成り立つ。超対称電荷 $Q_{\alpha i}$ は $SU(2)_{L_1} \times SU(2)_{L_2}$ の下で変換する。超対称電荷 $\tilde{Q}_{\alpha i}$ は $SU(2)_{R_1} \times SU(2)_{R_2}$ の下で変換する。もしこのような理論を $SU(2)_{R_i}$ の部分群 Z_k で割れば、(10.4.5) 式のように 8 個しか超対称電荷を持たない理論が得られる。

16 個の超対称電荷を持ったこの代数は、第 9 章で扱った理論の世界体積上に現れる代数と同じである。M2-brane 理論の場合、2 つの $SO(4)$ 対称性は理論の大局的 R 対称性になっていた。 $R^{2,1} \times S^3$ 上の M5-brane 理論の場合、 $SO(4)$ 群のうち 1 つは世界体積に作用する対称性であった。 S^3 の大きさが無限大であるときは、この $SO(4)$ 群は $ISO(3)$ 群になり、超対称性代数の右辺には並進生成子しか残らなくなる。すなわち、非中心電荷は無くなってしまふ。従って、このときは時空全体の次元 $d \geq 4$ における Haag-Lopuszanski-Sohnius の定理 [101] による困難は受けないのである。

第 11 章

解析接続して得られる重力解と双対な場の理論

11.1 $AdS_3 \times S^3 \times S^1$ への解析接続

IIB 型 ansatz を解析接続する。

これまで $S^3 \times S^3$ の因子を持った重力解を扱ってきたが、もし $AdS_3 \times S^3$ の因子を持った重力解を記述したいならば、IIB 型 ansatz (9.1.63)-(9.1.68) において

$$y = iy', \quad G = G' + \frac{i\pi}{2}, \quad x_j = ix'_j, \quad d\Omega_3^2 = -ds_{AdS_3}^2 \quad (11.1.1)$$

と置き換えればよい。このとき

$$h^{-2} = -2y' \sinh G', \quad V_j = -iV'_j, \quad z = \frac{1}{2 \tanh G'} \quad (11.1.2)$$

となることに注意すると、計量は

$$ds^2 = -h^{-2}(dt + V'_i dx'^i)^2 - h^2(dy'^2 + dx'^i dx'^i) + y' e^{G'} ds_{AdS_3}^2 + y' e^{-G'} d\tilde{\Omega}_3^2 \quad (11.1.3)$$

となり、 $AdS_3 \times S^3$ 因子を含む実数解が得られることが確認できる。

ここでは、時間座標が AdS_3 に入っており、その他は全て空間座標であるような、非特異な重力解に興味があるので、以下では

$$y' \geq 0, \quad G' > 0 \quad (11.1.4)$$

の場合のみについて考えることにする。

従って、座標 t は空間的 (space-like) であるから、この方向をコンパクト化することができる。また、空間的な座標を t と表すと誤解が生じる恐れがあるので、以下では χ と表すことにしよう。但し、 χ 方向は t 方向を Wick 回転したものではないということに注意しておこう。

以上で得られた ansatz を、 z を用いた形に書き換えると

$$\begin{aligned} ds_{10}^2 &= y \sqrt{\frac{2z+1}{2z-1}} ds_{AdS_3}^2 + y \sqrt{\frac{2z-1}{2z+1}} d\tilde{\Omega}_3^2 + \frac{2y}{\sqrt{4z^2-1}} (d\chi + V)^2 + \frac{\sqrt{4z^2-1}}{2y} (dy^2 + dx^i dx^i) \\ F_5 &= -\frac{1}{4} \left\{ d \left[y^2 \frac{2z+1}{2z-1} (d\chi + V) \right] + y^3 *_3 d \left(\frac{z + \frac{1}{2}}{y^2} \right) \right\} \wedge d(\text{Vol}_{AdS_3}) \\ &\quad - \frac{1}{4} \left\{ d \left[y^2 \frac{2z-1}{2z+1} (d\chi + V) \right] + y^3 *_3 d \left(\frac{z - \frac{1}{2}}{y^2} \right) \right\} \wedge d^3 \tilde{\Omega} \\ dV &= \frac{1}{y} * dz \end{aligned} \quad (11.1.5)$$

となる。但し、以上の議論で変数に付けていた記号' をここで取り除いた。また、 z は方程式

$$\partial_i \partial_i z + y \partial_y \left(\frac{1}{y} \partial_y z \right) = 0 \quad (11.1.6)$$

に従う。

コンパクトな内部多様体を持った解は現れない。

IIB 型理論の解として、 $AdS_3 \times S^3 \times T^4$ 時空解や $AdS_3 \times S^3 \times K3$ 時空解など、コンパクトな内部多様体をもった重力解があることが知られている。

しかしながら、IIB 型 ansatz の解析接続 (11.1.5) には、これらの重力解は含まれていない。なぜなら、 χ 方向の並進生成子が超対称代数の右辺に $U(1)$ 中心電荷 (central charge) として現れるからだ。よって、コンパクトな内部多様体を持った解を見つけることはできないのである。

また、(11.1.2) 式の z の表現から明らかのように、 $y = 0$ 平面において 1 種類の境界条件しか持てないことが分かる。なぜなら、 G' が実数である以上、 z は連続的に正から負へ変わることはできないからだ。

11.2 $SO(2,2) \times SO(4)$ 対称性を持つ重力解

特殊な極限では Gibbons-Hawking 計量の因子を持った解が現れる。

解析接続した IIB 型 ansatz (11.1.5) において、 $AdS_3 \times S^3$ 因子が 6 次元 flat 空間になり、残りの 4 次元が hyper-Kähler 多様体で並進方向の Killing ベクトルを持つ極限が存在するので、これについて調べてみよう。

方程式 (11.1.6) において、 $|y - y_0| \ll y_0$ という領域における解に注目する。ここで z を $z \sim y_0 g$ と書き直すと、 g は 3 次元 Laplace 方程式

$$\partial_i \partial_i g + \partial_y^2 g = 0 \quad (11.2.1)$$

を満たすことになる。ここでは、 g が漸近的に定数になる解を考えることにしよう。このとき $y_0 \rightarrow \infty, z \rightarrow \infty$ という極限を取ると、(11.1.2) 式より

$$z \sim \frac{1}{2G}, \quad h^{-2} \sim -2y_0 G \sim -\frac{1}{g} \quad (11.2.2)$$

となる。

以上の結果を IIB 型 ansatz の計量 (9.1.63) に代入しよう。すると、 $AdS_3 \times S^3$ の半径 $\sqrt{ye^G}, \sqrt{ye^{-G}}$ は共に無限大になり、6 次元 flat 空間を回復することが確認できる。残りの 4 次元の多様体については、計量が

$$ds_4^2 = \frac{1}{g} (d\chi + V_i dx^i)^2 + g(dy^2 + dx^i dx^i) \quad (11.2.3)$$

$$dV = \frac{1}{y} *_3 dz \sim *_3 dg \quad (11.2.4)$$

となる。これは Gibbons-Hawking 型の計量であり、4 次元 hyper-Kähler 多様体で並進方向の Killing ベクトルを 1 つ持つものの一般形である [102, 103]。

解析的な重力解を見つける。

次に、 AdS_3 時空は萎まず、 S^3 空間は萎めるという重力解を見つけてみよう。この解が解析的であるためには、 $y = 0$ 平面において $z = \frac{1}{2}$ という境界条件を満たさなくてはならない。既に確認したように、 $y = 0$ 平面においては 1 種類の境界条件しか持てないことに注意しよう。また、以下では全ての領域において $z \geq \frac{1}{2}$ であるような解を見つけることにしよう。

非自明な解を得るためには、方程式 (11.1.6) の右辺に charge を持った源 (source) を加えればよい。ここでは、 $(y, \mathbf{x}) = (y_0, \mathbf{x}_0)$ に局所化した源を考えることにしよう。すなわち、方程式

$$\partial_i \partial_i z + y \partial_y \left(\frac{1}{y} \partial_y z \right) = -Q_0 \cdot 4\pi \delta(y - y_0) \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad (11.2.5)$$

の解を考える。ここで charge Q_0 を適切な値に設定すれば、 χ でパラメータ付けされた円周が $y \rightarrow y_0, \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$ で滑らかに萎めるようになる。さらに計量 (11.1.5) に注目すれば、この極限において (χ, y, \mathbf{x}) で張られる空間が局所的に \mathbf{R}^4 になるのは、 $y = y_0$ の付近で関数 z が

$$z \underset{y \approx y_0}{=} \frac{y_0}{2\sqrt{(y - y_0)^2 + |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2}} \quad (11.2.6)$$

というように振る舞うときであることが分かる。方程式 (11.2.5) より、このとき $y = y_0$ に置かれた charge は $Q_0 = y_0/2$ であることが分かる。

従って、方程式と境界条件を

$$\partial_i \partial_i z + y \partial_y \left(\frac{\partial_y z}{y} \right) = - \sum_{l=1}^n \frac{y_l}{2} (4\pi) \delta(y - y_l) \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{x}_l) \quad (11.2.7)$$

$$z|_{y=0} = \frac{1}{2} \quad (11.2.8)$$

と設定したとき、解析的な重力解が得られることが分かった。ここでは、複数個の charge をそれぞれ $(y, \mathbf{x}) = (y_l, \mathbf{x}_l)$ に置いた場合を考えている。後で確認するように、 (y, \mathbf{x}) で張られる 3 次元において、複数の charge を同じ点に置かない限りは、得られる重力解は滑らかになる。

1 個の点電荷が置かれた系は $AdS_5 \times S^5$ 時空解に対応する。

最も単純な場合として、charge $y_0/2$ の 1 個の点電荷を $(y, \mathbf{x}) = (y_0, 0)$ に置いた系について考えよう (図 11.1 a)。この系に対応する解は

$$z = \frac{r^2 + y_0^2 + y^2}{2\sqrt{(r^2 + y_0^2 + y^2)^2 - 4y^2 y_0^2}}$$

$$V_\phi = \frac{r^2 - y_0^2 + y^2}{2\sqrt{(r^2 + y_0^2 + y^2)^2 - 4y^2 y_0^2}} \quad (11.2.9)$$

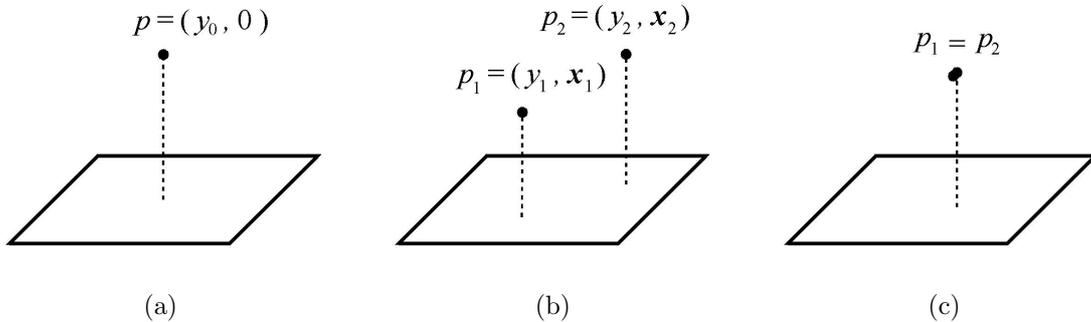


図 11.1: 点電荷が置かれた様々な系：平面は $y = 0$ かつ \mathbf{x} で張られた 2 次元平面を表している。

(a) 1 個の点電荷が置かれた場合： $AdS_5 \times S^5$ 時空解に対応する。

(b) 2 個の点電荷が異なる位置に置かれた場合：滑らかな重力解を得るためには p_1, p_2 の charge は $y_1/2, y_2/2$ でなくてはならない。

(c) 2 個の点電荷が重なって置かれた場合：時空に Z_2 特異点が現れる。

であり、これは $AdS_5 \times S^5$ 時空解であることが確認できる。実際に、座標変換

$$\begin{aligned} x_1 + ix_2 &= re^{i\phi} \\ y &= y_0 \cosh u \cos \beta, \quad r = y_0 \sinh u \sin \beta \\ \psi &= \chi - \frac{\phi}{2}, \quad \alpha = \chi + \frac{\phi}{2} \end{aligned} \quad (11.2.10)$$

を行うと、重力解は

$$\begin{aligned} ds_{10}^2 &= y_0[(\cosh^2 u ds_{AdS_3}^2 + du^2 + \sinh^2 u d\psi^2) + (\cos^2 \beta d\tilde{\Omega}_3^2 + d\beta^2 + \sin^2 \beta d\alpha^2)] \\ F_5 &= 4y_0^2[\cosh^3 u \sinh u du \wedge d\psi \wedge d\text{Vol}_{AdS_3} + \cos^3 \beta \sin \beta d\beta \wedge d\alpha \wedge d^3\tilde{\Omega}] \end{aligned} \quad (11.2.11)$$

であることが分かる。但し、 $AdS_5 \times S^5$ はそれぞれ $AdS_3 \times S^1$ と $S^3 \times S^1$ でスライスされた形で表現されている。また

$$y_0 = R_{AdS_5}^2 = R_{S^5}^2 = \sqrt{4\pi g_s N \alpha'^2} \quad (11.2.12)$$

という関係が成り立っている。

この重力解 (11.2.11) は、解析接続された IIB 型 ansatz (11.1.5) で表される一般の重力解が持つ $SO(2, 2) \times SO(4) \times U(1)$ 対称性よりも、さらに大きな対称性を持っていることに注意しよう。また、超対称性についても一般の重力解よりもさらに大きな超対称性を持っていることが確認できる。

また、 $AdS_3 \times S^1$ 境界時空は $R \times S^3$ 時空と共形変換で関係付けられることに注意しておこう。すなわち

$$\begin{aligned} ds_{AdS_3 \times S^1}^2 &= (-\cosh^2 v dt^2 + dv^2 + \sinh^2 v d\varphi^2) + d\psi^2 \\ &= \frac{1}{\sin^2 \theta} [-dt^2 + (\cos^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2 + \sin^2 \theta d\psi^2)] \\ &= \frac{1}{\sin^2 \theta} ds_{R \times S^3}^2; \quad \sin \theta = \frac{1}{\cosh v} \end{aligned} \quad (11.2.13)$$

である。ここで、共形因子 (conformal factor) は S^3 の円周上 ($\sin \theta = 0$) において発散することに注目しよう。この発散する領域は、 AdS_3 の境界 ($\cosh v \rightarrow \infty$) に対応している。

多数の点電荷が置かれた系

次に、多数の点電荷がある場合として、charge Q_l の点電荷が位置 y_l に置かれた系について考えよう (図 11.1b)。

3次元空間 (y, \mathbf{x}) において点電荷を取り囲む S^2 を考えて、さらに \tilde{S}^3 を fiber して得られる 5次元空間で flux F_5 を積分する。(11.1.5) 式より、積分の結果は $y_l Q_l \sim N_l$ に比例することが分かる。ここで、flux が量子化されていることを用いた。

滑らかな重力解が得られるのは $Q_l = y_l/2$ が成り立っている場合であり、このとき $y_l = \sqrt{4\pi g_s \alpha'^2 N_l}$ という関係式が得られる。これは (11.2.12) 式と同じであることを確認しておこう。

従って、滑らかな重力解が満たす方程式 (11.2.7) の解の族 (family) においては、 \mathbf{x}_l の値を連続的に変化させることはできるが、 y_l の値は flux の量子化条件により連続的に変化させることはできないということが分かる。

複数の点電荷が重ねて置かれた系は特異的な重力解に対応する。

最後に、同じ charge を持つ 2 つの電荷が同じ位置に重ねて置かれた系について考えよう (図 11.1c)。まず、2 つの電荷が異なる位置に置かれた系を考えると、この系は滑らかな重力解に対応する。その上で、2 つの電荷を重ねる極限を考えよう。すると、得られる重力解は特異的になることが分かる。なぜなら、解析的な重力解が得られる場合に持つ charge と比べると、2 倍の charge を持った点電荷が存在してしまっているからである。

今の場合、重力解には Z_2 特異点が存在することになる。滑らかな重力解が得られる場合、点電荷の付近の領域は局所的に R^4 空間に漸近することを既に確認したが、今の場合には点電荷の付近の領域は局所的に R^4/Z_2 空間に漸近することになる。

同様にして k 個の電荷が重なる場合を考えると、これは charge $ky_l/2$ の点電荷が置かれた状況と同じであり、局所的には \mathbf{R}^4/Z_k 空間に漸近することが確認できる。つまり、 A_{k-1} 特異点が得られるのである。

11.3 重力解に双対な場の理論

以上で扱った重力解に対応する場の理論について考えよう。具体的には、 $AdS_3 \times S^1$ 上の $U(N)$ $\mathcal{N} = 4$ 超対称 Yang-Mills 理論を扱えばよい。理論に登場する 6 個のスカラー場のうち 2 個を複素に組んだものを Z と表して、この場に注目しよう。この理論の Lagrangian には

$$\frac{1}{2} \left(|D_\psi Z|^2 - \frac{\mathcal{R}}{6} |Z|^2 \right), \quad \mathcal{R} = -6 \quad (11.3.1)$$

という項が存在している。ここで ψ は S^1 をパラメータ付けする座標である。また \mathcal{R} は単位半径の AdS_3 のスカラー曲率である。

S^1 上の Kaluza-Klein モードで場 Z を展開しよう。すると、定数モード (第零 Kaluza-Klein モード) において AdS_3 上で質量が負である場が現れる。この負の質量はスカラー場の共形結合から生じるものであり、Breitenlohner-Freedman 束縛条件 (bound) AP144-249 に従う。

また、 S^1 上における Z 場の第一 Kaluza-Klein モードから、 AdS_3 上における massless 場が得られる。つまり、 $Z = \hat{z}e^{i\psi}$ というモードを考えることができるのである。但し、 \hat{z} は $N \times N$ 行列である。行列 \hat{z} を対角化したときの成分を \hat{z}_l と表して、 \hat{z}_l の多重度を N_l と表すと、 $\sum_l N_l = N$ が成り立つ。

ここで、重力解と場の理論が持つ対称性に注目すれば、状態 $Z = \hat{z}e^{i\psi}$ は

$$x_l^1 + ix_l^2 = \hat{z}_l, \quad y_l^2 \sim N_l \quad (11.3.2)$$

を満たす重力解と関係しているのではないかと予想される。もしこれが正しければ、重力解に関する解析より、 $\hat{z}_i \rightarrow \hat{z}_j$ の極限において、多重度 $N_i + N_j$ の固有値が得られるはずである。しかしながら、場の理論において議論をすると必ずしもそうはならない。

もし $N_i = N_j$ であれば重力解のときと同じように特異的な系 (この場合なら Z_2 特異性を持つ系) が得られるのであるが、 $N_i \neq N_j$ の場合には解析的な系が得られてしまうのである。より一般的には、 $\hat{z}_1, \hat{z}_2, \dots, \hat{z}_k$ が同じである場合を考えることができるが、やはり Z_k 特異性が得られるのは、それらの多重度 N_1, N_2, \dots, N_k が全て等しい場合だけである。

また、ここで扱っている場の理論は $AdS_3 \times S^1$ 上で定義されているので、 AdS_3 の境界における場の境界条件を課す必要があることに注意しよう。よって、多重中心 (multi-center) 解を考えた場合には、境界条件によってゲージ対称性が破れてしまうかもしれない。つまり、多重中心解が存在できるのは、 AdS_3 の境界においてゲージ対称性が破れている場合だけであるかもしれないのである。もしそうであれば、この破れているゲージ対称性を $\hat{z}_i \rightarrow \hat{z}_j$ の極限を取ることで回復させることはできない。

重力側と場の理論側の対応がうまくいかない原因は、このゲージ対称性の破れと関係しているのではないだろうか。これについては、さらに理解を深めていく必要があるようである。

第 12 章

おわりに

修士論文全体を通して、16 個の超対称電荷を持つ様々な理論について調べてきた。これらの理論にはエネルギーギャップがあるので、ゲージ不変な状態のスペクトルという単純な物理量があり、解析がしやすかった。また、これらの理論には無次元パラメータがあって、それによって強結合領域と弱結合領域の現象を連続的な補間関数で説明できる可能性が高く、とても興味深い。

また、この論文で扱った理論は $R \times S^3$ 上における $\mathcal{N} = 4$ 超対称 Yang-Mills 理論を様々に切断して得られるものであった。従って、 $\mathcal{N} = 4$ 超対称 Yang-Mills 理論と類似した性質を持っていた。但し、切断することによって異なる性質を持つこともある。特に、 $\mathcal{N} = 4$ 超対称 Yang-Mills 理論には 1 つしかなかった真空が、切断すると多数の真空を持つ理論が得られることには注目すべきである。異なる真空の周りでは異なる物理 (状況) が得られる。そして、この論文で用いた解析方法はそのような様々な真空を統一的に扱うものであった。

第 1 部では、 $\widetilde{SU}(2|4)$ 対称性を持つ理論について調べた。

一般的な BPS 状態に関する情報を持つ指数 (2.2.1) を構築して、さらに各理論において 1/2 BPS 状態を数え上げる公式 (2.3.3), (2.5.4) を導出した。この指数に対する単一トレース状態の寄与は (7.16.13) 式で計算している。さらに、この指数は弦の near BPS 状態を記述する 2 次元世界面理論 (7.16.11), (7.16.16) の指数として使うこともできる。詳しい議論は付録 A に示した。

これらの BPS 状態に双対な重力解の一般形は、IIA 型 ansatz (3.3.8)-(3.3.9) として与えられる。これは、3 次元に円形の導電円盤を配置した軸対称な静電気問題の系と対応させて議論することができた。漸近領域の境界条件には厳しい制限がつくが、円盤の配置の仕方には様々な可能性があることを確認した。実は、個々の円盤の配置の仕方が、場の理論における様々な真空解に対応しているのであった。

静電気問題の系で解析を行うと、あらゆる真空解は NS5-brane 理論 (4.5.6)-と D2-brane 理論 (5.4.12)-の組み合わせで与えられることが分かる。ここで、D2-brane 理論は、 $R \times S^2$ 上の 2 + 1 次元超対称 Yang-Mills 理論で $U(N)$ ゲージ群を持った真空に双対な重力解である。

こうして得られる全ての解は IR 領域において滑らかで、事象の地平面を持っていない。従って、特に $SO(6)$ 生成子 J について、 J が非常に大きい状態に注目して議論を行った。't Hooft 極限 (J を有限に保ったまま large N 極限を取る) においては、別の真空解へのトンネル効果を無視することができるので、反作用を無視してよい。この極限において、BPS 状態は S^5 の中で円周に沿って動き、他の座標においては静止しているような massless 粒子の測地線として扱うことができる。これらの測地線は静電気問題の系における導電円盤の縁に対応する点に静止することを確認した。

よって、1 つの真空に注目すると、置かれた円盤の数だけ、異なる測地線が存在することが分かる。これらの測地線近傍における時空は、一般的な pp-wave 時空 (3.3.33) になっている。従って、near BPS 状態のスペクトルを調べるためには、この計量を使えばよいことが理解できる。

弦理論側においては、't Hooft 結合の強結合領域において、弦を光錐ゲージ固定して量子化することができ

る。弦にとっての transverse 方向が 8 個あるうちの 4 個は、massive な自由場で記述することができた。これらは S^5 方向における弦の振動に対応しているのであった。 S^5 方向に振動する弦に対応した near BPS 状態のスペクトルは、BPS 測地線の位置における S^5 の半径に対応したパラメータで特徴付けられた。但し (5.4.19), (7.15.32) 式で見たように、このパラメータの値は、理論においてどの真空に注目しているか、そして真空においてどの測地線に注目しているかによって変わってくることに注意しなければならない。

massless 粒子の測地線の非常に近傍における計量は、あらゆる場合に共通して IIA 型 pp-wave 時空 (3.3.35) になるのであった。しかし、測地線から弦のスケール程度であっても離れてしまうと、違う特徴が現れてきてしまう可能性が出てくるのだ。例えば、BMN 行列模型の真空解のうち、 N_5 枚の NS5-brane が重なった系についての議論を思い出そう。但し、 N_5 は比較的小さい値とする。この場合、弦理論の正確な記述には、WZW 模型を massive deformation したものと、線形 dilaton 理論が含まれたもので行われるのであった。この 1+1 次元場の理論は (7.16.5) 式で定義される $(4, 4)_m$ 超対称性を持ち、この超対称性代数には中心電荷がないという特徴があった。

