行列正則化とIIB行列模型*

京都大学大学院理学研究科　　篠原 俊一†

概 要

我々の住む世界を、パラメーターのない理論により第一原理から導き出す事が、素粒子物理学の究極の目的であることは疑いのないことである。しかしこの問題に対し、摂動的な弦理論は不適当であり、更に一段階進化した理論が必要とされている。IIB 行列模型 (IKKT 模型) はそのような理論の候補として提案された模型である。それは摂動的弦理論を内包しているだけにとどまらず、いままでは全く手が出なかった非摂動的な問題に解決の糸口を与え、現実世界の記述へ向けた新しい道筋を示した。IIB 行列模型では時間、空間と物質はもはや不可分なもので、全てがダイナミカルに影響をおよぼし合うのである。本論文では IIB 行列模型の弦理論との関係、そして IIB 行列模型に特有な性質についてレビューを行う。

*本稿は平成 11 年度京都大学大学院理学研究科に提出した修士論文に加筆、修正を施したものです。

†e-mail address : shunichi@gauge.scphys.kyoto-u.ac.jp

目 次

1 introduction **4**

2 membrane and its regularization **6**
2.1 bosonic membrane 6
2.2 matrix regularization:genaral discussion 10
2.3 matrix regularization:lightcone membrane action 15
2.4 supermembrane and κ-symmetry 16
2.5 supermembrane and its matrix regularization 23

3 IIB matrix model **26**
3.1 matrix regularization of IIB superstring 26
3.2 interaction between BPS objects 31
3.3 the action of IIB matrix model 41

4 lightcone string field theory from IIB matrix model **43**
4.1 Schwinger-Dyson equations 44
4.2 determination of LC-Hamiltonian 52

5 dynamical generation of space-time **58**
5.1 effective action for diagonal elements 58
5.2 statistical mechanics of branched polymer 63
5.2.1 random walk 63
5.2.2 branched polymer and its Hausdorff dimension 67
5.3 toward more realistic models 74

6 conclusion **76**

7 acknowledgments **76**

A notation **77**
A.1 miscellaneous 77
A.2 spinor of SO(10,1) or SO(9,1) 78
A.3 Fierz 変換 80
A.4 Lie algebra 81
A.4.1 sigma matrices 81
A.4.2 SU(2) 82
A.4.3 Lie algebra 82
A.5 differential form 82
A.6 harmonic oscillator 83

B how to deal with complex spinor **84**

C super Yang-Mills in (9+1)dim **85**

D superstring action with $\mathcal{N} = 2$ SUSY and κ-symmetry **87**

E matrix regularization on two-torus **90**

1 introduction

現在、素粒子の世界において最も不思議で、頭を悩ませるものは重力相互作用である。日常生活の中では、なんの疑問もなく常に感じているこの力であるが、素粒子論の中にはいまだ満足に取り込むことができていない。

そこで、現在までにほぼ解明されている三種類の相互作用を振り返ってみよう。これらは全てゲージ場の量子論という一つの枠組みの中にまとめられている。場の量子論では、様々な発散とそれを解決するための繰り込みが重要な役割を果たす。それに加えて対称性が理論を構成するための鍵となる。ゲージ場の理論の場合には、無質量ベクトル場を含む理論なので、好き勝手に作用を書き下したのでは繰り込みができない理論になってしまうのだが、そこにゲージ対称性という大きな対称性を持ち込むことによって発散を処理し、現実の実験を説明する理論ができたわけである。

しかし、この場の量子論の枠組みの中に重力を含めようとすると破綻してしまうことが知られている。発散がきつすぎて繰り込みができなくなってしまうのである。場の理論の発散というのは時空が連続であるとか、粒子が大きさを持たずどこまででも近づける等が起源になっている。またゲージ場の時を思い出して、さらに対称性の高い、しばりのきつい理論を作ろうとするのは自然である。

このようなことをふまえて、最も有望だと思われている理論が弦理論である。弦理論の一つの特徴は、弦の振動モードに応じて重力子に限らず、無質量ゲージ場、物質場などがじゃんじゃん出てくることである。また弦理論はゲージ場の理論よりも非常に大きい対称性を持っている。その大きな対称性にも関わらず、弦理論を無矛盾に定義するためにはさらに時空が 10 次元であり、超対称性が存在しなければならない。だいたい以上のような道筋で一見突拍子もない理論にたどり着くわけである。

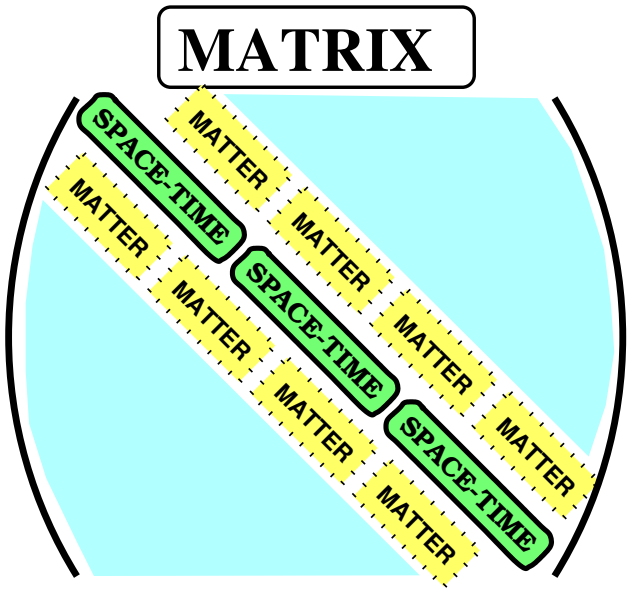
ここで弦 “理論” と言ったが、この理論は、適当な真空とそこからの摂動論によってのみ定義されている。しかも摂動論の範囲内では無数の真空が縮退していて、どの真空が実際に選ばれるかは分からない。つまり現実の世界に対する予言能力はまだゼロなのである。よって真空を決定し、我々の住む世界の次元や、相互作用、物質場を決定するためにはもう一つ上の理論が必要となってくる。この一つ上の理論のを作ること、つまり弦理論を構成的に (摂動によらず) 定義することが今の素粒子論の最大 (最後?) の問題である。

以上のことを念頭において、二つの事柄についてレビューを行う。一つ目は、かなり昔に Hoppe[1] によって考えられた行列正則化についてである。行列正則化とは、membrane(空間 2 次元の物体、シャボン玉のようなもの) 理論の正則化方法として考えられたものである。本質的には高い運動量を持った場を落とすカットオフ正則化なのだが、作用の対称性をうまく尊重していて、正則化後には量子力学になり、しかも自由度がエルミート行列として、コンパクトにまとまったものになる点が特徴である。また、この正則化の最も顕著な特徴は、正則化後の理論が自然に多体系までも含んだものに格上げされていることである。

二つ目は、IIB 行列模型 [2][3] についてのレビューである。超弦理論の構成的定式化として、現在までに幾つかのモデルが提案されているが、その中で一際異彩を放っているのが IIB 行列模型 (IIB matrix model、以下では IIB MM と書く) である。まず IIB MM は IIB 型超弦理論と、行列正則化を通して密接に関係していることを説明する。membrane の場合には正則

化後の作用が量子力学になるのと対応して、超弦理論を正則化するとなんと、超対称統計力学になるのである。当然自由度は行列であるが、IIB MM の大きな特徴として、作用関数が (場の汎関数ではなく) 行列の交換子とトレースからだけでできていて、とても単純な形をしていることが挙げられる。このために、経路積分を完全に遂行する可能性が開かれる。対称性についても、10 次元 の $\mathcal{N} = 2$ の超対称性という一つの極大のものを持っている。

しかし見かけの単純さに反して、以下のような豊富な結果を導く。まず、摂動的超弦理論を再現する [4] ことを挙げよう。これにより、少なくとも IIB MM は摂動的弦理論をその中に含んだモデルと言える。行列だけを自由度にした作用から弦が出てくるというのはかなりの驚きである。これは摂動的弦理論との対応であるが、構成的な理論として期待される現実世界の記述についても、幾つかの可能性を持ったシナリオが提案されていて 4 次元時空の出現をおおいに示唆している [5]。時空の生成に関して、IIB MM では時空も力学自由度の一つであり、しかも時間、空間、ゲージ場、物質、全てが等しく行列の中に入っていることも興味深いことである。



以下、本論文の構成を示す。まず第 2 節でライトコーン membrane 作用を例にとって行列正則化を説明する。membrane のライトコーン作用を求めるところからはじまるが、本質は 2.2 節の行列正則化である。そこでは 2 次元面上の関数がうまく行列と対応付いていて、対称性も尊重されていることを見る。その後の supermembrane は飛ばして進んでも後に問題はない。第 3 節では、IIB 型弦理論の作用を行列正則化して、その性質を議論する。ここでの重要な点は、行列正則化により一体問題の作用が相互作用を含んだ多体系の作用に自然に格上げされていることである。それを見た後で IIB MM の作用を与える。第 4 節では、IIB MM がライトコーン弦の場の理論 (light-cone string field theory) を導くことを説明する。そこでは Schwinger-Dyson 方程式と、IIB MM の $\mathcal{N} = 2$ の超対称性が大きな役割を果たす。第 5 節は、IIB MM の最もエキサイティングな話題である時空のダイナミカルな生成に当てる。時空が第一原理から決定される可能性を示した後、枝分かれ重合体 (branched polymer) を例にとって統計力学的アプローチの使い方を説明する。最後にまとめをして、今後の展望について議論する。

2 membrane and its regularization

行列正則化は Hoppe[1] によって bosonic membrane の正則化方法として初めて導入された。この正則化は無限自由度系の 3 次元場の理論を、有限自由度系の量子力学にしてしまう非常に強力な正則化である。しかも membrane の world volume を、ある時刻で切ったときにできる 2 次元面のトポロジーに依らず同じ形に正則化できることも驚きである。ところが行列正則化という手続きは、membrane を量子力学で近似するために使えるだけではなく、かなり一般に 2 次元面上の適当な関数を行列で近似するためにも使える。そのため、例としては membrane の作用を考えるが、行列正則化自体は少し一般的に議論をする。

bosonic membrane よりも興味のあるものは 11 次元の supermembrane である。11 次元が出てくる理由は、超重力理論がそれ以上存在しない最大の次元であり、また正体の良く分からない M 理論が存在すると思われている次元だからである。11 次元の超重力理論には massless の 3 階反対称テンソル場があるので、そのソースとして supermembrane が存在する。しかし、membrane には良く分からない所がたくさんあり (例えば、supermembrane は 11 次元でクリティカルなのか？とか、質量スペクトルが離散的ではなく連続的になっている等)、それに答えるためのステップとしても行列正則化は有用かもしれない。

この節の構成は以下のようになっている。

1. bosonic membrane のライトコーン作用を求める。そして、そこに出てくる「構造」が行列正則化への動機となる。
2. 行列正則化の手続きを構成する。ここがこの節の目玉である。
3. supermembrane の作用を得るための議論をやや一般的に行う。この節の流れから言うと、結構どうでもいいところである。
4. supermembrane のライトコーン作用を求め、正則化を適用する。

この節を書くにあたって次の Taylor によるレビュー [6] も参考にした。また supermembrane の行列正則化は [7] で行われた。

2.1 bosonic membrane

それでは、bosonic membrane から始めよう。座標は、

- $(2+1)$ 次元 world volume : $\sigma^a, \quad a = 0, 1, 2$
  時間と空間成分を区別するときには : $\sigma^0 = \tau, \quad \sigma^r, \quad r = 1, 2$
- $((d-1)+1)$ 次元 target space : $X^\mu, \quad \mu = 0, 1, \cdots, (d-1)$
  ライトコーンでは: $X^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(X^0 \pm X^{d-1}), \quad X^i, \quad i = 1, \cdots, (d-2)$

と書く。作用は world volume の一般座標変換不変性、target space のポアンカレ不変性等から、次の作用をとるのが自然である [8]。

$$S = -T \int d^3\sigma \sqrt{-M} \tag{2.1}$$

ここで、

$$M_{ab} = \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \eta_{\mu\nu} \tag{2.2}$$

$$M = \det M_{ab} \tag{2.3}$$

は、target space のミンコフスキーメトリックから $X^\mu(\sigma)$ によって world volume 上に誘導されたメトリックである。また、定数 T は、target space の長さ次元 $-(p+1)$ を持った量で、membrane のテンションと呼ばれる。長さの次元を持った量 ℓ_P を持ってきて、$T = 1/(2\pi)^p \ell_P^{p+1}$ とも書く。

この作用は world volume のメトリック $g_{ab}, g = \det g_{ab}$ を独立変数として導入すると Howe-Tucker 型に書くこともできる (ストリングで言うところの Polyakov 型である)。

$$S_{\rm HT} = -\frac{T}{2} \int d^3\sigma \sqrt{-g} \left(g^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \eta_{\mu\nu} - (p-1) \right) \tag{2.4}$$

この作用をハミルトニアン形式に書き換えよう。まず world volume の時間 σ^0 を target space のライトコーン座標の一つ X^+ にとることにする。すると、共役運動量は、

$$P^{ab} \triangleq \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{g}_{ab}} = 0 \tag{2.5}$$

$$P^i \triangleq \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^i} = -T\sqrt{-g} g^{0a} \partial_a X^i \tag{2.6}$$

$$P_- \triangleq \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^-} = +T\sqrt{-g} g^{00} \tag{2.7}$$

となり、次の拘束が出る (一次拘束条件)。

$$\phi^{ab} \triangleq P^{ab} \approx 0 \tag{2.8}$$

$$\phi_- \triangleq -P_- + T\sqrt{-g} g^{00} \approx 0 \tag{2.9}$$

これらの拘束の原因は元の作用 (2.1) に world volume 上の一般座標変換不変性があったためである。次のようなゲージ固定を行うとうまく行くことが分かる。

$$\chi_{ab} = \begin{cases} \chi_{00} = -g_{00} - \frac{1}{\omega^2}\tilde{M} \approx 0 & \text{if } a = b = 0 \\ \chi_{0r} = g_{0r} \approx 0 & \text{if } a = 0, b = r \\ \chi_{rs} = g_{rs} - M_{rs} \approx 0 & \text{if } a = r, b = s \end{cases} \tag{2.10}$$

$$\chi^- = X^- - f(X^i, P^i, P_-) \approx 0 \tag{2.11}$$

ここで、

$f(X^i, P^i, P_-)$ は、 $\partial_r X^- = -\dfrac{1}{P_-} P^i \partial_r X^i$ の解 $X^-(X^i, P^i, P^-)$ (2.12)

$$\tilde{M} = \det_{(k,s)} M_{ks} \tag{2.13}$$

$$M_{ks} = \partial_k X^i \partial_s X^i \tag{2.14}$$

$\omega(\sigma^r)$ は任意の関数である。(2.12) の変な式は元々あるゲージ不変性である world volume の座標変換の生成子を X^- について解いたもので、そのためこの式からは (次に出てくる) 可積分条件以外には拘束が出てこない。このゲージ固定は、メトリックの取り方 g_{0r} から分かるように、どの等時間 (ライトコーン時間) 平面で切っても membrane が特定の同じトポロジーを持っているときのみ可能である。逆に言うと時間と共にトポロジーが変わるような過程は捨ててしまっている。

とりあえず、これらのゲージ固定条件でうまく行くわけだが、一つだけ式 (2.12) を解くときの可積分条件があり、それは次の形になる。

$$\partial_r \left(\frac{P^i}{P_-} \right) \partial_s X^i - (r \leftrightarrow s) = 0 \tag{2.15}$$

これを解くと $\mathrm{SO}(d-2)$ の対称性がなくなってしまうので、これは古典論の場合には初期条件に対する拘束条件、量子論の場合には状態空間から物理的状態を選びだす条件式として扱う。結局、自由度として残ったのは X^i, P^i だけで、ハミルトニアン密度は次の形となる。

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2T\omega}(P^i P^i + T^2 \tilde{M}) \tag{2.16}$$

後の行列正則化のために次の "Poisson 括弧" を導入して書き直しておこう。world volume の空間的な 2 つの座標 $\sigma^{r=1,2}$ の関数 $f(\sigma^r), g(\sigma^r)$ に対して

$$\{ f , g \} = \frac{1}{\omega} \epsilon^{rs} \partial_r f \partial_s g \tag{2.17}$$

と定めることにする。すると考えている系は、空間微分などの r の足は一切あらわには含まず、この括弧だけで書けることが分かる。

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2T\omega} \left(P^i P^i + \frac{T^2 \omega^2}{2} \{ X^i, X^j \} \{ X^i, X^j \} \right) \tag{2.18}$$

$$\text{constraint:} \quad \{ \frac{P^i}{\omega}, X^i \} = 0 \tag{2.19}$$

この形を見ると、すぐに時間 (σ^0) に依らない area preserving diffeomorphism(以下では APD と略す)、

$$\delta X^i = \{ X^i, a(\sigma^r) \} \tag{2.20}$$

$$\delta \left(\frac{P}{\omega} \right) = \{ \frac{P}{\omega}, a(\sigma^r) \} \tag{2.21}$$

でハミルトニアン $H \triangleq \int d^2\sigma \mathcal{H}$ が不変なことが分かる。

この APD をゲージ化した作用で書くと拘束も含めて綺麗に書ける。

$$S = \int d^3\sigma T\omega \left(\frac{1}{2}(D_0 X^i)^2 - \frac{1}{4} \{ X^i, X^j \} \{ X^i, X^j \} \right) \tag{2.22}$$

ゲージ変換は

$$\delta X^i = \{ X^i , a(\sigma^a) \} \tag{2.23}$$
$$\delta A_0 = \partial_0 a(\sigma^a) + \{ A_0 , a(\sigma^a) \} \tag{2.24}$$

で、対応する共変微分は、

$$D_0 X^i = \partial_0 X^i + \{ A_0 , X^i \} \tag{2.25}$$

である。この APD ゲージ対称性を持った作用で書いた場合には、ハミルトニアン形式であった拘束 (2.19) は、ゲージ固定 $A_0 = 0$ をしたときに出てくるようになっている。

後の行列正則化のためにもう少し書き換えをしておく。まず次元について、今までは target space の長さ次元で

$$[X^i] = [\sigma^a] = [A_0] = 1 \tag{2.26}$$

としていたが、

$$[X^i] = [\sigma^0 = \tau] = 1 \tag{2.27}$$
$$[\sigma^r] = 0 \tag{2.28}$$
$$[A_0] = -1 \tag{2.29}$$

としたい。次元あわせに $2\pi l_P$ を使うと

$$S = \int d\tau d^2\sigma^r \frac{\omega}{2l_P} \left((D_0 X^i)^2 - \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi l_P)^4} \{ X^i , X^j \} \{ X^i , X^j \} \right) \tag{2.30}$$

さらに、ω を後で決める定数 η でスケールする[1]。つまり、$\omega \longrightarrow \eta\omega$、$\{ \, , \} \longrightarrow \frac{1}{\eta} \{ \, , \}$ という置き換えをする。

すると $2\pi l_P = 1$ の単位系で、

$$S = T \int d\tau d^2\sigma^r \eta\omega \left(\frac{1}{2} (D_0 X^i)^2 - \frac{1}{4\eta^2} \{ X^i , X^j \} \{ X^i , X^j \} \right) \tag{2.31}$$

という形になる。この時の共変微分は、

$$D_0 X = \partial_0 X + \frac{1}{\eta} \{ A_0 , X \} \tag{2.32}$$

になる。

[1] 実は η はゲージ変換では変換できない量である。つまりスケールした後に書いた ω はゲージ固定の時に勝手な関数を持ってきていいのだが、η は独立自由度に近いものである。

2.2 matrix regularization:genaral discussion

ここでは行列正則化についての話をしよう。この副節での行列正則化とは、2 次元面上の関数を N 次元エルミート行列で近似することを指す。近似という意味は、おおざっぱに言うと、高い運動量成分を落としてさらに結合定数の部分を少し $(O(1/N))$ ずらすような近似である。この副節の大体の流れは、

1. 2 次元平面上の関数の完全系を作り、それらの間にポアソン括弧を導入して、構造定数を決める。
2. 行列の方でも完全系をうまく作り、交換子により構造定数を決める。
3. 関数と行列との対応を付け、両者の構造定数が、$O(1/N)$ で一致することをみる。
4. 積分とトレースの対応を付ける。
5. 最後に関数側の作用を上の対応により置き換えて、行列を自由度とした系の作用を得る。

となっている (最後の項目だけ次の副節とした)。

では具体的に S^2 のトポロジーを持つ 2 次元面の場合について行列正則化を考えてみよう。関数の側から始める。S^2 は、$\mathbb{R}^3$ (座標は $\{x^A\}_{A=1,2,3}$) を単位球面に制限したもの、

$$x^A x^A - 1 = 0 \tag{2.33}$$

とする。S^2 の完全系は量子力学等で良く知られた球面調和関数 $y_{\ell m}$ である。それらはつぎのように書ける。

$$y_{\ell m} \leftrightarrows \sum_{A_1,\cdots,A_\ell} t^{(\ell m)}_{A_1\cdots A_\ell} x^{A_1}\cdots x^{A_\ell} \tag{2.34}$$

ここで、$t^{(\ell m)}_{A_1\cdots A_\ell}$はトレースレス完全対称テンソル

テンソル $t^{(\ell m)}$ の対称性は、定義 (2.2) の x の対称性から、トレースレス性は単位球面への制限 (2.33) からそれぞれ来ている。一応、ℓ に対して $t^{(\ell m)}$ の個数を数えておこう。ℓ 階完全対称テンソルの個数 ${}_3H_\ell$ からトレースレス条件 $t^{(\ell m)}_{AAA_3\cdots A_\ell}$ の個数 ${}_3H_{\ell-2}$ を引くと、正しく $(2\ell+1)$ 個が独立である[2]。具体的には、

$$y_{00} = 1 \tag{2.35}$$

$$y_{1,+1} = \sqrt{3/2}x^+ \tag{2.36}$$

$$y_{1,0} = \sqrt{3}x^3 \tag{2.37}$$

$$y_{1,-1} = \sqrt{3/2}x^- \tag{2.38}$$

[2] ${}_nH_m$ は n 種類の物から重複を許して m 個を取るときの組合わせの数。${}_nH_m = {}_{n+m-1}C_m$ である。

などなどである。細かい定義は次の通り。

$$x^1 \triangleq \sin\theta\cos\phi \tag{2.39}$$

$$x^2 \triangleq \sin\theta\sin\phi \tag{2.40}$$

$$x^3 \triangleq \cos\theta \tag{2.41}$$

$$x^{\pm} \triangleq \frac{1}{\sqrt{2}}(x^1 \pm ix^2) \tag{2.42}$$

$$\int d\Omega_2 \triangleq \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \sin\theta \tag{2.43}$$

$$\text{規格化}: \int \frac{d\Omega_2}{4\pi}|y_{\ell m}|^2 = 1 \tag{2.44}$$

この $\{y_{\ell m}\}_{\ell=0,1,2,\cdots;m=-\ell,\cdots,+\ell}$ を使って、S^2 上の関数 f は

$$f = \sum_{\ell m} c_{\ell m} y_{\ell m} \tag{2.45}$$

と展開される。

次にこれらの関数の間のポアソン括弧を次のように定める。

$$\{\, f\,, g\,\} \triangleq \epsilon^{ABC}\, x_A\, (\partial_B f)\, (\partial_C g) \tag{2.46}$$

ここでの、偏微分は $\partial_A x^B \triangleq \delta^B{}_A$ で定義されているが、単位球面への拘束条件との括弧を計算すると、

$$\{\, f\,, x^D x^D - 1\,\} = \epsilon^{ABC}\, x_A\, (\partial_B f)\, (2x^D \delta^D{}_C) \tag{2.47}$$

$$= 0 \tag{2.48}$$

より、曖昧さはない。x 同士の括弧は、

$$\{\, x^A\,, x^B\,\} = \epsilon^{ABC} x^C \tag{2.49}$$

となっている。

この括弧を用いて、構造定数 $g_{\ell_1 m_1, \ell_2 m_2}{}^{\ell_3 m_3}$ を、

$$\{\, y_{\ell_1 m_1}\,, y_{\ell_2 m_2}\,\} \triangleq g_{\ell_1 m_1, \ell_2 m_2}{}^{\ell_3 m_3} y_{\ell_3 m_3} \tag{2.50}$$

によって定める。

それでは、行列の方に話を移そう。$N \times N$ エルミート行列の基底を構成するのに、$\mathrm{SU}(2)$ の N 次元表現から話を始める。その心は、式 (2.49) と $\mathrm{SU}(2)$ の交換関係

$$-i\left[\,\frac{T^A}{2}, \frac{T^B}{2}\,\right] = \epsilon^{ABC}\frac{T^C}{2} \tag{2.51}$$

の類似からである。

この類似点をさらに押し進めるために次の行列を定義する。

$$Y_{\ell m} \triangleq k_{\ell,N} \sum_{A_1 \cdots A_\ell} t^{(\ell m)}_{A_1 \cdots A_\ell} T^{A_1} \cdots T^{A_\ell} \tag{2.52}$$

ここで、$k_{\ell,N}$ は今から決める ℓ, N に依った定数で、テンソル $t^{(\ell m)}$ はさきほど式 (2.2) で $y_{\ell m}$ を定義するときに使ったものと同じものである。

とりあえず、$k_{\ell,N}$ の値を次の式を要請することによって決めよう。

$$\frac{1}{N}\mathrm{tr}\left(|\, Y_{\ell m}\,|^2\right) = 1 + O(N^{-1}) \tag{2.53}$$

ちょっと長くなるが $k_{\ell,N}$ を決める計算を具体的にやることにする。一番簡単な $m = \ell$ の場合に限ろう。まず準備として、関数側で規格化条件を使って t を決める。

$$y_{\ell,\, m\,=\,\ell} = t^{(\ell)}(x^+)^\ell \qquad (t^{(\ell)} \triangleq t^{(\ell, m=\ell)}_{++\cdots+}) \tag{2.54}$$

$$= t^{(\ell)} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^\ell \sin^\ell\theta e^{i\ell\phi} \tag{2.55}$$

であるから、規格化条件より、

$$1 = \int \frac{d\Omega_2}{4\pi} |y_{\ell\ell}|^2 \tag{2.56}$$

$$= \frac{1}{2}(t^{(\ell)})^2 \left(\frac{1}{2}\right)^\ell \int_0^\pi d\theta \sin^{2\ell+1}\theta \tag{2.57}$$

$$= (t^{(\ell)})^2 \left(\frac{1}{2}\right)^\ell \frac{(2\ell)!!}{(2\ell+1)!!} \tag{2.58}$$

となる[3]。よって t は次のように求まる。

$$(t^{(\ell)})^2 = 2^\ell \frac{(2\ell+1)!!}{(2\ell)!!} \tag{2.59}$$

$$= \frac{1}{2^\ell}\frac{(2\ell+1)!}{\ell!\,\ell!} \tag{2.60}$$

$\frac{1}{N}\mathrm{tr}|Y_{\ell m}|^2$ を計算するために、まず $\mathrm{tr}\left((T^-)^\ell (T^+)^\ell\right)$ を計算する。$\underline{N}$ 表現の正規直交系を T^3 の固有ベクトル、$\{|\, k\,\rangle\}$ $(k = (N-1), (N-3), \cdots, -(N-1))$ で定めると、

$$T^+|\, k\,\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}\left(N^2 - (k+1)^2\right)}|\, k+2\,\rangle \tag{2.61}$$

$$T^-|\, k\,\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}\left(N^2 - (k-1)^2\right)}|\, k-2\,\rangle \tag{2.62}$$

[3] $(2\ell+1)!! = (2\ell+1)(2\ell-1)(2\ell-3)\cdots 3\cdot 1$
$(2\ell)!! = (2\ell)(2\ell-2)(2\ell-4)\cdots 4\cdot 2 = 2^\ell\cdot\ell!$

となるので、

$$\mathrm{tr}\left((T^-)^\ell(T^+)^\ell\right) = \sum_k \langle\, k \,|\, (T^-)^\ell(T^+)^\ell \,|\, k \,\rangle \tag{2.63}$$

$$= \frac{1}{2^\ell}\sum_k \left(N^2-(k+1)^2\right)\left(N^2-(k+3)^2\right)\cdots\left(N^2-(k+2\ell-1)^2\right) \tag{2.64}$$

中辺からすぐに分かるのは、$N = 0, 1, \cdots, \ell$ の時、ゼロになるということである。また最右辺からは N について $(2\ell+1)$ 次式で、さらに和をとった後の式を N についての関数と見ると、それは奇関数であることが分かる[4]。よって、最左辺の N 依存性は完全に決まって、

$$\mathrm{tr}\left((T^-)^\ell(T^+)^\ell\right) = a^{(\ell)}N(N^2-1^2)(N^2-2^2)\cdots(N^2-\ell^2) \tag{2.65}$$

となり、あとは ℓ にのみ依る定数 a_ℓ を決めれば良い。そのために、$N = \ell+1$ と置くと、左辺は式 (2.64) を用いて、$2^\ell\,\ell!\,\ell!$、右辺の N 依存部分は $(2\ell+1)!$ となるので、

$$a^{(\ell)} = \frac{2^\ell \ell!\;\ell!}{(2\ell+1)!} = \frac{1}{(t^{(\ell)})^2} \tag{2.66}$$

と決まる。これでようやく、

$$\frac{1}{N}\mathrm{tr}\left(|\,Y_{\ell\ell}\,|^2\right) = (k_{\ell,N})^2(N^2-1^2)(N^2-2^2)\cdots(N^2-\ell^2) \tag{2.67}$$

$$= (k_{\ell,N}N^\ell)^2\left(1-\frac{1}{N^2}\right)\cdots\left(1-\frac{\ell^2}{N^2}\right) \tag{2.68}$$

と求まった。この式から $k_{\ell,N} = N^{-\ell}$ とすると、固定された ℓ に対しては

$$\frac{1}{N}\mathrm{tr}\left(|\,Y_{\ell\ell}\,|^2\right) = \left(1-\frac{1}{N^2}\right)\cdots\left(1-\frac{\ell^2}{N^2}\right) \longrightarrow 1 \quad (\mathrm{as} \quad N\longrightarrow\infty) \tag{2.69}$$

となることが分かる。また、式 (2.65) から、$\ell = N, (N+1), \cdots$ の時には、

$$\frac{1}{N}\mathrm{tr}\left(|\,Y_{\ell\ell}\,|^2\right) = 0 \tag{2.70}$$

つまり、$Y_{\ell\ell} = 0$ であることが分かる。一般の m についても

$$\frac{1}{N}\mathrm{tr}\left((Y_{\ell m})^\dagger Y_{\ell' m'}\right) = \delta_{\ell\,\ell'}\delta_{m\,m'}\left(1-\frac{1}{N^2}\right)\cdots\left(1-\frac{\ell^2}{N^2}\right) \qquad \ell = 0, 1, \cdots, (N-1) \tag{2.71}$$

$$Y_{\ell m} = 0 \qquad \ell = N, (N+1), \cdots \tag{2.72}$$

となることが分かるので[5]、$\ell = 0, 1, \cdots, (N-1)$ の $Y_{\ell m}$ は直交しており、個数を数えると、

$$\sum_{\ell=0}^{N-1}\sum_{m=-\ell}^{+\ell} = \sum_{\ell=0}^{N-1}(2\ell+1) = N^2 \tag{2.73}$$

---

[4] $f(x,N) = \sum_k e^{kx} = \sinh Nx/\sinh x$ は N について奇関数である。
この関数を用いて、$\sum_k k^n = \partial_x f(x,N)|_{x=0}$ と書けるので、これも奇関数になる。

[5] $Y_{\ell m}$ が各 ℓ について既約テンソル演算子であることから従う。

となり、N 次元エルミート行列の基底になってることが分かる。

もう一度 $Y_{\ell m}$ の定義を書いておこう。($\tilde{T}^A \triangleq T^A/N$)

$$Y_{\ell m} = \sum_{A_1 \cdots A_\ell} t^{(\ell m)}_{A_1 \cdots A_\ell} \frac{T^{A_1}}{N} \cdots \frac{T^{A_\ell}}{N} \tag{2.74}$$

$$= \sum_{A_1 \cdots A_\ell} t^{(\ell m)}_{A_1 \cdots A_\ell} \tilde{T}^{A_1} \cdots \tilde{T}^{A_\ell} \tag{2.75}$$

この $Y_{\ell m}$ から交換子により行列側の構造定数を定めよう。$\tilde{T}^A$ に対しては、関数側の式 (2.33), 式 (2.49) に類似の式

$$\tilde{T}^A \tilde{T}^A = \frac{1}{N^2}(N^2-1) = 1 - \frac{1}{N^2} \tag{2.76}$$

$$-i\frac{N}{2}\left[\, \tilde{T}^A, \tilde{T}^B \,\right] = \epsilon^{ABC}\tilde{T}^C \tag{2.77}$$

が成り立つことから、次の式で行列側の構造定数 $G_{\ell_1 m_1, \ell_2 m_2}{}^{\ell_3 m_3}$ を定義する。

$$-i\frac{N}{2}\left[\, Y_{\ell_1 m_1}, Y_{\ell_2 m_2} \,\right] = G_{\ell_1 m_1, \ell_2 m_2}{}^{\ell_3 m_3} Y_{\ell_3 m_3} \tag{2.78}$$

ここまでで、この副節の初めに書いた流れの 2. までが終わった。これから 3. の構造定数の比較にはいる。そのために、関数の側でポアソン括弧の計算をあからさまに書いてみる。

$$\{\, y_{\ell_1 m_1}, y_{\ell_2 m_2} \,\} = \{\, t^{(\ell_1 m_1)}_{A_1 \cdots A_{\ell_1}} x^{A_1} \cdots x^{A_{\ell_1}}, t^{(\ell_2 m_2)}_{B_1 \cdots B_{\ell_2}} x^{B_1} \cdots x^{B_{\ell_2}} \,\} \tag{2.79}$$

$$= t^{(\ell_1 m_1)}_{A_1 \cdots A_{\ell_1}} t^{(\ell_2 m_2)}_{B_1 \cdots B_{\ell_2}} x^{A_1} \cdots x^{A_i} x^{B_1} \cdots x^{B_j} \times \{\, x^{A_i}, x^{B_j} \,\} x^{B_{j+1}} \cdots x^{B_{\ell_2}} x^{A_{i+1}} \cdots x^{A_{\ell_1}} \tag{2.80}$$

$$= t^{(\ell_1 m_1)}_{A_1 \cdots A_{\ell_1}} t^{(\ell_2 m_2)}_{B_1 \cdots B_{\ell_2}} \epsilon^{A_i B_j C} x^{A_1} \cdots x^{A_i} x^{B_1} \cdots x^{B_j} x^C \times x^{B_{j+1}} \cdots x^{B_{\ell_2}} x^{A_{i+1}} \cdots x^{A_{\ell_1}} \tag{2.81}$$

構造定数 g はここで出てくるテンソル $t^{(\ell_1 m_1)}_{A_1 \cdots A_{\ell_1}} t^{(\ell_2 m_2)}_{B_1 \cdots B_{\ell_2}} \epsilon^{A_1 B_1 C}$ を対称化して既約分解 (トレース部分を分離する) によって得られる。関数の場合は、x 同士が交換するので対称化は自然に行われている。既約分解の操作は、単位球面への制限 $x^A x^A = 1$ をつかって行うことになる。

一方、行列側でもあからさまに書くと、

$$(-i)\frac{N}{2}\left[\, Y_{\ell_1 m_1}, Y_{\ell_2 m_2} \,\right] = (-i)\frac{N}{2}\left[\, t^{(\ell_1 m_1)}_{A_1 \cdots A_{\ell_1}} \tilde{T}^{A_1} \cdots \tilde{T}^{A_{\ell_1}}, t^{(\ell_2 m_2)}_{B_1 \cdots B_{\ell_2}} \tilde{T}^{B_1} \cdots \tilde{T}^{B_{\ell_2}} \,\right] \tag{2.82}$$

$$= t^{(\ell_1 m_1)}_{A_1 \cdots A_{\ell_1}} t^{(\ell_2 m_2)}_{B_1 \cdots B_{\ell_2}} \tilde{T}^{A_1} \cdots \tilde{T}^{A_i} \tilde{T}^{B_1} \cdots \tilde{T}^{B_j} \times (-i)\frac{N}{2}\left[\, \tilde{T}^{A_i}, \tilde{T}^{B_j} \,\right] \tilde{T}^{B_{j+1}} \cdots \tilde{T}^{B_{\ell_2}} \tilde{T}^{A_{i+1}} \cdots \tilde{T}^{A_{\ell_1}} \tag{2.83}$$

$$= t^{(\ell_1 m_1)}_{A_1 \cdots A_{\ell_1}} t^{(\ell_2 m_2)}_{B_1 \cdots B_{\ell_2}} \epsilon^{A_i B_j C} \tilde{T}^{A_1} \cdots \tilde{T}^{A_i} \tilde{T}^{B_1} \cdots \tilde{T}^{B_j} \tilde{T}^C \times \tilde{T}^{B_{j+1}} \cdots \tilde{T}^{B_{\ell_2}} \tilde{T}^{A_{i+1}} \cdots \tilde{T}^{A_{\ell_1}} \tag{2.84}$$

となる。ここまでは関数側 (2.81) と全く一緒である。一つ目の違いは対称化の時に出てくる。行列は互いに交換しないので、反対称部分から一つ $\tilde{T}$ が減った項が出てくる。しかしこれは

$$-i\left[\tilde{T}^A,\tilde{T}^B\right]=\frac{2}{N}\epsilon^{ABC}\tilde{T}^C \tag{2.85}$$

から分かるように $O(N^{-1})$ の項である。対称化後の既約分解では単位球面への制限に対応した式 (2.76) を使う。この時も $1/N$ の高次の項を除くと全く同じ形をしている。よって、次のことが分かった。

$$G_{\ell_1m_1,\ell_2m_2}{}^{\ell_3m_3}=g_{\ell_1m_1,\ell_2m_2}{}^{\ell_3m_3}+O(1/N) \tag{2.86}$$

この式のおかげで、次副節で membrane のライトコーン作用を行列正則化するときに、結合定数のずれが ($\ell\ll N$ のモードに対しては) $O(1/N)$ ですむことが分かる。また式 (2.71) からは、運動項が正しく規格化されることが出てくる。

これまでのことをまとめると、右の表のようになる。ここで、自由度の対応は、$\ell\geq N$ のモードを落としたことになっており、ℓ は球面上での波数のようなものなので、高い運動量をカットしたことに対応する。

対応	関数	行列
自由度	$f=\sum_{\ell=0}^{\infty}c_{\ell m}y_{\ell m}$	$F=\sum_{\ell=0}^{N-1}c_{\ell m}Y_{\ell m}$
括弧	$\{f,g\}$	$-i\frac{N}{2}[F,G]$
内積	$\int\frac{d\Omega_2}{4\pi}fg$	$\frac{1}{N}\mathrm{tr}FG$

