主論文1

Improved Mean Field Approximation and Improved Taylor Expansion:

approximation schemes
to extract non-perturbative dynamics
from IIB matrix model

Shun'ichi Shinohara

Department of Physics, Kyoto University, Kyoto 606-8502, Japan

Jan, 2003

概要

超弦理論の非摂動的なダイナミクスを解析するための手法として、改良された平均場近似 (improved mean field approximation: IMFA) と改良されたテイラー展開 (improved Taylor expansion: ITE) の説明を行う。これらの近似法を、様々な厳密に解ける理論に適用することにより、近似体系としてうまく機能することを示すと共に、厳密解を知らない場合でも、近似の結果だけから、うまく機能していると判断する根拠として「プラトーの形成」が良い基準となることを見る。また、ITE は IMFA を一般化したものであることであることから、経路積分表式の理論に限らず、関数列一般に適用可能である。Schwinger-Dyson 方程式から、2 粒子既約自由エネルギーを説明した後、行列 ϕ^4 理論の 2 粒子既約自由エネルギーに直接 ITE を適用する。

後半では、超弦理論の構成的定式化として有力視されている IIB 型行列模型に IMFA を適用する。まずは、行列正則化の手続きを通じて、超弦理論の世界面作用から IIB 型行列模型の作用を導く。その後、理論の対称性である 10 次元時空のローレンツ対称性を、平均場を導入することにより破り、IMFA の 5 次近似までの解析を行い、その結果をまとめる。自由エネルギーとボゾン場の 2 点関数を評価することにより、小さな 6 次元の内部空間を持つ、大きく広がった 4 次元時空が実際に経路積分を支配することを示した。また、5 次近似までの結果は、無限に大きく広がった 4 次元時空が厳密解であることを示唆するものとなった。

この論文は川合、河本、黒木、松尾との共同研究 [1] に基づくものである。

目 次

1 イントロダクション **5**

1.1 量子力学・一般相対論の誕生 5

1.2 弦理論の登場: 重力の量子化 5

1.3 弦理論の進歩 6

1.4 行列模型、弦理論、ゲージ理論の三者間の関係 7

1.5 IIB 型行列模型: 構成的理論と成り得るか? 9

1.6 非摂動ダイナミクス: IIB 型行列模型からの抽出 11

2 改良された平均場近似 **12**

2.1 平均場近似—イジング模型を例に 13

2.2 改良された平均場近似の一般処方 14

2.3 ϕ^4 理論への適用 15

3 改良されたテーラー展開 **18**

3.1 導入 18

3.2 適用—有限収束半径の級数に対して 19

3.3 IMFA と ITE の関係 21

4 IMFA—イジング模型への適用 **23**

4.1 1 次近似 23

4.2 高次の近似 24

5 ゼロ次元の行列 ϕ^4 理論 **27**

5.1 Large-N 展開 27

5.2 厳密解 30

5.3 IMFA 36

6 Schwinger-Dyson 方程式と 2 粒子既約自由エネルギー **39**

6.1 2 点関数に対する Schwinger-Dyson 方程式の導出 39

6.2 2PI free energy: SDE を経由して 41

6.3 ルジャンドル変換 41

7 2PI 自由エネルギーへの ITE の直接の適用 **44**

7.1 例: 行列 ϕ^4 理論 45

7.2 改良された 2PI 自由エネルギーのプラトー 46

8 IIB 型行列模型— 行列正則化を通してのレビュー **49**

8.1 行列正則化 49

8.2 Schild 型作用と、その行列正則化 56

8.3 IIB 型行列模型の持つ対称性 60

9 IIB 型行列模型への IMFA の適用 **61**

9.1 2PI 自由エネルギーの計算 62

9.2 改良された自由エネルギー 68

9.3 時空の広がり 71

10 結論と展望 **74**

10.1 IIB 型行列模型に関する結果 74

10.2 IMFA と ITE に関するまとめと展望 75

A イジング模型の簡単なレビュー **77**

A.1 ハミルトニアン 77

A.2 低温展開 79

A.3 高温展開 81

A.4 自己双対性 82

A.5 数値計算 83

B ITE の面白い振る舞い **89**

C 漸近級数に対する ITE の適用 **90**

D 2 次元トーラス上での行列正則化 **91**

E 10 次元での超対称ゲージ理論 **94**

F プラナー 2PI ファインマングラフ **96**

F.0 zeroth order 96

F.1 first order 97

F.2 second order 97

F.3 third order 97

F.4 fourth order 97

F.5 fifth order 98

1　イントロダクション

1.1　量子力学・一般相対論の誕生

20 世紀初頭に、2 つの傑出した理論が誕生した。1 つは重力の理論である一般相対論 [4]、もう 1 つはミクロの物理を扱うための量子力学 [5, 6] である。量子力学は、その後、場の量子論 (quantum field theory) へと発展し、自然界の 4 種類の相互作用 (強い相互作用、弱い相互作用、電磁気相互作用、重力相互作用) のうち、重力を除く 3 種類の相互作用を統一する理論となった。我々は、場の量子論から非常に多くのことを学んだ。例えば、繰り込み可能性の重要さと繰り込み群の視点、ゲージ対称性やグローバル対称性の強力さ、そして、摂動的及び非摂動的な自発的対称性の破れというダイナミクスなどが挙げられる。

唯一つ取り残された重力相互作用は、2 次元以上では繰り込み可能性を破るという問題を持っていた。この問題は高エネルギー領域 (時空の言葉では短距離領域) での理論の振る舞いの悪さに起因しているため、解決策の一つとして、点粒子描像に変わる、なにか新しい対象を導入することが考えられた。一方、場の量子論は、唯一性の問題を抱えていた。ゲージ群の選び方や物質 (電子、クオーク等) の種類、結合定数の値などは、理論の要請としては決まらず、現在標準模型と言われているものは、多くの人工的なパラメーターを含んでしまっている。これらのパラメーターを決める自然な原理が必要とされている。

1.2　弦理論の登場: 重力の量子化

重力相互作用の繰り込み不可能性という問題は、弦 (string) の理論 [8, 9, 10, 11] を考えることにより解決された[1]。弦とは空間 1 次元的に拡がった物体であり、端を持つ開弦 (open string) と端の無い閉弦 (closed string) の 2 種類が考えられる (図 1)。弦は空間的に伸びることができるので、それが有効カットオフを生み出して、短距離での特異性を緩和し、繰り込み不可能性の問題を解決できたのである。弦理論は、閉弦が自動的に重力子 (graviton: ゼロ質量でスピン 2 の粒子) を含んでおり、その他に、いくつかのゼロ質量粒子と無限個の質量を持つ粒子も含んでいる。弦理論は、2 次元の世界面 (world sheet) 上の作用を与えることで定義される (これは、点粒子の理論が

[1]弦の理論は、非アーベル群ゲージ理論のクォーク閉じ込め問題を説明する目的で考えられはじめた。しかし、閉じ込めは K. Wilson の格子ゲージ理論により、強結合展開で定性的に [7]、モンテカルロシミュレーションで定量的に説明されることとなる。

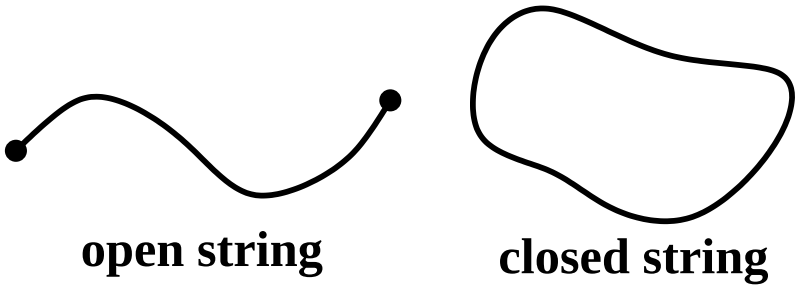


図 1: 開弦 (open string) と閉弦 (closed string)。閉弦は基本振動モードの中に重力子を含む。

世界線上の作用を与えることで定義されるのと類似している)。質量殻上 (on-shell) の外線は、頂点演算子 (vertex operator) として用意され、世界面上の作用を経路積分することで散乱行列 (S-matrix) を得ることができる。この時、経路積分は 2 次元面の種数 (genus) に対応して、非負整数の和を含み (弦のループ展開に対応する)、散乱行列は摂動的に定義されることになる。このように定義された無限個の粒子間の散乱行列は、計算すると有限の値を与える。これらの 2 つの性質、無限個の粒子と有限の散乱行列は、場の量子論の範囲ではあり得ない、弦理論特有の性質と言えよう。

1.3 弦理論の進歩

弦理論は、10 次元空間で自然に定義され、意味のある理論であるためには大きな超対称性が必要であることが分かった[2]。この性質は、我々の現実世界とは非常にかけ離れている。4 次元の時空を実現するためには、余分な 6 次元は見えない位に小さくコンパクト化されていなければならない。しかし、コンパクト化してできる真空は、適当な条件を満たしさえすれば、超対称性の強さのため縮退してしまうことが分かった。摂動論の範囲内では、様々なゲージ群や物質の種類を持った無限個の真空が現れてしまい、しかもそれらは多かれ少なかれ超対称性をもってしまうのである。つまり、ここでも場の理論側の問題であった唯一性は解決されずに残ってしまった。摂動論の弱点が完全に露呈したため、弦理論の構成的 (非摂動的) な定義を探し、それを解析することにより非摂動ダイナミクスを捕まえることが大きな課題となった。ここで、ゲージ場の理論の例に触れておくと、その構成的理論である格子ゲージ理論に

[2]厳密には、10 次元空間にこだわる必要は無く、世界面上の超対称共形場理論 (super conformal field theory) として、セントラルチャージ (central charge) が 15 であれば良い。ここでは、あまり深入りしない

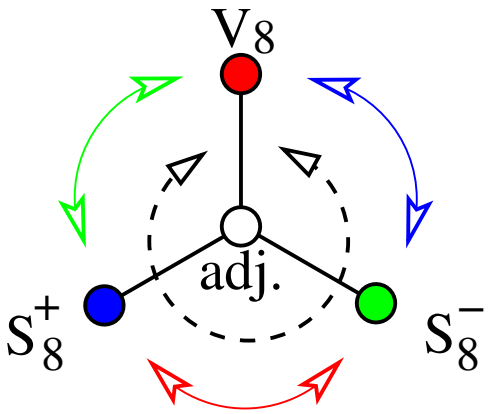


図 2: Spin(8) のディンキン図とトライアリティ。

より、非摂動ダイナミクスの 1 つである閉じ込めの問題は、定性的に簡潔な答えを与えられた。

摂動的弦理論から学んだ教訓は、余分な次元の存在と、(高エネルギーの理論の) 超対称性の必要性である。余談になるが、10 次元というのは素粒子論では 1 つの特別な次元である。超対称ゲージ理論は 10 次元でクリティカルなのである。つまり、11 次元以上ではそれは存在しない。また、10 次元の超対称ゲージ理論は、ゲージ群の選択以外に自由度を持たず、唯一性の観点からは望ましい理論である。また、10 次元における光円錐 (light-cone) ゲージでの対称性は Spin(8) になるが、これはもっとも美しいリー群の 1 つである。それは、ベクトル、左手型スピノール、右手型スピノールの 3 つの表現を交換するトライアリティ (triality) という対称性を持つのである[3]。

1.4 行列模型、弦理論、ゲージ理論の三者間の関係

今まで、説明した弦理論はクリティカルと呼ばれる種類のものであるが、それとは別に、直接 4 次元の弦理論を作ろうという試みも為されていた。それらはノンクリティカル弦理論 (non-critical string theory) と呼ばれる。その試みは、4 次元ではなく、1 次元 (セントラルチャージが 1) 以下に対してしか成功しなかったにも関わらず、非常に興味深い点として、異なる 2 つの方法により同じ結果が得られたことが挙げられる [13, 14]。2 つの方法とは、世界面の理論として連続な場の理論を用いたものと、ゼロ次元の行列模型を用いたものであった。このように、ノンクリティカル弦

[3] この性質は 8 元数 (octonion) とも深い関係があり、8 元数から作られる例外ジョルダン代数は、10 次元のローレンツ構造 SO(1,9) と関連してくる [12]。

理論の研究は、行列模型と弦理論の間に深遠な関係があることを教えてくれた。行列模型を上手く選ぶことにより、クリティカルな弦理論でも対応が付くかもしれないのである。実際、別の意味でのより直接的な関係、行列正則化 (matrix regularization)、

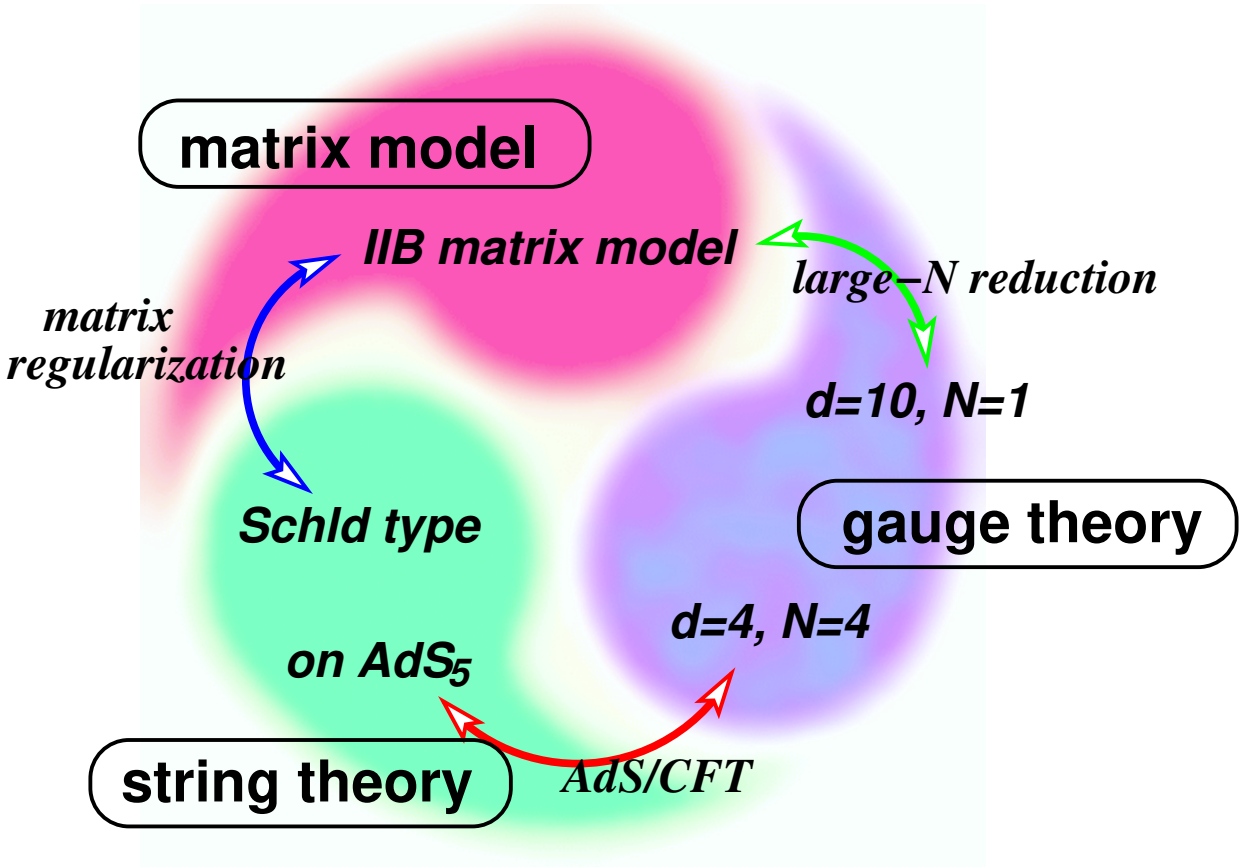


図 3: 行列模型、弦理論、ゲージ理論間の関係図

も見つかった [15, 16]。行列正則化とは、2 次元面上の関数が、紫外カットオフによる正則化と全く同じ意味で、行列により近似され、更に、2 次元面上のポアソン括弧 (Poisson bracket) という掛け算則が、行列側では交換子 (commutator) による掛け算則で正則化される、という対応関係のことである。

ここまでで、3 人の重要な役者、行列模型、弦理論、そしてゲージ理論、が出揃ったことになる。上の行列模型と弦理論の対応に加えて、行列模型はゲージ理論とも深い関係を持っている。この関係は large-N の次元縮小 (dimensional reduction) と呼ばれる [17]。簡単に説明すると、d 次元のゲージ理論は、それ自身を次元縮小した理論

と large-N 極限[4]で等価である、ということである。具体例を一つ書いておくと、4 次元の $\mathrm{U}(N)$ ゲージ理論は、極端には、それをゼロ次元まで落とした (この場合は時空への依存性を全て無視することになる) $\mathrm{U}(N)$ の行列模型と等価になるのである。

1.5 IIB 型行列模型: 構成的理論と成り得るか?

そうこうしている時に、クリティカルな弦理論で大きな出来事が起きた。J. Polchinski による D-ブレーン (D-brane: Dirichlet brane) の発見である [18]。D-ブレーンとは、場の理論のインスタントンやモノポール、ドメインウォールといった古典解の、弦理論での対応物である。例えば、インスタントン的な D-ブレーンなるものも存在し、それは $\mathrm{D}(-1)$-ブレーンとか D インスタントンと呼ばれる。その他、空間 p 次元的に拡がったブレーンは Dp-ブレーンと呼ばれる。

D3-ブレーン (空間 3 次元+時間 1 次元の拡がりを持った壁のようなもの) を利用することにより、J. Maldacena は AdS/CFT 対応 [19, 20] を予想した[5]。その内容は、$\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ 上の超重力理論が、4 次元の $\mathcal{N} = 4$ 超対称ゲージ理論と等価である、というものであった。この対応は、G. 't Hooft の large-N 展開 [21] により推測されてきたゲージ理論と弦理論の対応の、初めての (部分的にではあるが) 具体的な例であった。

このような時に、弦理論の構成的定義として、いくつかの模型が提唱された [22, 23, 24, 25]。その中で、特に IIB 型行列模型 (IIB matrix model) [26, 27, 28, 29, 30] は、現在までのところ、最も有望な候補となっている。その作用は、10 次元の $\mathrm{U}(N)$ 超対称ゲージ理論を、ゼロ次元まで次元縮小したもので、

$$S = \frac{1}{g^2}\mathrm{Tr}\left(-\frac{1}{4}[\,A_\mu, A_\nu\,]^2 + \frac{1}{2}\bar{\psi}\,\Gamma^\mu[\,A_\mu, \psi\,]\right) \tag{1.1}$$

で与えられる。ここで、A_μ, ψ^α は、それぞれ $\mathrm{SO}(10)$ のベクトル表現と左手型スピノールとして変換する $N \times N$ エルミート行列である。また、IIB 型の超対称性を持つ弦理論の Green-Schwarz 作用を Schild 型 [31] に書いて、行列正則化を施すことによってもこの作用を得られる点も特筆すべきであろう。

この理論はいくつかの長所がある。まず第 1 に、ゼロ次元まで縮小したことにより、力学変数は関数ではなくただの数 (26 個の $N \times N$ エルミート行列) になっていて、経路積分は普通の多重積分で書かれていることである。このため、分配関数や、

[4] ここで N は、ゲージ群のランクを指す。ゲージ群が $\mathrm{U}(N)$ の場合には、定義表現の行列の大きさ自体とも取れる。

[5] AdS は anti de Sitter の、CFT は conformal field theory の略である。

ある部類の相関関数については、有限の N ではきちんと有限に留まることが証明されている [32, 33]。これは構成的定義であるための必要条件である。さらに、数値的に IIB 型行列模型を解析できる可能性もあることになる。第 2 点として、IIB 型の超対称性を持ち、その代数は時空までもが行列の中に力学変数として入っている事を示す。よって、コンパクト化などの時空のダイナミクスを解析することも可能なのである。3 番目の点は、その唯一性にある。IIB 型行列模型の持つ対称性は、行列回転

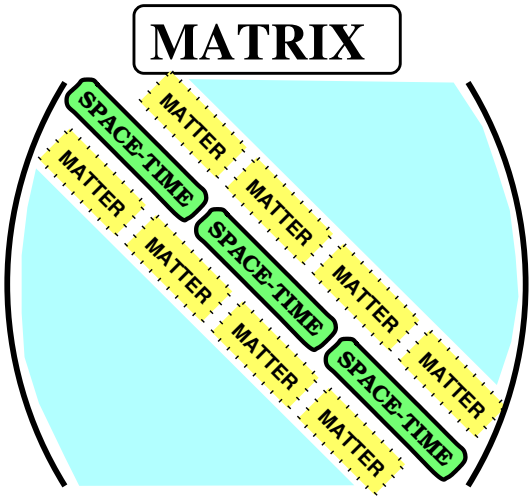


図 4: IIB 行列模型における時空、物質のイメージ図。力学変数である行列の対角付近に時空が、その周りにゲージ場や物質場を含んでいると考えられている。

の $\mathrm{U}(N)$、そして $\mathrm{SO}(10)$ と IIB 型の超対称性であるが、同じ対称性を持った別の模型を作る事は出来ないと思われる。唯一性の結果として、IIB 型行列模型は微調整すべきパラメーターを一つも持たない。構成的かつ唯一であることから、原理的には IIB 型行列模型は全てを予言することができるのである。一つ惜しい点があるとすれば、$\mathrm{SO}(10)$ の対称性を改良すること、または局所ローレンツ対称性が明白な形の行列模型を構築することであろう。この方向性では、スーパーリー代数 (super Lie algebra) や、例外ジョルダン代数 (exceptional Jordan algebra)、例外リー代数 (exceptional Lie algebra) などを利用した模型が提唱されている [34, 35, 36]。

1.6　非摂動ダイナミクス: IIB 型行列模型からの抽出

弦理論の構成的定式化の候補となるモデルを手にしたわけだが、それを解析し、非摂動ダイナミクスを引き出す事は難しかった。唯一性の裏返しで、パラメーターを一つも含んでいないため、普通の摂動的な方法は全く無力だったのである。SO(10) のローレンツ対称性の破れに関しては、枝分かれ重合体 (branched polymer) 近似やモデルの変形、数値解析など、いくつかの試みが為された [37]。21 世紀の幕開けの年、西村と杉野 [38] は改良された平均場近似 (improved mean field approximation: IMFA)[39] を IIB 型行列模型に適用し、実際にローレンツ対称性が破れることを示した。その結果は、予備的ではあったものの、4 次元の時空が、それ以外の次元の時空よりも安定であることを強く示唆するものであった。

その後、我々は、[1] において、IMFA の本質を抽出することで、改良されたテーラー展開 (improved Taylor expansion: ITE) という更に一般的な体系を見つけた。その中で、有限の収束半径をもつ級数や漸近級数に ITE を適用することで、それらの級数の初めの有限個から、収束半径の外側での級数の値を上手く近似しうることを示した。ここで、我々の目的は、あるモデル (ここでの例としては IIB 型行列模型) から非摂動ダイナミクスを引き出すことにあることを確認しておこう。一般に、通常の摂動論では、有限もしくはゼロの収束半径を持つ級数しか得る事はできない。もしも、結合定数やパラメーターが収束半径の外側にある場合には、摂動級数は激しく発散し、ダイナミクスの情報を得る事はほとんど出来ない。ところが、このような級数に対してさえ、ITE を適用することによって結合定数やパラメーターの任意の値で収束する級数を作り出し、非摂動ダイナミクスの情報を引き出すことが可能になるのである。このような応用を心に留めて、この論文の前半では、ITE の能力や限界を明確にするために、様々な例を通して ITE の性質をまとめることに専念する。解析方法の改良・開発のためにも、ITE の性質の理解と本質の追求は重要である。後半では、大きな目的である IIB 型行列模型の解析の説明を行う。

また、次の論文 [2] では、ITE と 2 粒子規約 (two-particle irreducible: 2PI) 自由エネルギーを用いることでにより、IIB 型行列模型の解析を 7 次近似まで進めた。その結果、6 次元の小さな内部空間をもった 4 次元時空が非摂動的真空として実現されることをよりはっきりと示した。また、プラトーが形成される兆候も掴むことに成功した。これらについての詳細は [3] に述べられている。

以下に、この論文の流れを記しておく。まず、第 2 節では、イジング模型 (Ising model) での平均場近似を簡単に見た後、IMFA のレビューを行い、ゼロ次元の ϕ^4 理論へ適用して近似の良さと、どのような場合に良い近似となっているのか、を理解す

る。第 3 節では、IMFA の本質を抽出した体系である ITE を導入し、一つの適用例として有限収束半径の級数を取り上げる。また、IMFA をどのように含んでいるかも説明する。第 4 節で、イジング模型への IMFA の適用結果を見る。相転移に関係した量が、近似の次数と共に徐々に厳密値に近づくことが分かる。第 5 節では、面白い性質を持ったモデルとして、ゼロ次元の行列 ϕ^4 理論を考える。この理論は、large-N 極限[6]で厳密に解けることが知られていて [40]、プラナー和[7]は結合定数の展開に対して有限の収束半径を持つのである。これをレビューした後、実際に ITE を適用し、普通の ϕ^4 理論の振る舞いと比べてみることにする。