この場の理論の様々な真空の周りで、弱結合領域における単一トレース状態のスペクトルを求めると、transverse 方向に対応する振動子の個数は注目する真空に依存する。実際に、NS5-brane が 1 枚の系 (自明な真空) では振動子モードは 4 個しかないのであるが、NS5-brane が複数枚の系においては 8 個の振動子モードが存在することを確認した。これについては、NS5-brane が 1 枚の系は near horizon 領域を持たないことと深く関係している。ゲージ理論側の議論と比較すると、BPS スペクトルを調べることにより、振動子モードが 8 個であることと矛盾しないが、更に指数に寄与しないモードが存在することを排除できないので、正確に両者の結果が対応しているとは言えない状況である。更なる解析が行われることを期待したい。

第 2 部では $SO(4) \times SO(4)$ 対称性を持った理論について調べた。

これらの理論の真空は、2 次元自由フェルミオンの系と対応させて調べることができた。実際、理論の BPS 状態は自由フェルミオンで記述される単純な場の理論で表すことができる。半古典極限 (semiclassical limit) においては、これらの状態を droplet と呼ばれる、位相空間内でフェルミオンが占める領域で特徴付けることができる。そして、ある 2 次元平面上において境界条件を課すと、真空解の一般形を与えるのであった。課すことができる境界条件は 2 種類あり、これは $SO(4) \times SO(4) \sim S^3 \times \tilde{S}^3$ として現れる 2 種類の 3 次元球面のどちらが萎むかに対応していた。このように、2 次元平面上で占める droplet 領域を決めてしまえば、非特異で事象の地平面を持たない 10 次元時空解が一意的に決まってしまうことを確認した。

さらに、この平面や droplet 領域は位相空間上の領域と直接的に対応しているのであった。従って、時空解のトポロジーも平面上の droplet のトポロジーによって決まってしまう。つまり、時空解の geometry は droplet の形に依存するのである。

例えば、円形の droplet は $AdS_5 \times S^5$ 時空解に対応していた。そして、droplet 上の小さな「さざなみ」(ripple) は AdS_5 空間にある重力子に対応した小さな揺らぎを表すことを確認した。また、円形 droplet から遠く離れた小さな droplet は、 AdS_5 中の S^3 に巻きついた D3-brane の集まりに対応していた。一方、円形 droplet の中にある小さな空孔は、 S^5 中の \tilde{S}^3 に巻きついた D3-brane の集まりに対応していた。このように droplet が小さくなる極限では、対応する時空解には giant graviton と呼ばれる brane が存在することになる。

S^5 に巻きついた brane と AdS_5 に巻きついた brane の間を滑らかに補間する時空解が構築できることも確認した。実際、多数の brane が存在すると、それらは geometry に対して反作用を及ぼして、新しいトポロジーを持った新しい geometry が作られることを示した。その結果、どのような geometry が得られるかは、どのような geometric な転移 (geometric transition) が起こるかに依存する。この転移では、brane が巻きついた片方の球面は萎むことができるが、もう一方の球面は萎むことができないので、そこに巻きついていた brane は flux に置き換わってしまうということが起こる。

geometry の立場から見ると、これらの BPS geometry はどのように量子化されるのかが気になるが、droplet

の系による記述は、この疑問にも解答を出してくれる。この場合、10次元の geometry に入った2次元平面が自由フェルミオンの位相空間と同一視されることは既に述べた通りであるが、実は位相空間における面積の量子化が geometry における flux の量子化に対応するのである。

また、pp-wave 時空における 1/2 BPS 励起状態を droplet の系で記述することもできた。これは半分だけ充たされた位相空間に対応している。この場合、フェルミオンは $1+1$ 次元における相対論的な Dirac フェルミオンになる。この解の光錐エネルギーは Dirac フェルミオンの通常のエネルギーと同じである。粒子・空孔双対性は8次元方向のうち、最初の4次元に入った S^3 と残りの4次元に入った \tilde{S}^3 を交換することに対応している。

さらに双対関係を用いると、M2-brane 理論を mass deformation したものに双対な解を得ることができた。この理論は $\mathcal{N} = 4$ 超対称 Yang-Mills 理論を mass deformation して得られる理論 ($\mathcal{N} = 1^*$ 理論) と似ている。質量項が導入されたことによって、元の $SO(8)$ 対称性を $SO(4) \times SO(4)$ 対称性に破れるのであった。この理論は S^3 や \tilde{S}^3 に巻きついた M5-brane を含む真空を持つ。これらの解は非特異であり、これらの解によってこの理論の全ての真空解を記述できる。また、球面上の flux を変えることによって、 S^3 に巻きついた M5-brane が存在する解と、 \tilde{S}^3 に巻きついた M5-brane が存在する解を滑らかに補間することができる。これに関連して、droplet の系を円筒にコンパクト化したものについて議論を行った。

さらに、droplet の系をトーラスにコンパクト化したものについても調べた。トーラスにコンパクト化して大きさが0になるまで萎めると、 $2+1$ 次元の Poincaré 不変性を持つ小弦理論 (9.4.2)-が得られる。また、トーラスを有限のサイズにしておくと、トーラス上の $2+1$ 次元小弦理論が得られる。この理論は2個の整数 N と K で特徴付けられる。large K 極限においては、低エネルギーにおける記述が $U(N)_K$ Chern-Simons 理論によって与えられる。よって、低エネルギー領域の理論は $U(N)_K$ Chern-Simons 理論そのものであると予想される。この低エネルギー理論は $U(K)_N$ Chern-Simons 理論とレベル・ランク双対な関係にある。この $K \leftrightarrow N$ 対称性は小弦理論全体の対称性であった。トーラス上の droplet の系に対応する解は、トーラス上の $U(N)_K$ Chern-Simons 理論の様々な真空の半古典的な記述を与えてくれる。これらの理論には、M2-brane 理論を mass deformation したものと同様、超対称性代数が非中心項を持っているという特徴があった。

ここで、第1部で扱った静電気問題の系も、元は M 理論に対応する droplet の系から導かれたことを思い出そう。実際、ここでの議論の対象を $AdS_4 \times S^7$ 時空や $AdS_7 \times S^4$ 時空における giant graviton に置き換えれば、議論の内容はそのまま適用できる。この場合は、同様に droplet の系を考えて、11次元の geometry は3次元 Toda 方程式を解くことによって得られるのであった。しかしながら、Toda 方程式は解析するのが難しく、非常に単純な例しか知られていない。

また、第1部と第2部の両方において、解析接続した ansatz を考えることにより、 AdS 空間の因子を持った重力解を取り扱ったことを最後に言及しておこう。

謝辞

この修士論文を執筆するにあたり、丁寧に指導して下さった江口徹先生に深く感謝いたします。また、超重力理論の計算について教えて下さった今村洋介氏に深く感謝いたします。本郷素粒子論研究室の皆様には、執筆途中の修士論文に対して様々なアドバイスやコメントをして頂き、大変お世話になりました。本当にありがとうございました。

付録 A

Witten 指数について

第 2 章で導入した Witten 指数について、ここでまとめて議論をしておこう [3, 4]。また、第 7 章において、BMN 行列模型における near BPS 状態について議論するときに省略した部分についても、まとめておいた。

A.1 4 次元超共形代数とそのユニタリ表現

他の BPS 多重項と結合できない BPS 状態だけが protected 状態である。

超対称性代数のうち、右辺に R -charge を含むものは、BPS 多重項を持つ。この多重項はエネルギーや共形次元が R -charge で決まる特別な値を持つときだけに現れ、一般の多重項よりも状態数が少ないという特徴を持っている。このことから、BPS 多重項の表現は short 表現、一般の多重項の表現は long 表現と呼ばれる。

もしこの多重項のエネルギーを無限小変化させることができれば、BPS 多重項は状態数の多い多重項へと非連続的に移行することになってしまう。しかし、無限小変化によって多重項の持つ自由度が非連続的に変化することは考えられない。従って、short 表現の数は場の理論のいかなる連続パラメータを動かしても変化しないのだと期待したくなる。

しかし、この結論は正しくない。複数の short 表現が結合して一般的な long 表現を構成することがあり得るからだ。よって正しくは、他の BPS 多重項と結合できない BPS 状態だけが、理論のあらゆる連続パラメータを動かしても変化しない状態、すなわち protected 状態と呼ばれる状態なのである。

protected 状態のみが寄与する指数を構成することができる。

以下では、このような protected 状態のみから寄与を受ける指数を構成することにする。protected 表現の情報のうち、群理論 (group theory) を用いて手に入れることができるものは、後で定義する指数によって全て手に入れることができる。

A.1.1 4 次元共形代数

Killing ベクトルの組

$$M_{\mu\nu} = -i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu), \quad P_\mu = -i\partial_\mu, \quad K_\mu = i(2x_\mu x \cdot \partial - x^2 \partial_\mu), \quad H = x \cdot \partial \quad (\text{A.1.1})$$

は \mathbb{R}^4 の無限小共形微分写像 (diffeomorphism) の基底を構成する。これらの Killing ベクトルが生成する代数は

$$\begin{aligned}
[H, P_\mu] &= P_\mu \\
[H, K_\mu] &= -K_\mu \\
[K_\mu, P_\nu] &= 2(\delta_{\mu\nu}H - iM_{\mu\nu}) \\
[M_{\mu\nu}, P_\rho] &= i(\delta_{\mu\rho}P_\nu - \delta_{\nu\rho}P_\mu) \\
[M_{\mu\nu}, K_\rho] &= i(\delta_{\mu\rho}K_\nu - \delta_{\nu\rho}K_\mu) \\
[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] &= i(\delta_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} + \delta_{\nu\sigma}M_{\mu\rho} - \delta_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} - \delta_{\nu\rho}M_{\mu\sigma})
\end{aligned} \tag{A.1.2}$$

である。

Euclidean の 4 次元場の量子論を考えよう。代数 (A.1.2) の共形 Killing 対称性が、理論の対称性を生み出す場の適切な作用と結び付けられることがある。このような理論は共形場理論 (conformal field theory) と呼ばれる。共形場理論の Euclidean な経路積分は、radial 量子化による Hilbert 空間による解釈で与えられる。

波動関数 (ケット関数) は原点を取り囲む 3 次元単位球の中において、適切な演算子を入れるとき、経路積分と同一視される。双対な波動関数 (ブラ関数) はケット関数に反転 $x^\mu \rightarrow x^\mu/(x^\nu)^2$ に対応する共形対称性を作用させることで得られる。結果として、ブラ関数は R^4 から 3 次元単位球を取り除いた領域において、適切な演算子を挿入することによる経路積分によって生成されると考えることもできる。ブラ関数とケット関数のスカラー積は、単位球の内側と外側に演算子が挿入された、空間全体の経路積分となるのである。

また、この反転の下で、Killing ベクトルは

$$M_{\mu\nu} \rightarrow M_{\mu\nu}, \quad H \rightarrow -H, \quad P_\mu \rightarrow K_\mu \tag{A.1.3}$$

と変換する。結果として、演算子 $M_{\mu\nu}, P_\mu, K_\nu$ は共形場理論の Hilbert 空間上において、Hermitian 対称性

$$M_{\mu\nu} = M_{\mu\nu}^\dagger, \quad P_\mu = K_\mu^\dagger \tag{A.1.4}$$

を持つものとして、表現される。

R^4 上の共形場理論における radial 量子化は、 R (時間) $\times S^3$ 上の場の理論を調べるのと同様である。演算子 $M_{\mu\nu}$ は S^3 の $SO(4)$ 回転対称性を生み出し、 H は Hamiltonian である。これらと比較すると共役演算子 P_μ, K_μ はあまり馴染みがない。しかし、代数 (A.1.2) を見れば、これらは昇降演算子の役割を果たすことが分かる。実際、エネルギーを 1 単位ずつ上昇させる演算子が P_μ であり、下降させる演算子が K_μ である。

また、 $R \times S^3$ 上の共形場理論の Hilbert 空間は、共形群の既約ユニタリ表現の和に分解することができる。

A.1.2 4 次元共形代数のユニタリ表現

共形代数の表現について

共形群 $SO(4,2)$ の既約表現は全て、コンパクトな部分群 $SO(4) \times SO(2)$ の表現 $R_{compact}^i$ の直和

$$R_{SO(4,2)} = \bigoplus_i R_{compact}^i \tag{A.1.5}$$

で表すことができる。

同じ $SO(4) \times SO(2)$ 表現に属する状態は全て同じエネルギーを持っている。(物理的に意味のある) 場の量子論のエネルギースペクトルには下限があるので、ここでは最低エネルギー状態に対応する表現に注目してみよう。このような状態を最低ウェイト状態と呼び、それに対応する表現を $R_{compact}^\lambda$ と書くことにしよう。

交換関係 (A.1.2) より、 K_μ 演算子は負のエネルギーを持っていることが分かるので、最低ウェイト状態に属する状態に作用するときは必ずその状態を消滅させなければならないことになる。すなわち、 K_μ は下降演算子としての役割を果たす。

また同様に P_μ 演算子は正のエネルギーを持っていることが分かるので、これらの最低ウェイト状態に P_μ 演算子を任意回数作用させることで、表現に属する他の状態を生成することができる。すなわち、 P_μ は上昇演算子としての役割を果たす。

最低ウェイト状態をラベル付けするために、最低ウェイト状態のチャージを用いて $|\lambda\rangle \equiv |E, j_1, j_2\rangle$ と表すことにしよう。ここで $SO(4) = SU(2)_L \times SU(2)_R$ であることに注意しよう。 j_1 と j_2 はそれぞれ $SU(2)_L$ と $SU(2)_R$ の通常の表現のラベルである。

表現がユニタリであることを要請すると制限が課せられる。

表現がユニタリであるためには、全ての状態が正のノルムを持つ必要がある。よって、 $|\lambda\rangle = |E, j_1, j_2\rangle$ が共形群のユニタリ表現となるためには、量子数 (E, j_1, j_2) の取り得る値に制限が付くことになる。

レベル1の状態から得られるユニタリ条件

最低エネルギー状態に P_μ を作用させると、Clebsch-Gordan 分解をすることにより $(E+1, j_1 \pm 1/2, j_2 \pm 1/2)$ という量子数を持つ状態が得られる。これらの状態のノルムは交換関係 (A.1.2) を使って計算できる。その結果、最低のノルムを持つ状態は量子数 $(E+1, j_1 - 1/2, j_2 - 1/2)$ を持ち、そのノルムは

$$\frac{\|\cdot\|^2}{2} = E - (j_1 + 1 - \delta_{j_1,0}) - (j_2 + 1 - \delta_{j_2,0}) \quad (\text{A.1.6})$$

であることが分かる。

レベル2の状態から得られるユニタリ条件

$j_1 = j_2 = 0$ という場合には、さらに複雑なことが起こるので注意しなくてはならない。レベル2の状態 $P^2|\psi\rangle$ のノルムが $E(E-1)$ に比例するので、 $0 < E < 1$ のとき負になってしまうのである。

交換関係 (A.1.2) より、 $E = 0$ を満たす表現にいかなる運動量演算子 P_μ を作用させても消滅してしまうので、これは真空状態を表していることが分かる。また、 $E = 1$ の表現は short 表現であるが、方程式 $P^2|\psi\rangle = 0$ を満たすことより、共形場理論における自由場であることが分かる [104]。

以上より

$$\begin{cases} E \geq j_1 + j_2 + 2; & j_1 \neq 0, j_2 \neq 0 \\ E \geq j_1 + j_2 + 1; & j_1 j_2 = 0 \\ E \geq 1, E = 0; & j_1 = j_2 = 0 \end{cases} \quad (\text{A.1.7})$$

のいずれかが成り立っていれば、ユニタリ条件は満たされることが分かる [104]。

零ノルム状態が存在するときは、そのユニタリ表現を 0 とすればよい。

ユニタリ表現は、束縛条件 (A.1.7) において厳密に等号が成り立っている (strictly saturated) 場合にも存在することに注意しておこう。実際、ユニタリ表現においては零ノルム状態とその descendant を全て 0 とおけばよい。

この手続きに矛盾が無いことは、次のように確認することができる。ユニタリ束縛条件において等号が成り立っているとき、零ノルム状態は表現に属する全ての状態と直交しなければならない。ここで、零ノルム状態とその descendant を全て 0 とおいてしまえば、結果として、表現全体を零ノルム状態で割ったものにおいて、内積は well-defined となり、かつ正定値となるのである。

A.1.3 4次元共形代数における指数

エネルギー無限小変化の下で不変になるような指数を定義する。

共形場理論における 1 つのパラメータとして、このパラメータを無限小変化させると一般に理論における全ての long 表現のエネルギーを無限小変化させるようなものを考えよう。short 表現については、それが long 表現になったときに限り、エネルギーは無限小変化することができる。

共形場理論のスペクトルにおいて、相転移などの離散的なジャンプをすることなく short 表現が long 表現になるためには、他の short 表現と組になってユニタリ条件の閾値よりも高いエネルギーを持った long 表現の状態が構成される必要がある。従って、このようにして他の short 表現と組になることができる short 表現は、いずれも protected 状態の表現ではない。

また、このような short 表現の数は理論のパラメータの無限小変化の下で離散的に変化することも理解できる。実際、パラメータがある特定の値を取るとき、複数個の short 表現が無くなって long 表現が作られたり、複数個の short 表現が作られて long 表現が無くなったりするのである。

このようなパラメータの無限小変化の下で不変になるような指数があると便利である。そのような指数 I を

$$I = \sum_i \alpha[i] n[i] \quad (\text{A.1.8})$$

として定義しよう。ここで、 i は理論に含まれる様々な short 表現を表している。 $n[i]$ は i 番目に分類された short 表現の数を表す。 $\alpha[i]$ については、long 表現を作るような組を構成する short 表現に対して I が 0 となるように選ぶ。

定義より明らかなように、long 表現を作るような組を構成する short 表現については、組を作って long 表現になっても、short 表現のままでも、指数 I には寄与せず 0 と評価される。従って、理論のパラメータの連続的な変化の下で指数 I が変化することは無いことが確認できる。

共形代数において非自明な指数は存在しない。

(A.1.8) 式において指数を定義したが、共形代数においては自明になってしまうことを確認しよう。それぞれの表現を

- A_{E,j_1,j_2} : 一般の long 表現
- C_{j_1,j_2} : $j_1, j_2 \neq 0$ を満たす short 表現
- $B_{j_1}^L$: $j_1 \neq 0, j_2 = 0$ を満たす short 表現
- $B_{j_2}^R$: $j_1 = 0, j_2 \neq 0$ を満たす short 表現
- B : $E = 1, j_1 = j_2 = 0$ を満たす short 表現

と表すことにして、さらに超対称指標 (supercharacter)

$$\chi[R] = \text{Tr}_R [(-1)^F G] \quad (\text{A.1.9})$$

を定義しよう。ここで R は任意の表現、 G は任意の群の要素、 F はフェルミオン数である。この指標は共形群の表現論においては何の役割も果たさないが、すぐ後で見ると超共形群においては重要な役割を果たす。

long 表現 A_{E,j_1,j_2} のエネルギーが減少してユニタリ条件 (A.1.7) の境界値に到達するとき、どのように他の表現の和 (但し、少なくともそのうちの 1 つは short 表現) に分解されるかを調べると、その結果は

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \chi[A_{j_1+j_2+2+\epsilon,j_1,j_2}] &= \chi[C_{j_1,j_2}] + \chi[A_{j_1+j_2+3,j_1-\frac{1}{2},j_2-\frac{1}{2}}] \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \chi[A_{j_1+1+\epsilon,j_1,0}] &= \chi[B_{j_1}^L] + \chi[C_{j_1-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}] \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \chi[A_{j_2+1+\epsilon,0,j_2}] &= \chi[B_{j_2}^R] + \chi[C_{\frac{1}{2},j_2-\frac{1}{2}}] \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \chi[A_{1+\epsilon,0,0}] &= \chi[B] + \chi[A_{3,0,0}] \end{aligned} \quad (\text{A.1.10})$$

と表すことができる。

よって、 $I = \sum_i \alpha[i]n[i]$ が指数であるためには、定義より

$$\alpha[C_{j_1, j_2}] = 0, \quad \alpha[B_{j_1}^L] + \alpha[C_{j_1 - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}}] = 0, \quad \alpha[B_{j_2}^R] + \alpha[C_{\frac{1}{2}, j_2 - \frac{1}{2}}] = 0, \quad \alpha[B] = 0 \quad (\text{A.1.11})$$

が成り立つ必要があることが分かる。これは結局、 $\alpha[i]$ が全ての表現について0となることを意味している。以上より、共形代数においては非自明な指数は存在しないことが確認できた。

A.1.4 4次元超共形代数

前節までは4次元共形代数について調べたが、ここからは4次元超共形代数について調べることにしよう。超共形代数は、共形代数と超対称代数を単に結合したよりも大きな対称性を持つ代数であることに注意しておこう。

$\mathcal{N} = m$ 超共形代数の bosonic 部分代数は、共形代数と R 対称性 $U(m)$ を掛け合わせたものになっている。但し $m = 4$ の場合は例外で、 R 対称性が $SU(4)$ である。また、この代数の fermionic 生成子は $4m$ 個の超対称生成子 $Q^{\alpha i}$, $\bar{Q}_i^{\dot{\alpha}}$ と、超共形生成子 $S_{\alpha i}$, $\bar{S}_{\dot{\alpha}}^j$ である。

ここで、記法についてまとめておこう。

- α, β, \dots : $SU(2)$ 生成子のスピノール表現の脚
- 上付きの i, j, \dots : $U(m)$ 基本表現の脚
- 下付きの i, j, \dots : $U(m)$ 反基本表現の脚