表 1: 行列正則化対応表

2.3 matrix regularization:lightcone membrane action

前節で作った行列正則化をライトコーン membrane の作用 (座標系、ポアソン括弧は前節と同じにとる。)

$$S=T\int d\tau d^2\sigma\ \eta\omega\left(\frac{1}{2}(D_0X^i)^2-\frac{1}{4\eta^2}\{X^i,X^j\}\{X^i,X^j\}\right) \tag{2.87}$$

$$D_0X=\partial_0X+\frac{1}{\eta}\{A_0,X\} \tag{2.88}$$

に適用してみよう。

その前にまず X^i の 4 次の項について見てみると、

$$X^i=\sum_{\ell m}x^i_{\ell m}y_{\ell m} \tag{2.89}$$

とモード展開することにより、

$$\begin{aligned}&\int d\Omega_2\{X^i,X^j\}\{X^i,X^j\}\\&\quad=4\pi\left(g_{\ell_1m_1,\ell_2m_2}{}^{\ell m}\right)^*g_{\ell_3m_3,\ell_4m_4}{}^{\ell m}\left(x^i_{\ell_1m_1}\right)^*\left(x^j_{\ell_2m_2}\right)^*x^i_{\ell_3m_3}\,x^j_{\ell_4m_4}\end{aligned} \tag{2.90}$$

となっていて、モード $x^i_{\ell m}$ 間の結合は結合定数 $g_{\ell_1 m_1, \ell_2 m_2}{}^{\ell m}$ で決まっていることが分かる。

行列正則化は次のようにすれば良い。

$$X^i(\sigma^r, \tau) \longrightarrow X^i(\tau) \quad N \text{ 次元エルミート行列} \tag{2.91}$$

$$A_0(\sigma^r, \tau) \longrightarrow A_0(\tau) \quad N \text{ 次元エルミート行列} \tag{2.92}$$

$$\int d^2\sigma\omega \longrightarrow \frac{4\pi}{N}\mathrm{tr} \tag{2.93}$$

$$\{*, *\} \longrightarrow -i\frac{N}{2}[*, *] \tag{2.94}$$

さらに決めていなかったパラメーター η を $N/2$ と置くことにより次の作用を得る。

$$S = 2\pi T \int d\tau \ \mathrm{tr}\left(\frac{1}{2}(D_0 X^i)^2 + \frac{1}{4}\left[X^i, X^j\right]\left[X^i, X^j\right]\right) \tag{2.95}$$

$$D_0 X = \partial_0 X - i[A_0, X] \tag{2.96}$$

これが、行列正則化されたライトコーン membrane 作用である。元の系にあった APD のゲージ対称性は、$\mathrm{U}(N)$ ゲージ対称性、

$$\delta X^i = -i\left[X^i, a(\tau)\right] \tag{2.97}$$

$$\delta A_0 = \partial_0 a(\tau) - i[A_0, a(\tau)] \tag{2.98}$$

として残っている。ここで $a(\tau)$ は時間依存性を持つエルミート行列の変換パラメーターである。

元の作用は無限自由度系であり、量子論として正しく定義されたものか分からない。しかし、正則化後には $10N^2$ 個の有限自由度系、つまりは量子力学であり、(発散の心配など無く) きちんと定義された理論になっている。

ハミルトニアンに移るには、ゲージ固定を $A_0 = 0$ で行うことにして、

$$P^i \triangleq \frac{\partial L}{\partial(\partial_0 X)} = 2\pi T\, \partial_0 X^i \tag{2.99}$$

$$H = \mathrm{tr}\left(\frac{1}{2\pi T}P^i P^i - \frac{(2\pi T)}{4}\left[X^i, X^j\right]\left[X^i, X^j\right]\right) \tag{2.100}$$

$$\left[X^i, P^i\right] = 0 \quad \text{(拘束条件)} \tag{2.101}$$

とすれば良い。

2.4 supermembrane and κ-symmetry

この副節の目的は、空間 2 次元の membrane に限らず、一般の広がりを持った物体 (ただし閉じた world volume を持つとしておく) について、超対称性のしばりを導くことである。ここの議論は全く [8] に依っている。

d 次元の target space 中を運動する p-次元の物体 (p-brane と呼ぶ) の作用について考えよう。そして、ここでは target space に超対称性 (SUSY) がある場合を考えることにする。そこで、target space を superspace にして、その座標を

$$Z^M = (X^\mu, \theta^\alpha) \tag{2.102}$$

とする。θ は実スピナーとしておく[6]。SUSY 変換は次で定義する。(target space はフラットだとしている。)

$$\delta X^\mu = i\bar{\epsilon}\Gamma^\mu\theta \tag{2.103}$$

$$\delta\theta = \epsilon \tag{2.104}$$

すると、この変換の下で不変な 1-form

$$\Pi^I = dZ^M e_M{}^I \tag{2.105}$$

が定義できる。$\Pi^I = (\delta^m{}_\mu \Pi^\mu, \delta^{\dot{\alpha}}{}_\alpha \Pi^\alpha)$ としてあからさまに書けば、

$$\Pi^\mu = dX^\mu - i\bar{\theta}\Gamma^\mu d\theta \tag{2.106}$$

$$\Pi^\alpha = d\theta^\alpha \tag{2.107}$$

$$e_M{}^I = \begin{pmatrix} e_\mu{}^m = \delta^m{}_\mu & e_\mu{}^{\dot{\alpha}} = 0 \\ e_\alpha{}^m = i\delta^m{}_\mu(\Gamma^\mu\theta)_\alpha & e_\alpha{}^{\dot{\alpha}} = \delta^{\dot{\alpha}}{}_\alpha \end{pmatrix} \tag{2.108}$$

である。これらを $Z^M(\sigma^a)$ により world volume 上に引き戻した 1-form $*\Pi^I = d\sigma^a \Pi^I_a$ は、

$$\Pi^\mu_a = \partial_a X^\mu - i\bar{\theta}\Gamma^\mu\partial_a\theta \tag{2.109}$$

$$\Pi^\alpha_a = \partial_a\theta^\alpha \tag{2.110}$$

となる。これを使って作用を書けば明らかに SUSY で不変なものになる。まず、ボゾニックな場合にあった部分 (Dirac part と呼ぶ) をそのまま超対称化した項を書くと、

$$S_D = -T\int d^{p+1}\sigma\sqrt{-M} \tag{2.111}$$

$$M_{ab} = \Pi^\mu_a \Pi^\nu_b \eta_{\mu\nu} \tag{2.112}$$

$$M = \det(M_{ab}) \tag{2.113}$$

となる。この作用は、グローバルな対称性としてローレンツ対称性と target space の超対称性を持ち、ローカルな対称性として、world volume の一般座標変換対称性を持つ。しかし、world volume の場の理論として見たときに、自由度を数えてみるとどうなるだろうか。最

[6] 5、6、7 次元では普通にはマヨラナスピナーは存在しないがディラックまたはワイルを二階建てにすることで全く同様の議論が可能である。詳しくは appendix B を参照。

も興味のある 11 次元中を運動する membrane について数えてみると (ただしここで言うボゾン、フェルミオンというのは target space のローレンツ群の変換性である)、

$$\#(\text{bosons}) = 11 - (2+1) = 8 \tag{2.114}$$

$$\#(\text{fermions}) = \mathcal{N} \times 32 \times \frac{1}{2} = 16\mathcal{N} \tag{2.115}$$

となる。$\mathcal{N}$ は superspace を作るときに、フェルミオニックな座標として、いくつの (ミニマル) フェルミオンを入れるかの自由度である。これを見ると $\mathcal{N} = 1$ の場合でもフェルミオンの自由度の方が多くなってしまっていることが分かる。

これを解決するため作用に新しい項、Wess-Zumino(WZ) 項を導入する。そのために次のようなことを考える。superspace 上にローレンツ不変かつ SUSY 不変な、exact $(p+2)$-form $h_{[p+2]} = db_{[p+1]}$ があったとすると $(p+1)$-form $b_{[p+1]}$ は全微分項を除いて同じ性質を持つ。それを示すには、後で証明する式 (2.146)

$$\delta b_{[p+1]} \doteq \frac{1}{(p+1)!} dZ^{M_{p+2}} \cdots dZ^{M_2} \delta Z^{M_1} h_{M_1 \cdots M_{p+2}} \tag{2.116}$$

を使うと (記号 $\doteq$ は全微分を除いて両辺が等しいことを示す)、

$$\begin{aligned}
d(\delta b_{[p+1]}) &= \frac{1}{(p+1)!} dZ^{M_{p+2}} \cdots dZ^{M_2} d(\delta Z^{M_1} h_{M_1 \cdots M_{p+2}}) && (2.117)\\
&= \frac{1}{(p+1)!} dZ^{M_{p+2}} \cdots dZ^{M_2} d(\delta Z^{M_1}) h_{M_1 \cdots M_{p+2}} \\
&\quad + (-)^{|M_0||M_1|} \frac{1}{(p+1)!} dZ^{M_{p+2}} \cdots dZ^{M_2} dZ^{M_1} \delta Z^{M_0} \partial_{M_1} h_{M_0 M_2 \cdots M_{p+2}} && (2.118)\\
&= \frac{1}{(p+2)!} \Big((p+2) dZ^{M_{p+2}} \cdots dZ^{M_2} d(\delta Z^{M_1}) h_{M_1 \cdots M_{p+2}} \\
&\quad + (-)^{|M_0||M_1|+1} dZ^{M_{p+2}} \cdots dZ^{M_2} dZ^{M_1} \delta Z^{M_0} \partial_{M_1} h_{M_0 M_2 \cdots M_{p+2}} \Big) && (2.119)\\
&= \delta h_{[p+2]} && (2.120)
\end{aligned}$$

が導かれる。最後は $dh = 0$ を用いた。この式から、$\delta h_{[p+2]} = 0$ を満たす変分 δZ の下で $b_{[p+1]}$ は全微分項を除いて不変であることが分かる。よってその引き戻し $*b_{[p+1]}$ を使って、

$$S_{WZ} \sim \int *b_{[p+1]} \tag{2.121}$$

と書けば、これはローレンツ不変性、SUSY 不変性を持つことになる。まず、上の性質を持つ $h_{[p+2]}$ を探すことから始めよう。ここからは $\mathcal{N} = 1$ の場合に限る。この時に target space の質量次元を持ったパラメーターを全体に掛かっているテンション T 以外に導入しないため、$h_{[p+2]}, b_{[p+1]}$ は $\sqrt{-M}$ と同じ質量次元を持っていなければならない。$[\Pi^\mu] = -1, [\Pi^\alpha] = -1/2, [\sqrt{-M}] = -(p+1)$ より、探している $(p+2)$-form は、

$$h_{[p+2]} = \frac{(-)^{p+1}}{2!\, p!} \Pi^{\mu_p} \cdots \Pi^{\mu_1} \ (i d\bar{\theta} \Gamma_{\mu_1 \cdots \mu_p} d\theta) \tag{2.122}$$

であることが分かる。ここで、$h_{[p+2]} \neq 0$ のためには、$(\Gamma_{\mu_1\cdots\mu_p})_{\alpha\beta}$ が対称行列であることが必要である。それではこの $(p+2)$-form が exact(今の場合は closed と同じ) かどうかを調べよう。$d\Pi^\mu = id\bar{\theta}\Gamma^\mu d\theta$ であることから、$h_{[p+2]}$ が exact であるための条件は、

$$d\bar{\theta}\Gamma^{\mu_1} d\theta \; d\bar{\theta}\Gamma_{\mu_1\cdots\mu_p} d\theta = 0 \tag{2.123}$$

である。$d\theta^\alpha$ は fermionic 1-form であり、互いに交換するので、結局

$$(\Gamma^{\mu_1}\mathcal{P})_{(\alpha\beta}(\Gamma_{\mu_1\cdots\mu_p}\mathcal{P})_{\gamma\delta)} = 0 \tag{2.124}$$

であれば良いことが分かる。$\mathcal{P}$ はワイルフェルミオンの時のためのプロジェクターで、以下では $\mathrm{tr}\mathcal{P}$ にしか効かないので書かないことにする。

$\alpha\beta$ の足について対称化をあからさまに書くと、

$$\begin{aligned} 0 = {} & (\Gamma^{\mu_1})_{\alpha\beta}(\Gamma_{\mu_1\cdots\mu_p})_{\gamma\delta} + (\Gamma^{\mu_1})_{\gamma\delta}(\Gamma_{\mu_1\cdots\mu_p})_{\alpha\beta} \\ & + 2(\Gamma^{\mu_1})_{\alpha(\gamma}(\Gamma_{\mu_1\cdots\mu_p})_{\delta)\beta} + 2(\Gamma^{\mu_1})_{\beta(\gamma}(\Gamma_{\mu_1\cdots\mu_p})_{\delta)\alpha} \end{aligned} \tag{2.125}$$

となる。必要条件を求めるため、とりあえず、この式に、$(\Gamma_\nu)^{\alpha\beta}$ を掛ける。

$$\begin{aligned} 0 = {} & \mathrm{tr}(\Gamma_\nu\Gamma^{\mu_1}\Gamma_{\mu_1\cdots\mu_p})_{\gamma\delta} + \mathrm{tr}(\Gamma_\nu\Gamma_{\mu_1\cdots\mu_p})(\Gamma^{\mu_1})_{\gamma\delta} \\ & + 4(\Gamma^{\mu_1}\Gamma_\nu\Gamma_{\mu_1\cdots\mu_p})_{(\gamma\delta)} \end{aligned} \tag{2.126}$$

この式に appendix A から拾ってくる次のような式

$$\mathrm{tr}(\Gamma_\nu\Gamma^{\mu_1}) = 2\delta^{\mu_1}{}_\nu \cdot \mathrm{tr}\mathcal{P} \tag{2.127}$$

$$\Gamma^{\mu_1}\Gamma_{\mu_1\cdots\mu_p} = (d-p+1)\Gamma_{\mu_2\cdots\mu_p} \tag{2.128}$$

$$\Gamma^{\mu_1}\Gamma_\nu\Gamma_{\mu_1\cdots\mu_p} = -(d-p-1)\left(\Gamma_{\nu\mu_2\cdots\mu_p} + (p-1)\eta_{\nu[\mu_2}\Gamma_{\mu_3\cdots\mu_p]}\right) \tag{2.129}$$

を代入して、さらに $(p-2)$ 本足のガンマ行列は、p 本足ガンマ行列が対称の時には、常に反対称行列であり対称化によって落ちてしまうことを用いると、

$$0 = \Big(\mathrm{tr}\mathcal{P} - 4(d-p-1)\Big)\Gamma_{\nu\mu_2\cdots\mu_p} + \mathrm{tr}(\Gamma_\nu\Gamma_{\mu_1\cdots\mu_p})\Gamma^{\mu_1} \tag{2.130}$$

と変形できる。ここから先は $p=1$ の時と $p \geq 2$ とで扱いが違う。

$p=1$ の場合には、二つの項は同じ形になって、条件式は

$$\frac{d-2}{2} = \frac{\mathrm{tr}\mathcal{P}}{4} \tag{2.131}$$

になる。右の表から $d = 3, 4, 6, 10$ が WZ 項の存在する次元であることが分かる。

d	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$2(d-2)$	2	4	6	8	10	12	14	16	18
min.spinor	2	4	8	8	16	16	16	16	32
OK?	◯	◯	×	◯	×	×	×	◯	×

$p \geq 2$ の場合には、$p+1 < d$ であれば第二項が消えるので、条件は、

$$d-(p+1) = \frac{\mathrm{tr}\mathcal{P}}{4} \tag{2.132}$$

である。これを満たす (d,p) の値を $p=1$ の場合も併せて表にまとめておく。

ここまでで求めたのは式 (2.124) の必用条件である。しかしすでに可能性は有限個 (12 個) に限られている。[9] ではこれらの可能性に付いて全て式 (2.124) が実際になり立つことを確かめた。よって右の表は WZ 項の存在する (d,p) の組合わせを正しく表している。

ここまでで $dh_{[p+2]} = 0$ なる $(p+2)$-form $h_{[p+2]}$ が求まった。次は実際に作用に入ってくる $(p+1)$-form、 $b_{[p+1]}$ を求めたい。これは、比較的簡単に、

11		◯			
10	◯				◯
9				◯	
8			◯		
7		◯			
6	◯		◯		
5		◯			
4	◯	◯			
3	◯				
d/p	1	2	3	4	5

表 2: WZ 項の存在する組み合わせ。但し、$\mathcal{N}=1$ の場合に限る。

$$\begin{aligned} b_{[p+1]} = & \frac{1}{2(p+1)!}(id\bar{\theta}\Gamma_{\mu_1\cdots\mu_p}\theta) \\ & \times\sum_{r=0}^{p}(-)^{r+1}\binom{p+1}{r+1}\Pi^{\mu_p}\cdots\Pi^{\mu_{r+1}}(id\bar{\theta}\Gamma^{\mu_r}\theta)\cdots(id\bar{\theta}\Gamma^{\mu_1}\theta) \end{aligned} \tag{2.133}$$

とするとうまく行くことが分かる。引き戻しの成分は、

$$\begin{aligned} b_{a_1\cdots a_{p+1}} = & \frac{1}{2}(a\partial_{i_{p+1}}\bar{\theta}\Gamma_{\mu_1\cdots\mu_p}\theta) \\ & \times\sum_{r=0}^{p}(-)^{r+1}\binom{p+1}{r+1}\Pi^{\mu_p}_{a_p}\cdots\Pi^{\mu_{r+1}}_{a_{r+1}}(i\partial_{a_r}\bar{\theta}\Gamma^{\mu_r}\theta)\cdots(i\partial_{a_1}\bar{\theta}\Gamma^{\mu_1}\theta) \end{aligned} \tag{2.134}$$

となっている。これによって、作用を

$$S = -T\int d^{p+1}\sigma\left(\sqrt{-M}+\frac{2c}{(p+1)!}\epsilon^{a_1\cdots a_{p+1}}b_{a_1\cdots a_{p+1}}\right) \tag{2.135}$$

とする。c は後で決める定数である。この作用の対称性を探すために、次のような変分を考える。

$$\delta X^\mu = i\bar{\theta}\Gamma^\mu\delta\theta = -i\delta\bar{\theta}\Gamma^\mu\theta \tag{2.136}$$

計算を簡単にするため Howe-Tucker 型に書き換える。

$$S_{\mathrm{HT}} = -\frac{T}{2}\int d^{p+1}\sigma\left(\sqrt{-g}\left(g^{ab}M_{ab}-(p-1)\right)+\frac{4c}{(p+1)!}\epsilon^{a_1\cdots a_{p+1}}b_{a_1\cdots a_{p+1}}\right) \tag{2.137}$$

この形の良い所は、変分を計算するときに world volume metric g_{ab} の運動方程式 $g_{ab} = M_{ab}$ を使ってしまうことで、δg の項が

$$\delta g_{ab} \frac{\delta S}{\delta g_{ab}} = 0 \tag{2.138}$$

となるので、計算する必要が無くなる所である。これにより、Dirac 項は簡単に変分が求まる。では、WZ 項の変分を求めよう。そのために $h_{[p+2]} = db_{[p+1]}$ の関係を利用する。一般的に、

$$\begin{aligned}
b_{[p+1]} &= \frac{1}{(p+1)!} \Pi^{I_{p+1}} \cdots \Pi^{I_1} b_{I_1 \cdots I_{p+1}} && (2.139)\\
&= \frac{1}{(p+1)!} dZ^{M_{p+1}} \cdots dZ^{M_1} b_{M_1 \cdots M_{p+1}} && (2.140)\\
h_{[p+2]} &= \frac{1}{(p+2)!} \Pi^{I_{p+2}} \cdots \Pi^{I_1} h_{I_1 \cdots I_{p+2}} && (2.141)\\
&= \frac{1}{(p+2)!} dZ^{M_{p+2}} \cdots dZ^{M_1} h_{M_1 \cdots M_{p+2}} && (2.142)\\
& && (2.143)
\end{aligned}$$

と書くと、$h_{[p+2]} = db_{[p+1]}$ より、

$$\begin{aligned}
h_{M_1 \cdots M_{p+2}} &= (p+2) \partial_{[M_1} b_{M_2 \cdots M_{p+2}]} && (2.144)\\
&= \partial_{M_1} b_{M_2 \cdots M_{p+2}} + (-)^{(|M_1||M_2|+1)} \partial_{M_2} b_{M_1 \cdots M_{p+2}} \\
&\quad + \big(\text{ remaining } (p-1) \text{ terms} \big) && (2.145)
\end{aligned}$$

と書ける。ここで、$|M|$ は $M = \mu$ の時 0、$M = \alpha$ の時 1 となる統計因子である。これを使って、$\delta b_{[p+1]}$ は次のように簡単に書ける。

$$\begin{aligned}
\delta b_{[p+1]} &= \frac{1}{(p+1)!} dZ^{M_{p+1}} \cdots dZ^{M_1} \delta b_{M_1 \cdots M_{p+1}} \\
&\quad + \frac{1}{(p+1)!} \sum_{i=1}^{p+1} dZ^{M_{p+1}} \cdots d(\delta Z^{M_i}) \cdots dZ^{M_1} b_{M_1 \cdots M_{p+1}} \\
&\overset{\nabla}{=} \frac{1}{(p+1)!} dZ^{M_{p+2}} \cdots dZ^{M_2} \delta Z^{M_1} \partial_{M_1} b_{M_2 \cdots M_{p+2}} \\
&\quad - \frac{1}{(p+1)!} (p+1) dZ^{M_{p+2}} \cdots dZ^{M_3} \delta Z^{M_1} dZ^{M_2} \partial_{M_2} b_{M_1 M_3 M_4 \cdots M_{p+2}} \\
&= \frac{1}{(p+1)!} dZ^{M_{p+2}} \cdots dZ^{M_2} \delta Z^{M_1} \\
&\quad \times \Big[\partial_{M_1} b_{M_2 \cdots M_{p+2}} + (-)^{(|M_1||M_2|+1)} \partial_{M_2} b_{M_1 M_3 M_4 \cdots M_{p+2}} + \big(\text{remainig } (p-1) \text{ terms} \big) \Big] \\
&= \frac{1}{(p+1)!} dZ^{M_{p+2}} \cdots dZ^{M_2} \delta Z^{M_1} h_{M_1 \cdots M_{p+2}} && (2.146)\\
&= \frac{1}{(p+1)!} \Pi^{I_{p+2}} \cdots \Pi^{I_2} (\delta Z^M e_M{}^{I_1}) h_{I_1 \cdots I_{p+2}} && (2.147)
\end{aligned}$$

記号 $\stackrel{\cdot}{=}$ は全微分項を除いて両辺が等しいことを示す。今の場合には、$h_{[p+2]}$ は、スピナーの足が二本ある成分以外はゼロなので

$$h_{[p+2]} = \frac{(-)^{p+1}}{2!\,p!}\Pi^{\beta}\Pi^{\alpha}\Pi^{\mu_p}\cdots\Pi^{\mu_1}h_{\mu_1\cdots\mu_p\alpha\beta} \tag{2.148}$$

と書けて、以前の式から

$$h_{\mu_1\cdots\mu_p\alpha\beta} = i(-)^{p+1}(\Gamma_{\mu_1\cdots\mu_p})_{\alpha\beta} \tag{2.149}$$

と読み取ることができる。また、変分 $\delta Z^M e_M{}^m$ については、

$$\delta Z^M e_M{}^m \delta^\mu{}_m = \delta X^\mu + i\delta\bar{\theta}\Gamma^\mu\theta = 0 \tag{2.150}$$

という成分が消えていてさらに簡単になる (逆に、そういう変分を考えたとも言える)。結局、$b_{[p+1]}$ の変分は、

$$\delta b_{[p+1]} = \frac{1}{p!}(i\delta\bar{\theta}\Gamma_{\mu_1\cdots\mu_p}\theta)\Pi^{\mu_p}\cdots\Pi^{\mu_1} \tag{2.151}$$

と求まり、world volume に引き戻した $\delta b_{[p+1]}$ の成分は、

$$\delta b_{a_1\cdots a_{p+1}} \stackrel{\cdot}{=} (p+1)i\delta\bar{\theta}\Gamma_{\mu_1\cdots\mu_p}\partial_{[a_{p+1}}\theta\Pi^{\mu_p}_{a_p}\cdots\Pi^{\mu_1}_{a_1]} \tag{2.152}$$

になる。よって作用全体の変分は

$$\delta S_{\rm HT} = 2iT\int d^{p+1}\sigma\sqrt{-g}\delta\bar{\theta}\left(g^{ab}\Pi^\mu_a\Gamma_\mu - \frac{c}{p!}\frac{1}{\sqrt{-g}}\epsilon^{a_1\cdots a_p b}\Pi^{\mu_p}_{a_p}\cdots\Pi^{\mu_1}_{a_1}\Gamma_{\mu_1\cdots\mu_p}\right)\partial_b\theta \tag{2.153}$$

$$= 2iT\int d^{p+1}\sigma\sqrt{-g}\delta\bar{\theta}\left(g^{ab}\Gamma_a - \frac{c}{k}g^{ab}\Gamma_a\Gamma\right)\partial_b\theta \tag{2.154}$$

$$= 2iT\int d^{p+1}\sigma\sqrt{-g}\delta\bar{\theta}\left(1 - \frac{c}{k}\Gamma\right)\Gamma^b\partial_b\theta \tag{2.155}$$

となる。ここで、

$$\Gamma_a \fallingdotseq \Pi^\mu_a\Gamma_\mu \tag{2.156}$$

$$\Gamma \fallingdotseq \frac{1}{(p+1)!}\frac{k}{\sqrt{-M}}\epsilon^{a_1\cdots a_{p+1}}\Gamma_{a_1}\cdots\Gamma_{a_{p+1}} \tag{2.157}$$

と書いた。k は $\Gamma^2 = 1$ となるように決める定数で、$p = 1, 2$ の場合には $k = 1$ ととれる。これらの行列の性質を挙げると、

$$\{\Gamma_a, \Gamma_b\} = 2g_{ab} \tag{2.158}$$

$$\Gamma^2 = 1 \tag{2.159}$$

$$\mathrm{tr}\Gamma = 0 \tag{2.160}$$

$$g^{ba}\Gamma_a\Gamma = \frac{k}{p!}\frac{1}{\sqrt{-M}}\epsilon^{a_1\cdots a_p b}\Gamma_{a_1\cdots a_p} \tag{2.161}$$

などである。Γ_a は $(p+1)$ 次元 world volume 上のガンマ行列 (但し可約である) になっている。また、Γ の固有値は ± 1 が半分ずつあることも分かる。よって、上の $\delta S_{\rm HT}$ の式から $c = \pm k$ の場合には、

$$\delta\overline{\theta}\left(1 - \frac{c}{k}\Gamma\right) = 0 \tag{2.162}$$

を満たす変分については、$\delta S_{\rm HT} = 0$ となることが分かる。つまり、σ^a の任意関数 (target space についてはスピナー)$\kappa(\sigma)$ を持ってきて、

$$\delta\theta = \left(1 + \frac{c}{k}(-)^{\frac{(p+1)(p+2)}{2}}\Gamma\right)\kappa(\sigma) \tag{2.163}$$

となれば良い。簡単のため $d = 11, p = 2$(membrane) の場合に限って書くと、$k = 1, c = 1$ と採って、

$$\delta\theta = (1 + \Gamma)\,\kappa(\sigma) \tag{2.164}$$

となる。Γ の固有値が ± 1 半分ずつなので、この式は θ の 32 成分の内、半分の 16 成分は単なるゲージ自由度で、残った 16 成分が本当の自由度であることを言っている。

ここで右の表を見ると、式 (2.132) を思い出して、κ-symmetry が存在する場合にはボゾンとフェルミオンの自由度がきちんと揃っていることが分かる。これは target space だけではなく、world volume 上にも SUSY が存在することを暗示しているように見える。

	座標	ゲージ対称性	自由度
X^μ	d	$p+1$	$d-(p+1)$
θ^α	$\mathrm{tr}\mathcal{P}$	$\frac{1}{2}\mathrm{tr}\mathcal{P}$	$\frac{1}{4}\mathrm{tr}\mathcal{P}$

よって次節では、κ-symmetry を持った membrane 作用

$$S = -T\int d^3\sigma\left[\sqrt{-M} - i\frac{1}{2}\epsilon^{abc}\overline{\theta}\Gamma_{\mu\nu}\partial_a\theta\left(\Pi_b^\mu\Pi_c^\nu + i\Pi_b^\mu\overline{\theta}\Gamma^\nu\partial_c\theta - \frac{1}{3}\overline{\theta}\Gamma^\mu\partial_b\theta\,\overline{\theta}\Gamma^\nu\partial_c\theta\right)\right] \tag{2.165}$$

について考える。

2.5 supermembrane and its matrix regularization

この節では、supermembrane に対し、ボゾニックの場合と同様にして、まずライトコーン座標をとったときのハミルトニアンを求めた後、APD をゲージ化した作用に書き換える。さらにその作用を行列正則化して、超対称性を持った量子力学の作用を得る。ほとんどのことは全く同じである。一つ新しいことは、ゲージ対称性として κ-symmetry が増えた事だけである。そのため、次の κ-symmetry 固定条件を置く。

$$\Gamma^+\theta = 0 \tag{2.166}$$

appendix A の supermembrane 用のガンマ行列の表現を用いると、$\Gamma^+ = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 \end{smallmatrix}\right)$ なので、

$$\theta = 2^{-3/4}\begin{pmatrix} 0 \\ \theta \end{pmatrix} \tag{2.167}$$

である。ここで後の θ は 16 成分の $\mathrm{SO}(9)$ マヨラナスピナーである。この時、$\overline{\theta} = 2^{-3/4}(\theta, 0)$ なので、

$$\overline{\theta}\Gamma^{\mu}\partial_a\theta = \begin{cases} \overline{\theta}\Gamma^{-}\partial_a\theta = -\frac{1}{2}\theta\partial_a\theta & \text{if } \mu = - \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{2.168}$$

$$\overline{\theta}\Gamma_{\mu\nu}\partial_a\theta = \begin{cases} \overline{\theta}\Gamma_{+i}\partial_a\theta = \frac{1}{2}\theta\gamma^i\partial_a\theta & \text{if } \mu = +, \nu = i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{2.169}$$

となって非常に簡単になる。$X^+ = \sigma^0$ とした作用は、

$$S_{\mathrm{HT}} = -\frac{T}{2}\int d^3\sigma \left[\sqrt{-g}(g^{ab}M_{ab} - 1) - i\epsilon^{rs}\partial_r X^i\ \theta\gamma^i\partial_s\theta\right] \tag{2.170}$$

である。ボゾニックの場合と同様にして進んでいくと、ハミルトニアン密度は

$$\mathcal{H} = T\eta\omega\left[\frac{1}{2}\left(\frac{P^i}{T\eta\omega}\right)^2 + \frac{1}{4\eta^2}\{X^i, X^j\}^2 + i\frac{1}{2\eta}\theta\gamma^i\{X^i, \theta\}\right] \tag{2.171}$$

となる。拘束、その他は以下に記す。

$$\text{拘束条件}: \quad 0 = \{X^i, \frac{P^i}{T\eta\omega}\} + \frac{i}{2}\{\theta, \theta\} \tag{2.172}$$

$$+\text{方向の運動量}: \quad P^+ = T\eta\omega \tag{2.173}$$

$$\text{ポアソン括弧}: \quad \{f, g\} = \frac{1}{\omega}\epsilon^{rs}\ \partial_r f\ \partial_s g \tag{2.174}$$

当然このハミルトニアンも (時間 σ^0 によらない)APD で不変である。この対称性をゲージ化した作用は、

$$S = \int d^3\sigma\ T\eta\omega\left[\frac{1}{2}(D_0X^i)^2 - \frac{1}{4\eta^2}\{X^i, X^j\}^2 - \frac{i}{2}\theta D_0\theta - \frac{i}{2\eta}\theta\gamma^i\{X^i, \theta\}\right] \tag{2.175}$$

$$D_0 f \triangleq \partial_0 f + \frac{1}{\eta}\{A_0, f\} \tag{2.176}$$

である。ゲージ APD 変換は、

$$\delta X^i = -\frac{1}{\eta}\{a(\sigma^a), X^i\} \tag{2.177}$$

$$\delta\theta\ = -\frac{1}{\eta}\{a(\sigma^a), \theta\} \tag{2.178}$$

$$\delta A_0 = \partial_0 a(\sigma^a) - \frac{1}{\eta}\{a(\sigma^a), A_0\} \tag{2.179}$$

となっている。行列正則化はボゾニックと全く同じで、正則化後の作用は[7]、

$$S_{\mathrm{MR}} = 2\pi T\int d\tau\ \mathrm{tr}\left(\frac{1}{2}(D_0X^i)^2 + \frac{1}{4}\left[X^i, X^j\right]^2 - \frac{i}{2}\theta D_0\theta - \frac{1}{2}\theta\gamma^i\left[X^i, \theta\right]\right) \tag{2.180}$$

$$D_0 F \triangleq \partial_0 F - i\left[A_0, F\right] \tag{2.181}$$

[7] $2\pi l_P = 1$ の単位系で書いてある

である。($\sigma^0 = \tau$ と書いた。) APD 対称性は、やはり $\mathrm{U}(N)$ のゲージ対称性になっている。

この作用は、元の membrane action に有った超対称性を受け継いでいる。一つは κ-symmetry を固定しても残っているもの、つまり式 (2.104) の ϵ の内、下 16 成分による変換で、

$$\delta\theta = \epsilon\,\mathbf{1}_N \tag{2.182}$$

$$\delta X^i = 0 \tag{2.183}$$

$$\delta A_0 = 0 \tag{2.184}$$

というものである。ここで ϵ は $\mathrm{SO}(9)$ スピナーで (行列ではない) ただの数である。もう一つの対称性は、式 (2.104) の上 16 成分による変換をゲージ固定条件を満たすように κ-symmetry で補ったものである。しかしその場合には (membrane の作用にはなかった) A_0 の変換性が良く分からない。しかし、行列正則化後の作用は (9+1) 次元の超対称 $\mathrm{U}(N)$ ヤン-ミルズ理論を (0+1) 次元にリダクションしたものになってることを利用することができる。実際に appendix C から持ってきた (9+1) 次元の超対称 $\mathrm{U}(N)$ ヤン-ミルズ理論の作用

$$S_{\mathrm{SYM}_{10}} = -\frac{1}{g_{\mathrm{YM}}^2}\int d^{10}x\left(\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{i}{2}\bar{\lambda}\Gamma^\mu D_\mu\lambda\right) \tag{2.185}$$

を、ガンマ行列をワイル基底で書いた方の表現を用い、また λ は $+1$ のカイラリティーを持つワイルスピナー $\lambda = \left(\begin{smallmatrix}\lambda\\0\end{smallmatrix}\right)$ として (0+1) 次元にリダクションすると、

$$S_{\mathrm{SYM}_1} = \frac{1}{g^2}\int dt\left(\frac{1}{2}(D_0A_i)^2 + \frac{1}{4}\left[\,A_i\,,A_j\,\right]^2 - \frac{i}{2}\lambda D_0\lambda + \frac{1}{2}\lambda\gamma^i\left[\,A_i\,,\lambda\,\right]\right) \tag{2.186}$$

となり、$A_i = X^i, \lambda = \theta$ とすることで、先ほどの S_{MR} と完全に一致する。よって対称性も同じで、

$$\delta A_0 = i\epsilon\theta \tag{2.187}$$

$$\delta X^i = -i\epsilon\gamma^i\theta \tag{2.188}$$

$$\delta\theta = \left(\frac{1}{2}D_0X^i\gamma^i - \frac{i}{4}\left[\,X^i\,,X^j\,\right]\gamma^{ij}\right)\epsilon \tag{2.189}$$

が残り半分の 16 個の超対称性である。

まとめ

- 2 次元面上の関数と、その間のポアソン括弧は N 次元エルミート行列の作る空間と非常にうまく対応している。この対応から行列による関数の正則化が導かれる。
- ライトコーンフレームで見た supermembrane を行列正則化すると 32 個の超対称性を持った、N 次元エルミート行列を自由度に持つ量子力学系になる。
- そして、その作用は (9+1) 次元の超対称 $\mathrm{U}(N)$ ヤン-ミルズ理論を (0+1) 次元にリダクションしたものと一致する。

3 IIB matrix model

IIB matrix model(以下 IIB MM) は、石橋、川合、北沢、土屋 (IKKT)[2] によって提案されたモデルで、ストリング理論の非摂動的な定式化であると予想されている。

その理由として挙げられるのは、

1. IIB MM の作用は type IIB ストリング理論の作用を行列正則化したものと関係が深い。
2. 適当な近似の下で、BPS 状態の間のポテンシャルがストリング理論のものと一致する。
3. 適当な仮定の下で ライトコーン弦の場の理論を再現する。

等である。IIB MM でまず目を引くのは、作用が積分を含まず単なる数の掛け算と足し算だけで書かれている点であろう。これに対応して、$Z = \int e^{-S}$ の積分は汎関数積分ではなく普通の (高校生の時に習ったような) 積分である。これはストリングの 2 次元 world volume 上の関数を行列正則化したからに他ならない。この時間パラメーターすら含まないという性質は、分かりにくい、難しい、取っつきにくいと同時に (たぶん) 大きな長所である。このことだけでも IIB MM は一つの極まった理論であると言えよう。

IIB MM のもう一つ大きな長所は、10 次元での $\mathcal{N} = 2$ 超対称ポアンカレ不変性が明らかである点である。よく知られているようにストリング理論は 10 次元時空上で定義されており、我々の住む世界を記述するためには、ポアンカレ不変性が自発的に破れて 4 次元っぽい時空を実現する必要がある。10 次元でストリング理論を考えている以上、必ずやらなければならないことなのだがこれが非常に難しく、まだ誰も示した人はいない。こういうところがストリング理論の非摂動的な定式化を必要とする理由となっている。IIB MM でもこのことは導かれたわけではないのだが、可能性のあるシナリオは考えられていて、なんとなく 4 次元が出てくることが最も自然なような気にさせてくれる。

この節では、IIB 型超弦理論の行列正則化をして、そこに現れる D-brane に対応した BPS 状態を見る。そして、行列正則化後の作用が本当に相互作用を含んでいることを見るために、D1-brane と anti-D1-brane(以後 $\overline{\text{D1}}$ と書く) の間のポテンシャルを計算して弦理論と比較する。それらをふまえた上で IIB MM の作用を与えることにしよう。

3.1 matrix regularization of IIB superstring

まずは、IIB 型超弦理論の Schild 型作用 [10] を行列正則化することにより IIB MM の作用を求めることにしよう。そのために、次の Green-Schwarz 型 IIB superstring の作用から出発する。導出は appendix D に任せて、結果だけを書こう。

$$S_{\text{GS}} = -T \int d^2\sigma \Big[\sqrt{-M} + i\epsilon^{ab} \partial_a X^\mu \left(\theta^1 \Gamma_\mu \partial_b \theta^1 + \theta^2 \Gamma_\mu \partial_b \theta^2 \right) + \epsilon^{ab} \theta^1 \Gamma^\mu \partial_b \theta^1 \theta^2 \Gamma_\mu \partial_b \theta^2 \Big] \tag{3.1}$$