第 6 節は、少し目先を変えて 2PI 自由エネルギーなる概念を導入する。これは、二点関数に対する Schwinger-Dyson 方程式 (Schwinger-Dyson equations: SDE) と深い関係にあるもので、計算の簡略化という方法的な面と、非摂動ダイナミクスの抽出に役立つ (可能性) という物理的な面の両方を持っている。この節では、SDE から 2PI 自由エネルギーに繋がる道筋を示した後、通常の自由エネルギーが 2PI 自由エネルギーからルジャンドル変換によって得られることを説明する。2PI 自由エネルギーの物理的側面を解明する手がかりとして、第 7 節では、ITE と直接的に組み合わせて近似を行うことを考える。適用例としてはゼロ次元の行列 ϕ^4 理論を扱う。

第 8 節では、IIB 型行列模型の導入を行う。この論文では、弦理論の世界面作用の行列正則化という経路で説明する。第 9 節では、IMFA を用いた IIB 型行列模型の解析と、その結果を示す。そこで、4 次元時空が非摂動効果を含めた時の真空として選ばれることを見る。最後に、第 10 節で ITE の性質のまとめを行い、近似法 · 適用方法としての改良の方向性を示す。付録 B には、第 3 節と同じ例ではあるが、異なる ITE の適用の仕方を考える。また、付録 C には、漸近展開への ITE の適用結果を示してある。その他、参考のため、いくつかの付録を含む。

2 改良された平均場近似

この節では、イジング模型での平均場近似に軽く触れた後、改良された平均場近似 (improved mean field approximation: IMFA) の一般的な処方箋を与える。その後、この近似が、どのように上手い近似になっているのかを見るために、ゼロ次元の ϕ^4 理論を最初の例として取り上げる。結果として、簡単な平均場により自由エネルギーと 2 点関数が非常に良く近似されることを見る。

[6] N は行列の大きさである。

[7] 相関関数は N 依存性を持つが、large-N では N の冪が最も大きいところのみが寄与する。この部分をプラナー和と呼ぶ。

2.1 平均場近似—イジング模型を例に

イジング模型に平均場近似 (mean field approximation) を振り返ってみよう。イジング模型の簡単なレビューは付録 A にまとめた。

まず、スピン変数の 1 点関数を次のように評価することで、平均場近似の基となる式を導こう。

$$\langle S_i \rangle = \frac{\sum_{\{S\}} S_i e^{-H(S)}}{\sum_{\{S\}} e^{-H(S)}} = \frac{\sum_{\{S\}} e^{-H(S)} \frac{\sum_{\mu_i=\pm 1} \mu_i e^{-H(\mu_i,\hat{S})}}{\sum_{\mu_i=\pm 1} e^{-H(\mu_i,\hat{S})}}}{\sum_{\{S\}} e^{-H(S)}} \tag{2.1}$$

$$= \frac{\sum_{\{S\}} e^{-H(S)} \tanh\left(J \sum_{k:\ \text{N.N. of } i} S_k\right)}{\sum_{\{S\}} e^{-H(S)}} \tag{2.2}$$

$$= \langle \tanh\left(J \sum_{k:\ \text{N.N. of } i} S_k\right) \rangle \tag{2.3}$$

ここで、k についての和は、i の最近接 (N.N. は nearest neighbor を表す) のものについて取る。J は結合定数である。$\hat{S}$ は、i 番目以外の全てのスピンを表している。この式の中の全てのスピン変数 S_k を磁化 $m = \langle S_k \rangle$ で置き換えることにより、平均場近似の方程式を得る。

$$m = \tanh(4Jm) \tag{2.4}$$

ここで、tanh の中の 4 の因子は上式の最近接についての和から来ており、格子のとり方に顕に依存する。ここでは正方格子をとったため 4 であるが、例えば三角格子では 6、六角格子では 3 等となる。この場合、相転移点としては、

$$\left.\frac{\partial}{\partial m} \tanh(4Jm)\right|_{m=0} = 1 \ \Rightarrow \ J_*^{\text{MFA}} = \frac{1}{4} = 0.25 \tag{2.5}$$

となる。この値は最近接格子数の逆数であり、上の式と同様に格子に依存するものである。平均場近似は磁化が発生したと仮定して、ある格子点について、最近接からの反応のみを考える近似であるため当然である。次副節で改良された平均場近似を導入した後、第 4 節で近似の高次補正を考える。

2.2 改良された平均場近似の一般処方

適当な作用関数 $S(x)$ とその分配関数

$$Z = \int \mathrm{d}x \; e^{-S(x)} \tag{2.6}$$

が与えられたとしよう。大抵の $S(x)$ にたいしては、この積分を解析的に実行することは不可能である。そのため、分配関数や相関関数を評価するためには適当な近似法が必要となる。改良された平均場近似では、まず平均場作用として、積分可能な $S_0(x;a)$ をもってくる。この論文中の例としては、平均場作用は全て 2 次形式である。この $S_0(x;a)$ を非摂動的部分とみなすことで、通常の摂動展開を行う。しかし、勝手に作用を付け加えることはできないので、相互作用項として $-S_0(x;a)$ を付け加えて形式的には相殺するようにしておく。また、元々の作用 $S(x)$ は、やはり相互作用項として取り扱う。平均場作用の中に入っている a はパラメーターであり、その決め方は後に与える。

ここで、非摂動部分と相互作用部分を分離するために、形式展開パラメーター g を導入しよう。この形式的なパラメーターは、計算を全て行った後に $g = 1$ と置く。IMFA で k 次近似を得るためには、被積分関数を g に関する形式冪級数に展開した後、$O(g^{k+1})$ を無視することで、その級数を k 次までの多項式に切断する。式で書くと以下のようになる。

$$Z = \int \mathrm{d}x \; e^{-S_0(x;a) - g\left(S(x) - S_0(x;a)\right)} \tag{2.7}$$

$\Downarrow$ g に関する形式冪級数に展開

$$Z \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-g)^n}{n!} \int \mathrm{d}x \; \left(S(x) - S_0(x;a)\right)^n e^{-S_0(x;a)} \tag{2.8}$$

$\Downarrow$ n の和を k までで止める

$$Z_k(a) = \sum_{n=0}^{k} \frac{(-g)^n}{n!} \int \mathrm{d}x \; \left(S(x) - S_0(x;a)\right)^n e^{-S_0(x;a)}. \tag{2.9}$$

この切断された分配関数 $Z_k(a)$ は平均場作用に入っているパラメーター a の関数になっている。しかし、このパラメーターは手で加えたものであり、元々の作用には無関係なものである。よって、パラメーターの決め方として、「切断された分配関数が a に対して安定である」ことを基準とする。これで、1 つの近似法を定義したことになるが、この方法を「改良された平均場近似」(以降 IMFA) と呼ぶ。

相関関数を計算する際にも同じ処方を適用する。

$$\langle\ f(x)\ \rangle_k = \frac{1}{Z_k(a)}\sum_{n=0}^{k}\frac{(-g)^n}{n!}\int \mathrm{d}x\ f(x)\big(S(x)-S_0(x;a)\big)^n e^{-S_0(x;a)}\Big|_{\text{neglect}\ \ O(g^{k+1})}. \tag{2.10}$$

IMFA の一次近似は、変分原理と同じものであることを注意しておく。さらに、式 (2.8) の冪級数は、固定されたパラメーターに対しては (一般に) 漸近級数を与えるに過ぎない。しかしながら、パラメーターを近似の次数ごとに決めることにより、自由エネルギーや相関関数の近似値を高い精度で得ることができる。次の副節で例を通して、このことを確かめる。

2.3 ϕ^4 理論への適用

ゼロ次元の ϕ^4 理論を例にとって、IMFA を実際に適用してみよう。特にゼロ質量の時には、分配関数等は簡単に積分してしまうことができるので、IMFA の結果と比べることができる。質量項も含めた作用と分配関数は、

$$S = \frac{m^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4, \tag{2.11}$$

$$Z = \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\phi\ e^{-S} \tag{2.12}$$

である。結合定数 λ の実部が負の時には積分は収束しない。このため、$\lambda = 0$ のまわりでの通常の摂動展開は収束半径がゼロ、つまり漸近展開にしかならない (図 5 参照)。

特に興味のある場合は、ゼロ質量の時[8]であり、その自由エネルギーと 2 点関数の厳密な値は以下のようになる。この場合、結合定数 λ は場の再定義で吸収できるので、1 と置く。

$$Z_{\text{massless}} = \int \mathrm{d}\phi\ \ e^{-S} = 2\cdot 3!\cdot(4!)^{-3/4}\cdot\Gamma(1/4), \tag{2.13}$$

$$F_{\text{massless}} = -\log Z_{\text{massless}} \simeq -1.389388802, \tag{2.14}$$

$$\langle\ \phi^2\ \rangle_{\text{massless}} = \frac{1}{Z}\int \mathrm{d}\phi\ \ \phi^2 e^{-S} = (4!)^{1/2}\frac{\Gamma(3/4)}{\Gamma(1/4)} \simeq 1.655801764. \tag{2.15}$$

平均場作用 S_0 として、次のように 2 次の項を持ってくる。

$$S_0 = \frac{m_0^2}{2}\phi^2. \tag{2.16}$$

[8] 実際に解析したい理論は IIB 型行列模型で、それは 2 次の項 (質量項) を持たない。このような、通常の摂動展開が適用できない場合を念頭に置いている。

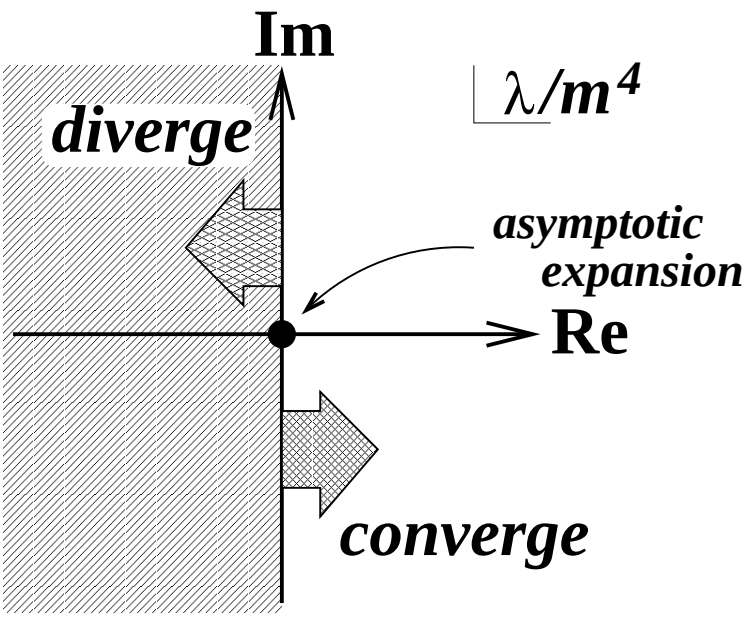
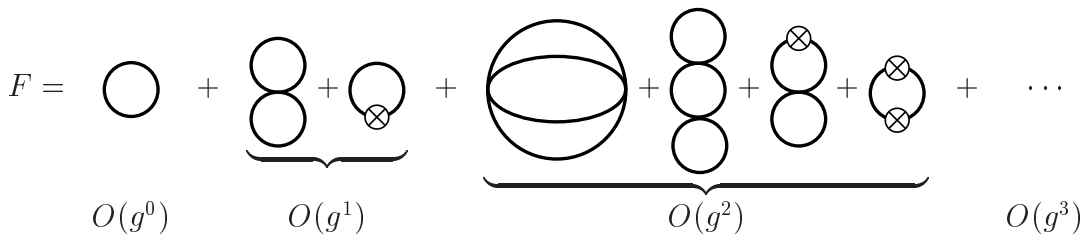


図 5: 分配関数の収束域。$\lambda = 0$ まわりでの展開は漸近展開となる。

ここで、m_0^2 は、前副節のパラメーター a に対応するものである。ゼロ質量の場合には、プロパゲーターが定義できないため、通常の摂動展開は適用できない。しかし、2 次の項を足し引きした IMFA の方法では、ゼロ質量の場合でもファインマンダイアグラムを利用した展開が可能となる。

k 次近似の自由エネルギー $F_k = -\log Z_k$ を見てみよう。図式的に見ると、自由エネルギーは、式 (2.17) にあるように連結な真空グラフの和で表される。図式中で、実線はプロパゲーター $1/m_0^2$、丸付きバッテンは質量相殺項 (mass conter term) を表す。また 4 点の頂点は $g\lambda$ を表す。



(2.17)

ゼロ質量の場合の自由エネルギーと 2 点関数について、近似の次数が 1,2,9,10,17,18 のものをプロットしたのが図 6 と 7 である。共に横軸は平均場のパラメーター m_0^2 で

ある。これらを見ると、近似の次数が上がるにつれて、共にプラトー (plateau) を形成しだすことが分かる。ここで、プラトーとはパラメーターの値にほとんど依らずに、自由エネルギー等が安定した値を示している部分である。図 6 を例にとると、1 次,2 次ではプラトーらしきものは見えないが、1 次の極値を取る点や 2 次の変曲点はそれなりに厳密値に近いところにある。9,10 次では、$1.2 < m_0^2 < 1.7$ 辺りは、近似値が厳密値にべったりとくっついてプラトーを形成している。17,18 次までいくと、$1.3 < m_0^2 < 2.3$ 辺りがプラトーであり、区間がずれてはいるものの、幅は広がっていると言えるだろう。このような振る舞いは、パラメーター m_0^2 は元々の作用はには入っていない手で入れたものであり、平均場としても足した上で引いているので、高次に行けば行くほどパラメーター依存性が小さくなるだろう、という直感とも合っている。

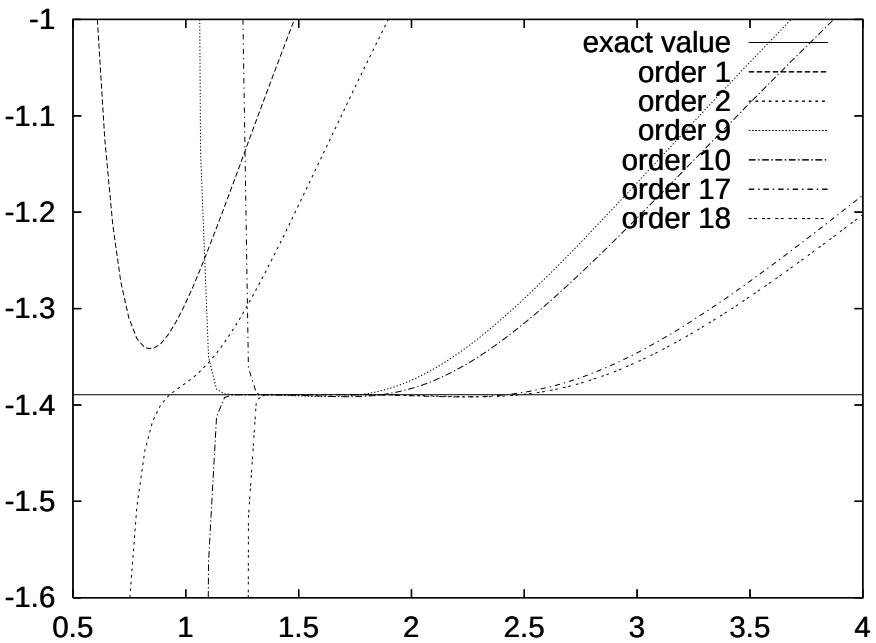


図 6: IMFA での切断された自由エネルギー。横軸は m_0^2 である。

これから分かることは、前副節で述べたパラメーター選びの基準「切断された分配関数が a に対して安定である」とは、低次では、極値を与える点や変曲点、高次ではプラトーの中の点を選ぶことで満たされることが分かる。実際に、ある程度の大きさのプラトーが形成されたならば、どの点を選ぶかは問題ではなく、プラトー中の値のゆれ具合を加味して、誤差評価までできると期待できる。

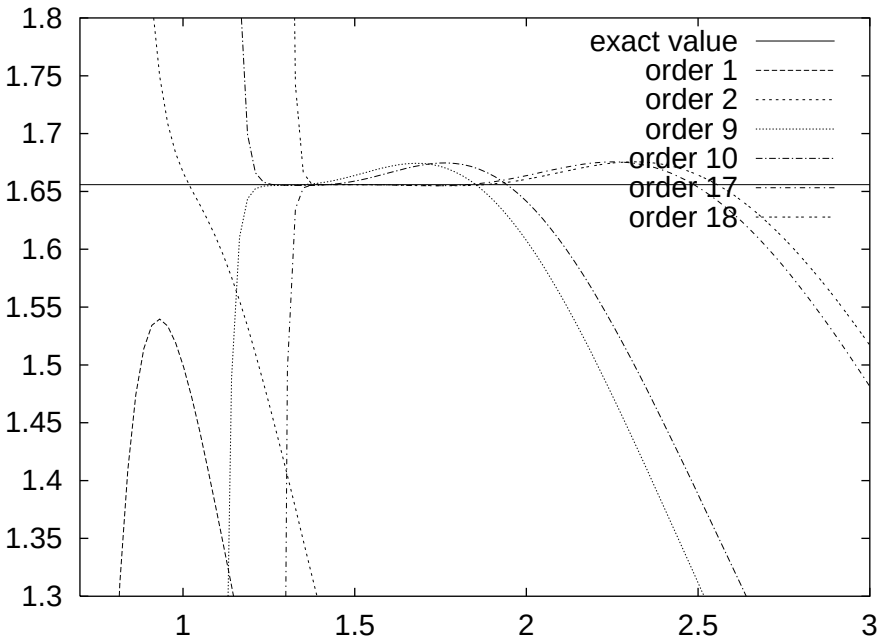


図 7: IMFA での切断された 2 点関数。横軸は m_0^2 である。

3 改良されたテーラー展開

前節では、IMFA が良い近似法になっていることを見た。しかしながら、なぜこの近似法が上手く働くのかは完全には分からず、かなり不思議な近似法である。この節ではIMFA の一般化である改良されたテーラー展開 (improved Taylor approximation: ITE) を導入し、ITE は、IMFA の本質を抜き出したものであることを見る。

3.1 導入

まず、関数列 $\{f_i(x)\}_{i=0,1,\ldots,\infty}$ が与えられているとしよう (必ずしも有限の収束列とは限らない)。この時、パラメーター x_0 を含む、次のように改良された関数列 $\{f_i^{\mathrm{improved}}(x;x_0)\}_{i=0,1,\ldots,\infty}$

$$f_i^{\mathrm{improved}}(x;x_0) = \sum_{n=0}^{i} \frac{1}{n!}(x-x_0)^n f_{i-n}^{(n)}(x_0) \tag{3.1}$$

を考えてみる。この関数列を、改良されたテイラー展開 (improved Taylor expansion: ITE) と呼ぶ。ここで大切なのは、それぞれの f_i^{improved} は、有限個の関数列の要素 $\{f_n\}_{n=1,2,\ldots,i}$ のみで定義されているということである (無限個の関数列全体から定義

されているわけではない)。この新しく定義された関数列が通常のテイラー展開と異なる部分は、高階微分のところには、より低い次数の関数列の要素を用いていることにある。この処方は、収束半径の外側では、高い次数の関数は激しく振動して収束を悪くする、というところにある。実際に下で見るように、パラメーター x_0 の値によって、新しく定義された関数列は様々な領域で収束することが分かる。この性質によって、x_0 の値を適当に選ぶことにより、望む x の値で (必ずしも全ての x で収束するとは限らないが) 収束する列を得ることができる。

3.2 適用—有限収束半径の級数に対して

まず、一つの例として次の展開を考える。

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n x^n \ (= \frac{1}{1+x}). \tag{3.2}$$

この展開に対して、関数列 $\{f_i\}_{i=0,1,...,\infty}$ を次の様に定義する。

$$f_i = \sum_{n=0}^{i} (-)^n x^n. \tag{3.3}$$

この $x = 0$ から展開された関数列の振る舞いは図 8 に示されていて。式 (3.2) からも分かるように、収束半径は 1 である。この時、次数が高くなるにつれて、$x = 1$ の近くまで収束するようになるが、$x > 1$ での振る舞いは次数が高くなるにつれて悪くなる (振動が激しくなる)。

ここでは、摂動論が適用できなくなる領域[9]が問題であり、つまりは収束半径の外での値を知る事が必要となる。一つの例としてパラメーター x_0 を 1.1 と置いてみて、改良された関数列 $\{f_i^{\mathrm{improved}}(x; x_0 = 1.1)\}_{i=0,1,...}$ の振る舞いを見てみよう。これは、図 9 に示されているように、$1.2 < x < 2$ 辺りで良い収束を見せている。これは、元の関数とは全く異なる収束域である。元々の関数列では、無限個の和としてしか評価できなかった $x > 1$ の領域が、改良の結果として、近似的に始めの有限個の列のみから評価できたことになる。

ここで、逆に x の値を固定することにより、前節での IMFA との対応を明確に付けることができる。この時、x は式 (2.11) で与えられる理論に元々含まれるパラメーター m^2 に、x_0 は人工的に導入された平均場の作用に含まれるパラメーター m_0^2 にそ

[9] 先ほども触れたように IIB 型行列模型が念頭にあるので、摂動的には最も厳しいゼロ質量極限を問題にしたい。

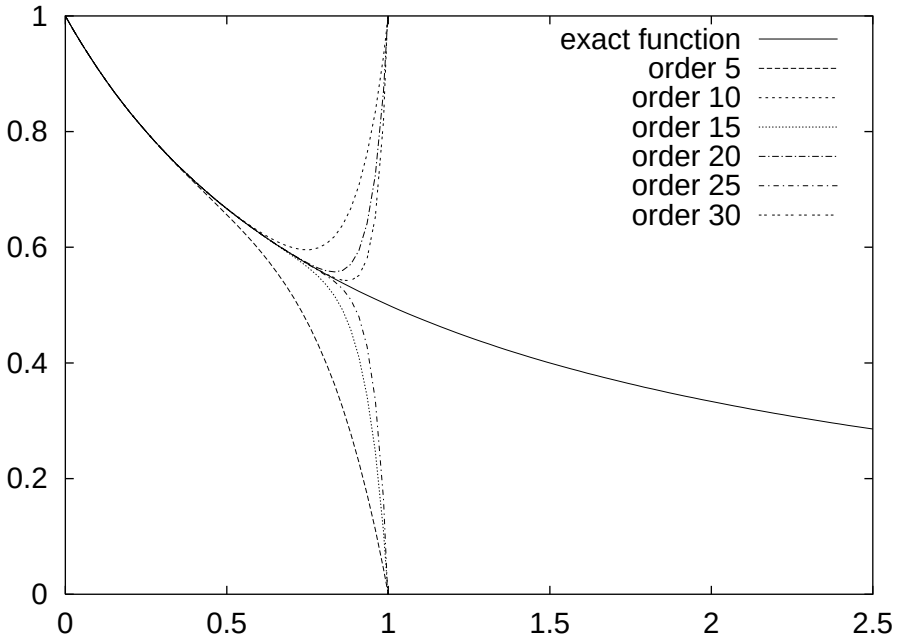


図 8: 元々の級数の振る舞い。横軸は x である。

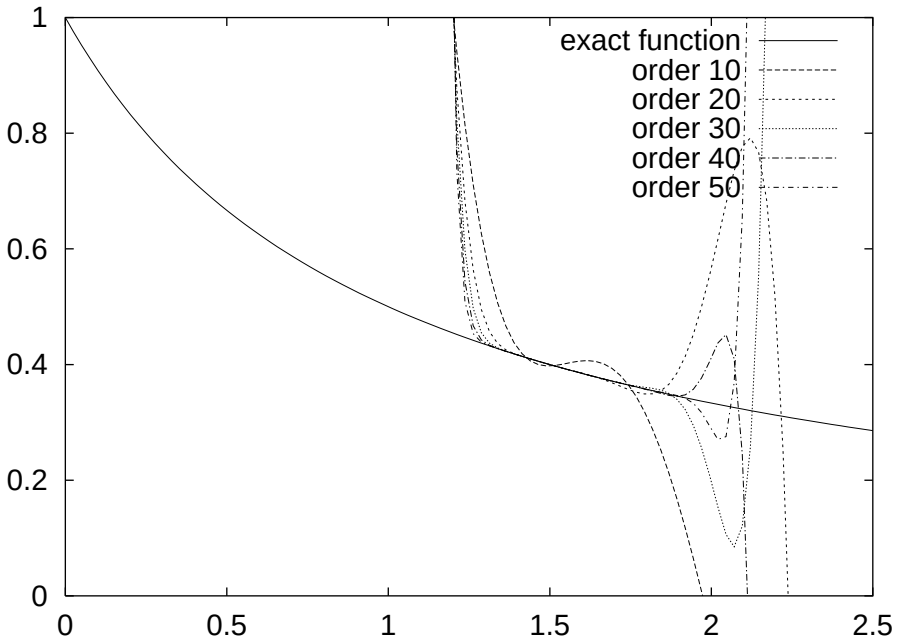


図 9: $x_0 = 1.1$ と置いた時の ITE の下での関数の振る舞い。横軸は x である。

れぞれ対応することに注意しよう。改良された関数 $f_i^{\mathrm{improved}}(x;x_0)$ を x を止めて x_0 関数と見る代わりに、x を決めて (理論を固定して) x_0 の関数としてみてみる。例として $x=3/2$ に固定すると、改良された関数列を x_0 の関数として高い次数までプロットすることで、厳密値 $f(3/2)=0.4$ にプラトーを形成することが分かる (図 10)。IMFA と同様、高い次数 (例えば 20 次程度) でパラメーター x_0 の値にはほとんど依らない振る舞いを見てとることができる。