この記法を用いたとき、生成子の交換関係は

$$\begin{aligned} [(J_1)_\beta^\alpha, (J_1)_\delta^\gamma] &= \delta_\beta^\gamma (J_1)_\delta^\alpha - \delta_\delta^\alpha (J_1)_\beta^\gamma, & [(J_2)_\beta^\alpha, (J_2)_\delta^\gamma] &= \delta_\beta^\gamma (J_2)_\delta^\alpha - \delta_\delta^\alpha (J_2)_\beta^\gamma, \\ [(J_1)_\beta^\alpha, P^{\gamma\delta}] &= \delta_\beta^\gamma P^{\alpha\delta} - \frac{1}{2} \delta_\beta^\alpha P^{\gamma\delta}, & [(J_1)_\beta^\alpha, K_{\gamma\delta}] &= \delta_\gamma^\alpha K_{\beta\delta} - \frac{1}{2} \delta_\beta^\alpha K_{\gamma\delta}, \\ [(J_2)_\beta^\alpha, P^{\dot{\delta}\gamma}] &= \delta_\beta^\gamma P^{\alpha\dot{\delta}} - \frac{1}{2} \delta_\beta^\alpha P^{\dot{\delta}\gamma}, & [(J_2)_\beta^\alpha, K_{\dot{\delta}\gamma}] &= \delta_\dot{\delta}^\alpha K_{\beta\gamma} - \frac{1}{2} \delta_\beta^\alpha K_{\dot{\delta}\gamma}, \\ [H, P^{\alpha\dot{\beta}}] &= P^{\alpha\dot{\beta}}, & [H, K^{\alpha\dot{\beta}}] &= -K^{\alpha\dot{\beta}}, \\ [K_{\alpha\dot{\beta}}, P^{\gamma\delta}] &= \delta_\beta^\delta (J_1)_\alpha^\gamma + \delta_\alpha^\gamma (J_2)_\dot{\beta}^\delta + \delta_\beta^\delta \delta_\alpha^\gamma H, & [(J_2)_\beta^\alpha, \bar{Q}_n^\gamma] &= \delta_\beta^\gamma \bar{Q}_n^\alpha - \frac{1}{2} \delta_\beta^\alpha \bar{Q}_n^\gamma, \\ [(J_1)_\beta^\alpha, Q^{\gamma n}] &= \delta_\beta^\gamma Q^{\alpha n} - \frac{1}{2} \delta_\beta^\alpha Q^{\gamma n}, & [P_{\alpha\dot{\beta}}, \bar{Q}_n^\gamma] &= \delta_\alpha^\gamma S_{n\dot{\beta}}, \\ [K_{\alpha\dot{\beta}}, Q^{\gamma n}] &= \delta_\alpha^\gamma \bar{S}_{\dot{\beta}}^n, & [H, \bar{Q}_n^\alpha] &= \frac{1}{2} \bar{Q}_n^\alpha, \\ [H, Q^{\gamma n}] &= \frac{1}{2} Q^{\gamma n}, & [H, \bar{S}_\alpha^n] &= -\frac{1}{2} \bar{S}_\alpha^n, \\ [H, S_{\alpha n}] &= -\frac{1}{2} S_{\alpha n}, & [r, \bar{Q}_n^\alpha] &= -\bar{Q}_n^\alpha, \\ [r, Q^{\gamma n}] &= Q^{\gamma n}, & [r, \bar{S}_\alpha^i] &= S_\alpha^i, \\ [r, S_{\alpha i}] &= -S_{\alpha i}, & & \\ \{S_{\alpha i}, Q^{\beta j}\} &= \delta_i^j (J_1)_\alpha^\beta + \delta_\alpha^\beta R_i^j + \delta_i^j \delta_\alpha^\beta \left(\frac{H}{2} + r \frac{4-m}{4m} \right), & & \\ \{Q^{\alpha m}, \bar{Q}_m^{\dot{\alpha}}\} &= P^{\alpha\dot{\alpha}} \delta_m^n, & \{S_{\alpha m}, \bar{S}_\alpha^m\} &= K_{\alpha\dot{\alpha}} \delta_m^n, \\ [R_i^j, Q^{\alpha p}] &= \delta_i^p Q^{\alpha j} - \frac{1}{m} \delta_i^j Q^{\alpha p}, & [R_n^m, R_q^p] &= \delta_q^m R_n^p - \delta_n^p R_q^m \quad (\text{A.1.12}) \end{aligned}$$

と表せる。ここで $(J_1)_\alpha^\beta$ は $SU(2)$ 生成子をスピノールの記法で表したものの、 R_i^j は $SU(m)$ 生成子、 r は $U(1)$ 生成子である。

Cartan 生成子は

$$\mathcal{H} = H, \quad \mathcal{J}_1 = (J_1)_2^2 = -(J_1)_1^1, \quad \mathcal{J}_2 = (J_2)_2^2 = -(J_2)_1^1, \quad \mathcal{R}_n = R_n^n - R_{n+1}^{n+1} \quad (\text{A.1.13})$$

である。これらの生成子の固有値はそれぞれ、エネルギー E 、角運動量 j_1, j_2 、R-charge R_i である。

既に述べたように、radial 量子化の下ではこれらの生成子は Hermite 性を持つ。よって、特に

$$(Q^{\alpha i})^\dagger = S_{\alpha i}, \quad (\bar{Q}_i^{\dot{\alpha}})^\dagger = \bar{S}_{\dot{\alpha}}^i \quad (\text{A.1.14})$$

が成り立つ。

A.1.5 4次元超共形代数のユニタリ表現

超共形代数の表現について

超共形代数のユニタリ表現の理論は共形代数の場合と似ている。

既約表現は、最低ウェイト状態のエネルギー E と $SU(2)_L \times SU(2)_R = SO(4)$ 表現と $U(m)$ 表現によってラベル付けされる。 $U(m)$ 表現については、 $U(1)$ チャージ r と整数 R_k ($k = 1, \dots, m-1$) でラベル付けされる。 r については $Q^{\alpha i}$ がチャージ 1 を、 $\bar{Q}_i^{\dot{\alpha}}$ がチャージ -1 を持つように規格化するものとする。また R_k は表現に対応する Young 図の高さ k の列 (column) の個数を表しているものとする。

交換関係 (A.1.12) より、 S は下降演算子、 Q は上昇演算子としての役割を果たすことが分かる。従って、最低ウェイト状態は S を作用させると消滅するが、一般には Q を作用させても消滅しない。

同じく交換関係 (A.1.12) より、 $Q^{\alpha i}$ は $E = 1/2$ を満たし、 $SU(2) \times SU(2) \times U(m)$ 表現において $j_1 = 1/2$, $j_2 = 0$, $r = 1$, $R_1 = 1$, $R_{i>1} = 0$ という量子数を持つことが分かる。

表現がユニタリであることを要請すると制限が課せられる。

以下では、この超共形代数の最低ウェイト状態の組を $|\psi_a\rangle$ と表し、その状態が持つ量子数を (E, j_1, j_2, r, R_i) と表すことにしよう。

レベル 1 から得られるユニタリ条件

状態 $Q^{\alpha i}|\psi_a\rangle$ を Clebsh-Gordan 分解し、そうして得られた状態のノルムをそれぞれ計算しよう。そうすると、その中で最低のノルムを持つ状態は、量子数 $(E + 1/2, j_1 - 1/2, j_2, r + 1, R_1 + 1, R_{j>1})$ を持つことが分かる。この状態のノルムを計算すると

$$2\|\chi_1\|^2 = E + 2\delta_{j_1,0} - E_1(j_1, r, R_i) \\ E_1 \equiv 2 + 2j_1 + 2 \frac{\sum_{p=1}^{m-1} (m-p)R_p}{m} + \frac{r(4-m)}{2m} \quad (\text{A.1.15})$$

である [104]。

同じようにして、状態 $\bar{Q}_{\dot{\alpha}i}|\psi_a\rangle$ の中で最低ノルムを持つ状態を求めることができる。その状態は量子数 $(E + 1/2, j_1, j_2 - 1/2, r - 1, R_{k<m-1}, R_{m-1} + 1)$ を持ち、ノルムは

$$2\|\chi_2\|^2 = E + 2\delta_{j_2,0} - E_2(j_1, j_2, r, R_i) \\ E_2 \equiv 2 + 2j_2 + \frac{2 \sum_{p=1}^{m-1} pR_p}{m} - \frac{r(4-m)}{2m} \quad (\text{A.1.16})$$

であることが分かる [104]。

ユニタリ性を持つための条件は $\|\chi_1\|^2 \geq 0$ と $\|\chi_2\|^2 \geq 0$ である。共形群の場合と同様に、 $\|\chi_1\|^2 = 0$ または $\|\chi_2\|^2 = 0$ である表現も、 $\|\chi_1\|^2 = \|\chi_2\|^2 = 0$ である表現も許容される。この場合、零ノルム状態とその descendant は全て 0 とおけばよい。これは short 表現になる。

レベル2 から得られるユニタリ条件

$j_1 = 0$ の場合は、レベル2 においてノルムの正定値条件を課すと、さらに情報が得られる。

$|\psi_a\rangle$ を最低ウェイト状態として、 $Q^{\alpha_i} Q^{\beta_j} |\psi_a\rangle$ という状態に注目しよう。同じく Clebsh-Gordan 展開した中で最低のノルムを持つのは、量子数 $(E+1, 0, j_2, r+2, R_1+2, R_{j>1})$ を持つ状態である。これらの状態のノルムは $(E-E_1)(E-E_1+2)$ に比例するので、ユニタリ条件より $E_1-2 < E < E_1$ の範囲では表現が許容されない。

$E = E_1 - 2$ または $E = E_1$ における表現は、共に許容される short 表現である。 $E = E_1 - 2$ の表現は(量子数が全て同じである) long 表現と比較するとエネルギーが2単位ずれているという特徴を持っている点で、他の short 表現とは異なる。

以上のことは $j_2 = 0$ の場合についても成り立つ。その場合は Q^{α_i} は $\bar{Q}_i^{\dot{\alpha}}$, E_1 は E_2 と読み替えればよい。

以上の結果をまとめよう。

$$\mathbf{x}^L = \begin{cases} \mathbf{a} & \text{if } E > E_1 \\ \mathbf{b} & \text{if } E = E_1 - 2, j_1 = 0, \\ \mathbf{c} & \text{if } E = E_1, j_1 \geq 0 \end{cases}, \quad \mathbf{x}^R = \begin{cases} \mathbf{a} & \text{if } E > E_2 \\ \mathbf{b} & \text{if } E = E_2 - 2, j_2 = 0 \\ \mathbf{c} & \text{if } E = E_2, j_2 \geq 0 \end{cases} \quad (\text{A.1.17})$$

と定義すると、許容されるユニタリ表現は $\mathbf{x}^L \mathbf{x}^R_{E, j_1, j_2, r, R_i}$ と表すことができる。ここで、 $\mathbf{a}\mathbf{a}$ が long 表現であり、それ以外は short 表現である。short 表現のエネルギーは他のチャージから決まってしまうので、以下では省略することがある。

A.1.6 short 表現における null ベクトル

short 表現の null ベクトルの性質を調べてみよう。以下で、「short 表現が null 状態を持つ」という表現は、long 表現のエネルギーが減少してユニタリ条件の境界値に到達したとき、long 表現が正ノルムの short 表現と null 表現に分離するという状況を指し示している。

$\mathbf{c}\mathbf{x}$ 型で $j_1 > 0$ を満たす表現について考えよう ($\mathbf{x} = \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$)。このような表現は $\|\chi_1\|^2 = 0$ を満たす。null 状態の descendant は超共形代数の別の表現を構成して、この表現もまた null 状態を持つ。この状態は

$$\begin{aligned} (\|\chi'_1\|^2, \|\chi'_2\|^2) &= \left(\frac{1}{2} + 1 - \frac{2(m-1)}{m} - \frac{4-m}{2m}, \|\chi_2\|^2 - \frac{1}{2} + \frac{2}{m} + \frac{4-m}{2m} \right) \\ &= (0, \|\chi_2\|^2) \end{aligned} \quad (\text{A.1.18})$$

で特徴付けることができる。従って、 $\mathbf{c}\mathbf{x}$ 型表現の Q null 状態は、一般に $\mathbf{c}\mathbf{x}$ 型であることが分かる。但し $j_1 = 0$ の場合は例外的で、このとき null 状態は $\mathbf{b}\mathbf{x}$ 型になる。同様のことが \bar{Q} null 状態についても言える。

ここで、超対称指標 (supercharacter)

$$\chi[R] = \text{Tr}_R \left[(-1)^{2(J_1+J_2)} G \right] \quad (\text{A.1.19})$$

を定義すると、以上のことは全て分解公式 (decomposition formula) としてまとめることができる。ここで、 G は超共形群の任意の要素である。このとき、分解公式は

- $E_1 > E_2$ の場合

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \chi[\mathbf{a}\mathbf{a}_{E_1+\epsilon, j_1, j_2, r, R_i}] = \chi[\bar{\mathbf{c}}\mathbf{a}_{j_1, j_2, r, R_i}] + \chi[\bar{\mathbf{c}}\mathbf{a}_{j_1-\frac{1}{2}, j_2, r+1, R_1+1, R_j}] \quad (\text{A.1.20})$$

- $E_2 > E_1$ の場合

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \chi[\mathbf{a}\mathbf{a}_{E_2+\epsilon, j_1, j_2, r, R_i}] = \chi[\mathbf{a}\bar{\mathbf{c}}_{j_1, j_2, r, R_i}] + \chi[\mathbf{a}\bar{\mathbf{c}}_{j_1, j_2-\frac{1}{2}, r-1, R_k, R_{m-1}+1}] \quad (\text{A.1.21})$$

- $E_1 = E_2$ の場合

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \chi[\mathbf{aa}_{E_2+\epsilon, j_1, j_2, r, R_i}] = \chi[\tilde{\mathbf{cc}}_{j_1, j_2, r, R_i}] + \chi[\tilde{\mathbf{cc}}_{j_1 - \frac{1}{2}, j_2, r+1, R_{1+1}, R_j}] \\ + \chi[\tilde{\mathbf{cc}}_{j_1, j_2 - \frac{1}{2}, r-1, R_k, R_{m-1+1}}] + \chi[\tilde{\mathbf{cc}}_{j_1 - \frac{1}{2}, j_2 - \frac{1}{2}, r, R_{1+1}, R_l, R_{m-1+1}}] \quad (\text{A.1.22})$$

となる。この公式は、long 表現のエネルギーがユニタリ条件の境界値に到達したときに、どのように long 表現が short 表現の組に分解されるかを表している。ここで、記法を

$$\tilde{\mathbf{ca}}_{j_1, j_2, r, R_i} = \begin{cases} \mathbf{ca}_{j_1, j_2, r, R_i} & j_1 \geq 0 \text{ の場合} \\ \mathbf{ba}_{0, j_2, r+1, R_{1+1}, R_j} & j_1 = -\frac{1}{2} \text{ の場合} \end{cases} \\ \mathbf{a}\tilde{\mathbf{c}}_{j_1, j_2, r, R_i} = \begin{cases} \mathbf{ca}_{j_1, j_2, r, R_i} & j_1 \geq 0 \text{ の場合} \\ \mathbf{ba}_{0, j_2, r+1, R_{1+1}, R_j} & j_1 = -\frac{1}{2} \text{ の場合} \end{cases} \\ \tilde{\mathbf{cc}}_{j_1, j_2, r, R_i} = \begin{cases} \mathbf{cc}_{j_1, j_2, r, R_i} & j_1 \geq 0, j_2 \geq 0 \text{ の場合} \\ \mathbf{cb}_{j_1, 0, r-1, R_k, R_{m-1+1}} & j_1 \geq 0, j_2 = -\frac{1}{2} \text{ の場合} \\ \mathbf{bc}_{0, j_2, r+1, R_{1+1}, R_j+1} & j_1 = -\frac{1}{2}, j_2 \geq 0 \text{ の場合} \\ \mathbf{bb}_{0, 0, r, R_{1+1}, R_l, R_{m-1+1}} & j_1 = j_2 = -\frac{1}{2} \text{ の場合} \end{cases} \quad (\text{A.1.23})$$

と定義した。また、添字はそれぞれ

$$i = 1, \dots, m-1, \quad j = 2, \dots, m-1, \quad k = 1, \dots, m-2, \quad l = 2, \dots, m-2 \quad (\text{A.1.24})$$

を表すものとして用いている。

A.1.7 4次元超共形代数における指数

以上の議論、特に分解公式より、4次元超共形場理論の指数の組は

- \mathbf{bx} 型で $R_1 = 0, 1$ を満たす表現の個数と \mathbf{xb} 型で $R_{m-1} = 0, 1$ を満たす表現の個数を足し合わせたもの
- 指数

$$I_{j_2, \hat{r}, M, R_j}^L = \sum_{p=-1}^M (-1)^{p+1} n \left[\tilde{\mathbf{c}}\mathbf{x}_{\frac{p}{2}, j_2, \hat{r}-p, M-p, R_j > 1} \right] \quad (\text{A.1.25})$$

但し、 \hat{r} は全ての値、 j_2, M, R_j は非負の整数の値を取り得る。 $m = 1$ の場合は、添字 M か R_j は持たず、和は $p = -1$ から ∞ までを取る。 $m = 4$ の場合は、添字 r と \hat{r} を無視する。

- 指数

$$I_{j_1, r'', R_k, N}^R = \sum_{p=-1}^M (-1)^{p+1} n \left[\mathbf{x}\tilde{\mathbf{c}}_{j_1, \frac{p}{2}, r''+p, R_k < m-1, N-p} \right] \quad (\text{A.1.26})$$

但し、 r'' は全ての値、 j_1, R_k, N は非負の整数の値を取り得る。 $m = 1, 4$ の場合については、上と同じである。

によって特徴付けられるベクトル空間をあることが分かる。

これらの指数 (A.1.25), (A.1.26) に寄与する表現の量子数が $E_1 = E_2$ という関係を持っている場合には、指数 (A.1.25), (A.1.26) に更なる条件

$$\sum_{p=-1}^N (-1)^p I_{\frac{p}{2}, r'''+p, M, R_{1 < l < m-1}, N-p}^L = \sum_{p=-1}^M (-1)^p I_{\frac{p}{2}, r'''+p, M-p, R_{1 < l < m-1}, N}^R; \quad E_1 = E_2 \quad (\text{A.1.27})$$

が課せられる。ここで $r''' = -\infty, \dots, \infty$ である。 M, N, R_l は非負の整数である [4]。

A.2 超共形代数の指数に関するトレース公式

超対称電荷 $Q^{\alpha i}$ は $SU(m)$ の基本表現、つまり $(1, 0, \dots, 0)$ 表現として変換する。ここで $Q \equiv Q^{-\frac{1}{2}, 1}$ と定義しよう。これは $SU(2) \times SU(2)$ の量子数 $(j_1^3, j_2^3) = (-\frac{1}{2}, 0)$, $r = 1$, $SU(m)$ 量子数 $(1, 0, \dots, 0)$ を満たす超対称電荷である。このとき、超対称性代数 (A.1.12) より

$$2\{Q^\dagger, Q\} = H - 2J_1 - 2 \sum_{k=1}^{m-1} \frac{m-k}{m} R_k - \frac{(4-m)r}{2m} = E - (E_1 - 2) \equiv U \quad (\text{A.2.1})$$

が成り立つ ($S = Q^\dagger$)。ユニタリ条件 (A.1.17) より、超共形群のユニタリ表現で表される全ての状態は $U \geq 0$ を満たすことが分かる。また、Jacobi 恒等式を用いれば $[Q, U] = [Q^\dagger, U] = 0$ が示せることに注意しておこう。

$\Delta > 0$ の場合について考察する。

ここで、超共形群のあるユニタリ表現 R を考えよう。この表現は必ずしも既約でなくてよいとする。また、 $U = U_0 > 0$ を満たす線形ベクトル空間を R_{U_0} と表そう。(A.2.1) 式より、状態 $|\psi\rangle$ が R_{U_0} に属していれば、

$$|\psi\rangle = \frac{2\{Q^\dagger, Q\}}{U_0} |\psi\rangle = Q \frac{2Q^\dagger}{U_0} |\psi\rangle + Q^\dagger \frac{2Q}{U_0} |\psi\rangle \quad (\text{A.2.2})$$

となる。 Q を作用させると消滅する状態で構成された R_{U_0} の部分空間を $R_{U_0}^Q$ と表し、 Q^\dagger を作用させると消滅する状態で構成された R_{U_0} の部分空間を $R_{U_0}^{Q^\dagger}$ と表そう。(A.2.2) 式と表現のユニタリ性より、直ちに $R_{U_0} = R_{U_0}^Q + R_{U_0}^{Q^\dagger}$ が成り立つことが分かる。また、

$$Q^\dagger |\psi\rangle = |\psi'\rangle \left(= Q^\dagger Q \frac{Q^\dagger}{U_0} |\psi\rangle \right) \quad (\text{A.2.3})$$

は $R_{U_0}^Q$ から $R_{U_0}^{Q^\dagger}$ への 1 対 1 対応の写像であることが分かる。この逆写像は $2Q/U_0$ によって与えられることも理解できる。

$U = 0$ を満たす状態しか効かない Witten 指数を定義する。

ここで、次のような形の Witten 指数

$$\mathcal{I}^{WL} = \text{Tr}_R [(-1)^F e^{-\beta U + M}] = \text{Tr}_R [(-1)^F e^{-\beta U} e^M] \quad (\text{A.2.4})$$

を考えよう。 M は Q, Q^\dagger と交換する超共形代数の部分代数における任意の要素である。最後の等号において、交換するという性質を用いた。これが指数 (2.2.1) と直接対応していることを確認しておこう。また、この部分代数については、A.2.1 節で詳しく議論することにしよう。

R_{U_0} に属する状態はこの指数には寄与しない。なぜなら、 $R_{U_0}^Q$ の寄与と $R_{U_0}^{Q^\dagger}$ の寄与が互いに打ち消し合ってしまうからである。従って、 \mathcal{I}^{WL} は $U = 0$ を満たす状態からしか寄与を受けないことが分かる。つまり Q が作用しても Q^\dagger が作用しても消滅してしまう状態のみが、この指数 (A.2.4) に寄与するのである。従って、指数 (A.2.4) は一見 β に依存しているようであるが、実はそうではないのである。

long 表現には $U = 0$ を満たす状態は含まれないので、いずれも \mathcal{I}^{WL} には寄与しない。連続性を考慮すれば、long 表現がユニタリ条件の閾値に到達して分解して出来た short 表現についても、 \mathcal{I}^{WL} は 0 という評価をすることが分かる。その結果、 \mathcal{I}^{WL} は指数であることが分かる。つまり、超共形代数における連続的な変化において不変になっているのである。また、指数 I^L, I^R に線形に依存している。 \mathcal{I}^{WL} と I^L の関係については、すぐ後で説明する。

以下では、 \mathcal{I}^{WL} が I^L に含まれる情報を全て持っていることを示す。つまり、dynamical な仮定を入れずに得られる protected 状態に関する全ての情報を持っていることを明らかにする。また、同様に定義される \mathcal{I}^{WR} も I^R に含まれる情報を全て持っていることが示される。

A.2.1 交換する部分代数

超共形代数の部分代数の中で、 Q, Q^\dagger, U によって構成される $SU(1|1)$ 代数と交換するものを考えよう。

4次元 $\mathcal{N} = m$ 超共形代数は $SU(2, 2|m)$ の超行列代数 (super-matrix algebra) となる^{*1}。超対称生成子は bosonic 部分群 $SU(2, 2)$ と $U(m)$ の下で bifundamental として変換する。

ここで注目したい部分群は $SU(2, 1|m-1)$ である。 $SU(2, 1|m-1)$ 群の生成子は $SU(2, 2|m)$ 群において簡単な reduction をすることで得られる。 $SU(2, 1|m-1)$ の bosonic 部分群は $SU(2, 1) \times U(m-1)$ である。ここで $U(m-1)$ の因子は、元の $U(m)$ の行列において、11 成分を 1 とおき、その他の第 1 行と第 1 列の要素を全て 0 とおくことで得られる。この部分代数の Cartan 要素 (E', j'_2, r', R'_k) は、元の代数から

$$E' = E + j_1, \quad j'_2 = j_2, \quad r' = \frac{(m-1)r}{m} - \sum_{p=1}^{m-1} \frac{m-p}{m} R_p, \quad R'_k = R_{k+1} \quad (\text{A.2.5})$$

として得られる。 R'_k は $U(m-1)$ 群の Cartan 要素で、 r' は $U(m-1)$ 群における $U(1)$ チャージである。(A.2.5) 式は (E, j_1, j_2, r, R_i) から (E', j'_2, r', R'_k) への多対一対応の写像を定義していると見做すことができる。

ここでは、 $SU(2, 2|m)$ 代数全体の表現において $U = 0$ を満たす状態に制限することで得られる $SU(2, 1|m-1)$ 部分代数の表現に注目している。 $SU(2, 1|m-1)$ 部分代数の null ベクトルがあるなら、それは $SU(2, 2|m)$ 代数の null ベクトルに由来している。また、 $SU(2, 1|m-1)$ 部分代数の表現が short であるのは、 $SU(2, 2|m)$ 代数の表現が cb か cc である場合、または $R_1 = 0$ を満たす bx である場合に限ることが示せる [4]。