ここで、

$$M = \det(M_{ab}) = \det(\Pi_a^\mu \Pi_b^\nu \eta_{\mu\nu}) \tag{3.2}$$

$$\Pi_a^\mu = \partial_a X^\mu - i\left(\theta^1 \Gamma^\mu \partial_a \theta^1 - \theta^2 \Gamma^\mu \partial_a \theta^2\right) \tag{3.3}$$

である。この作用には次の (target space の) $\mathcal{N} = 2$ SUSY と、world volume のゲージ対称性である κ-symmetry がある。

$$\delta_{\rm SUSY}\theta^1 = \epsilon^1 \tag{3.4}$$

$$\delta_{\rm SUSY}\theta^2 = \epsilon^2 \tag{3.5}$$

$$\delta_{\rm SUSY}X^\mu = i(\bar{\epsilon^1}\Gamma^\mu\theta^1 - \bar{\epsilon^2}\Gamma^\mu\theta^2) \tag{3.6}$$

$$\delta_\kappa\theta^1 = \alpha^1 = (1+\tilde{\Gamma})\kappa = \frac{1}{2}(\tilde{\Gamma}+1)\kappa' \tag{3.7}$$

$$\delta_\kappa\theta^2 = \alpha^2 = (1+\tilde{\Gamma})\kappa = \frac{1}{2}(\tilde{\Gamma}-1)\kappa' \tag{3.8}$$

$$\delta_\kappa X^\mu = -i(\bar{\alpha^1}\Gamma^\mu\theta^1 - \bar{\alpha^2}\Gamma^\mu\theta^2) \tag{3.9}$$

ここで $\epsilon^{1,2}$ は σ に依らない定数スピナー、$\kappa' = 2\tilde{\Gamma}\kappa$ はゲージパラメーターで、σ に依ったスピナーである。$\tilde{\Gamma}$ の定義と性質は以下のようになっている (この $\tilde{\Gamma}$ は appendix D では Γ と書いたものである)。

$$\tilde{\Gamma} \triangleq \frac{1}{2!\sqrt{-M}}\epsilon^{ab}\Pi_a^\mu\Pi_b^\nu\Gamma_{\mu\nu} \tag{3.10}$$

$$\tilde{\Gamma}^2 = 1 \tag{3.11}$$

$$\mathrm{tr}\tilde{\Gamma} = 0 \tag{3.12}$$

$$\tilde{\Gamma}\Gamma_\mu\Pi_a^\mu M^{ab} = \frac{1}{\sqrt{-M}}\epsilon^{ab}\Pi_a^\mu\Gamma_\mu \tag{3.13}$$

つまり $\tilde{\Gamma}$ はプロジェクターで、κ-symmetry とは、$\theta^{1,2}$ の内半分を動かすゲージ対称性である。

ここまでは supermembrane と全くパラレルであるが、κ-symmetry を固定する段階で話が変わる。supermembrane の場合には、スピナーは既約表現 (マヨラナ) 一つしか入っていなかったので 11 次元のローレンツ不変性を壊さずに κ-symmetry を固定することはできなかった。しかし IIB superstring の場合には、二つのスピナーが同じカイラリティーを持っていることから、(9 + 1) 次元のローレンツ対称性を保ったままで κ-symmetry を固定することができるのである。そのためには次のゲージ固定条件を置けば良い[8]。

$$\theta^1 - \theta^2 = 0 \tag{3.14}$$

$\theta^1 = \theta^2 = \psi/2$ と書きなおして GS 作用に代入すると、かなり簡単な形になる。

$$\tilde{S}_{\rm GS} = -T\int d^2\sigma\left(\sqrt{-m} + \frac{i}{2}\epsilon^{ab}\partial_a X^\mu\,\overline{\psi}\Gamma_\mu\partial_b\psi\right) \tag{3.15}$$

[8] $(\theta^1 - \theta^2)$ のゲージ変換は変換パラメーター κ' そのものなのでこのゲージ固定からは拘束条件は出てこない。

ここで $m = \det(m_{ab}) = \det(\partial_a X^\mu \partial_b X_\mu)$ はボゾン変数だけで書かれていることに注意しよう。SUSY 変換は $\delta = \delta_{\rm SUSY} + \delta_\kappa$ と変更される。この δ_κ はゲージ条件を保存するために補うべき κ 変換である。具体的には、

$$(\delta_{\rm SUSY} + \delta_\kappa)(\theta^1 - \theta^2) = \epsilon^1 - \epsilon^2 + \kappa' = 0 \tag{3.16}$$

から、$\kappa' = -(\epsilon^1 - \epsilon^2)$ と決まる。よって変更された SUSY 変換は、

$$\delta\psi = 2\epsilon^1 - (\tilde{\Gamma} + 1)(\epsilon^1 - \epsilon^2) \tag{3.17}$$

$$= (1 - \tilde{\Gamma})\epsilon^1 + (1 + \tilde{\Gamma})\epsilon^2 \tag{3.18}$$

$$\delta X^\mu = i(\overline{\epsilon^1} - \overline{\epsilon^2})\Gamma^\mu \psi \tag{3.19}$$

となる。次のステップは、Schild 型の作用に書き換えることである。しかしその前に GS 作用をユークリッド化することにしよう。ここでは、target space と world volume を同時にユークリッド化する。つまり上足に 0 を持ったものは全て $-i$ を付けることにする。

$$X^0 \longrightarrow -iX^0_{(E)} \tag{3.20}$$

$$\sigma^0 \longrightarrow -i\sigma^0_{(E)} \tag{3.21}$$

$$\Gamma^0 \longrightarrow -i\Gamma^0_{(E)} \tag{3.22}$$

$$\epsilon^{ab} \longrightarrow -i\epsilon^{ab}_{(E)} \tag{3.23}$$

すると、添字の $_{(E)}$ は書かないことにして、ユークリッド版の GS 作用は、

$$\tilde{S}_{\rm GS} = T \int d^2\sigma \left(\sqrt{m} + \frac{i}{2}\epsilon^{ab}\partial_a X^\mu \, \overline{\psi}\Gamma_\mu \partial_b \psi \right) \tag{3.24}$$

となる。ここで $a^\mu b_\mu$ は当然 $a^\mu b^\nu \delta_{\mu\nu}$ の意味である。もう一つ注意することとして、ディラック共役 $\overline{\psi}$ は ${}^t\psi C$ のことを意味しており、$\psi^\dagger\Gamma^0$ でも $\psi^\dagger$ でもなく、複素共役という操作は含んでいない。

それでは、Schild 型の作用に移ることにしよう。Schild 型作用とは、相対論的粒子の場合に、$-m\int d\tau\sqrt{\dot{x}^2}$ という作用を world line einbein(つまりスカラー密度) を導入して書き換えた $\frac{1}{2}\int d\tau[(\dot{x}^2/e) - em^2]$ という形のストリング版であるとも思える作用で、次のような形である。

$$S_{\rm Schild} = \frac{1}{2}\int d^2\sigma \left(\tilde{\alpha}\frac{m}{\sqrt{g}} + \tilde{\beta}\sqrt{g} \right) + \tilde{\alpha}\int d^2\sigma \frac{i}{2}\epsilon^{ab}\partial_a X^\mu \, \overline{\psi}\Gamma_\mu \partial_b \psi \tag{3.25}$$

$\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ は適当な定数で、world volume のスカラー密度 $\sqrt{g}$ を独立変数として導入した。この $\sqrt{g}$ を運動方程式、$\sqrt{g} = \sqrt{\tilde{\alpha}/\tilde{\beta}}\sqrt{m}$ を用いて消去すれば場の適当なリスケールによって $\tilde{S}_{\rm GS}$ と等しくなる。テンションは $T = \sqrt{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}$ である。この作用を見ると、行列正則化できる形にかなり近いことが分かる。経路積分の形で書くと、

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\sqrt{g}\,\mathcal{D}X\;\mathcal{D}\psi\; e^{-S_{\rm Schild}} \tag{3.26}$$

である。しかし、これはただ書いただけであって、まともに定義されたものかどうかは分からない。よって逆に行列正則化によって発散のない、もしくは制御可能な量子論を定義したいのである。行列正則化するために、APD だけを対称性として残したいので $\sqrt{g}$ をゲージ固定することにしよう。つまり二つある一般座標変換のゲージ対称性の内一つを固定して、残った一つが APD になるようにする。$\sqrt{g}$ がスカラー密度であることから、次の形までゲージ固定ができる。

$$\sqrt{g} = \eta\omega(\sigma) \tag{3.27}$$

ここで、$\omega(\sigma)$ はある定まったスカラー密度、η はゲージ変換の範囲では固定しきれない定数である。これを作用に代入して、

$$\tilde{S}_{\text{Schild}} = \frac{1}{2}\int d^2\sigma \left(\tilde{\alpha}\frac{m}{\eta\omega} + \tilde{\beta}\eta\omega\right) + \tilde{\alpha}\int d^2\sigma\ \frac{i}{2}\epsilon^{ab}\partial_a X^\mu\, \overline{\psi}\Gamma_\mu\partial_b\psi \tag{3.28}$$

$$= \tilde{\alpha}\int d^2\sigma\ \eta\omega\left(\frac{1}{4}\{X^\mu, X^\nu\}^2 + \frac{i}{2}\overline{\psi}\Gamma_\mu\{X^\mu, \psi\}\right) + \frac{1}{2}\tilde{\beta}\int d^2\sigma\ \eta\omega \tag{3.29}$$

ポアソン括弧は、

$$\{f, g\} \triangleq \frac{1}{\eta\omega}\epsilon^{ab}\,\partial_a f\,\partial_b g \tag{3.30}$$

と定義した。行列正則化をする前に先ほどのゲージ固定で拘束条件が出ないかどうかを調べておこう。まずは X^μ の運動方程式を書き下してみよう。

$$\partial_a\left(\frac{m}{\omega}m^{ab}\partial_b X^\mu\right) = 0 \tag{3.31}$$

この式に $\partial_c X^\mu$ を掛けてみると (これは一般座標変換の組合わせである)、

$$0 = \partial_a\left(\frac{m}{\omega}m^{ab}\partial_b X^\mu\right)\partial_c X^\mu \tag{3.32}$$

$$= \partial_a\left(\frac{m}{\omega}m^{ab}\partial_b X^\mu\partial_c X^\mu\right) - \frac{m}{\omega}m^{ab}\partial_b X^\mu\partial_a\partial_c X^\mu \tag{3.33}$$

$$= \partial_c\left(\frac{m}{\omega}\right) - \frac{m}{\omega}\frac{1}{2}m^{ab}\partial_c m_{ab} \tag{3.34}$$

$$= \partial_c\left(\frac{\sqrt{m}}{\omega}\right) \tag{3.35}$$

となり、$\frac{\sqrt{m}}{\omega}$ が定数であることが分かる。このことと、η の運動方程式

$$0 = -\frac{\tilde{\alpha}}{\eta^2}\int d^2\sigma\omega\left(\frac{\sqrt{m}}{\omega}\right)^2 + \tilde{\beta}\int d^2\sigma\omega \tag{3.36}$$

$$= \frac{\tilde{\alpha}}{\eta^2}\left(\eta^2 - \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}}\left(\frac{\sqrt{m}}{\omega}\right)^2\right)\int d^2\sigma\omega \tag{3.37}$$

から $\sqrt{g}$ の運動方程式をゲージ固定したものが導かれる。よって作用 $\tilde{S}_{\rm Schild}$ に拘束条件は付かない。ここまでで、出発点の GS 作用と、今導いた Schild 型作用が (少なくとも古典的には) 同等であることが分かった。

元に戻って、行列正則化すると、$\eta = N/2$ と置いて、

$$S_{\rm MR} = \alpha \ {\rm tr} \left(-\frac{1}{4} [\, X^\mu, X^\nu \,]^2 + \frac{1}{2} \overline{\psi} \Gamma_\mu [\, X^\mu, \psi \,] \right) + \beta \ {\rm tr} 1 \tag{3.38}$$

という作用になる。ここで、$\alpha \triangleq 2\pi\tilde{\alpha}, \beta \triangleq \pi\tilde{\beta}$ と書き換えた。“経路積分” の形に書くと次のようになる。

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \int dX \ d\psi \ e^{-S_{\rm MR}} \tag{3.39}$$

ゲージ固定しきれなかった定数 η に対応して n についての和が含まれている。最後の行列正則化された作用は、始めの GS 型作用の $\mathcal{N} = 2 \ \ {\rm SUSY}$ をそのまま受け継いでいるはずである。κ-symmetry を固定した後の SUSY との対応を見ておくと、まずパラメーター ϵ, ξ が定数だったことから正則化後には、単位行列に比例した数となる。また、変換則に表われていた $\tilde{\Gamma} \sim \{X^\mu, X^\nu\} \Gamma_{\mu\nu}$ は、$[\, X^\mu, X^\nu \,] \Gamma_{\mu\nu}$ に変わる。きちんと変換を求めるために、作用 $S_{\rm MR}$ の α 比例項は、(ユークリッド化した)10 次元の SYM を 0 次元に落としたものになっていることを使おう。これより、一つ目の SUSY 変換は、

$$\delta^{(1)} \psi = \frac{i}{2} [\, X^\mu, X^\nu \,] \Gamma_{\mu\nu} \epsilon \tag{3.40}$$

$$\delta^{(1)} X^\mu = i \bar{\epsilon} \Gamma^\mu \psi \tag{3.41}$$

と分かる。残り一つは単位行列比例部分だけに関したもので、

$$\delta^{(2)} \psi = \xi \cdot 1_N \tag{3.42}$$

$$\delta^{(2)} X^\mu = 0 \tag{3.43}$$

というものである。これらの変換の交換関係を計算してみよう。まず $\delta^{(1)}$ 同士の交換関係は、10 次元では appendix C に書いたように、ψ の運動方程式と、ゲージ対称性の範囲内で微分、∂_μ(場) となっていた。しかし、0 次元に落としたことで微分は無くなって交換するようになる。また、$\delta^{(2)}$ 同士はすぐに交換することが分かる。よって、残るのは次の交換子だけである。

$$\left[\delta^{(1)}_\epsilon, \delta^{(2)}_\xi \right] \psi = 0 \tag{3.44}$$

$$\left[\delta^{(1)}_\epsilon, \delta^{(2)}_\xi \right] X^\mu = i \bar{\epsilon} \Gamma^\mu \xi \tag{3.45}$$

これらを対角化するためには、次のように組むとよい。

$$\tilde{\delta}^{(1)} \triangleq \ \ \delta^{(1)} + \delta^{(2)} \tag{3.46}$$

$$\tilde{\delta}^{(2)} \triangleq i(\delta^{(1)} - \delta^{(2)}) \tag{3.47}$$

$$\left[\tilde{\delta}^{(I)}_\epsilon, \tilde{\delta}^{(J)}_\xi \right] \psi = 0 \tag{3.48}$$

$$\left[\tilde{\delta}^{(I)}_\epsilon, \tilde{\delta}^{(J)}_\xi \right] X^\mu = \delta^{IJ} \cdot 2i \, \bar{\epsilon} \Gamma^\mu \xi \tag{3.49}$$

こうすると、二つの変換とも交換子が X^μ を単位行列比例分だけずらす変換になっている。このことから X^μ (の固有値) を時空座標 (時空の点) と解釈すれば、これらの変換は 10 次元時空上の $\mathcal{N}=2$ SUSY となる。

それではいくつかコメントをしてこの節を終わろう。

1. world volume が 2 次元であるストリングを行列正則化したので、作用に積分がなくなっている。つまり自由度は N 次元エルミート行列、更に言えばその各成分の "数" である。
2. それに対応して、"経路積分" は普通の積分に変わってしまった (ストリングの系が、超対称統計力学系に置き換わった事になる)。これにより "経路積分" が本当にきっちりと計算できる可能性がある。
3. 10 次元ローレンツ対称性、今の場合は $\mathrm{SO}(10)$ の対称性が明白に保たれている。
4. 時空は初めからあるのではなく、行列の成分という自由度の一部になった。時空の広がり、形などは相互作用によって決定されるべきで、(うまく行けば) 理論の帰結としてそれらを予言することができる。

3.2 interaction between BPS objects

この副節では、前副節で見つけた作用 S_{MR} の古典解 (運動方程式の解) のうち、超対称性を部分的に保つものを見つけて、IIB 型超弦理論の中の BPS 状態との対応を見てみよう。その後、1 ループ近似の下でそれらの相互作用を求めよう。

$$S_{\mathrm{MR}} = \alpha\ \mathrm{tr}\left(-\frac{1}{4}\left[\,X^\mu, X^\nu\,\right]^2 + \frac{1}{2}\overline{\psi}\Gamma_\mu\left[\,X^\mu, \psi\,\right]\right) + \beta\ \mathrm{tr}1 \tag{3.50}$$

より、次の X の運動方程式を得る。

$$\left[\left[\,X^\mu, X^\nu\,\right], X_\nu\,\right] - \frac{1}{2}\Gamma_{\alpha\beta}\left\{\,\psi^\alpha, \psi^\beta\,\right\} = 0 \tag{3.51}$$

この後は $\psi = 0$ の場合に限る。まず弦理論の側から考えてみよう。IIB 型超弦理論には (1 + 1) 次元に広がった物体として D1-brane があることが知られている。今、X^0, X^1 方向がそれぞれ長さ T, L の円周にコンパクト化されているとすれば、そのトーラス $T^2 = S^1 \times S^1$ に巻き付いた安定な D1-brane が存在して、その配位は brane の target space の座標を $X^\mu(\sigma)$ で書くと、world volume の座標を $0 \le \sigma^0, \sigma^1 < 2\pi$ として、

$$\begin{aligned} X^0 &= T\frac{\sigma^0}{2\pi} \\ X^1 &= L\frac{\sigma^1}{2\pi} \\ X^{\mu=2,\cdots,9} &= 0 \end{aligned} \tag{3.52}$$

となる。これを行列正則化してみよう。まず、関数側のポアソン括弧を考えてみると、

$$\left\{\,X^0, X^1\,\right\} = \pi\epsilon^{ab}\,\partial_a X^0\,\partial_b X^1 = \frac{TL}{4\pi} \tag{3.53}$$

となっている[9]。これから、行列にしたときの交換関係が、

$$-i\left[\,X^0, X^1\,\right] = \frac{2}{n} \times \frac{TL}{4\pi} = \frac{TL}{2\pi n} \tag{3.54}$$

となれば良い。しかし、この関係式は無限次元行列でしか満たすことはできない (有限次元であれば、両辺のトレースをとって矛盾)。そのためここで n と書いたのは、本当は無限大の行列の次元である。この式は非常に大きい n に対して大体成り立っているだろうという式である。この関係式は本質的に正準交換関係 $-i\left[\,q\,,p\,\right]=1$ と同じ[10]であるので、次のように行列をとると良い。

$$\begin{aligned} X^0 &= T\frac{q}{\sqrt{2\pi n}} \\ X^1 &= L\frac{p}{\sqrt{2\pi n}} \\ X^{\mu=2,\cdots,9} &= 0 \end{aligned} \tag{3.55}$$

実際この時の $X^{0,1}$ の固有値の広がりを見積もってみる。量子力学では位相空間は最小要素が $2\pi\hbar$ となるので、自由度 $=$ 行列の次元 n の時には、位相空間の体積は大体 $2\pi n$ であり、q,p の広がりは共に $\sqrt{2\pi n}$ 程度である。よって、$X^{0,1}$ の広がりは正しくそれぞれ T,L 程度となっている。また、この行列は運動方程式の解となっている。

一応安心のために、n が有限の時にはどうなっているかを書いておくと、appendix E の n 次元行列 U,V を用いて、

$$\begin{aligned} \exp\left(2\pi i\frac{X^0}{T}\right) &= \exp(i\sigma^0) \longrightarrow U \\ \exp\left(2\pi i\frac{X^1}{L}\right) &= \exp(i\sigma^1) \longrightarrow V \end{aligned} \tag{3.56}$$

より X^0, X^1 の交換関係の類似物は、$e^A e^B e^{-A} e^{-B} = e^{[\,A,B\,]}$ から、

$$\exp\left(-\frac{(2\pi)^2}{LT}\left[\,X^0, X^1\,\right]\right) = UVU^{-1}V^{-1} = \exp\left(-i\frac{2\pi}{n}\right) \tag{3.57}$$

である。これを見ると、先ほどの交換関係は、周期 $LT/2\pi$ での同一視により実現されていることが分かる。よって LT を大きくとってやればほとんど同じものだと思える。

この解が保つ SUSY を見てみると、交換関係が単位行列に比例していることから、$\delta^{(1)}$ による変換が単位行列の成分しか持たないことが分かる。よってこの変換はちょうど $\delta^{(2)}$ による変換で打ち消すことができ、元の半分の 16 個の対称性が残ることが分かる。これは見事に D1 ブレーンが SUSY を半分保つ BPS 状態であることに対応している。これをそのまま一般化すると、

$$\left[\,X^2, X^3\,\right] \propto 1, \quad \left[\,X^4, X^5\,\right] \propto 1, \quad \cdots \tag{3.58}$$

[9] T^2 上の行列正則化は appendix E を参照。
[10] 本論文内では $\hbar = c = 1$ である。

のような解も BPS 状態 (SUSY を部分的に保つもの) であることが分かる。これらの解の固有値の広がりは、2 次元ずつ増えていくので IIB ストリングの D3-ブレーン, D5-ブレーン,$\cdots$ のようなものだと考えられる。

それでは二つの D1 が X^2 方向に距離 b だけ離れて存在する状況を考えてみよう。関数側では次のようになっている。

$$
(1)\begin{cases} X^0_{(1)} &= T\dfrac{\sigma^0_{(1)}}{2\pi} \\ X^1_{(1)} &= L\dfrac{\sigma^1_{(1)}}{2\pi} \\ X^2_{(1)} &= +\dfrac{b}{2} \\ X^\mu_{(1)} &= 0 \end{cases}
\qquad
(2)\begin{cases} X^0_{(2)} &= T\dfrac{\sigma^0_{(2)}}{2\pi} \\ X^1_{(2)} &= L\dfrac{\sigma^1_{(2)}}{2\pi} \\ X^2_{(2)} &= -\dfrac{b}{2} \\ X^\mu_{(2)} &= 0, \qquad (\mu = 3, \cdots 9) \end{cases}
\tag{3.59}
$$

関数側の作用を見れば分かるように、二つの連結でない world volume を考えても、お互いにはなんの関係もない二つの物体がそれぞれ時空中をフワフワ漂っているだけで、相互作用は出てこない。しかし行列正則化版では次のように設定することで相互作用までも含んだ多体系を表していると考えることができる。上の関数を “すなおに” 正則化しようとすると n_1 次元行列で $X_{(1)}$ を表し、n_2 次元行列で $X_{(2)}$ を表すことにより、$n_1^2 + n_2^2$ 個の自由度で (すなわち直和行列によって) 表すだろう。しかしこれでは二つの相互作用しない物体と同じである。そこで、とにかく自由度は一つの X につき、一つの n 次元行列だとして、次のように無理やり二つの物体を対角ブロックとして入れてしまう。

$$
\begin{aligned}
X^0 &= \begin{pmatrix} T\dfrac{q}{\sqrt{2\pi n}} & 0 \\ 0 & T\dfrac{q'}{\sqrt{2\pi n}} \end{pmatrix} \\
X^1 &= \begin{pmatrix} L\dfrac{p}{\sqrt{2\pi n}} & 0 \\ 0 & L\dfrac{p'}{\sqrt{2\pi n}} \end{pmatrix} \\
X^2 &= \begin{pmatrix} \dfrac{b}{2} & 0 \\ 0 & -\dfrac{b}{2} \end{pmatrix} \\
X^{\mu=3,\cdots,9} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{3.60}
$$

そして新たにできた非対角ブロックが二つの物体の間の相互作用を表す自由度と考えるのである。このように二つの物体を表すというのは、本当は二つの world volume は細い管見たいなものでうじゃうじゃと連結になっているような感じを与える。図 1 はそのイメージである。それでは、非対角成分が実際に相互作用を表しているということを D1-D1,D1-$\overline{\text{D1}}$の場合について計算してみよう。ここでやる計算は、行列を古典解とその周りの揺らぎに分解し

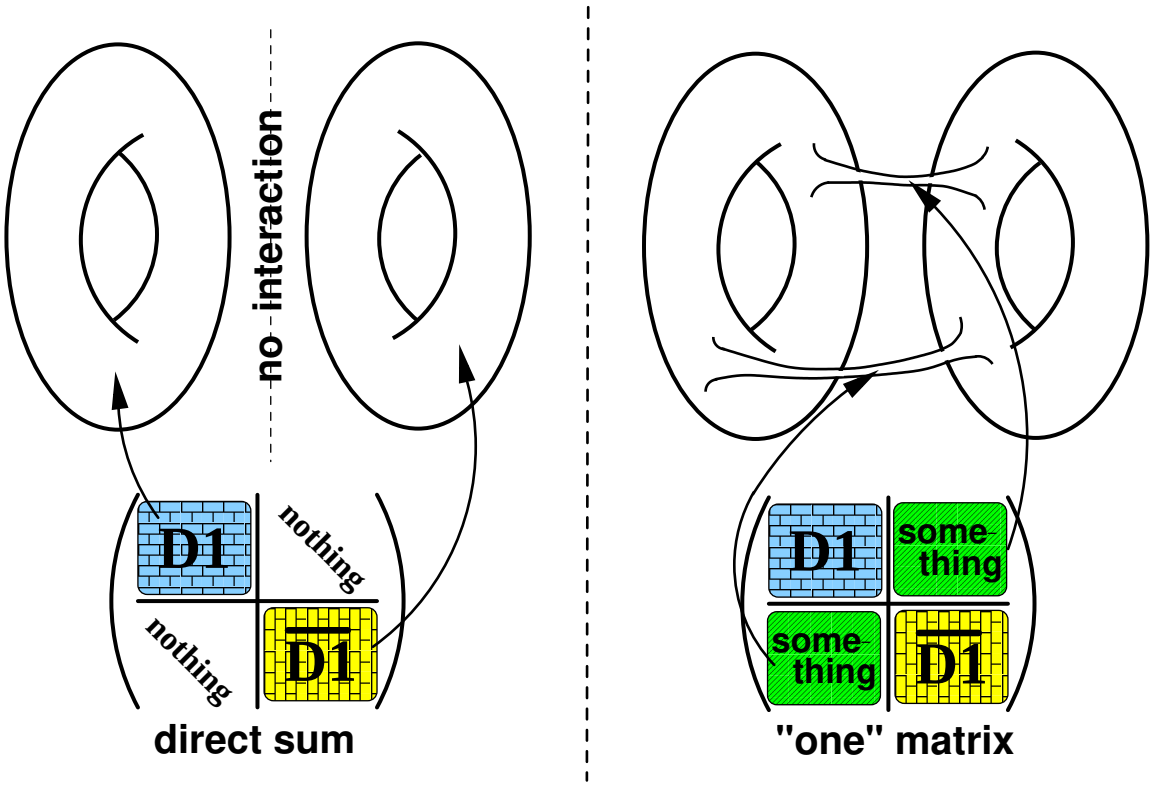


図 1: 非対角ブロックの有無

て揺らぎの二次の項を積分するという 1 ループ近似である。見通しがいいように、一般的な公式を作ってからそれぞれの場合に当てはめることにしよう。まず、場を古典解と揺らぎに分ける。

$$\begin{array}{ccccc} \text{場} & = & \text{古典解} & + & \text{揺らぎ} \\ X^\mu & = & p^\mu & + & a^\mu \\ \psi & = & \chi & + & \varphi \end{array} \tag{3.61}$$

次に作用を揺らぎについて 0 次、2 次、それ以上、と分ける[11]。

$$S_0 = \mathrm{tr}\left(-\frac{1}{4}\,[\,p^\mu, p^\nu\,]^2 + \frac{1}{2}\overline{\chi}\Gamma^\mu\,[\,p_\mu, \chi\,] \right) \tag{3.62}$$

$$\begin{aligned} S_2 = \mathrm{tr}\Big(&-\frac{1}{2}\,[\,p^\mu, a^\nu\,]^2 + \frac{1}{2}\,[\,p_\mu, a^\mu\,]^2 - [\,p_\mu, p_\nu\,]\,[\,a^\mu, a^\nu\,] \\ &+ \overline{\chi}\Gamma^\mu\,[\,a_\mu, \varphi\,] + \frac{1}{2}\overline{\varphi}\Gamma^\mu\,[\,p_\mu, \varphi\,] \Big) \end{aligned} \tag{3.63}$$

$$S_{\mathrm{int}} = \mathrm{tr}\Big(-[\,p^\mu, a^\nu\,]\,[\,a^\mu, a^\nu\,] + \frac{1}{2}\overline{\varphi}\Gamma^\mu\,[\,a_\mu, \varphi\,] - \frac{1}{4}\,[\,a^\mu, a^\nu\,]^2 \Big) \tag{3.64}$$

[11] 一次の部分は、(運動方程式)×(その場の揺らぎ) となっていて、古典解に対しては消える。

計算の簡単のため通常のゲージ理論のようにゲージ固定項とゴースト項を導入する。ゲージ固定はバックグラウンドゲージ

$$D_\mu^{\rm bg} X^\mu \triangleq -i\,[\,p_\mu\,, X^\mu\,] = 0 \tag{3.65}$$

で行うことにすると、ゴースト項 $S_{\rm ghost}$、ゲージ固定項 $S_{\rm g.f.}$ はそれぞれ、

$$\begin{aligned} S_{\rm ghost} &= f_1\ {\rm tr}\left(B D_\mu^{\rm bg} D^\mu C\right) \\ &= -f_1\ {\rm tr}\left(B\,[\,p_\mu\,,[\,p^\mu + a^\mu\,, C\,]\,]\right) \qquad (3.66) \\ S_{\rm g.f.} &= \frac{f_2}{2}\ {\rm tr}(D_\mu^{\rm bg} X^\mu)^2 \\ &= -\frac{f_2}{2}\ {\rm tr}\,[\,p_\mu\,, a^\mu\,]^2 \qquad (3.67) \end{aligned}$$

となる。ここで行列 o に対するアジョイント演算子 O を次のように定義する。それは、行列 X に

$$O\cdot X \triangleq [\,o, X\,] \tag{3.68}$$

というように作用する演算子である。具体的に行列を基底 T^a で展開して $X = X^a T^a$ と書くと、O は n^2 次元行列として表されて、

$$O^{ab}\cdot X^b = {\rm tr}\,(T^a\,[\,o, X\,]) = (-if^{abc}o^c)X^b \tag{3.69}$$

となる。または行列の足のままで、直積行列の形で書けば、

$$O = o\otimes 1 - 1\otimes o \tag{3.70}$$

とも書ける (後で使うときに詳しくやる)。これを用いて、$p_\mu, f_{\mu\nu} = -i\,[\,p_\mu\,, p_\nu\,]$ に対するアジョイント演算子は、

$$P_\mu X = [\,p_\mu\,, X\,] \tag{3.71}$$

$$F_{\mu\nu}X = [\,f_{\mu\nu}\,, X\,] = -i\,[\,P_\mu\,, P_\nu\,]\,X \tag{3.72}$$

となる。式 (3.72) の最右辺は、式 (3.71) とヤコビ恒等式から従う。この書き方で、揺らぎに対する二次までの作用は次のようにコンパクトにまとまる。

$$S_2^{(\rm total)} = {\rm tr}\left(\frac{1}{2}a^\mu(P^2\delta_{\mu\nu} - 2iF_{\mu\nu})a^\nu + \frac{1}{2}\overline{\varphi}\Gamma^\mu P_\mu\varphi - BP^2C\right) \tag{3.73}$$

決めていなかった係数は $f_1 = f_2 = 1$ とした。後はこれを a, φ, C, B について積分するだけである。積分後の、配位 p_μ に対する 1 ループ有効作用を W と書こう。

$$\begin{aligned} e^{-W} &= \int da\ d\varphi\ dC\ dB\ e^{-S_2^{(\rm total)}} \qquad (3.74) \\ &= {\rm const.}\ \left[{\rm Det}(P^2\delta_{\mu\nu} - 2iF_{\mu\nu})\right]^{-\frac{1}{2}}\,{\rm Det}(P^2){\rm Pf}(C\Gamma^\mu P_\mu)_{\alpha\beta} \qquad (3.75) \end{aligned}$$

ここで、あたまにある const. は $P_\mu, F_{\mu\nu}$ には依らない項 (有効作用には関係無い項) を表す。また、Pf、Det はアジョイント演算子とローレンツの足の空間についてのファフィアン (pfaffian)、及び行列式である。$\mathrm{Pf}(C\Gamma^\mu P_\mu)_{\alpha\beta}$ にある α, β はスピナー表現のうち $\bar{\Gamma} = \pm$ のどっちの空間についての行列かを表す。α が $\bar{\Gamma} = +$、$\dot{\alpha}$ が $\bar{\Gamma} = -$ である。Pf、Det の定義を書いておく。

$$\begin{aligned}\mathrm{Pf}(A) &\triangleq \int d\varphi_{2n} \cdots d\varphi_1 \exp\left(\frac{1}{2}\varphi^i A_{ij} \varphi^j\right) \\ &= \frac{1}{2^n\, n!} \epsilon^{i_1 \cdots i_{2n}} A_{i_1 i_2} \cdots A_{i_{2n-1} i_{2n}}\end{aligned} \tag{3.76}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Det}(M) &\triangleq (-)^{\frac{n(n-1)}{2}} \int dC^n \cdots dC^1 \int dB_n \cdots dB_1 \exp\left(B_i M^i{}_j C^j\right) \\ &= \frac{1}{n!} \epsilon_{i_1 \cdots i_n} \epsilon^{j_1 \cdots j_n} P^{i_1}{}_{j_1} \cdots P^{i_n}{}_{j_n}\end{aligned} \tag{3.77}$$

$$[\mathrm{Pf}(A)]^2 = \mathrm{Det}(A) \tag{3.78}$$

ここで積分変数はすべてグラスマン奇数である。

$\mathrm{Pf}(C\Gamma^\mu P_\mu)_{\alpha\beta}$ を分かりやすい形に変形したいので、次のようにする。

$$[\mathrm{Pf}(C\Gamma^\mu P_\mu)_{\alpha\beta}] = \mathrm{Det}(C \not{P})_{\alpha\beta} = \mathrm{Det}(C)_{\alpha\dot{\beta}}\, \mathrm{Det}(\not{P})^{\dot{\alpha}}{}_\beta \tag{3.79}$$

$$= \mathrm{Det}(C \not{n}\not{n}\not{P}\not{n}\not{n})_{\alpha\beta} \tag{3.80}$$

$$= \mathrm{Det}(C \not{n})_{\alpha\beta}\, \mathrm{Det}(\not{n}\not{P}\not{n})^{\alpha}{}_{\dot{\beta}}\, \mathrm{Det}(\not{n})^{\dot{\alpha}}{}_\beta \tag{3.81}$$

ここで使った n^μ はガンマ行列とも、アジョイント演算子 P_μ とも可換なものである。一行目の最後の式と三行目の式を掛け合わせて次式を得る。

$$[\mathrm{Pf}(C\Gamma^\mu P_\mu)_{\alpha\beta}]^4 = [\mathrm{Det}(C \not{n})_{\alpha\beta}]^2\ \mathrm{Det}(\not{n}\not{P}\not{n}\not{P})^{\alpha}{}_\beta \tag{3.82}$$

$$= \text{const. Det}\left(P^2 + \frac{i}{2} F_{\mu\nu}\Gamma^{\mu\nu} - 2n\cdot P\, \not{n}\not{P}\right) \tag{3.83}$$

この表式は、n^μ を 回転しない ローレンツ変換に対して不変なので、適当な変換で $n\cdot P = 0$ とできる場合には最後の項は消える。この時は有効作用が次のように書ける。

$$\begin{aligned}W = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\log\left[P^2\delta_{\mu\nu} - 2iF_{\mu\nu}\right] - \mathrm{Tr}\log\left[P^2\right] \\ - \frac{1}{4}\mathrm{Tr}\log\left[P^2 + \frac{i}{2}F_{\mu\nu}\Gamma^{\mu\nu}\frac{1+\bar{\Gamma}}{2}\right]\end{aligned} \tag{3.84}$$

特別に、$F_{\mu\nu} = 0$ のときには必ず $n\cdot P = 0$ とできる。理由は、この時には $[\,P^\mu, P^\nu\,] = 0$ なので全て同時対角化可能で、$(P^\mu)^{ab} = (P^\mu)^a \delta^{ab}$ と書ける。すると、各 a ごとに $(n^\mu)^a$ を $(P_\mu)^a\,(n^\mu)^a = 0$ となるように選んで、$(n^\mu)^{ab} = \mathrm{diag}(n^\mu)^a$ とすれば良いからである。

さらに仮定を置いて簡単にしよう。上の有効作用にはアジョイント演算子 $P^2, F_{\mu\nu}$ が出てくるがこれらが可換であると仮定する。このためには $[\,p_\mu\,, f_{\nu\rho}\,] = 0$ であれば十分である。この時には $P^2, F_{\mu\nu}$ は全て同時対角化可能になり、そうなると、各対角成分ごとに別々のロー

レンツ変換をして良いので、$F_{\mu\nu}$ はローレンツベクトルの足に関して反対称行列の標準形まで持っていける。

$$F_{\mu\nu} = \left(\begin{array}{cc|cc|cc} & +a_1 & & & & \\ -a_1 & & & & & \\ \hline & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ \hline & & & & & a_5 \\ & & & & -a_5 & \end{array}\right) \tag{3.85}$$

すると、Tr のうちローレンツの足に対する部分が具体的に書き下せる。ボゾンの方はそのまま行列式を計算すれば良い。フェルミオンの部分に対しては、$\frac{i}{2}\Gamma_{\mu\nu}$ がローレンツ変換生成子で、そのうち $\frac{i}{2}\Gamma_{01}, \frac{i}{2}\Gamma_{23}\cdots, \frac{i}{2}\Gamma_{89}$ がカルタン部分代数を成している。それらの固有値を、$\frac{s_1}{2}, \cdots, \frac{s_5}{2} = \pm\frac{1}{2}$ と書いて、さらにカイラリティー行列

$$\bar{\Gamma} = -i\Gamma^0\cdots\Gamma^9 \tag{3.86}$$

$$= (i\Gamma_{01})\cdot(i\Gamma_{89}) \tag{3.87}$$

$$= s_1 s_2 \cdots s_5 \tag{3.88}$$

が $+1$ の空間でトレースをとっていることに気を付けると和は $s_1 s_2 \cdots s_5 = +1$ に制限されて[12]、有効作用は、

$$\begin{aligned} W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{5} \mathrm{Tr}\log\left[(P^2-2a_i)(P^2+2a_i)\right] - \mathrm{Tr}\log(P^2) \\ - \frac{1}{4}\sum_{\substack{s_1=\pm1,\ldots,s_5=\pm1 \\ s_1\cdots s_5=1}} \mathrm{Tr}\log\left[P^2 - \sum_{i=1}^{5} a_i s_i\right] \end{aligned} \tag{3.89}$$

$$\begin{aligned} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{5} \mathrm{Tr}\log\left[(1-\frac{2a_i}{P^2})(1+\frac{2a_i}{P^2})\right] \\ - \frac{1}{4}\sum_{\substack{s_1=\pm1,\ldots,s_5=\pm1 \\ s_1\cdots s_5=1}} \mathrm{Tr}\log\left[1 - \frac{\sum_{i=1}^{5} a_i s_i}{P^2}\right] \end{aligned} \tag{3.90}$$