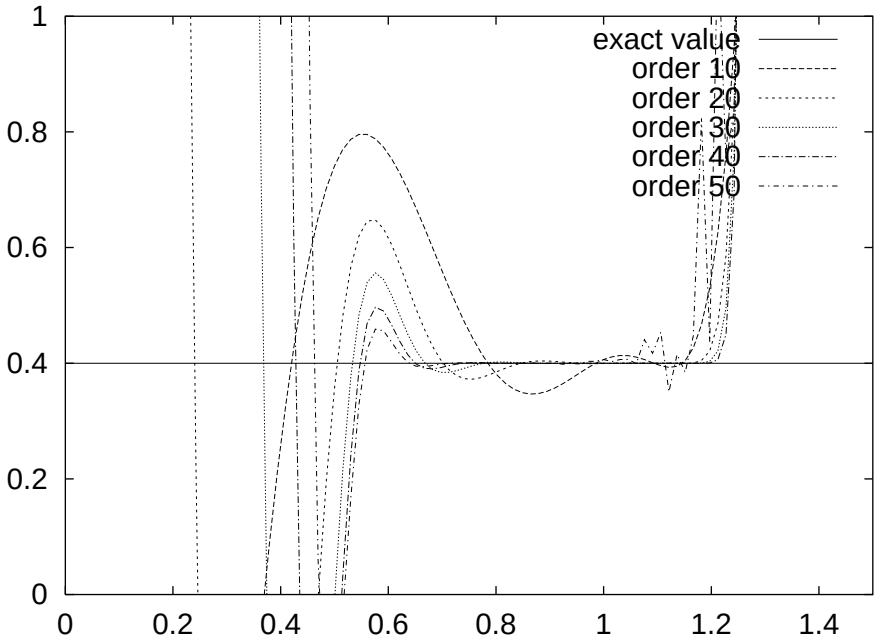


図 10: ITE と施した関数列のプラトー。横軸は手で導入したパラメーター x_0 である。

3.3 IMFA と ITE の関係

式 (3.1) に示される展開は、簡略された形に書くことができる。まず、形式展開係数 g を導入して、関数列 $\{f_i(x)\}_{i=0,1,\ldots,\infty}$ から、次の関数を定義しよう。

$$f(x)=\sum_{i=0}^{\infty} g^i\, h_i(x). \tag{3.4}$$

ここで、$h_i(x)=f_i(x)-f_{i-1}(x)$ $(i=1,2,\ldots,\infty)$ で、$h_0(x)=f_0(x)$ とした。例として挙げた、式 (3.2) の場合には、$h_i(x)=(-)^i\,x^i$ となる。次に、この関数 $f(x)$ の引数

x に対して、$x_0 + g(x - x_0)$ を代入した上で、展開係数 g に関して切断することを考える。

$$f_i^{\mathrm{improved}}(x; x_0) = f(x_0 + g(x - x_0))\Big|_i. \tag{3.5}$$

ここで、記号 $|_i$ は、g に関して展開し、$O(g^{i+1})$ の項を無視して、さらに g=1 と置く事を表す。簡単に分かるように、この展開は式 (3.1) の関数列を再現する。

IMFA との関係を具体的に述べておく。元々の作用関数を質量項と相互作用項に分解する。

$$S(x) = \frac{m^2}{2}x^2 + S_{\mathrm{int}}(x). \tag{3.6}$$

平均場作用を $S_0(x, m_0^2) = m_0^2 x^2/2$ として、次により、自由エネルギー $F(m_0^2)$ を定義する。

$$e^{-F(m_0^2)} \triangleq \int \mathrm{d}x\ e^{-\left(S_0(x,m_0^2)+gS(x)\right)} \tag{3.7}$$

$$= \int \mathrm{d}x\ e^{-\left(\frac{1}{2}m_0^2x^2+gS(x)\right)} \tag{3.8}$$

式 (2.7) より、IMFA で計算したい量は、

$$\int \mathrm{d}x\ e^{-\left(S_0(x,m_0^2)+g(S(x)-S_0(x,m_0^2))\right)} = \int \mathrm{d}x\ e^{-\left(\frac{1}{2}\left(m_0^2+g(m^2-m_0^2)\right)x^2+gS(x)\right)} \tag{3.9}$$

$$= e^{-F\left(m_0^2+g(m^2-m_0^2)\right)} \tag{3.10}$$

となる。つまり、初めに平均場を足し引きしてから計算しなくても、質量項を手で足してファインマングラフを計算した後で、引数の置き換えをすれば良いことが分かる。

結果として、ITE はより一般的な体系として、IMFA を含んでいることが分かる。ITE の持つ抽象的な性質は、なぜ IMFA が近似法として上手く働くかを解明する上で有用となるであろう。IMFA の本質が理解できたならば、それを改良することができ、改良された近似法を用いることで、弦理論の構成的定義から、より多くの非摂動的な性質を引き出すことが可能になるだろう。

参考として、付録 B と C に ITE の適用例を示す。前者は、今見た例に対する別の改良であり、ϕ^4 理論のゼロ質量極限により近いものの解析である。また、後者は漸近展開 $\ln\Gamma(x)$ に対する ITE で、非摂動的性質を含んだ理論に ITE を適用する際に有用となるであろう例である。

4　IMFA—イジング模型への適用

第 A 節でイジング模型を考え、(通常の) 平均場近似の結果を見た。この節では、イジング模型に IMFA を適用し、1 次では前に得た結果を再現すること、そして高次計算をすることにより、結合定数の臨界値が厳密な値に近づくことを見る。

4.1　1 次近似

IMFA を適用するために平均場を導入しよう。この模型では、磁化の発生に興味があるので、スピン変数の 1 次の項を平均場作用とする。

$$S_0 = -h \sum_i S_i. \tag{4.1}$$

イジング模型自体の作用は、最近接相互作用の部分のみとする (外部磁場なし)。また、展開係数はその結合定数 J である。摂動展開は次のようになる。

$$Z = \sum_{\{S_i\}} \exp\left(J \sum_{(i,j)} S_i S_j + h \sum_i S_i \right) \tag{4.2}$$

$$= \sum_{\{S_i\}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J^n}{n!} \left(\sum_{(i,j)} S_i S_j \right)^n \exp\left(h \sum_i S_i \right) \tag{4.3}$$

$$\triangleq \sum_{n=0}^{\infty} J^n Z_n. \tag{4.4}$$

0 次、1 次の部分は、以下のように計算できる。

$$\begin{aligned} Z_0 &= \sum_{\{S_i\}} \exp\left(h \sum_i S_i \right) \\ &= \prod_i \sum_{S_i = \pm 1} e^{h S_i} \\ &= (2 \cosh h)^V, \end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned} Z_1 &= \sum_{\{S_i\}} J \sum_{(i,j)} S_i S_j \exp\left(h \sum_i S_i \right) \\ &= JB (2 \cosh h)^{V-2} (2 \sinh h)^2 \\ &= Z_0 JB \tanh^2 h. \end{aligned} \tag{4.6}$$

ここで、V は格子点の数、B は最近接を繋ぐボンドの数である。2 次元正方格子の場合、$B = 2V$ という関係がある。この対数をとって、自由エネルギーに直すと、

$$F_1 = -\log Z\big|_1 \tag{4.7}$$

$$= V\left(\log(2\cosh h) - 2J\tanh^2 h\right) \tag{4.8}$$

となる。ここで、F_1 は自由エネルギーの 0 次と 1 次の和を表す。以下の m_1 等も同様である。自由エネルギーは、当然格子点の数 V に比例するので、次の自由エネルギー密度を考えるのが便利である。

$$f_1 = F_1/V = \log(2\cosh h) - 2J\tanh^2 h. \tag{4.9}$$

磁化 m は、f_1 を h で微分することで得られる。

$$m_1 = \frac{\partial f_1}{\partial h} \tag{4.10}$$

$$= 4J\tanh h(1-\tanh^2 h) + \tanh h. \tag{4.11}$$

IMFA を適用するためには、形式展開係数 g を導入し、f_1 及び m の表式で J を gJ に、h を $(1-g)h$ にそれぞれ置き換えた上で、g について展開しなおし、$O(g^2)$ を無視して、最後に $g = 1$ と置けばよい。この操作を施すと、以下の量を得る。

$$f_1^{\text{improved}} = -\log(2\cosh h) + h\tanh h - 2J\tanh^2 h, \tag{4.12}$$

$$m_1^{\text{improved}} = \tanh h - h(1-\tanh^3 h) + 4J\tanh h(1-\tanh^2 h). \tag{4.13}$$

少々面倒ではあるが、$\partial f_1^{\text{improved}}/\partial h = 0$ と m_1^{improved} の式からうまく h を消去すると、平均場近似の式 (2.4) を得ることが出来る。これにより、IMFA が 1 次では通常の平均場近似であること、つまり変分原理と等価であることが、例をもって示された。

4.2 高次の近似

同様の計算をより高次の摂動についても計算することが出来る。2 次の計算を具体的に見てみよう。2 つのボンドが落ちてきているが、1 つ目のボンドの置き方は B 通りでどこに置いても同じである。2 つ目のボンドは、1 つ目に引っ掛かる時だけ特別に考えればよい。1 次の計算から分かるように、落ちてきたボンドの両端のスピン変数が奇数個の時に余分な $\tanh h$ の因子が出る。今の場合、図 11 の配置だけを別に考えればよい。a に 2 つ目のボンドを置いた時には、図の右上の配置になり、斜線の付

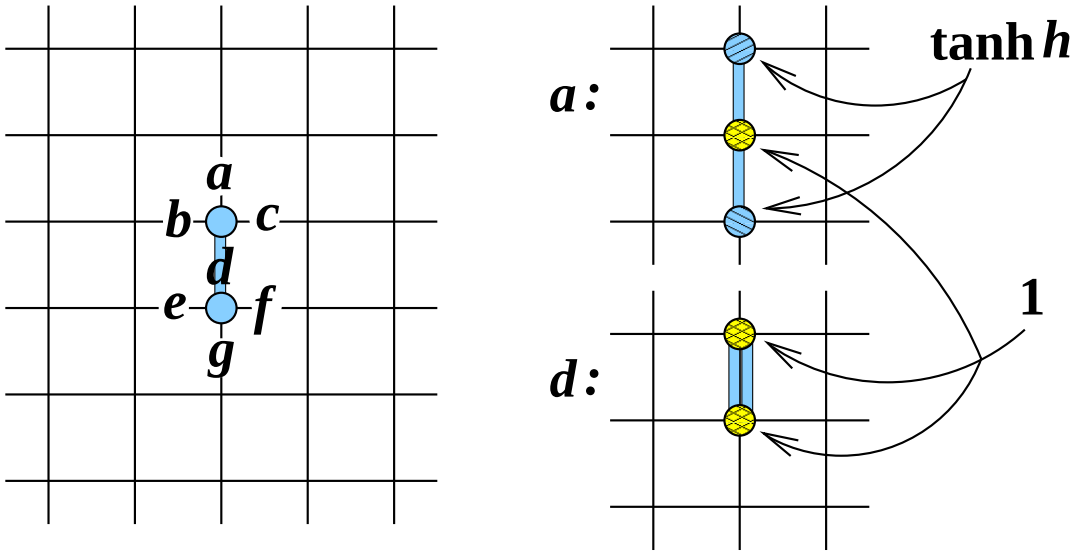


図 11: イジング模型に対する IMFA の 2 次の計算。左図の真ん中のボンドが 1 つ目のボンドの置き方である。この時、2 つ目のボンドの置き方は、a から g とそれら以外に分けられる。右側の図は a と d に置いた時を示している。

いた格子点では、スピン変数がそれぞれ 1 つ有り、$\tanh h$ の因子を出す。網目の付いた真ん中の格子点では、スピン変数が 2 つ落ちてくるので $S^2 = 1$ から、何も因子は出ない。b, c, e, f, g はこれと同じであり、$6B \tanh^2 h$ が分配関数への寄与になる (B は 1 つ目のボンドの置き方から来る)。d に置いた時 (図の右下) は、ボンドの両端ともスピン変数は 2 次で $\tanh h$ の因子は出ない。これら以外の $B(B-7)$ 通りの配置では、4 つのスピン変数が 1 次で出るので、$\tanh^4 h$ が付くことになる。以上をまとめると、分配関数の $O(J^2)$ の項は、

$$Z_2 = Z_0 \frac{J^2}{2!} \left\{ B(B-7) \tanh^4 h + 6B \tanh^2 h + B \tanh^0 h \right\} \tag{4.14}$$

と求まる。3 次の計算も少々煩雑にはなるが同様に計算でき、

$$\begin{aligned} Z_3 =& Z_0 \frac{J^3}{3!} B \Big\{ (B^2 - 21B + 116) \tanh^6 h \\ &+ (18B - 168) \tanh^4 h + (3B + 52) \tanh^2 h \Big\} \end{aligned} \tag{4.15}$$

を得る。これらから、改良された自由エネルギーを導くやり方は前副節と同じである。さて、結合定数 (温度) の臨界点を求めてみよう。結合定数を変えながら h の関数として改良された自由エネルギーをプロットすると、図 12 のようになる。ここでは、2 次の改良された自由エネルギーを例にとって、$J = 0.1, 0.3, 0.5$ の場合を図示し

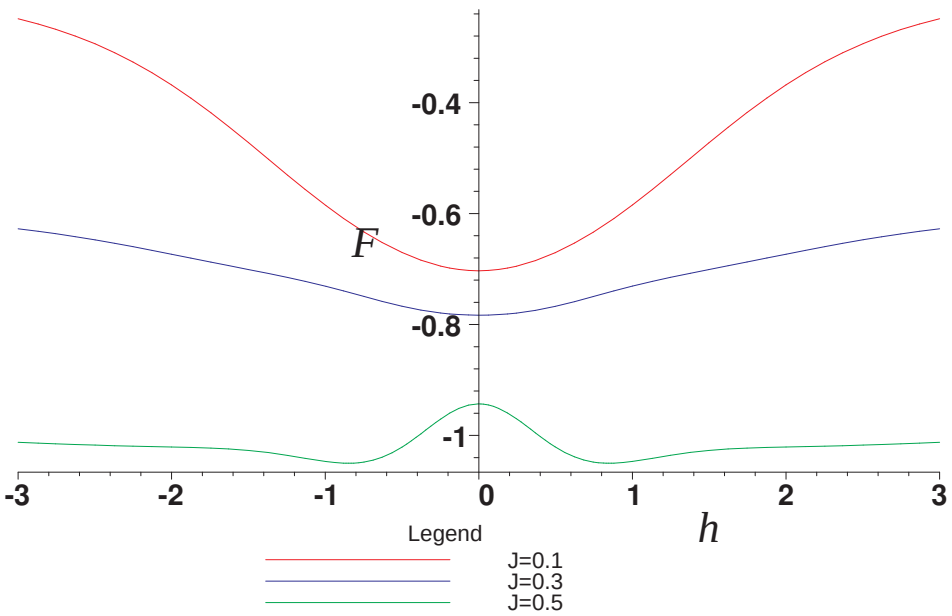


図 12: 結合定数 J を変えながら、改良された自由エネルギーをプロットしたもの。J が大きくなると $h=0$ 以外に極小値が出る。この図の場合には、$J=0.3$ と $J=0.5$ の間に臨界点が存在することが分かる。

た。ある臨界値までは、$h=0$ のみで自由エネルギーが最小になるのに対し、それを越えると $h\neq 0$ に最小値が発生し、磁化が発生する。この臨界値を J_* と定義しよう。これを求めるためには、改良された自由エネルギーの h に対する 2 階微分で $h=0$ と置いたものがゼロになる点を求めればよい。

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial h^2} f_k^{\text{improved}}\right]_{h=0} = \begin{cases} 1-4J, & \text{if } k=1, \\ 4J-12J^2, & \text{if } k=2, \\ 12J^2-\frac{104}{3}J^3, & \text{if } k=3 \end{cases} \tag{4.16}$$

より求めた、結合定数 (温度) の臨界点の結果を表 1 にまとめた。1 次では、臨界点での J の値が最近接格子点の数に顕に依っていたが、次数を上げるごとに、厳密値へ徐々に近づいて行くことが見て取れる。これは、先ほどの計算を見れば分かるように、次数を上げると共に、注目している格子点まわりで、磁化を持ったことによるバックリアクションを考慮する格子点を増やしていくことになっていることに起因する。

次数	J_*		
1	$1/4$	$=$	0.250
2	$1/3$	$\simeq$	0.333
3	$9/26$	$\simeq$	0.346
exact	$\frac{1}{2}\log(1+\sqrt{2})$	$\simeq$	0.441

表 1: イジング模型で IMFA を適用した場合の臨界結合定数 J_* の値

5 ゼロ次元の行列 ϕ^4 理論

IMFA の 2 つ目の例として、ゼロ次元の行列 ϕ^4 理論を考える。まず、行列を力学変数とする理論一般に適用できる large-N 展開 [21] を簡単にレビューする。これは、摂動展開を 2 次元面の種数の和として見る方法で、弦理論との対応に関しても面白い見方である [14]。行列 ϕ^4 理論は、この large-N 極限で、固有値分布関数を用いることにより、厳密に解けることが知られている [40]。厳密解を見ると、プラナー和は、結合定数に関する摂動展開で有限の収束半径を持つことが分かる。このため、IMFA を適用すると、上の例 (行列ではない ϕ^4 理論) は摂動展開が漸近級数でしかなかったのと比べ、より良い振る舞いをすることが期待される。

5.1 Large-N 展開

行列が変数であれば理論の形は何でも良いが、説明のため 1 つのエルミート行列 ϕ を変数として、3 次と 4 次の相互作用を持つ理論を考えよう。

$$S = N \,\mathrm{tr}\left(\frac{m^2}{2}\phi^2 + \frac{g_3}{3}\phi^3 + \frac{g_4}{4}\phi^4\right). \tag{5.1}$$

考えたいのは、このように N がトレースの前に付いているパラメトリゼーションの下で、m^2, g_1, g_2 が固定されている時の N 依存性である。まず、ファインマン則は表 2 のようになる。各行列は足を 2 本持つので、それに対応してプロパゲーターを 2 重線で書くのが便利である。ゲージ理論との類似で、行列の足をカラーの足とも言う。例として、図 13 の左側の真空グラフを考えてみよう。ここで、2 重線で描かれたグラフは、プロパゲーターを「辺」、相互作用頂点を「頂点」、カラーのループを「面」と見ることができる。図中 k にと書かれた面は向こう側に半球上のキャップを被せたと思おう。カラーの足は保存されるため、それらは「面」に割り当てられていると考え

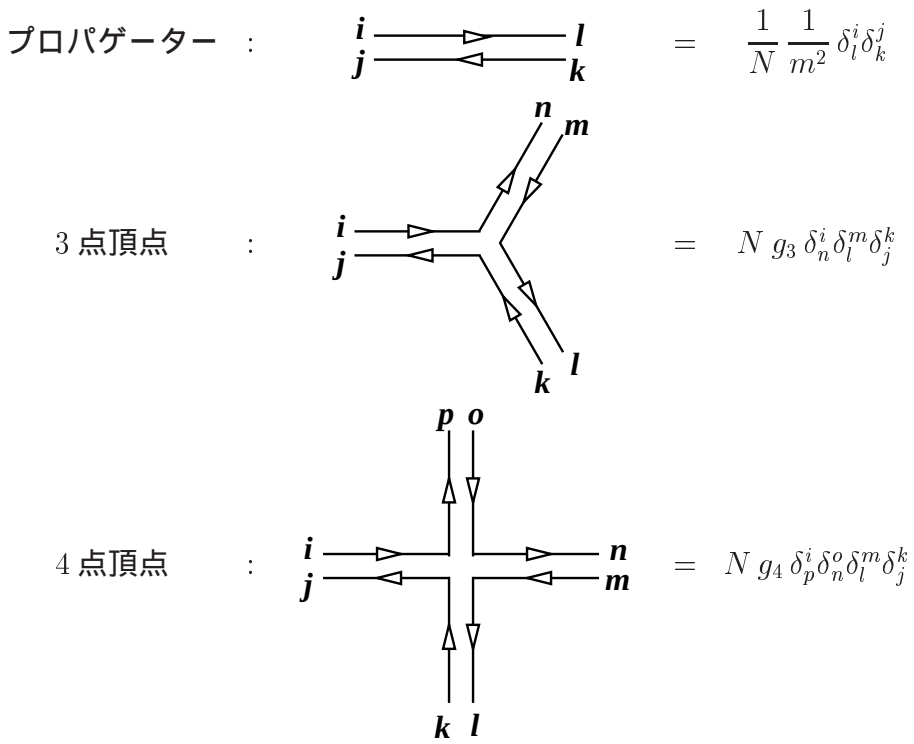


表 2: ファインマン則。

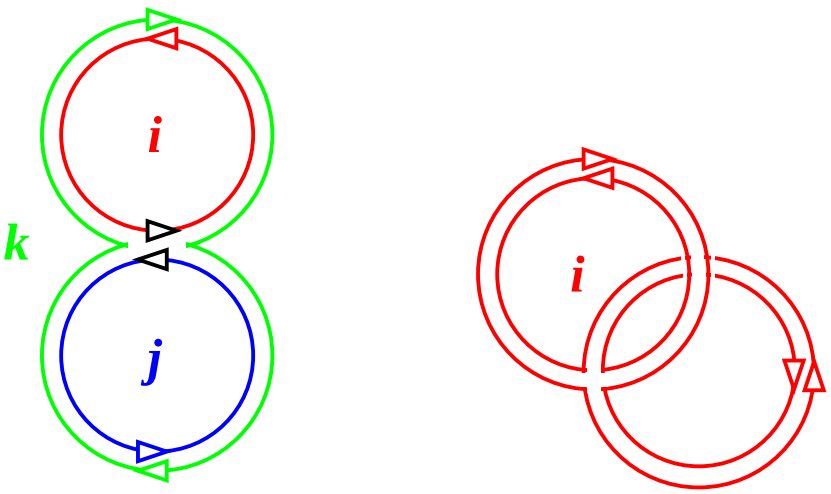


図 13: プラナーグラフ (左) とノンプラナーグラフ (右) の例。

る。さて、このグラフの N 依存性を見てみると、相互作用頂点とプロパゲーターは、ファインマン則より、それぞれ N, N^{-1} の因子を出す。また、カラーループはカラーの足についての和から N を出すので、結局

$$N^{1-2+3} = N^2 \tag{5.2}$$

を得る。もう一つ、このグラフを「ひねった」グラフ (図 13 の右側) を考えてみよう。この場合は、辺と頂点の数は同じであるが、面の数が 2 つ減る (カラーループで言うと、全てが同じ色になり 1 色で描けている)。よって N 依存性は N^0 である。もはや明らかであるが、これらは一般になり立つ次の式

$$N^{(\text{頂点の数})-(\text{辺の数})+(\text{面の数})} = N^{\chi} = N^{2-2g} \tag{5.3}$$

を具体的に計算したものである。ここで χ, g は、グラフを 2 次元面と見たときのオイラー数と種数である。もし、定義表現の場が入っているときには、さらに境界の寄与もあり $\chi = 2 - 2g - b$ (b は境界の数) 等となる。N の冪が一番大きな寄与をするグラフをプラナー (planar) と言い、それ以外のグラフをノンプラナー (non-planar) と呼ぶ。実際に上の 2 つのグラフはそれぞれ球面とトーラスに自然に乗せることができる。始めのグラフが球面上に描けることは明らかだが、後のグラフも図 14 のようにすればトーラス上に乗る。これが今の場合の面になる。

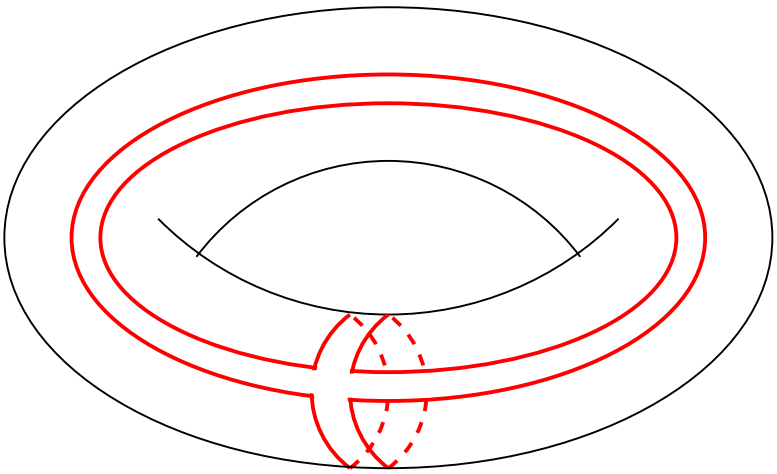


図 14: ノンプラナーグラフをトーラス上に描いた。

このように、自由エネルギーは N^2 を筆頭に $1/N$ の冪で展開され、

$$F = \sum_{g=0}^{\infty} N^{2-2g} F_g \tag{5.4}$$

と与えられる。以下では $N \to \infty$ 極限を考えるため、この展開の第 1 項目 F_0 のみが寄与する。そのため、これを単に自由エネルギーと呼ぶ。また、F_0 に寄与するプラナーグラフは, 平面上に書いたときにプロパゲーター同士が交わらないため、2 重線で描かずに 1 本の線で書くことにする。

5.2 厳密解

ここで考える理論の作用は、

$$S(\phi) = N\mathrm{tr}\left(\frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{g}{4}\phi^4\right) \tag{5.5}$$