A.2.2 指数 I^{WL} と指数 I^L の関係

ここでは、指数 I^{WL} が $SU(2, 1|m-1)$ 部分代数の超対称指標の和として表現できることを示す。

超共形代数 $SU(2, 2|m)$ の既約な short 表現 R において、 I^{WL} は $SU(2, 1|m-1)$ 部分代数の 1 つの既約表現 R' の超対称指標を評価することが確認できる。すなわち

$$\begin{aligned} \mathcal{I}^{WL}[\mathbf{bx}_{0, j_2, r, R_i}] &= \chi_{sub}[\vec{b}] \\ \mathcal{I}^{WL}[\mathbf{cx}_{j_1, j_2, r, R_i}] &= (-1)^{2j_1+1} \chi_{sub}[\vec{c}] \end{aligned} \quad (\text{A.2.6})$$

である。 χ_{sub} は超対称指標

$$\chi_{sub}[R'] = \text{Tr}_{R'} [(-1)^{2J_2} G'] \quad (\text{A.2.7})$$

で定義される。ここで G' は Cartan 部分群の要素である。また、ベクトル \vec{b}, \vec{c} は (A.2.5) 式で定義される Cartan 基底 $[E', j'_2, r', R'_k]$ における部分代数の表現の最高ウェイトを表し、

$$\begin{aligned} \vec{b} &= \left[\frac{3}{2}r - 2r', j_2, r', R_j \right] \\ \vec{c} &= \left[3 + 3 \left(j_1 + \frac{r}{2} \right) - 2r', j_2, r', R_j \right] \end{aligned} \quad (\text{A.2.8})$$

となる。 r' の定義 (A.2.5) より、 r' は r と R_1 に $r - R_1$ の組み合わせでしか依存しないことに注意しておこう。

ここで、(A.2.8) 式で定義される部分代数の指標は、1 対 1 対応の関数ではないことに注意しよう。実際、(A.2.6), (A.2.8) 式より、 j_2, r', M, R_i の値が固定されていれば、 I^{WL} は指数 (A.1.25) の和に現れている各表現 R に対する同じ指標を評価することになるのである。

^{*1} $m = 4$ の場合は $U(1)$ 部分が無くなるので、以下、 $SU(2, 2|m) \rightarrow PSU(2, 2|4)$, $U(m) \rightarrow SU(4)$ などの読み替えが必要となる。本文においては $m = 4$ の場合を考えているので少々心苦しいのではあるが、より一般的な議論をしたいという気持ちを酌んで頂きたい。

また、(A.2.8) 式の \vec{c} で $j_1 = -\frac{1}{2}$ とおくと、表現 \mathbf{b} に対する Cartan の値が得られることに注意しよう。このことは、(A.2.6) において \mathbf{c} を \vec{c} に置き換えるべきであることを意味している。すなわち

$$\mathcal{I}^{WL} \left[\vec{c}_{\frac{p}{2}, j_2, \hat{r}-p, M-p, R_j} \right] = (-1)^p \mathcal{I}^{WL} \left[\vec{c}_{0, j_2, \hat{r}, M, R_j} \right] \quad (\text{A.2.9})$$

である。以上より、(A.2.6) 式と (A.2.9) 式を用いると、超共形代数 A における指数 I^{WL} は

$$\begin{aligned} \mathcal{I}^{WL}[A] = & \sum_{j_2, r, R_i} \left(n[\mathbf{bx}_{0, j_2, r, 0, R_i}] \chi_{sub}[\vec{b}_0] + n[\mathbf{bx}_{0, j_2, r, 1, R_i}] \chi_{sub}[\vec{b}_1] \right) \\ & + \sum_{j_2, r', M, R_i} I_{j_2, \hat{r}, M, R_i}^L \chi_{sub}[\vec{c}_0] \end{aligned} \quad (\text{A.2.10})$$

となる。ここで \vec{b}_0, \vec{b}_1 は (A.2.8) 式において $R_1 = 0, 1$ として得られるものであり、 \vec{c}_0 は (A.2.8) 式において $j_1 = 0, r = \hat{r}, R_1 = M$ として得られるものである。(A.2.10) 式において $n[\mathbf{xx}_{j_1, j_2, r, R_i}]$ は、添字で示された量子数を持った代数 A の既約表現が、その表現に何個含まれているかを表している。そして、 I_{j_2, \hat{r}, M, R_i} はこれら数によって作られた指数 (A.1.25) であった。

以上の議論は超群 $SU(2|m)$, $SU(2|4)$ の場合にも成り立つ。本文では、この場合の指数を用いて議論したのであった。また、 I^{WL} と同様にして定義される I^{WR} についても全く同様の議論が成り立つ [4]。

A.3 BPS 状態を数える指数の計算

指数 (2.2.1) は、以上の議論を踏まえて構成された指数であった。ここでは、この指数を様々な場合において計算してみよう。特に興味があるのは 't Hooft large N 極限における単一トレース状態の指数である。指数は基本的に数え上げ問題であるから、Polya 理論を使うことができる [105]。

以下で行いたいことをまとめておこう。まず、様々な振動モードを表す「文字」(letter) の組を作る。この組はどの真空の周りで展開するかに依存する。ここで、単一粒子の分配関数を

$$z = \sum_{\text{bosons}} e^{-\beta_i Q_i} - \sum_{\text{fermions}} e^{-\beta_i Q_i} \quad (\text{A.3.1})$$

と定義しよう。 Q_i は様々な charge である。単一トレース状態は

$$Z_{s.t.} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n} \log[1 - z(n\beta_i)] \quad (\text{A.3.2})$$

と勘定することができる。 $\varphi(n)$ は Euler の φ 関数であり、 n 以下で n と互いに素な数の個数を勘定する。すなわち、 $\varphi(1) \equiv 1$, $\varphi(2) = 1$, $\varphi(3) = 2$, \dots である。

A.3.1 $N_5 = 1$ 真空について

指数に寄与するのは doubly atypical 表現に対応する状態のみである。

指数 (2.2.1) には、 $U \equiv H_4 \equiv E - 2S - \sum_i J_i = 0$ を満たす状態だけが寄与する。

まずは、第一 Kaluza-Klein モードにある状態を考えよう (図 7.18 b)。 $SO(6)$ スカラー場を Y_j と表し、 $SO(3)$ スカラー場を X_i と表すことにする。指数に寄与するボソンは $Y^j + iY^{j+1}$ ($j = 1, 3, 5$) と $X^+ = X^1 + iX^2$ であり、寄与するフェルミオンは $\psi_{+,++-}$, $\psi_{+,-+-}$, $\psi_{+,-++}$ である。但し、フェルミオンの添字は (S, J_1, J_2, J_3) における charge を表している。 S は $SU(2)$ ($\subset SU(2|4)$) の生成子のうちの 1 つである。このとき、(A.3.1) 式は

$$\begin{aligned} z_1 = & e^{-\beta_2 - \beta_3} + e^{-\beta_1 - \beta_3} + e^{-\beta_1 - \beta_2} + e^{-2(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)} \\ & - e^{-2\beta_1 - \beta_2 - \beta_3} - e^{-\beta_1 - 2\beta_2 - \beta_3} - e^{-\beta_1 - \beta_2 - 2\beta_3} \\ 1 - z_1 = & (1 - e^{-\beta_1 - \beta_2})(1 - e^{-\beta_2 - \beta_3})(1 - e^{-\beta_1 - \beta_3}) \end{aligned} \quad (\text{A.3.3})$$

となる。ここで公式

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n} \log(1-q^n) = \frac{q}{1-q} \quad (\text{A.3.4})$$

を用いると、(A.3.2) 式より

$$I_{s.t. N_5=1} = \frac{e^{-\beta_2-\beta_1}}{1-e^{-\beta_2-\beta_1}} + \frac{e^{-\beta_3-\beta_1}}{1-e^{-\beta_3-\beta_1}} + \frac{e^{-\beta_3-\beta_2}}{1-e^{-\beta_3-\beta_2}} \quad (\text{A.3.5})$$

が得られる。

どのような表現がこの指数に寄与するかを確認するために、doubly atypical 表現 $(a_1, a_2, a_3|a_4|a_5) = (0, p, 0|0|0)$ の指数を計算してみよう。すると

$$I_{(0,p,0|0|0)} = e^{-p(\beta_1+\beta_2)} \frac{(1-e^{-\beta_2-\beta_3})(1-e^{-\beta_1-\beta_3})}{(1-e^{\beta_1-\beta_3})(1-e^{\beta_2-\beta_3})} + \text{cyclic} \quad (\text{A.3.6})$$

という結果が得られる。さらに、この指数を p で足し上げれば

$$I_{s.t. N_5=1} = \sum_{p=1}^{\infty} I_{(0,p,0|0|0)} \quad (\text{A.3.7})$$

であることが確認できる。以上より、 $N_5 = 1$ の場合は、指数に寄与する BPS 表現は doubly atypical 表現のみであることが理解できる。第 7 章でも議論したように、弦の基底状態 $\text{Tr}[Z^J]$ は doubly atypical 表現に対応することに注意しておこう。

ここで示せたことは、 $N_5 = 1$ 真空に注目したとき、doubly atypical 表現以外の BPS 表現は存在しないということである。singly atypical 表現でも単一弦状態を構成できることを考えれば、これは全く自明なことではない。しかしながら、singly atypical 表現は別の atypical 表現と結合して、一般の long 表現になることができるのである。光錐ゲージにおける弦理論のスペクトルに注目することにより、この現象について理解してみよう。

光錐ゲージにおける弦理論から導かれる結果と一致することを確認する。

$\widetilde{SU}(2|4)$ の部分群 $\widetilde{SU}(2|2)$ に注目しよう。 $\widetilde{SU}(2|2)$ におけるエネルギー \hat{E} と $\widetilde{SU}(2|4)$ におけるエネルギー E の間には $\hat{E} = E - J_3$ という関係が成り立っている。よって、ここで興味がある極限は $\beta_1 + \beta_2 \rightarrow 0$ かつ $\beta_3 \rightarrow \infty$ である。但し $\beta_1 - \beta_2$ には何の条件も課さないこととする。実は、生成子 J_3 を選び出す操作は、場 $Z = Y^5 + iY^6$ を特別視する操作と同じであるから、これは元の $\widetilde{SU}(2|4)$ 対称性を $\widetilde{SU}(2|2) \times SU(2)_G$ に破ることを意味しているのである。そして、化学ポテンシャル $\beta_1 - \beta_2$ は、 $SU(2)_G$ 大局対称性の生成子と結合するのである。

ここでの目標は (A.3.5) 式を、弦の世界面上で計算された指数

$$\mathcal{I}(\gamma, \tilde{\gamma}) = \text{Tr} \left[(-1)^F 2S_3 e^{-\hat{\mu}(\hat{E}-S_3-\tilde{S}_3)} e^{-\gamma \hat{E}} e^{-\tilde{\gamma} J_3^G} \right] \quad (\text{A.3.8})$$

と関係付けることである。この指数は (7.16.11) 式と殆ど同じであるが、 $SU(2)_G$ の生成子 J_3^G に対する化学ポテンシャルが追加されていることに注意しよう。ここで $\gamma = \beta_3$, $\tilde{\gamma} = \beta_1 - \beta_2$ と同一視すべきことは明らかであるから、そうすると

$$\lim_{\beta_1+\beta_2 \rightarrow 0} \left[I_{s.t.}(\beta_i) - \frac{q}{1-q} \right] = -\mathcal{I}(\gamma = \beta_3, \tilde{\gamma} = \beta_1 - \beta_2) \quad (\text{A.3.9})$$

という結果が得られる。

この結果を実際に導出してみよう。pp-wave 極限において弦の世界面を生じさせる状態は、非常に大きい E を持つ。よって、 E が大きな値を持つ状態は (A.3.5) に寄与しないようにしなくてはならない。そのためには、 $q = e^{-\beta_1-\beta_2}$ の冪数 J_3 が大きく、 $e^{-\beta_3}$ の冪数 \hat{E} が小さい項が、寄与しないようにする必要がある。このような状態の寄与を調べると、(A.3.5) 式の第 1 項に現れていることが分かる。従って、この状態は β_3 依存性を持たず、基底状態に対応していることが分かる ($\hat{E} = 0$)。

このことは、指数 (A.3.8) に J_3^G に依存する因子を入れておかないと 0 になってしまうことと関係している。また (A.3.5) 式において、 β_3 に依存する項に q の冪数が大きい因子が存在しないことは、 p が大きい表現は $e^{-\beta_3}$ の有限冪の項に寄与するときに $(1-q)$ 因子を出すことと関係している。この $(1-q)$ 因子は次のようにして出てくる。

$U=0$ を満たす超対称電荷の中で $\hat{E}=0$ を満たすものが 1 個あり、その超対称電荷の量子数は $Q_{+,-,+}^\dagger$ である。この超対称電荷は β_3 に依存する項を消さずに $(1-q)$ 因子を出す。このことは (A.3.6) 式の第 1 項を

$$q^{-p} \left[1 + (1-q) \frac{q^{-1/2} e^{-\beta_3} (e^{\tilde{\gamma}/2} + e^{-\tilde{\gamma}/2}) - e^{-2\beta_3} (1+1/q)}{(1-q^{-1/2} e^{\tilde{\gamma}/2 - \beta_3})(1-q^{-1/2} e^{-\tilde{\gamma}/2 - \beta_3})} \right] \\ \tilde{\gamma} = \beta_1 - \beta_2, \quad q = e^{-\beta_1 - \beta_2} \quad (\text{A.3.10})$$

と書き直してみれば理解できる。 β_3 に依存しない項は弦の基底状態からの寄与であり、(A.3.9) 式の左辺においてあらわに差っ引かれている項である。一方、 β_3 に依存する項には $(1-q)$ の因子がついている。よって、これらの寄与は $q \rightarrow 1$ という極限を取ったときに消えてしまうことが分かる。

以上の問題を避けるためには、各々の BPS 状態の寄与を計算するときには w^{2S} という因子を導入する必要がある。そして、 w で微分した後に $w=1$ とおき、その上で $q \rightarrow 1$ という極限を取ることにすればよい。こうして (A.3.6) 式において、各々の p について有限な解が得られるのである。

ここでは large p 極限に注目するのであるから、具体的には $(1-wq)$ 因子を取り去って、代わりに (-1) という因子を置けばよいことになる。実際、表式全体を考えて (A.3.9) 式における極限を取っても、同じ結果が得られる。なぜなら、 q の冪が有限な項は $(1-q)$ 因子があるので消えてしまうが、 q^p 因子を含む項は $1/(1-q)$ 因子を出すので $(1-q)$ 因子と打ち消し合うからである。つまり、(A.3.7) 式において有限個の項で切断して、 $q \rightarrow 1$ の極限を取れば、 β_3 に依存する全ての項が 0 になるというわけである。

従って、このとき極限 (A.3.9) は

$$\mathcal{I} = - \frac{e^{-\beta_3 - \tilde{\gamma}/2}}{1 - e^{-\beta_3 - \tilde{\gamma}/2}} - \frac{e^{-\beta_3 + \tilde{\gamma}/2}}{1 - e^{-\beta_3 + \tilde{\gamma}/2}} \quad (\text{A.3.11})$$

となることが分かる。これが、弦理論側において、 $\widetilde{SU}(2|2)$ の基本表現と $SU(2)_G$ の基本表現に属する場が存在する $\mathcal{N} = (4, 4)_m$ 世界面理論における寄与を計算して得られたものである。これらの場は NS5-brane に平行な 4 次元空間に由来する場である。また、(A.3.9) 式が満たされていることは簡単に確認できる。

A.3.2 $N_5 > 1$ 真空について

次に、 $N_5 > 1$ 真空について考えてみよう。この場合、指数を計算するためには、任意の $SU(2|4)$ 表現に対する指数を導くための一般的な公式を作っておくのが便利である。

typical 表現は指数に寄与しない。

もし表現が typical であれば、指数は 0 になる。これについては次のようにして理解できる。

$SU(2|4)$ 群の typical 表現において、超対称電荷は fermionic な生成消滅演算子として働くことが確認できる。実際、一般的な指標 (character) の表現において

$$\prod_j (1 - e^{-\theta_j H_j^j}) \quad (\text{A.3.12})$$

という因子が存在する [106]。 j は超対称電荷のうちの半分を表し、 H_j^j はこの超対称電荷の Cartan charge を表している。

ここで扱っている指数 (2.2.1) は、 θ_j が特別な値を取った場合の指標であり、超対称電荷 $Q_{- , + + +}^\dagger$ が $(1-1) = 0$ という寄与を出すようになっている。このことによって、typical (long) 表現に対しては指数は 0 となることが保証されているのである。

atypical 表現の一部が、指数に寄与する。

atypical 表現の場合は、指標には (A.3.12) 式のうちの一部の因子しか含まれない。実際、指数は $U = 0$ を満たす状態からしか寄与を受けない。よって、 $SU(2|4)$ 超対称性代数を $U = 0$ を満たす要素のみに切断することができる。これによって、 $\widetilde{SU}(1|3)$ 超対称性代数が得られる。よって、指数に寄与する状態は $\widetilde{SU}(1|3)$ 表現を構成することが分かる。つまり、指数は $\widetilde{SU}(1|3)$ 表現の指標になるのである。

従って、最高ウェイトが $(a_1, a_2, a_3 | a_5 + 1 | a_5)$ である $\widetilde{SU}(2|4)$ の singly atypical 表現を考えると、 $U = 0$ を満たす状態は $\widetilde{SU}(1|3)$ の typical 表現を構成することが分かる。さらに、 $\widetilde{SU}(2|4)$ の doubly atypical 表現は $\widetilde{SU}(1|3)$ の atypical 表現になっていることが分かる。

以上のことを、もっとあらわに確認してみよう。 $\widetilde{SU}(2|4)$ の atypical 表現 $(a_1, a_2, a_3 | a_5 + 1 | a_5)$ に対する指数は

$$I_{(a_1, a_2, a_3 | a_5 + 1 | a_5)} = -(-1)^{a_5} e^{-Q(\sum_i \beta_i)} (1 - e^{-\beta_1 - \beta_2}) (1 - e^{-\beta_1 - \beta_3}) (1 - e^{-\beta_2 - \beta_3}) \chi_{(a_1, a_2)}(\mathbf{g}) \quad (\text{A.3.13})$$

である。ここで

$$Q = 2 + a_5 + a_3 + \frac{2}{3}a_2 + \frac{1}{3}a_1 \quad (\text{A.3.14})$$

であり、 $\chi_{(a_1, a_2)}(\mathbf{g})$ は $SU(3)$ 表現のうち Dynkin ラベルが (a_1, a_2) であるようなものについて、 $SL(3)$ 行列 $\mathbf{g} = e^{\frac{1}{3}\sum_i \beta_i \text{diag.}} (e^{-\beta_1}, e^{-\beta_2}, e^{-\beta_3})$ 上で評価した指標である。但し (A.3.13) 式を導出する過程において、取り扱っている表現が $\widetilde{SU}(1|3)$ の typical 表現であることを用いた。また $SU(3)$ 表現の指標を書くときに一般的な指標の公式 [106] を用いた。(A.3.13) 式において、 $\widetilde{SU}(1|3)$ の超対称電荷に由来する (A.3.12) の形の因子が現れていることに注意しよう。

話を元に戻して、fuzzy 球面の他の Kaluza-Klein 多重項に由来する単一粒子状態が、指数に対して与える寄与を評価しよう。これらの多重項は $(0, 0, 0 | 2(l-2) + 1 | 2(l-2))$ $l \geq 2$ の表現として変換する。例えば、 $l = 2$ は Young 超図 7.18 (c) の多重項に対応している。 N_5 枚の NS5-brane に対応する真空は、自明な $X = 0$ ($N_5 = 1$) 真空において現れる多重項の他に、 $l = 2, \dots, N_5$ の多重項を持つ。(A.3.13) 式を用いれば、これらの多重項からの単一粒子状態の寄与を評価することができて、その結果は

$$z_l = -e^{-2(l-1)(\sum_i \beta_i)} (1 - e^{-\beta_1 - \beta_2}) (1 - e^{-\beta_1 - \beta_3}) (1 - e^{-\beta_2 - \beta_3}); \quad l > 1 \quad (\text{A.3.15})$$

として得られる。従って、寄与全体は

$$1 - z_1 - \sum_{l=2}^{N_5} z_l = (1 - e^{-\beta_1 - \beta_2}) (1 - e^{-\beta_1 - \beta_3}) (1 - e^{-\beta_2 - \beta_3}) \frac{1 - e^{-2N_5(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)}}{1 - e^{-2(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)}} \quad (\text{A.3.16})$$

となる。(A.3.16) 式を (A.3.2) 式に代入して、さらに (A.3.4) 式を用いれば、(7.16.13) 式が得られることを確認することができる。

最終的な結果である (7.16.13) 式には、単一弦状態の場合の BPS 状態について、群論 (group theory) から得られる情報の全てが含まれている。これらの情報は純粋に表現論から得られたものであって、単一トレース状態が複数トレース状態と混合しないと仮定した (planer 近似を取った) こと以外は dynamics に関して何の仮定も行わなかったことに注意しておこう。dynamics に関するより詳しい性質が分かれば、BPS 状態に関してより詳しい情報を得ることができる。言い換えれば、この指数 (7.16.13) は BPS 状態の個数の最小値を表しているのである。dynamics の性質によっては実際の個数は増えることがあり得る。

$N_5 = 1$ の場合と $N_5 > 1$ の場合を比較する。

(7.16.13) 式に示されているように、指数が真空から受け取る寄与の一部は、全ての真空に共通である。これは、 $N_5 = 1$ の場合に自明な真空から受ける寄与と同じものである。 $N_5 > 1$ の場合には、さらに他の寄与が付け加わる。

ここで付け加わった項には、NS5-brane に垂直な 4 次元に関する情報が含まれている。これらの項に注目して、(A.3.9) 式で行った極限を取ると、この 4 次元方向に関する世界面上の指数 (7.16.16) の値を得ることができる。ここで $\tilde{\gamma}$ を含む項が現れないことに注目しよう。これは、 $SU(2)_G$ 対称性は NS5-brane に平行な 4 次元だけに作用するものであることと相容れる結果になっている。

指数に寄与する atypical 表現について、さらに詳しく調べてみよう。ここで

$$I_{s.t. N_5} - I_{s.t. N_5=1} = \sum_{n=1, n \neq 0 \pmod{N_5}}^{\infty} e^{-2n(\beta_1+\beta_2+\beta_3)} \tag{A.3.17}$$

が成り立つことに注目しよう。右辺の各項は

$$-e^{-2n(\beta_1+\beta_2+\beta_3)} = \sum_{p=0}^{\infty} I_{(0,p,0|2(n-1)+1|2(n-1))} \tag{A.3.18}$$

と書き表すことができる。ここで

$$I_{(0,p,0|2(n-1)+1|2(n-1))} = -e^{-2n(\sum \beta_i)} (1 - e^{-\beta_1-\beta_2})(1 - e^{-\beta_1-\beta_3})(1 - e^{-\beta_2-\beta_3}) \\ \times \left[\frac{e^{-p(\beta_1+\beta_2)}}{(1 - e^{\beta_1-\beta_3})(1 - e^{\beta_2-\beta_3})} + \text{cyclic} \right] \tag{A.3.19}$$

は Young 超図 A.1 で表される atypical 表現の寄与である。従って、 p で足し上げることは、 Z 場を任意個数だけ追加したものを全て足し上げることを意味している。こうして得られる BPS 状態は、NS5-brane に平行な 4 次元における通常の BPS 状態 ($N_5 = 1$ の場合) と NS5-brane に垂直な 4 次元における BPS 状態のうち $\hat{E} = 2n$ を満たすものであることが分かる。つまり、(A.3.18) 式の各項は NS5-brane に垂直な 4 次元において $\hat{E} = 2n$ と $S_3 = \tilde{S}_3 = n$ を満たす BPS 状態から生じていると解釈することができる。これは、 $2n$ 個の箱が 1 列 (column) に並んだ $\widetilde{SU}(2|2)$ 超対称多重項から得られる寄与である。