となる。ここで Tr はすべてアジョイント演算子の空間に対するトレースである。

それでは準備ができたので、相互作用の計算に戻ろう。先ほど書いた二枚の D1-brane があるバックグラウンド (3.60) から始めよう。この時には $f_{\mu\nu} \propto 1$ となので $F_{\mu\nu} = [\, f_{\mu\nu}, * \,] = 0$ である。式 (3.84) から、

$$W = \mathrm{Tr}\log(P^2) \times \left(\frac{1}{2}\cdot 10 - 1 - \frac{1}{4}\cdot 16\right) = 0 \tag{3.91}$$

[12] $n\cdot P = 0$ ととれる場合には、カイラリティーは関係無くどっちでも同じである。

となり、相互作用は消えてしまう。これは、超弦理論の側で考えているバックグラウンドが BPS 状態で、超対称性を保っているため安定である事と一致している。実際、上の計算ではボゾンによる正のエネルギーをフェルミオンが打ち消していることが分かる。この結果は $f_{\mu\nu} \propto 1$ となる BPS 状態全てに当てはまる。

それでは相互作用のある場合を考えてみよう。そのために超対称性を全て破った D1-$\overline{\text{D1}}$ を持ってくる ($\overline{\text{D1}}$とは D1 と向きが反対のブレーンである)。行列による表現は次のようになる。左上ブロックが D1、右下ブロックが$\overline{\text{D1}}$となるようにした。

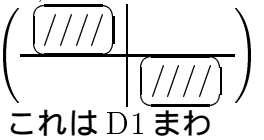
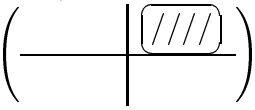
$$
\begin{aligned}
X^0 &= \begin{pmatrix} T\frac{q}{\sqrt{2\pi n}} & 0 \\ 0 & -T\frac{q'}{\sqrt{2\pi n}} \end{pmatrix} = p^0 \\
X^1 &= \begin{pmatrix} L\frac{p}{\sqrt{2\pi n}} & 0 \\ 0 & L\frac{p'}{\sqrt{2\pi n}} \end{pmatrix} = p^1 \\
X^2 &= \begin{pmatrix} \frac{b}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{b}{2} \end{pmatrix} = p^2 \\
X^{\mu=3,\cdots,9} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = p^{\mu=3,\cdots,9}
\end{aligned}
\tag{3.92}
$$

D1-D1 系と違うところは X^0 の右下ブロックの符合が逆になっている点だけである。しかしこれにより交換関係は

$$
f_{01} = -i\,[\,p_0\,,p_1\,] = \begin{pmatrix} \frac{TL}{2\pi n} & \\ & -\frac{TL}{2\pi n} \end{pmatrix} = \frac{TL}{2\pi n}\,1_n \otimes \sigma^3 \tag{3.93}
$$

と変更される。最後の表式は各ブロックが (近似的に)n 次元行列だとして直積で表した。σ^3 はシグマ行列の第三成分である。これにより、ψ の $\delta^{(1)}$ による SUSY 変換は、トレースレス部分 (SU(N) 部分) に入ってしまい、U(1) 部分を動かす $\delta^{(2)}$ では打ち消すことができない。よって SUSY は全て壊れてしまう。そのためこの配位では相互作用があることが期待される。それを計算してみよう。まず、P_0 と P_1 の交換関係は次のようになる。

$$
-i\,[\,P_0\,,P_1\,] = F_{01} = \frac{TL}{2\pi n}\,\Sigma^3 \tag{3.94}
$$

ここで Σ^3 は $1_n \otimes \sigma^3$ に対するアジョイント演算子であり、その固有値は、$0, 0, +2, -2$がそれぞれ n^2 個ずつである。固有値がゼロとなっているのは行列の二つの対角ブロック  に対する空間である。この部分では $F_{\mu\nu} = 0$ なので有効作用には効かない。これは D1 まわり、$\overline{\text{D1}}$まわりでの、それぞれの揺らぎを表す部分だと考えられる。固有値が $+2$ となるのは右上のブロック  である。ここでは、$F_{01} = 2\frac{TL}{2\pi n} \neq 0$ となって、有効作用への寄与がでてくる。有効作用を求めるには、先ほどの交換関係から $-i\,[\,P_0\,,P_1\,] = F_{01} = 2\frac{TL}{2\pi n}$ となるので、適当に規格化することで、$(P_0)^2 + (P_1)^2$ の固有値は調和振動子のものと一致す

ることが分かり、固有値は非負の整数 $k = 0, 1, 2, \cdots$ を使って、

$$P^2 = 4\frac{TL}{2\pi n}\left(k + \frac{1}{2}\right) + b^2 \tag{3.95}$$

とラベルされる。調和振動子なので、各固有値の縮退度は一致しており、後はその縮退度を求めるのが問題となる。そのためには基底状態の数を数えるのが手っ取り早い。始めに “生成、消滅” 演算子を定義する。

$$P^1 \triangleq \frac{L}{\sqrt{2\pi n}}\frac{1}{\sqrt{2}}(A^\dagger + A), \quad P^0 \triangleq \frac{T}{\sqrt{2\pi n}}\frac{1}{\sqrt{2}i}(A^\dagger - A) \tag{3.96}$$

$\{q, p\}, \{q', p'\}$ からもそれぞれ生成、消滅演算子を定義して、それらを $\{a^\dagger, a\}, \{a'^\dagger, a'\}$ と書く。またそれぞれの表現空間を普通の個数基底状態で $|\, n\,\rangle, |\, n'\,\rangle$ と書く。$A^\dagger, A$ を $\{a^\dagger, a\}, \{a'^\dagger, a'\}$ を使って表せば次のようになる。

$$A^\dagger = \begin{pmatrix} a^\dagger & \\ & a' \end{pmatrix} \otimes 1_{2n} - 1_{2n} \otimes \begin{pmatrix} a^\dagger & \\ & a' \end{pmatrix} \tag{3.97}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & \\ & a'^\dagger \end{pmatrix} \otimes 1_{2n} - 1_{2n} \otimes \begin{pmatrix} a & \\ & a'^\dagger \end{pmatrix} \tag{3.98}$$

これから分かるように $A^\dagger, A$ はいつも名前通りに生成、消滅とは限らない。では問題の部分 $|\, \ell\,\rangle\langle\, m'\,|$ を考えよう。まず、この空間の上で $A^\dagger, A$ の交換関係を確かめておくと、

$$A^\dagger |\, \ell\,\rangle\langle\, m'\,| = a^\dagger |\, \ell\,\rangle\langle\, m'\,| - |\, \ell\,\rangle\langle\, m'\,| a' \tag{3.99}$$

などを用いて、

$$\left[\, A, A^\dagger \,\right] |\, \ell\,\rangle\langle\, m'\,| = \left[\, a, a^\dagger \,\right] |\, \ell\,\rangle\langle\, m'\,| + |\, \ell\,\rangle\langle\, m'\,| \left[\, a', a'^\dagger \,\right] \tag{3.100}$$

$$= +1 \cdot |\, \ell\,\rangle\langle\, m'\,| \tag{3.101}$$

となり、その名の通りに生成消滅演算子である ($|\, \ell'\,\rangle\langle\, m\,|$ の上では逆になる)。求めたい基底状態はこの消滅演算子 A で消える状態である。

$$A |\, \ell\,\rangle\langle\, m'\,| = \sqrt{\ell}\,|\, \ell - 1\,\rangle\langle\, m'\,| - \sqrt{m}\,|\, \ell\,\rangle\langle\, (m-1)'\,| \tag{3.102}$$

より、$\ell + m$ が一定の線形結合を考えれば十分である。つまり $N = 0, 1, 2, \ldots$ なる整数を持ってきて、

$$||\, 0_{\ell m'}; N\,\rangle\!\rangle \triangleq \sum_{\ell=0}^{N} t_\ell^N\, |\, \ell\,\rangle\langle\, (N-\ell)'\,| \tag{3.103}$$

としたものが消滅演算子で消えるかどうかを見れば良い。

$$A||\, 0_{\ell m'}; N\,\rangle\!\rangle = \sum_{\ell=1}^{N} t_\ell^N \sqrt{\ell}\,|\, \ell\,\rangle\langle\, (N-\ell)'\,| - \sum_{\ell=0}^{N-1} t_\ell^N \sqrt{N-\ell}\,|\, \ell\,\rangle\langle\, (N-\ell-1)'\,| \tag{3.104}$$

$$= \sum_{\ell=1}^{N} \left(t_\ell^N \sqrt{\ell} - t_{\ell-1}^N \sqrt{N-\ell+1}\right) |\, \ell\,\rangle\langle\, (N-\ell)'\,| \tag{3.105}$$

となるので、係数 t_ℓ^N は次のように決定される。

$$t_\ell^N = \frac{\sqrt{N-\ell+1}}{\sqrt{\ell}}\, t_{\ell-1}^N = \cdots \tag{3.106}$$

$$= \sqrt{\frac{(N-\ell+1)\cdots N}{\ell\cdots 1}}\, t_0^N \tag{3.107}$$

$$= \sqrt{{}_N\mathrm{C}_\ell}\, t_0^N \tag{3.108}$$

つまり考えている空間での真空は整数 $N = 0, 1, \ldots$ でラベルされ、その具体的な形は次のようである。

$$|| \, 0_{\ell m'}; N \, \rangle\!\rangle = \sum_{\ell=0}^{N} \sqrt{\frac{{}_N\mathrm{C}_\ell}{2^N}}\, |\, \ell \,\rangle\langle\, N-\ell \,| \tag{3.109}$$

今は、実際には無限次元の行列 $\{p, q\}$ を大体 $\{|\, \ell \,\rangle \mid \ell = 0, 1, \ldots, (n-1)\}$ で張られるような空間上の n 次元行列として話をしているのでこの真空も $N = 0, 1, \ldots, (n-1)$ を取ってくるべきであろう。よって知りたかった縮退度は各固有状態に付き n であることが分かった。それでは式 (3.90) から有効作用を計算しよう。ゼロでない a_i は $a_1 = 2\frac{TL}{2\pi n}$ だけなので、

$$W = -\frac{n}{2}\mathrm{Tr}\log\frac{\left(1-\dfrac{a_1}{P^2}\right)^4\left(1+\dfrac{a_1}{P^2}\right)^4}{\left(1-\dfrac{2a_1}{P^2}\right)\left(1+\dfrac{2a_1}{P^2}\right)} \tag{3.110}$$

$$= -n\log\prod_{k=0}^{\infty}\frac{\left(1-\dfrac{1}{2k+1+2b'^2}\right)^4\left(1+\dfrac{1}{2k+1+2b'^2}\right)^4}{\left(1-\dfrac{2}{2k+1+2b'^2}\right)\left(1+\dfrac{2}{2k+1+2b'^2}\right)} \tag{3.111}$$

という形になる。ここで $b'^2 \triangleq b^2/(2a_1)$ とした。一行目の式であたまに付いている n が今求めた縮退度である。二行目に行くときには左下のブロックからも右上ブロックと同じ寄与が出ることから 2 倍になっている。遠距離でのポテンシャルが知りたいので扱いやすくするためにガンマ関数を使って書き直す。そのためにガンマ関数の無限積表示

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z}\prod_{k=1}^{\infty}(1-\frac{z}{k})^{-1}e^{\frac{z}{k}} \tag{3.112}$$

から出てくる次の式 ($z = b'^2 + \frac{1}{2}$ とおく)

$$\prod_{k=0}^{\infty}\left(1+\frac{2c}{2k+1+2b'^2}\right)\left(1-\frac{2c}{2k+1+2b'^2}\right) \tag{3.113}$$

$$= \frac{(z+c)(z-c)}{z^2}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{z+c}{k}\right)\left(1+\frac{z-c}{k}\right)\left(1-\frac{z}{k}\right)^{-2} \tag{3.114}$$

$$= \frac{\Gamma(z)^2}{\Gamma(z+c)\Gamma(z-c)} \tag{3.115}$$

を使って有効作用を変形していくと、次の形に行き着く。

$$W = -n\log\left[\frac{\Gamma(z+1)^6\Gamma(z+2)\Gamma(z)}{\Gamma(z+\frac{1}{2})^4\Gamma(z-\frac{1}{2})^4}\right] \tag{3.116}$$

$$= -n\log\left[\frac{z/(z-1)}{z^4}\left(\frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z-\frac{1}{2})}\right)^8\right] \tag{3.117}$$

後は、z が大きいときの $\Gamma(z)$ の評価式

$$\Gamma(z) = \sqrt{2\pi}z^{z-\frac{1}{2}}e^{-z}e^{J(z)} \tag{3.118}$$

$$J(z) = \frac{1}{12}\,\frac{1}{z} - \frac{1}{360}\,\frac{1}{z^3} + O\left(\frac{1}{z^5}\right) \tag{3.119}$$

で展開すると距離 b だけ離れた D1-$\overline{\text{D1}}$間のポテンシャルが求まる。

$$W = -n\frac{1}{8z^3} = -8n\left(\frac{TL}{2\pi n}\right)^3\,\frac{1}{b^6} \tag{3.120}$$

これは D1-ブレーンに垂直な方向の 8 次元分の時空中を伝わる質量ゼロの場が作る引力ポテンシャルである。これと $\mathcal{N}=2$ という極大の SUSY を考えると、弦理論の時と同じく重力場と反対称テンソル場によるポテンシャルと考えられる。つまり、作用 (3.38) は重力を含んだ理論になっているのである。

このように行列正則化された理論は、その中に BPS 状態やそれらの多体系を含んでいて、さらにその間の相互作用も (第一近似で) 正しく超弦理論の結果 [11] を再現している。特に、BPS 状態を表すのも相互作用を表すのも一つの行列であることは驚くべきことであろう。

3.3 the action of IIB matrix model

これまでで、IIB 型超弦理論の行列正則化と、それが持つ幾つかの重要な性質を見た。それをふまえて IIB MM の作用は次のように定義される。

$$S_{\text{IIBMM}} = \frac{1}{g^2}\text{Tr}\left(-\frac{1}{4}\left[\,A_\mu\,,A_\nu\,\right]^2 + \frac{1}{2}\overline{\psi}\Gamma^\mu\left[\,A_\mu\,,\psi\,\right]\right) \tag{3.121}$$

ここで、A_μ は $\mathrm{SO}(10)$ のベクトルとして変換する N 次元エルミート行列、ψ はスピナーとして変換する N 次元エルミート行列である。一見、単に行列正則化版作用 (3.38) の β 比例項を落としただけのようにも思えるが、これはとても重要な意味を持つ。その前に行列正則化版と同じ長所を挙げておこう。

- 明白な $\mathrm{SO}(10)$ 不変性と、次の $\mathcal{N}=2$ SUSY を持っている。

$$(1)\begin{cases}\delta^{(1)}\psi = \frac{i}{2}[\,A_\mu, A_\nu\,]\Gamma_{\mu\nu}\epsilon \\ \delta^{(1)}A_\mu = i\bar{\epsilon}\Gamma_\mu\psi\end{cases} \tag{3.122}$$

$$(2)\begin{cases}\delta^{(2)}\psi = \xi \\ \delta^{(2)}A_\mu = 0\end{cases} \tag{3.123}$$

- ブロック対角の形を考えることにより多体系の相互作用も含まれている。これは上の作用が第一量子化の理論ではなく、第二量子化された理論の作用であることを示している。

- A_μ の固有値は時空を表していて、時空は上の作用からいろいろな相互作用を経て生成される力学自由度になっている。

さらに上の作用が持つ新たな長所は、フリーパラメーターを一つも持たないという点である。実際パラメーターとしては長さ次元 4 を持った量 g^2 しか入っておらず、これは次の場のスケールにより 1 にできる。

$$A_\mu \longrightarrow g^{1/2}A_\mu \tag{3.124}$$

$$\psi \longrightarrow g^{3/4}\psi \tag{3.125}$$

この性質は、最終理論が当然持つべき性質である。つまり、もし IIB MM が完全に解けたとすると、この世の中の全ての無次元量は作用式 (3.121) を第一原理として全て計算できるのである。

それはさておき、行列正則化版の理論はどう出てくるかというと、次のような $n\times n$ ブロック行列 X_μ, ψ、

$$A_\mu = \begin{pmatrix} \boxed{X_\mu} & ///// \\ ////////// \\ ////////// \end{pmatrix}, \quad \psi = \begin{pmatrix} \boxed{\psi} & ///// \\ ////////// \\ ////////// \end{pmatrix}, \tag{3.126}$$

の有効作用を IIB MM で計算したものである。つまり //// 部分を積分してしまった後に tr1 比例項が出てくるわけである [2]。このプロセスがきちんと実行できたとすると、以前のパラメーター α, β は g, N を使って書かれることになる。

4 lightcone string field theory from IIB matrix model

この節では IIB MM の作用からライトコーン弦の場の理論 (light-cone string field theory、以下では LCSFT と略す) が導かれる [4] ことを説明する。IIB 型超弦理論の LCSFT は Green,Schwarz,Brink[12] によって作られたもので、そのハミルトニアンは弦一体の伝搬を表す部分と、3 弦相互作用を表す部分からできている。そして、相互作用を摂動展開することにより、弦理論で vertex operator を使って行う摂動展開を再現する。そのため、LCSFT のハミルトニアンを導くことができれば、IIB MM は (少なくとも) 摂動的弦理論を含んだ理論と言うことができる。

では、IIB MM の中にある "弦" とはなんだろうか。これはヤン-ミルズ理論との関係から始めるのが良い。例えば格子 QCD での強結合展開を見ると、ウィルソンループを端点とする開弦が振動している描像が自然に出てくる。格子上のウィルソンループの連続理論での対応物は次の演算子である。

$$\mathrm{Tr}\left[P\exp\left(-i\oint d\sigma\frac{\partial x^\mu}{\partial\sigma}A_\mu(x)\right)\right] \tag{4.1}$$

ここで P は経路順序積を表し、この演算子をゲージ不変にする役割を持つ。そこでこれを元に IIB MM での弦の候補を考えよう。まず 0 次元に落とすことにより、$A(x)=A$ となる。$\frac{\partial x^\mu}{\partial\sigma}$ については、これを積分したものが、時空が非常に小さい T^{10} にコンパクト化されていると思って、巻き付き数を与えるので、それ自身は巻き数密度とでも言うべきものである。今は無限に広がった時空を飛ぶ弦を考えたいので、全ての方向について T-dual を取ることにしよう。すると巻き付き数は運動量に変わるので、$\frac{\partial x^\mu}{\partial\sigma}$ は "運動量密度" $k(\sigma)$ に変えればうまく行きそうである。そのため次の

$$\mathrm{Tr}\left[P\exp\left(-i\oint d\sigma k^\mu(\sigma)A_\mu\right)\right] \tag{4.2}$$

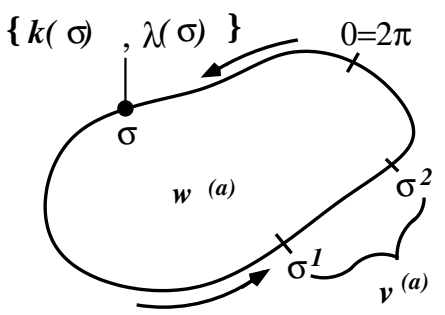
を弦の候補として考えることにする。

まずいくつか記法を決めておく。

$$v^{(a)}_{\sigma_1,\sigma_2} \equiv\!\!= P\exp\left[-i\int_{\sigma_1}^{\sigma_2}d\sigma(k^{(a)\mu}(\sigma)A_\mu+\overline{\lambda}^{(a)}(\sigma)\psi)\right] \tag{4.3}$$

$$w^{(a)} = \mathrm{Tr}\left(v^{(a)}_{0,2\pi}\right) \tag{4.4}$$

つまり今の場合、ウィルソンループ w は $k(\sigma),\overline{\lambda}(\sigma)$ に依っている。添字 (a) はウィルソンループのラベルである。この節の流れをまとめておこう。



1. ウィルソンループに対する Schwinger-Dyson 方程式 (以下では SDE と書く) を書き下し、それを変数 $k,\overline{\lambda}$ についての微分方程式にもっていく。
2. SDE をライトコーン型に分解して、ウィルソンループの時間発展を支配するライトコーンハミルトニアンと、ループに対する拘束条件を求める。

3. $\mathcal{N}=2$ SUSY の対称性からハミルトニアンの形を制限、決定して、LCSFT を再現することを確かめる。
4. これからの問題点。

4.1 Schwinger-Dyson equations

SDE とは、量子力学を演算子形式で表したときの運動方程式の、経路積分形式での対応物である。それは次の形で表される。

$$0 = \int dA\, d\psi\, \frac{\partial}{\partial A^B_\mu} \left[\mathrm{Tr}(T^B v^{(1)}_{0,2\pi}) w^{(2)} \cdots w^{(\ell)} \right] \tag{4.5}$$

$$0 = \int dA\, d\psi\, \frac{\partial}{\partial \psi^B} \left[\mathrm{Tr}(T^B v^{(1)}_{0,2\pi}) w^{(2)} \cdots w^{(\ell)} \right] \tag{4.6}$$

$T^B, B = 0, 1, \ldots, (N^2-1)$ は $\mathrm{U}(N)$ の生成子である。ぱっと見た感じではトリビアルっぽい式であるが、これが非常に含蓄のある式であり、通常の場の理論は、作用 $S[\phi]$ にソース項 $J\cdot\phi$ を付けて上のような式を書き、ϕ をソース J による微分で置き換えて相関関数の微分方程式に変えたものが SDE であった。今の場合はゲージ不変性を尊重するようにソース $k^{(a)}$ を加えたようなものであるが、場 A と自由度はあっていない。しかしソースに対する微分方程式に書き換える手順はほとんど同じである。以下ではその変形をやる。その前に一番簡単な SDE を見ておくと、一般に場 $\phi(x)$ について、

$$0 = \int \mathcal{D}\phi \frac{\delta}{\delta\phi(x)} e^{-S[\phi]} \propto \left\langle \frac{\delta S[\phi]}{\delta\phi(x)} \right\rangle \tag{4.7}$$

なる式である。これを見ると運動方程式という意味がすぐに分かるし、また上の式の含蓄の深さもうかがえる。

SDE の他に、ループがパラメーターに依らないことを表す次の関係式もつかう。

$$\left[k^\mu(\sigma) \left(\frac{\delta}{\delta k^\mu(\sigma)} \right)' + \overline{\lambda}(\sigma) \left(\frac{\delta}{\delta_L \overline{\lambda}(\sigma)} \right)' \right] w^{(a)} = 0 \tag{4.8}$$

ここで、$(\frac{\delta}{\delta k^\mu(\sigma)})'$ は、まず $k(\sigma)$ で汎関数微分をした後に σ で微分するという意味である。また $\overline{\lambda}$ 微分は左微分とした。計算になれるためにこの式の証明と、なぜパラメーターへの非依存性を表すのかを見てみよう。本質的に変わらないのでボゾニックにして計算することにする。$v^{(a)}_{\sigma_1,\sigma_2}$ に入っている経路順序積は具体的には次のように書ける。

$$v^{(a)}_{\sigma_1,\sigma_2} = \sum_{M=0}^{\infty} \int_{0\le\sigma_1\le\cdots\le\sigma_M\le 2\pi} d\sigma^1 \cdots d\sigma^M \left(-ik^{(a)}(\sigma_1)\cdot A\right) \cdots \left(-ik^{(a)}(\sigma_M)\cdot A\right) \tag{4.9}$$

これを $k(\sigma)$ で微分すると、$\left(-ik^{(a)}(\sigma_i)\cdot A\right) = (-ikA)_i$ と書いて、

$$\frac{\delta}{\delta k(\sigma)} v^{(a)}_{0,2\pi} = \sum_{M=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{M}\int_{0\le\sigma_1\le\cdots\le\sigma_M\le 2\pi} d\sigma^1\cdots d\sigma^M (-ikA)_1\cdots(-ikA)_{i-1} \tag{4.10}$$

$$\times\left(-iA_\mu\delta(\sigma-\sigma^i)\right)(-ikA)_{i+1}\cdots(-ikA)_M \tag{4.11}$$

$$= \sum_{M,i}\int_{0\le\sigma_1\le\cdots\le\sigma_{i-1}\le\sigma} d\sigma^1\cdots d\sigma^{i-1}(-ika)_1\cdots(-ika)_{i-1} \tag{4.12}$$

$$\times(-iA_\mu)\int_{\sigma\le\sigma_{i+1}\le\cdots\le\sigma_M\le 2\pi} d\sigma^{i+1}\cdots d\sigma^M (-ika)_{i+1}\cdots(-ika)_M \tag{4.13}$$

$$= v^{(a)}_{0,\sigma}\ (-iA_\mu)\ v^{(a)}_{\sigma,2\pi} \tag{4.14}$$

となる。つまり $k^\mu(\sigma)$ 微分は、v の上では微分の場所に $(-iA_\mu)$ を挟み込む働きをする。さらに σ 微分をしてみよう。そのままでも計算できるが、次のように $\epsilon = +0$ を導入して、

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}\frac{\delta}{\delta k(\sigma)} v^{(a)}_{0,2\pi} = \frac{1}{\epsilon}\left(\frac{\delta}{\delta k^\mu(\sigma+\frac{\epsilon}{2})} - \frac{\delta}{\delta k^\mu(\sigma-\frac{\epsilon}{2})}\right) v^{(a)}_{0,2\pi} \tag{4.15}$$

$$= \frac{1}{\epsilon}\left(v^{(a)}_{0,\sigma+\frac{\epsilon}{2}}\ (-iA_\mu)\ v^{(a)}_{\sigma+\frac{\epsilon}{2},2\pi} - v^{(a)}_{0,\sigma-\frac{\epsilon}{2}}\ (-iA_\mu)\ v^{(a)}_{\sigma-\frac{\epsilon}{2},2\pi}\right) \tag{4.16}$$

$$= \frac{1}{\epsilon}\left(v^{(a)}_{0,\sigma}\ v^{(a)}_{\sigma,\sigma+\frac{\epsilon}{2}}\ (-iA_\mu)\ (v^{(a)}_{\sigma,\sigma+\frac{\epsilon}{2}})^{-1}\ v^{(a)}_{\sigma,2\pi} - (\epsilon\to-\epsilon)\right) + O(\epsilon) \tag{4.17}$$

$$= v^{(a)}_{0,\sigma}\ \left[\left(-ik^{(a)}(\sigma)\cdot A\right), -iA_\mu\right]\ v^{(a)}_{\sigma,2\pi} + O(\epsilon) \tag{4.18}$$

ともできる。以下では (ナイーブな)ϵ の高次項は無視してしまう。ここで、最後に出てきた $(-ikA)$ は指数関数の肩から落ちてきたものなので、フェルミオンを入れたときには $(-ikA - i\overline{\lambda}\psi)$ に変わる。よって次のような式が証明された。

$$\frac{\delta}{\delta k^\mu(\sigma)} v^{(a)}_{0,2\pi} = v^{(a)}_{0,\sigma}\ (-iA_\mu)\ v^{(a)}_{\sigma,2\pi} \tag{4.19}$$

$$\frac{\delta}{\delta_L\overline{\lambda}(\sigma)} v^{(a)}_{0,2\pi} = v^{(a)}_{0,\sigma}\ (-i\psi)\ v^{(a)}_{\sigma,2\pi} \tag{4.20}$$

$$\left(\frac{\delta}{\delta k^\mu(\sigma)}\right)' v^{(a)}_{0,2\pi} = v^{(a)}_{0,\sigma}\ \left[\left(-ik^{(a)}(\sigma)\cdot A - i\overline{\lambda}^{(a)}(\sigma)\ \psi\right), -iA_\mu\right]\ v^{(a)}_{\sigma,2\pi} \tag{4.21}$$

$$\left(\frac{\delta}{\delta_L\overline{\lambda}(\sigma)}\right)' v^{(a)}_{0,2\pi} = v^{(a)}_{0,\sigma}\ \left[\left(-ik^{(a)}(\sigma)\cdot A - i\overline{\lambda}^{(a)}(\sigma)\ \psi\right), -i\psi\right]\ v^{(a)}_{\sigma,2\pi} \tag{4.22}$$

この式を使えば、

$$\left[k^\mu(\sigma)\left(\frac{\delta}{\delta k^\mu(\sigma)}\right)' + \overline{\lambda}(\sigma)\left(\frac{\delta}{\delta_L\overline{\lambda}(\sigma)}\right)'\right] w^{(a)}$$
$$= v^{(a)}_{0,\sigma}\ \left[\left(-ik^{(a)}(\sigma)\cdot A - i\overline{\lambda}^{(a)}(\sigma)\ \psi\right), \left(-ik^{(a)}(\sigma)\cdot A - i\overline{\lambda}^{(a)}(\sigma)\ \psi\right)\right]\ v^{(a)}_{\sigma,2\pi} = 0 \tag{4.23}$$

となって、式 (4.8) が満たされることが分かった。では、式 (4.8) がパラメーター非依存性を表していることを見てみよう。そのために $\sigma' = \sigma - \epsilon(\sigma)$ なる変数変換を考える。但し、経路順序積に反しないため、常に $\frac{\partial \sigma'}{\partial \sigma} > 0$ とする。この時には、$k(\sigma)$ がスカラー密度として変換すると、つまり $\delta k = \partial_\sigma(\epsilon\ k)$ ならば、

$$\delta v^{(a)}_{0,2\pi} = \int d\sigma v^{(a)}_{0,\sigma} \partial_\sigma (\epsilon k^\mu A_\mu) v^{(a)}_{\sigma,2\pi} \tag{4.24}$$

$$= -\int d\sigma \epsilon(\sigma) k^\mu \left(\frac{\delta}{\delta k^\mu(\sigma)} \right)' v^{(a)}_{0,2\pi} \tag{4.25}$$

となり (ボゾニックの場合)、式 (4.8) が満たされるときゼロになることが分かる。

それでは、本題の SDE に移ろう。こちらも始めはフェルミオンを落として計算する。式 (4.5) からは、微分を掛ける場所によって 3 種類の項が出てくる。

$$0 = \int dA\ \frac{\partial}{\partial A^B_\mu} \left[\mathrm{Tr} \left(T^B v^{(1)}_{0,2\pi} \right) w^{(2)} \cdots w^{(\ell)}\ e^{-S} \right] \tag{4.26}$$

$$= \int dA\ \mathrm{Tr} \left(T^B v^{(1)}_{0,2\pi} \right) w^{(2)} \cdots w^{(\ell)} \frac{\partial(-S)}{\partial A^B_\mu}\ e^{-S} \tag{4.27}$$

$$+ \int dA\ \mathrm{Tr} \left(T^B \frac{\partial}{\partial A^B_\mu} v^{(1)}_{0,2\pi} \right) w^{(2)} \cdots w^{(\ell)}\ e^{-S} \tag{4.28}$$

$$+ \sum_{b=2}^{l} \int dA\ \mathrm{Tr} \left(T^B v^{(1)}_{0,2\pi} \right) w^{(2)} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial A^B_\mu} w^{(b)} \right) \cdots w^{(\ell)}\ e^{-S} \tag{4.29}$$

これらを順々に $k(\sigma)$ や $\frac{\delta}{\delta k(\sigma)}$ がウィルソンループの期待値にかかった形に直していく。一行目 (4.27) は、$S = -\frac{1}{4g^2} [\, A_\mu, A_\nu \,]^2$ より、

$$\int dA\ \mathrm{Tr} \left(T^B v^{(1)}_{0,2\pi} \right) w^{(2)} \cdots w^{(\ell)} \left[-\frac{1}{g^2} \mathrm{Tr} \left(T^B \left[\left[A^\mu, A^\nu \right], A_\nu \right] \right) \right]\ e^{-S} \tag{4.30}$$

$$= \int dA\ \mathrm{Tr} \left(-\frac{1}{g^2} \left[\left[A^\mu, A^\nu \right], A_\nu \right] v^{(1)}_{0,2\pi} \right) w^{(2)} \cdots w^{(\ell)}\ e^{-S} \tag{4.31}$$

である。ここで、$\mathrm{U}(N)$ の $\underline{N}$ 表現で、次の式が成り立つことを使った。

$$\sum_{B=0}^{N^2-1} (T^B)^i{}_j (T^B)^k{}_\ell = \delta^i{}_\ell\ \delta^k{}_j \tag{4.32}$$

$$\mathrm{Tr} \left(T^B M_1 \right) \mathrm{Tr} \left(T^B M_2 \right) = \mathrm{Tr} \left(M_1 M_2 \right) \tag{4.33}$$

$$\mathrm{Tr} \left(T^B M_1 T^B M_2 \right) = \mathrm{Tr} M_1\ \mathrm{Tr} M_2 \tag{4.34}$$

但し、生成子の規格化は $\mathrm{Tr} \left(T^A T^B \right) = \delta^{AB}$ としている。次の問題は上の式の交換子の部分を微分演算子によって表すことである。既に式 (4.18) で $[\, -ikA, -iA \,]$ を得ているのでこれ

を利用して、

$$\frac{1}{\epsilon}\left(\frac{\delta}{\delta k^\nu(\sigma+\frac{\epsilon}{2})}-\frac{\delta}{\delta k^\nu(\sigma-\frac{\epsilon}{2})}\right)\left(\frac{\delta}{\delta k_\nu(\sigma)}\right)' v^{(a)}_{0,2\pi} \tag{4.35}$$

$$=\frac{1}{\epsilon}\left(\frac{\delta}{\delta k^\nu(\sigma+\frac{\epsilon}{2})}-\frac{\delta}{\delta k^\nu(\sigma-\frac{\epsilon}{2})}\right) v^{(a)}_{0,\sigma}\ \left[\ \left(-ik^{(a)}(\sigma)\cdot A\right),-iA^\nu\ \right]\ v^{(a)}_{\sigma,2\pi} \tag{4.36}$$

$$=\frac{1}{\epsilon}v^{(a)}_{0,\sigma}\ \left[\ \left[\ \left(-ik^{(a)}(\sigma)\cdot A\right),-iA^\nu\ \right],-iA_\nu\ \right]\ v^{(a)}_{\sigma,2\pi} \tag{4.37}$$

を得る。しかし今回は ϵ があらわに残る形になった。ϵ は弦のパラメーター σ を分割しているので world sheet のカットオフ (最小の長さ) と考えられる。それがあらわに出てきたということは、$\epsilon\to 0$ の極限は簡単にとってはいけないことを示している。そのため正しくは、今までの計算の過程でも ϵ の高次項も保っておかなければならないのである。が、おおまかな振る舞いをみたいので最低次だけで考えている。このカットオフの出どころは、行列 A が固有値を N 個しか持たないので、時空はポツポツと存在していて、「弦が細かく曲がりくねっている」というのは表し得ないからである。つまりカットオフ ϵ は N に依っていて N が無限大の極限でゼロになると期待される。上の式を使って、式 (4.27) に $ik^{(1)}_\mu(0)$ を掛けたものは、

$$ik^{(1)}_\mu(0)\times(4.27)=\int dA\ \mathrm{Tr}\left[-\frac{\epsilon}{g^2}\left(\frac{\delta}{\delta k^{(1)\mu}(0)}\right)'\left(\frac{\delta}{\delta k^{(1)}_\mu(0)}\right)' v^{(1)}_{0,2\pi}\right] w^{(2)}\cdots w^{(\ell)}\ e^{-S} \tag{4.38}$$

$$=-\frac{\epsilon}{g^2}\left(\frac{\delta}{\delta k^{(1)\mu}(0)}\right)'\left(\frac{\delta}{\delta k^{(1)}_\mu(0)}\right)'\left\langle\ w^{(1)}\cdots w^{(\ell)}\ \right\rangle \tag{4.39}$$

と、望みのウィルソンループの期待値に微分演算子がかかっているように変形できた。またこの式は両辺とも ℓ 個のウィルソンループの期待値しか含んでおらず、その意味で閉じた式である。続いて式 (4.28) も同じように変形しよう。今度は、

$$\frac{\partial}{\partial A^B_\mu}v^{(a)}_{0,2\pi}=\int_0^{2\pi}d\sigma\ v^{(a)}_{0,\sigma}\left(-ik^\mu(\sigma)T^B\right)v^{(a)}_{\sigma,2\pi} \tag{4.40}$$

を使うと簡単で、

$$ik^{(1)}_\mu(0)\times(4.28)=ik^{(1)}_\mu(0)\int_0^{2\pi}d\sigma\ \mathrm{Tr}\left(T^B v^{(1)}_{0,\sigma}\left(-ik^{(1)\mu}(\sigma)T^B\right)v^{(1)}_{\sigma,2\pi}\right)w^{(2)}\cdots w^{(\ell)}\ e^{-S} \tag{4.41}$$

$$=\int_0^{2\pi}d\sigma\ k^{(1)}_\mu(0)k^{(1)\mu}(\sigma)\left\langle\ \mathrm{Tr}\left(v^{(1)}_{0,\sigma}\right)\mathrm{Tr}\left(v^{(1)}_{\sigma,2\pi}\right)w^{(2)}\cdots w^{(\ell)}\ \right\rangle \tag{4.42}$$

とできる。この式の右辺には一つウィルソンループが増えた項が表われた。式 (4.28) は今とほとんど同じなので、全部をまとめると、

$$0\ =\frac{\epsilon}{g^2}\left(x(0)'\right)^2\left\langle\ w^{(1)}\cdots w^{(\ell)}\ \right\rangle \tag{4.43-a}$$

$$+\int_0^{2\pi}d\sigma\ k^{(1)}_\mu(0)k^{(1)\mu}(\sigma)\left\langle\ \mathrm{Tr}\left(v^{(1)}_{0,\sigma}\right)\mathrm{Tr}\left(v^{(1)}_{\sigma,2\pi}\right)w^{(2)}\cdots w^{(\ell)}\ \right\rangle \tag{4.43-b}$$

$$+\sum_{b=2}^{\ell}\int_0^{2\pi}d\sigma\ k^{(1)}_\mu(0)k^{(b)\mu}(\sigma)\left\langle\ \mathrm{Tr}\left(v^{(2)}_{0,\sigma}\ v^{(1)}_{0,2\pi}\ v^{(2)}_{\sigma,2\pi}\right)w^{(2)}\cdots\check{w}^{(b)}\cdots w^{(\ell)}\ \right\rangle \tag{4.43-c}$$