である。ここで、ϕ は $N \times N$ エルミート行列で、tr は、その行列に対するトレースを表す。この作用は、

$$\sqrt{m^2}\,\phi \to \phi \tag{5.6}$$

$$\frac{g}{(m^2)^2} \to g \tag{5.7}$$

の置き換えをすることで $m^2 = 1$ とできるので、以後

$$S = N\mathrm{tr}\left(\frac{1}{2}\phi^2 + \frac{g}{4}\phi^4\right) \tag{5.8}$$

なる理論を考えることにする。

今、力学変数である行列が ϕ 一つしかないので、理論の不変性である $\mathrm{U}(N)$ 回転を用いて、ϕ を対角化することが可能である。そのため、対角化した時のヤコビアンを含めて、分配関数は、

$$Z = \int \mathrm{d}\phi\, e^{-S(\phi)} \tag{5.9}$$

$$= \int \prod_{i=1}^{N} \mathrm{d}\lambda_i \prod_{i\neq j} |\lambda_i - \lambda_j|\, e^{-N^2 S(\lambda)} \tag{5.10}$$

となる。ここで、固有値 $\{\lambda_i\}_{i=1,\ldots,N}$ に対する作用 $S(\lambda)$ は、

$$S(\lambda) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{2}\lambda_i^2 + \frac{g}{4}\lambda_i^4\right) \tag{5.11}$$

と書かれる。さらに、ヤコビアンの項を exponential の肩に乗せることで、

$$Z = \int \prod_{i=1}^{N} \mathrm{d}\lambda_i\, e^{-N^2 S_{\mathrm{eff}}(\lambda)}, \tag{5.12}$$

$$S_{\text{eff}}(\lambda) = \frac{1}{2}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\lambda_i^2 + \frac{g}{4}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\lambda_i^4 - \frac{1}{N^2}\sum_{1\le i\ne j\le N}\log|\lambda_i-\lambda_j| \tag{5.13}$$

と書き直すことができる。このように書くと、有効作用 $S_{\text{eff}}(\lambda)$ の全体に対して、N^2 の因子がかかっており、large-N 極限では有効作用の極限を求めれば良いことになる。有効作用を簡単に眺めておくと、古典的には 2 次と 4 次のポテンシャルの和で表されているので、固有値は $\lambda = 0$ に集積する方がエネルギー的に得をする。しかし、対角化することにより現れたヤコビアンの項 (エントロピー項) は、全ての固有値の間に $\log$ 型の斥力を働かせることになる。このため、各固有値は $\lambda = 0$ の周りに集まるが、完全に集積するのではなく、広がりを持って集まることになる。実際には以下で見るように、広がりは有限になる。

では、$S_{\text{eff}}(\lambda)$ の停留点を求めてみよう。ここで、固有値分布関数 $\rho(\lambda)$ を以下のように導入する。

$$\rho(\lambda) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\delta(\lambda-\lambda_i). \tag{5.14}$$

この式からすぐに分かる事は、分布関数に対する拘束条件として、

$$\int \mathrm{d}\lambda\ \rho(\lambda) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\int \mathrm{d}\lambda\ \delta(\lambda-\lambda_i) = 1 \tag{5.15}$$

が課せられていることである。固有値分布関数を用いて、式 (5.13) を書き直すと、

$$S_{\text{eff}}(\rho) = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\lambda\ \left(\frac{1}{2}\lambda^2+\frac{g}{4}\lambda^4\right)\rho(\lambda) - \int_{\lambda\ne\lambda'}\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}\lambda'\ \log|\lambda-\lambda'|\rho(\lambda)\rho(\lambda'). \tag{5.16}$$

拘束条件の下で $S_{\text{eff}}(\rho)$ の停留点を求めるには、ラグランジュ未定定数法を用いて、

$$\frac{\partial}{\partial\rho(\lambda)}\left(S_{\text{eff}}(\rho) + \mu\left(\int \mathrm{d}\lambda\ \rho(\lambda) - 1\right)\right) = 0 \tag{5.17}$$

の解を求めればよい。μ が未定定数である。微分を実行すると、

$$\frac{1}{2}\lambda^2 + \frac{g}{4}\lambda^4 - 2\int_{\lambda'\ne\lambda}\mathrm{d}\lambda'\ \log|\lambda-\lambda'|\,\rho(\lambda') + \mu = 0 \tag{5.18}$$

を得る。未定定数を消去したいので、更に λ で微分を行う。

$$\int_{\lambda\ne\lambda'}\mathrm{d}\lambda'\ \frac{\rho(\lambda')}{\lambda-\lambda'} = \frac{1}{2}(\lambda+g\lambda^3) \rightrightarrows f(\lambda). \tag{5.19}$$

この式と、拘束条件を同時に満たす分布関数 $\rho(\lambda)$ を探せば良い。ここで、固有値分布関数は有限の $a > 0$ に対して、$-a \le \lambda \le +a$ に台 (support) を持つと仮定する。後

で分かる事は、この仮定が破れるのは、固有値がポテンシャルから溢れて、物理的には解が無い時である。この仮定の下では、上の式は台の上でのみ $(-a \leq \lambda \leq +a)$ 成り立てばよい。ここで、一般の複素数 z に対して、

$$F(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\lambda \, \frac{\rho(\lambda)}{z - \lambda} \tag{5.20}$$

なる関数を導入する。この関数は、$\rho(\lambda)$ がゼロでない $z = \lambda$ で虚数部分に飛びを持つ。つまり、図 15 に示したように、z:実、$-a \leq z \leq +a$ にカットを持つことになる。この $F(z)$ に対する条件を考える。

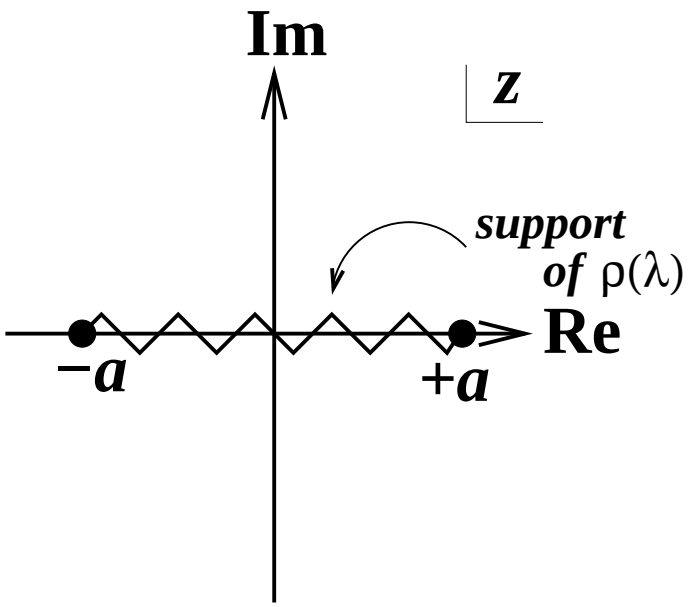


図 15: $F(z)$ の特異性。固有値分布関数がノンゼロになる z:実、$-a \leq z \leq +a$ にカットを持つ。

1. まず、z : 実 かつ $z < -a, +a < z$ の場合、分布関数は実数なので、$F(z)$ も実数値である。

2. 次に、z : 実 かつ $-a \leq z \leq +a$ の場合、$\epsilon = +0$ として、

$$F(z + i\epsilon) = \int \mathrm{d}\lambda \, \frac{\rho(\lambda)}{z + i\epsilon - \lambda} \tag{5.21}$$

$$= \mathcal{P} \int \mathrm{d}\lambda \, \frac{\rho(\lambda)}{z - \lambda} - i\pi\rho(z) \tag{5.22}$$

を得る。$z - i\epsilon$ の場合も考えると、

$$\mathrm{Re}F(z) = f(z) \tag{5.23}$$

$$\rho(z) = -\frac{1}{\pi}\mathrm{Im}F(z + i0) = +\frac{1}{\pi}\mathrm{Im}F(z - i0) \tag{5.24}$$

となる。

3. 更に、拘束条件から、$z \to \infty$ の時、

$$F(z) = \int \mathrm{d}\lambda \, \frac{\rho(\lambda)}{z} + O(z^{-2}) \tag{5.25}$$

$$= \frac{1}{z} + O(z^{-2}) \tag{5.26}$$

も満たすべき条件となる。

条件 1 と 2 から、関数 $F(z)$ の形は、

$$F(z) = \frac{1}{2}(z + gz^3) - \left(\frac{1}{2}gz^2 + c\right)\sqrt{(z-a)(z+a)} \tag{5.27}$$

と定まる。ここで、第 1 項目は、条件 2 の実数部分から決まる。第 2 項目の平方根の因子は、条件 2 で虚数部分が不連続になることから、$-a \leq z \leq +a$ にカットを持つように決めた。この平方根関数の枝は、$|z| > a$ で連続、かつ z:実、かつ $z > +a$ で正の値をとるように定めている。さらに、平方根の前の関数は、z の整式であることが必要で、条件 3 を少し先取りして、z^3 以上の項は無く、z^2 の係数は $g/2$ とした。また、元々の理論の $\mathbf{Z}_2$ 不変性より、z^1 の項は落としてある[10]。残ったパラメーターである a と c は、条件 3 より決まる。z が大きいところで平方根を展開すると、

$$F(z) \sim \frac{1}{2}(z + gz^3) - \left(\frac{1}{2}gz^3 + cz - \frac{ga^2}{4}z - \frac{a^2c}{2}\frac{1}{z} - \frac{ga^4}{16}\frac{1}{z}\right) \tag{5.28}$$

となり、z の係数を 0、$1/z$ の係数を 1 と置くと、

$$a^2 = \frac{2}{3}\frac{-1 \pm \sqrt{1 + 12g}}{g} \tag{5.29}$$

$$c = \frac{2 + ga^2}{4} \tag{5.30}$$

と求まる。$g \to 0$ の自由場極限が存在するためには、復号で $+$ を採ればよいので。

$$a^2 = \frac{2}{3}\frac{\sqrt{1 + 12g} - 1}{g} \tag{5.31}$$

[10] 分布関数の台を定める時にもこの $\mathbf{Z}_2$ 不変性を用いていた。

$$c = \frac{\sqrt{1+12g}+2}{6} \tag{5.32}$$

が求める答えとなる。条件 2 の虚数部分より、分布関数は、

$$\rho(\lambda) = \frac{1}{\pi}\left(c + \frac{1}{2}g\lambda^2\right)\sqrt{a^2-\lambda^2}, \qquad (-a \leq \lambda \leq +a) \tag{5.33}$$

である。答えの中に平方根関数 $\sqrt{1+12g}$ が含まれているため、結合定数 g で展開した場合、この関数の特異性に引っかかり $|g| < 1/12$ が収束域となる。質量パラメー

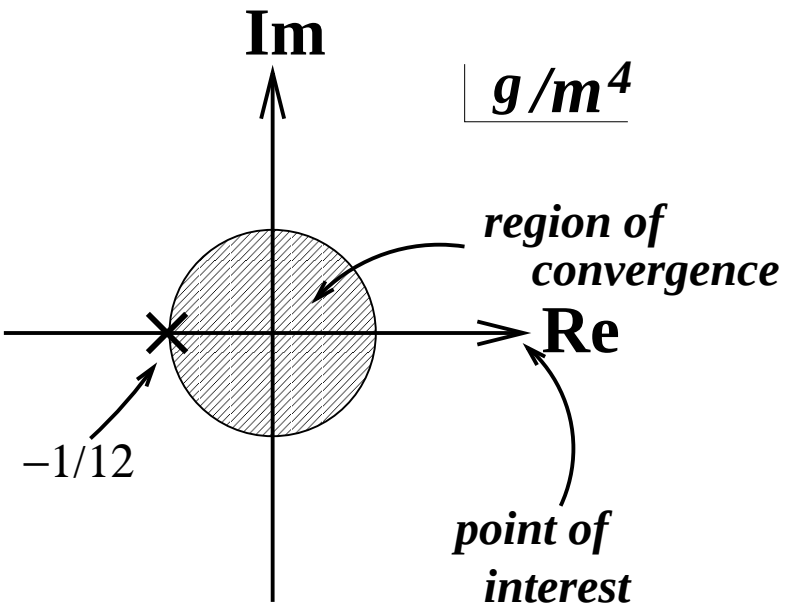


図 16: 行列 ϕ^4 理論の収束域。有限の収束半径となる。

ターを復活させて、逆に $g = 1$ と置くと、$|m^4| > 12$ が収束域であり、通常の摂動論ではゼロ質量極限を議論する事は出来ない。固有値分布関数をプロットしてみよう。まず、$g = 0$ とした自由場の場合が図 17 である。太線が固有値分布であり、参考のためポテンシャルを細線で示した。固有値分布が有限の範囲に収まっていることが分かる。 相互作用を入れて $g = 3$ とすると (図 18)、4 次のポテンシャルにより $\lambda = 0$ の部分が平らに近づくため、固有値は真ん中に寄りたがる。しかし、ヤコビアンからの $\log$斥力のために実際には真ん中がへこんだ分布を取っている。最後に、収束半径上の特異点を与える $g = -1/12$ を図 19 に示した。上の 2 つの場合と異なり、$\rho = 0$ となる点での傾きが 0 になっている。4 次の項が逆符号であるため、さらに相互作用を強めると、固有値はポテンシャルから溢れ、理論が定義されなくなる。

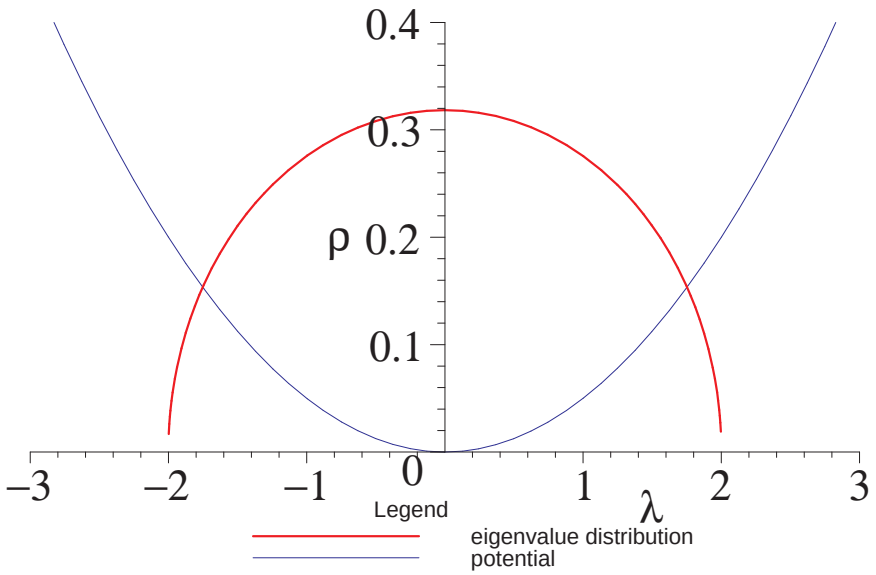


図 17: 行列 ϕ^4 理論の固有値分布。$g = 0$ の時。

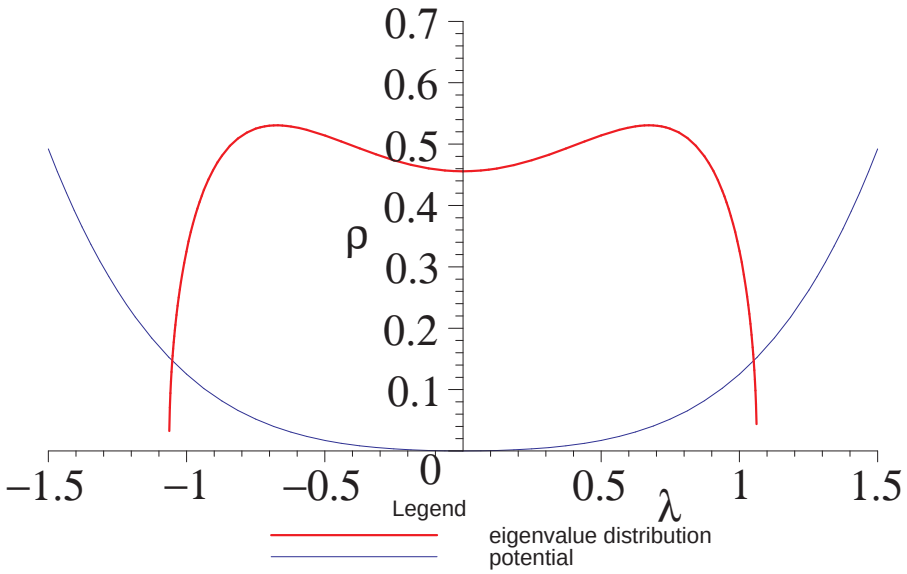


図 18: 行列 ϕ^4 理論の固有値分布。$g = 3$ の時。

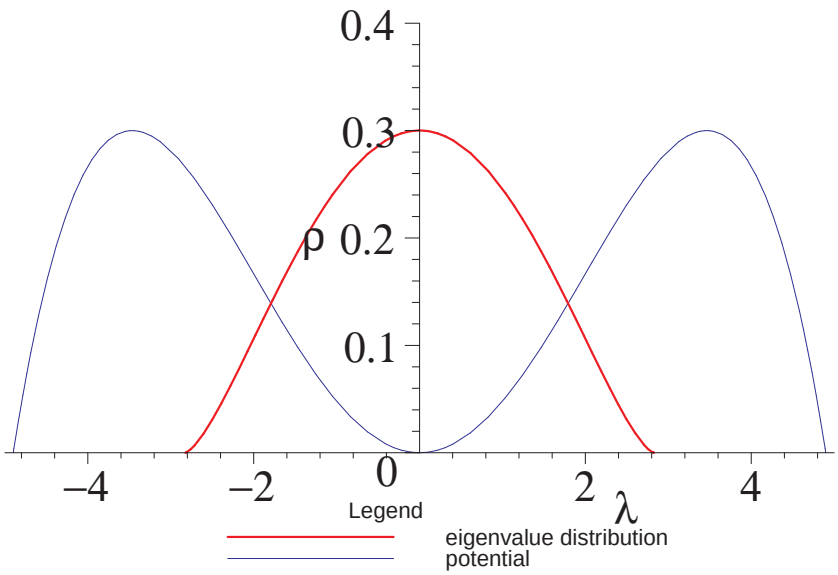


図 19: 行列 ϕ^4 理論固有値分布。$g = g_{\rm c} = -1/12$ の時。

5.3 IMFA

行列 ϕ^4 理論の分布関数を求めたが、この理論は元々質量項を含んでいるため、副節 3.3 で説明したとおり、理論を変形しないままで自由エネルギーを求めておけば、あとは、ITE を適用するだけで改良された自由エネルギーを得ることができる。

では、自由エネルギーを求めよう。固有値分布関数を知っているので、2 点関数を計算してから、それを積分して自由エネルギーを求めるのが近道である。2 点関数 $\langle\ \phi^2\ \rangle$ は、

$$\langle\ \phi^2\ \rangle = \int_{-a}^{+a} {\rm d}\lambda\ \lambda^2 \rho(\lambda) \tag{5.34}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{1+12g}-1\right)^2 \left(2\sqrt{1+12g}+1\right)}{108 g^2} \tag{5.35}$$

となる。ここで、質量パラメーター m^2 を復活させておく。式 (5.6)(5.7) より、

$$\langle\ \phi^2\ \rangle = \frac{(m^2)^3 \left(\sqrt{1+12\frac{g}{(m^2)^2}}-1\right)^2 \left(2\sqrt{1+12\frac{g}{(m^2)^2}}+1\right)}{108 g^2} \tag{5.36}$$

を得る。自由エネルギーと 2 点関数の関係は、

$$\frac{\partial F(m^2)}{\partial m^2} = \frac{1}{2}\langle\ \phi^2\ \rangle \tag{5.37}$$

なので、

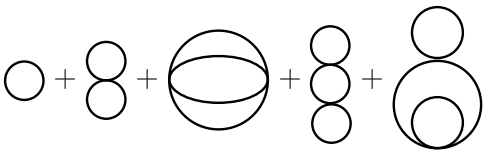
$$F(m^2) = \int \mathrm{d}m^2 \ \frac{1}{2}\langle\ \phi^2\ \rangle \tag{5.38}$$

$$\begin{aligned}
=&\frac{1}{432}\left(\frac{\left(m^2\right)^2+12\,g}{\left(m^2\right)^2}\right)^{3/2}\left(m^2\right)^4 g^{-2}\\
&+\frac{1}{24}\left(\frac{\left(m^2\right)^2+12\,g}{\left(m^2\right)^2}\right)^{3/2}\left(m^2\right)^4 g^{-1}\left(\left(m^2\right)^2+12\,g\right)^{-1}\\
&+\frac{1}{2}\left(\frac{\left(m^2\right)^2+12\,g}{\left(m^2\right)^2}\right)^{3/2}\left(m^2\right)^3 \ln\left(\left(m^2\right)+\sqrt{\left(m^2\right)^2+12\,g}\right)\left(\left(m^2\right)^2+12\,g\right)^{-3/2}\\
&-\frac{1}{432}\frac{\left(m^2\right)^4}{g^2}-\frac{1}{12}\frac{\left(m^2\right)^2}{g}-\frac{1}{2}\log 2-\frac{3}{8}
\end{aligned} \tag{5.39}$$

と求まる。これでは、複雑すぎるが、g の冪で展開して最初のいくつかの項を見てみると、

$$F(m^2) = -\frac{1}{2}\log(1/m^2)+\frac{1}{2}\frac{g}{(m^2)^2}-\frac{9}{8}\frac{g^2}{(m^2)^4}+O(g^3) \tag{5.40}$$

$$= \quad + \quad + \quad + \quad + \quad + O(g^3) \tag{5.41}$$



となっており、ファインマングラフによる展開と一致している。これらの関数の振る舞いは、図 20 に示した。$|m^4| > 12$ が収束域であるため、質量が小さいほうから振動してしまう。しかし、質量項を含む形で自由エネルギーが求まっているので、ITE を適用し改良すれば良い。

$$F_k^{\mathrm{improved}} = F\left(m_0^2+g(m^2-m_0^2)\right)\Big|_k. \tag{5.42}$$

ここで、記号 $|_k$ は、まず g について展開し、$O(g^{k+1})$ の項を無視し、さらに $g=1$ と置く一連の操作を表す。図 21 に IMFA での自由エネルギーをプロットした。ここでも、やはり理論に含まれる質量パラメーターは $m^2=0$ とした。 ここで、ゼロ質量の場合の自由エネルギーの厳密値は、式 5.39 より求めることができ、

$$F_{\mathrm{massless}} = \frac{1}{4}\log 3-\frac{3}{8} \simeq -0.1003469278 \tag{5.43}$$

である。改良された自由エネルギーは、この厳密値の上にプラトーを形成している。行列でない ϕ^4 理論と比べると、まずプラトーがかなり大きく広がっていることが分かる。また、以前はプラトーの左端がだんだん大きくなっていくように見えたが、今

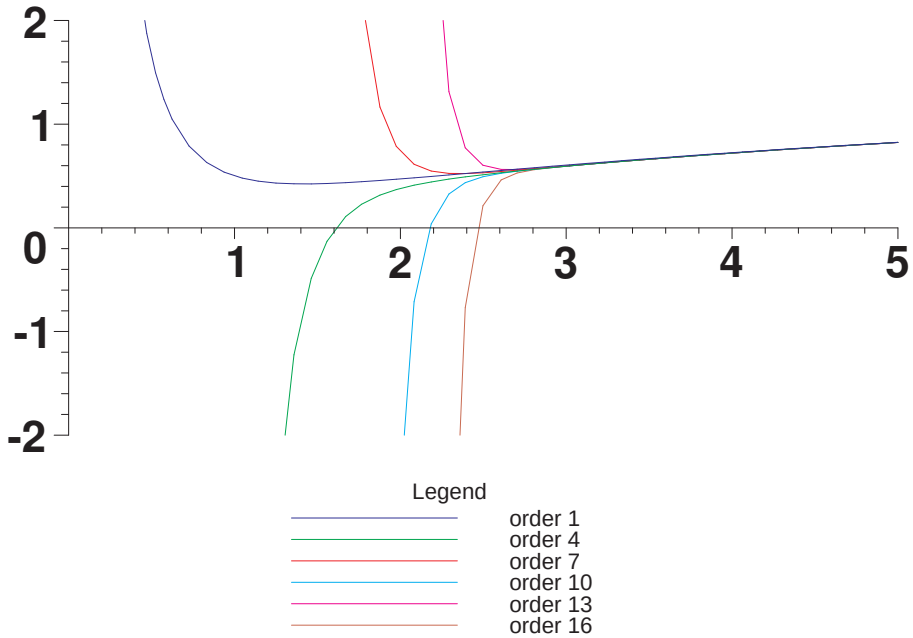


図 20: 行列 ϕ^4 理論の自由エネルギー。横軸は質量パラメーター m^2 である。

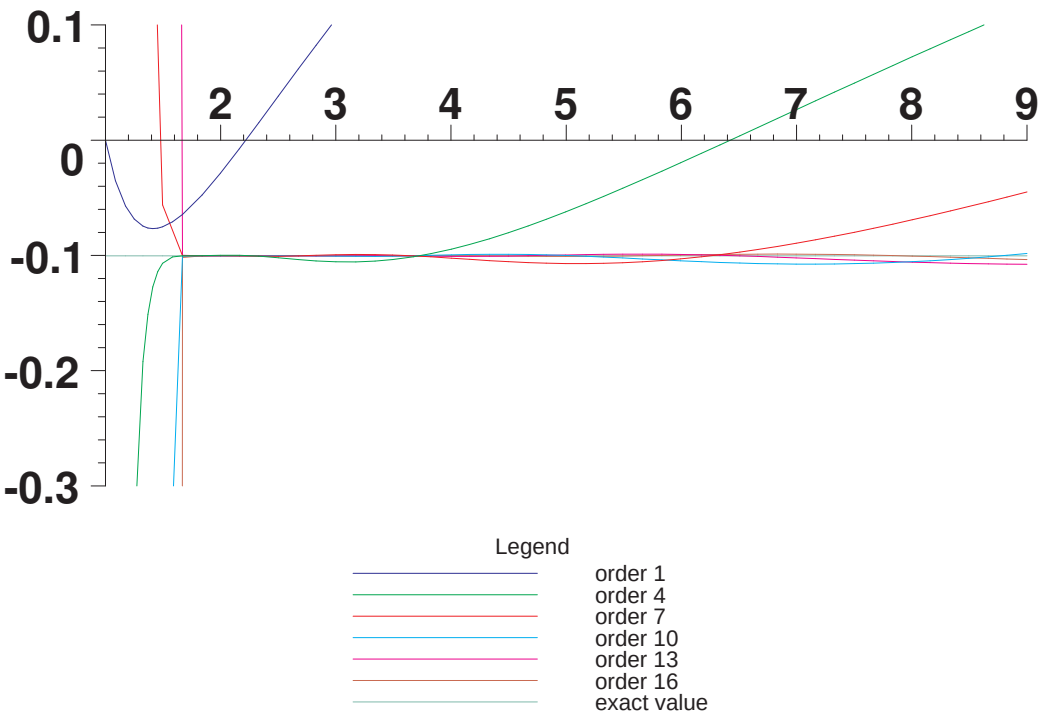


図 21: 行列 ϕ^4 理論の改良された自由エネルギー。横軸は質量に対する手で導入したパラメーター m_0^2 である。質量はゼロとしている。

回はあるところ ($m_0^2 \sim 1.65$) あたりに集まってきそうに見える。さらに、右端は大きくなっているので、プラトーは高次に行けば行くほど大きくなっていくことが分かる。これは、行列版の持つ性質であり、プラナー和が有限の収束半径を持つことの結果であろうと思われる。