指数 (7.16.11) について

最後に、なぜ (7.16.11) 式が弦上の理論において BPS 状態を数え上げる指数になっているのかを説明しておこう。まず、 $\widetilde{SU}(2|2)$ の指標 (character)

$$\chi = \text{Tr} \left[(-1)^F w^{2S_3} e^{-\hat{\mu}(\hat{E}-S_3-\tilde{S}_3)} e^{-\gamma \hat{E}} \right] \tag{A.3.20}$$

を定義しよう。さらに $\hat{\mu}$ に共役な生成子を $\mathcal{V} \equiv \hat{E} - S_3 - \tilde{S}_3$ として表そう。このとき、超対称電荷 $Q_{+,-}^\dagger, Q_{-,+}^\dagger$ とその複素共役は、 $\mathcal{V} = 0$ の固有値を持つことが分かる。さらに、 $\widetilde{SU}(2|2)$ において全ての超対称電荷は $\hat{E} = 0$ の固有値を持っている。

これらの 2 つの超対称電荷が long 表現に作用すると、 $(1-w)(1-1/w)$ という因子が出てくる。よって、 $w = 1$ のとき long 表現は指数に寄与しないことが分かる。しかしながら、short 表現は $(1-w^{\pm 1})|_{w=1}$ という

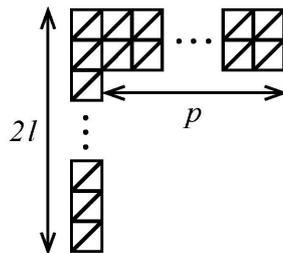


図 A.1: Young 超図の例：本文中では変数 $n = l - 1$ を使って表している。

因子を持つので、単に $w = 1$ とおいたのでは short 表現まで指数に寄与しなくなってしまうことが分かる。この問題を解決するためには、(A.3.20) 式を w について微分した後で $w = 1$ とおけばよい。すると long 表現は寄与なくなり、short 表現が寄与するようになることが確認できる。以上より、(7.16.11) 式が指数であることが理解できる。

IIA 型 pp-wave 時空における NS5-brane に垂直な 4 次元方向に関する自由理論 (free theory) を考えると、1 個の粒子が励起した状態は、2 個の箱が 1 列 (column) に並んだ $\widetilde{SU}(2|2)$ の short 表現として変換する状態である。この表現には 2 つの BPS 状態が含まれている。つまり、 $\mathcal{V} = 0$ を満たして (7.16.11) 式に寄与する状態が 2 つあり、それらはスピン $(S_3, \tilde{S}_3) = (1, 0)$ のボソンとスピン $(S_3, \tilde{S}_3) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ のフェルミオンである。これらの粒子が指数に寄与するのは、これらの粒子の (空間次元における) 運動量が 0 のときだけである。従って、Fock 空間において

$$\mathcal{I}_{Fock} = \partial_w \left[\frac{1 - we^{-2\gamma}}{1 - w^2 e^{-2\gamma}} \right]_{w=1} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n\gamma} = \frac{e^{-2\gamma}}{(1 - e^{-2\gamma})} \quad (\text{A.3.21})$$

とすれば、指数が計算できる。ここで、bosonic 振動子と fermionic 振動子が 1 つずつ寄与することを用いた。この表現には、 $2n$ 個の箱が 1 列に並んだ Young 超図に対応する $\widetilde{SU}(2|2)$ 状態から得られる寄与が含まれていることを確認することができる。このような多重項には、 $(S_3, \tilde{S}_3) = (n, 0)$, $(n - \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ でエネルギーが $\hat{E} = 2n$ の BPS 状態が 2 つ含まれている。

付録 B

BMN 行列模型について

BMN 行列模型の対称性代数と生成子の表現についてまとめておく [55]。

B.1 生成子

BMN 行列模型の生成子は

- bosonic 生成子
 - 光錐方向の並進生成子 $P^+ = N/R$
 - Hamiltonian $P^- = H$
 - $SO(3)$ 回転生成子 M^{ij}
 - $SO(6)$ 回転生成子 M^{ab}
 - 重心の調和振動子に関する生成消滅演算子 a_i, a_a
- fermionic 生成子
 - overall な偏極状態に作用する 16 個の生成子 $q_{I\alpha}$
 - Hamiltonian や回転生成子と反交換関係を作る非自明な 16 成分の生成子 $Q_{I\alpha}$

である。本文中でも述べたように、理論の $U(1)$ 部分は decouple するのであるが、その $U(1)$ 部分にのみ作用する生成子は、 $P^+, a_i, a_a, q_{I\alpha}$ である。

B.2 生成子が満たす代数

bosonic 生成子のうち、生成消滅演算子 a_i, a_a に関するものの交換関係は

$$\begin{aligned}
 [a_a, a_b^\dagger] &= P^+ \delta_{ab}, & [a_i, a_j^\dagger] &= P^+ \delta_{ij} \\
 [H, a_i] &= -\frac{\mu}{3} a_i, & [H, a_a] &= -\frac{\mu}{6} a_a \\
 [M^{ab}, a_c] &= i\delta_{ac} a_b - i\delta_{bc} a_a, & [M^{ij}, a_k] &= i\delta_{ik} a_j - i\delta_{jk} a_i \\
 & \text{otherwise} = 0
 \end{aligned} \tag{B.2.1}$$

である。この生成消滅演算子は、調和ポテンシャル中における粒子（重心座標）を記述する。

fermionic 生成子は、反交換関係

$$\begin{aligned}
 \{Q^{\dagger I\alpha}, Q_{J\beta}\} &= 2\delta_J^I \delta_\beta^\alpha H - \frac{\mu}{3} \epsilon^{ijk} \sigma_\beta^k{}^\alpha \delta_J^I M^{ij} - \frac{i\mu}{6} \delta_\beta^\alpha (\mathbf{g}^{ab})_J^I M^{ab} \\
 \{q_{I\alpha}, Q_{J\beta}\} &= -i\sqrt{\frac{\mu}{3}} \mathbf{g}_{IJ}^a \epsilon_{\alpha\beta} a_a, & \{q^{\dagger I\alpha}, Q_{J\beta}\} &= -i\sqrt{\frac{2\mu}{3}} \sigma_\beta^i{}^\alpha \delta_J^I a_i^\dagger \\
 \{q^{\dagger I\alpha}, q_{J\beta}\} &= \delta_\beta^\alpha \delta_J^I P^+
 \end{aligned} \tag{B.2.2}$$

を満たす。さらに、bosonic 生成子と fermionic 生成子との間の交換関係は

$$\begin{aligned} [H, q_{I\alpha}] &= -\frac{\mu}{4} q_{I\alpha}, & [H, Q_{I\alpha}] &= \frac{\mu}{12} Q_{I\alpha} \\ [Q_{I\alpha}, a_a^\dagger] &= -i\sqrt{\frac{\mu}{3}} g_{IJ}^a \epsilon_{\alpha\beta} q^{\dagger J\beta}, & [Q_{I\alpha}, a_i] &= \sqrt{\frac{2\mu}{3}} i\sigma_\alpha^{i\beta} q_{I\beta} \end{aligned} \quad (\text{B.2.3})$$

となる。また、fermionic 生成子と M の間の交換関係は、 $q_{I\alpha}$ や $Q_{I\alpha}$ の $SO(6) \times SO(3)$ 変換性に対して適切なものが与えられる。

B.3 生成子の表現

BMN 行列模型において、これらの生成子は

$$\begin{aligned} P^+ &= \frac{1}{R} \text{Tr } 1 \\ a_i &= \frac{1}{\sqrt{R}} \text{Tr} \left[\sqrt{\frac{\mu}{6R}} X^i + \sqrt{\frac{3R}{2\mu}} i\Pi^i \right], & a_a &= \frac{1}{\sqrt{R}} \text{Tr} \left[\sqrt{\frac{\mu}{12R}} X^a + \sqrt{\frac{3R}{\mu}} i\Pi^a \right] \\ M^{ij} &= \text{Tr} [X^i \Pi^j - X^j \Pi^i + i\epsilon^{ijk} \psi^\dagger \sigma^k \psi], & M^{ab} &= \text{Tr} \left[X^a \Pi^b - X^b \Pi^a + \frac{1}{2} \psi^\dagger g^{ab} \psi \right] \\ q_{I\alpha} &= \frac{1}{\sqrt{R}} \text{Tr } \psi_{I\alpha} \\ Q_{I\alpha} &= \sqrt{R} \text{Tr} \left[(\Pi^a - i\frac{\mu}{6R} X^a) g_{IJ}^a \epsilon_{\alpha\beta} \psi^{\dagger J\beta} - (\Pi^i + i\frac{\mu}{3R} X^i) \sigma_\alpha^{i\beta} \psi_{I\beta} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} [X^i, X^j] \epsilon^{ijk} \sigma_\alpha^{i\beta} \psi_{I\beta} - \frac{i}{2} [X^a, X^b] (g^{ab})_I^J \psi_{J\alpha} + i[X^i, X^a] \sigma^i g_{IJ}^a \epsilon_{\alpha\beta} \psi^{\dagger J\beta} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.3.1})$$

と表現することができる。ここで $g^{ab} = \frac{1}{2}(g^a g^{\dagger b} - g^b g^{\dagger a})$ である。

Hamiltonian H は Lagrangian (7.4.6) から読み取ることができる。交換関係

$$[X_{kl}^i, \Pi_{mn}^j] = i\delta^{ij} \delta_{kn} \delta_{lm}, \quad [X_{kl}^a, \Pi_{mn}^b] = i\delta^{ab} \delta_{kn} \delta_{lm}, \quad \{\psi_{kl}^{\dagger I\alpha}, (\psi_{J\beta})_{mn}\} = \delta_J^I \delta_\beta^\alpha \delta_{kn} \delta_{lm} \quad (\text{B.3.2})$$

を使うと、上に示した代数が満たされていることをあらわに確認することができる。

B.4 $SO(9)$ 対称性があらわになる記法

$SO(6) \times SO(3)$ 対称性ではなく、元の $SO(9)$ 対称性があらわになるような記法を使うのが良い場合もある。このとき、BMN 行列模型の超対称性代数は

$$\begin{aligned} \{Q_\alpha, Q_\beta\} &= 2\delta_{\alpha\beta} H - \frac{\mu}{3} (\gamma^{123} \gamma^{ij})_{\alpha\beta} M^{ij} + \frac{\mu}{6} (\gamma^{123} \gamma^{ab})_{\alpha\beta} M^{ab} \\ \{Q_\alpha, q_\beta\} &= i\sqrt{\frac{\mu}{3}} \left(\left\{ \frac{1}{2} (1 - i\gamma^{123}) \gamma^a \right\}_{\alpha\beta} a_a^\dagger - \left\{ \frac{1}{2} (1 + i\gamma^{123}) \gamma^a \right\}_{\alpha\beta} a_a \right) \\ &\quad - i\sqrt{\frac{2\mu}{3}} \left(\left\{ \frac{1}{2} (1 - i\gamma^{123}) \gamma^i \right\}_{\alpha\beta} a_i - \left\{ \frac{1}{2} (1 + i\gamma^{123}) \gamma^i \right\}_{\alpha\beta} a_i^\dagger \right) \\ \{q_\alpha, q_\beta\} &= \delta_{\alpha\beta} P^+ \end{aligned} \quad (\text{B.4.1})$$

で与えられる。このとき、生成子の表現は

$$\begin{aligned} q &= \frac{1}{\sqrt{R}} \text{Tr } \Psi \\ Q &= \sqrt{R} \text{Tr} (\Pi^a \gamma^a \Psi + \Pi^i \gamma^i \Psi - \frac{i}{2} [X^i, X^j] \gamma^{ij} \Psi - \frac{i}{2} [X^a, X^b] \gamma^{ab} \Psi - i[X^i, X^a] \gamma^{ia} \Psi \\ &\quad - \frac{\mu}{3R} X^i \gamma^{123} \gamma^i \Psi + \frac{\mu}{6R} X^a \gamma^{123} \gamma^a \Psi) \end{aligned} \quad (\text{B.4.2})$$

で与えられる。

付録 C

ゲージ化超重力理論

第 4 章と第 5 章において、7 次元と 4 次元のゲージ化超重力理論を用いた議論を行った。ここでは、なるべく一般次元のゲージ化超重力理論を扱って、これらが矛盾のない理論であることを確認していく [107, 108, 109]。

C.1 スカラー場が存在する最大超対称な超重力理論

4 次元、5 次元、7 次元の最大超対称なゲージ化超重力理論において現れるスカラーポテンシャルの構造を考察しよう。

以下では次元を一般に D と表す。 $D = 4, 5, 7$ である。

C.1.1 対称ポテンシャル

最大超対称な D 次元超重力理論におけるスカラー場は、剰余群 $E_{11-D(11-D)}/K$ でパラメータ付けされることが知られている [110]。 $E_{n(n)}$ は例外群 E_n の最大非コンパクト型 (maximally non-compact form) であり、 K はその最大コンパクト部分群である。ここで、例外群については通常通り

$$E_5 \sim SO(10), \quad E_4 \sim SU(5), \quad E_3 \sim SU(3) \times SU(2), \quad E_2 \sim SU(2) \times \mathbf{R}, \quad E_1 \sim \mathbf{R} \quad (\text{C.1.1})$$

であり、また

$$E_{5(5)} \sim O(5, 5), \quad E_{4(4)} \sim SL(5, \mathbf{R}), \quad E_{3(3)} \sim SL(3, \mathbf{R}) \times SL(2, \mathbf{R}), \quad E_{2(2)} \sim GL(2, \mathbf{R}), \quad E_{1(1)} \sim \mathbf{R} \quad (\text{C.1.2})$$

であるものと了解することにしよう。

以下の議論では、特に E_n の部分群 $SL(N, \mathbf{R})$ に注目して、剰余群 $SL(N, \mathbf{R})/SO(N)$ でパラメータ付けされる $\frac{1}{2}N(N+1) - 1$ 個のスカラー場の部分集合を考える。 D, n, N の間の関係については表 C.1 にまとめておいた。

Lagrangian を設定する。

以上の設定により、スカラー場のポテンシャルを対角化するために $SO(N)$ の局所変換を用いることが可能で

D	E_n	\supset	$SL(N, \mathbf{R})$
4	E_7	\supset	$SL(8, \mathbf{R})$
5	E_6	\supset	$SL(6, \mathbf{R})$
7	$E_4 \sim SU(5)$	\supset	$SL(5, \mathbf{R})$

表 C.1: D と n と N の間の関係

ある。よって、 D 次元における重力とスカラー場の Lagrangian

$$e^{-1}\mathcal{L}_D = R - \frac{1}{2}(\partial\vec{\varphi})^2 - V \quad (\text{C.1.3})$$

において、

$$V = -\frac{1}{2}g^2 \left(\left(\sum_{i=1}^N X_i \right)^2 - 2 \sum_{i=1}^N X_i^2 \right) \quad (\text{C.1.4})$$

という形のスカラーポテンシャル V を考えることにしよう。今の時点ではこのようなポテンシャルを設定する動機が理解できないかもしれないが、ここではとりあえず認めてしまうことにしよう。すぐ後でこの理論がゲージ化超重力理論を適切に切断したものと対応していることを確認する。

ここでスカラー場 X_i を対角成分とする行列は $SL(N, \mathbf{R})$ の要素であるから

$$\prod_{i=1}^N X_i = 1 \quad (\text{C.1.5})$$

という束縛条件があることに注意しよう。よって、 X_i は $N-1$ 個の dilaton 的なスカラー成分を持った場 $\vec{\varphi}$ (以下では dilaton 場と呼ぶ) を用いて

$$X_i = \exp \left[-\frac{1}{2} \vec{b}_i \cdot \vec{\varphi} \right] \quad (\text{C.1.6})$$

と表すことができる。ここで \vec{b}_i は $SL(N, \mathbf{R})$ の基本表現のウェイトベクトルであり、

$$\vec{b}_i \cdot \vec{b}_j = 8\delta_{ij} - \frac{8}{N}, \quad \sum_i \vec{b}_i = 0, \quad (\vec{u} \cdot \vec{b}_i) \vec{b}_i = 8\vec{u} \quad (\text{C.1.7})$$

という関係式を満たす。 \vec{u} は N 個の要素を持った任意のベクトルである。(C.1.7) 式の最後の式を用いると、dilaton 場 $\vec{\varphi}$ は

$$\vec{\varphi} = \frac{1}{8}(\vec{\varphi} \cdot \vec{b}_i) \vec{b}_i = -\frac{1}{4} \sum_i \vec{b}_i \log X_i \quad (\text{C.1.8})$$

として表せることが分かる。

また、このポテンシャルは $N \leq 3$ なら $X_i = 1$ に極小を持ち、 $N = 4$ のときは $X_i = 1$ に変曲点を持ち、 $N \geq 5$ のときは $X_i = 1$ に極大を持つことを確認しておこう。

スカラー場の運動方程式

Lagrangian (C.1.3) より、スカラー場の運動方程式は

$$\square \vec{\varphi} = \frac{\partial V}{\partial \vec{\varphi}} \quad (\text{C.1.9})$$

と求められる。(C.1.6) 式より $\partial X_i / \partial \vec{\varphi} = -\frac{1}{2} \vec{b}_i X_i$ であることを用いれば

$$\square \vec{\varphi} = \sum_i \frac{\partial X_i}{\partial \vec{\varphi}} \frac{\partial V}{\partial X_i} = \frac{1}{2} g^2 \sum_i \vec{b}_i \left(X_i \sum_j X_j - 2X_i^2 \right) \quad (\text{C.1.10})$$

と表すことができる。さらに (C.1.8) 式を用いれば

$$\square \log X_i = 2g^2 \left(2X_i^2 - X_i \sum_j X_j - \frac{2}{N} \sum_j X_j^2 + \frac{1}{N} \left(\sum_j X_j \right)^2 \right) \quad (\text{C.1.11})$$

が成り立っていることが分かる。この式の両辺を i で足し上げると 0 になることを確認しておこう。

特別な場合を考えると、ゲージ化超重力理論の馴染み深い解が再現される。

先程も少し触れたように、ポテンシャル (C.1.4) において特別な場合を考えると、ゲージ化超重力理論の馴染み深い解

- $D = 4$ の場合 : $SO(8)$ ゲージ化超重力理論を $U(1)^4$ の最大可換部分群に切断したもの [18, 111]
- $D = 5$ の場合 : $SO(6)$ ゲージ化超重力理論を $U(1)^3$ の最大可換部分群に切断したもの [78, 111]
- $D = 7$ の場合 : $SO(5)$ ゲージ化超重力理論を $U(1)^2$ の最大可換部分群に切断したもの [111]

を再現することができる。 $U(1)$ の個数は Cartan 部分代数の要素数に対応している (表 C.2 を参照のこと)。実際に確認してみよう。

$D = 4$ の場合

特別な場合として

$$X_1 = X_2 \equiv \tilde{X}_1, \quad X_3 = X_4 \equiv \tilde{X}_2, \quad X_5 = X_6 \equiv \tilde{X}_3, \quad X_7 = X_8 \equiv \tilde{X}_4 \quad (\text{C.1.12})$$

とすると、ポテンシャルは

$$V = -4g^2 \sum_{a < b} \tilde{X}_a \tilde{X}_b \quad (\text{C.1.13})$$

となる。但し、 $\prod_a \tilde{X}_a = 1$ という束縛条件がある。このポテンシャルは、4次元のゲージ化 $SO(8)$ 超重力理論を $U(1)^4$ の最大可換部分群 (maximal abelian subgroup) に切断した理論におけるスカラー場のポテンシャルと同じである。

$D = 5$ の場合

特別な場合として

$$X_1 = X_2 \equiv \tilde{X}_1, \quad X_3 = X_4 \equiv \tilde{X}_2, \quad X_5 = X_6 \equiv \tilde{X}_3 \quad (\text{C.1.14})$$

とすると、ポテンシャルは

$$V = -4g^2 \sum_{a=1}^3 \tilde{X}_a^{-1} \quad (\text{C.1.15})$$

となる。但し、 $\prod \tilde{X}_a = 1$ という束縛条件がある。このポテンシャルは、5次元のゲージ化 $SO(6)$ 超重力理論を最大可換部分群 $U(1)^3$ に切断した理論で現れる。

$D = 7$ の場合

特別な場合として

$$X_1 = X_2 \equiv \tilde{X}_1, \quad X_3 = X_4 \equiv \tilde{X}_2, \quad X_5 \equiv \tilde{X}_0 \quad (\text{C.1.16})$$

とすると、 \tilde{X}_a は $\tilde{X}_0 = (\tilde{X}_1 \tilde{X}_2)^{-2}$ という関係式を満たし、この場合はポテンシャルは

$$V = -\frac{1}{2}g^2 \left(-\tilde{X}_0^2 + 8\tilde{X}_1 \tilde{X}_2 + 4\tilde{X}_0 \tilde{X}_1 + 4\tilde{X}_0 \tilde{X}_2 \right) \quad (\text{C.1.17})$$

となる。これは、7次元 $SO(5)$ ゲージ化超重力理論を最大可換部分群 $U(1)^2$ に切断したときに得られる。

$SO(n)$	生成子の数	Cartan の数
$SO(8)$	28	4
$SO(6)$	15	3
$SO(5)$	10	2
$SO(2r)$	$r(2r - 1)$	r
$SO(2r + 1)$	$r(2r + 1)$	r

表 C.2: $SO(n)$ の生成子の数と Cartan 部分代数の要素数

この場合は $D = 4, 5$ の場合とは異なり、 \tilde{X}_a の間に「非対称性」があることに注目しよう。このことは、ポテンシャル (C.1.4) において X_i 場が奇数個存在しているの、同じ値を持つペアを作ると必ずどれか 1 つが残ってしまうことに起因しているのである。

C.1.2 AdS ドメインウォール解

時空は AdS ドメインウォール解になる。

Lagrangian (C.1.3) から得られる方程式は、スカラー場の運動方程式 (C.1.10) と Einstein 方程式

$$R_{MN} = \frac{1}{2} \partial_M \vec{\varphi} \cdot \partial_N \vec{\varphi} + \frac{1}{D-2} V g_{MN} \quad (\text{C.1.18})$$

である。これらの方程式から、時空解は

$$ds_D^2 = (gr)^{\frac{4}{D-3}} \left(\prod_i H_i \right)^{\frac{1}{2} - \frac{2}{N}} dx^\mu dx_\mu + \left(\prod_i H_i \right)^{-\frac{2}{N}} \frac{dr^2}{g^2 r^2}$$

$$X_i = H_i^{-1} \left(\prod_j H_j \right)^{\frac{1}{N}} \quad (\text{C.1.19})$$

となることが分かる。ここで、関数 H_i と整数 N に関して

$$H_i = 1 + \frac{\ell_i^2}{r^2}, \quad N = \frac{4(D-2)}{D-3} \quad (\text{C.1.20})$$

という関係式が成り立っている。 N と D の関係は表 C.1 と一致していることを確認しておこう。このような解は AdS ドメインウォール解と呼ばれる。

結果だけ見せられても納得がいかないであろうから、この時空解 (C.1.19) が Einstein 方程式の解になっていることを確認しておこう。そのために、まず

$$ds_D^2 = e^{2A(r)} dx^\mu dx_\mu + e^{2B(r)} dr^2 \quad (\text{C.1.21})$$

という形の計量の Ricci テンソルを計算しよう。 $e^\mu = e^A dx^\mu$, $e^r = e^B dr$ という規格直交基底 (orthonormal basis) を取ると、Ricci テンソルの成分は

$$R_{\mu\nu} = - \left(A'' + (D-1)A'^2 - A'B' \right) e^{-2B} \eta_{\mu\nu}$$

$$R_{rr} = -(D-1) \left(A'' + A'^2 - A'B' \right) e^{-2B} \quad (\text{C.1.22})$$