と、ウィルソンループ期待値の微分方程式となった。これがウィルソンループに対する SDE である。$\check{w}^{(b)}$ は $w^{(b)}$ が除かれていることを示す。さて式変形が長々と続いたのでここら辺で大まかな結果を見てみよう。一番おおざっぱな結果を見るために上の式 (4.43) から “自由伝搬部分” を抜き出してみよう。ここで自由伝搬部分とはウィルソンループの個数が ℓ 個のまま変わらない部分という意味である。ナイーブには ϵ, g^2N を有限に保ったままで N を無限大に飛ばせば良い (但しおおざっぱな議論なので ϵ の高次項は全て無視)。まず式 (4.43-a) は $O(N)$ であり残ってくる。式 (4.43-b) は一見 $O(N^0)$ で消えてしまうように見えるが、σ が 0 に近いところでは、

$$\mathrm{Tr}\left(v^{(1)}_{0,\sigma}\ v^{(1)}_{\sigma,2\pi}\right) \sim N w^{(1)} \tag{4.44}$$

となるので、これも自由部分に含めるべきである。このような近似が成り立つ範囲は大体 ϵ 程度であるはずで、自由伝搬部分だけを抜き出すと次のようになる。

$$0 = \left[\frac{\epsilon}{g^2}\left(x(0)'\right)^2 + \epsilon N k^{(1)}_\mu(0)k^{(1)\mu}(0)\right]\left\langle\, w^{(1)}\cdots w^{(\ell)}\,\right\rangle \tag{4.45}$$

$$= \epsilon N\left[\left(k^{(1)}(0)\right)^2 + \frac{1}{g^2N}\left(x(0)'\right)^2\right]\left\langle\, w^{(1)}\cdots w^{(\ell)}\,\right\rangle \tag{4.46}$$

この式の中で場 $k(\sigma), x(\sigma)$ の引数が $\sigma = 0$ になっているのは始めの式 (4.5) の中で $\sigma = 0$ をを特別な点にしたからであり、これは任意の σ で成り立つ式である。式 (4.8) からの

$$0 = k^{(1)\mu}(\sigma)x^{(1)}_\mu(\sigma)'\left\langle\, w^{(1)}\cdots w^{(\ell)}\,\right\rangle \tag{4.47}$$

と合わせてみると、まさに弦理論の Virasoro 条件

$$k(\sigma)^2 + T^2\left(x'(\sigma)\right)^2 = 0, \qquad k(\sigma)\cdot x'(\sigma) = 0 \tag{4.48}$$

に他ならない。T は弦のテンションである。この対応から、$T^2 \sim (g^2N)^{-1}$ となっていることが分かる。ここで分かったことは「(ナイーブに) g^2N と ϵ を固定したままで $N\to\infty$ の極限をとると SDE は相互作用のない弦理論を再現する」と言うことである。とりあえず、弦理論と結構近いことが分かったので、以降ではもうちょっときちんとした議論をして、相互作用まで含めた理論を再現することを見る。

ではフェルミオンも含めて SDE を導こう。式 (4.5) で変更を受けるのは作用のフェルミオン項をたたくところのみである。

$$S = \frac{1}{g^2}\mathrm{Tr}\left(-\frac{1}{4}\left[\,A_\mu, A_\nu\,\right]^2 + \frac{1}{2}\overline{\psi}\Gamma^\mu\left[\,A_\mu, \psi\,\right]\right) \tag{4.49}$$

より、変更は、

$$\int dA\ \mathrm{Tr}\left(\frac{1}{2g^2}\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\left[\,\psi^\alpha, \psi^\beta\,\right]v^{(1)}_{0,2\pi}\right)w^{(2)}\cdots w^{(\ell)}\ e^{-S} \tag{4.50}$$

$$= \frac{\epsilon}{2g^2}\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\left(\frac{\delta}{\delta_L\overline{\lambda}_\alpha}\right)'\frac{\delta}{\delta_L\overline{\lambda}_\beta}\left\langle\, w^{(1)}\cdots w^{(\ell)}\,\right\rangle \tag{4.51}$$

である。式 (4.6) もまとめて全体を書くと、

$$
\begin{aligned}
0 = \frac{\epsilon}{g^2}&\left[\left(x^{(1)\prime}(0)\right)^2 + \frac{1}{2}ik_\mu^{(1)}\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\theta^{(1)\prime\alpha}(0)\theta^{(1)\beta}(0)\right]\left\langle\, w^{(1)}\cdots w^{(\ell)}\,\right\rangle \\
&+\int_0^{2\pi} d\sigma\; k_\mu^{(1)}(0)k^{(1)\mu}(\sigma)\left\langle\, \mathrm{Tr}\left(v_{0,\sigma}^{(1)}\right)\mathrm{Tr}\left(v_{\sigma,2\pi}^{(1)}\right) w^{(2)}\cdots w^{(\ell)}\,\right\rangle \\
&+\sum_{b=2}^{\ell}\int_0^{2\pi} d\sigma\; k_\mu^{(1)}(0)k^{(b)\mu}(\sigma)\left\langle\, \mathrm{Tr}\left(v_{0,\sigma}^{(2)}\, v_{0,2\pi}^{(1)}\, v_{\sigma,2\pi}^{(2)}\right) w^{(2)}\cdots \check{w}^{(b)}\cdots w^{(\ell)}\,\right\rangle
\end{aligned}
\tag{4.52}
$$

$$
\begin{aligned}
0 = \frac{\epsilon}{g^2}&\left[x^{(1)\prime}(0)\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\theta^{(1)\beta}(0)\right]\left\langle\, w^{(1)}\cdots w^{(\ell)}\,\right\rangle \\
&+\int_0^{2\pi} d\sigma\; \lambda^{(1)}(\sigma)\left\langle\, \mathrm{Tr}\left(v_{0,\sigma}^{(1)}\right)\mathrm{Tr}\left(v_{\sigma,2\pi}^{(1)}\right) w^{(2)}\cdots w^{(\ell)}\,\right\rangle \\
&+\sum_{b=2}^{\ell}\int_0^{2\pi} d\sigma\; \lambda^{(b)}(\sigma)\left\langle\, \mathrm{Tr}\left(v_{0,\sigma}^{(2)}\, v_{0,2\pi}^{(1)}\, v_{\sigma,2\pi}^{(2)}\right) w^{(2)}\cdots \check{w}^{(b)}\cdots w^{(\ell)}\,\right\rangle
\end{aligned}
\tag{4.53}
$$

ここで、微分演算子を $x = i\frac{\delta}{\delta k}, \theta = \frac{\delta}{\delta\overline{\lambda}}$ と書いた。また $\overline{\lambda}_\alpha = \lambda^\beta C_{\beta\alpha} = -C_{\alpha\beta}\lambda^\beta$ も使った。

ここまでで SDE をソースについての微分方程式に書き直す作業が終わった。次に LCSFT と比較したいのでウィルソンループを LCSFT の string field と同じセッティングに持っていこう。そのためにやることは、

- $k^+(\sigma) = 1$ として $+$ 方向の全運動量がループの長さになるようにする。
- x^+ を時間パラメーターとしたときに、ループが等時間平面に乗っているようにする

である。一つ目はループのパラメーターを取り替えることによって可能である。つまり、パラメーターの取り替え $\sigma \to \sigma'(\sigma)$ で

$$
k'(\sigma') = \frac{\partial\sigma}{\partial\sigma'}k(\sigma) \tag{4.54}
$$

と変換するので、$k^+(\sigma) > 0$ の時には $k^{+\prime}(\sigma') = 1$ と持っていくことができる。この時ループの長さは、

$$
\int d\sigma' = \int d\sigma k^+(\sigma) = p^+ \tag{4.55}
$$

と、全運動量 p^+ になる。逆に $k^+(\sigma) < 0$ の時には $k^{+\prime}(\sigma') = -1$ まで、順序を変えないパラメーター取り替えによって、変換できる。ループを等時間面に乗せるには $k^-(\sigma)$ についてフーリエ変換して、

$$
\tilde{w}^{(a)} \triangleq \int Dk^-\; e^{-i\int_0^{p^+} d\sigma x^+(\sigma)k^-(\sigma)} w^{(a)}\Big|_{x^+(\sigma)=x^+,k(\sigma)=+1}, \qquad \text{if} \quad k^+(\sigma) > 0 \tag{4.56}
$$

$$
\tilde{w}^{(a)}_{\text{initial}} \triangleq \int Dk^-\; e^{-i\int_0^{p^+} d\sigma x^+(\sigma)k^-(\sigma)} w^{(a)}\Big|_{x^+(\sigma)=x^+=-\infty,k(\sigma)=-1}, \qquad \text{if} \quad k^+(\sigma) < 0 \tag{4.57}
$$

となるループだけをとってくれば良い。しかし一般には、ある一部の演算子についてSDEを考えたときにそれが閉じた方程式系になっているかは分からない。例としては、今やっている系で、ℓ個のループを含んだ期待値に関しては閉じたSDEにはならず、ループが増えたり減ったりしたものが必然的に入ってくるのである。ところが、以下見るように、式 (4.56) のセッティングにしたループの期待値のSDEは閉じていて、ここでもLCSFTと対応しているのである。式 (4.57) のウィルソンループは初期状態を表すもので、以下ではあらわには書かないことにする。式 (4.56) が時間発展を求めたいループである。ライトコーン座標でのハミルトニアンは $k^- = i\frac{\partial}{\partial x^+}$ なので、次の目的はウィルソンループの期待値の上で k^- がどう表現されるかを求めることである。おおまかに式 (4.52) がハミルトニアンを他の場によって表す式で、式 (4.53)、式 (4.8) が余分な場に対する拘束条件となる。10次元でのカイラリティーは λ が負、θ が正なので、appendix Aの書き方でスピナーのライトコーン分解は次のようになる。

$$\theta^\alpha = {}^t(\theta^\alpha, \tilde{\theta}^{\dot{\alpha}}, 0, 0) \tag{4.58}$$

$$\overline{\lambda}_\alpha = \lambda^\beta C_{\beta\alpha} = -(\lambda^\alpha, \tilde{\lambda}^{\dot{\alpha}}, 0, 0) \tag{4.59}$$

SO(8)でのカイラリティーの正負は、それぞれ上に付けた波線 $\tilde{}$ の有無で区別する。これを用いて、例えば式 (4.52) の一行目の二項目は

$$k_\mu \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \theta'^\alpha \theta^\beta = k_+(-\sqrt{2})\tilde{\theta}'^{\dot{\alpha}}\tilde{\theta}^{\dot{\alpha}} + k_-(-\sqrt{2})\theta'^\alpha\theta^\alpha + k_i\theta'^\alpha\gamma^i_{\alpha\dot{\beta}}\tilde{\theta}^{\dot{\beta}} + k_i\tilde{\theta}'^{\dot{\alpha}}\tilde{\gamma}^i_{\dot{\alpha}\beta}\theta^\beta \tag{4.60}$$

$$= \sqrt{2}k^-\tilde{\theta}'\tilde{\theta} + \sqrt{2}\theta'\theta + k_i\theta'\gamma^i\tilde{\theta} + k_i\tilde{\theta}'\tilde{\gamma}^i\theta \tag{4.61}$$

のように分解される。この式のように、以下スピナーの足は分かるときには書かないことにする。ハミルトニアンを書き下すときに、自由伝搬部分と相互作用部分を分離しておきたい。式 (4.52) の中の自由伝搬部分を次の式で定義しよう、

$$\begin{aligned}\int_0^{p^{(1)}+} d\sigma\ k^{(1)}_\mu(0)k^{(1)\mu}(\sigma)\Bigg[&\left\langle \tilde{\mathrm{Tr}}\left(v^{(1)}_{0,\sigma}\right)\right\rangle \left\langle \tilde{\mathrm{Tr}}\left(v^{(1)}_{\sigma,p^{(1)}+}\right)\tilde{w}^{(2)}\cdots\tilde{w}^{(\ell)}\right\rangle \\ &+ \left\langle \tilde{\mathrm{Tr}}\left(v^{(1)}_{\sigma,p^{(1)}+}\right)\right\rangle \left\langle \tilde{\mathrm{Tr}}\left(v^{(1)}_{0,\sigma}\right)\tilde{w}^{(2)}\cdots\tilde{w}^{(\ell)}\right\rangle \Bigg]\end{aligned} \tag{4.62}$$

$$= I\ k^{(1)}_\mu(0)k^{(1)\mu}(0)\left\langle \tilde{w}^{(1)}\tilde{w}^{(2)}\cdots\tilde{w}^{(\ell)}\right\rangle \tag{4.63}$$

ここで、

$$I \triangleq \int_0^{p^{(1)}+} d\sigma \left[\left\langle \tilde{\mathrm{Tr}}\left(v^{(1)}_{0,\sigma}\right)\right\rangle + \left\langle \tilde{\mathrm{Tr}}\left(v^{(1)}_{\sigma,p^{(1)}+}\right)\right\rangle\right] \tag{4.64}$$

なる量を定義した。この被積分関数は $\sigma \sim 0$ 付近にサポートを持つ関数で、I 自体は $N \to \infty$ と共に発散する量である。この自由部分を除いた式 (4.52) の二行目を相互作用部分として、

$\langle\cdots\rangle'$ とプライムを付けて表すことにしよう。式 (4.52) をライトコーンで書き下すと、

$$
\begin{aligned}
&k^{(1)-}(0)\left\langle\,\tilde{w}^{(1)}\tilde{w}^{(2)}\cdots\tilde{w}^{(\ell)}\,\right\rangle \\
&\quad=\frac{1}{Z}\left(k^{(1)i}(0)^2+\frac{\epsilon}{g^2I}\left(x'^{(1)i}(0)^2+\frac{i}{\sqrt{2}}\theta'\theta+\frac{i}{2}\theta'\gamma^i\tilde{\theta}+\frac{i}{2}\tilde{\theta}'\tilde{\gamma}^i\theta\right)\right)\left\langle\,\tilde{w}^{(1)}\tilde{w}^{(2)}\cdots\tilde{w}^{(\ell)}\,\right\rangle \\
&\quad+\frac{1}{ZI}\int_0^{p^{(1)+}}d\sigma\;k_\mu^{(1)}(0)k^{(1)\mu}(\sigma)\left\langle\,\tilde{\mathrm{Tr}}\left(v_{0,\sigma}^{(1)}\right)\tilde{\mathrm{Tr}}\left(v_{\sigma,p(1)+}^{(1)}\right)\tilde{w}^{(2)}\cdots\tilde{w}^{(\ell)}\,\right\rangle' \\
&\quad+\frac{1}{ZI}\sum_{b=2}^{\ell}\int_0^{p^{(b)+}}d\sigma\;k_\mu^{(1)}(0)k^{(b)\mu}(\sigma)\left\langle\,\tilde{\mathrm{Tr}}\left(v_{0,\sigma}^{(b)}\;v_{0,2\pi}^{(1)}\;v_{\sigma,p^{(b)+}}^{(b)}\right)\tilde{w}^{(2)}\cdots\check{\tilde{w}}^{(b)}\cdots\tilde{w}^{(\ell)}\,\right\rangle \qquad (4.65)
\end{aligned}
$$

ここで $Z=2-\frac{i}{\sqrt{2}}\frac{\epsilon}{g^2N}\tilde{\theta}'\tilde{\theta}$ とおいた。これが一応ライトコーンハミルトニアン $k^{(1)-}(0)$ を他の場で表した式であるが、右辺には I^{-1} の高次の項として k^- が入ってきている。このハミルトニアンは一番目のループの $\sigma\sim 0$ 近傍を微少時間発展させる演算子で、系全体のハミルトニアンは、全てのループと、それぞれのループ上の全ての点について足しあげたもの、

$$
H=\sum_b\int d\sigma\;k^{(b)-}(\sigma) \qquad (4.66)
$$

である。式 (4.53) からは二種類の拘束がでてくる。

$$
\begin{aligned}
&\tilde{\lambda}^{(1)}(0)\left\langle\,\tilde{w}^{(1)}\tilde{w}^{(2)}\cdots\tilde{w}^{(\ell)}\,\right\rangle \\
&\qquad=-\frac{\epsilon}{g^2I}\left(\sqrt{2}x'^{(1)-}(0)\tilde{\theta}^{(1)}(0)+x'^{(1)i}(0)\tilde{\gamma}^i\theta^{(1)}(0)\right)\left\langle\,\tilde{w}^{(1)}\tilde{w}^{(2)}\cdots\tilde{w}^{(\ell)}\,\right\rangle \\
&\qquad\quad-\frac{1}{I}\int_0^{p^{(1)+}}d\sigma\;\tilde{\lambda}^{(1)}(\sigma)\left\langle\,\tilde{\mathrm{Tr}}\left(v_{0,\sigma}^{(1)}\right)\tilde{\mathrm{Tr}}\left(v_{\sigma,p(1)+}^{(1)}\right)\tilde{w}^{(2)}\cdots\tilde{w}^{(\ell)}\,\right\rangle' \\
&\qquad\quad-\frac{1}{I}\sum_{b=2}^{\ell}\int_0^{p^{(b)+}}d\sigma\;\tilde{\lambda}^{(b)}(\sigma)\left\langle\,\tilde{\mathrm{Tr}}\left(v_{0,\sigma}^{(b)}\;v_{0,2\pi}^{(1)}\;v_{\sigma,p^{(b)+}}^{(b)}\right)\tilde{w}^{(2)}\cdots\check{\tilde{w}}^{(b)}\cdots\tilde{w}^{(\ell)}\,\right\rangle \qquad (4.67)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\tilde{\theta}^{(1)}(0)\left\langle\,\tilde{w}^{(1)}\tilde{w}^{(2)}\cdots\tilde{w}^{(\ell)}\,\right\rangle \\
&\qquad=-\frac{g^2I}{\epsilon}\left(x'^{(1)i}(0)\gamma^i\right)^{-1}\left\{\lambda^{(1)}(0)\left\langle\,\tilde{w}^{(1)}\tilde{w}^{(2)}\cdots\tilde{w}^{(\ell)}\,\right\rangle\right. \\
&\qquad\quad+\frac{1}{I}\int_0^{p^{(1)+}}d\sigma\;\lambda^{(1)}(\sigma)\left\langle\,\tilde{\mathrm{Tr}}\left(v_{0,\sigma}^{(1)}\right)\tilde{\mathrm{Tr}}\left(v_{\sigma,p(1)+}^{(1)}\right)\tilde{w}^{(2)}\cdots\tilde{w}^{(\ell)}\,\right\rangle' \\
&\qquad\quad\left.+\frac{1}{I}\sum_{b=2}^{\ell}\int_0^{p^{(b)+}}d\sigma\;\lambda^{(b)}(\sigma)\left\langle\,\tilde{\mathrm{Tr}}\left(v_{0,\sigma}^{(b)}\;v_{0,2\pi}^{(1)}\;v_{\sigma,p^{(b)+}}^{(b)}\right)\tilde{w}^{(2)}\cdots\check{\tilde{w}}^{(b)}\cdots\tilde{w}^{(\ell)}\,\right\rangle\right\} \qquad (4.68)
\end{aligned}
$$

ここで $(x'^{(1)i}(0)\gamma^i)^{-1}=\frac{1}{x'^2}x'^i\tilde{\gamma}^i$ である。また式 (4.8) からの拘束は、

$$
\begin{aligned}
&x^{(1)-}(0)\left\langle\,\tilde{w}^{(1)}\tilde{w}^{(2)}\cdots\tilde{w}^{(\ell)}\,\right\rangle \\
&\qquad=\left(k^{(1)i}(0)x'^{(1)i}(0)+i\theta'\lambda+i\tilde{\theta}'(0)\tilde{\lambda}(0)\right)\left\langle\,\tilde{w}^{(1)}\tilde{w}^{(2)}\cdots\tilde{w}^{(\ell)}\,\right\rangle \qquad (4.69)
\end{aligned}
$$

である。これで全ての式をライトコーン座標で書き終えた。本当は式 $(4.67)(4.68)(4.69)$ を繰り返し、式 (4.65) に代入してハミルトニアンを $k^i, x^i, \theta, \lambda$ だけで表すことができたら、それが完全なライトコーンハミルトニアンである。しかしそれは現実的に無理なので次副節では $\mathcal{N}=2$ SUSY 等の対称性からハミルトニアンを決める。しかしその前に自由部分について、どの程度 IIB 型弦理論と一致するかを調べよう。式 (4.65) で $\frac{g^2 I}{\epsilon} \sim \alpha'^2$ を固定してナイーブに 3 次以上の項を無視すると、$\lambda'\lambda$ 以外の項は正しい形をしていることが分かる。$\lambda'\lambda$ は要らない場を消去するときに出てくる。これを具体的に見るため、式 (4.68) を代入してみる。相互作用項を無視することで、

$$\tilde{\theta}^{(1)}(\sigma) \left\langle \tilde{w}^{(1)} \tilde{w}^{(2)} \cdots \tilde{w}^{(\ell)} \right\rangle = -\frac{g^2 I}{\epsilon} \frac{x'^{(1)i}(\sigma)\tilde{\gamma}^i}{x'^{(1)}(\sigma)^2} \lambda^{(1)}(\sigma) \left\langle \tilde{w}^{(1)} \cdots \tilde{w}^{(\ell)} \right\rangle \tag{4.70}$$

が $\tilde{\theta}$ を消去するための式になる。今、2 次元の自由場の理論を扱っていると思うことで、2 次元共形場理論の方法を使って、3 次以上の項の影響を評価できる。演算子積展開から、

$$x'^{(1)}(\sigma)^2 = \frac{\alpha}{\epsilon^2} + : x'^{(1)}(\sigma)^2 : \tag{4.71}$$

で、α は α' と数係数が異なるだけの定数である。これを式 (4.70) に代入して

$$\tilde{\theta}^{(1)}(\sigma) \left\langle \tilde{w}^{(1)} \tilde{w}^{(2)} \cdots \tilde{w}^{(\ell)} \right\rangle = -\frac{g^2 I}{\epsilon} \alpha \epsilon^2 x'^{(1)i}(\sigma)\tilde{\gamma}^i \lambda^{(1)}(\sigma) \left\langle \tilde{w}^{(1)} \cdots \tilde{w}^{(\ell)} \right\rangle + \cdots \tag{4.72}$$

を得る。すると、例として式 (4.65) の分母の Z を展開して出てくる $\tilde{\theta}'\tilde{\theta}$ と、k^2 の積から出る次の項

$$\epsilon^4 k^{(1)i}(\sigma)^2 x'^{(1)j}(\sigma)\tilde{\gamma}^j \lambda'^{(1)}(\sigma) x'^{(1)k}(\sigma)\tilde{\gamma}^k \lambda^{(1)}(\sigma) \tag{4.73}$$

を評価してみると、$k^2 (x')^2 \sim \epsilon^{-4}$ よりちょうど $\lambda'\lambda$ となる。次副節で説明する通り、ϵ^{-1} のように発散する項や、kx' のような項は対称性から禁じられて、連続極限では次のような自由ハミルトニアンを得る。

$$H_{\text{free}} = \sum_b \int d\sigma \, \frac{1}{2} \left(c k^{(b)i}(\sigma)^2 + c' \frac{\epsilon}{g^2 I} x'^{(b)i}(\sigma)^2 \right.$$
$$\left. + i c'' \lambda'^{(b)}(\sigma)\lambda^{(b)}(\sigma) + i c''' \frac{\epsilon}{g^2 I} \theta'^{(b)}(\sigma)\theta^{(b)}(\sigma) \right) \tag{4.74}$$

ただし c, c', c'', c''' は決まらない定数である。これはフェルミオンの規格化を除いて、Green-Schwarz 形式のライトコーンハミルトニアンと完全に一致している。

4.2 determination of LC-Hamiltonian

ここでは、IIB MM の対称性と、カットオフ ϵ についての次数勘定 (power counting) だけを使って、相互作用も含めたハミルトニアンを決定する。まずは次数勘定のために全ての場

に world sheet の質量次元を割り当てよう。質量次元の定義は $[\,\epsilon\,]=-1$ とする。またライトコーンでは $k^+=1$ と選ぶことから $[\,k^+\,]=0$ である。残りの場については、ライトコーンに分解した IIB MM の作用

$$S=\frac{1}{g^2}\mathrm{Tr}\left(-\frac{1}{4}\left[\,A_\mu\,,A_\nu\,\right]^2+\frac{1}{2}\overline{\psi}\Gamma^\mu\left[\,A_\mu\,,\psi\,\right]\right) \tag{4.75}$$

$$=\frac{1}{g^2}\mathrm{Tr}\left\{\frac{1}{2}\left[\,A^+,A^-\,\right]^2+\left[\,A^+,A^i\,\right]\left[\,A^-,A^i\,\right]-\frac{1}{4}\left[\,A^i,A^i\,\right]^2\right. \tag{4.76}$$

$$\left.+\frac{1}{\sqrt{2}}\psi\left[\,A^-,\psi\,\right]+\frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{\psi}\left[\,A^+,\tilde{\psi}\,\right]+\frac{1}{2}\psi\gamma^i\left[\,A^i,\tilde{\psi}\,\right]+\frac{1}{2}\tilde{\psi}\tilde{\gamma}^i\left[\,A^i,\psi\,\right]\right\} \tag{4.77}$$

が質量次元を持たないことと、ウィルソンループの肩に乗っている組み合わせ

$$\int d\sigma\ \left(-ik^{(a)}(\sigma)\cdot A-i\overline{\lambda}^{(a)}(\sigma)\,\psi\right) \tag{4.78}$$

も無次元であることから右表のように全ての次元が定まる。例えば x の次元は $[\,x\,,k\,]\,=\,\delta(\sigma)$ から $[\,x\,]=1-[\,k\,]$ と定まる。超対称変換のパラメーターとチャージについては、次の変換[13]

$+2$	$+1$	±0	-1	parity
	A^-	A^i	A^+	$+$
k^-	k^i	k^+		$+$
	x^-	x^i	x^+	$+$
	x'^i			$-$

$+3/2$	$+1/2$	$-1/2$	parity
	ψ	$\tilde{\psi}$	$-i$
$\tilde{\lambda}$	λ		$+i$
	θ	$\tilde{\theta}$	$-i$
	ε	$\tilde{\varepsilon}$	$-i$
	ξ	$\tilde{\xi}$	$+i$
	$\tilde{Q}$	Q	$-i$
	$\tilde{q}$	q	$+i$

$$\begin{cases}\delta^{(1)}\psi=\frac{i}{2}\left[\,A_\mu\,,A_\nu\,\right]\Gamma_{\mu\nu}\varepsilon\\ \delta^{(1)}A_\mu=i\,\overline{\varepsilon}\,\Gamma_\mu\psi\end{cases} \tag{4.79}$$

$$\begin{cases}\delta^{(2)}\psi=\xi\\ \delta^{(2)}A_\mu=0\end{cases} \tag{4.80}$$

の内、$\delta^{(1)}$ を生成する方を $\overline{\varepsilon}Q$、$\delta^{(2)}$ を生成する方を $\overline{\xi}q$、として次元を決めた。次元の割り当てができたので対称性の議論をしよう。IIB MM の作用には次の対称性がある。

$$A^\mu\to A'^\mu={}^tA^\mu,\quad \psi\to\psi'=-i\,{}^t\psi \tag{4.81}$$

これは A の 4 次項についてはすぐに分かり、フェルミオン項は

$${}^t\left(\psi^\alpha A\psi^\beta\right)=-\,{}^t\psi^\beta\,{}^tA\,{}^t\psi^\alpha \tag{4.82}$$

を使えば上の変換の下での不変性が確かめられる。この対称性の意味はウィルソンループの

[13] まぎらわしいがこの副節では SUSY のパラメーターに `varepsilon:` ε、カットオフに `epsilon:` ϵ を使うことにする。しかし前者はほとんど出てこない。

変換を考えると分かりやすい。簡単のためボゾンだけ取り出して書くと、

$$w \to w' = \mathrm{Tr}\left(\sum_{M=0}^{\infty}\int_{0\le\sigma_1\le\cdots\le\sigma_M\le 2\pi} d\sigma^1\cdots d\sigma^M\,(-ik'(\sigma_1)A')\cdots(-ik'(\sigma_M)A')\right) \tag{4.83}$$

$$= \mathrm{Tr}\left(\sum_{M=0}^{\infty}\int_{0\le\sigma_1\le\cdots\le\sigma_M\le 2\pi} d\sigma^1\cdots d\sigma^M\,(-ik'(\sigma_M)A')\cdots(-ik'(\sigma_1)A')\right) \tag{4.84}$$

と転置により順番が入れ替わる。正しく経路順序積にするためには、

$$k(\sigma)\to k'(\sigma)=k(p^+-\sigma),\quad \lambda(\sigma)\to\lambda'(\sigma)=i\lambda(p^+-\sigma), \tag{4.85}$$

とすれば良いことが分かる。つまりこの変換はループのパラメーターを逆向きにする変換になっていて、弦理論での対応物は world sheet のパリティー変換である。よって、この変換のこともパリティー変換と呼ぶことにする。先ほどの表の一番右の列は、このパリティー変換で出てくる符合を書いたものである。当然 σ 微分はパリティー奇である。

超対称代数は

$$\left[\,\delta^{(1)}_{\varepsilon}\,,\delta^{(2)}_{\xi}\,\right]=i\bar{\varepsilon}\Gamma^{\mu}\xi \tag{4.86}$$

から $[\,c^\mu P_\mu, A^\nu\,]=-ic^\nu$ なる並進演算子 P を使って、

$$\left\{\,Q^\alpha,q^\beta\,\right\}=\left(\Gamma^\mu\ {}^tC^{-1}\right)^{\alpha\beta}P_\mu \tag{4.87}$$

と書ける。これもライトコーンに分解しよう。右辺は appendix A の書き方で、

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \sqrt{2}P^- & -\gamma^iP^i & & \\ -\tilde{\gamma}^iP^i & \sqrt{2}P^+ & & \\ \hline & & \sqrt{2}P^+ & \gamma^iP^i \\ & & \tilde{\gamma}^iP^i & \sqrt{2}P^+ \end{array}\right) \tag{4.88}$$

となる。チャージ Q,q は 10 次元の意味ではカイラリティー負で下 16 成分のスピナーであり、ライトコーン $\mathrm{SO}(8)$ では $Q=\ {}^t(0,0,Q,\tilde{Q})$ 等と分解されるので、

$$\left\{\,Q^\alpha,q^\beta\,\right\}=\sqrt{2}P^+\delta^{\alpha\beta},\quad \left\{\,Q^\alpha,\tilde{q}^{\dot\beta}\,\right\}=\gamma^{\alpha\dot\beta}P^i \tag{4.89}$$

$$\left\{\,\tilde{Q}^{\dot\alpha},\tilde{q}^{\dot\beta}\,\right\}=\sqrt{2}P^-\delta^{\dot\alpha\dot\beta},\quad \left\{\,\tilde{Q}^{\dot\alpha},q^{\beta}\,\right\}=\tilde{\gamma}^{\dot\alpha\beta}P^i \tag{4.90}$$

がライトコーン分解された超対称代数である。これから、ハミルトニアン $H=P^-$ はそれ自身を求めなくても、超対称チャージが分かれば代数の結果として分かってしまう。そのため以下では Q,q の方に注目する。

それでは、これらのチャージもループ期待値上の微分演算子として表現しよう。直接的には、あるチャージ Q は、対応する A^μ,ψ 上の変換 δ を用いて

$$Q\left\langle\,w^{(1)}\cdots w^{(\ell)}\,\right\rangle\sim\int dA\;d\psi\;\delta\left(w^{(1)}\cdots w^{(\ell)}\right)e^{-S} \tag{4.91}$$

のように定義して、式 (4.67)、式 (4.68)、式 (4.69) を用いて $k^i, x^i, \lambda, \theta$ だけで書き表せば良い。定義からこれらのチャージは δ と同じ代数を満たし、その保存則は WT 恒等式から得られる。これを具体的に実行するのは簡単な変換に関しては可能で、例えば $\delta^{(2)}$ についてやってみると、

$$\delta^{(2)} v_{0,p^+} = \int_0^{p^+} d\sigma \; v_{0,\sigma} \delta^{(2)} \left(-ik^{(a)}(\sigma)\cdot A - i\overline{\lambda}^{(a)}(\sigma)\, \psi \right) v_{\sigma,p+} \tag{4.92}$$

$$= \int_0^{p^+} d\sigma \; \left(-i\,\overline{\lambda}(\sigma)\,\xi \,\right) v_{0,p^+} \tag{4.93}$$

より、16 個の q の内、半分の q^α については[14]、$q \sim \int d\sigma \; \lambda(\sigma)$ ときちんと求まる。しかし $\tilde{q}$ の方は、$\tilde{\lambda}$ になっていて、大変である。蛇足ながら $\delta^{(1)}$ も書いてみると、

$$\delta^{(1)} v_{0,p^+} = \int_0^{p^+} d\sigma \; \left(-i\bar{\varepsilon}\, k^\mu(\sigma)\Gamma_\mu\theta - \frac{\epsilon}{2}\overline{\lambda}\Gamma^{\mu\nu}\varepsilon x'^\mu(\sigma)x^\nu(\sigma) \right) v_{0,p^+} \tag{4.94}$$

例えば、第一項目の $\mu = +$ からは $\int d\sigma\; \theta(\sigma)$ なる項が出てくる。これでは全く埒が明かないのだが、以下のように対称性を使うとすっきりと求まる。第一ステップとして自由部分 (ここでは場について二次以下の部分) を考える。自由部分を考える意味は二次以下のものは交換関係をとっても二次以下になるのでそれらだけで代数を閉じさせることができるからである。場の二次までででフェルミオニックな演算子は右の表のようになる。ただし、並進不変性の要請から x が生で出てくるものは除いてある。右端の欄が質量次元とパリティーが一致する SUSY チャージである。(質量次元 -1) の -1 は σ 積分から来ている。後は SO(8) 対称性と SUSY 代数を満たすようにしなければならない。SO(8) については、右表は全てクリアする。例えば、一、二行目はそのままで合っていて、三行目以下は SO(8) の不変テンソル $\gamma^i_{\alpha\dot{\beta}}$ を使って $\underline{\mathbf{8}_\mathrm{V}}$,$\underline{\mathbf{8}_\mathrm{S}}$ の足をつぶせば、$\underline{\mathbf{8}_\mathrm{C}}$ が得られる[15]。最後に SUSY 代数を要求すると、幾つかの数係数が決まって、

演算子	(質量次元 -1)	parity	候補
θ	$-1/2$	$-i$	Q
λ	$-1/2$	$+i$	q
$x'\theta$	$+1/2$	$+i$	$\tilde{q}$
$k\theta$	$+1/2$	$-i$	$\tilde{Q}$
$x'\lambda$	$+1/2$	$-i$	$\tilde{Q}$
$k\lambda$	$+1/2$	$+i$	$\tilde{q}$

$$Q_{\mathrm{free}} = \int d\sigma \;\; a\,\theta(\sigma) \tag{4.95}$$

$$q_{\mathrm{free}} = \int d\sigma \; \frac{\sqrt{2}}{a}\lambda(\sigma) \tag{4.96}$$

$$\tilde{Q}_{\mathrm{free}} = \int d\sigma \; \left(\frac{a}{\sqrt{2}} k^i\tilde{\gamma}^i\theta(\sigma) + b\, x'^i\tilde{\gamma}^i\lambda \right) \tag{4.97}$$

$$\tilde{q}_{\mathrm{free}} = \int d\sigma \; \left(\frac{1}{a}\; k^i\tilde{\gamma}^i\lambda(\sigma) + c\, x'^i\tilde{\gamma}^i\theta \right) \tag{4.98}$$

[14] SO(9,1) と SO(8) で同じ記号を使っているが、始めの q は SO(9,1) の 16 成分スピナー、後の q は SO(8) のカイラリティー正の 8 成分スピナーである。

[15] SO(8) の三つの 8 次元表現は $i, \alpha, \dot{\alpha}$ のそれぞれを $\underline{\mathbf{8}_\mathrm{V}}$,$\underline{\mathbf{8}_\mathrm{S}}$,$\underline{\mathbf{8}_\mathrm{C}}$ と表す。

が SUSY のチャージの自由部分である。これから交換関係を使えば、ハミルトニアン $H_{\rm free} = P^-_{\rm free}$ は、フェルミオンの規格化 $(-\sqrt{2}b/a)^{1/2}\lambda \to \lambda$、$(-\sqrt{2}b/a)^{-1/2}\theta \to \theta$、の後、

$$H_{\rm free} = \frac{1}{2}\int d\sigma \ \left\{ k^{i\,2} + \frac{bc}{\sqrt{2}} x'^{i\,2} + i\lambda'\lambda + i\frac{bc}{\sqrt{2}}\theta'\theta \right\} \tag{4.99}$$

と求まる。この式から弦理論におけるテンション $T = 1/(2\pi\alpha'^2)$ は式 (4.74) と見比べることで、

$$\alpha'^2 \sim \frac{\sqrt{2}}{b\,c} \sim \frac{g^2 I}{\epsilon} \tag{4.100}$$

という対応が付く。

では次のステップとして最低次の相互作用項を考えよう。つまり $1/I$ の項である。鍵になるのは、相互作用点付近に挿入された演算子はそのコンフォーマル次元に依った発散を持つということである。理由は LCSFT では相互作用点まわりは、world sheet が平らではなく、一周が (普通の二倍の)4π あるような面になっている。つまり複素平面 $\mathbb{C}$ に切れ目を入れて二枚を張り合わせた面になっている。このため平らな面に行くには平方根で写像しなければならない。よって平らな面上の普通の演算子を基準に考えると、相互作用点付近のコンフォーマル次元 Δ の演算子は $(\frac{\partial\sqrt{z}}{\partial z})^{\Delta} \sim \epsilon^{-\Delta/2}$ なる特異性を持つ。結局、考えやすい組み合わせとしてはコンフォーマル次元 1 の k, x' は、$\sqrt{\epsilon}$ を掛けたもの $\sqrt{\epsilon}k, \sqrt{\epsilon}x'$ になる。フェルミオンはちょっと面倒であるが、[12] の結果を借りると $\sqrt{\epsilon}\lambda$ と θ が考えやすい組み合わせである。例として、$\tilde{Q}$ を考えてみよう。一般に次のように書いてみる。

$$\tilde{Q}_{\rm int} = \frac{1}{I}\int d\sigma\ d\sigma_1\ \epsilon^{\eta}(k)^{\alpha}(x')^{\beta}(\lambda)^{\gamma}(\theta)^{\delta}(\partial_\sigma)^{\kappa}(\text{delta functions for } k \text{ and } \lambda) \tag{4.101}$$