6 Schwinger-Dyson方程式と2粒子既約自由エネルギー

IMFA を様々な理論に適用しようとした時 (特に IIB 型行列模型)、近似を高次まで実行しようとすると、非常に多くのファインマングラフを評価する必要がある。ここでは、評価すべきグラフの数を大幅に減らすためのテクニックとして、2 粒子規約自由エネルギー (two-particle irreducible free energy)、以下 2PI 自由エネルギーと呼ぶ、の説明をする。

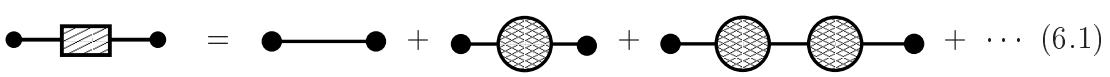
2PI 自由エネルギーと通常の自由エネルギーは、2 点関数に対するソースに関してルジャンドル変換することによって、互いに移り変わる。よって、楽なほうを計算すればよいのだが、2PI 自由エネルギーのほうは、グラフに 2 粒子規約性を条件として課すため、かなり計算が楽になる。例としては、再びゼロ次元の ϕ^4 理論を取り上げる。

通常の自由エネルギーを計算するための道具としてのみ、2PI 自由エネルギーを用いているように見えるが、すぐ下で触れるように、2PI 自由エネルギーは Schwinger-Dyson 方程式 (Schwinger-Dyson equations: SDE) と深い関係にある。SDE とは、様々な相関関数間の無矛盾条件で、非摂動効果を抽出するために度々使われてきた。そのため、2PI 自由エネルギーには、より基本的な意味づけをすることができるかもしれない。これは次節でみることにする。

6.1 2 点関数に対する Schwinger-Dyson 方程式の導出

まず、ゼロ次元 ϕ^4 理論の 2 点関数 (two point function, or full propagator) に対する SDE を導こう。

フルプロパゲーターである 2 点関数と、1 粒子規約 (one-particle irreducible: 1PI) プロパゲーターの間の関係は、次のように図式化できる。

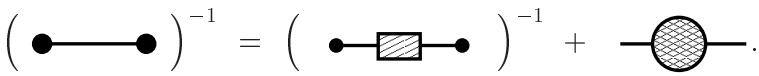


(6.1)

(6.2)

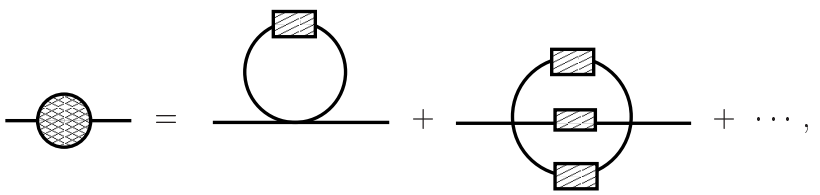
ここで、斜線付四角印のついたプロパゲーターはフルプロパゲーターで、網目付丸印のついたプロパゲーターは 1PI プロパゲーターを表す。また、何も付いてないプロパゲーターは裸のプロパゲーター (2 乗質量の逆数) である。それぞれの両端にある黒丸は足付きである事を示している。下に出てくるように、黒丸が付いていないものは、足を切っていることを表す。

上式に、右からフルプロパゲーターの逆、左から裸のプロパゲーターの逆をかけることにより、次式を得る。



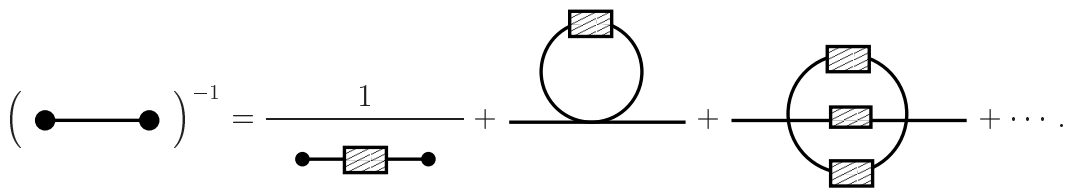
(6.3)

今度は、1PI プロパゲーターを、フルプロパゲーターの言葉で書いてみると、



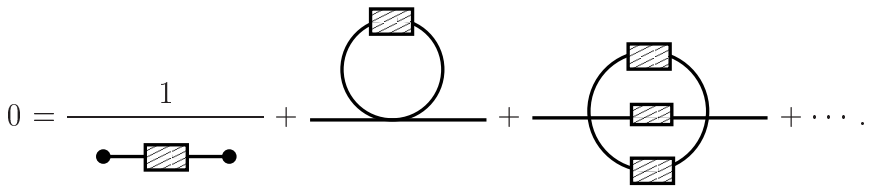
(6.4)

となる。式 (6.1) と式 (6.4) を組み合わせることで、次の SDE が導かれる。



(6.5)

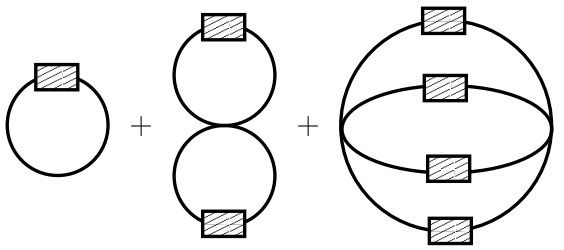
この形まで持ってくると、裸のプロパゲーターは逆数でしか現れていないので、素直にゼロ質量極限をとることができ、最終的に欲しい SDE を得る。



(6.6)

6.2 2PI free energy: SDE を経由して

前副節で SDE を導いたが、これらはよりコンパクトな形にまとめることができる。SDE をフルプロパゲーターで積分することにより、次の量を得る。

$G =$  $+ \cdots .$ (6.7)

SDE (6.6) がフルプロパゲーターに対するものであったため、いかなる自己エネルギーをも部分グラフとして含んでいなかった。式 (6.7) の右辺はこの性質を受け継いで、自己エネルギーとなる部分グラフを含まない連結真空グラフの和になっている。よって、G は 2 粒子規約なグラフのみを含むため、これを 2PI 自由エネルギーと呼ぶ。ここで、2 粒子規約とは、異なる 2 つのプロパゲーターを切った時、どのような組み合わせの 2 つを切っても連結で残るグラフのことを指す。

2PI 自由エネルギー G は、SDE を積分することにより得られたので、G の停留点は SDE の解となっているという意味で重要である。

6.3 ルジャンドル変換

ここでは、通常の自由エネルギーに 2 点のソースを加えて、そのソースに対するルジャンドル変換 (Legendre transformation) を行う。変換後の関数が 2PI 自由エネルギーである。この対応は、場の理論で、1 点のソースを入れてルジャンドル変換を行うことにより、1PI の有効作用 (one-particle irreducible effective action) が得られるのとほぼ同じである。

では、まず 2 点のソースが入った自由エネルギーを考えよう。

$$Z(J) = \int \mathrm{d}\phi \, e^{-S(\phi) - J\phi^2}, \tag{6.8}$$

$$F(J) = -\log Z(J). \tag{6.9}$$

J が 2 点関数 ϕ^2 に対するソースである。ソース J に対するルジャンドル変換は次で与えられる。

$$K(J) = \frac{\partial F(J)}{\partial J}, \tag{6.10}$$

$$G(K) = \left[F(J) - J\frac{\partial F(J)}{\partial J} \right]_{J=J(K)}. \tag{6.11}$$

第 1 式で現れている K が、ソース J に対する共役変数で、自由エネルギー F に対するルジャンドル変換後の関数 G は、K の関数として表される。この K の意味を見るため、第 1 式で $J = 0$ と置いてみる。実際に解析したい理論の作用は $S(\phi)$ なので、$J = 0$ が興味ある場合なのである。

$$K(J=0) = \frac{-1}{Z}\frac{\partial}{\partial J}\int \mathrm{d}\phi\, e^{-S(\phi)-J\phi^2}\Big|_{J=0} \tag{6.12}$$

$$= \frac{1}{Z}\int \mathrm{d}\phi\, \phi^2 e^{-S(\phi)} \tag{6.13}$$

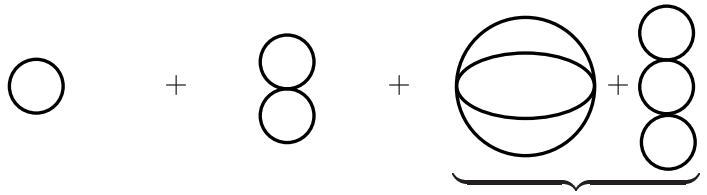
$$= \langle\, \phi^2 \,\rangle_{J=0} \equiv\!\equiv c. \tag{6.14}$$

つまり、$K(J=0)$ とは、フルプロパゲーターそのものである。以降、これを c と呼ぼう。そして、フルプロパゲーター c を引数とする変換後の関数 $G(c)$ は、2PI 真空グラフの和となっているのである　[42]。

$G(c)$ が実際に 2PI 自由エネルギーとなっていることを、例を通して見てみよう。やはり、ゼロ次元の ϕ^4 理論 (2.11) を考える。

ソースの項も、裸の質量と合わせてプロパゲーターに入れてしまう。すると、プロパゲーターの変更のみで、以前と同様に通常の自由エネルギーを得ることができる。

F =



$O(\lambda^0)$ $O(\lambda^1)$ $O(\lambda^2)$ $O(\lambda^3)$

$$= \frac{1}{2}\log(m^2+2J) + \lambda\frac{1}{8}\frac{1}{(m^2+2J)^2} - \lambda^2\left(\frac{1}{48}+\frac{1}{16}\right)\frac{1}{(m^2+2J)^4} + O(\lambda^3). \tag{6.15}$$

これから分かるように、ソース J は質量と共に (m^2+2J) の組み合わせでしか現れないので、以降では $J=0$ と置こう。例えば、微分は

$$\frac{\partial}{\partial J} = 2\frac{\partial}{\partial m^2} \tag{6.16}$$

とすれば良い。これを用いて、フルプロパゲーター c は次のように求まる。

$$c = \frac{1}{m^2} - \frac{\lambda}{2}\frac{1}{(m^2)^3} + \lambda^2\frac{2}{3}\frac{1}{(m^2)^5} + O(\lambda^3). \tag{6.17}$$

この式を、$1/m^2$ に対する方程式と見ると、λ のゼロ次から始めて、繰り返し解を代入し、高次の解を得ることができる。実際に、λ^2 までの解を求めると、

$$\frac{1}{m^2} = c + \frac{\lambda}{2}c^3 + \frac{\lambda^2}{12}c^5 + O(\lambda^3) \tag{6.18}$$

となる。後は、F のルジャンドル変換の式 (6.11) に代入するだけである。

$$G = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log c + \frac{1}{2}c\,m^2 + \frac{\lambda}{8}c^2 - \frac{\lambda^2}{48}c^4 + O(\lambda^3). \tag{6.19}$$

通常の自由エネルギー $F(J=0)$ では、裸の質量 m^2 は、プロパゲーターとして $1/m^2$ の正冪で現れるため、ゼロ質量極限を取る事はできない。しかし、2PI 自由エネルギーの表式では、唯一、質量項を挿入した 1 ループダイヤグラム $\frac{1}{2}c\,m^2$ に現れるだけである。これは、質量項を二つ以上挿入したダイヤグラムは常に 2PR(two-particle reducible) になってしまうからである。これにより、$G(c)$ では、ゼロ質量極限を取ることが可能で、ゼロ質量の ϕ^4 理論の 2PI 自由エネルギーとして、

$$G = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log c + \frac{\lambda}{8}c^2 - \frac{\lambda^2}{48}c^4 + O(\lambda^3). \tag{6.20}$$

が、最終的に得られる。これは、式 (6.7) で図式的に表したものを、きちんと再現している[11]。通常の自由エネルギー F で入っていた、団子が 3 つ繋がった形のダイヤグラムが、2PI 自由エネルギー G には含まれていないことに注意しよう。このダイヤグラムは、今の次数では唯一現れる 2PR ダイヤグラムである。

さて、ここまでで、通常の自由エネルギーと 2PI 自由エネルギーが、互いにルジャンドル変換で繋がっていることを見た。実際の計算の場合には、条件の厳しい 2PI 自由エネルギーの方が少ない労力で計算してしまうことができる。適当な次数まで $G(c)$ を計算した後に、逆ルジャンドル変換を施すことにより、通常の自由エネルギーを得ることができる。

そして、通常の自由エネルギー $F(m^2)$ が得られたら、前節での ITE を適用することで、改良された自由エネルギー $F^{\rm improved}$ が求まる。もう一度、ϕ^4 理論に対してその処方をまとめておこう。まず、結合定数 λ を形式結合定数 g を含むもの $g\lambda$ に置き換える。その後、m^2 を $m_0^2 - gm_0^2$ にすればよい (ここでは、ゼロ質量の場合を書いている)。あらわに書き下すと、

$$F_k^{\rm improved} = F(m_0^2 - gm_0^2)\big|_k \tag{6.21}$$

$$= -\frac{1}{2}\log c_0 + g\left(\frac{\lambda}{8}c_0^2 - \frac{1}{2}\right) + g^2\left(-\frac{\lambda^2}{48}c_0^4 - \frac{\lambda^2}{16}c_0^4 + \frac{\lambda}{4}c_0^2 - \frac{1}{4}\right) + \cdots\Bigg|_k, \tag{6.22}$$

[11] ここでは、定数項は意味が無い。

となる。ここで、$1/m_0^2$ を c_0 と書いた。当然、これは式 (2.17) と、一つ一つの項毎に対応している。

大きな目標としては、IIB 型行列模型に対して、これまで説明した解析法を適用することである。その場合、2PI 自由エネルギーを用いることで、計算量を大きく減らすことが可能である。参考までに、1 次から 3 次のグラフ数の比較を表 3 に示す。こ

	2PI グラフ数	連結グラフ数	個数の比
1 次	2	2	1.00
2 次	2	5	0.40
3 次	4	31	0.13

表 3: 計算すべきグラフ数の比較。2PI グラフ数が G を計算するために必要なグラフ数で、連結グラフ数が F を計算するために必要なグラフ数である。

の表から分かるように、3 次で既に大きな開きが出る。これは、当然高次に行くと更に大きくなる。2PI 自由エネルギーの利用は、実際の計算の為には重要なテクニックである[12]。

7 2PI 自由エネルギーへの ITE の直接の適用

前節までで、改良された自由エネルギーを得る手続きを説明した。それをまとめると以下のようになる。

$$\boxed{\text{2PI 自由エネルギー } G(c)}$$

$$\Downarrow G(c) \text{ にルジャンドル変換を施す}$$

$$\boxed{\text{通常の自由エネルギー } F(m^2)}$$

$$\Downarrow F(m^2) \text{ に ITE を適用する}$$

$$\boxed{\text{改良された自由エネルギー } F^{\text{improved}}(m_0^2)}$$

ここでは、全く別の方向性を考えてみよう。第 3 節で ITE を導入したが、そこでは、例として $\sum(-)^n x^n$ なる、級数を考えた。このように、ITE は、通常の自由エネルギーに適用して、改良された自由エネルギーを得るためだけではなく、様々な級数

[12] グラフの計算、ルジャンドル変換、そして ITE の適用の内で、グラフ計算が大半の時間を使う。

に直接適用して、その収束半径の外での値を近似することが可能な近似法である。これは、ITE が、IMFA をより一般化して得られた近似法であることに起因している。

以前に、2PI 自由エネルギーは、SDE と深い関係を持っており、非摂動的ダイナミクスを解析する際には、有用となるかもしれない、と述べた。そこで、2PI 自由エネルギーと ITE を直接組み合わせて、近似を行ってみる。

7.1 例: 行列 ϕ^4 理論

例として、ゼロ次元の行列 ϕ^4 理論を取ろう。以下では、これまでと同様に、ゼロ質量に限って考えることにする。作用は、

$$S = N\frac{g}{4}\mathrm{Tr}\,\phi^4 \tag{7.1}$$

である。large-N 極限でのプラナー和は、第 5 節で求めた。もう一度、結合定数 g で展開した形を書いておく。

$$\begin{aligned} F(m^2) = &-\frac{1}{2}\log(1/m^2) + \frac{1}{2}\frac{g}{(m^2)^2} - \frac{9}{8}\frac{g^2}{(m^2)^4} + \frac{9}{2}\frac{g^3}{(m^2)^6} \\ &- \frac{189}{8}\frac{g^4}{(m^2)^8} + \frac{729}{5}\frac{g^5}{(m^2)^{10}} + O(g^6) \end{aligned} \tag{7.2}$$

実際の計算の手順とは逆になるが、今の場合は通常の自由エネルギーの方が簡単に求められているので、これにルジャンドル変換を施して、2PI 自由エネルギー $G(x)$ を求めることにする。その結果は、

$$G(x) = -\frac{1}{2}\log(x) + \frac{1}{2}gx^2 - \frac{1}{8}g^2x^4 + \frac{1}{6}g^3x^6 - \frac{3}{8}g^4x^8 + \frac{11}{10}g^5x^{10} + O(g^6) \tag{7.3}$$

となる。ここで、G の引数 x は、m^2 の共役変数である、フルプロパゲーターを表す。今の理論では、各々の次数の係数は、その次数の対称性因子の和を表す。しかも、フェルミオンが無いので、それらは足されるだけである。そうして、上の 2 つの式を比べると、高次に行くほど、F の係数よりも G の係数のほうがだんだんと小さくなっていき、G に寄与するグラフが大きく減っていることが分かる[13]。

では、G を x に関して改良しよう。そのためには、x を $x_0 + g(x - x_0)$ と置き換えればよい。その後、g に関して展開を行い、$O(g^{k+1})$ を無視して、$g = 1$ と置くと、改良された 2PI 自由エネルギーの列 $\{G_k^{\mathrm{improved}}\}_{k=1,2,\ldots}$ を得る。

[13] 実際にグラフで書くと、G の 5 次に寄与するグラフはたった 3 つしかないことが分かる。ちなみに、対称性因子の和は 1/2+1/2+1/10=11/10 となっている。

まず、これらの関数の振る舞いを見るために x を固定して、G を x_0 の関数としてプロットしてみよう。図 22 は $x = 0.8$ としてみた時のプロットであるが、すぐに、$G \sim 0.4$ 付近にプラトーが存在することが分かる。

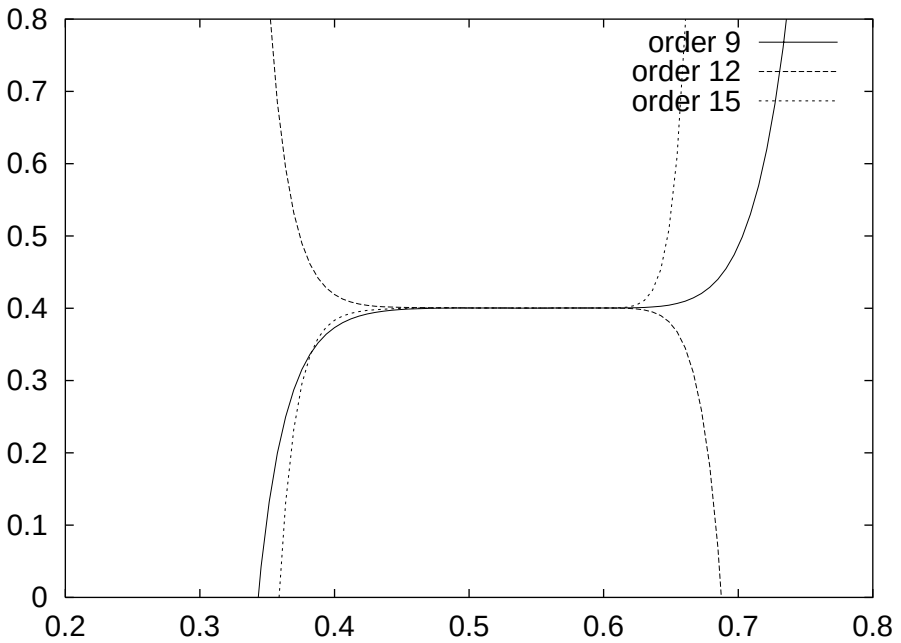


図 22: ITE により改良された G の振る舞い。フルプロパゲーターは $x = 0.8$ と固定した。横軸は手で導入したパラメーター x_0 である。

それなりに良い振る舞いをしている事は分かったが、これでは全く不十分である。理由は、今固定したパラメーター x は、フルプロパゲーターであり、それは結果として求まるべきものだからである。また、手で導入したパラメーターは、どう固定するべきかが分からない。そのため、(x, x_0) の 2 変数で G をプロットし、x_0 方向のプラトーを探すことが課題となる。次副節でこの解析を行おう。

7.2 改良された 2PI 自由エネルギーのプラトー

改良された 2PI 自由エネルギー $G(x, x_0)$ を 2 変数 (x, x_0) に対してプロットしたものを図 23 に示す。3 次元プロットのため少々見にくいが、曲面が G の値を表していて、$G =$ 定数 となる等高線が引いてある。ここで、近似の次数は 20 である。この図から、プラトーは $x \sim 0.7$ 付近にあることが分かる。実際、$G = -0.1$ あたりの等高

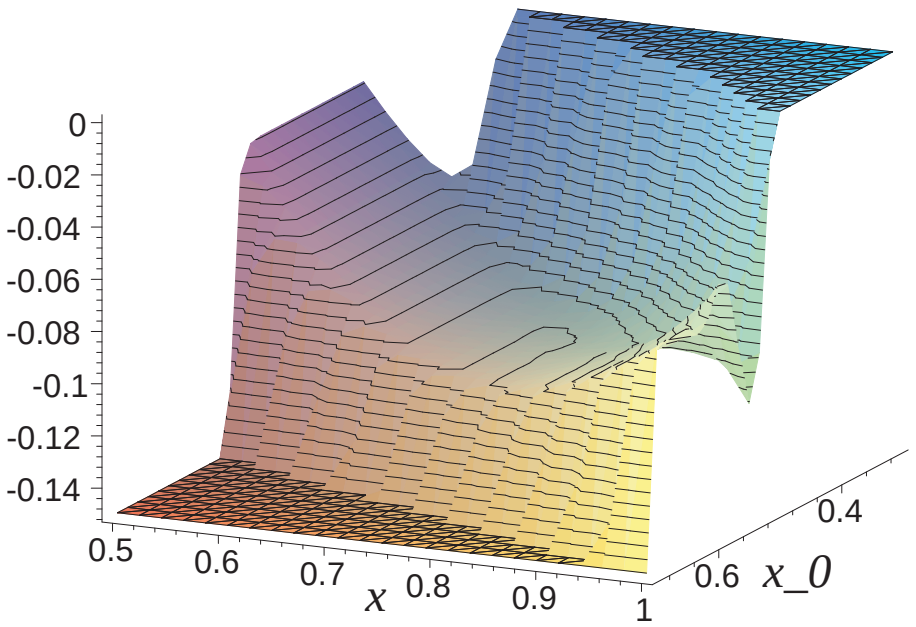


図 23: 改良された 2PI 自由エネルギー G の 3 次元プロット。近似の次数は 20 である。

線を見ると、$x_0 \sim 0.5$ 付近でヘアピン状になっており、ここでは、x_0 の値を少し変えても G の値自身はほとんど変化しないのである。

さらに、もう一つの条件として、G が x に対して停留することも考慮に入れなければならない。これは、第 6 節で述べたように、

$$\frac{\partial G(x)}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow \text{Schwinger-Dyson equation for } x$$