となる。' は r での微分を表す。Einstein 方程式 (C.1.18) は

$$- \left(A'' + (D-1)A'^2 - A'B' \right) e^{-2B} = \frac{1}{D-2} V$$

$$-(D-1) \left(A'' + A'^2 - A'B' \right) e^{-2B} = \frac{1}{2} e^{-2B} \vec{\varphi}' \cdot \vec{\varphi}' + \frac{1}{D-2} V \quad (\text{C.1.23})$$

となる。(C.1.20) 式より $H_i' = (-2/r)(H_i - 1)$ が成り立つことに注意しておくとうい。以上の結果を用いると、(C.1.19) が解であることが確認できる。

特別な場合の解

ここで求めた解を reduction すると、先ほど求めた解になる。つまり、 $D = 4, 5$ の場合は

$$\ell_{2p-1} = \ell_{2p} \equiv L_p; \quad 1 \leq p \leq \frac{N}{2} \quad (\text{C.1.24})$$

とすればよい。 $D = 7$ の場合は

$$\ell_1 = \ell_2 \equiv L_1, \quad \ell_3 = \ell_4 \equiv L_2, \quad \ell_5 = 0 \quad (\text{C.1.25})$$

とすればよい。

ℓ_i の独立な成分は $N - 1$ 個である。

一般解 (C.1.19) においてパラメータ ℓ_i が現れたが、これは N 個の成分を持っているが独立な成分は $N - 1$ 個である。このことを確認してみよう。

一般性を失わずに $\ell_a^2 \geq \ell_N^2$ ($a = 1, \dots, N - 1$) とできる。座標変換

$$r^2 = R^2 - \ell_N^2 \quad (\text{C.1.26})$$

を行い、同時に

$$\tilde{H}_a = 1 + \frac{\lambda_a^2}{R^2}, \quad \lambda_a^2 \equiv \ell_a^2 - \ell_N^2 \quad (\text{C.1.27})$$

を定義すると、解 (C.1.19) における計量は

$$ds_D^2 = (gR)^{\frac{4}{D-3}} \left(\prod_a \tilde{H}_a \right)^{\frac{1}{2} - \frac{2}{N}} dx^\mu dx_\mu + \left(\prod_a \tilde{H}_a \right)^{-\frac{2}{N}} \frac{dR^2}{g^2 R^2} \quad (\text{C.1.28})$$

となり、 X_i については

$$X_a = \tilde{H}_a^{-1} \left(\prod_b \tilde{H}_b \right)^{\frac{1}{N}}, \quad X_N = \left(\prod_b \tilde{H}_b \right)^{\frac{1}{N}} \quad (\text{C.1.29})$$

となる。

よって、座標変換を行うと、パラメータ ℓ_i が

$$\ell_i^2 = (\ell_1^2, \ell_2^2, \dots, \ell_{N-1}^2, \ell_N^2) \longrightarrow (\ell_1^2 - \ell_N^2, \ell_2^2 - \ell_N^2, \dots, \ell_{N-1}^2 - \ell_N^2, 0) \quad (\text{C.1.30})$$

と変換されるだけで、後は全く同じ解のままである。よって、独立なパラメータは $N - 1$ 個のみであることが分かる。

C.2 Kaluza-Klein reduction の ansatz とその無矛盾性

前節では重力とスカラー場の D 次元理論を考えて、その理論から $D = 4, 5, 7$ 次元の最大超対称なゲージ化超重力理論の矛盾のない切断が得られ、さらにそれが複数のパラメータを持った AdS ドメインウォール解を作ることが分かった。次に、これらの理論が高次元に起源を持っていることを調べてみよう。

C.2.1 Kaluza-Klein reduction の ansatz

最大超対称なゲージ化超重力理論は、適切な高次元超重力理論を球面に Kaluza-Klein reduction して得られると考えられている。特に

- 4次元ゲージ化超重力理論：11次元超重力理論を S^7 上に還元して得られる理論
- 7次元ゲージ化超重力理論：11次元超重力理論を S^4 上に還元して得られる理論
- 5次元ゲージ化超重力理論：IIB型超重力理論を S^5 上に還元して得られる理論
- 6次元ゲージ化超重力理論：IIA型超重力理論を S^4 上に還元して得られる理論

などが知られていて、実際に得られることが示されている。

従って、前節で取り扱ったゲージ化超重力理論の適切な切断も、関係する高次元理論から矛盾のない Kaluza-Klein reduction を行うことによって得られると期待することができる。

ここでは、先に求めた D 次元理論が高次元超重力理論にどのように埋め込まれているかを調べてみよう。大切なのは、これらが「矛盾のない」埋め込みであることだ。つまり、低次元理論の全ての解が高次元理論の解になっていなければならない。

各々の場合において、低エネルギーのスカラー場は、コンパクト化される球面の計量についての不均一な変形 (inhomogeneous deformation) を記述するパラメータとして現れる。この不均一さが存在するため、reduction の手続きに矛盾がないことを示すのは全く自明なことではない。

計量の ansatz と反対称テンソル場の ansatz、必ずその両方が必要である。

矛盾のない reduction を行う上で大切なのは、スカラー場は計量の reduction の ansatz だけでなく、高次元超重力理論の反対称テンソル場に対する reduction ansatz にも現れることである。実は、両方の ansatz に現れるスカラー場の寄与が合わさった結果として初めて、矛盾のない reduction を行うことが可能になるのだ。

ここで反対称テンソル場 $\hat{F}_{(D)}$ とは、それぞれ

- $D = 4$ の場合：11 次元超重力理論の 4 形式 field strength $\hat{F}_{(4)}$
- $D = 7$ の場合： $\hat{F}_{(7)} = \hat{*}\hat{F}_{(4)}$
- $D = 5$ の場合：IIB 型超重力理論の自己双対 5 形式 field strength $\hat{H}_{(5)}$ に $\hat{H}_{(5)} = \hat{F}_{(5)} + \hat{*}\hat{F}_{(5)}$ として含まれる 5 形式 field strength $\hat{F}_{(5)}$

のことを指すものとする。 $\hat{\cdot}$ は高次元における場を表すものとする。 $\hat{*}$ も同様、高次元における Hodge $*$ 演算子であることを示している。

実際、reduction ansatz 全体としては、必ず反対称テンソル場 $\hat{F}_{(D)}$ の ansatz が含まれていなければならない。その ansatz は

$$ds^2 = \Delta^{\frac{2}{D-1}} ds_D^2 + \frac{1}{g^2} \Delta^{-\frac{D-3}{D-1}} \sum_i X_i^{-1} d\mu_i^2$$

$$\hat{F}_{(D)} = g \sum_i (2X_i^2 \mu_i^2 - \Delta X_i) \epsilon_{(D)} - \frac{1}{2g} \sum_i X_i^{-1} *dX_i \wedge d(\mu_i^2) \quad (\text{C.2.1})$$

と表せる。ここで

$$\Delta = \sum_i X_i \mu_i^2 \quad (\text{C.2.2})$$

である。 μ_i は N 個の「方向余弦」(direction cosine) であり、

$$\sum_i \mu_i^2 = 1 \quad (\text{C.2.3})$$

という条件を満たす。また、 $\epsilon_{(D)}$ は D 次元計量 ds_D^2 の体積形式 (volume form) を表している。

スカラー場は、時空間の計量が標準球状計量から不均一にずれる様子を記述する。

スカラー場 $\vec{\varphi}$ が全て 0 である場合は、 $X_i = 1$ であるから、(C.2.1) における内部空間の計量 (internal metric) は

$$ds_{int}^2 = \frac{1}{g^2} \sum_i d\mu_i^2; \quad \sum_i \mu_i^2 = 1 \quad (\text{C.2.4})$$

となるので、明らかに $N - 1$ 次元の球面上の標準球状計量 (standard round metric) になることが分かる。

逆に、スカラー場が 0 でなければ、これらの場は標準球状計量の不均一な変形をパラメータ付けすることも理解できる。

ansatz に矛盾が無いことを確認する必要がある。

スカラー場は反対称テンソル場の ansatz にも現れている。この ansatz を用いて、field strength $\hat{F}_{(D)}$ に対する運動方程式と Bianchi 恒等式が、正確に D 次元のスカラー場の運動方程式 (C.1.11) を再現することを確かめる必要がある。

具体的には

- D 形式 field strength が Bianchi 恒等式 $d\hat{F}_{(D)} = 0$ を満たすこと。但し、スカラー場 X_i が運動方程式を満たすことを用いる。
- この field strength が場の方程式 $d\hat{*}\hat{F}_{(D)} = 0$ を満たすこと。
- 計量と field strength が Einstein 方程式を満たすこと。

を示せばよい。すなわち、低次元の場がこれらの重力場とスカラー場の方程式を満たすときに限り、高次元の運動方程式全体が満たされることをあらわに示すことで、Kaluza-Klein reduction ansatz が正当なものであることが証明できるのである。

C.2.2 Bianchi 恒等式 $d\hat{F}_{(D)} = 0$ を満たすことの証明

スカラー場 X_i の運動方程式は \hat{F} の Bianchi 恒等式に由来する。

$D = 4, 5, 7$ の場合、スカラー場 X_i の方程式が Bianchi 恒等式

$$d\hat{F}_{(D)} = 0 \quad (\text{C.2.5})$$

に由来することを確認してみよう [107]。

- $D = 4$ の場合：(C.2.5) 式は 11 次元超重力理論の 4 形式 field strength の Bianchi 恒等式そのものである。
- $D = 7$ の場合： $\hat{F}_{(7)} = \hat{*}\hat{F}_{(4)}$ であるから、Bianchi 恒等式は $\hat{F}_{(4)}$ の運動方程式

$$d\hat{*}\hat{F}_{(4)} = \frac{1}{2}\hat{F}_{(4)} \wedge \hat{F}_{(4)} \quad (\text{C.2.6})$$

に由来する。 $\hat{F}_{(7)}$ に関する ansatz より $\hat{F}_{(4)} \wedge \hat{F}_{(4)} = 0$ が満たされるので、運動方程式になっていることが確認できる。

- $D = 5$ の場合：自己双対 5 形式 field strength $\hat{H}_{(5)} = \hat{F}_{(5)} + \hat{*}\hat{F}_{(5)}$ の運動方程式は $d\hat{H}_{(5)} = 0$ である。IIB 型理論の他の場は 0 とするという ansatz をおいたので。さらに、 $\hat{F}_{(5)}$ に関する ansatz より、 $d\hat{F}_{(5)} = 0$ と $d\hat{*}\hat{F}_{(5)} = 0$ は同時に満たされるべきであることが分かる。実際、前者が X_i の運動方程式になっている。

以上の議論より、いずれの場合においても、場の方程式 $d\hat{*}\hat{F}_{(D)} = 0$ は恒等的に満たされるべきであり、何らかの情報を付け加えるということはないことが分かる。

スカラー場 X_i の運動方程式は \hat{F} の Bianchi 恒等式そのものである。

では、(C.2.5) 式が低次元スカラー場の運動方程式になっていることを確認しよう。

$\hat{F}_{(D)}$ に関する ansatz より、Bianchi 恒等式は

$$\sum_i \left(\square \log X_i - 4g^2 X_i^2 + 2g^2 X_i \sum_j X_j \right) d(\mu_i^2) = 0 \quad (\text{C.2.7})$$

となる。ここで $\square \log X_i - 4g^2 X_i^2 + 2g^2 X_i \sum_j X_j = 0$ と結論付けようとするのは拙速である。 $\sum_i d(\mu_i)^2 = 0$ という束縛条件があることを考慮しなくてはならない。よって、正しくは

$$\square \log X_i = 4g^2 X_i^2 - 2g^2 X_i \sum_j X_j + Q_i \quad (\text{C.2.8})$$

としなくてはならない。 Q_i は以上の議論からは決まらない量である。

X_i が (C.1.5) 式を満たさなくてはならないので、 $\sum_i \log X_i = 0$ という条件が出てくる。よって、これより Q_i を求めることができ、その結果

$$\square \log X_i = 2g^2 \left(2X_i^2 - X_i \sum_j X_j - \frac{2}{N} \sum_j X_j^2 + \frac{1}{N} (\sum_j X_j)^2 \right) \quad (\text{C.2.9})$$

と求められる。これはまさにスカラー場の運動方程式 (C.1.11) になっている。

C.2.3 場の方程式 $d^* \hat{F}_{(D)} = 0$ を満たすことの証明

計算しやすいように μ_i の自由度を固定してしまう。

$N-1$ 次元球面は μ_i で座標付けされているわけだが、ここに束縛条件が課せられているので議論が複雑になってしまう可能性がある。よって、ここで μ_i のうち 1 つの自由度を消してしまおう。すなわち、 $\mu_i = (\mu_\alpha, \mu_0)$ として

$$\mu_0^2 = 1 - \sum_\alpha \mu_\alpha^2 \quad (\text{C.2.10})$$

と定義することにしよう。このとき、計量

$$ds^2 = \sum_i X_i^{-1} d\mu_i^2 \quad (\text{C.2.11})$$

は (μ_α, μ_0) を用いると

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} d\mu_\alpha d\mu_\beta; \quad g_{\alpha\beta} = X_\alpha^{-1} \delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{X_0 \mu_0^2} \mu_\alpha \mu_\beta \quad (\text{C.2.12})$$

として表されることになる。ここで

$$d\mu_0 = -\frac{\mu_\alpha}{\mu_0} d\mu_\alpha \quad (\text{C.2.13})$$

という関係を用いた。計量の逆行列は

$$g^{\alpha\beta} = X_\alpha \delta_{\alpha\beta} - \Delta^{-1} \mu_\alpha \mu_\beta X_\alpha X_\beta; \quad \Delta = \sum_i X_i \mu_i^2 \quad (\text{C.2.14})$$

となる。また

$$\det g_{\alpha\beta} = \frac{\Delta}{\mu_0^2} \quad (\text{C.2.15})$$

が成り立つことも確認できる。さらに、ansatz (C.2.1) が正しいならば、高次元計量 $d\hat{s}^2$ の行列式は

$$\det \hat{g} = \frac{\Delta^{\frac{D-1}{2}}}{g^{2N-2} \mu_0^2} \det g_D \quad (\text{C.2.16})$$

となることが分かる。ここで g_D は D 次元時空の計量である。また g はゲージ結合定数であるから、計量 \hat{g} , g_D と混同しないように注意しよう。

反対称場に関する ansatz に注目しよう。以下、 $\epsilon_{M_1 \dots M_D}$ はいつもテンソル密度を意味することにしよう。 $\pm 1, 0$ の値を取る。よって、 \hat{F} に関する ansatz は

$$\begin{aligned} \hat{F}_{\nu_1 \dots \nu_D} &= gU \sqrt{-g_D} \epsilon_{\nu_1 \dots \nu_D} \\ \hat{F}_{\nu_1 \dots \nu_{D-1} \alpha} &= \frac{1}{g} \sqrt{-g_D} \epsilon_{\nu_1 \dots \nu_{D-1} \rho} g_D^{\rho\sigma} (X_\alpha^{-1} \partial_\sigma X_\alpha - X_0^{-1} \partial_\sigma X_0) \mu_\alpha \end{aligned} \quad (\text{C.2.17})$$

となる。ここで

$$U \equiv \sum_i (2X_i^2 \mu_i^2 - \Delta X_i) \quad (\text{C.2.18})$$

である。全て上付きの添字を持つ \hat{F} も計算しておこう。

$$\begin{aligned}\sqrt{-\hat{g}} \hat{F}^{\nu_1 \cdots \nu_D} &= \frac{U}{g^{N-2} \mu_0 \Delta^2} \epsilon^{\nu_1 \cdots \nu_D} \\ \sqrt{-\hat{g}} \hat{F}^{\nu_1 \cdots \nu_{D-1} \alpha} &= \frac{1}{g^{N-2} \mu_0} \epsilon^{\nu_1 \cdots \nu_{D-1} \sigma} \partial_\sigma \left(\frac{X_\alpha \mu_\alpha}{\Delta} \right)\end{aligned}\quad (\text{C.2.19})$$

となる。ここで $\epsilon^{M_1 \cdots M_D}$ は値としては $\epsilon_{M_1 \cdots M_D}$ と全く同じである。

場の方程式は満たされる。

以上の表現を用いると、場の方程式

$$\partial_M \left(\sqrt{-\hat{g}} \hat{F}^{N_1 \cdots N_{D-1} M} \right) = 0 \quad (\text{C.2.20})$$

が満たされることが確認できる。なるべくすっきりとした議論をするために、(C.2.19) 式を用いて \hat{F} の Hodge 双対を構成することにしよう。まず

$$\begin{aligned}P &\equiv \frac{1}{n!} \epsilon_{\alpha_1 \cdots \alpha_n} d\mu_{\alpha_1} \cdots d\mu_{\alpha_n}, & Q_\alpha &\equiv \frac{1}{(n-1)!} \epsilon_{\alpha \beta_1 \cdots \beta_{n-1}} d\mu_{\beta_1} \cdots d\mu_{\beta_{n-1}} \\ W &\equiv \frac{1}{n!} \epsilon_{ij_1 \cdots j_n} \mu_i d\mu_{j_1} \cdots d\mu_{j_n}, & Z_i &\equiv \frac{1}{(n-1)!} \epsilon_{ijk_1 \cdots k_{n-1}} \mu_j d\mu_{k_1} \cdots d\mu_{k_{n-1}}\end{aligned}\quad (\text{C.2.21})$$

を定義する。ここで $n = N - 1$ である。次のような関係が成り立っている。

$$\begin{aligned}W &= \frac{1}{\mu_0} P \\ Z_0 &= \mu_\beta Q_\beta, & Z_\alpha &= \frac{1}{\mu_0} (-Q_\alpha + \mu_\alpha \mu_\beta Q_\beta) \\ d\mu_\alpha \wedge Q_\beta &= P \delta_{\alpha\beta} \\ d\mu_i \wedge Z_j &= -(\delta_{ij} - \mu_i \mu_j) W \\ dQ_\alpha &= 0, & dW &= 0, & dZ_i &= n\mu_i W\end{aligned}\quad (\text{C.2.22})$$

となる。(C.2.19) 式より

$$\hat{*}\hat{F}_{\alpha_1 \cdots \alpha_n} = \frac{U}{g^{N-2} \mu_0 \Delta^2} \epsilon_{\alpha_1 \cdots \alpha_n}, \quad \hat{*}\hat{F}_{\alpha_1 \cdots \alpha_{n-1} \nu} = -\frac{1}{g^{N-2} \mu_0} \epsilon_{\alpha_1 \cdots \alpha_{n-1} \beta} \partial_\nu \left(\frac{X_\beta \mu_\beta}{\Delta} \right) \quad (\text{C.2.23})$$

が成り立つことが分かる。縮約則を適用している。

計算を行うと、結局

$$\hat{*}\hat{F} = \frac{1}{g^{N-2}} \left(\frac{U}{\Delta^2} W + \partial_\nu \left(\frac{X_i \mu_i}{\Delta} \right) dx^\nu \wedge Z_i \right) \quad (\text{C.2.24})$$

と求められる。では、運動方程式 $d\hat{*}\hat{F} = 0$ を満たしていることを確認しよう。

$$\begin{aligned}g^{N-2} d\hat{*}\hat{F} &= \partial_\nu \left(\frac{U}{\Delta^2} \right) dx^\nu \wedge W - \partial_\nu \left(\frac{X_i \mu_i}{\Delta} \right) dx^\nu \wedge dZ_i - \partial_{\mu_j} \partial_\nu \left(\frac{X_i \mu_i}{\Delta} \right) dx^\nu \wedge d\mu_j \wedge Z_i \\ &= \partial_\nu \left(\frac{U}{\Delta^2} \right) dx^\nu \wedge W - n\mu_i \partial_\nu \left(\frac{X_i \mu_i}{\Delta} \right) dx^\nu \wedge W \\ &\quad + \partial_{\mu_j} \partial_\nu \left(\frac{X_i \mu_i}{\Delta} \right) dx^\nu \wedge W (\delta_{ij} - \mu_i \mu_j) \\ &= \partial_\nu \left(\frac{U}{\Delta^2} \right) dx^\nu \wedge W + \partial_\nu \left(\delta_{ij} \frac{X_i}{\Delta} - \frac{2X_i X_j \mu_i \mu_j}{\Delta^2} \right) dx^\nu \wedge W (\delta_{ij} - \mu_i \mu_j) \\ &= \partial_\nu \left(\frac{U}{\Delta^2} \right) dx^\nu \wedge W - \partial_\nu \left(\frac{U}{\Delta^2} \right) dx^\nu \wedge W \\ &= 0\end{aligned}\quad (\text{C.2.25})$$

ここで、 ∂_ν 微分に関して μ_i は自由に動くことができること、例えば

$$\mu_i \partial_\nu \left(\frac{X_i \mu_i}{\Delta} \right) = \partial_\nu \left(\frac{X_i \mu_i^2}{\Delta} \right) = 0 \quad \because X_i \mu_i^2 = \Delta \quad (\text{C.2.26})$$

が成り立つことを繰り返し使った。

C.2.4 Einstein 方程式を満たすことの証明

高次元 Einstein 方程式に代入して ansatz の正当性を確認する。

ansatz を完全に正当化するためには、結果を高次元 Einstein 方程式に入れてみる必要がある。既に述べたように、矛盾のない埋め込みであるためには、低次元理論の解は全て高次元の理論の解になっていなければならないからだ。

Einstein 方程式の成分で、低次元の脚のみを持つものは、 D 次元 Einstein 方程式 (C.1.23) を満たさなくてはならない。そして、内部空間の脚を 1 つでも持つ成分は、スカラー場の運動方程式と非自明な自己無撞着 (self-consistent) 条件を出してくるはずである。Einstein 方程式の完全な確認はまだ行っていないので、ここでやっておこう。

Ricci テンソルを求める。

高次元 Einstein 方程式の成分について確認するために、ansatz の計量の Ricci テンソルを求めておこう。以下では簡単のため、ゲージ結合定数 $g = 1$ とする。このとき、計量は

$$ds^2 = \Delta^a ds_D^2 + \Delta^{-b} \sum_i X_i^{-1} d\mu_i^2; \quad a = \frac{2}{D-1}, \quad b = \frac{D-3}{D-1} \quad (\text{C.2.27})$$

と表せる。アフィン (affine) 接続 $\hat{\Gamma}^M_{NP} = \frac{1}{2} \hat{g}^{MQ} (\partial_N g_{QP} + \partial_P g_{QN} - \partial_Q g_{NP})$ は

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}^\mu_{\nu\rho} &= \Gamma^\mu_{\nu\rho} + \frac{1}{2} a \Delta^{-1} (\delta_\rho^\mu \partial_\nu \Delta + \delta_\nu^\mu \partial_\rho \Delta - g_{\nu\rho} \partial^\mu \Delta) \\ \hat{\Gamma}^\mu_{\nu\alpha} &= \frac{1}{2} a \Delta^{-1} \delta_\nu^\mu \partial_\alpha \Delta \\ \hat{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu} &= -\frac{1}{2} a g_{\mu\nu} \partial^\alpha \Delta \\ \hat{\Gamma}^\alpha_{\beta\mu} &= -\frac{1}{2} b \Delta^{-1} \delta_\beta^\alpha \partial_\mu \Delta + \frac{1}{2} g^{\alpha\gamma} \partial_\mu g_{\beta\gamma} \\ \hat{\Gamma}^\mu_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} b g_{\alpha\beta} \Delta^{-2} \partial^\mu \Delta - \frac{1}{2} \Delta^{-1} \partial^\mu g_{\alpha\beta} \\ \hat{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma} &= \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} - \frac{1}{2} b \Delta^{-1} (\delta_\gamma^\alpha \partial_\beta \Delta + \delta_\beta^\alpha \partial_\gamma \Delta - g_{\beta\gamma} \partial^\alpha \Delta) \end{aligned} \quad (\text{C.2.28})$$