質量次元から、次の式が成り立つ。

$$\frac{1}{2} = -1 - \eta + \alpha + \beta + \frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{2}\delta + \kappa \tag{4.102}$$

ここで $[\,I\,] = -1$ を使った。またデルタ関数は次元を数える必要がないので無視した。では式 (4.101) が $\epsilon \to 0$ の時にどのように振る舞うか調べよう。$\tilde{Q}_{\rm int}$ の ϵ の全次数 ζ は

$$\zeta = \eta - \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{2}\kappa \tag{4.103}$$

$$= -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \delta + \kappa) \ \geq -\frac{3}{2} \tag{4.104}$$

一行目を書き下すときには、先に書いた各場の発散を考慮にいれ、二行目に行くときには、式 (4.102) を使って η を消去した。発散のきつい方から順に調べてみよう。

- $\zeta = -3/2$ の時。この時は $\alpha = \beta = \delta = \kappa = 0$ しかない。つまり $(\lambda)^{\gamma}$ だけが残るが、$\underline{8_{\rm S}}$ をいくつ掛けても $\underline{8_{\rm C}}$ にはならないので $\zeta = -3/2$ は実現しない。

- $\zeta = -1$ の時。今度はさらに 4 つの場合に分かれる。

1. $\alpha = 1, \beta = \delta = \kappa = 0$
   奇数の $\gamma \leq 8$(全体をフェルミオニックにするため) で $k \cdot (\lambda)^\gamma$ という組合わせが可能である。実際、$\mathrm{SO}(8)$ の不変テンソルとして、$u^{i\dot{\alpha}}_{\alpha\beta\gamma}, \epsilon_{\alpha_1 \cdots \alpha_8}$ などが存在する。パリティーまで考えると、$\gamma = 3, 7$ が残ることになる。
2. $\beta = 1, \alpha = \delta = \kappa = 0$ の時。
   上とほとんど同じ。ただパリティーが逆なので $\gamma = 1, 5$ である。
3. $\delta = 1, \alpha = \beta = \kappa = 0$ の時。
   これは $\underline{\mathbf{8}_\mathrm{S}}$ しかないのでだめである。
4. $\kappa = 1, \alpha = \beta = \delta = 0$ の時。
   上と同じでだめ。

よって、$\zeta = -1$ の部分の相互作用ハミルトニアンは、記号的に書いて、

$$\tilde{Q}_{\mathrm{int}} = \frac{1}{I\epsilon} \int d\sigma \, d\sigma_1 \left\{ \sqrt{\epsilon} k \left[(\sqrt{\epsilon}\lambda)^3 + (\sqrt{\epsilon}\lambda)^7 \right] + \sqrt{\epsilon} x' \left[(\sqrt{\epsilon}\lambda)^1 + (\sqrt{\epsilon}\lambda)^5 \right] \right\} \tag{4.105}$$

となる。この相互作用項は、$I\epsilon$ を有限に保ったまま N 無限大の極限をとれば、有限の影響をおよぼす。またこの極限では、$\zeta > -1$ の項は全てゼロに行く。$\tilde{q}$ はパリティーが逆なだけなので、k と x' を入れ替えれば良い。また Q, q は質量次元が一つ小さいので $I\epsilon$ を固定する極限では有限にとどまる相互作用項は書き下せず、自由の場合の形のままである。これらの形はまさに [12] が作った LCSFT と同じである。

最後のステップは一般の $O(I^{-k}), k = 2, 3, \ldots$ を考えることである。この場合には k, x', λ の発散は $\epsilon^{-k/(k+1)}$ である。このときも細々した項は出てくるのだが非常に限られており ($O(I^{-1})$ では残り方が綺麗だった)、SUSY を満たすことが厳しそうなのであまり考えないことにする。

全部をまとめると、

- IIB MM は IIB 型超弦理論の LCSFT を (ほぼ) 完全に再現した。
- $N \to \infty$ の極限をとるときに固定するべき組合わせが分かった。それらは弦理論ではテンションと結合定数に当るもので、

$$\alpha'^2 \sim \frac{g^2 I}{\epsilon}, \quad g_{\mathrm{string}} \sim \frac{1}{I\epsilon} \tag{4.106}$$

  である。

$N \to \infty$ の時の振る舞いを $I \sim N^a, \epsilon \sim N^{-b}$ と書くと、結合定数の式は $a = b$ を意味していて、テンションの式は、$g^2 N^{a+b} \sim \mathrm{const.}$ という g^2 のスケーリングを決める関係になっている。残った問題としては、この a, b を何とかして決めることである。これらが決まれば、正しく極限操作ができるようになる。例えば、小さなウィルソンループの期待値の振る舞いを調べることができれば I を決定できるのである。

5 dynamical generation of space-time

これまで、IIB MM の対称性や、相互作用を含んだ多体系である証拠などを見てきた。対称性は作用自体の性質であり、多体系の証拠も摂動的な扱いをしていたのだが、本節ではよりダイナミカルな性質について議論をする。具体的には、行列の固有値分布としてどのような時空が表われるのか、という問題である [5]。固有値分布は複雑な相互作用の結果として決まっているもので、それがどのような分布になるかは力学に依っている。その解析は、例えば IIB MM の作用自体は 10 次元の並進対称性等を持っているが、果たしてその対称性は自発的な破れるのか、また破れるとすると、結果として 4 次元に見えるような時空を作り出すのか、等のエキサイティングな問いに答える可能性を秘めている。実際の解析は非常に大変なので、数々の近似、簡略化を行うことになる。うまい近似や計算法を見つけるのは今後の課題である。

5.1 effective action for diagonal elements

IIB MM では時空を表すのは行列の固有値である。しかし一般の配位について固有値の分布を調べるのは容易ではない。そこで第一番目の簡略化として、行列の対角成分の有効作用を考えることにしよう。そのために、行列を次のように対角成分と非対角成分に分ける。

$$\begin{array}{ccccccccc} \text{行列} & = & \text{対角成分} & + & \text{非対角成分} & & & & \\ A_\mu & = & X_\mu & + & \tilde{A}_\mu & ; & X_\mu & = & \mathrm{diag}(x_\mu^1, \cdots, x_\mu^N) \\ \psi & = & \xi & + & \tilde{\psi} & ; & \psi & = & \mathrm{diag}(\psi^1, \cdots, \psi^N) \end{array}$$

ただし X^μ, ψ はトレースレスとする。簡略化とは言ったが、これは単なる簡略化にとどまらない重要な意味を持っている。上の行列で X^μ, ψ は IIB MM の真空 $(S = 0)$ の古典解で無限に縮退している moduli であった。しかし以下の計算から分かるように量子論の補正で (非対角成分の揺らぎの影響で) 対角成分同士の間にポテンシャルが発生する。その結果、moduli の古典的な縮退が解けることになる。これは IIB MM は真の真空を決定できる一つの状況証拠と言えるだろう。

以下の計算の計画は言葉で言うのは簡単で、まず非対角成分 $\tilde{A}, \tilde{\psi}$ を積分してしまって、対角成分についての有効作用 $S_{\text{eff}}[X, \xi]$ を求める。更にフェルミオンの対角成分 ξ も積分してしまうと時空の点同士の有効作用として $S_{\text{eff}}[X]$ が決まる。

計算を始めよう。二番目の簡略化は、対角成分同士が大きく離れているという仮定である。この仮定を置くと式 (3.63) で $p_\mu = X_\mu, a_\mu = \tilde{A}_\mu$ と書き直して分かるように、非対角成分 A^{ij} の二次の項は、

$$\frac{1}{2g^2}(x^i - x^j)^2 \cdot A^{ij}A^{ji} \tag{5.1}$$

であり、頭に大きなファクターがかかっていて、揺らぎという扱いが正しくなる。このため以下の計算では非対角成分については 2 次までしか考えない (1 ループ近似)。加えて、固有値を対角成分で近似するのもこの仮定の下では妥当であろう。揺らぎの二次の項は式 (3.66)、

式 (3.67) と同じゴースト項、ゲージ固定項を加えて、

$$S_2^{(\mathrm{total})} = \sum_{i\neq j}\left[\frac{1}{2}\tilde{A}_\mu^{ji}(x_\nu^i - x_\nu^j)^2\tilde{A}_\mu^{ij} + \frac{1}{2}\overline{\tilde{\psi}^{ji}}\Gamma_\nu(x_\nu^i - x_\nu^j)\tilde{\psi}^{ij} - B^{ji}(x_\nu^i - x_\nu^j)^2 C^{ij}\right] \tag{5.2}$$

$$= \sum_{i<j}\Big[\big(\tilde{A_\mu^{ij}}\big)^*(x_\nu^{ij})^2\tilde{A}_\mu^{ij} + \overline{\big(\tilde{\psi}^{ij}\big)^*}\Gamma_\nu(x_\nu^{ij})\tilde{\psi}^{ij} - (B^{ij})^*(x_\nu^{ij})^2 C^{ij} - B^{ij}(x_\nu^{ij})^2(C^{ij})^*\Big] \tag{5.3}$$

となる。ここで $x_\mu^{ij} \triangleq x_\mu^i - x_\mu^j$ とした。D1-$\overline{\text{D1}}$の場合と異なるの点は、フェルミオンにもノンゼロの対角成分 ξ を入れたので $\tilde{A}, \tilde{\psi}$ が対角になっていない点である。以降、作用は i, j ごとに完全に分離しているので、$\tilde{A}, \tilde{\psi}$ については i, j の足は書かずに、$i < j$ の成分を $\tilde{A}, \tilde{\psi}$、$i > j$ の成分を $(\tilde{A})^*, (\tilde{\psi})^*$ と書くことにしよう。対角化は、$(\Gamma_\mu x_\mu)^{\dot{\alpha}}{}_\beta$ の逆行列が $(\Gamma_\mu x_\mu)^\alpha{}_{\dot{\beta}}/x^2$ であることから次のようになる[16]。

$$S_2^{(\mathrm{total})} = \sum_{i<j}\Bigg\{\left(\overline{\tilde{\psi}^*} - (\overline{\xi^{ij}}\Gamma_\mu\tilde{A}_\mu^*)_\alpha\frac{(\Gamma_\nu x_\nu^{ij})^\alpha{}_{\dot{\beta}}}{(x^{ij})^2}\right)(\Gamma_\rho x_\rho^{ij})^{\dot{\beta}}{}_\beta\left(\tilde{\psi} - \frac{(\Gamma_\lambda x_\lambda^{ij})^\beta{}_{\dot{\gamma}}}{(x^{ij})^2}(\Gamma_\sigma\tilde{A}_\sigma\xi^{ij})^{\dot{\gamma}}\right)$$
$$+ (\tilde{A_\mu})^*(x_\rho^{ij})^2\left(\delta^\mu{}_\nu - \frac{\overline{\xi^{ij}}\Gamma^\mu(x_\lambda^{ij}\Gamma_\lambda)\Gamma_\nu\xi^{ij}}{(x^{ij})^2}\right)\tilde{A}^\nu$$
$$- (B^{ij})^*(x_\nu^{ij})^2 C^{ij} - B^{ij}(x_\nu^{ij})^2(C^{ij})^*\Bigg\} \tag{5.4}$$

これで積分は実行できて、1 ループ近似の下での有効作用 $S_{\text{eff}}^{\text{1-loop}}[X, \xi]$ は、

$$S_{\text{eff}}^{\text{1-loop}}[X, \xi] = \sum_{i<j}\operatorname*{tr}_{(\mu,\nu)}\log\left(\delta^\mu{}_\nu - S^{(ij)\mu}{}_\nu\right) = -\sum_{i<j}\sum_{m=1}^{8}\operatorname{tr}\left(\frac{S_{(ij)}^m}{m}\right) \tag{5.5}$$

$$S^{(ij)\mu}{}_\nu \triangleq \frac{\overline{\xi^{ij}}\Gamma^\mu(x_\lambda^{ij}\Gamma_\lambda)\Gamma_\nu\xi^{ij}}{(x^{ij})^4} \tag{5.6}$$

と正しくノンゼロのものが求まる。log の展開は、S が 16 成分スピナー ξ の二次式なので、8 乗で止まっている。この $\operatorname{tr}(S^m)$ をもう少し扱いやすい形にしよう。まず ξ の二次式については、ξ がワイルスピナーであることから、完全反対称テンソルに書き直すと $\overline{\xi}\Gamma^{\mu_1\cdots\mu_p}\xi$ は $p \neq 3, 7$ の時にはゼロになる。$p = 3, 7$ は同じものを表しているので、二次式は $\overline{\xi}\Gamma^{\mu\nu\rho}\xi$ でつきていることが分かる。実際に、$\binom{16}{2} = \binom{10}{3} = 120$ である。よって、$S^{\mu\nu} = \overline{\xi}\Gamma^{\mu\lambda\nu}\xi^{ij}x_\lambda/x^2$ と書けて、S は反対称テンソルとなる。このため S の奇数次項はトレースによって消えて、偶数次しか残らない。ξ の四次式については、Fierz 変換を使うと、

$$\overline{\xi}\Gamma^{\rho_1\rho_2\rho_3}\xi\,\overline{\xi}\Gamma_{\rho_1\rho_2\rho_3}\xi = 0 \tag{5.7-a}$$

$$\overline{\xi}\Gamma^{\mu\rho_1\rho_2}\xi\,\overline{\xi}\Gamma^\nu{}_{\rho_1\rho_2}\xi = 0 \tag{5.7-b}$$

$$\overline{\xi}\Gamma^{\mu_1\mu_2\rho}\xi\,\overline{\xi}\Gamma^{\nu_1\nu_2}{}_\rho\xi = \overline{\xi}\Gamma^{\mu_1\nu_1\rho}\xi\,\overline{\xi}\Gamma^{\mu_2\nu_2}{}_\rho\xi - \overline{\xi}\Gamma^{\mu_1\nu_2\rho}\xi\,\overline{\xi}\Gamma^{\mu_2\nu_1}{}_\rho\xi \tag{5.7-c}$$

[16] 繰り返しになるが、これらの式の中で出てくるディラック共役は $\overline{\xi} = {}^t\xi C$ の意味で、複素共役はとっていないことに注意。

なる関係式を得る。このうち、式 (5.7-b) は $x_\mu x_\nu$ を掛けることにより、$\mathrm{tr}\,(S^2)=0$ を与える。式 (5.7) は ξ の 4 次式では完全対称テンソルは作れないことを意味している。不変テンソル $\epsilon_{\alpha_1\cdots\alpha_{16}}$ の存在と合わせると、ξ を 12 個使って完全対称テンソルを得ることも無理である。よって、$\mathrm{tr}\,(S^6)$ もゼロとなる。結局、$\mathrm{tr}\,(S^m)$ は $m=4,8$ のみが残る。

$$S_{\text{eff}}^{\text{1-loop}}[X,\xi]=-\sum_{i<j}\mathrm{tr}\left(\frac{S^4_{(ij)}}{4}+\frac{S^8_{(ij)}}{8}\right) \tag{5.8}$$

これが X,ξ に対する 1 ループ有効作用である。残った $\mathrm{tr}\,(S^4)\,,\mathrm{tr}\,(S^8)$ の構造も調べておこう。$\mathrm{tr}\,(S^8)$ の方は ξ が 16 個あり、それだけでローレンツスカラーになっているので簡単で、

$$\mathrm{tr}\left(S^8_{(ij)}\right)\propto\frac{1}{(x^i-x^j)^{24}}\cdot\delta^{(16)}(\xi^i-\xi^j) \tag{5.9}$$

である。$\mathrm{tr}\,(S^4)$ は、ξ は 8 個入っていて複雑である。しかし、

$$\mathrm{tr}\left(S^4_{(ij)}\right)=T^{\mu\nu\rho\lambda}_{ij}x^{ij}_\mu x^{ij}_\nu x^{ij}_\rho x^{ij}_\lambda\frac{1}{(x^{ij})^{16}} \tag{5.10}$$

$$T^{\mu\nu\rho\lambda}_{ij}=\left(\overline{\xi^{ij}}\Gamma^{\alpha\mu}{}_\beta\xi^{ij}\right)\left(\overline{\xi^{ij}}\Gamma^{\beta\nu}{}_\gamma\xi^{ij}\right)\left(\overline{\xi^{ij}}\Gamma^{\gamma\rho}{}_\delta\xi^{ij}\right)\left(\overline{\xi^{ij}}\Gamma^{\delta\lambda}{}_\alpha\xi^{ij}\right) \tag{5.11}$$

と 4 階のテンソル T を定義すれば、λ,ρ を入れ替えたものは式 (5.7-c) を使って、

$$T^{\mu\nu\lambda\rho}=T^{\mu\nu\rho\lambda}+\left[\left(\overline{\xi^{ij}}\Gamma^{\alpha\mu}{}_\beta\xi^{ij}\right)\left(\overline{\xi^{ij}}\Gamma^{\beta\nu}{}_\gamma\xi^{ij}\right)\left(\overline{\xi^{ij}}\Gamma^{\gamma\delta}{}_\alpha\xi^{ij}\right)\right]\left(\overline{\xi^{ij}}\Gamma^{\rho\lambda}{}_\delta\xi^{ij}\right) \tag{5.12}$$

$$=T^{\mu\nu\rho\lambda} \tag{5.13}$$

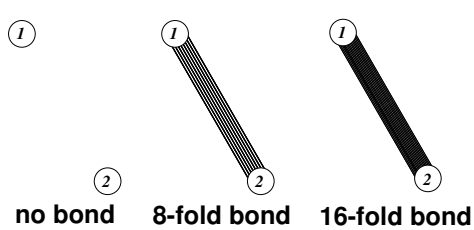
と元に戻る。ここで中辺の角括弧の中は三種類の反対称行列の積のトレースでゼロになることを用いた。さらに、式 (5.7-b) からトレースレス $T^{\mu\nu\rho}{}_\rho=0$ も分かるので、T は 4 階の完全対称トレースレステンソルである。

では次の段階、ξ の積分に進もう。実行すべき積分は、

$$\exp\left(-S_{\text{eff}}^{\text{1-loop}}[X]\right)=\int d\xi\ \exp\left(-S_{\text{eff}}^{\text{1-loop}}[X,\xi]\right) \tag{5.14}$$

$$=\int d\xi\ \prod_{i<j}\left\{1+\frac{\mathrm{tr}S^4_{(ij)}}{4}+\left[\frac{(\mathrm{tr}S^4_{(ij)})^2}{2\cdot4^2}+\frac{\mathrm{tr}S^8_{(ij)}}{8}\right]\right\} \tag{5.15}$$

である。最後の大括弧の中の二項目は $(\xi_{ij})^8/(x_{ij})^{12}$、三項目は $(\xi_{ij})^{16}/(x_{ij})^{24}$ のような形をしている。これを利用して非積分関数の各項をグラフを使って分かりやすく表そう。まず x^i_μ に従って、10 次元空間内に N 個の点を描く。次に i=1, j=2 の二点を考えると、式 (5.15) の積の中にある三つの項 $1,(\mathrm{tr}S^4_{(1,2)})^2,[(\mathrm{tr}S^4_{(1,2)})^2+\mathrm{tr}S^8_{(1,2)}]$ の内どれかを指定することに対応して、何も書かない、8 本線で結ぶ、16 本線で結ぶ、と表すことにしよう。線の本数は ξ の次数に対応している。そ



してそれぞれの x 依存性は、8 本線は $1/(x_i - x_j)$ の 12 乗、16 本線は 24 乗となっていて、点 1 と点 2 の間の相互作用を表す (8 本線は複雑な角度依存性を含む)。そのためそれぞれを 8 重結合 (8-fold bond)、16 重結合 (16-fold bond) と呼ぶ。後は i, j の組それぞれについて同じことを繰り返せば一つのグラフができ、それらを足しあげると積分が評価できる。つまり、式 (5.15) の中の i, j に関する積の部分を、グラフについての和と、それぞれのグラフの結合についての積に書き換えられるのである。

$$\exp\left(-S_{\text{eff}}^{\text{1-loop}}[X]\right) = \int d\xi \sum_{\Gamma:\text{graph}} \prod_{(ij):\text{bond of }\Gamma} \begin{cases} \dfrac{\text{tr}S_{(ij)}^4}{4} & \text{for 8-fold bond} \\ \dfrac{(\text{tr}S_{(ij)}^4)^2}{2\cdot 4^2} + \dfrac{\text{tr}S_{(ij)}^8}{8} & \text{for 16-fold bond} \end{cases} \tag{5.16}$$

このやり方の利点は、フェルミオンの性質を利用していくらか簡単化が起こるので、見通しが良くなることにある。それを見るために、スピナーの第一成分 $\xi^i_{\alpha=1}$ に注目しよう。この変数だけに注目して書くと、積分式 (5.15) は

$$\int dX \int \prod_{i=1}^{N-1} d\xi_2^i \cdots d\xi_{16}^i \cdot \prod_{i=1}^{N-1} d\xi_1^i \cdot \prod_{i<j} \left(C_0 + C_1 \cdot (\xi_1^i - \xi_1^j)\right) \tag{5.17}$$

と書かれる。C_0, C_1 は $x^{ij}_{\mu=0}, \cdots, x^{ij}_{\mu=9}$ と、$\xi^{ij}_{\alpha=2}, \cdots, \xi^{ij}_{\alpha=16}$ から作られている多項式である。これもグラフで、一項目を選んだときには線無し、二項目を選んだときには点 i と点 j を一本線で結ぶ、として表せる。すると、この一本線グラフについて分かることは

1.) 点 $(i_1, \cdots, i_n)$ がループを作っているとすると、対応する非積分関数は、$(\xi^{i_1} - \xi^{i_2}) = \delta(\xi^{i_1} - \xi^{i_2})$ に気を付けて、

$$\delta(\xi^{i_1} - \xi^{i_2})\delta(\xi^{i_2} - \xi^{i_3}) \cdots \delta(\xi^{i_k} - \xi^{i_1}) \propto \delta(\xi^{i_1} - \xi^{i_1}) = 0 \tag{5.18}$$

となり、寄与はなくなる。

2.) フェルミオンの積分の性質から全ての変数について一次の項 $\xi_1^1 \cdots \xi_1^{N-1}$ のみが ノンゼロの寄与を与える。これは、グラフの言葉に直すと $(N-1)$ 本の線があるグラフのみを考えれば良いことになる。

まず 1.) から、図 2 の一番左のようなループグラフは全て排除して良い。さらに次の関係式

$$(\text{ループの数}) - (\text{ボンドの数}) + (\text{点の数}) = (\text{連結部分の数}) + 1 \tag{5.19}$$

に、1.) ループは無い、2.) ボンドは $(N-1)$ 個、点は N 個であることを入れると、連結部分は一つ、つまり図 2 の真ん中のような、二つ以上に分かれたグラフも許されない。以上より、$\xi^i_{\alpha=1}$ の作るグラフはループ無し、かつ連結であることが分かった。この性質を持つ図 2 の一番右のようなグラフを maximal tree と呼ぶことにしよう。残り 15 個の $\xi^i_{\alpha=2,\cdot,16}$ も同様に別々の maximal tree を形作るので、全体のグラフは 16 個の一重結合の maximal tree を重ね合わせたものである。しかし、それらが全て効くわけではなく式 (5.16) から、それぞれの結合は 8 重か 16 重にまとまっていなければならない。

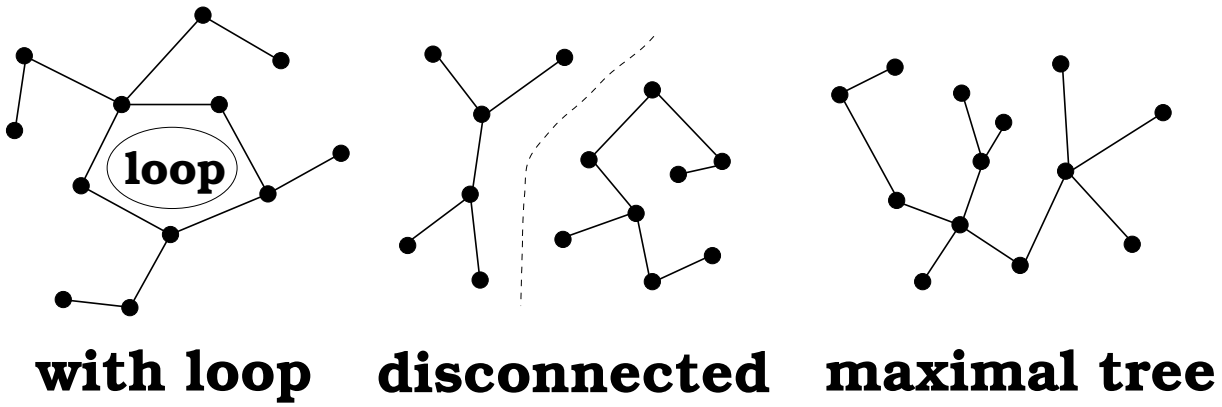


図 2: いろいろなグラフ

例として二つの maximal tree の重ねあわせを右に挙げておく。直線と波線がそれぞれの maximal tree を作っているのが分かる。二つのグラフの結合が重なったところが 2 重結合になり、重なっていないところは一重結合となる。このたった二つのグラフの重ね合わせでも、かなり複雑にループが現われる。また、点の間のポテンシャルは結合同士の角度にも依存している。実際にはこれが 16 個重なったものを考えるわけで、もっと複雑なグラフがたくさん出てくる。すると 1 ループ有効作用の段階でさえ、低次元時空の形成の糸口ぐらいは見えそうな期待を抱かせてくれる。

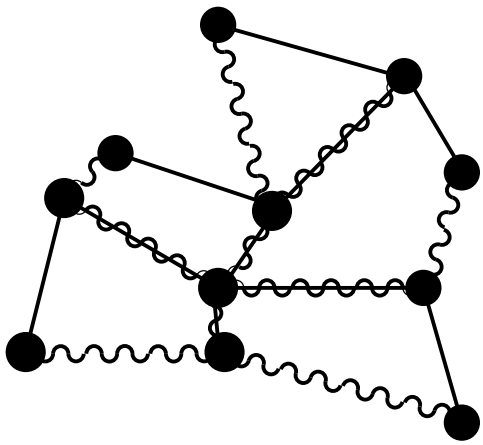


図 3: maximal tree の重ね合わせ

しかし、実際に全てを取り入れて有効作用を解析するのはほとんど不可能なので、さらにもう一段階、簡略化を行う。式 (5.16) において、8 重結合を捨ててしまって、16 重結合だけを残すのである。

$$\exp\left(-S_{\text{eff}}^{\text{16-fold bond}}[X]\right) = \int d\xi \sum_{\Gamma:\text{maximal tree}} \prod_{(ij):\text{bond of } G} \frac{1}{(x^i - x^j)^{24}} \tag{5.20}$$

16 個の同じ maximal tree が重なっているので、考えるグラフ G は maximal tree だけで良い。さらに、x 依存性は二点の距離だけに依存する球対称なものになった。そのため、この場合にはおそらく SO(10) の対称性の破れは見えない。しかし、そこを出発点により洗練されたモデルを議論するときなどにはこのモデルの性質から定性的な議論ができるかもしれない。

それに加えて、この系は統計力学で良く調べられている枝分かれ重合体 (branched polymer, 以下では BP) に他ならず、BP は統計力学の演習問題としても面白い系である。よって、BP の統計力学について次副節で詳しく見ることにしよう。

5.2 statistical mechanics of branched polymer

この副節は、branched polymer(BP) の統計力学に当てる。BP はランダムウォークの一般化の一つとして知られているモデルで、その単純さからいろいろな応用もある。この節の議論は [13] に拠っている。

5.2.1 random walk

BP に入る前に、準備としてランダムウォークを考えよう。目的は canonical ensemble(CE) と grand canonical ensemble(GCE) の関係を見ること、言い換えると、CE の熱力学極限 $(N \to \infty)$ を見るためにはどう GCE を使えばよいかということである。まず CE で考える。その分配関数は、

$$Z_N = \int \prod_{i=1}^{N} d^d y^i \prod_{j=1}^{N-1} f(y^i - y^{i+1}) \tag{5.21}$$

$$= V \left(\hat{f}(0) \right)^{N-1} \tag{5.22}$$

で与えられる簡単な系である。ここで、$f(x-y)$ は各結合に割り当てられた、二点間の距離に依存した関数で、二点がその距離にある (相対) 確率を与える。この関数は系の特徴的な長さ a_0 よりも大きい距離では急激にゼロに近づくと仮定する。だいたいのイメージとしては、ガウス型ポテンシャル

$$f(x) = \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x}{a_0} \right)^2 \right] \tag{5.23}$$

のようなものである。この副節内では、ハットを付けることでフーリエ変換した関数を表す。すなわち、

$$\hat{f}(p) \triangleq \int \frac{d^d x}{(2\pi)^d} e^{-ipx} f(x) \tag{5.24}$$

である。また系の体積を V で表した。この系を調べるには密度関数 $\rho(x) \triangleq \sum_{i=1}^{N} \delta^{(d)}(x - y^i)$ を用いるのが便利である。一点関数を求めると、

$$g_N^{(1)}(x) \triangleq \langle\, \rho(x) \,\rangle \tag{5.25}$$

$$\triangleq \frac{1}{Z_N} \int \prod_{i=1}^{N} d^d y^i \prod_{j=1}^{N-1} f(y^i - y^{i+1}) \sum_k \delta(x - y^k) \tag{5.26}$$

$$= \frac{1}{Z_N} N \int \prod_{i=1}^{N-1} d^d y^i \prod_{j=1}^{N-1} f(y^i - y^{i+1}) \Big|_{y^N = x} \tag{5.27}$$

$$= \frac{N}{V} \tag{5.28}$$

となり、N 個の点が体積 V にばらまかれた密度を表している。また並進不変性のため一点関数は座標によらない事も分かる。二点関数

$$g_N^{(2)}(x^1,x^2) \triangleq \left\langle\, \rho(x^1)\rho(x^2)\,\right\rangle \tag{5.29}$$

$$= \frac{1}{Z_N}\int \prod_{i=1}^{N} d^d y^i \prod_{j=1}^{N-1} f(y^i - y^{i+1}) \sum_k \delta(x^1 - y^k) \sum_\ell \delta(x^2 - y^\ell) \tag{5.30}$$

はフーリエ変換してから計算すると、

$$\hat{g}_N^{(2)}(p) = \int \frac{d^d x^1}{(2\pi)^d} e^{-ip(x^1-x^2)} \left\langle\, \rho(x^1)\rho(x^2)\,\right\rangle \tag{5.31}$$

$$= \frac{2}{Z_N}\sum_{k<\ell}\int \prod_{i\neq k,\ell}^{N} d^d y^i \; d^d x^1 \; f(y^1 - y^2) f(y^2 - y^3)\cdots f(y^{k-1} - x^1) \tag{5.32}$$

$$\times f(x^1 - y^{k+1}) f(y^{k+1} - y^{k+2})\cdots f(y^{\ell-1} - x^2) \tag{5.33}$$

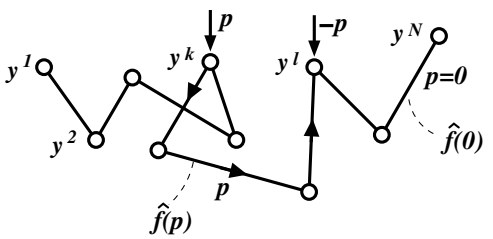
$$\times e^{-ip(x^1 - y^{k+1})} e^{-ip(y^{k+1} - y^{k+2})} \cdots e^{-ip(y^{\ell-1} - x^2)} \tag{5.34}$$

$$\times f(x^2 - y^{\ell+1}) f(y^{\ell+1} - y^{\ell+2})\cdots f(y^{N-1} - y^N) \tag{5.35}$$

$$+ \frac{1}{Z_N}\sum_{k=\ell}\int \prod_i d^d y^i \; dx^1 \prod_{j=1}^{N-1} f(y^j - y^{j+1)} \delta(x^1 - y^k)\delta(x^2 - y^k) \tag{5.36}$$

$$= \frac{2}{V}\sum_{k<\ell}\left(\frac{\hat{f}(p)}{\hat{f}(0)}\right)^{\ell-k} + \frac{N}{V} \tag{5.37}$$

と求まる。重要なのは二点 $k,\,\ell$ を決めると、その間の経路は一意的に決まってしまうことである。これにより、フーリエ変換の指数関数がうまく分配される。これはグラフで書くと分かりやすくて、固定された点 k,l からは運動量の流れ込みがあり、それは保存する。そして、運動量 p が流れている結合には $\hat{f}(p)$ を割り当てれば良い (右図を参照)。最後の式で和をとってしまうと、二点関数が求まって、



$$\hat{g}_N^{(2)}(p) = \frac{2N}{V}\frac{1}{1-h(p)}\left(1 - \frac{h(p)}{N}\frac{1-h(p)^N}{1-h(p)}\right) - \frac{V}{N} \tag{5.38}$$

となる。ここで、$h(p) \triangleq \hat{f}(p)/\hat{f}(0)$ と規格化した。式 (5.23) のようにとると、$f(0) = (\sqrt{2\pi}a_0)^d, h(p) = \exp(-a_0^2 p^2/2)$ であり、$f(0)$ は相互作用の及ぶ体積を表している。今から調べたい領域は、系全体の大きさ (赤外のカットオフ) よりは小さく、a_0 (紫外のカットオフ) よりは大きいところである。それに適した関数は、$h(p)$ よりは、$H(p) = 1 - h(p) \sim a_0^2 p^2/2$ なので、これを使って書き換える。$(1 - H(p))^N = e^{-NH(p)} + O(1/N)$ より、

$$\hat{g}_N^{(2)}(p) = \frac{2N}{V}\frac{1}{H(p)}\left(1 - \frac{1}{NH(p)}\right)\left[1 + O\left(\frac{1}{(NH(p))^2}, \frac{1}{N}, H(p)\right)\right] \tag{5.39}$$

と評価できる。この評価が良い領域、

$$\frac{1}{\sqrt{N}a_0} < p \ll \frac{1}{a_0} \tag{5.40}$$

のことをスケーリング領域と呼ぶ。式 (5.39) より、$\hat{g}_N^{(2)}(p) \sim 1/(p^2 + 2(\sqrt{N}a_0)^{-2})$ なので、二点の相関は距離 $\sqrt{N}a_0$ ぐらいで指数関数的に落ちていくことが分かる。よって系の広がりは $\xi \sim \sqrt{N}a_0$ になる。

それでは GCE を考えてみよう。まず普通の GCE の分配関数は、

$$Z_{\kappa_0} = \sum_{N=1}^{\infty} \kappa_0^N Z_N \tag{5.41}$$

$$= \kappa_0 V \sum_{N=1}^{\infty} (\kappa_0 \hat{f}(0))^N \tag{5.42}$$

$$= V \frac{\kappa_c \kappa_0}{\kappa_c - \kappa_0} \tag{5.43}$$

である。κ_0 は GCE を定義するための重み因子 (fugacity) で、一行目の無限和は $\kappa_0 < \kappa_c = 1/\hat{f}(0)$ の時に収束する。GCE での (規格化されていない) 二点関数は、

$$\hat{G}^{(2)}(p) = \sum_{N=1}^{\infty} \kappa_0^N \sum_{s=0}^{N-1} \hat{f}(p)^s \hat{f}(0)^{N-s-1}(N-s) - \sum_{N=1}^{\infty} \kappa_0^N \hat{f}(0)^{N-1} \tag{5.44}$$

$$= 2\kappa_0 \frac{\kappa_c^2}{(\kappa_c - \kappa_0)^2} \left[\frac{\kappa_c}{\kappa_c - \kappa_0 h(p)} - \frac{1}{2} \right] \tag{5.45}$$

となっている。一行目の和は変数を $t = N - s, M = N - t$ と取り替えると、独立に 1 から ∞ までの和になり、計算が楽である[17]。規格化された二点関数にすると、

$$\hat{g}^{(2)}(p) \triangleq \frac{\hat{G}^{(2)}(p)}{Z_{\kappa_0}} \tag{5.46}$$

$$= \frac{2}{V} \frac{\kappa_c}{\delta\kappa} \left[\frac{1}{1 - h(p) + \frac{\delta\kappa}{\kappa_c} h(p)} - \frac{1}{2} \right] \tag{5.47}$$

$$= \frac{2}{V} \frac{\kappa_c}{\delta\kappa} \frac{1}{H(p) + \frac{\delta\kappa}{\kappa_c}} \left[1 + O\left(\frac{\delta\kappa}{\kappa_c}, H \right) \right] \tag{5.48}$$

で、相関距離は $\xi \sim a_0 \sqrt{\kappa_c/\delta\kappa}$ となる。ここで $\delta\kappa \triangleq \kappa_c - \kappa_0$ とした。一方 N の期待値を求めると、

$$\langle N \rangle = \kappa_0 \frac{\partial}{\partial \kappa_0} \log Z_{\kappa_0} \tag{5.49}$$

$$= \frac{\kappa_0}{\delta\kappa} - 1 = \frac{\kappa_c}{\delta\kappa} [1 + O(\delta\kappa)] \tag{5.50}$$

[17] 和の公式。$\sum_{n=1}^{N} r^{n-1} = \frac{1-r^N}{1-r}, \qquad \sum_{n=1}^{N} n r^{n-1} = \frac{1-r^N}{(1-r)^2} - \frac{N r^N}{1-r}$

となっていて、これを使うと、

$$\hat{g}^{(2)}(p) = \frac{2\langle N \rangle}{V} \frac{1}{H(p) + \langle N \rangle^{-1}} \left[1 + O\left(\langle N \rangle^{-1}, H\right)\right] \tag{5.51}$$

$$\xi \sim a_0 \sqrt{N} \tag{5.52}$$

と表され、CE の結果式 (5.39) と一致する。この二点関数は質量を持ったスカラー場と同じものである。そして赤外のカットオフは質量の逆数である。

CE と GCE の両方で二点関数を計算したので、ここで、ハウスドルフ次元 (Hausdorff dimension) を定義しよう。それには二通りの定義があり、

1.) 系全体の大きさ N と広がり L によって定義する方法。この場合は次の式、

$$L = a_0 N^{1/d_{\rm H}^{(1)}}, \quad \text{or} \qquad (L/a_0)^{d_{\rm H}^{(1)}} = N \tag{5.53}$$

で定義する。この次元は、第二式から分かるように、系全体を密度一定に押し潰したらどのぐらいまで押し潰せるかというものである。

2.) 系の中の一般的な一部分を用いて定義する方法。「 一般的な 」という意味は、赤外、紫外のどちらのカットオフとも離れたスケーリング領域 $a_0 \ll R < L$ なる距離スケールで考えることを表す。半径 R の球と、その中にある点の個数 $N(R)$ の関係から、

$$(R/a_0)^{d_{\rm H}^{(2)}} = N(R) \tag{5.54}$$

で定義する。この場合もやはり考えている領域がどのぐらい押し潰せるか、またはどのぐらいスカスカかを表すものとなる。

以上二つのハウスドルフ次元の定義を与えた。熱力学の観点から言うと、カットオフの影響を受けずに定まる二つ目の定義が自然である。しかし、これらの定義は直感的に一致するのが当然で、一致しないときには境界あたりでの影響があると考えられる。具体的にランダムウォークに当てはめてみる。