という関係があるからである。求める x は、元々は SDE の解として求めるべきものだったので、今もこの条件が必要なのである。手で導入したパラメーター x_0 に対するプラトーを決めるために、x の停留点近くのいくつかの値を G に代入して、x_0 の関数形を見ておく。これは、図 24 に示してある。これを見ると、$0.53 < x_0 < 0.58$ あたりが共通にプラトーとなっていることが分かる。よって、x_0 を 0.53 から 0.58 まで、0.01 刻みで固定した G の x に関する停留点を求める。これは、対応する G の値と共に、表 4 にまとめた。これらは、全てプラトー中の点であるため、平均値を取ることで近似値とする。また、誤差は分散で決めることにする。2PI 自由エネルギー G とフルプロパゲーター x の次数 20 における近似値は

$$G = -0.10034778862488123104 \pm 0.00000259900242304619639 23, \tag{7.4}$$

$$x = \ 0.769849758009571537 60 \pm 0.00013423381253938964241 \tag{7.5}$$

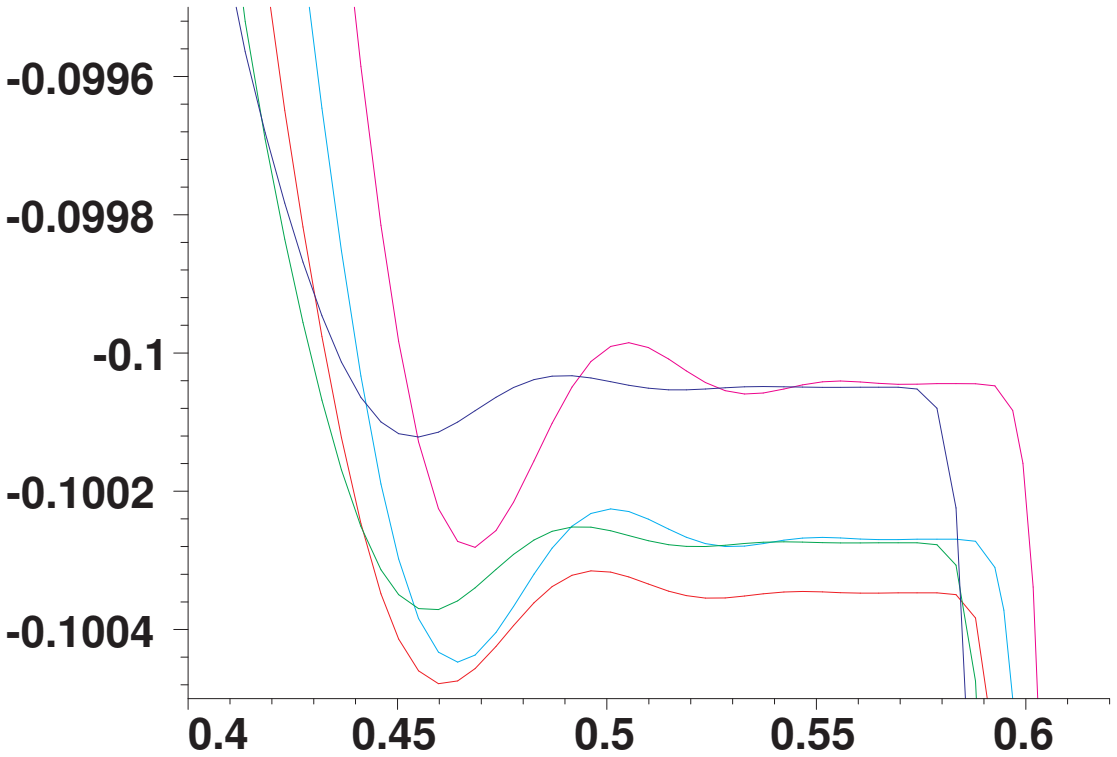


図 24: x を 0.75 から 0.79 まで、0.01 刻みで固定した時の、2PI 自由エネルギー G のプロット。横軸は x_0 である。

x_0	x	G
.53	.77009756120375042809	−.10035342545129063444
.54	.76994947352227422163	−.10034669184529783866
.55	.76970550224429452743	−.10034534535146612465
.56	.76978974292760693559	−.10034734801540486659
.57	.76981046967569214734	−.10034686839364897465
.58	.76974579848381096555	−.10034705269217894723

表 4: x_0 を固定した時の G の x に関する停留点

と求まった。G の厳密値は、通常の自由エネルギー F の値 (5.43) と同じである。これは、G と F がルジャンドル変換で繋がっているため、片方が停留している場合は、もう片方も停留しており、さらにその点での値は同じになるからである。また、フルプロパゲーターも、第 5 節で得た 2 点関数の厳密解と比べることができる。式 (5.36) で、$g=1$ とおいて、$m^2 \to 0$ の極限を取るとゼロ質量の場合の 2 点関数が求まる。

$$\langle\ \phi^2\ \rangle = \frac{(m^2)^3\left(\sqrt{1+12\frac{1}{(m^2)^2}}-1\right)^2\left(2\sqrt{1+12\frac{1}{(m^2)^2}}+1\right)}{108} \tag{7.6}$$

$$= \frac{(\sqrt{12})^2\cdot 2\cdot\sqrt{12}}{108} \tag{7.7}$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{9} \simeq 0.769800358. \tag{7.8}$$

よって、近似の結果は、非常に良い精度である上に、誤差評価まできちんと出来ることが分かった。

この近似法を実際の問題に用いる場合の一つの問題点は、変数が 2 倍に増えるため解析が辛いというところにある。例えば、場が沢山あり、2 点関数が 3 つのパラメーターを含む場合、改良された 2PI 自由エネルギーは 6 変数の関数となる。ここでは、3 次元プロットによりプラトーの当たりをつけたが、それに変わる方法を採る必要が出てくる。

とにかくも、原理的に ITE は 2PI 自由エネルギーに直接適用できるのである。この場合にはルジャンドル変換は必要なく、また SDE と関係の深さはより興味ある性質である。

8　IIB 型行列模型— 行列正則化を通してのレビュー

この節では、まず行列正則化を少々一般的に説明し、それを IIB 型超弦理論の世界面作用に適用することで IIB 型行列模型を導く。その後、IIB 型行列模型の対称性や長所等をまとめる。

8.1　行列正則化

行列正則化は J. Hoppe[15] によってボゾン的メンブレーン (空間 2 次元 + 時間 1 次元的に広がった対象) の正則化方法として初めて導入された。ところが行列正則化という手続きは、かなり一般に 2 次元面上の適当な関数を行列で近似するためにも使え

る。そのため、行列正則化自体を一般的に議論する。この方法では、2 次元面のトポロジーにかかわらず、常に行列で正則化できることは注目に値する。

行列正則化とは、2 次元面上の関数を N 次元エルミート行列で近似することを指す。近似という意味は、おおざっぱに言うと、高い運動量成分を落として (N がちょうど紫外カットオフの役目をする)、さらに結合定数の部分を少し ($O(1/N)$) ずらすような近似である。まず、この副節の大体の流れを示しておく。

1. 2 次元平面上の関数の完全系を作り、それらの間にポアソン括弧 (Poisson bracket) を導入して、構造定数を決める。
2. 行列の方でも完全系をうまく作り、交換子により構造定数を決める。
3. 関数と行列との対応を付け、両者の構造定数が、$O(1/N)$ で一致することをみる。
4. 積分とトレースの対応を付ける。

では具体的に S^2 のトポロジーを持つ 2 次元面の場合について行列正則化を考えてみよう。関数の側から始める。S^2 は、$\mathbb{R}^3$ (座標は $\{x^A\}_{A=1,2,3}$) を単位球面に制限したもの、

$$x^A x^A - 1 = 0 \tag{8.1}$$

とする。S^2 の完全系は量子力学等で良く知られた球面調和関数 $y_{\ell m}$ である。それらはつぎのように書ける。

$$y_{\ell m} \triangleq \sum_{A_1,\cdots,A_\ell} t^{(\ell m)}_{A_1\cdots A_\ell} x^{A_1}\cdots x^{A_\ell} \tag{8.2}$$

ここで、$t^{(\ell m)}_{A_1\cdots A_\ell}$ はトレースレス完全対称テンソル

テンソル $t^{(\ell m)}$ の対称性は、定義 (8.1) の x の対称性から、トレースレス性は単位球面への制限 (8.1) からそれぞれ来ている。一応、ℓ に対して $t^{(\ell m)}$ の個数を数えておこう。ℓ 階完全対称テンソルの個数 ${}_3H_\ell$ からトレースレス条件 $t^{(\ell m)}_{AAA_3\cdots A_\ell}$ の個数 ${}_3H_{\ell-2}$ を引くと、正しく $(2\ell+1)$ 個が独立である[14]。具体的には、

$$y_{00} = 1 \tag{8.3}$$

$$y_{1,+1} = \sqrt{3/2}x^+ \tag{8.4}$$

$$y_{1,0} = \sqrt{3}x^3 \tag{8.5}$$

[14] ${}_nH_m$ は n 種類の物から重複を許して m 個を取るときの組合わせの数。${}_nH_m = {}_{n+m-1}C_m$ である。

$$y_{1,-1} = \sqrt{3/2}x^{-} \tag{8.6}$$

などなどである。細かい定義は次の通り。

$$x^1 \triangleq \sin\theta\cos\phi \tag{8.7}$$

$$x^2 \triangleq \sin\theta\sin\phi \tag{8.8}$$

$$x^3 \triangleq \cos\theta \tag{8.9}$$

$$x^{\pm} \triangleq \frac{1}{\sqrt{2}}(x^1 \pm ix^2) \tag{8.10}$$

$$\int d\Omega_2 \triangleq \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \sin\theta \tag{8.11}$$

$$\text{規格化}: \int \frac{d\Omega_2}{4\pi}|y_{\ell m}|^2 = 1 \tag{8.12}$$

この $\{y_{\ell m}\}_{\ell=0,1,2,\cdots;m=-\ell,\cdots,+\ell}$ を使って、S^2 上の関数 f は

$$f = \sum_{\ell m} c_{\ell m} y_{\ell m} \tag{8.13}$$

と展開される。

次にこれらの関数の間のポアソン括弧を次のように定める。

$$\{f, g\} \triangleq \epsilon^{ABC}\, x_A\, (\partial_B f)\, (\partial_C g) \tag{8.14}$$

ここでの、偏微分は $\partial_A x^B \triangleq \delta^B{}_A$ で定義されているが、単位球面への拘束条件との括弧を計算すると、

$$\{f, x^D x^D - 1\} = \epsilon^{ABC}\, x_A\, (\partial_B f)\, (2x^D \delta^D{}_C) \tag{8.15}$$

$$= 0 \tag{8.16}$$

となり、曖昧さはない。x 同士の括弧は、

$$\{x^A, x^B\} = \epsilon^{ABC} x^C \tag{8.17}$$

となっている。

この括弧を用いて、構造定数 $g_{\ell_1 m_1, \ell_2 m_2}{}^{\ell_3 m_3}$ を、

$$\{y_{\ell_1 m_1}, y_{\ell_2 m_2}\} \triangleq g_{\ell_1 m_1, \ell_2 m_2}{}^{\ell_3 m_3} y_{\ell_3 m_3} \tag{8.18}$$

によって定める。

それでは、行列の方に話を移そう。$N \times N$ エルミート行列の基底を構成するのに、$\mathrm{SU}(2)$ の N 次元表現から話を始める。その心は、式 (8.17) と $\mathrm{SU}(2)$ の交換関係

$$-i\left[\frac{T^A}{2}, \frac{T^B}{2}\right] = \epsilon^{ABC}\frac{T^C}{2} \tag{8.19}$$

の類似からである。

この類似点をさらに押し進めるために次の行列を定義する。

$$Y_{\ell m} \triangleq k_{\ell,N} \sum_{A_1 \cdots A_\ell} t^{(\ell m)}_{A_1 \cdots A_\ell} T^{A_1} \cdots T^{A_\ell} \tag{8.20}$$

ここで、$k_{\ell,N}$ は今から決める ℓ, N に依った定数で、テンソル $t^{(\ell m)}$ はさきほど式 (8.1) で $y_{\ell m}$ を定義するときに使ったものと同じものである。

とりあえず、$k_{\ell,N}$ の値を次の式を要請することによって決めよう。

$$\frac{1}{N}\mathrm{tr}\left(|\, Y_{\ell m}\,|^2\right) = 1 + O(N^{-1}) \tag{8.21}$$

ちょっと長くなるが $k_{\ell,N}$ を決める計算を具体的にやることにする。一番簡単な $m = \ell$ の場合に限ろう。まず準備として、関数側で規格化条件を使って t を決める。

$$y_{\ell,\, m\,=\,\ell} = t^{(\ell)}(x^+)^\ell \qquad (t^{(\ell)} \triangleq t^{(\ell, m=\ell)}_{++\cdots+}) \tag{8.22}$$

$$= t^{(\ell)}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^\ell \sin^\ell\theta e^{i\ell\phi} \tag{8.23}$$

であるから、規格化条件より、

$$1 = \int \frac{d\Omega_2}{4\pi}|y_{\ell\ell}|^2 \tag{8.24}$$

$$= \frac{1}{2}(t^{(\ell)})^2\left(\frac{1}{2}\right)^\ell \int_0^\pi d\theta \sin^{2\ell+1}\theta \tag{8.25}$$

$$= (t^{(\ell)})^2\left(\frac{1}{2}\right)^\ell \frac{(2\ell)!!}{(2\ell+1)!!} \tag{8.26}$$

となる[15]。よって t は次のように求まる。

$$(t^{(\ell)})^2 = 2^\ell \frac{(2\ell+1)!!}{(2\ell)!!} \tag{8.27}$$

$$= \frac{1}{2^\ell}\frac{(2\ell+1)!}{\ell!\,\ell!} \tag{8.28}$$

[15] $(2\ell+1)!! = (2\ell+1)(2\ell-1)(2\ell-3)\cdots 3\cdot 1$
$(2\ell)!! = (2\ell)(2\ell-2)(2\ell-4)\cdots 4\cdot 2 = 2^\ell\cdot\ell!$

$\frac{1}{N}\mathrm{tr}|Y_{\ell m}|^2$ を計算するために、まず $\mathrm{tr}\left((T^-)^\ell(T^+)^\ell\right)$ を計算する。$\underline{N}$ 表現の正規直交系を T^3 の固有ベクトル、$\{|\,k\,\rangle\}$ $(k=(N-1),(N-3),\cdots,-(N-1))$ で定めると、

$$T^+|\,k\,\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}\left(N^2-(k+1)^2\right)}|\,k+2\,\rangle \tag{8.29}$$

$$T^-|\,k\,\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}\left(N^2-(k-1)^2\right)}|\,k-2\,\rangle \tag{8.30}$$

となるので、

$$\mathrm{tr}\left((T^-)^\ell(T^+)^\ell\right) = \sum_k \langle\, k\,|\,(T^-)^\ell(T^+)^\ell\,|\,k\,\rangle \tag{8.31}$$

$$= \frac{1}{2^\ell}\sum_k \left(N^2-(k+1)^2\right)\left(N^2-(k+3)^2\right)\cdots\left(N^2-(k+2\ell-1)^2\right) \tag{8.32}$$

中辺からすぐに分かるのは、$N=0,1,\cdots,\ell$ の時、ゼロになるということである。また最右辺からは N について $(2\ell+1)$ 次式で、さらに和をとった後の式を N についての関数と見ると、それは奇関数であることが分かる[16]。よって、最左辺の N 依存性は完全に決まって、

$$\mathrm{tr}\left((T^-)^\ell(T^+)^\ell\right) = a^{(\ell)}N(N^2-1^2)(N^2-2^2)\cdots(N^2-\ell^2) \tag{8.33}$$

となり、あとは ℓ にのみ依る定数 a_ℓ を決めれば良い。そのために、$N=\ell+1$ と置くと、左辺は式 (8.32) を用いて、$2^\ell\,\ell!\,\ell!$、右辺の N 依存部分は $(2\ell+1)!$ となるので、

$$a^{(\ell)} = \frac{2^\ell \ell!\,\ell!}{(2\ell+1)!} = \frac{1}{(t^{(\ell)})^2} \tag{8.34}$$

と決まる。これでようやく、

$$\frac{1}{N}\mathrm{tr}\left(|\,Y_{\ell\ell}\,|^2\right) = (k_{\ell,N})^2(N^2-1^2)(N^2-2^2)\cdots(N^2-\ell^2) \tag{8.35}$$

$$= (k_{\ell,N}N^\ell)^2\left(1-\frac{1}{N^2}\right)\cdots\left(1-\frac{\ell^2}{N^2}\right) \tag{8.36}$$

と求まった。この式から $k_{\ell,N}=N^{-\ell}$ とすると、固定された ℓ に対しては

$$\frac{1}{N}\mathrm{tr}\left(|\,Y_{\ell\ell}\,|^2\right) = \left(1-\frac{1}{N^2}\right)\cdots\left(1-\frac{\ell^2}{N^2}\right) \longrightarrow 1 \quad (\mathrm{as} \quad N\longrightarrow\infty) \tag{8.37}$$

となることが分かる。また、式 (8.33) から、$\ell=N,(N+1),\cdots$ の時には、

$$\frac{1}{N}\mathrm{tr}\left(|\,Y_{\ell\ell}\,|^2\right) = 0 \tag{8.38}$$

[16] $f(x,N)=\sum_k e^{kx}=\sinh Nx/\sinh x$ は N について奇関数である。
この関数を用いて、$\sum_k k^n=\partial_x f(x,N)|_{x=0}$ と書けるので、これも奇関数になる。

つまり、$Y_{\ell\ell}=0$ であることが分かる。一般の m についても

$$\frac{1}{N}\mathrm{tr}\left((Y_{\ell m})^{\dagger}Y_{\ell' m'}\right)=\delta_{\ell\,\ell'}\delta_{m\,m'}\left(1-\frac{1}{N^2}\right)\cdots\left(1-\frac{\ell^2}{N^2}\right)\qquad \ell=0,1,\cdots,(N-1) \tag{8.39}$$

$$Y_{\ell m}=0\qquad\qquad \ell=N,(N+1),\cdots \tag{8.40}$$

となることが分かるので[17]、$\ell=0,1,\cdots,(N-1)$ の $Y_{\ell m}$ は直交しており、個数を数えると、

$$\sum_{\ell=0}^{N-1}\sum_{m=-\ell}^{+\ell}=\sum_{\ell=0}^{N-1}(2\ell+1)=N^2 \tag{8.41}$$

となり、N 次元エルミート行列の基底になってることが分かる。

もう一度 $Y_{\ell m}$ の定義を書いておこう。$(\tilde{T}^A\fallingdotseq T^A/N)$

$$Y_{\ell m}=\sum_{A_1\cdots A_\ell}t^{(\ell m)}_{A_1\cdots A_\ell}\frac{T^{A_1}}{N}\cdots\frac{T^{A_\ell}}{N} \tag{8.42}$$

$$=\sum_{A_1\cdots A_\ell}t^{(\ell m)}_{A_1\cdots A_\ell}\tilde{T}^{A_1}\cdots\tilde{T}^{A_\ell} \tag{8.43}$$

この $Y_{\ell m}$ から交換子により行列側の構造定数を定めよう。$\tilde{T}^A$ に対しては、関数側の式 (8.1), 式 (8.17) に類似の式

$$\tilde{T}^A\tilde{T}^A=\frac{1}{N^2}(N^2-1)=1-\frac{1}{N^2} \tag{8.44}$$

$$-i\frac{N}{2}\left[\,\tilde{T}^A\,,\tilde{T}^B\,\right]=\epsilon^{ABC}\tilde{T}^C \tag{8.45}$$

が成り立つことから、次の式で行列側の構造定数 $G_{\ell_1 m_1,\ell_2 m_2}{}^{\ell_3 m_3}$ を定義する。

$$-i\frac{N}{2}\left[\,Y_{\ell_1 m_1}\,,Y_{\ell_2 m_2}\,\right]=G_{\ell_1 m_1,\ell_2 m_2}{}^{\ell_3 m_3}Y_{\ell_3 m_3} \tag{8.46}$$

ここまでで、この副節の初めに書いた流れの $2.$ までが終わった。これから $3.$ の構造定数の比較にはいる。そのために、関数の側でポアソン括弧の計算をあからさまに書いてみる。

$$\{\,y_{\ell_1 m_1}\,,y_{\ell_2 m_2}\}=\{\,t^{(\ell_1 m_1)}_{A_1\cdots A_{\ell_1}}x^{A_1}\cdots x^{A_{\ell_1}}\,,t^{(\ell_2 m_2)}_{B_1\cdots B_{\ell_2}}x^{B_1}\cdots x^{B_{\ell_2}}\,\} \tag{8.47}$$

$$=t^{(\ell_1 m_1)}_{A_1\cdots A_{\ell_1}}t^{(\ell_2 m_2)}_{B_1\cdots B_{\ell_2}}x^{A_1}\cdots x^{A_i}x^{B_1}\cdots x^{B_j}$$

[17] $Y_{\ell m}$ が各 ℓ について既約テンソル演算子であることから従う。

$$\times \left\{ x^{A_i}, x^{B_j} \right\} x^{B_{j+1}} \cdots x^{B_{\ell_2}} x^{A_{i+1}} \cdots x^{A_{\ell_1}} \tag{8.48}$$

$$= t^{(\ell_1 m_1)}_{A_1 \cdots A_{\ell_1}} t^{(\ell_2 m_2)}_{B_1 \cdots B_{\ell_2}} \epsilon^{A_i B_j C} x^{A_1} \cdots x^{A_i} x^{B_1} \cdots x^{B_j} x^C \times x^{B_{j+1}} \cdots x^{B_{\ell_2}} x^{A_{i+1}} \cdots x^{A_{\ell_1}} \tag{8.49}$$

構造定数 g はここで出てくるテンソル $t^{(\ell_1 m_1)}_{A_1 \cdots A_{\ell_1}} t^{(\ell_2 m_2)}_{B_1 \cdots B_{\ell_2}} \epsilon^{A_1 B_1 C}$ を対称化して既約分解 (トレース部分を分離する) によって得られる。関数の場合は、x 同士が交換するので対称化は自然に行われている。既約分解の操作は、単位球面への制限 $x^A x^A = 1$ をつかって行うことになる。

一方、行列側でもあからさまに書くと、

$$(-i)\frac{N}{2} \left[Y_{\ell_1 m_1}, Y_{\ell_2 m_2} \right] = (-i)\frac{N}{2} \left[t^{(\ell_1 m_1)}_{A_1 \cdots A_{\ell_1}} \tilde{T}^{A_1} \cdots \tilde{T}^{A_{\ell_1}}, t^{(\ell_2 m_2)}_{B_1 \cdots B_{\ell_2}} \tilde{T}^{B_1} \cdots \tilde{T}^{B_{\ell_2}} \right] \tag{8.50}$$

$$= t^{(\ell_1 m_1)}_{A_1 \cdots A_{\ell_1}} t^{(\ell_2 m_2)}_{B_1 \cdots B_{\ell_2}} \tilde{T}^{A_1} \cdots \tilde{T}^{A_i} \tilde{T}^{B_1} \cdots \tilde{T}^{B_j} \times (-i)\frac{N}{2} \left[\tilde{T}^{A_i}, \tilde{T}^{B_j} \right] \tilde{T}^{B_{j+1}} \cdots \tilde{T}^{B_{\ell_2}} \tilde{T}^{A_{i+1}} \cdots \tilde{T}^{A_{\ell_1}} \tag{8.51}$$

$$= t^{(\ell_1 m_1)}_{A_1 \cdots A_{\ell_1}} t^{(\ell_2 m_2)}_{B_1 \cdots B_{\ell_2}} \epsilon^{A_i B_j C} \tilde{T}^{A_1} \cdots \tilde{T}^{A_i} \tilde{T}^{B_1} \cdots \tilde{T}^{B_j} \tilde{T}^C \times \tilde{T}^{B_{j+1}} \cdots \tilde{T}^{B_{\ell_2}} \tilde{T}^{A_{i+1}} \cdots \tilde{T}^{A_{\ell_1}} \tag{8.52}$$

となる。ここまでは関数側 (8.49) と全く一緒である。一つ目の違いは対称化の時に出てくる。行列は互いに交換しないので、反対称部分から一つ $\tilde{T}$ が減った項が出てくる。しかしこれは

$$-i \left[\tilde{T}^A, \tilde{T}^B \right] = \frac{2}{N} \epsilon^{ABC} \tilde{T}^C \tag{8.53}$$

から分かるように $O(N^{-1})$ の項である。対称化後の既約分解では単位球面への制限に対応した式 (8.44) を使う。この時も $1/N$ の高次の項を除くと全く同じ形をしている。よって、次のことが分かった。

$$G_{\ell_1 m_1, \ell_2 m_2}{}^{\ell_3 m_3} = g_{\ell_1 m_1, \ell_2 m_2}{}^{\ell_3 m_3} + O(1/N) \tag{8.54}$$

この式のおかげで、次副節で超弦理論の世界面作用を行列正則化するときに、結合定数のずれが ($\ell \ll N$ のモードに対しては) $O(1/N)$ ですむことが分かる。また式 (8.39) からは、運動項が正しく規格化されることが出てくる。