となる。ここで

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \equiv \frac{1}{2} g^{\alpha\delta} (\partial_\beta g_{\delta\gamma} + \partial_\gamma g_{\delta\beta} - \partial_\delta g_{\beta\gamma}) = \Delta^{-1} X_{\alpha\mu\alpha} (\delta_{\beta\gamma} + \hat{\mu}_\beta \hat{\mu}_\gamma) \quad (\text{C.2.29})$$

である。 $\partial_\alpha \equiv \partial / \partial \mu_\alpha$, $\partial^\alpha \equiv g^{\alpha\beta} \partial_\beta$ である。

Riemann テンソルは

$$\hat{R}^M_{NPQ} = \partial_P \hat{\Gamma}^M_{NQ} - \partial_Q \hat{\Gamma}^M_{NP} + \hat{\Gamma}^M_{PR} \hat{\Gamma}^R_{QN} - \hat{\Gamma}^M_{QR} \hat{\Gamma}^R_{PN} \quad (\text{C.2.30})$$

として求められるので、Ricci テンソル

$$\hat{R}_{NQ} \equiv \hat{R}^M_{NMQ} = \partial_M \hat{\Gamma}^M_{NQ} - \partial_Q \hat{\Gamma}^M_{NM} + \hat{\Gamma}^M_{MR} \hat{\Gamma}^R_{QN} - \hat{\Gamma}^M_{QR} \hat{\Gamma}^R_{MN} \quad (\text{C.2.31})$$

を求めると、結果は

$$\begin{aligned}\hat{R}_{\mu\nu} = & R_{\mu\nu} - \frac{1}{4}X_i^{-2}\partial_\mu X_i\partial_\nu X_i + \frac{1}{2}\Delta^{-1}X_i^{-1}\mu_i^2\partial_\mu X_i\partial_\nu X_i - \frac{1}{2}\Delta^{-2}\partial_\mu\Delta\partial_\nu\Delta \\ & + \frac{1}{2}a(\Delta^{-2}\partial_\lambda\Delta\partial^\lambda\Delta - \Delta^{-1}\square\Delta)g_{\mu\nu} \\ & - a\left[\sum_i X_i^2 - \Delta^{-1}X_i^2\mu_i^2\sum_j X_j - 2\Delta^{-1}X_i^3\mu_i^2 + 2\Delta^{-2}(X_i^2\mu_i^2)^2\right]g_{\mu\nu}\end{aligned}\quad (\text{C.2.32})$$

$$\begin{aligned}\hat{R}_{\alpha\beta} = & R_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}bg_{\alpha\beta}\Delta^{-2}\square\Delta - \frac{1}{2}bg_{\alpha\beta}\Delta^{-3}\partial_\lambda\Delta\partial^\lambda\Delta - \frac{1}{2}\Delta^{-1}\square g_{\alpha\beta} \\ & + \frac{1}{2}\Delta^{-1}g^{\gamma\delta}\partial_\lambda g_{\alpha\gamma}\partial^\lambda g_{\beta\delta} - \frac{1}{4}\Delta^{-2}\partial_\alpha\Delta\partial_\beta\Delta - \frac{1}{2}\Delta^{-1}\nabla_\alpha\partial_\beta\Delta \\ & - \frac{1}{4}bg_{\alpha\beta}\Delta^{-2}\partial_\gamma\Delta\partial^\gamma\Delta + \frac{1}{2}bg_{\alpha\beta}\Delta^{-1}\nabla_\gamma\partial^\gamma\Delta\end{aligned}\quad (\text{C.2.33})$$

$$\hat{R}_{\alpha\mu} = -\frac{1}{2}\Delta^{-2}U(X_\alpha^{-1}\partial_\mu X_\alpha - X_0^{-1}\partial_\mu X_0)\mu_\alpha\quad (\text{C.2.34})$$

となることが分かる。 \square は低次元時空中における Laplacian であり、 ∇_α は内部空間の計量 $g_{\alpha\beta}$ に関する共変微分である。(アフィン接続 $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ が入る。) ここで

$$\begin{aligned}\partial^\alpha\Delta\partial_\alpha\Delta = & 4X_i^3\mu_i^2 - 4\Delta^{-1}(X_i^2\mu_i^2)^2 \\ \Gamma^\alpha_{\alpha\beta} = & \frac{1}{2}\Delta^{-1}\partial_\beta\Delta + \frac{1}{\mu_0^2}\mu_\beta \\ \nabla_\alpha\partial^\alpha\Delta = & 2\sum_i X_i^2 - 2\Delta^{-1}X_i^2\mu_i^2\sum_j X_j + 4\Delta^{-2}(X_i^2\mu_i^2)^2 \\ & - 4\Delta^{-1}X_i^3\mu_i^2 + \frac{1}{2}\Delta^{-1}\partial^\alpha\Delta\partial_\alpha\Delta \\ R_{\alpha\beta} = & \Delta^{-1}\bar{g}_{\alpha\beta}\sum_\gamma X_\gamma - \Delta^{-2}(X_i^2\mu_i^2)\bar{g}_{\alpha\beta} \\ & + \Delta^{-2}(X_\alpha - X_0)(X_\beta - X_0)\mu_\alpha\mu_\beta - \Delta^{-1}(X_\alpha - X_0)\delta_{\alpha\beta} \\ \square g_{\alpha\beta} = & X_\alpha^{-3}\partial_\lambda X_\alpha\partial^\lambda X_\alpha\delta_{\alpha\beta} + X_0^{-3}\partial_\lambda X_0\partial^\lambda X_0\hat{\mu}_\alpha\hat{\mu}_\beta \\ & - 4(X_\alpha\delta_{\alpha\beta} + X_0\hat{\mu}_\alpha\hat{\mu}_\beta) + 2\bar{g}_{\alpha\beta}\sum_j X_j + \frac{4}{N}Vg_{\alpha\beta} \\ g^{\gamma\delta}\partial_\lambda g_{\alpha\gamma}\partial^\lambda g_{\beta\delta} = & X_\alpha^{-3}\partial_\lambda X_\alpha\partial^\lambda X_\alpha\delta_{\alpha\beta} + X_0^{-3}\partial_\lambda X_0\partial^\lambda X_0\hat{\mu}_\alpha\hat{\mu}_\beta \\ & - \Delta^{-1}(X_\alpha^{-1}\partial_\lambda X_\alpha - X_0^{-1}\partial_\lambda X_0)(X_\beta^{-1}\partial^\lambda X_\beta - X_0^{-1}\partial^\lambda X_0)\mu_\alpha\mu_\beta\end{aligned}\quad (\text{C.2.35})$$

である。また、 $\hat{\mu}_\alpha \equiv \mu_\alpha/\mu_0$ であり、

$$\bar{g}_{\alpha\beta} \equiv \delta_{\alpha\beta} + \hat{\mu}_\alpha\hat{\mu}_\beta\quad (\text{C.2.36})$$

である。(C.2.12) 式より、 $\bar{g}_{\alpha\beta}$ は $N-1$ 次元単位球面上の計量であり、これは全ての i について $X_i = 1$ とおいた場合に相当する。

Einstein 方程式が無矛盾であること

高次元 Einstein 方程式は

$$\hat{R}_{MN} = \hat{S}_{MN}; \quad \hat{S}_{MN} = \frac{1}{2(D-1)!}\left[\hat{F}_{MN}^2 - \frac{D-3}{D(D-1)}\hat{F}^2\hat{g}_{MN}\right]\quad (\text{C.2.37})$$

である。 $\hat{F}_{M_1 \dots M_D}$ の非零成分は (C.2.17) 式で既に確認した。よって、計算すると

$$\begin{aligned}\hat{F}^2 &= -D! \Delta^{-D} (U^2 + \Delta X_i^{-1} \mu_i^2 \partial_\lambda X_i \partial^\lambda X_i - \partial_\lambda \Delta \partial^\lambda \Delta) \\ \hat{F}_{\mu\nu}^2 &= (D-1)! \Delta^{-2} [\Delta X_i^{-1} \mu_i^2 \partial_\mu X_i \partial_\nu X_i - \partial_\mu \Delta \partial_\nu \Delta \\ &\quad - (\Delta X_i^{-1} \mu_i^2 \partial_\lambda X_i \partial^\lambda X_i - \partial_\lambda \Delta \partial^\lambda \Delta) g_{\mu\nu} - U^2 g_{\mu\nu}] \\ \hat{F}_{\alpha\beta}^2 &= -(D-1)! \Delta^{-2} (X_\alpha^{-1} \partial_\lambda X_\alpha - X_0^{-1} \partial_\lambda X_0) (X_\beta^{-1} \partial^\lambda X_\beta - X_0^{-1} \partial^\lambda X_0) \mu_\alpha \mu_\beta\end{aligned}\quad (\text{C.2.38})$$

となる。ここで

$$U \equiv \sum_i (2X_i^2 \mu_i^2 - \Delta X_i) \quad (\text{C.2.18})$$

である。よって

$$\begin{aligned}\hat{S}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \Delta^{-1} X_i^{-1} \mu_i^2 \partial_\mu X_i \partial_\nu X_i - \frac{1}{2} \Delta^{-2} \partial_\mu \Delta \partial_\nu \Delta \\ &\quad - \frac{1}{D-1} \Delta^{-2} (U^2 - \partial_\lambda \Delta \partial^\lambda \Delta + \Delta X_i^{-1} \mu_i^2 \partial_\lambda X_i \partial^\lambda X_i) g_{\mu\nu} \\ \hat{S}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} b \Delta^{-3} U^2 g_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} b \Delta^{-2} g_{\alpha\beta} X_i^{-1} \mu_i^2 \partial_\lambda X_i \partial^\lambda X_i - \frac{1}{2} b \Delta^{-3} \partial_\lambda \Delta \partial^\lambda \Delta g_{\alpha\beta} \\ &\quad - \frac{1}{2} \Delta^{-2} (X_\alpha^{-1} \partial_\lambda X_\alpha - X_0^{-1} \partial_\lambda X_0) (X_\beta^{-1} \partial^\lambda X_\beta - X_0^{-1} \partial^\lambda X_0) \mu_\alpha \mu_\beta \\ \hat{S}_{\alpha\mu} &= -\frac{1}{2} \Delta^{-2} U (X_\alpha^{-1} \partial_\mu X_\alpha - X_0^{-1} \partial_\mu X_0) \mu_\alpha\end{aligned}\quad (\text{C.2.39})$$

であることが分かる。

高次元 Einstein 方程式において $\hat{R}_{\mu\nu} = \hat{S}_{\mu\nu}$ が成り立っているとき、低次元 Einstein 方程式 (C.1.18) が成立することを確認するために、以上の結果を (C.2.37) 式に代入しよう。スカラー場の運動方程式を用いると、このとき

$$\square \Delta = X_i^{-1} \mu_i^2 \partial_\lambda X_i \partial^\lambda X_i + 4X_i^3 \mu_i^2 - 2X_i^2 \mu_i^2 \sum_j X_j - \frac{4}{N} \Delta V \quad (\text{C.2.40})$$

と deduction できる。全ての結果を合わせると $\hat{R}_{\mu\nu} = \hat{S}_{\mu\nu}$ においては μ_i 依存性が全て消えてしまって、低次元 Einstein 方程式 (C.1.18) が正しく再現できることが確認できる。

$\hat{R}_{\alpha\beta}$ については、上に挙げた公式を用いることにより

$$\begin{aligned}\hat{R}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} b \Delta^{-3} U^2 g_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \Delta^{-2} g_{\alpha\beta} X_i^{-1} \mu_i^2 \partial_\lambda X_i \partial^\lambda X_i - \frac{1}{2} b \Delta^{-3} \partial_\lambda \Delta \partial^\lambda \Delta \\ &\quad - \frac{1}{2} \Delta^{-1} (X_\alpha^{-1} \partial_\lambda X_\alpha - X_0^{-1} \partial_\lambda X_0) (X_\beta^{-1} \partial^\lambda X_\beta - X_0^{-1} \partial^\lambda X_0) \mu_\alpha \mu_\beta\end{aligned}\quad (\text{C.2.41})$$

と計算できるので、 $\hat{S}_{\alpha\beta}$ と等しいことが確認できる。

また、 $\hat{R}_{\alpha\mu} = \hat{S}_{\alpha\mu}$ については、既に求めた結果から等しいことが分かる。

以上で、reduction ansatz には矛盾がないことが完全に確認することができた。

C.3 さらに Yang-Mills 場を含んだ超重力理論

C.1 節で示した Lagrangian には、Yang-Mills ゲージ場が入っていなかった。ここでは、 p 形式 field strength と dilaton 場が、 D 次元重力場に結合する理論を考えることにより、Lagrangian に Yang-Mills 場の項を導入しよう。

その結果、 n 次元球面への Kaluza-Klein reduction のうち、 $SO(n+1)$ Yang-Mills ゲージ場を含む massless 場を残す切断を行うものが、線形レベルでも非線形レベルでも矛盾が無いように構成できることを示す。

全てのゲージ場を保持できるのは、非常に特殊な場合に限られる。

以上の議論において、内部空間の球面計量が不均一に変形する様子をパラメータ付けする低次元のスカラー場を含んだ、Kaluza-Klein reduction ansatz があることを確認した。一般に、Kaluza-Klein モードのタワー全体において massless セクターのみを残すという切断の手続きは、線形レベルを超えてしまうと矛盾が起こる。なぜなら、massless 場が作るカレントが massive 場の源 (source) として働くことがあるからである。従って、massive 場を単純に 0 とすると運動方程式が矛盾したものになってしまうのである。

従って、一般に理論を n 次元球面への Kaluza-Klein reduction するとき、全ての massless 場、特に全ての $SO(n+1)$ ゲージ場を保持することは不可能だと考えられている。しかしながら、特別な場合にはそれが可能となることもまた知られている。例として

- 11 次元超重力理論の S^7 へのコンパクト化：4 次元 $\mathcal{N} = 8$ ゲージ化 $SO(8)$ 超重力理論 [112]
- 11 次元超重力理論の S^4 へのコンパクト化：7 次元ゲージ化 $SO(5)$ 超重力理論 [29, 30]
- 10 次元 IIB 型超重力理論の S^5 へのコンパクト化：5 次元ゲージ化 $SO(6)$ 超重力理論 [109]

が挙げられる。

一部のゲージ場しか保持できない reduction について

massless 場の一部だけを保持する reduction について調べておくのも有用である。なぜなら、massless 場を全て保持する reduction よりも reduction ansatz がずっと簡単になるからである。よって、低次元理論を高次元理論に持ち上げるために reduction ansatz を使いたいときには、このような reduction は大役に立つのである。

例としては、上で挙げた 3 つの reduction において、ゲージ群を最大可換部分群に切断したものの、つまり

- $D = 4$ の場合： $SO(8)$ ゲージ化超重力理論を $U(1)^4$ の最大可換部分群に切断したもの [18, 111]
- $D = 5$ の場合： $SO(6)$ ゲージ化超重力理論を $U(1)^3$ の最大可換部分群に切断したもの [78, 111]
- $D = 7$ の場合： $SO(5)$ ゲージ化超重力理論を $U(1)^2$ の最大可換部分群に切断したもの [111]

が挙げられる。

超対称性を破る切断も有用である。

massless な超対称多重項 (supermultiplet) において、超対称でない切断を行う Kaluza-Klein reduction も有用である。例としては、前節まで扱ってきた理論、つまり $D = 4, 5, 7$ 次元の最大超対称な超重力理論を重力場と 7, 5, 4 個のスカラー場のみから構成される部分セクターに切断したものが挙げられる。

これらのスカラー場は、 $SL(8, \mathbf{R})/SO(8)$, $SL(6, \mathbf{R})/SO(6)$, $SL(5, \mathbf{R})/SO(5)$ のスカラー部分多様体を記述するユニモジュラー対称テンソル T_{ij} を対角化した、その成分で表されるものであった。

C.3.1 球面上への reduction の可能性

球面上への reduction が可能なのは非常に特殊な場合である。

まず、球面上への矛盾のない Kaluza-Klein reduction ができるのは、特殊な場合に限られることを強調しておこう。

ここで考えているのは、 S^n への reduction によって得られる低次元理論が $SO(n+1)$ 局所ゲージ対称性を持つ場合であるが、球面 S^n ではなくてトーラス T^n に reduction して得られる理論 (非ゲージ化理論) は、剰余多様体 (coset manifold) G/H で記述されるスカラー場を持つ。ここで $H \subset SO(n+1)$ である。

よって、ゲージ化理論を実現するには、非ゲージ化理論をゲージ化する過程において、大局的な対称性 G の

$SO(n+1)$ 部分群は局所的対称性となり、この部分群は H に含まれなければならない。もし重力と反対称テンソルを含む一般的な理論を T^n 上に reduction すると、 $GL(n, \mathbf{R})$ の大局的な対称性を持った低次元理論となる [110]。この対称性のコンパクトな最大部分群は $SO(n)$ である。これは $SO(n+1)$ 群をゲージ化するには不十分である。

以上より、純粋な重力理論を S^n 上に矛盾のない reduction をして、さらに $SO(n+1)$ Yang-Mills 場を保持するのは、一般には不可能であることが分かる。

ところが、非常に特別な場合がある。 T^n への reduction から生じる $GL(n, \mathbf{R})$ 大局的対称性が、計量の reduction と他の高次元場の reduction からそれぞれ生じるスカラー場が協力することによって、より大きな対称性に高められる (enhanced) ことがあるのである。

重力と 1 種類の p 形式 field strength を含む D 次元理論を考える場合、このように大局的対称性が高められるのは

$$(D, p) = (11, 4), (11, 7), (10, 5) \quad (\text{C.3.1})$$

の場合に限られる。これらは 11 次元超重力理論と 10 次元 IIB 型超重力理論に関連していて、高められた対称性を表 C.3 に示した。

但し、enhancement が起こるための条件として、以下のことが満たされるべきであることに注意しておかなくてはならない。

$D = 11, p = 4$ の場合

11 次元理論を T^7 上の 4 次元理論に reduction した場合、対称性を $GL(7, \mathbf{R})$ から $SL(8, \mathbf{R})$ に高めるには、4 形式 field strength が FFA という形の項を持つことが必要である。この項の係数は超対称性から決まる。これによって、対称性は E_7 まで高められることが知られている。

$D = 10, p = 5$ の場合

10 次元理論を T^5 上の 5 次元理論に reduction した場合、対称性を $GL(5, \mathbf{R})$ から $SL(6, \mathbf{R})$ に高めるには、5 形式 field strength が自己双対 (または反自己双対) でなければならない。

この結果として得られる理論に含まれる場は

- 重力と自己双対 5 形式場の理論の S^5 reduction : 計量、 $SO(6)$ Yang-Mills 場 $A_{(1)}^{ij}$ 、20 個のスカラー場 T_{ij}
- S^4 reduction : 計量と Yang-Mills 場とスカラー場と 5 個の 3 形式場 $A_{(3)}^i$
- S^7 reduction : 計量と Yang-Mills 場とスカラー場と 35 個の擬スカラー場 $\phi_{[ijkl]_+}$ ($SO(8)$ 群の脚が自己双対になっている。)

である。計量・Yang-Mills 場・スカラー場以外に追加されている場は、Yang-Mills 場がそれらの源 (source) として作用することによる [113]。 n 次元球面 S^n 上の矛盾のない reduction のうち、 $SO(n+1)$ Yang-Mills 場を全て含むものは、必ず低次元理論の massless 場を全て含まなくてはならないのである。

(D, p)	高められた対称性	許容されるゲージ対称性
(11, 4)	$SL(5, \mathbf{R})/SO(5)$	$SO(5)$
(11, 7)	$SL(6, \mathbf{R})/SO(6)$	$SO(6)$
(10, 5)	$SL(8, \mathbf{R})/SO(8)$	$SO(8)$

表 C.3: 高められた (enhanced) 対称性と許容されるゲージ対称性

ディラトンを追加して reduction の可能性を広げることができる。

S^n 上への矛盾の無い Kaluza-Klein reduction において $SO(n+1)$ ゲージ場を保持するには、 T^n 上への reduction で得られる $GL(n, \mathbf{R})$ 大局的な対称性が適切に高められなければならないことを確認した。つまり、スカラー多様体 $GL(n, \mathbf{R})/O(n)$ の分母 (denominator) が充分大きく、 $SO(n+1)$ 群を部分群として含まなければならないのである。

ところが、対称性の増大 (enhancement) が起きる可能性は非常に限られているのであった [110, 114]。この理由は次のようにして理解することができる。

スカラー場は n 個の「ディラトン」(dilaton) と「アクシオン」(axion) に分けることができる。ディラトンは内部空間であるトーラス T^n の計量の対角成分であり、アクシオンはその計量の非対角成分と反対称テンソルの reduction に由来する。

ディラトンは各々 $-\frac{1}{2}e^{\vec{c}_i \cdot \vec{\phi}}(\partial\chi_i)^2$ という形の運動項 (kinetic term) を持っている。ここで、 \vec{c}_i は「ディラトンベクトル」と呼ばれ、ディラトンと特定のアクシオンの結合定数を特徴付けるものである。

D 次元重力と p 形式 field strength を持った理論を T^n 上へ reduction すると、一般に $GL(n, \mathbf{R})$ 大局的対称性を持つ理論が得られる。実は、ディラトンベクトルのうち、計量に由来するアクシオンに関連づいたもの \vec{b}_i は $SL(n, \mathbf{R})$ 代数の正ルートの完全集合 (complete set) をなす。一方、ディラトンベクトルのうち、 p 形式 field strength に由来するアクシオンに関連づいたもの \vec{a}_i は $SL(n, \mathbf{R})$ の下でのある表現のウェイトを構成するのである。

従って、大局的対称性の増大が起こるときには、ディラトンベクトル \vec{a}_i の一部または全部が、高められた (enhanced) 対称性代数の正ルートにならなければいけないことになる。しかし、これは一般には起こらない。なぜなら一般に、field strength に由来するベクトル \vec{a}_i の長さが、計量に由来するベクトル \vec{b}_i の長さと同じか釣り合いが取れなくなってしまうからだ。但し、この比較はディラトンの運動項に標準的な規格化を施した上で行うものとする。

ディラトンベクトルの長さを特徴付ける方法は [115] で示されている。それによれば、 \vec{c}_i の長さは、ある定数 δ を導入して

$$|\vec{c}|^2 = \delta - \frac{2(m-1)(D-m-1)}{D-2} \quad (\text{C.3.2})$$

と表される。ここで、 D は時空の次元を表している。また、 m について、field strength $F_{(m)}$ のディラトン結合が $e^{\vec{c} \cdot \vec{\phi}}$ であるとして表している。但し、 $D = 11, 10$ の場合は、全ての field strength について $\delta = 4$ が成り立つことが知られている [116]。この方法の長所は、toroidal な Kaluza-Klein reduction において δ が保存される点である。従って、大局的対称性の増大が起こるのを確認するのが簡単なのである。

この方法を用いて、議論を行っていきこう。まず、ディラトンベクトル \vec{b}_i は常に $\delta = 4$ を満たしている [115]。従って、ディラトンベクトル \vec{a}_i は \vec{b}_i と同じ長さを持たなくてはならないので、 $\delta = 4$ を満たさなくてはならないことになる。つまり、全ての \vec{a}_i は同じ長さを持っていて、全ての \vec{b}_i も同じ長さを持っているので、simply-laced enhanced 対称群を得るためには、 \vec{a}_i の長さと \vec{b}_i の長さは等しくなければならないのである。