1.) 系の広がりは $L \sim \xi \sim a_0\sqrt{N}$ なので、$d_{\rm H}^{(1)} = 2$、

2.) 一方、赤外のカットオフ $L \sim \xi$ よりも十分小さい領域では (スカラー場の例で言うと質量が無視できるぐらい近距離)、二点関数は $g^{(2)}(x) \sim g^{(1)}/(a_0^2 x^{d-2})$ と振る舞うので、

$$N(R) = \int^R d^d x \, \frac{g^{(2)}(x)}{g^{(1)}} \sim \left(\frac{R}{a_0}\right)^2 \tag{5.55}$$

よって $d_{\rm H}^{(2)} = 2$ である。

このようにランダムウォークの場合には、二つのハウスドルフ次元は一致する。最後に BP で使うために、一般化された GCE を導入しておこう。この GCE は N についての和の重み

を N の巾乗で変形したもので、次のように定義する。

$$Z_{\kappa_0,\ell} = \sum_{N=1}^{\infty} N^{\ell} \kappa_0^N Z_N = \left(\kappa_0 \frac{\partial}{\partial \kappa_0}\right)^{\ell} Z_{\kappa_0} \tag{5.56}$$

$$\hat{G}^{(2)}_{\kappa_0,\ell}(p) = \sum_{N=1}^{\infty} N^{\ell} \kappa_0^N \hat{G}^{(2)}_N(p) = \left(\kappa_0 \frac{\partial}{\partial \kappa_0}\right)^{\ell} \hat{G}^{(2)}_{\kappa_0}(p) \tag{5.57}$$

この GCE でランダムウォークのハウスドルフ次元を計算してみよう。まず、$Z_{\kappa_0,\ell=1}$ を計算してみよう。

$$Z_{\kappa_0,\ell=1} = \kappa_0 \frac{\partial}{\partial \kappa_0}\left(V\kappa_c \frac{\kappa_0}{\delta\kappa}\right) = V\kappa_c \frac{\kappa_0^2}{\delta\kappa^2}\left(1 + \frac{\delta\kappa}{\kappa_0}\right) \tag{5.58}$$

より第二項目は $\delta\kappa$ の高次の項になるので無視する。このように微分は分母の $\delta\kappa$ を微分するところしか効かないので、

$$Z_{\kappa_0,\ell} = V\kappa_c \cdot l! \left(\frac{\kappa_c}{\delta\kappa}\right)^{\ell+1} [1 + O(\delta\kappa/\kappa_c)] \tag{5.59}$$

と求まる。また規格化されていない二点関数は、やはり一番効くのは $\delta\kappa$ を微分する項なのだが、質量項を残すために小さい項同士の比、

$$\frac{\delta\kappa}{\kappa_0}\frac{\kappa_0 h(p)}{\kappa_c - \kappa_0 h(p)} = \frac{\delta\kappa}{\kappa_c}\frac{1}{H(p)}\left[1 + O\left(H(p), \delta\kappa, \left(\frac{\delta\kappa}{\kappa_c H}\right)^2\right)\right] \tag{5.60}$$

については一次まで残すことにする。すると、この式と同じ高次項の無視の仕方を $\simeq$ で表すことにして、

$$\hat{G}^{(2)}_{\kappa_0,\ell}(p) \simeq 2\kappa_0\kappa_c^2(\ell+1)!\frac{\kappa_0^{\ell}}{\delta\kappa^{\ell+2}}\frac{\kappa_c}{\kappa_c - \kappa_0 h(p)}\left(1 + \frac{\ell}{\ell+1}\frac{\delta\kappa}{\kappa_0}\frac{\kappa_0 h(p)}{\kappa_c - \kappa_0 h(p)}\right) \tag{5.61}$$

$$\simeq 2\kappa_c(\ell+1)!\left(\frac{\kappa_c}{\delta\kappa}\right)^{\ell+2}\frac{1}{H(p)}\left[1 - \frac{1}{\ell+1}\frac{\delta\kappa}{\kappa_c}\frac{1}{H(p)}\right] \tag{5.62}$$

と求まる。これらと $\langle N \rangle_{\ell} = Z_{\kappa_0,\ell+1}/Z_{\kappa_0,\ell} \simeq (\ell+1)\kappa_c/\delta\kappa$ より、規格化された二点関数を計算すると、

$$\hat{g}^{(2)}_{\kappa_o,\ell}(p) = \frac{2\langle N \rangle_{\ell}}{V}\frac{1}{H(p)}\left(1 - \frac{1}{\langle N \rangle_{\ell} H(p)}\right) \tag{5.63}$$

と、$\ell = 0$ の場合の GCE と (スケーリング領域では) 完全に一致する。この一般化された GCE が BP の解析では重要な役割を果たす。

5.2.2 branched polymer and its Hausdorff dimension

CE から始めよう。BP はランダムウォークに枝分かれの自由度を加えたもので、ここでは次の分配関数により定義する。

$$Z_N = \frac{1}{N!}\sum_{\Gamma:\substack{\text{connected}\\ \text{tree graph}}} \int \prod_{i=1}^{N} d^d y \prod_{(ij):\text{bond of }\Gamma} f(y^i - y^j) \tag{5.64}$$

各結合 (bond) に割り当てられた関数 $f(x-y)$ は、ある典型的な長さスケール a_0 よりも大きい距離に対しては十分早くゼロになるものとする。また BP でも $f(x-y)$ には角度依存性はなく距離のみの関数である。分配関数の中の y 積分は端に有る点から順々に実行することができ、積分の中身は $V\hat{f}(0)^{N-1}$ となる。残ったのはグラフについての和だけであり、それは N 個の点でできる BP の数を表す。密度関数と規格化されていない相関関数は前と同様に定義する。

$$\rho(x) = \sum_{i=1}^{N} \delta(x - y^i) \tag{5.65}$$

$$\begin{aligned} G_N^{(m)}(x^1, \cdots, x^m) &= Z_N \left\langle \, \rho(x^1) \cdots \rho(x^m) \, \right\rangle \\ &= \frac{1}{N!} \sum_{\Gamma:\text{tree graph}} \int \prod_{i=1}^{N} d^d y \prod_{(ij):\text{bond of } \Gamma} f(y^i - y^j) \end{aligned} \tag{5.66}$$

$$\times \sum_{k_1, \cdots, k_M} \delta(x^1 - y^{k_1}) \cdots \delta(x^m - y^{k_m}) \tag{5.67}$$

特に、一点関数は並進不変性の結果、分配関数と同じものである。

$$G_N^{(1)} = \frac{N}{V} Z_N \tag{5.68}$$

CE の分配関数を求めるために、$\ell = 0$ の GCE を考えるのが良い。GCE の分配関数、座標空間相関関数、運動量空間相関関数は、

$$Z_{\kappa_0} = \sum_{N=1}^{\infty} \kappa_0^N Z_N \tag{5.69}$$

$$G_{\kappa_0}^{(m)}(x^1, \cdots, x^m) = \sum_{N=1}^{\infty} \kappa_0^N G_N^{(m)}(x^1, \cdots, x^m) \tag{5.70}$$

$$(2\pi)^d \delta \left(\sum_{i=1}^{m} p^i \right) \hat{G}_{\kappa_0}^{(m)}(p^1, \cdots, p^m) = \int \prod_{i=1}^{m} \left(d^d x^i e^{-ip^i x^i} \right) G_{\kappa_0}^{(m)}(x^1, \cdots, x^m) \tag{5.71}$$

と定める。これから見るように、GCE では Schwinger-Dyson 方程式 (の一つ) は一点関数だけで閉じるので、完全に解けてしまい、それから CE の分配関数が求まるのである。まずは GCE の一点関数を無理矢理変形して DSE を導こう。準備として、CE の一点関数をあからさまに書いておく。

$$G_N^{(1)} = \frac{1}{N!} \sum_{\Gamma:\text{tree graph}} \int \prod_{i=1}^{N} d^d y^i \prod_{(ij):\text{bond of } \Gamma} f(y^i - y^j) \sum_{k=1}^{N} \delta(x - y^k) \tag{5.72}$$

$$= \frac{1}{(N-1)!} \sum_{\Gamma:\text{tree graph}} \int \prod_{i=2}^{N} d^d y^i \prod_{(ij):\text{bond of } \Gamma} f(y^i - y^j) \tag{5.73}$$

では変形を始めよう。$\delta(x - y^k)$ の k はどれをとっても同等なので、$k = 1$ をとることにして、代りに因子 N を付ける。すると印づけられた点 $y^1 = x$ から何本の結合が出ているかによっ

て和をとることができる。最終的にこの和だけが残るように書き直すのが目標である。この結合の本数を m と書き、y^1 とつながっている点を $y^2, \cdots, y^{m+1}$ と決める (さらに因子 $\binom{N-1}{m}$ が出る)。ここで鍵となるのは、グラフ Γ で一つの点 y^1 を指定することで、m 個の小さなグラフ $\Gamma_1, \cdots, \Gamma_m$ の積として書けることである。この性質から、全体のグラフ Γ についての和を、小さなグラフ Γ_a についての和と、その個数についての和に書き直すことが可能となる。きちんとやるには、それぞれの小さなグラフ $\Gamma_1, \cdots, \Gamma_m$ はその中に $N_1, \cdots, N_m$ 個の点を含んでいるとして、残った点を順番に小さなグラフに分ける。出てくる因子を集めると

$$N\binom{N-1}{m}\binom{N-m-1}{N_1-1}\binom{N-N_1-m}{N_2-1}\cdots\binom{N-N_1-\cdots-N_{m-1}-2}{N_m-1} = \frac{N!}{m!(N_1-1)!\cdots(N_m-1)!} \tag{5.74}$$

とまとまって、一点関数は次の和に変わる。

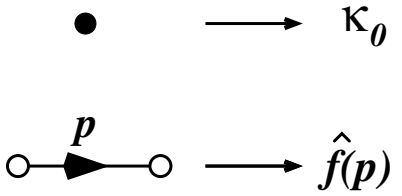
$$\begin{aligned} G^{(1)}_{\kappa_0} &= \kappa_0 \sum_{N=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{N} \sum_{\substack{N_1,\cdots,N_m \\ N_1+\cdots N_m=N-1}} \kappa_0^{N_1+\cdots+N_m} \frac{1}{m!(N_1-1)!\cdots(N_m-1)!} \\ &\quad \times \sum_{\Gamma_1,\cdots,\Gamma_m} \int \prod_{i=2}^{N} d^d y\ f(x-y^2)\cdots f(x-y^{m+1}) \\ &\quad \times \left[\prod_{(ij):\text{bond of }\Gamma_1} f(y^i-y^j)\right] \cdots\cdots \left[\prod_{(ij):\text{bond of }\Gamma_m} f(y^i-y^j)\right] \qquad (5.75) \\ &= \kappa_0 \sum_{N=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{N} \sum_{\substack{N_1,\cdots,N_m \\ N_1+\cdots N_m=N-1}} \kappa_0^{N_1+\cdots+N_m} \frac{1}{m!} \hat{f}(0)^m G^{(1)}_{N_1}\cdots G^{(1)}_{N_m} \qquad (5.76) \end{aligned}$$

初めの等号では、小さなグラフ同士はつながっていないことを、また二つ目の等号では式 (5.73) を用いた。N についての和を無くしてしまって、$m, N_1, \cdots, N_m$ の和を拘束無しにしても同じなので、式 (5.70) を使って GCE の一点関数に書き直すと、

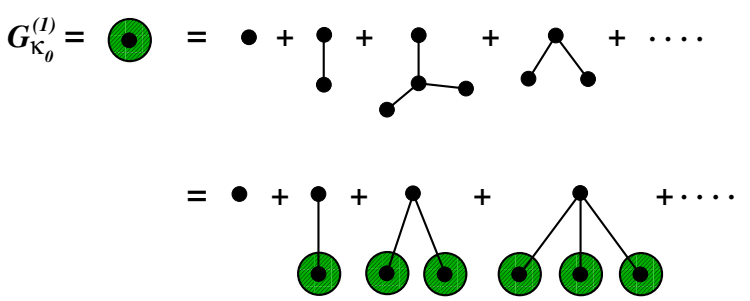
$$\begin{aligned} G^{(1)}_{\kappa_0} &= \kappa_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\hat{f}(0)^m}{m!} \left[\sum_{N_1}^{\infty} \kappa_0^{N_1} G^{(1)}_{N_1}\right] \cdots\cdots \left[\sum_{N_m}^{\infty} \kappa_0^{N_m} G^{(1)}_{N_m}\right] \qquad (5.77) \\ &= \kappa_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\hat{f}(0) G^{(1)}_{\kappa_0}\right)^m \qquad (5.78) \\ &= \kappa_0 \exp\left(\hat{f}(0) G^{(1)}_{\kappa_0}\right) \qquad (5.79) \end{aligned}$$

となり、κ_0 と $G^{(1)}_{\kappa_0}$ の間の関係を表す式が得られた。これが一点関数に対する SDE である。この関係式もグラフで考えるとすぐに導出できる。GCE で考えているときのグラフの書き方は、運動量空間でやることにして式 (5.69) から読み取ると、

1.) 点は黒丸で示し、そこには κ_0 を割り当てる。
2.) 結合は点と点を結ぶ線で表し、流れている運動量が p の時には、$\hat{f}(p)$ を割り当てる。
3.) 適当な対称性因子で割る。



となる。これを一点関数に当てはめてみよう。一点関数の値は座標空間でも運動量空間でも同じであるので区別しない。右図のように一点関数を黒丸付きの大きな円で表す。それは一行目にあるような様々なグラフについて和をとったのもである。ここで各グラフの一番上の点が固定された点だとする。この和を固定された点から、いくつ枝分かれしているかでまとめると二行目のようにまとまる。それを式に読み直せば、まさに式 (5.78) なのである。これでグラフによっても DSE



$$b = \kappa e^b \tag{5.80}$$
$$\text{where } b = \hat{f}(0) G^{(1)}_{\kappa_0}, \quad \kappa = \hat{f}(0)\kappa_0$$

が証明された。次にこれから CE の分配関数を求めよう。

$$G^{(1)}_{\kappa_0} = \sum_{N=1}^{\infty} \kappa_0^N G^{(1)}_N \tag{5.81}$$

なので、b を κ で展開した時の係数が分かれば良い。そのため $b = \sum_{N=1}^{\infty} b_N \kappa^N$ と書くと、

$$b_N = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\kappa=0} d\kappa \, \frac{b(\kappa)}{\kappa^{N+1}} \tag{5.82}$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{b=0} db \, (1-b) \frac{e^{Nb}}{b^N} \tag{5.83}$$
$$= \frac{N^{N-2}}{(N-1)!} = \frac{N^{N-1}}{N!} \tag{5.84}$$

となる。二行目に行くときには、κ から b に変数変換をした。その際 κ の原点まわりでは $\kappa \sim b$ が分かるので、bの積分もやはり原点まわりである。式 (5.81) と見比べて、$G^{(1)}_N = \frac{N^{N-1}}{N!} \hat{f}(0)^{N-1}$ を得る。よって式 (5.68) から CE の分配関数が

$$Z_N = V \frac{N^{N-2}}{N!} \hat{f}(0)^{N-1} \tag{5.85}$$

と決定される。この式は、N 個の点を maximal tree で結ぶやり方は N^{N-2} 通りあることも示している。これで BP のハウスドルフ次元を求める準備が整った。まず、Z_N の N が大きいときの振る舞いを調べよう。

$$Z_N \simeq V \frac{N^{N-2}}{N^N e^{-N} \sqrt{2\pi N}} \hat{f}(0)^{N-1} \tag{5.86}$$
$$= \frac{V}{\sqrt{2\pi}\hat{f}(0)} N^{-5/2} \left(\frac{\hat{f}(0)}{e^{-1}} \right)^N \tag{5.87}$$

ここで、Stirling の公式 $N! \simeq N^N e^{-N}\sqrt{2\pi N}$ を用いた。この評価で注目するのは N の巾の部分である。これが GCE にどう影響するかを一般化された GCE の分配関数から見てみる。

$$Z_{\kappa_0,\ell} = \frac{V}{\sqrt{2\pi}\hat{f}(0)} \sum_{N=1}^{\infty} N^{\ell-5/2} \left(\frac{\kappa_0 \hat{f}(0)}{e^{-1}} \right)^N \tag{5.88}$$

$$= \frac{V}{\sqrt{2\pi}\hat{f}(0)} \sum_{N=1}^{\infty} N^{\ell-5/2} \left(\frac{\kappa}{\kappa_c} \right)^N \tag{5.89}$$

ここで、$\kappa = \hat{f}(0)\kappa_0, \kappa_c = e^{-1}$ である。和の中を N の関数と思って停留する点を求めると、

$$N \sim -\left(l - \frac{5}{2}\right) \frac{1}{\log \frac{\kappa_c}{\kappa}} \sim \left(l - \frac{5}{2}\right) \frac{\kappa_c}{\delta\kappa} \tag{5.90}$$

ここで、$\delta\kappa = \kappa_c - \kappa$ と置いた。この式から、例えば $\ell = 0$ の普通の GCE の場合には、停留点は存在せず、和の中は N の単調減少関数である。つまり分配関数の和の中で N が小さいところが主に効いてしまう。しかし、実際に知りたいのは CE での $N \to \infty$ 極限であり、この目的のためには $\ell = 0$ の GCE は合っていないことになる。逆に ℓ を大きくとった場合には、停留点は式 (5.90) で与えられ、$N \sim \delta\kappa^{-1}$ である。この時は、κ を臨界値に近づけることで GCE によって CE の $N \to \infty$ 極限が調べられるのである。これを良い GCE と呼ぼう。良い GCE の判断の仕方としては、もし ℓ が良い GCE ならば、当然 $(\ell+1)$ も良い GCE なので、例えば二点関数や N の期待値を調べて、その振る舞いが ℓ に依らなくなればいいのである。では、このことを心に留めて進もう。

臨界点近くでは式 (5.80) から、

$$\delta b = b_c - b = \sqrt{2\,\frac{\delta\kappa}{\kappa_c}}, \qquad b_c = 1 \tag{5.91}$$

である。以下、臨界点近くに限る。まず、小さい ℓ では本当にうまく行ってないことを見ておく。$\ell = 1$ の分配関数は、式 (5.68) と b の定義から

$$Z_{\kappa_0,\ell=1} = \langle N \rangle_0 Z_{\kappa_0} = V G^{(1)}_{\kappa_0} = b\frac{V}{\hat{f}(0)} \sim \frac{V}{\hat{f}(0)} \tag{5.92}$$

となり、有限であることが分かる。すると、次の関係式、

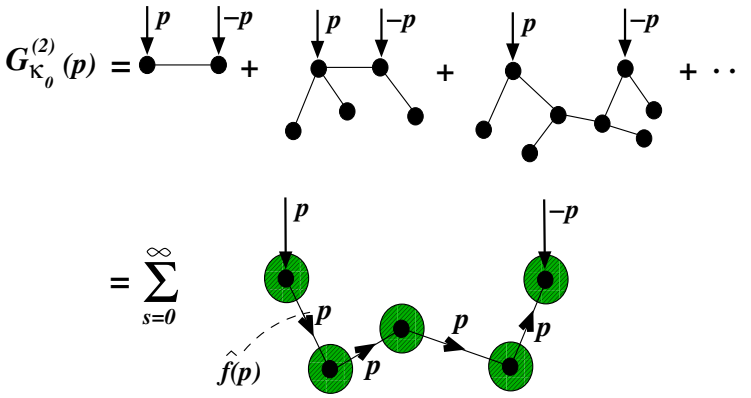
$$\kappa_0 \frac{\partial}{\partial\kappa_0} Z_{\kappa_0} = Z_{\kappa_0,\ell=1} = \frac{V}{\hat{f}(0)} b \tag{5.93}$$

から、$\ell = 0$ の分配関数を求めることができ、N の期待値も合わせて、

$$Z_{\kappa_0} = \frac{V}{\hat{f}(0)} \left(e^b - 1\right), \qquad \langle N \rangle_0 = \frac{b}{e^b - 1} \sim \frac{1}{e-1} \tag{5.94}$$

と共に有限な値となっている。つまり $\ell = 0, 1$ の GCE は κ を臨界値に近づけることで、CE の N が無限大になる極限を調べられないのである。このことから PB では、やはり普通の GCE は悪い GCE であると言える。

以下しばらくは、ハウスドルフ次元を求めたいので二点関数を考える。二点関数は右図一行目のようなグラフの和である。運動量が入ってきているところ (矢印のついた点) が固定されている点である。このように書いたとき、二点をつなぐ経路は一つしかないく一意に定まる。その経路についてグラフを分類し直すことを考える。すると二点を結ぶ経路が通る結合の数についての和に書き換えることにより二行目のように、一点関数と生の結合によって表された無限和になる (右図は $s=4$ の場合を書いてある)。よって、



$$G^{(2)}_{\kappa_0}(p) = \sum_{s=0}^{\infty} \hat{f}(0)^s \left(G^{(1)}_{\kappa_0}\right)^{s+1} \tag{5.95}$$

$$= G^{(1)}_{\kappa_0} \frac{1}{1-\hat{f}(p)G^{(1)}_{\kappa_0}} \tag{5.96}$$

$$= \frac{b}{\hat{f}(0)} \frac{1}{1-bh(p)} \tag{5.97}$$

$$= \frac{b}{\hat{f}(0)} \frac{1}{H-\delta bh(p)} \tag{5.98}$$

が二点関数である[18]。式 (5.94) と合わせて規格化された二点関数を求めると、

$$g^{(2)}_{\kappa_0}(p) = \frac{1}{V} \frac{b}{e^b-1} \frac{1}{H(p)+\delta bh(p)} \tag{5.99}$$

$$= \frac{1}{V} \frac{1}{e-1} \frac{1}{H(p)+\delta b} \left[1+O(\delta b, H)\right] \tag{5.100}$$

で、$H \sim a_0^2 p^2/2$ なので、$g^{(2)}_{\kappa_0}(p) \sim 1/p^2$ となっている。しかしこれは正しくないので本当の二点関数を求めよう。まず分配関数は $\ell=1$ の場合から微分して求める。ランダムウォークの場合と同様に重要な項だけを残していくことで、

$$Z_{\kappa_0,\ell\geq 2} = \left(\kappa_0 \frac{\partial}{\partial \kappa_0}\right)^{\ell-1} Z_{\kappa_0,\ell=1} \tag{5.101}$$

$$= \left(\frac{b}{1-b}\frac{\partial}{\partial b}\right)^{\ell-1} \frac{V}{\hat{f}(0)} b \tag{5.102}$$

$$= \frac{V}{\hat{f}(0)} \frac{(2\ell-5)!!}{\delta b^{2\ell-3}} \left[1+O(\delta b)\right] \tag{5.103}$$

[18] $s=0$ の項は対称性のファクター $\frac{1}{2}$ だけずれているが重要ではないので無視する。

となる。$\ell \geq 2$ に対しては、分配関数が $\delta b \to 0$ と共に発散している。実際、$\langle N \rangle_{\ell\geq 2} = Z_{\kappa_0,\ell+1}/Z_{\kappa_0,\ell} = (2\ell-3)/\delta b^2$ と正しい GCE になっている。つまり N の無限大極限は、$\delta b \sim \sqrt{\delta\kappa}$ を調整することでコントロールできるようになっている。規格化されていない二点関数の方は $\ell = 0$ から微分をする。結果だけ書くと、

$$G^{(2)}_{\kappa_0,\ell\geq 2}(p) = \frac{1}{\hat{f}(0)}\frac{(2\ell-3)!!}{\delta b^{2\ell-1}}\frac{1}{(H(p)+\delta b)^2}\left(1+2\frac{\delta b}{H(p)+\delta b}+\frac{6(\ell-2)}{2\ell-3}\left(\frac{\delta b}{H(p)+\delta b}\right)^2\right) \times\left[1+O\left(H(p),\delta b,\left(\frac{\delta b}{H(p)+\delta b}\right)^3\right)\right] \tag{5.104}$$

となっていて、規格化された二点関数は、

$$g^{(2)}_{\kappa_0,\ell\geq 2}(p) = \frac{1}{V}\frac{2\ell-3}{\delta b^2}\frac{1}{H(p)^2}\left(1-3\frac{\delta b^2}{2\ell-3}\frac{1}{H(p)^2}\right) \tag{5.105}$$

$$= \frac{\langle N\rangle_\ell}{V}\frac{1}{H(p)^2}\left(1-3\frac{1}{\langle N\rangle_\ell}\frac{1}{H(p)^2}\right) \tag{5.106}$$

$$= \frac{\langle N\rangle_\ell}{V}\frac{1}{H(p)^2+3/\langle N\rangle_\ell} \tag{5.107}$$

と求まった[19]。$p > 1/(a_0 N^{1/4})$ の領域では、二点関数は $1/p^4$ のように振る舞うので、(二番目の定義での) ハウスドルフ次元は $d_{\rm H}^{(2)} = 4$ となる。BP では $\ell \geq 2$ は全て同じ振る舞いをするが、$\ell = 0, 1$ は異なっている。これは小さな ℓ では分配関数の和をとるときに N が小さい領域が支配的になっているからである。このような GCE では CE の系を大きくした極限について知ることはできない。

最後に三点以上の相関関数を見ておこう。$\ell = 0$ の GCE では、三点関数は二点関数と一点関数で書かれる (やることは今までと同じである)。

$$G^{(3)}_{\kappa_0}(p,q) = G^{(2)}_{\kappa_0}(p)\, G^{(2)}_{\kappa_0}(q)\, G^{(2)}_{\kappa_0}(-p-q)\, \left(G^{(1)}_{\kappa_0}\right)^{-2} \tag{5.108}$$

また今考えている領域は、

$$a_0 \ll x < a_0 N^{14} \quad \text{or} \quad \delta b < H(p) \ll 1 \tag{5.109}$$

[19] $\ell = 1$ の場合には、

$$g^{(2)}_{\kappa_0,\ell=1}(p) = \frac{\hat{f}(0)}{bV}G^{(2)}_{\kappa_0,\ell=1}(p) = \frac{1}{V}\frac{1}{\delta b}\frac{1}{(H(p)+\delta b)^2}\left[1+O(\delta b, H(p))\right] \simeq \frac{\langle N\rangle_1}{V}\frac{1}{(H(p)+1/\langle N\rangle_1)^2}$$

なので、式 (5.108) を $(\kappa_0 \frac{\partial}{\partial \kappa_0})^\ell$ で微分して $\ell \geq 1$ の三点関数を求めるときには、

$$G^{(2)}_{\kappa_0}(p) \sim \frac{b}{H(p)}, \qquad G^{(1)}_{\kappa_0} \sim b \tag{5.110}$$

$$G^{(2)}_{\kappa_0,\ell\geq 1}(p) \sim \frac{1}{\delta b\, H(p)^2}, \qquad G^{(1)}_{\kappa_0,\ell\geq 1} \sim \frac{1}{\delta b} \tag{5.111}$$

より、一回目の微分は二点関数にかかるものが一番の寄与を与える。二回目の微分からは一回目に微分して出てきた $1/\delta b$ にかかるものが支配的になるので、結局微分はすべてただ一つの二点関数にかかることになる。

$$\begin{aligned} G^{(3)}_{\kappa_0,\ell\geq 1}(p,q) \simeq\ & G^{(2)}_{\kappa_0,\ell\geq 1}(p)\, G^{(2)}_{\kappa_0}(q)\, G^{(2)}_{\kappa_0}(-p-q)\, \left(G^{(1)}_{\kappa_0}\right)^{-2} \\ & + G^{(2)}_{\kappa_0}(p)\, G^{(2)}_{\kappa_0,\ell\geq 1}(q)\, G^{(2)}_{\kappa_0}(-p-q)\, \left(G^{(1)}_{\kappa_0}\right)^{-2} \\ & + G^{(2)}_{\kappa_0}(p)\, G^{(2)}_{\kappa_0}(q)\, G^{(2)}_{\kappa_0,\ell\geq 1}(-p-q)\, \left(G^{(1)}_{\kappa_0}\right)^{-2} \end{aligned} \tag{5.112}$$

よって三点関数はそのプロパゲーターのうち二つは $1/p^2$ で、一つだけ $1/p^4$ を使うようになっている。これは ϕ^3 スカラー場の理論と比較できて、

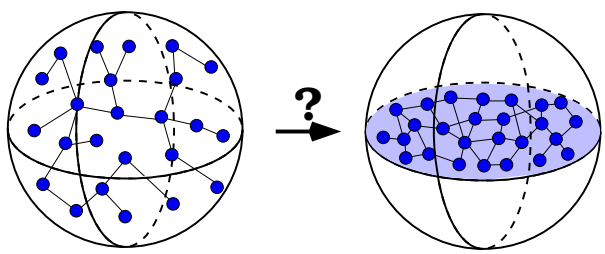
$$(\text{BP での三点関数}) = \left(\begin{array}{c} \phi^3 \text{スカラー場の理論で tree level だけを考え、} \\ \text{一つだけ mass insertion をした三点関数} \end{array} \right) \tag{5.113}$$

と対応付けられる。さらに多点の相関関数においても、今考えている領域では三点の頂点が支配的になるため全く同じ対応が成り立つ。

5.3 toward more realistic models

前副節で、時空点の有効作用の簡略化されたモデルとして、BP を詳しく調べた。そして BP の点の集合はハウスドルフ次元 4 となることも分かった。しかし、BP は 2 点間の相互作用が球対称的であり、他の結合の方向は気にしないので 10 次元に広がる方に落ち着き、$SO(10)$ 対称性は破れることはない。結合同士の相対的な角度依存性は 8 重結合の方には含まれており、1 ループの範囲で $SO(10)$ 対称性の破れが見えるとすると、やはり 8 重結合の影響をうまく取り込んでいかなければならない。完全に取り入れるのは非常に困難であるので、なんらかの近似的なモデルを作って定性的な性質を調べねばならないだろう。[5] では、いくつかのモデルが議論されている。

一方、ハウスドルフ次元に目を向けてみる。この次元というのは、点の集合をどのぐらいまで潰すと大体一定の密度となっているかを表すものである。もし BP が時空点のダイナミクスを第 0 近似としてうまく捉えていたとすると、そこに点を畳み込む方に働く摂動が加わることで



一気に 4 次元の時空が実現する可能性を
含んでいる。つまり 8 重結合を少しだけスパイスとして入れれば、全体ががらりと変わることが有り得るかもしれない。

まだ 4 次元時空の出現を満足に示してはいないのだが、このようなシナリオによって 10 次元から 4 次元時空がダイナミカルに生成されるというのは、興味深いことである。しかも、(もしかすると) もう一歩で 4 次元が示されるのかもしれない。そのために、いかにうまいモデルをつくるかというのは、これからの問題である。例えば、8 重結合を取り入れる方向では、(SYM が存在する次元として) 一つ下がった 6 次元ではスピナーの次元が半分になるので少しは簡単かもしれない。また、対角成分ではなく、本当に固有値を扱うアプローチをするならば、慣性能率等の秩序パラメーターの期待値が重要になってくる。IIB MM は N を有限にしておけば、自由度は大きいにしても有限なので、計算機を使った解析も大きな役割を果たすと思われる。

6 conclusion

本論文では大きく二つのこと、2 次元面上の関数の行列正則化、そして IIB MM について説明をしてきた。

前半で論じた正則化は、APD(のみ) を対称性として持つ 2 次元面上の関数に対する正則化であった。そしてこの正則化が membrane 理論と弦理論の両方に適応可能であることが分かった。しかし、この二つの理論への適応の仕方には大きな差異がある。IIB 型超弦理論に対しては、world volume, target superspace 両方ともが共変的なままで適応でき、正則化後の理論は美しいものであった。しかし membrane に対しては、world volume では時間を特別視し、target space はライトコーンにとっていた。これは不満が残る部分である。そこで、supermembrane でも共変性を保ったまま、行列 (のような) 正則化ができないだろうか、という疑問がわく。これは [14] 等で論じられているが、まだうまく行ってはいない。2 次元面の時にカギを握っていた APD 対称性が、3 次元面になっても重要であるに違いないが、ゲージパラメーターが (2 次元面の時の) 一つから二つに増えていることは非常に大きな違いである。また κ-symmetry も固定しないまま正則化が行えるのか、というのも良く分からない。はたして行列正則化は 2 次元の特殊事情なのか、それとも幅広く一般化できるものなのか、面白そうな問題である。

後半の IIB MM では、まず摂動的弦理論との関係として LCSFT との驚くべき一致について説明した。その後で構成的定式化として期待される性質である時空のダイナミカルな生成のシナリオについて議論した。しかし、構成的定式化として期待されることはまだまだたくさんある。その中の幾つかは [15] で議論されている。たとえば、時空の生成のところでバックグラウンドとして対角の行列をとったが、それを m 次元のブロックにすることで SU(m) のゲージ対称性が有効作用に残るというシナリオや、重力については作用にある SU(N) 対称性の部分群である置換群が、低エネルギーで一般座標変換不変性となる可能性などが指摘されている。時空と物質が一つの行列に入っていたのと同様に、ゲージ対称性と一般座標変換不変性がともに SU(N) 不変性から出てくるのは驚きと同時に大きな可能性を感じさせる。しかし、LCSFT の時もそうであったが、対称性に頼った議論はかなり強力であるが、対称性から離れた議論は非常に難しい。はたして、低エネルギーでは我々が良く知っている場の理論を再現するのかについてはまだ分かっていない。とにかく、IIB MM は構成的定式化の完成に向けた大きな一歩である。

7 acknowledgments

この論文を精読して頂いた担当教官の川合光先生に感謝いたします。川合先生には、この論文の内容に関わらず、いろいろな質問に親切な、しかも非常に深く示唆に富んだ回答、助言を与えて頂きました。また、素粒子論研究室の皆さんにも様々な影響を受け、勉強の励みになりました。本当にありがとうございました。

A notation

A.1 miscellaneous

ミンコフスキーメトリック

$$\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, +1, \cdots, +1) \tag{A.1}$$

対称化、反対称化

添字に $(\cdots)$、または $[\cdots]$ を付けることで、完全対称化、または完全反対称化を表す例えば、

$$u^{(i}v^{j)} \triangleq \frac{1}{2}(u^iv^j + u^jv^i) \tag{A.2}$$

$$\begin{aligned} u^{[i}v^jw^{j]} \triangleq \frac{1}{6}(&u^iv^jw^k + u^jv^kw^i + u^kv^iw^j \\ &- u^kv^jw^i - u^jv^iw^k - u^iv^kw^j) \end{aligned} \tag{A.3}$$

のようなものである。これから分かるように一般には次の約束で決める。

$$v_1^{(i_1}\cdots v_n^{i_n)} = \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} v_1^{i_{\sigma(1)}}\cdots v_n^{i_{\sigma(n)}} \tag{A.4}$$

$$v_1^{[i_1}\cdots v_n^{i_n]} = \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma) v_1^{i_{\sigma(1)}}\cdots v_n^{i_{\sigma(n)}} \tag{A.5}$$

この重みの取り方の良い点は、完全対称テンソル $S_{i_1\cdots i_n}$ 、完全反対称テンソル $A_{i_1\cdots i_n}$ と足をつぶすと、

$$v_1^{(i_1}\cdots v_n^{i_n)} S_{i_1\cdots i_n} = v_1^{i_1}\cdots v_n^{i_n} S_{i_1\cdots i_n} \tag{A.6}$$

$$v_1^{[i_1}\cdots v_n^{i_n]} A_{i_1\cdots i_n} = v_1^{i_1}\cdots v_n^{i_n} A_{i_1\cdots i_n} \tag{A.7}$$

となることで、これを重み 1 の対称化、反対称化と言う。

たくさん足のクロネッカーデルタ

足のたくさんあるクロネッカーデルタは次の式で定義する。

$$\delta^{\mu_1\cdots\mu_p}_{\nu_1\cdots\nu_p} \triangleq p!\delta^{[\mu_1}_{\nu_1}\cdots\delta^{\mu_p]}_{\nu_p} \tag{A.8}$$

つまり、上足、下足それぞれが完全反対称であり、$\delta^{123\cdots p}_{123\cdots p} = 1$ となるものである。

A.2 spinor of SO(10,1) or SO(9,1)

ガンマ行列

$$\{\Gamma^\mu, \Gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \qquad (\mu, \nu = 0, \cdots, 10) \tag{A.9}$$

$$\Gamma^0 \cdots \Gamma^{10} = \mathbf{1}_{32} \tag{A.10}$$

SO(9,1) の場合は、$\bar{\Gamma} \triangleq \Gamma^{10} = \Gamma^0 \cdots \Gamma^9$ はカイラリティー行列とする。

SO(10,1) または SO(9,1) の場合には、ガンマ行列は全て実 (real) にとることができる。そのときは Γ^0 が反対称、その他は全て対称になる。実際に使う具体的な形は次の 3 つである。

(1) SO(9,1) の場合のワイル射影が見やすい形

$$\Gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \ \Gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \gamma^i \\ \gamma^i & 0 \end{pmatrix}, \ \Gamma^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{A.11}$$

ここで γ^i は SO(9) のガンマ行列 (16 次元行列) で、全て実対称行列である。またそれぞれのブロックは 16 次元の行列である (例えば $1 = \mathbf{1}_{16}$)。

(2) 10 次元で light-cone 座標をとったときの SO(8) が見やすい形

$$\Gamma^0 = \left(\begin{array}{cc|cc} & & +1 & 0 \\ & & 0 & +1 \\ \hline -1 & 0 & & \\ 0 & -1 & & \end{array}\right), \ \Gamma^9 = \left(\begin{array}{cc|cc} & & +1 & 0 \\ & & 0 & -1 \\ \hline +1 & 0 & & \\ 0 & -1 & & \end{array}\right) \tag{A.12}$$

$$\Gamma^i = \left(\begin{array}{cc|cc} & & 0 & \gamma^i_{\alpha\dot{\beta}} \\ & & \tilde{\gamma}^i_{\dot{\alpha}\beta} & 0 \\ \hline 0 & \gamma^i_{\alpha\dot{\beta}} & & \\ \tilde{\gamma}^i_{\dot{\alpha}\beta} & 0 & & \end{array}\right), \ \Gamma^{10} = \left(\begin{array}{cc|cc} +1 & 0 & & \\ 0 & +1 & & \\ \hline & & -1 & 0 \\ & & 0 & -1 \end{array}\right) \tag{A.13}$$

ここで $\gamma^i, \tilde{\gamma}^i$ はお互いに転置行列である SO(8) のガンマ行列 (8 次元行列) で、全て実行列である。また SO(8) でのカイラリティー行列は Γ^9 になっていて、カイラリティーの正負に応じて $\alpha, \dot{\alpha}$ と足を書いている。ライトコーン座標で書くと、$C = \Gamma^0$ ととって、

$$C\Gamma^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} C(\Gamma^0 + \Gamma^9) = -\sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \tag{A.14}$$

$$C\Gamma^- = \frac{1}{\sqrt{2}} C(\Gamma^0 - \Gamma^9) = -\sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \tag{A.15}$$