これまでのことをまとめると、表 5 のようになる。ここで、自由度の対応は、$\ell \geq N$ のモードを落としたことになっており、ℓ は球面上での波数のようなものなので、高い運動量をカットしたことに対応する。

参考のため、2 次元トーラス T^2 の場合の行列正則化を付録 D にまとておく。

対応	関数	行列
自由度	$f=\sum_{\ell=0}^{\infty} c_{\ell m} y_{\ell m}$	$F=\sum_{\ell=0}^{N-1} c_{\ell m} Y_{\ell m}$
掛け算則	$\{f\,,g\}$	$-i\frac{N}{2}\,[\,F\,,G\,]$
内積	$\int \frac{d\Omega_2}{4\pi} fg$	$\frac{1}{N}\mathrm{tr}FG$

表 5: 行列正則化対応表

8.2 Schild 型作用と、その行列正則化

前副節で見たように、行列正則化は 2 次元面上の関数に対して適用できる。弦が空間 1 次元状に伸びた対象である弦の世界面は、2 次元となる。これにより、関数と行列の対応を付けることが出来るが、さらに作用を対応付けるためには、関数側の作用で、積が全てポアソン括弧で書かれている必要がある。そのため、IIB 型超弦理論の Green-Schwarz 作用から始めて Schild 型の作用を導き、それに対して行列正則化を行う。

IIB 型超弦理論の Green-Schwarz 作用は、以下で与えられる

$$S_{\mathrm{GS}} = -T\int d^2\sigma\Big[\sqrt{-M}+i\epsilon^{ab}\partial_a X^\mu\left(\theta^1\Gamma_\mu\partial_b\theta^1+\theta^2\Gamma_\mu\partial_b\theta^2\right) + \epsilon^{ab}\theta^1\Gamma^\mu\partial_b\theta^1\theta^2\Gamma_\mu\partial_b\theta^2\Big] \tag{8.55}$$

ここで、

$$M=\det(M_{ab})=\det(\Pi^\mu_a\Pi^\nu_b\eta_{\mu\nu}) \tag{8.56}$$

$$\Pi^\mu_a=\partial_a X^\mu - i\left(\theta^1\Gamma_\mu\partial_a\theta^1-\theta^2\Gamma_\mu\partial_a\theta^2\right) \tag{8.57}$$

である。この作用には、標的空間 (target space) の $\mathcal{N}=2$ 超対称性と、世界面上のゲージ対称性であるカッパ対称性 (κ-symmetry) がある。

$$\delta_{\mathrm{SUSY}}\theta^1=\epsilon^1 \tag{8.58}$$

$$\delta_{\mathrm{SUSY}}\theta^2=\epsilon^2 \tag{8.59}$$

$$\delta_{\mathrm{SUSY}}X^\mu=i(\bar{\epsilon^1}\Gamma^\mu\theta^1-\bar{\epsilon^2}\Gamma^\mu\theta^2) \tag{8.60}$$

$$\delta_\kappa\theta^1=\alpha^1=(1+\tilde{\Gamma})\kappa=\frac{1}{2}(\tilde{\Gamma}+1)\kappa' \tag{8.61}$$

$$\delta_\kappa \theta^2 = \alpha^2 = (1+\tilde{\Gamma})\kappa = \frac{1}{2}(\tilde{\Gamma}-1)\kappa' \tag{8.62}$$

$$\delta_\kappa X^\mu = -i(\bar{\alpha^1}\Gamma^\mu\theta^1 - \bar{\alpha^2}\Gamma^\mu\theta^2) \tag{8.63}$$

ここで $\epsilon^{1,2}$ は σ に依らない定数スピナー、$\kappa' = 2\tilde{\Gamma}\kappa$ はゲージパラメーターで、σ に依ったスピナーである。

$$\tilde{\Gamma} \fallingdotseq \frac{1}{2!\sqrt{-M}}\epsilon^{ab}\Pi_a^\mu\Pi_b^\nu\Gamma_{\mu\nu} \tag{8.64}$$

$$\tilde{\Gamma}^2 = 1 \tag{8.65}$$

$$\mathrm{tr}\tilde{\Gamma} = 0 \tag{8.66}$$

$$\tilde{\Gamma}\Gamma_\mu\Pi_a^\mu M^{ab} = \frac{1}{\sqrt{-M}}\epsilon^{ab}\Pi_a^\mu\Gamma_\mu \tag{8.67}$$

つまり $\tilde{\Gamma}$ はプロジェクターで、κ-対称性とは、$\theta^{1,2}$ のうち半分ずつ $(8$ 個ずつ$)$ を動かすゲージ対称性である。

IIB 型超弦理論の場合には、2 つのスピナーが同じカイラリティーを持っていることから、$(9\ +\ 1)$ 次元のローレンツ対称性を保ったままで κ-対称性を固定することができるのである。そのためには次のゲージ固定条件を置けば良い[18]。

$$\theta^1 - \theta^2 = 0 \tag{8.68}$$

$\theta^1 = \theta^2 = \psi/2$ と書きなおして GS 作用に代入すると、かなり簡単な形になる。

$$\tilde{S}_{\mathrm{GS}} = -T\int d^2\sigma\left(\sqrt{-m} + \frac{i}{2}\epsilon^{ab}\partial_a X^\mu\,\overline{\psi}\Gamma_\mu\partial_b\psi\right) \tag{8.69}$$

ここで $m = \det(m_{ab}) = \det(\partial_a X^\mu \partial_b X_\mu)$ はボゾン変数だけで書かれていることに注意しよう。超対称変換は $\delta = \delta_{\mathrm{SUSY}} + \delta_\kappa$ と変更される。この δ_κ はゲージ条件を保存するために補うべき κ 変換である。具体的には、ゲージ固定条件の保存

$$(\delta_{\mathrm{SUSY}} + \delta_\kappa)(\theta^1 - \theta^2) = \epsilon^1 - \epsilon^2 + \kappa' = 0 \tag{8.70}$$

から、$\kappa' = -(\epsilon^1 - \epsilon^2)$ と決まる。よって変更された超対称変換は、

$$\delta\psi = 2\epsilon^1 - (\tilde{\Gamma}+1)(\epsilon^1 - \epsilon^2) \tag{8.71}$$

$$= (1-\tilde{\Gamma})\epsilon^1 + (1+\tilde{\Gamma})\epsilon^2 \tag{8.72}$$

$$\delta X^\mu = i(\overline{\epsilon^1} - \overline{\epsilon^2})\Gamma^\mu\psi \tag{8.73}$$

[18] $(\theta^1 - \theta^2)$ のゲージ変換は変換パラメーター κ' そのものなのでこのゲージ固定からは拘束条件は出てこない。

となる。次のステップは、Schild 型の作用に書き換えることである。しかしその前に GS 作用をユークリッド化することにしよう。ここでは、標的空間と世界面を同時にユークリッド化する。つまり上足に 0 を持ったものは全て $-i$ を付けることにする。

$$X^0 \longrightarrow -iX^0_{(E)} \tag{8.74}$$

$$\sigma^0 \longrightarrow -i\sigma^0_{(E)} \tag{8.75}$$

$$\Gamma^0 \longrightarrow -i\Gamma^0_{(E)} \tag{8.76}$$

$$\epsilon^{ab} \longrightarrow -i\epsilon^{ab}_{(E)} \tag{8.77}$$

すると、添字の $_{(E)}$ は書かないことにして、ユークリッド版の GS 作用は、

$$\tilde{S}_{\rm GS} = T\int d^2\sigma \left(\sqrt{m} + \frac{i}{2}\epsilon^{ab}\partial_a X^\mu\, \overline{\psi}\Gamma_\mu \partial_b \psi\right) \tag{8.78}$$

となる。ここで $a^\mu b_\mu$ は当然 $a^\mu b^\nu \delta_{\mu\nu}$ の意味である。もう一つ注意することとして、ディラック共役 $\overline{\psi}$ は ${}^t\psi C$ のことを意味しており、$\psi^\dagger\Gamma^0$ でも $\psi^\dagger$ でもなく、複素共役という操作は含んでいない。

それでは、Schild 型の作用に移ることにしよう。Schild 型作用とは、相対論的粒子の場合に、$-m\int d\tau\sqrt{\dot{x}^2}$ という作用を世界線の 1 脚場 (einbein)(つまりスカラー密度) を導入して書き換えた $\frac{1}{2}\int d\tau[(\dot{x}^2/e) - em^2]$ という形のストリング版であるとも思える作用で、次のような形である。

$$S_{\rm Schild} = \frac{1}{2}\int d^2\sigma \left(\tilde{\alpha}\frac{m}{\sqrt{g}} + \tilde{\beta}\sqrt{g}\right) + \tilde{\alpha}\int d^2\sigma \frac{i}{2}\epsilon^{ab}\partial_a X^\mu\, \overline{\psi}\Gamma_\mu\partial_b\psi \tag{8.79}$$

$\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ は適当な定数で、世界面上のスカラー密度 $\sqrt{g}$ を独立変数として導入した。この $\sqrt{g}$ を運動方程式、$\sqrt{g} = \sqrt{\tilde{\alpha}/\tilde{\beta}}\sqrt{m}$ を用いて消去すれば場の適当なリスケールによって $\tilde{S}_{\rm GS}$ と等しくなる。テンションは $T = \sqrt{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}$ である。この作用を見ると、行列正則化できる形にかなり近いことが分かる。経路積分の形で書くと、

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\sqrt{g}\,\mathcal{D}X\,\mathcal{D}\psi\, e^{-S_{\rm Schild}} \tag{8.80}$$

である。しかし、これはただ書いただけであって、まともに定義されたものかどうかは分からない。よって逆に行列正則化によって発散のない、もしくは制御可能な量子論を定義したいのである。行列正則化するために、面積保存座標変換 (area preserving diffeomorphism: APD) だけを対称性として残したいので $\sqrt{g}$ をゲージ固定することにしよう。つまり二つある一般座標変換のゲージ対称性の内一つを固定して、残った

一つが APD になるようにする。$\sqrt{g}$ がスカラー密度であることから、次の形までゲージ固定ができる。

$$\sqrt{g} = \eta\omega(\sigma) \tag{8.81}$$

ここで、$\omega(\sigma)$ はある定まったスカラー密度、η はゲージ変換の範囲では固定しきれない定数である。これを作用に代入して、

$$\tilde{S}_{\rm Schild} = \frac{1}{2}\int d^2\sigma \left(\tilde{\alpha}\frac{m}{\eta\omega} + \tilde{\beta}\eta\omega\right) + \tilde{\alpha}\int d^2\sigma\ \frac{i}{2}\epsilon^{ab}\partial_a X^\mu\ \overline{\psi}\Gamma_\mu\partial_b\psi \tag{8.82}$$

$$= \tilde{\alpha}\int d^2\sigma\ \eta\omega\left(\frac{1}{4}\{X^\mu, X^\nu\}^2 + \frac{i}{2}\overline{\psi}\Gamma_\mu\{X^\mu,\psi\}\right) + \frac{1}{2}\tilde{\beta}\int d^2\sigma\ \eta\omega \tag{8.83}$$

ポアソン括弧は、

$$\{f\,,g\} \triangleqq \frac{1}{\eta\omega}\epsilon^{ab}\,\partial_a f\ \partial_b g \tag{8.84}$$

と定義した。行列正則化をする前に先ほどのゲージ固定で拘束条件が出ないかどうかを調べておこう。まずは X^μ の運動方程式を書き下してみよう。

$$\partial_a\left(\frac{m}{\omega}m^{ab}\partial_b X^\mu\right) = 0 \tag{8.85}$$

この式に $\partial_c X^\mu$ を掛けてみると (これは一般座標変換の組合わせである)、

$$0 = \partial_a\left(\frac{m}{\omega}m^{ab}\partial_b X^\mu\right)\partial_c X^\mu \tag{8.86}$$

$$= \partial_a\left(\frac{m}{\omega}m^{ab}\partial_b X^\mu\partial_c X^\mu\right) - \frac{m}{\omega}m^{ab}\partial_b X^\mu\partial_a\partial_c X^\mu \tag{8.87}$$

$$= \partial_c\left(\frac{m}{\omega}\right) - \frac{m}{\omega}\frac{1}{2}m^{ab}\partial_c m_{ab} \tag{8.88}$$

$$= \partial_c\left(\frac{\sqrt{m}}{\omega}\right) \tag{8.89}$$

となり、$\frac{\sqrt{m}}{\omega}$ が定数であることが分かる。このことと、η の運動方程式

$$0 = -\frac{\tilde{\alpha}}{\eta^2}\int d^2\sigma\omega\left(\frac{\sqrt{m}}{\omega}\right)^2 + \tilde{\beta}\int d^2\sigma\omega \tag{8.90}$$

$$= \frac{\tilde{\alpha}}{\eta^2}\left(\eta^2 - \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}}\left(\frac{\sqrt{m}}{\omega}\right)^2\right)\int d^2\sigma\omega \tag{8.91}$$

から $\sqrt{g}$ の運動方程式をゲージ固定したものが導かれる。よって作用 $\tilde{S}_{\rm Schild}$ に拘束条件は付かない。ここまでで、出発点の GS 作用と、今導いた Schild 型作用が古典的には同等であることが分かった。

元に戻って、行列正則化すると、$\eta = N/2$ と置いて、

$$S_{\rm MR} = \alpha\ {\rm Tr}\left(-\frac{1}{4}[\,X^\mu, X^\nu\,]^2 + \frac{1}{2}\overline{\psi}\Gamma_\mu[\,X^\mu,\psi\,]\right) + \beta\ {\rm Tr}1 \tag{8.92}$$

という作用になる。ここで、$\alpha \triangleq 2\pi\tilde{\alpha}, \beta \triangleq \pi\tilde{\beta}$ と書き換えた。「経路積分」の形に書くと次のようになる。

$$Z = \sum_{N=0}^{\infty} \int dX\ d\psi\ e^{-S_{\rm MR}} \tag{8.93}$$

ゲージ固定しきれなかった定数 η に対応して N についての和が含まれている。N を固定して考える限り、β 比例項は力学変数を含まない。そこで、α 比例項と取り出して、名前の付け替え行うと IIB 型行列模型の作用を得る。

$$S_{\rm IIBMM} = \frac{1}{g^2}\ {\rm Tr}\left(-\frac{1}{4}\,[\,A_\mu\,,A_\nu\,]^2 + \frac{1}{2}\overline{\psi}\Gamma^\mu\,[\,A_\mu\,,\psi\,]\right) \tag{8.94}$$

8.3 IIB 型行列模型の持つ対称性

上の作用は様々な対称性を持つ。ここでそれをまとめておこう。まず、すぐに分かるのは、$\mathrm{SO}(10)$ のローレンツ対称性である。また、ボゾン行列を単位行列に比例した分ずらす変換、

$$\delta_a A_\mu = a_\mu 1_N \tag{8.95}$$

$$\delta_a \psi = 0 \tag{8.96}$$

も対称性になっている。1_N は、N 次の単位行列である。この変換はすぐ下で時空の並進対称性と解釈される。また、行列正則化により導かれた作用のため、始めの GS 作用の $\mathcal{N}=2$ 超対称性をそのまま受け継いでいるはずである。κ-対称性を固定した後の超対称性との対応を見ておくと、まずパラメーター ϵ, ξ が定数だったことから正則化後には、単位行列に比例した数となる。また、変換則に表われていた $\tilde{\Gamma} \sim \{A_\mu, A_\nu\}\Gamma_{\mu\nu}$ は、$[\,A_\mu\,,A_\nu\,]\Gamma_{\mu\nu}$ に変わる。きちんと変換を求めるために、作用 $S_{\rm IIBMM}$ は、(ユークリッド化した)10 次元の超対称ゲージ理論を 0 次元に落としたものになっていることを使おう[19]。これより、1 つ目の超対称変換は、

$$\delta^{(1)}\psi = \frac{i}{2}\,[\,A_\mu\,,A_\nu\,]\,\Gamma_{\mu\nu}\epsilon \tag{8.97}$$

$$\delta^{(1)}A_\mu = i\bar{\epsilon}\Gamma^\mu\psi \tag{8.98}$$

と分かる。残り 1 つは単位行列比例部分だけに関したもので、

$$\delta^{(2)}\psi = \xi\cdot 1_N \tag{8.99}$$

$$\delta^{(2)}A_\mu = 0 \tag{8.100}$$

[19] 10 次元の超対称ゲージ理論については付録 E を参照。

というものである。これらの変換の交換関係を計算してみよう。まず $\delta^{(1)}$ 同士の交換関係は、元の 10 次元理論では ψ の運動方程式と、ゲージ対称性の範囲内で微分、∂_μ(場) となっていた。しかし、0 次元に落としたことで微分は無くなって交換するようになる。また、$\delta^{(2)}$ 同士はすぐに交換することが分かる。よって、残るのは次の交換子だけである。

$$\left[\,\delta_\epsilon^{(1)}\,,\delta_\xi^{(2)}\,\right]\psi = 0 \tag{8.101}$$

$$\left[\,\delta_\epsilon^{(1)}\,,\delta_\xi^{(2)}\,\right]A_\mu = i\bar{\epsilon}\Gamma^\mu\xi \tag{8.102}$$

これらを対角化するためには、次のように組むとよい。

$$\tilde{\delta}^{(1)} \triangleq \quad \delta^{(1)} + \delta^{(2)} \tag{8.103}$$

$$\tilde{\delta}^{(2)} \triangleq i(\delta^{(1)} - \delta^{(2)}) \tag{8.104}$$

$$\left[\,\tilde{\delta}_\epsilon^{(I)}\,,\tilde{\delta}_\xi^{(J)}\,\right]\psi = 0 \tag{8.105}$$

$$\left[\,\tilde{\delta}_\epsilon^{(I)}\,,\tilde{\delta}_\xi^{(J)}\,\right]A_\mu = \delta^{IJ}\cdot 2i\,\bar{\epsilon}\Gamma^\mu\xi \tag{8.106}$$

こうすると、二つの変換とも交換子が A_μ を単位行列比例分だけずらす変換になっている。これらの変換は 10 次元時空上の$\mathcal{N}=2$ 超対称性と解釈するために、A_μ (の固有値) を時空座標 (時空の点) と解釈する。よって、時空は初めからあるのではなく、行列の成分という力学自由度の一部になった。時空の広がり、形などは相互作用によって決定され得るのである。

さらに IIB 型行列模型の大きな長所は、微調整すべきパラメーターを一つも持たないという点である。実際パラメーターとしては長さ次元 4 を持った量 g^2 しか入っておらず、これは次の場の再定義により 1 にできる。

$$A_\mu \longrightarrow g^{1/2}A_\mu \tag{8.107}$$

$$\psi \longrightarrow g^{3/4}\psi \tag{8.108}$$

このため、無次元の物理量が計算できた時には、本当に数字で与えられることになる。唯一性への回答に道が拓けたわけである。

9 IIB 型行列模型への IMFA の適用

IMFA を IIB 行列模型に適用する。目標は、自発的対称性の破れが起こって、10 次元が等方的ではなくなり 4 次元の時空が出現することを見ることにある。まず結果を

書いておく。5 次までの近似で、4 次元が広がった時空の解が、その他の次元を持った解よりも安定であることを示した。さらに、4 次元と残り 6 次元の広がりの比は 5 程度になることが分かった。

9.1 2PI 自由エネルギーの計算

IIB 型行列模型の作用を解析的に積分する事は不可能であり、また 2 次の項も含んでいない。そこで、IMFA を適用することによって非摂動ダイナミクスを引き出すことを考える。まず、IIB 型行列模型の作用を、場の再定義により、以下の形に変換しておく。

$$S = N \ \mathrm{Tr} \left(-\frac{g}{4} [\, A_\mu \, , A_\nu \,]^2 - \frac{\sqrt{g}}{2} \overline{\psi} \Gamma^\mu [\, A_\mu \, , \psi \,] \right) . \tag{9.1}$$

ここで、N を前に出したのはプラナー部分を見やすくするためで、結合定数 g の因子は、g での展開がループ展開となるようにとった。$\sqrt{g}$ が普通のゲージ理論での結合定数だと思うと自然な取り方である。

IMFA を適用する場合には、まず平均場作用を決めなければならない。しかし、第 6 節で導入した 2PI 自由エネルギーの手法を用いる場合、平均場作用として 2 次の項を指定するよりも、その共役変数である 2 点関数を指定したほうが便利である。ローレンツ対称性の破れに焦点を絞っているため、ゲージ対称性 $\mathrm{U}(N)$ は壊さない仮定をする。低エネルギーでのゲージ対称性の証明の際には、この対称性も破るべきなのかもしれない [28]。$\mathrm{U}(N)$ を残す仮定の下での一般的な 2 点関数は、

$$\langle \, A_\mu{}^i{}_j \, A_\nu{}^k{}_l \, \rangle = \frac{1}{N} C_{(\mu\nu)} \, \delta^i_{\ l} \, \delta_j{}^k , \tag{9.2}$$

$$\langle \, \psi^{\alpha \, i}{}_j \, \psi^{\beta \, k}{}_l \, \rangle = \frac{1}{N} \frac{i}{3!} u_{[\mu\nu\rho]} (\Gamma^{\mu\nu\rho} \mathcal{C}^{-1})^{\alpha\beta} \, \delta^i_{\ l} \, \delta_j{}^k , \tag{9.3}$$

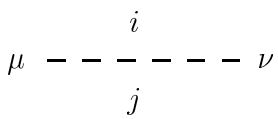
となる。ここで、色々な足は、$\mu, \nu = 1, \ldots, 10$ はベクトル表現、$\alpha, \beta = 1, \ldots, 16$ は左手型スピナー表現、上付き $i, k = 1, \ldots, N$ は $\mathrm{U}(N)$ の定義表現 ($\underline{N}$)、下付き $j, l = 1, \ldots, N$ は $\mathrm{U}(N)$ の定義表現の複素共役 ($\bar{\underline{N}}$ 表現) をそれぞれ表す。行列 $\mathcal{C}$ は、スピナー表現の荷電共役 (charge conjugation) 行列で、次の性質を持つ (以下では顕には用いない)。

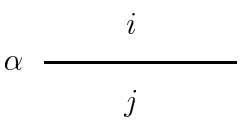
$$ {}^t\mathcal{C} = -\mathcal{C}, \quad \mathcal{C}\Gamma^\mu = -{}^t\Gamma^\mu \mathcal{C} \ \ (\mu = 1, \ldots, 10). \tag{9.4}$$

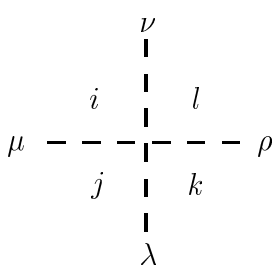
$\mathrm{U}(N)$ は壊さない事にしたので、ゲージの足の組み合わせは 1 種類しか許されず、その足は 2 点関数中の 2 つの場の入れ替えに対して対称になる。そのため、ボゾンのパ

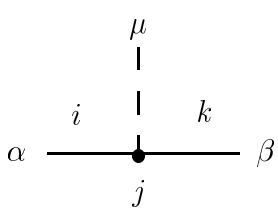
ラメーター $C_{\mu\nu}$ は、$\mu \leftrightarrow \nu$ に関して対称であることが要求される。逆にフェルミオンに対しては、グラスマン性のため 2 つの場の入れ替えで負号が出て、スピナーの足 α, β について反対称になる。ここで、Fierz 変換を用いて、スピナーの足をガンマ行列に押し付け、その係数 u をパラメーターと見ることにする。$\alpha \leftrightarrow \beta$ の反対称性と、ψ が左手型スピナーであることから、ベクトルの足で 3 階反対称部分 $u_{\mu\nu\rho}$ のみが残る。一応自由度を勘定しておくと、${}_{16}\mathrm{C}_2 = {}_{10}\mathrm{C}_3 = 120$ である。

この仮定の下でのファインマン則は以下のようになる。

- プロパゲーター
  - ボゾン : 

$= \dfrac{1}{N} C_{\mu\nu}\,.$
  - フェルミオン: 

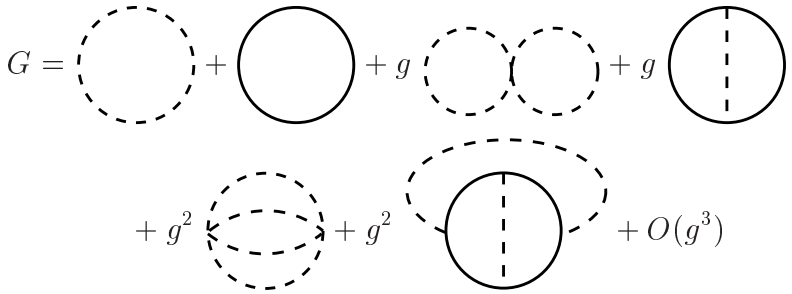
$= \dfrac{1}{N}\dfrac{1}{3!}\, i u_{\mu\nu\rho}(\Gamma^{\mu\nu\rho}\mathcal{C}^{-1})^{\alpha\beta}\,.$
- 相互作用頂点:
  - ボゾン 4 点: : 

$= N(2\delta^{\mu\rho}\delta^{\nu\lambda} - \delta^{\mu\nu}\delta^{\rho\lambda} - \delta^{\mu\lambda}\delta^{\nu\rho})\,.$
  - ボソン-フェルミオン: 