以上の議論より、重力と p 形式 field strength のみを持つ D 次元理論を考えると、ディラトンがないので $|\vec{c}| = 0$ であるから、(C.3.2) 式より

$$2D - 4 = (p-1)(D-p-1) \quad (\text{C.3.3})$$

が成り立っていないことが分かる。この方程式の整数解 (D, p) は

$$(D, p) = (11, 4), (11, 7), (10, 5) \quad (\text{C.3.4})$$

のみであり、純粋な重力理論を S^n 上に矛盾なく reduction できるのは非常に限られた場合であることが確認できる。

しかし、この D 次元理論にディラトン場を追加することで、大局的対称性 $GL(n, \mathbf{R})$ が高められる可能性を広げることができる。つまり、 $\delta = 4$ を満たすように、 p 形式 field strength に対するディラトン場の結合を調

整してやればよいのである。その結果、 D 次元 Lagrangian

$$\mathcal{L}_D = \hat{R} \hat{*} \mathbf{1} - \frac{1}{2} \hat{*} d\hat{\phi} \wedge d\hat{\phi} - \frac{1}{2} e^{-a\hat{\phi}} \hat{*} \hat{F}_{(p)} \wedge \hat{F}_{(p)} \quad (\text{C.3.5})$$

が得られる。ここで a は

$$a^2 = 4 - \frac{2(p-1)(D-p-1)}{D-2} \quad (\text{C.3.6})$$

を満たす。 $\hat{\cdot}$ は、それが高次元の場や量であることを表している。当然であるが、(C.3.4) の場合は、(C.3.5) 式において $a = 0$ とした Lagrangian を用いればよい。

参考文献

- [1] H. Lin, O. Lunin and J. M. Maldacena, *Bubbling AdS space and 1/2 BPS geometries*, JHEP **0410** (2004) 025, [hep-th/0409174](#).
- [2] H. Lin and J. Maldacena, *Fivebranes from gauge theory*, Phys. Rev. **D74** (2006) 084014, [hep-th/0509235](#).
- [3] E. Witten, *Constraints On Supersymmetry Breaking*, Nucl. Phys. **B202** (1982) 253.
- [4] J. Kinney, J. Maldacena, S. Minwalla and S. Raju, *An Index for 4 dimensional Super Conformal Theories*, [hep-th/0510251](#).
- [5] N. Kim, T. Klose and J. Plefka, *Plane-wave Matrix Theory from $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills on $R \times S^3$* , Nucl. Phys. **B671** (2003) 359, [hep-th/0306054](#).
- [6] T. Klose and J. Plefka, *On the Integrability of large N Plane-Wave Matrix Theory*, Nucl. Phys. **B679** (2004) 127, [hep-th/0310232](#).
- [7] K. Dasgupta, M. M. Sheikh-Jabbari and M. Van Raamsdonk, *Protected Multiplets of M-Theory on a Plane Wave*, JHEP **0209** (2002) 021, [hep-th/0207050](#).
- [8] N. Kim and J.-H. Park, *Superalgebra for M-theory on a pp-wave*, Phys. Rev. **D66** (2002) 106007, [hep-th/0207061](#).
- [9] J. A. Minahan and K. Zarembo, *The Bethe-Ansatz for $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills*, JHEP **0303** (2003) 013, [hep-th/0212208](#).
- [10] S. Frolov and A. A. Tseytlin, *Multi-spin string solutions in $AdS_5 \times S^5$* , Nucl. Phys. **B668** (2003) 77, [hep-th/0304255](#).
- [11] M. R. Douglas and G. Moore, *D-branes, Quivers, and ALE Instantons*, [hep-th/9603167](#).
- [12] D. Boulatov and V. Kazakov, *Vortex anti-vortex sector of one-dimensional string theory via the upside down matrix oscillator*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **25A** (1992) 38.
- [13] S. Corley, A. Jevicki and S. Ramgoolam, *Exact Correlators of Giant Gravitons from dual $\mathcal{N} = 4$ SYM*, Adv. Theor. Math. Phys. **5** (2002) 809, [hep-th/0111222](#).
- [14] J. P. Gauntlett, D. Martelli, J. Sparks and D. Waldram, *Supersymmetric AdS_5 solutions of M-theory*, Class. Quant. Grav. **21** (2004) 4335, [hep-th/0402153](#).
- [15] J. F. Nieves and P. B. Pal, *Generalized Fierz identities*, Am. J. Phys. **72** (2004) 1100, [hep-ph/0306087](#).
- [16] M. Cvetič and S. S. Gubser, *Phases of R-charged Black Holes, Spinning Branes and Strongly Coupled Gauge Theories*, JHEP **9904** (1999) 024, [hep-th/9902195](#).
- [17] J. T. Liu and R. Minasian, *Black holes and membranes in AdS_7* , Phys. Lett. **B457** (1999) 39, [hep-th/9903269](#).
- [18] M. J. Duff and J. T. Liu, *Anti-de Sitter Black Holes in Gauged $\mathcal{N} = 8$ Supergravity*, Nucl. Phys. **B554** (1999) 237, [hep-th/9901149](#).
- [19] D. Bak, S. Siwach and H.-U. Yee, *1/2 BPS Geometries of $M2$ Giant Gravitons* Phys. Rev. **D72**

- (2005) 086010, [hep-th/0504098](#).
- [20] K. Sugiyama and K. Yoshida, *Type IIA String and Matrix String on PP-wave*, Nucl. Phys. **B644** (2002) 128, [hep-th/0208029](#).
- [21] S. Hyun and H. Shin, *$\mathcal{N} = (4, 4)$ Type IIA String Theory on PP-Wave Background*, JHEP **0210** (2002) 070, [hep-th/0208074](#).
- [22] S. Hyun and H. Shin, *Solvable $\mathcal{N} = (4, 4)$ Type IIA String Theory in Plane-Wave Background and D-Branes*, Nucl. Phys. **B654** (2003) 114, [hep-th/0210158](#).
- [23] J. Maldacena, G. Moore and N. Seiberg, *D-Brane Instantons and K-Theory Charges*, JHEP **0111** (2001) 062, [hep-th/0108100](#).
- [24] J. Maldacena, G. Moore and N. Seiberg, *D-brane Charges in Five-brane backgrounds*, JHEP **0110** (2001) 005, [hep-th/0108152](#).
- [25] M. Pernici, K. Pilch and P. van Nieuwenhuizen, *Gauged Maximally Extended Supergravity in Seven Dimensions*, Phys. Lett. **B143** (1984) 103.
- [26] S. R. Coleman, *Q Balls*, Nucl. Phys. **B262** (1985) 263, [Erratum-ibid. Nucl. Phys. **B269** (1986) 744].
- [27] H. Lu, C. N. Pope and J. Rahmfeld, *A Construction of Killing Spinors on S^n* , J. Math. Phys. **40** (1999) 4518, [hep-th/9805151](#).
- [28] Z.-W. Chong, H. Lu and C. N. Pope, *BPS Geometries and AdS Bubbles*, Phys. Lett. **B614** (2005) 96, [hep-th/0412221](#).
- [29] H. Nastase, D. Vaman and P. van Nieuwenhuizen, *Consistent nonlinear KK reduction of 11d supergravity on $AdS_7 \times S_4$ and self-duality in odd dimensions*, Phys. Lett. **B469** (1999) 96, [hep-th/9905075](#).
- [30] H. Nastase, D. Vaman and Peter van Nieuwenhuizen, *Consistency of the $AdS_7 \times S_4$ reduction and the origin of self-duality in odd dimensions*, Nucl. Phys. **B581** (2000) 179, [hep-th/9911238](#).
- [31] M. Berkooz, M. Rozali and N. Seiberg, *Matrix Description of M-theory on T^4 and T^5* , Phys. Lett. **B408** (1997) 105, [hep-th/9704089](#).
- [32] N. Seiberg, *Matrix Description of M-theory on T^5 and T^5/Z_2* , Phys. Lett. **B408** (1997) 98, [hep-th/9705221](#).
- [33] O. Aharony, M. Berkooz, D. Kutasov and N. Seiberg, *Linear Dilatons, NS5-branes and Holography*, JHEP **9810** (1998) 004, [hep-th/9808149](#).
- [34] N. Itzhaki, J. M. Maldacena, J. Sonnenschein and S. Yankielowicz, *Supergravity and The Large N Limit of Theories With Sixteen Supercharges*, Phys. Rev. **D58** (1998) 046004, [hep-th/9802042](#).
- [35] A. Santambrogio and D. Zanon, *Exact anomalous dimensions of $\mathcal{N} = 4$ Yang-Mills operators with large R charge*, Phys. Lett. **B545** (2002) 42, [hep-th/0206079](#).
- [36] D. J. Gross, A. Mikhailov and R. Roiban, *Operators with large R charge in $\mathcal{N} = 4$ Yang-Mills theory*, Ann. Phys. **301** (2002) 31, [hep-th/0205066](#).
- [37] S. S. Gubser, I. R. Klebanov and A. W. Peet, *Entropy and Temperature of Black 3-Branes*, Phys. Rev. **D54** (1996) 3915, [hep-th/9602135](#).
- [38] I. Swanson and X. Wu, *Quantizing String Theory in $AdS_5 \times S^5$: Beyond the pp-Wave*, Nucl. Phys. **B673** (2003) 3, [hep-th/0307032](#).
- [39] D. Serban and M. Staudacher, *Planar $\mathcal{N} = 4$ gauge theory and the Inozemtsev long range spin chain*, JHEP **0406** (2004) 001, [hep-th/0401057](#).
- [40] G. T. Horowitz and T. Jacobson, *Note on Gauge Theories on M/Γ and the AdS/CFT Correspondence*, JHEP **0201** (2002) 013, [hep-th/0112131](#).

- [41] H. Ooguri and C. Vafa, *Two-Dimensional Black Hole and Singularities of CY Manifolds*, Nucl. Phys. **B463** (1996) 55, hep-th/9511164.
- [42] R. Gregory, J. A. Harvey and G. Moore, *Unwinding strings and T-duality of Kaluza-Klein and H-Monopoles*, Adv. Theor. Math. Phys. **1** (1997) 283, hep-th/9708086.
- [43] M. Bershadsky, Z. Kakushadze and C. Vafa, *String Expansion as Large N Expansion of Gauge Theories*, Nucl. Phys. **B523** (1998) 59, hep-th/9803076.
- [44] S. Mukhi, M. Rangamani and E. Verlinde, *Strings from Quivers, Membranes from Moose*, JHEP **0205** (2002) 023, hep-th/0204147.
- [45] D. Berenstein, J. M. Maldacena and H. Nastase, *Strings in flat space and pp waves from $\mathcal{N} = 4$ Super Yang Mills*, JHEP **0204** (2002) 013, hep-th/0202021.
- [46] M. Blau, J. Figueroa-O'Farrill, C. Hull and G. Papadopoulos, *A new maximally supersymmetric background of IIB superstring theory*, JHEP **0201** (2002) 047, hep-th/0110242.
- [47] R. Clarkson and R. B. Mann, *Soliton Solutions to the Einstein Equations in Five Dimensions*, hep-th/0508109.
- [48] R. Clarkson and R. B. Mann, *Eguchi-Hanson Solitons in Odd Dimensions*, Class. Quant. Grav. **23** (2006) 1507, hep-th/0508200.
- [49] T. Eguchi and A. J. Hanson, *Asymptotically Flat Selfdual Solutions To Euclidean Gravity*, Phys. Lett. **B74** (1978) 249.
- [50] A. Adams, J. Polchinski and E. Silverstein, *Don't Panic! Closed String Tachyons in ALE Spacetimes*, JHEP **0110** (2001) 029, hep-th/0108075.
- [51] T. Banks, W. Fischler, S.H. Shenker and L. Susskind, *M Theory As A Matrix Model: A Conjecture*, Phys. Rev. **D55** (1997) 5112, hep-th/9610043.
- [52] R. C. Myers, *Dielectric-Branes*, JHEP **9912** (1999) 022, hep-th/9910053.
- [53] J. McGreevy, L. Susskind and N. Toumbas, *Invasion of the giant gravitons from anti-de Sitter space*, JHEP **0006** (2000) 008, hep-th/0003075.
- [54] J. Polchinski and M. J. Strassler, *The String Dual of a Confining Four-Dimensional Gauge Theory*, hep-th/0003136.
- [55] K. Dasgupta, M. M. Sheikh-Jabbari and M. Van Raamsdonk, *Matrix Perturbation Theory for M-Theory on a PP-Wave*, JHEP **0205** (2002) 056, hep-th/0205185.
- [56] B. de Wit, K. Peeters and J. Plefka, *Superspace Geometry for Supermembrane Backgrounds*, Nucl. Phys. **B532** (1998) 99, hep-th/9803209.
- [57] B. de Wit, K. Peeters, J. Plefka and A. Sevrin, *The M-Theory Two-Brane in $AdS_4 \times S^7$ and $AdS_7 \times S^4$* , Phys. Lett. **B443** (1998) 153, hep-th/9808052.
- [58] B. de Wit, J. Hoppe and H. Nicolai, *On The Quantum Mechanics Of Supermembranes*, Nucl. Phys. **B305** (1988) 545.
- [59] L. Susskind, *Another Conjecture about M(atr ix) Theory*, hep-th/9704080.
- [60] W. Taylor and M. Van Raamsdonk, *Multiple D0-branes in Weakly Curved Backgrounds*, Nucl. Phys. **B558** (1999) 63, hep-th/9904095.
- [61] V. G. Kac, *Lie Superalgebras*, Adv. Math. **26** (1977) 8.
- [62] H. P. Jacobsen, *The Full Set of Unitarizable Hight Weight Modules of Basic Classical Lie SUPeralgebras*, Memoirs of the American Mathematical Society (1994) 532.
- [63] J. Maldacena, M. M. Sheikh-Jabbari and M. Van Raamsdonk, *Transverse Fivebranes in Matrix Theory*, JHEP **0301** (2003) 038, hep-th/0211139.

- [64] H. Lin, *The Supergravity Dual of the BMN Matrix Model*, JHEP **0412** (2004) 001, hep-th/0407250.
- [65] D. Berenstein, *Large N BPS states and emergent quantum gravity*, JHEP **0601** (2006) 125, hep-th/0507203.
- [66] D. Berenstein, D. H. Correa and S. E. Vazquez, *All loop BMN state energies from matrices*, JHEP **0602** (2006) 048, hep-th/0509015.
- [67] C. G. Callan Jr., J. A. Harvey and A. E. Strominger, *Supersymmetric String Solitons*, hep-th/9112030.
- [68] T. Fischbacher, T. Klose and J. Plefka, *Planar plane-wave matrix theory at the four loop order: Integrability without BMN scaling*, JHEP **0502** (2005) 039 hep-th/0412331.
- [69] N. Beisert, *BMN Operators and Superconformal Symmetry*, Nucl. Phys. **B659** (2003) 79, hep-th/0211032.
- [70] N. Beisert, *The Complete One-Loop Dilatation Operator of $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills Theory*, Nucl. Phys. **B676** (2004) 3, hep-th/0307015.
- [71] W. Nahm, *Supersymmetries And Their Representations*, Nucl. Phys. **B135** (1978) 149.
- [72] J. Maldacena and C. Nuñez, *Supergravity description of field theories on curved manifolds and a no go theorem*, Int. J. Mod. Phys. **A16** (2001) 822, hep-th/0007018.
- [73] C. P. Boyer and J. D. Finley, *Killing Vectors In Selfdual, Euclidean Einstein Spaces*, J. Math. Phys. **23** (1982) 1126.
- [74] D. Berenstein, *A toy model for the AdS/CFT correspondence*, JHEP **0407** (2004) 018, hep-th/0403110.
- [75] P. Kraus, F. Larsen and S. P. Trivedi, *The Coulomb Branch of Gauge Theory from Rotating Branes*, JHEP **9903** (1999) 003, hep-th/9811120.
- [76] R. C. Myers and Ø. Tafjord, *Superstars and Giant Gravitons*, JHEP **0111** (2001) 009, hep-th/0109127.
- [77] K. Behrndt, A. H. Chamseddine and W. A. Sabra, *BPS black holes in $\mathcal{N} = 2$ five dimensional AdS supergravity*, Phys. Lett. **B442** (1998) 97, hep-th/9807187.
- [78] K. Behrndt, M. Cvetič and W. A. Sabra, *Non-Extreme Black Holes of Five Dimensional $\mathcal{N} = 2$ AdS Supergravity*, Nucl. Phys. **B553** (1999) 317, hep-th/9810227.
- [79] C. N. Pope and N. P. Warner, *A Dielectric Flow Solution with Maximal Supersymmetry*, JHEP **0404** (2004) 011, hep-th/0304132.
- [80] I. Bena and N. P. Warner, *A harmonic family of dielectric flow solutions with maximal supersymmetry*, JHEP **0412** (2004) 021, hep-th/0406145.
- [81] S. Sethi and L. Susskind, *Rotational Invariance in the M(atrrix) Formulation of Type IIB Theory*, Phys. Lett. **B400** (1997) 265, hep-th/9702101.
- [82] T. Banks and N. Seiberg, *Strings from Matrices*, Nucl. Phys. **B497** (1997) 41, hep-th/9702187.
- [83] M. M. Sheikh-Jabbari, *Tiny Graviton Matrix Theory: DLCQ of IIB Plane-Wave String Theory, A Conjecture*, JHEP **0409** (2004) 017, hep-th/0406214.
- [84] R. R. Khuri, *A Comment on String Solitons*, Phys. Rev. **D48** (1993) 2947, hep-th/9305143.
- [85] J. P. Gauntlett, D. A. Kastor and J. Traschen, *Overlapping Branes in M-Theory*, Nucl. Phys. **B478** (1996) 544, hep-th/9604179.
- [86] N. Itzhaki, D. Kutasov and N. Seiberg, *I-Brane Dynamics*, JHEP **0601** (2006) 119, hep-th/0508025.
- [87] A. Boyarsky, B. Kulik and O. Ruchayskiy, *Classical and Quantum Branes in $c = 1$ String Theory and Quantum Hall Effect*, hep-th/0312242.

- [88] M. M. Caldarelli and P. J. Silva, *Giant gravitons in AdS/CFT (I): matrix model and back reaction*, JHEP **0408** (2004) 029, hep-th/0406096.
- [89] E. Witten, *Anti De Sitter Space And Holography*, Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1998) 253, hep-th/9802150.
- [90] E. Brezin, C. Itzykson, G. Parisi and J. B. Zuber, *Planar Diagrams*, Commun. Math. Phys. **59** (1978) 35.
- [91] W. Taylor, *D-brane field theory on compact spaces*, Phys. Lett. **B394** (1997) 283, hep-th/9611042.
- [92] J. A. Minahan and A. P. Polychronakos, *Equivalence of Two Dimensional QCD and the $c = 1$ Matrix Model*, Phys. Lett. **B312** (1993) 155, hep-th/9303153.
- [93] M. R. Douglas, *Conformal Field Theory Techniques for Large N Group Theory*, hep-th/9303159.
- [94] M. R. Douglas, *Conformal Field Theory Techniques in Large N Yang-Mills Theory*, hep-th/9311130.
- [95] S. G. Naculich, H. A. Riggs and H. J. Schnitzer, *Group Level Duality In WZW Models And Chern-Simons Theory*, Phys. Lett. **B246** (1990) 417.
- [96] M. Camperi, F. Levstein and G. Zemba, *The Large N Limit Of Chern-Simons Gauge Theory*, Phys. Lett. **B247** (1990) 549.
- [97] L. Grant, L. Maoz, J. Marsano, K. Papadodimas and V. S. Rychkov, *Minisuperspace Quantization of “Bubbling AdS” and Free Fermion Droplets*, JHEP **0508** (2005) 025, hep-th/0505079.
- [98] L. Maoz and V. S. Rychkov, *Geometry Quantization from Supergravity: the case of “Bubbling AdS”*, JHEP **0508** (2005) 096, hep-th/0508059.
- [99] N. Berkovits and N. Seiberg, *Superstrings in Graviphoton Background and $\mathcal{N} = 1/2 + 3/2$ Supersymmetry*, JHEP **0307** (2003) 010, hep-th/0306226.
- [100] S. R. Das, J. Michelson and A. D. Shapere, *Fuzzy Spheres in pp Wave Matrix String Theory*, Phys. Rev. **D70** (2004) 026004, hep-th/0306270.
- [101] R. Haag, J. T. Lopuszanski and M. Sohnius, *All Possible Generators Of Supersymmetries Of The S Matrix*, Nucl. Phys. **B88** (1975) 257.
- [102] G. W. Gibbons and S. W. Hawking, *Classification Of Gravitational Instanton Symmetries*, Commun. Math. Phys. **66** (1979) 291.
- [103] T. Eguchi, P. B. Gilkey and A. J. Hanson, *Gravitation, Gauge Theories And Differential Geometry*, Phys. Rept. **66** (1980) 213.
- [104] S. Minwalla, *Restrictions Imposed by Superconformal Invariance on Quantum Field Theories*, Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1998) 781, hep-th/9712074.
- [105] A. M. Polyakov, *Gauge Fields and Space-Time*, Int. J. Mod. Phys. **A17S1** (2002) 119 hep-th/0110196.
- [106] V. G. Kac, *Representation of Classical Lie Superalgebras*, in *Differential Geometrical Methods in Mathematical Physics*, Edited by K. Bleuler, H. R. Petry and A. Reetz (Springer-Verlag, Berlin, 1978).
- [107] M. Cvetič, S. S. Gubser, H. Lu and C. N. Pope, *Symmetric Potentials of Gauged Supergravities in Diverse Dimensions and Coulomb Branch of Gauge Theories*, Phys. Rev. **D62** (2000) 086003, hep-th/9909121.
- [108] M. Cvetič, H. Lu, C. N. Pope and A. Sadrzadeh, *Consistency of Kaluza-Klein Sphere Reductions of Symmetric Potentials*, Phys. Rev. **D62** (2000) 046005, hep-th/0002056.
- [109] M. Cvetič, H. Lü and C. N. Pope, *Consistent Kaluza-Klein Sphere Reductions*, Phys. Rev. **D62** (2000) 064028, hep-th/0003286.

- [110] E. Cremmer, B. Julia, H. Lü and C.N. Pope, *Dualisation of Dualities, I*, Nucl. Phys. **B523** (1998) 73, [hep-th/9710119](#).
- [111] M. Cvetič, M. J. Duff, P. Hoxha, J. T. Liu, H. Lu, J. X. Lu, R. Martinez-Acosta, C. N. Pope, H. Sati and T. A. Tran, *Embedding AdS Black Holes in Ten and Eleven Dimensions*, Nucl. Phys. **B558** (1999) 96, [hep-th/9903214](#).
- [112] B. de Wit and H. Nicolai, *The Consistency of the S^7 Truncation in $D = 11$ Supergravity*, Nucl. Phys. **B281** (1987) 211.
- [113] M. Cvetič, H. Lu, C. N. Pope, A. Sadrzadeh and T.A. Tran, *Consistent $SO(6)$ Reduction Of Type IIB Supergravity on S^5* , Nucl. Phys. **B586** (2000) 275, [hep-th/0003103](#).
- [114] E. Cremmer, B. Julia, H. Lü and C.N. Pope, *Higher-dimensional Origin of $D = 3$ Coset Symmetries*, [hep-th/9909099](#).
- [115] H. Lu, C. N. Pope, E. Sezgin and K. S. Stelle, *Stainless super p -branes*, Nucl. Phys. **B456** (1995) 669, [hep-th/9508042](#).
- [116] M. J. Duff, R. R. Khuri and J. X. Lu, *String Solitons*, Phys. Rept. **259** (1995) 213, [hep-th/9412184](#).