である。

(3) supermembrane の κ-symmetry の固定が見やすい形。または、$\mathrm{SO}(10,1)$ でライトコーンをとったときの残りの $\mathrm{SO}(9)$ が分かりやすい形。

$$\Gamma^i = \begin{pmatrix} \gamma^i & 0 \\ 0 & -\gamma^i \end{pmatrix},\ \Gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \Gamma^{10} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{A.16}$$

ライトコーンでは、

$$\Gamma^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Gamma^0 + \Gamma^{10}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \tag{A.17}$$

$$\Gamma^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Gamma^0 - \Gamma^{10}) = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{A.18}$$

となる。上の (1) のガンマ行列との関係は、

$$\Gamma_{\text{here}} = R\Gamma_{\text{above}}\,{}^tR \tag{A.19}$$

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad : \text{直交行列} \tag{A.20}$$

マヨラナスピナー

- 荷電共役行列 C の性質

$$C\Gamma^\mu = -\,{}^t\Gamma^\mu C \tag{A.21}$$

$$C + {}^tC = 0 \tag{A.22}$$

ガンマ行列を全て実行列にとると、$C = \Gamma^0$ とできる。

- マヨラナ条件

$${}^t\psi\, C = \overline{\psi} \triangleq \psi^\dagger\Gamma^0 \tag{A.23}$$

この式から、$C = \Gamma^0$ の場合には、マヨラナスピナーは本当に実になる。

- 足の付き方は次のようにする。

$$\psi^\alpha, \quad \Gamma^\alpha{}_\beta, \quad C_{\alpha\beta}, \quad \Gamma_{\alpha\beta} \triangleq C_{\alpha\gamma}\Gamma^\gamma{}_\beta, \tag{A.24}$$

ガンマ行列についての雑多な式

$$\Gamma^{\mu_1\cdots\mu_p} \triangleq \Gamma^{[\mu_1}\cdots\Gamma^{\mu_p]} \tag{A.25}$$

$$\Gamma^{\mu_1\cdots\mu_p}\Gamma_\nu = \Gamma^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_\nu + p\,\Gamma^{[\mu_1\cdots\mu_{p-1}}\eta^{\mu_p]}{}_\nu \tag{A.26}$$

$$\Gamma^\nu\Gamma^{\mu_1\cdots\mu_p}\Gamma_\nu = (-)^p(d-2p)\Gamma^{\mu_1\cdots\mu_p} \tag{A.27}$$

$$\mathrm{tr}(\Gamma^{\mu_1\cdots\mu_p}\Gamma_{\nu_1\cdots\nu_q}) = (-)^{\frac{1}{2}p(p-1)}\delta^p{}_q\delta^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_p}\mathrm{tr}\,1 \tag{A.28}$$

スピナーの二次式に関する式

$$(\overline{\psi}_1\Gamma^{\mu_1\cdots\mu_p}\psi_2)^\dagger = -(-)^{\frac{p(p+1)}{2}}\overline{\psi}_2\Gamma^{\mu_1\cdots\mu_p}\psi_1 \tag{A.29}$$

$$\overline{\psi}_1\Gamma^{\mu_1\cdots\mu_p}\psi_2 = (-)^{\frac{p(p+1)}{2}}\overline{\psi}_2\Gamma^{\mu_1\cdots\mu_p}\psi_1 \tag{A.30}$$

$$(\overline{\psi}_1\Gamma^{\mu_1\cdots\mu_p}\psi_2)^\dagger = -\overline{\psi}_1\Gamma^{\mu_1\cdots\mu_p}\psi_2 \tag{A.31}$$

ただし下の二つはマヨラナフェルミオンに対してのみ成り立つ式である。

A.3 Fierz 変換

- SO(s,t)($s+t=\text{odd} \cong 2n+1$)：ガンマ行列の次元は $\mathrm{tr}\,1 = 2^n$

$$\overline{\psi}_1\psi_4\,\overline{\psi}_3\psi_2 = -\frac{1}{\mathrm{tr}1}\sum_{p=0}^{n=(d-1)/2}(*)_p \tag{A.32}$$

$$(*)_p \cong (-)^{\frac{1}{2}p(p-1)}\frac{1}{p!}\overline{\psi}_1\Gamma^{\mu_1\cdots\mu_p}\psi_2\cdot\overline{\psi}_3\Gamma_{\mu_1\cdots\mu_p}\psi_4 \tag{A.33}$$

- SO(s,t) ($s+t=\text{even} \cong 2n$)：ガンマ行列の次元は $\mathrm{tr}\,1 = 2^n$

$$\overline{\psi}_1\psi_4\,\overline{\psi}_3\psi_2 = -\frac{1}{\mathrm{tr}1}\sum_{p=0}^{d}(*)_p \tag{A.34}$$

- ワイルスピナーに対して。
  ただし、ここでは $\overline{\psi}$ は普通のディラック共役 $\psi^\dagger D$ である (D はディラック共役行列)。

$$\bar{\Gamma}\psi_1 = \eta_1\psi_1, \qquad \bar{\Gamma}\psi_4 = (-)^t\eta_1\psi_4 \tag{A.35}$$

$$\bar{\Gamma}\psi_2 = \eta_2\psi_2, \qquad \bar{\Gamma}\psi_3 = (-)^t\eta_2\psi_3 \tag{A.36}$$

とする。ここでカイラリティー行列は、

$$\bar{\Gamma} \cong e^{i\frac{\pi}{4}(s-t)}\Gamma^1\cdots\Gamma^d \tag{A.37}$$

と決めた。p についての和は、

$$(-)^p = (-)^t\eta_1\eta_2 \tag{A.38}$$

を満たすところのみ残るので、結局

$$\overline{\psi}_1\psi_4\,\overline{\psi}_3\psi_2 = -\frac{1}{\mathrm{tr}\,1}\sum_{\substack{p\le d\\(-)^p=(-)^t\eta_1\eta_2}}(*)_p \tag{A.39}$$

$$= -\frac{1}{(\mathrm{tr}1)/2}\sum_{\substack{p<n=d/2\\(-)^p=(-)^t\eta_1\eta_2}}(*)_p \tag{A.40}$$

$$-\frac{1}{\mathrm{tr}1}\sum_{\substack{p=n=d/2\\(-)^p=(-)^t\eta_1\eta_2}}(*)_p \tag{A.41}$$

となる。

- SO(9,1) の場合を書いておくと、次のようになっている。

$$\eta_1\eta_2=+1\text{ のとき、}\quad \overline{\psi}_1\psi_4\,\overline{\psi}_3\psi_2 = -\frac{1}{16}\sum_{p=1,3}(*)_p - \frac{1}{32}\sum_{p=5}(*)_p \tag{A.42}$$

$$\eta_1\eta_2=-1\text{ のとき、}\quad \overline{\psi}_1\psi_4\,\overline{\psi}_3\psi_2 = -\frac{1}{16}\sum_{p=0,2,4}(*)_p \tag{A.43}$$

A.4 Lie algebra

A.4.1 sigma matrices

2 行 2 列のシグマ行列は次の通り。

$$\sigma^1 \fallingdotseq \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad \sigma^2 \fallingdotseq \begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\quad \sigma^3 \fallingdotseq \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} \tag{A.44}$$

$$\sigma^+ \fallingdotseq \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma^1+i\sigma^2) = \begin{pmatrix}0&\sqrt{2}\\0&0\end{pmatrix} \tag{A.45}$$

$$\sigma^- \fallingdotseq \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma^1-i\sigma^2) = \begin{pmatrix}0&0\\\sqrt{2}&0\end{pmatrix} \tag{A.46}$$

これらの間の交換関係は、

$$-i\left[\,\sigma^a,\sigma^b\,\right] = 2\epsilon^{abc}\sigma^c \tag{A.47}$$

$$\left[\,\sigma^3,\sigma^\pm\,\right] = \pm 2\sigma^\pm \tag{A.48}$$

$$\left[\,\sigma^+,\sigma^-\,\right] = 2\sigma^3 \tag{A.49}$$

となる。その他の関係式としては、

$$\left\{\,\sigma^a,\sigma^b\,\right\} = 2\delta^{ab} \tag{A.50}$$

$$\mathrm{tr}(\sigma^a\sigma^b) = 2\delta^{ab} \tag{A.51}$$

などがある。

A.4.2 SU(2)

SU(2) の生成子 $T^A(A = 1, 2, 3)$ の規格化は $\underline{2}$ 表現で、上のシグマ行列になるように、つまり

$$\underset{\underline{2}}{\mathrm{tr}}(T^A T^B) = \delta^{AB} \tag{A.52}$$

で定める。すると交換関係は、

$$-i \left[T^A, T^B \right] = 2\epsilon^{ABC} T^C \tag{A.53}$$

である。一般に $\underline{N}$ 表現では、

$$T^A T^A = c_2(N) \cdot \mathbf{1}_N \tag{A.54}$$

$$c_2(N) = N^2 - 1 \tag{A.55}$$

$$\underset{\underline{N}}{\mathrm{tr}}(T^A T^B) = \frac{1}{3} N(N^2 - 1) \tag{A.56}$$

A.4.3 Lie algebra

(コンパクト)Lie 代数の構造定数は、

$$-i \left[T^A, T^B \right] = f^{ABC} T^C \tag{A.57}$$

で定める。生成子を規格直交、

$$\mathrm{tr}(T^A T^B) = k\ \delta^{AB} \tag{A.58}$$

(k は適当な定数) ととることで f を完全反対称にできる。

$$f^{ABC} = \frac{-i}{k}\ \mathrm{tr}\left(\left[T^A, T^B \right] T^C \right) \tag{A.59}$$

A.5 differential form

微分形式について、基本的な約束だけ書いておく。

p-form

$$v_{[p]} = \frac{1}{p!} dx^{i_p} \cdots dx^{i_1} v_{i_1 \cdots i_p} \tag{A.60}$$

ウエッジ $\wedge$ は全て省略する。

外微分:d

$$\begin{aligned} dv_{[p]} =& \frac{1}{p!} dx^{i_{p+1}} \cdots dx^{i_2} dx^{i_1} \partial_{i_1} v_{i_2 \cdots i_{p+1}} \\ =& \frac{1}{(p+1)!} dx^{i_{p+1}} dx^{i_p} \cdots dx^{i_1} \partial_{[i_1} v_{i_2 \cdots i_{p+1}]} \end{aligned} \tag{A.61}$$

$$d(v_{[p]} u_{[q]}) = v_{[p]} (du_{[q]}) + (-)^q (dv_{[p]}) u_{[q]} \tag{A.62}$$

右微分であることに注意

ϵ tensor(完全反対称テンソル)

$$\epsilon^{01 \cdots p} = +1 \tag{A.63}$$

A.6 harmonic oscillator

調和振動子のまとめ。

- 生成消滅演算子

$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (p + i\omega q), \qquad p = \sqrt{\frac{\omega}{2}} (a^\dagger + a) \tag{A.64}$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (p - i\omega q), \qquad q = \frac{1}{\sqrt{2\omega} i} (a^\dagger - a) \tag{A.65}$$

$$\left[a, a^\dagger \right] = 1 \tag{A.66}$$

- ハミルトニアン

$$H = \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{2} \omega^2 q^2 \tag{A.67}$$

$$= \omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) \tag{A.68}$$

- 固有状態、固有値

$$a | 0 \rangle = 0 \quad : \quad | 0 \rangle \text{の定義} \tag{A.69}$$

$$| n \rangle \triangleq \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^\dagger)^n | 0 \rangle \tag{A.70}$$

$$H | n \rangle = \omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \tag{A.71}$$

- その他

$$a | n \rangle = \sqrt{n} | n - 1 \rangle \tag{A.72}$$

$$a^\dagger | n \rangle = \sqrt{n+1} | n + 1 \rangle \tag{A.73}$$

$$\langle n | m \rangle = \delta_{nm} \tag{A.74}$$

B how to deal with complex spinor

2.4 節で supermembrane を扱うときに、スピナーは全てマヨラナスピナーとした。しかし空間次元と時間次元の差が 3、4、5 の時にはミニマルスピナーがワイルまたはディラックである。複素スピナーのままでもよいのだが、本文の議論をそのまま生かすためにはマヨラナに組み直したほうが良い。その取り扱いを述べる。

この節では、普通の (既約な) ガンマ行列を γ^μ と書く。またスピナー θ について、ディラック共役を $\overline{\theta} \triangleq \theta^\dagger D$、荷電共役を $\theta_C \triangleq {}^tC^{-1}\,{}^t\overline{\theta}$ と書く。ここで D, C は次の性質を持った行列である。

$$\gamma^{\mu\dagger} D = \delta \cdot D\gamma^\mu \tag{B.1}$$

$${}^t\gamma^\mu C = \epsilon \cdot C\gamma^\mu \tag{B.2}$$

δ, ϵ は考えている次元によった符合である。すると、マヨラナスピナーが 存在しない 条件は、$(\theta_C)_C = -\theta$ なので、$\overline{\theta} = {}^t\theta_C C$, $\overline{\theta_C} = -\,{}^t\theta C$ と符合が逆になる。

マヨラナスピナーを作るには、θ と θ_c を二階建てにすれば良い。そしてこの表現におけるガンマ行列を大文字で書くことにする。

$$\Theta \triangleq \begin{pmatrix} \theta \\ \theta_C \end{pmatrix}, \qquad \Gamma^\mu \triangleq \begin{pmatrix} \gamma^\mu & \\ & \gamma^\mu \end{pmatrix} \tag{B.3}$$

二階建てにしたことから charge conjugation 行列としては幾つか可能性があるが、ここでは次のようなものを考える。

$$\mathcal{C}_\eta = \begin{pmatrix} & -\eta\, C \\ C & \end{pmatrix} \tag{B.4}$$

η も適当な符合である。するとガンマ行列の転置は、${}^tC = \zeta\, C$ として、

$${}^t(\mathcal{C}_\eta \Gamma^{\mu_1\cdots\mu_p}) = -\eta\cdot\zeta\ \epsilon^p (-)^{\frac{p(p-1)}{2}} \mathcal{C}_\eta \Gamma^{\mu_1\cdots\mu_p} \tag{B.5}$$

となる。ごちゃごちゃと符合が付いているが、重要なのは η によってガンマ行列の対称性が変えられることである。本文で述べたように、p-brane を考えているときには、1 本足と p 本足のガンマ行列を対称にしたいので、それぞれに $\mathcal{C}_\eta$ と $\mathcal{C}_{\eta'}$ を持ってきて、$h_{[p+2]}$ を次のように作る。

$$h_{[p+2]} = \frac{(-)^{p+1}}{2!p!} \Pi^{\mu_p} \cdots \Pi^{\mu_1} \cdot i d\Theta\, \mathcal{C}_{\eta'}\, \Gamma_{\mu_1\cdots\mu_p} d\Theta \tag{B.6}$$

$$\Pi^\mu = dX^\mu - i\Theta\, \mathcal{C}_\eta \Gamma^\mu d\Theta \tag{B.7}$$

するとほとんど本文と同様に

$$0 = (\mathcal{C}_\eta \Gamma^{\mu_1})_{(\alpha\beta} \left(\mathcal{C}_{\eta'} \Gamma_{\mu_1\cdots\mu_p}\right)_{\gamma\delta)} \tag{B.8}$$

から条件 (2.131),(2.132) が出てくる。これで 6 次元のストリング等も κ-symmetry を持つことが証明できた。

C super Yang-Mills in (9+1)dim

超対称ヤン-ミルズ理論は、$(9+1)$ 次元でマキシマルである。ここではその理論について、作用、超対称変換を与える。簡単のため $\mathrm{SU}(N)$ でやる。

まず、$(9+1)$ 次元では、マヨラナワイル (MW) スピナーが 16 成分であることから、ベクトル場 1 つと MW スピナー 1 つずつで自由度が合うことが分かる。ベクトル場はゲージ群のアジョイント表現に属するので、相棒のフェルミオンも同じである。よって、作用は次のようになる。

$$S_{\mathrm{SYM}_{10}} = -\frac{1}{g_{\mathrm{YM}}^2}\int d^{10}x\ \mathrm{tr}\left(\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{i}{2}\overline{\lambda}\Gamma^{\mu}D_{\mu}\lambda\right) \tag{C.1}$$

ここで、

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i\,[\,A_\mu\,,A_\nu\,] \\ &= -i\left[\,i\vec{\partial}_\mu + A_\mu\,, i\vec{\partial}_\nu + A_\nu\,\right] \end{aligned} \tag{C.2}$$

$$\begin{aligned} D_\mu\lambda &= \partial_\mu\lambda - i\,[\,A_\mu\,,\lambda\,] \\ &= -i\left[\,i\vec{\partial}_\mu + A_\mu\,,\lambda\,\right] \end{aligned} \tag{C.3}$$

と定義した。$\vec{\partial}$ はその右側にある関数は全て微分する微分演算子である。ゲージ変換は、

$$(i\vec{\partial}_\mu + A_\mu) \to g(x)(i\vec{\partial}_\mu + A_\mu)g(x)^{-1} \tag{C.4}$$

$$\lambda \to g(x)\lambda g(x)^{-1} \tag{C.5}$$

で、無限小変換 $g(x) = e^{ia(x)}$ で書けば

$$\delta A_\mu = \partial_\mu a(x) - i\,[\,A_\mu\,,a(x)\,] = D_\mu a(x) \tag{C.6}$$

$$\delta\lambda = -i\,[\,\lambda, a(x)\,] \tag{C.7}$$

である。一方、超対称変換は、定数のマヨラナワイルスピナー ϵ をパラメーターとして、

$$\delta A_\mu = -\frac{i}{2}\overline{\epsilon}\Gamma_\mu\lambda \tag{C.8}$$

$$\delta\lambda = \frac{1}{4}F_{\mu\nu}\Gamma^{\mu\nu}\epsilon \tag{C.9}$$

$$\delta F_{\mu\nu} = i\overline{\epsilon}\Gamma_{[\mu}D_{\nu]}\lambda \tag{C.10}$$

と書ける。これが上の作用の対称性となるのは式 (2.124) が $p=1$ で成り立つ $3,4,6,10$ 次元に限られる。

超対称変換の交換子は次のようになっている。

$$[\,\delta_1\,,\delta_2\,]\,A_\mu = \frac{i}{2}\overline{\epsilon_2}\Gamma^\nu\epsilon_1 F_{\nu\mu} \tag{C.11}$$

$$[\,\delta_1\,,\delta_2\,]\,\lambda = \frac{i}{2}\overline{\epsilon_2}\Gamma^\nu\epsilon_1 D_\nu\lambda + (\lambda\text{の運動方程式に比例する項}) \tag{C.12}$$

λ に対する式は、

$$\delta_1\delta_2\lambda = \delta_1\left(\frac{1}{4}F_{\mu\nu}\Gamma^{\mu\nu}\epsilon_2\right) \tag{C.13}$$

$$= \frac{i}{4}\epsilon_1\Gamma_\mu D_\nu\lambda\cdot\Gamma^{\mu\nu}\epsilon_2 \tag{C.14}$$

$$= -\frac{i}{4}\epsilon_1\Gamma_\mu D_\nu\lambda\cdot\Gamma^\nu\Gamma^\mu\epsilon_2 \ + \frac{i}{4}\epsilon_1\not{D}\lambda\cdot\epsilon_2 \tag{C.15}$$

とした後で、最左辺の第一項に Fierz 変換をすると、$p=5$ の項は簡単に落ちて、$p=3$ の項は、$\epsilon_{1,2}$ の反対称化から消えるので、簡単に求まる。

$c^\mu = \frac{i}{2}\overline{\epsilon_2}\Gamma^\mu\epsilon_1, a(x) = -c^\mu A_\mu$ と書くと、

$$[\,\delta_1\,,\delta_2\,] = c^\mu\partial_\mu + \delta_a \tag{C.16}$$

と書ける。ここで δ_a は $a(x)$ をパラメーターとする無限小ゲージ変換である。よってこのゲージ変換を無視すると、きちんと並進になっていることが分かる。

一応ユークリッド化したものを書いておくと、

$$S_{\rm E} = \frac{1}{g^2}\int d^{10}x\ \mathrm{tr}\left(\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{i}{2}\overline{\lambda}\Gamma^\mu D_\mu\lambda\right) \tag{C.17}$$

である。超対称性の形はミンコフスキーの場合と同じになっている。

D superstring action with $\mathcal{N}=2$ SUSY and κ-symmetry

この節では、2.4 節で $\mathcal{N}=1$ の supermembrane 作用を導いたやり方を $\mathcal{N}=2$ の場合に適応してみる。そのためには、出発点で superspace を作るときに、ミニマルなスピナーを二つ入れれば良い。

$$Z^M = (X^\mu, \theta^{1\alpha}, \theta^{2\alpha}) \tag{D.1}$$

実際に計算をする前に結果を予想しておくと、$p \geq 2$ の場合には式 (2.132) が $\mathcal{N}=1$ で満たされていたわけだが、これでフェルミオンが二倍に増えると右辺が二倍になり、どんな (d,p) を持ってきてもフェルミオンがボゾンよりも多くなってしまいそうである。$p=1$ の時には少し事情が違って、式 (2.131) の左辺は式 (2.132) の左辺と因子 2 だけ異なっている。これは 2 次元ではボゾンが左行きと右行きに分かれて、$\mathcal{N}=1$ は半分だけで満たすことができることに対応している。そのため $\mathcal{N}=2$ は $\mathcal{N}=1$ が可能な d と同じところで存在すると予想される。

それでは計算に移ろう。まず SUSY 変換を次で定義する。

$$\delta X^\mu = ic^i\, \overline{\epsilon^i}\Gamma^\mu\theta^i \tag{D.2}$$

$$\delta\theta^i = \epsilon^i \tag{D.3}$$

ここで $i=1,2$ は二つのフェルミオンを区別するラベルで、c^i は ±1 を取る定数である。この変換の下で不変な 1-form は、

$$\Pi^\mu = dX^\mu - ic^i\, \overline{\theta^i}\Gamma^\mu d\theta^i \tag{D.4}$$

$$\Pi^{i\alpha} = d\theta^{i\alpha} \tag{D.5}$$

であり、これの world volume への引き戻しを使ってディラック項を作る。ここは本文と同じなので省略する。違いは WZ 項に現れる。exact (p+2)-form $h_{[p+2]}$ を作るときに、$\mathcal{N}=1$ ではミニマルスピナーが一つしかなかったので全体の係数を除いて一意に決まっていた。しかし $\mathcal{N}=2$ では、スピナーの二次項を作るやり方が幾つかあり、$h_{[p+2]}$ はそれらの線形結合となる。一般には次の形を考えれば良い。

$$h_{[p+2]} = \frac{1}{2!\,p!} d^{ij}\ \Pi^{\mu_p}\cdots\Pi^{\mu_1}\ (id\overline{\theta^i}\Gamma_{\mu_1\cdots\mu_p}d\theta^j) \tag{D.6}$$

ここで、d^{ij} は線型結合を決める定数である。この $h_{[p+2]}$ が closed かどうかを調べるために $\Gamma_{\mu_1\cdots\mu_p}$ が対称な場合と反対称な場合に分ける。まず対称な場合をやる。この時には、d^{ij} も対称なので、Π^μ を変えずに対角化できる。よって、$d^{ij} = e^i\delta^{ij}$ として

$$h_{[p+2]} = \frac{1}{2!\,p!} e^i\ \Pi^{\mu_p}\cdots\Pi^{\mu_1}\ (id\overline{\theta^i}\Gamma_{\mu_1\cdots\mu_p}d\theta^i) \tag{D.7}$$

と書ける。$p=1$ の時には

$$dh_{[3]} \propto \left(c^1 d\overline{\theta^1}\Gamma^\mu d\theta^1 + c^2 d\overline{\theta^2}\Gamma^\mu d\theta^2\right)\left(e^1 d\overline{\theta^1}\Gamma_\mu d\theta^1 + e^2 d\overline{\theta^2}\Gamma_\mu d\theta^2\right) \tag{D.8}$$

となる。$(d\theta^1)^4$ と $(d\theta^1)^2(d\theta^2)^2$ の項がそれぞれ消えなければならないのだが、$(d\theta^1)^4$ の方は $\mathcal{N}=1$ と同じ関係式 (2.131) を要請する。一方 $(d\theta^1)^2(d\theta^2)^2$ の項は、次の組み合わせ

$$c^1 e^2 + c^2 e^1 \tag{D.9}$$

に比例するので、$e^1 = c^1, e^2 = -c^2$ と選べば $h_{[p+2]}$ は closed になる。

$p \geq 2$ の時の条件式は、

$$c^1 e^2 \left(\Gamma^{\mu_1}\right)_{\alpha\beta} \left(\Gamma_{\mu_1\cdots\mu_p}\right)_{\gamma\delta} - c^2 e^1 \left(\Gamma^{\mu_1}\right)_{\gamma\delta} \left(\Gamma_{\mu_1\cdots\mu_p}\right)_{\alpha\beta} = 0 \tag{D.10}$$

が必要となる。しかしこの式は $(\Gamma_\nu)^{\alpha\beta}$ を掛けると、$1 < p < (d-1)$ では

$$\mathrm{tr}\left(\Gamma_\nu \Gamma_{\mu_1\cdots\mu_p}\right) = \mathrm{tr}\left(\Gamma_{\nu\mu_1\cdots\mu_p}\right) + p\ \mathrm{tr}\left(\eta_{\nu[\mu_1}\Gamma_{\mu_2\cdots\mu_p]}\right) = 0 \tag{D.11}$$

より、$c^1 e^2 = 0$ を意味する。同様に $c^2 e^1 = 0$ も出てくるので、$e^1 = e^2 = 0$ となり、WZ 項は存在できない。よって $p \geq 2$ では κ-symmetry は無いことが分かる。

$\Gamma_{\mu_1\cdots\mu_p}$ が対称が反対称な場合には、d^{ij} は反対称なので一つしか成分はない。よって、$d^{12} = -d^{21} = e/2$ として

$$h_{[p+2]} = \frac{e}{2!\ p!}\, \Pi^{\mu_p} \cdots \Pi^{\mu_1}\ (i d\overline{\theta^i} \Gamma_{\mu_1\cdots\mu_p} d\theta^i) \tag{D.12}$$

と書ける。一般に

$$h_{[p+2]} \propto \left(dX^{\mu_1} - ic^1 \overline{\theta^1}\Gamma^{\mu_1} d\theta^1 - ic^2 \overline{\theta^2}\Gamma^{\mu_1} d\theta^2\right) d\overline{\theta^1}\Gamma_{\mu_1\cdots\mu_p} d\theta^2 \tag{D.13}$$

$$\stackrel{\nabla}{=} ic^1 d\overline{\theta^1}\Gamma^\mu d\theta^1\ d\overline{\theta^1}\Gamma^\mu \theta^2 + (1\ \mathrm{term}) \tag{D.14}$$

となり、フェルミオニック 1-form の可換性から Γ^μ が反対称の場合にはこれは消えてしまう。Γ^μ は対称であることは必用条件である。このため、$p = 1$ は却下される。

$p \geq 2$ の時には、

$$dh_{[3]} \propto \left(c^1 d\overline{\theta^1}\Gamma^\mu d\theta^1 + c^2 d\overline{\theta^2}\Gamma^\mu d\theta^2\right) d\overline{\theta^1}\Gamma_{\mu_1\cdots\mu_p} d\theta^2 \tag{D.15}$$

となっていて、$(d\theta^1)^3(d\theta^2)^1$ と $(d\theta^1)^1(d\theta^2)^3$ が別々にが消えなければならない。そのための条件は、

$$\left(\Gamma^{\mu_1}\right)_{(\alpha\beta} \left(\Gamma_{\mu_1\cdots\mu_p}\right)_{\gamma)\delta} = 0 \tag{D.16}$$

である。$(\Gamma_\nu)^{\alpha\beta}$ を掛けると、

$$\Big(\mathrm{tr}\mathcal{P} - 2(d-p-1)\Big)\Gamma_{\nu\mu_2\cdots\mu_p} - (d-p-1)(p-1)\eta_{\nu[\mu_2}\Gamma_{\mu_3\cdots\mu_p]} = 0 \tag{D.17}$$

となるが、これは満たされない。

結局、$\mathcal{N}=2$ で WZ 項が存在するのは $p=1$ の時の $d=3,4,6,10$ だけであることが分かった。κ-symmetry を確かめるのは全く同じなので省略して結果を書くと、作用は、

$$S = -T \int d^2\sigma \left(\sqrt{-M} - a\epsilon^{ab} b_{ab} \right) \tag{D.18}$$

$$b_{ab} = \partial_{[a} X^\mu \left(ic^1 \overline{\theta^1} \Gamma_\mu \partial_{b]} \theta^1 - ic^2 \overline{\theta^2} \Gamma_\mu \partial_{b]} \theta^2 \right) - c^1 c^2 \overline{\theta^1} \Gamma^\mu \partial_{[a} \theta^1 \, \overline{\theta^2} \Gamma_\mu \partial_{b]} \theta^2 \tag{D.19}$$

であり、SUSY 変換、κ-symmetry 変換は、

$$\text{SUSY} \begin{cases} \delta\theta^1 = \epsilon^1 \\ \delta\theta^2 = \epsilon^2 \\ \delta X^\mu = ic^1 \, \overline{\epsilon^1} \Gamma^\mu \theta^1 + ic^2 \, \overline{\epsilon^2} \Gamma^\mu \theta^2 \end{cases} \tag{D.20}$$

$$\kappa\text{-symmetry} \begin{cases} \delta\theta^1 = (1 - a\Gamma)\kappa^1(\sigma) \\ \delta\theta^2 = (1 + a\Gamma)\kappa^2(\sigma) \\ \delta X^\mu = -ic^1 \, \overline{\delta\theta^1} \Gamma^\mu \theta^1 - ic^2 \, \overline{\delta\theta^2} \Gamma^\mu \theta^2 \end{cases} \tag{D.21}$$

である。ここで a, c^1, c^2 は全て ± 1 である。また行列 Γ は次で定義されている。

$$\Gamma \triangleq \frac{1}{2\sqrt{-M}} \epsilon^{ab} \Pi_a^\mu \Pi_b^\nu \Gamma_{\mu\nu} \tag{D.22}$$

3.1 節の GS 作用 (3.1) にするには、$a=-1, c^1=1, c^2=-1$ とすれば良い。

E matrix regularization on two-torus

本文中では、行列正則化を議論するとき、2 次元面のトポロジーが S^2 の場合に限って話をした。ここではもう一つ具体的に正則化が構成できる T^2 のトポロジーを持つ 2 次元面を考えよう。$T^2 \simeq S^1 \times S^1$ なので、S^2 の場合よりも簡単である。

T^2 の座標は $\sigma^1, \sigma^2 \in [0, 2\pi)$ とする。固定するスカラー密度は、S^2 の場合と同じ規格化、

$$\int_0^{2\pi} d\sigma^1 \int_0^{2\pi} d\sigma^2 \omega(\sigma^1, \sigma^2) = 4\pi \tag{E.1}$$

になるように $\omega = 1/\pi$ と決めよう。

第一ステップは関数側の完全系を定めることである。これは単なるフーリエモードで、

$$y_{\ell_1 \ell_2} \triangleq e^{i\ell_1 \sigma^1} e^{i\ell_2 \sigma^2} \tag{E.2}$$

とすれば良い。規格化は $\int d^2\sigma\ \omega \left| y_{\ell_1 \ell_2} \right|^2 = 4\pi$ で決めた。これらの間のポアソンブラケットから、構造定数を次のように定める。

$$\{ y_{\ell_1 \ell_2}, y_{m_1 m_2} \} = \frac{1}{\omega} \epsilon^{ab} \partial_a y_{\ell_1 \ell_2}\ \partial_b y_{m_1 m_2} \tag{E.3}$$

$$= -\pi(\ell_1 m_2 - \ell_2 m_1)\ y_{(\ell_1 + m_1)(\ell_2 + m_2)} \tag{E.4}$$

$$\triangleq g_{\ell_1 \ell_2, m_1 m_2}{}^{n_1 n_2} y_{n_1 n_2} \tag{E.5}$$

関数側はこれで終りで、行列側に移る。$e^{i\ell_1 \sigma^1}$ には、固有値を S^1 上にほぼ一様に持った次の対角行列

$$U = \begin{pmatrix} q^0 & & & & \\ & q^1 & & & \\ & & q^2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & q^{N-1} \end{pmatrix} \tag{E.6-a}$$

を対応させることにしよう。ここで $q = \exp(2\pi i/N)$ である。$e^{i\ell_2 \sigma^2}$ に対応する行列は、やはり同じ固有値を持っていてほしいので、次のようなちょっとひねった行列を対応させよう。

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ 1 & & & & 0 \end{pmatrix} \tag{E.6-b}$$

これらの行列に対する公式を書いておくと、

$$U^N = 1, \qquad UVU^\dagger = q^{-1}V, \qquad UV = q^{-1}VU \tag{E.7}$$

$$V^N = 1, \qquad VUV^\dagger = qU, \qquad VU = qUV \tag{E.8}$$

である。U, V を使って、行列側の基底は

$$Y_{\ell_1\ell_2} \triangleq U^{\ell_1} V^{\ell_2} = q^{\ell_1\ell_2} V^{\ell_2} U^{\ell_1} \qquad \ell_1, \ell_2 = 0, 1, \cdots (N-1) \tag{E.9}$$

と書かれる。規格直交性はほとんど明らかである。それでは行列側で構造定数を求めよう。

$$-i\frac{N}{2}\left[\, Y_{\ell_1\ell_2}, Y_{m_1m_2} \,\right] = -i\frac{N}{2}\left(U^{\ell_1}V^{\ell_2}\cdot U^{m_1}V^{m_2} - U^{m_1}V^{m_2}\cdot U^{\ell_1}V^{\ell_2}\right) \tag{E.10}$$

$$= -i\frac{N}{2}\left(q^{\ell_2 m_1} - q^{\ell_1 m_2}\right) Y_{(\ell_1+m_1)(\ell_2+m_2)} \tag{E.11}$$

$$\triangleq G_{\ell_1\ell_2,m_1m_2}{}^{n_1n_2} Y_{n_1n_2} \tag{E.12}$$

固定された ℓ_1, ℓ_2, m_1, m_2 に対して、$N \to \infty$ の極限では、$q^{\ell_2 m_1} = i\frac{2\pi}{N}\ell_2 m_1 + O(1/N)$ から、二つの構造定数は一致することが分かる。

よって、T^2 の場合でも S^2 の場合と全く同じ行列正則化の手続き

$$f(\sigma) = \sum_{\ell_1,\ell_2}^{\infty} c_{\ell_1\ell_2} y_{\ell_1\ell_2} \quad \longrightarrow \quad F = \sum_{\ell_1,\ell_2}^{N-1} c_{\ell_1\ell_2} Y_{\ell_1\ell_2} \tag{E.13}$$

$$\{\, f\,, g\,\} \quad \longrightarrow \quad -i\frac{N}{2}\left[\, f\,, g\,\right] \tag{E.14}$$

$$\frac{1}{4\pi}\int d^2\sigma\ \omega \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{N}\mathrm{tr} \tag{E.15}$$

で良いことが分かる。S^2 でも T^2 でも同じ形に正則化されるのでおそらく任意の genus を持った 2 次元面上でも同じ形に正則化されるだろう [16]。つまり、正則化後の行列になった変数は元の 2 次元面がどういう形だったかを知らない。またはいろいろな genus を持った 2 次元面上の関数の重ね合わせと言ってもいいかもしれない。これも行列正則化の奥深さを感じさせる事柄である。

弦理論との関係にふれておく。摂動的弦理論は genus による展開を行うわけだが、行列正則化後にはもう genus の情報はないので、そのような展開は存在しない。具体的に 3.2 節で見たように、一体問題の作用は行列正則化により自然に相互作用を含んだ理論に格上げされたと考えられる。

参考文献

[1] J. Hoppe,
"Quantum Theory of a relativistic surfice", 素粒子論研究 80 巻 3 号 (1989 年) 145

[2] N. Ishibashi, H. Kawai, Y. Kitazawa and A. Tsuchiya,
"A Large-N Reduced Model as Superstring ", Nucl. Phys. **B498** (1997) 467, [hep-th/9612115].

[3] H. Aoki, S. Iso, H. Kawai, Y. Kitazawa, A. Tsuchiya and T. Tada,
"IIB Matrix Model ", Prog. Theor. Phys. Suppl. **134** (1999) 47, [hep-th/9908038].

[4] M. Fukuma, H. Kawai, Y. Kitazawa and A. Tsuchiya,
"String Field Theory from IIB Matrix Model ", Nucl. Phys. **B510** (1998) 158, [hep-th/9705128].

[5] H. Aoki, S. Iso, H. Kawai, Y. Kitazawa and A. Tsuchiya,
"Space-Time Structures from IIB Matrix Model ", Prog. Theor. Phys. **99** (1998) 713, [hep-th/9802085].

[6] Washington Taylor IV,
"Lectures on Membranes and M(atrix) Theory ",
postscript file : `http://hep1.c.u-tokyo.ac.jp/komaba99/`.

[7] B. de Wit, J. Hoppe and H. Nicolai,
"On the quantum mechanics of supermembranes," Nucl. Phys. **B305**, (1988) 545.

[8] P. K. Townsend,
"Three Lectures onSupermemrane" in *"Superstring '88"*.

[9] A. Achúcarro, J. M. Evans, P. K. Townsent and D. L. Wiltshire,
"SUPER P-BRANES ", Phys. Lett. **B198** (1987) 441.

[10] A. Schild,
"Classical null strings ", Phys. Rev. **D16** (1977) 1722.

[11] J. Polchinski,
"Dirichlet-Branes and Ramond-Ramond Charges ", Phys. Rev. Lett. **75**, (1995) 4724, [hep-th/9510017].

[12] M. B. Green, J. H. Schwarz and L. Brink,
"SUPERFIELD THEORY OF TYPE(II) SUPERSTRIG ",
Nucl. Phys. **B219** (1983) 437.

[13] H. Aoki, S. Iso, H. Kawai and Y. Kitazawa,
"Scaling Behaviors of Branched Polymers ", [hep-th/9910262].

[14] H. Awata, M. Li, D. Minic and T. Yoneya,
"On the Quantization of Nambu Brackets", [hep-th/9907029].

[15] S. Iso and H. Kawai,
"Space-Time and Matter in IIB Matrix Model
— gauge symmetry and diffeomorphism —", [hep-th/9903217].

[16] M. Bordemann, E. Meinrenken and M. Schlichenmaier,
"Toeplitz quantization of Kähler manifolds and gl(N), $N \to \infty$ limits",
Commun. Math. Phys. **165** (1994) 281, [hep-th/9309134].