$= N(\mathcal{C}\Gamma^{\mu})_{\alpha\beta}\,.$
- その他の因子:
  - フェルミオンループ 1 つに付き (-1) を付ける。
  - カラーループ 1 つに付き N を付ける。
  - 対称性因子で割る。
  - 全体に $F = -\log Z$ の符号からくる (-1) を付ける。

ここで、カラーの足は面に割り当てた (実際にはプラナーのみを考慮するため、カラーの足は考えない)。

実際に 2 次までの 2PI 自由エネルギーをグラフと対応させて書いてみよう。



$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2}\ln(\det C) + \frac{1}{2}\ln(\det \not{a}) \\
&\quad + g\left(-\frac{1}{2}(\mathrm{tr}(C^2) - (\mathrm{tr}C)^2) - \frac{1}{2}C_{\mu\nu}\mathrm{tr}(\not{a}\Gamma^\mu \not{a}\Gamma^\nu)\right) \\
&\quad + g^2\left(\frac{3}{4}(\mathrm{tr}(C^4) - (\mathrm{tr}C^2)^2) + \frac{1}{4}C_{\mu\nu}C_{\rho\lambda}\mathrm{tr}(\not{a}\Gamma^\mu \not{a}\Gamma^\rho \not{a}\Gamma^\nu \not{a}\Gamma^\lambda)\right) \\
&\quad + O(g^3). \qquad (9.5)
\end{aligned}
$$

顕には書いていないが、$\det$ や tr は C が中に入っている場合はベクトル表現の上で、Γ 行列と $\not{a}$ が入っている場合は左手型スピナー表現の上で取る。例えば、

$$\mathrm{tr}(C^2) = C_{\mu\nu}C_{\nu\mu} \qquad (9.6)$$

$$\mathrm{tr}(\not{a}\Gamma^\mu \not{a}\Gamma^\nu) = 16 \cdot \left(\frac{1}{3!}\eta^{\mu\nu}u^{\alpha\beta\gamma}u^{\alpha\beta\gamma} - u^{\mu\alpha\beta}u^{\nu\alpha\beta}\right) \qquad (9.7)$$

等となる。この第 2 式では、ガンマ行列に対するトレースを顕に実行できたが、次の 2 次のフェルミオンを含むグラフに関しては、既に煩雑になりすぎて役に立たない。そのため、平均場に対して元々のローレンツ対称性 $\mathrm{SO}(10)$ の部分対称性を課すことで、平均場作用中の ${}_{10}\mathrm{H}_2 + {}_{10}\mathrm{C}_3 = 55 + 120 = 175$ 個のパラメーターを減らすことを考える。論文中では、以下の基準で残す対称性を決めた。これは、後に述べる $\mathrm{SO}(7)$ と $\mathrm{SO}(6)$ の仮定を除いて恣意的な部分が入っているかもしれない。より物理的な見地 (D-ブレーンでの解釈等) から残す対称性を絞ることができれば面白いであろう。

1. まず、ローレンツ対称性 $\mathrm{SO}(10)$ に対して、$\mathrm{SO}(7)$ から $\mathrm{SO}(1)$ までの対称性を残す。2. と 3. で課せられる対称性と合わせることで、この回転対称性が働く 7 次元から 1 次元の時空の足を一本でも持ったフェルミオンプロパゲーター u はゼロになる。結果から分かることであるが、この時空の方向は、残りの方向よりも大きな広がりを持つ。このため、これらの対称性は、「我々が住んでいる時空」(広がった時空) のローレンツ対称性とみなされるものとなる。

2. 次に、u が 3 階反対称テンソルであることから、残った方向を 3 次元の部分空間と余った残りの方向に分割する。例えば、4=3+1 や 8=3+3+2 などとする。その後、これらの空間に対し回転対称性を課す。上の例に対応させると、$\mathrm{SO}(3)\times\mathrm{SO}(1)$ や $\mathrm{SO}(3)\times\mathrm{SO}(3)\times\mathrm{SO}(2)$ を課すことにする。

3. 更に、3 次元の部分空間がいくつかある場合には、それらの間に入れ替えの対称性を課すことにする。

このように手で対称性を課した後には、それで許される全てのパラメーターを取り入れることが重要である。解を求める時には、まだ次数が低いために改良された自由エネルギーの停留点を採る事にするが、もしも適当に選ばれたパラメーター空間に対して、自由エネルギーが停留したからといって、全てのパラメーター空間の中で停留するとは限らないのである。しかしながら、対称性でパラメーターを縛った場合には、それで許されないパラメーターの方向には停留することが保証される。その理由は、摂動論では対称性を破る演算子の 1 点関数が消えるからである。このため、パラメーターの部分空間で解析を行うことが正当化される。しかしながら、最終的には、自由エネルギーのプラトーを求めることが目的である事は変わらない。もしも限られたパラメーター空間の中でプラトーが見つからない場合には、課した対称性が適切でなかったということである。しかし、今の次数ではプラトーの形成までは期待できないため、この問題は更に高次の計算ができた時において置くことにする [3]。

$\mathrm{SO}(7)$ 仮定

フェルミオンプロパゲーターが 3 階反対称テンソルで表されるため、1 つでもゼロでない値を取るときには、$\mathrm{SO}(10)$ 対称性は $\mathrm{SO}(7)\times\mathrm{SO}(3)$ まで破れることになる。この対称性の下では、プロパゲーターは 3 つのパラメーター V_1, V_2, u で表される。

$$C_{\mu\nu} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ \vdots \\ 7 \\ 8 \\ \vdots \\ 10 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} V_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & V_1 & & & \\ \hline & & & V_2 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & V_2 \end{array}\right), \tag{9.8}$$

$$\not{u} = u\Gamma^{8,9,10}. \tag{9.9}$$

これは、$\mathrm{SO}(7)$ を残した場合の最も一般的な仮定である。

$\mathrm{SO}(6)$ 仮定

次に、$\mathrm{SO}(6)$ をローレンツ対称性として残した場合を考えよう。フェルミオンプロパゲーター $u_{[\mu\nu\rho]}$ は、残った 4 次元方向にのみゼロでない値を取ることが出来る。$\mathrm{SO}(4)$ の下でのテンソル $u_{\mu\nu\rho}$ は、ベクトル $\tilde{u}^{\mu}$. に双対であるため、$\mathrm{SO}(4)$ 回転することで全ての値の取り方を同一視することが出来る。結局は、$\tilde{u}^{\mu}$ と直交する $\mathrm{SO}(3) \subset \mathrm{SO}(4)$ が残る対称性であり、$\mathrm{SO}(6)\times\mathrm{SO}(3)$ 対称性を課すこととなる。$\tilde{u}$ の方向を 7 方向にすると、次の仮定を得る。

$$C_{\mu\nu} = \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ 6 \\ \hline 7 \\ \hline 8 \\ \vdots \\ 10 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c|ccc} V_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & V_1 & & & & \\ \hline & & & V_2 & & & \\ \hline & & & & V_3 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & V_3 \end{array}\right), \tag{9.10}$$

$$\not{u} = u\Gamma^{8,9,10}. \tag{9.11}$$

SO(5) 仮定

この場合には残った次元が 5 次元になり、少々面倒である。$\mathrm{SO}(5)$ の $u_{[\mu\nu\rho]}$ は、2 階反対称テンソル (アジョイント表現) に双対である。$\mathrm{SO}(5)$ 回転で標準形にもって行くことが出来るので、一般にはフェルミオンプロパゲーターは 2 つの独立なパラメーターで表される。ここでは簡単のため (自然ではないかもしれないが)、片方のパラメーターをゼロとしよう。この場合には、残った 5 次元の中の対称性は少し大きく $3{+}2$ 次元の回転対称性になる。この $\mathrm{SO}(5)\times\mathrm{SO}(2)\times\mathrm{SO}(3)$ 対称性の下で、プロパゲーターは以下ように 4 つのパラメーターを含む形に制限できる。

$$C_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(\text{five } V_1\text{'s},\ \text{two } V_2\text{'s},\ \text{three } V_3\text{'s}), \tag{9.12}$$

$$\not{u} = u\Gamma^{8,9,10}. \tag{9.13}$$

SO(4) 仮定

我々の時空の対称性として $\mathrm{SO}(4)$ を採った場合には残りの時空は 6 次元で、それは $6 = 3{+}3$ と分割される。そのため、残りの時空に対し、$\mathrm{SO}(3)\times\mathrm{SO}(3)\times Z_2$ というかなり簡潔な仮定を自然に置く事が可能である。ここで、Z_2 対称性は、2 つの $\mathrm{SO}(3)$ の因子を取り替えるものであるが、それはパリティー変換を含んでしまうため、元の $\mathrm{SO}(10)$ の部分群になるように第 1 方向に対する反転を含むものにしておく。この対称性 $\mathrm{SO}(4)\times\mathrm{SO}(3)\times\mathrm{SO}(3)\times Z_2$ の下でのパラメーターは 3 つまで制限でき、プロパ

ゲーターは、

$$C_{\mu\nu} = \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ 4 \\ 5 \\ \vdots \\ 10 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} V_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & V_1 & & & \\ \hline & & & V_2 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & V_2 \end{array} \right), \tag{9.14}$$

$$\not{u} = \frac{1}{\sqrt{2}} u \left(\Gamma^{5,6,7} + \Gamma^{8,9,10} \right) \tag{9.15}$$

となる。

SO(3) 仮定

この場合には、残った 7 次元を $1+3+3$ と分割し、上と同じ $\mathrm{SO}(3)\times\mathrm{SO}(3)\times Z_2$ 対称性を課す。それによりフェルミオンプロパゲーターは $\mathrm{SO}(4)$ 仮定と全く同じ形になる。全体の対称性、$\mathrm{SO}(3)\times\mathrm{SO}(3)\times\mathrm{SO}(3)\times Z_2$ の下でのパラメトリゼーションは、

$$C_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(\text{three } V_1\text{'s},\ \text{one } V_2,\ \text{six } V_3\text{'s}), \tag{9.16}$$

$$\not{u} = \frac{1}{\sqrt{2}} u \left(\Gamma^{5,6,7} + \Gamma^{8,9,10} \right). \tag{9.17}$$

で与えられる。ここで、始めの $\mathrm{SO}(3)$ 因子 (これは「我々の時空」と解釈されるものである) に対してもフェルミオンプロパゲーターがゼロでない値を取れる気がするが、それは Z_2 対称性に含まれる第 1 方向の反転によって禁止される。

SO(2) 仮定

残り 8 次元は $2+3+3$ と分割され、$\mathrm{SO}(2)\times\mathrm{SO}(2)\times\mathrm{SO}(3)\times\mathrm{SO}(3)\times Z_2$ なる対称性を課す。これにより、以下の形のみが許される。

$$C_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(\text{two } V_1\text{'s},\ \text{two } V_2\text{'s},\ \text{six } V_3\text{'s}), \tag{9.18}$$

$$\not{u} = \frac{1}{\sqrt{2}} u \left(\Gamma^{5,6,7} + \Gamma^{8,9,10} \right). \tag{9.19}$$

SO(1) 仮定[20]

最後に、1 次元の時空を考える。9 つの残った空間は、それぞれ 3 次元の部分空間 3 つに分けられる。これら 3 つの部分空間に対し、入れ替えの対称性 S_3 を課す。ここ

[20] ここで、$\mathrm{SO}(1)\simeq 1$ という用語は「我々の時空」として、1 次元の時空を考えていることを示すために用いている。特に、群として意味があるわけではない。

でも、S_3 の元のうち、パリティー変換を伴うものについては、第 1 方向の反転を含むものとする。最終的に、この仮定は $\mathrm{SO}(3)\times\mathrm{SO}(3)\times\mathrm{SO}(3)\times S_3$ 対称性となる。

$$C_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(\text{one } V_1,\ \text{nine } V_2\text{'s}), \tag{9.20}$$

$$\not{u} = \frac{1}{\sqrt{3}} u \left(\Gamma^{2,3,4} + \Gamma^{5,6,7} + \Gamma^{8,9,10}\right). \tag{9.21}$$

以上の 7 つの仮定について 2PI 自由エネルギーを求めることにする。我々の論文 [1] では 5 次までの計算を行った。その時に必要なプラナー 2PI グラフを対称性因子と共に、付録 F に示した。グラフを書くときの手順は、まずフェルミオンループの数で分類し、さらに 4 点と 3 点の相互作用をいくつずつ使うかによって分けていった。また、[2] の時にはグラフの生成をプログラムにより自動化したが、その結果と一致した。SO(7) 仮定と SO(4) 仮定について、2PI 自由エネルギーの表式を 2 次の部分まで見てみよう。

$$\begin{aligned} G_{\mathrm{SO}(7)} =& 3 + 3\log 2 - \frac{1}{2}\log(V_1^7\, V_2^3) + \frac{1}{2}\log u^{16} \\ &+ g\,(21\, V_1^2 + 3\, V_2^2 + 21\, V_1\, V_2 - 56\, u^2\, V_1 + 24\, u^2\, V_2) \\ &+ g^2\,(-\frac{63}{2}\, V_1^4 - \frac{9}{2}\, V_2^4 - \frac{63}{2}\, V_1^2\, V_2^2 - 140\, u^4\, V_1^2 - 168\, u^4\, V_1\, V_2 - 12\, u^4\, V_2^2) \\ &+ O(g^3) \end{aligned} \tag{9.22}$$

$$\begin{aligned} G_{\mathrm{SO}(4)} =& 3 + 3\log 2 - \frac{1}{2}\log(V_1^4\, V_2^6) + \frac{1}{2}\log u^{16} \\ &+\ g\,(6\, V_1^2 + 15\, V_2^2 + 24\, V_1\, V_2 - 32\, u^2\, V_1) \\ &+\ g^2\,(-9\, V_1^4 - \frac{45}{2}\, V_2^4 - 36\, V_1^2\, V_2^2 - 32\, u^4\, V_1^2 - 192\, u^4\, V_1\, V_2 + 96\, u^4\, V_2^2) \\ &+ O(g^3) \end{aligned} \tag{9.23}$$

V_1, V_2, u^2 をひとまとめにして考えると、g の次数毎に斉次式になるので比較的簡単な表式となる。初めに付いている定数項 $(3 + 3\log 2)$ は、西村-杉野 [38] の規格化と合わせるために付けてある。

9.2 改良された自由エネルギー

前節で挙げた仮定はそれぞれ 3 つから 4 つのパラメーターを含む。それらは、ボゾンのプロパゲーターに対して 2 つか 3 つ、フェルミオンのプロパゲーターに対して 1 つのパラメータである。それぞれの仮定の下にグラフを全て計算すると、対称性で縛られたパラメーター空間での 2PI 自由エネルギー $G(V_i, u)$ を得る。次のステップは、

この表式に対して、逆ルジャンドル変換を施すことである。変数 V_i と u に対して、それらの共役変数 (質量パラメーター) を

$$M^i = \frac{\partial}{\partial V_i} G(V, u), \tag{9.24}$$

$$m = \frac{\partial}{\partial u} G(V, u) \tag{9.25}$$

と定義する。この式を逆に解く必要があるが、今は摂動論をやっているので、0 次の部分さえ解けてしまえば、後はそれを繰り返し代入することで必要な解は得られる。質量項を含んだ通常の自由エネルギー F は、ルジャンドル変換の式

$$F(M^i, m) = G - \sum_i M^i V_i - mu. \tag{9.26}$$

に、逆解きした解を代入すればよい。更に、この $F(M^i, m)$ に対して ITE を適用する。

$$F_k^{\text{improved}}(M^i, m; M_0^i, m_0) = F(M_0^i + g(M^i - M_0^i), m_0 + g(m - m_0))\Big|_k. \tag{9.27}$$

前に式 (3.5) でも説明したが、$|_k$ は、g に関する展開を行い、$O(g^{k+1})$ の項を無視し、$g = 1$ と置く事を示す記号である。この ITE を行う際には、元々の IIB 行列模型が質量項を含んでいなかったことから、ゼロ質量まわりの展開を行うことになる。

$$F_k^{\text{improved}}(0, 0; M_0^i, m_0) = F(M_0^i - gM_0^i, m_0 - gm_0)\Big|_k. \tag{9.28}$$

後は、このようにして得られた改良された自由エネルギーの全てのパラメーターについての停留点を求めればよい。もし、停留点として 2 つ以上の解が存在した場合には、対応する改良された自由エネルギーの値が小さいものを採用することにする。

図 25 に $\mathrm{SO}(7)$ 仮定と $\mathrm{SO}(4)$ 仮定に対する改良された自由エネルギーの値をプロットした。数値は表 6 と 7 に示される。すぐ下で説明するように、その他の場合は、結果的にこれら 2 つの場合にまとめられることが分かったので、省略した。また、対応する手で置いたパラメーター M_0^i、m_0 の値もまとめて示した。

まず第一に、5 次の結果から分かる事は、3 次までの結果からの差異がかなり小さいことにある。4,5 次のグラフの数が 3 次までに比べて非常に多いことを考えると[21]、IMFA が近似体系として IIB 型行列模型に対してもうまく働いていることを示している (高次がそれまでの結果に対する補正になっている)。このため、例として扱った ϕ^4 理論の時と同様に、得た結果を信頼してよいと思われる。

結果に対して、いくつかの解説を述べておく。

[21] 2PI 自由エネルギーに寄与するグラフ数は、3 次で 4 個、4 次で 12 個、5 次では 49 個になる。

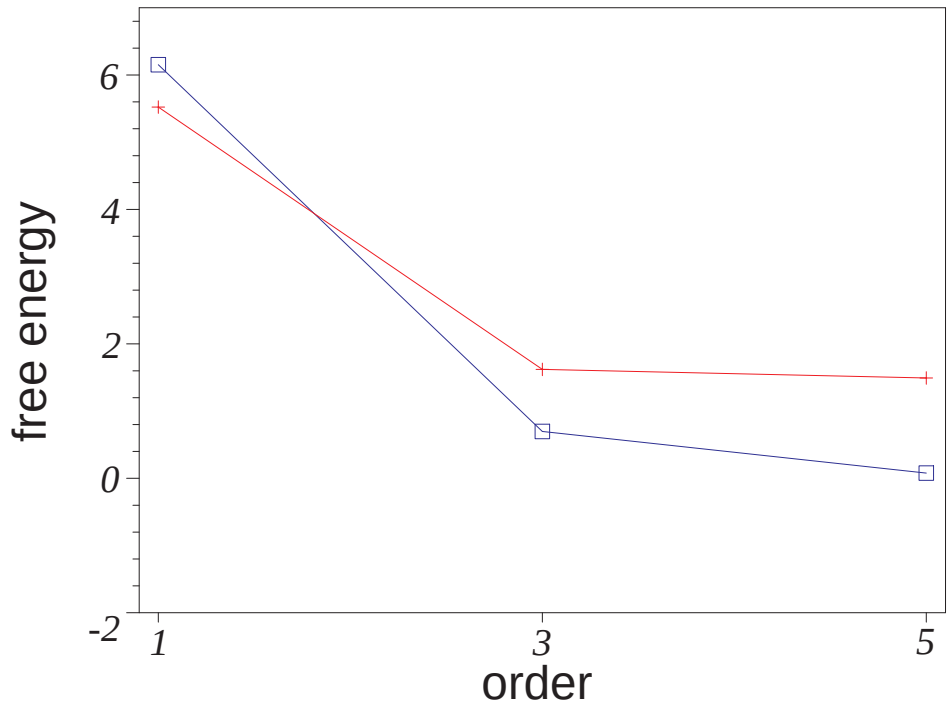


図 25: IIB 型行列模型に IMFA を適用した場合の自由エネルギーの振る舞い。横軸は近似の次数で 5 次まででは、奇数次のみに停留点が存在する。十字印が SO(7)、四角印が SO(4) である。

ansatz	quantities	1st order	3rd order	5th order
SO(7)	F	5.522722156	1.620942535	1.492429842
	R	0.6407423748	0.7670244718	0.8051803940
	r	0.3276944430	0.3556261073	0.3844627899
	ρ	1.955304364	2.156828390	2.094299930
	$1/M_0^1$	0.4105507905	0.4518139994	0.4400228898
	$1/M_0^2$	0.1073836480	0.07040135462	0.06351041755
	$1/m_0$	0.4426595159	0.5126612791	0.5082289370

表 6: SO(7) 仮定の場合の停留点における、自由エネルギー F、時空の広がり R, r、及び広がりの比 ρ の数値。及び、ITE で導入したパラメーターの値。

ansatz	quantities	1st order	3rd order	5th order
SO(4)	F	6.153347114	0.696885300	0.077693647
	R	0.7500535231	1.161504610	1.7090706440
	r	0.4038451083	0.3796625830	0.2691460598
	ρ	1.857280202	3.059307619	6.349974602
	$1/M_0^1$	0.5625802884	0.6844310859	0.6695144044
	$1/M_0^2$	0.1630908715	0.08577036668	0.02122284256
	$1/m_0$	0.4713708814	0.5390149536	0.5174809839

表 7: SO(4) 仮定の場合の停留点における、自由エネルギー F、時空の広がり R, r、及び広がりの比 ρ の数値。及び、ITE で導入したパラメーターの値。

- 2 次と 4 次ではまともな停留点は存在しなかった。ϕ^4 理論でもそうであったように、低次では偶数次には停留点は必ずしも表れないのである。このため奇数次だけの結果が表及び図に示してある。

- SO(6) 仮定では、停留点は全て SO(7) 仮定のものになることが計算の結果分かった。つまり、SO(6) 仮定で式 (9.10) の中にある V_1 と V_2 は停留点で同じ値となり、SO(6) 対称性は SO(7) まで拡大することのである。同様に、SO(5) 仮定でも、停留点の解は SO(7) 仮定のものに一致する。この事実は、これら 3 つの仮定においてフェルミオンプロパゲーターが全く同じ形をしていることから、かなり自然な結論であると思われる。一方、SO(4) 仮定と同じフェルミオンプロパゲーターを持つ SO(3) 仮定と SO(2) 仮定は、やはり SO(4) 仮定の解を再現する。このことから、フェルミオンの存在が SO(10) ローレンツ対称性の自発的破れに対して決定的な役割を果たしていることが結論される。

- 1 つ残された SO(1) 仮定に対しては、1 次と 3 次の計算でまともな解が無いことが分かった。具体的には、下で述べる時空の広がりの 2 乗が負になる解しか存在しなかった。これは、1 次元の時空が「我々の時空」としては実現されないことを示している。

9.3 時空の広がり

ここまでで、SO(4) 仮定の自由エネルギーが IMFA により最も低い値を取ることを見た。次に、「我々の時空」の大きさが「内部空間」の大きさと比べてどうなるのか

を見てみよう。SO(7) 仮定と SO(4) 仮定に対して、「我々の時空」の大きさ R と「内部空間」の大きさ r を次のように定義する。

$$R^2 = \langle\ \frac{1}{N}\ \mathrm{Tr}{A_1}^2\ \rangle = -\frac{\partial F(M^i, m)}{\partial M^1}\ , \tag{9.29}$$

$$r^2 = \langle\ \frac{1}{N}\ \mathrm{Tr}{A_{10}}^2\ \rangle = -\frac{\partial F(M^i, m)}{\partial M^2}. \tag{9.30}$$

これらの定義は、IIB 行列模型においては、時空は行列の中に入っており、ゲージ不変量 $I_{\mu\nu} = \mathrm{Tr}A_\mu A_\nu$ が時空の慣性モーメントを与えるところから来ている。このモーメントは今採っている仮定により、対角であり、さらに $I_{11} = \cdots = I_{dd}, I_{(d+1)(d+1)} = \cdots = I_{10,10}\ ,(d = 4, 7)$ である。これらの観測量も ITE により改良されたものを用いる。

$$\langle\ \frac{1}{N}\ \mathrm{Tr}{A_1}^2\ \rangle_k^{\mathrm{improved}} = -\frac{\partial F}{\partial M^1}(M_0^i - gM_0^i, m_0 - gm_0)\Big|_k, \tag{9.31}$$

$$\langle\ \frac{1}{N}\ \mathrm{Tr}{A_{10}}^2\ \rangle_k^{\mathrm{improved}} = -\frac{\partial F}{\partial M^2}(M_0^i - gM_0^i, m_0 - gm_0)\Big|_k. \tag{9.32}$$

これらの評価にも、表 6 及び 7 に示してある、改良された自由エネルギーの停留点 M_0^i,m_0 の値を用いることにしよう。そうして得られた R と r を、図 26 にプロットした。これらは、長さの次元を持っているため、絶対的な評価は (今は) 出来ないが、比を取ることによって無次元にした量 $\rho = R/r$ が図 27 である。 これらの図から読み取るべき事は、自由エネルギーの安定さに比べて、SO(4) 仮定においては 2 つの広がり R と r の両方が、次数に対して相当変わっていっている事である。それに伴い、広がりの比は非常に速く大きくなっていく。ϕ^4 理論では、自由エネルギーと 2 点関数が共に安定していたことを考えると、もし広がりが有限の大きさを持つ場合にはその辺りで安定した振る舞いを見せることが期待される。しかし、そのような振る舞いは全く見られないので、SO(4) 仮定に対しては、無限に大きい 4 次元時空と無限に小さい内部空間が真空として存在することが示唆される。

まとめると、SO(4) 仮定は、最も小さい自由エネルギーを持ち、それはかなり安定した値である。また、4 次元と 6 次元の広がりの比は次数と共に、急速に増大する。よって、IIB 型行列模型では、小さな内部空間を持つ、大きく (無限に) 広がった 4 次元時空が、その経路積分を支配することが示された。

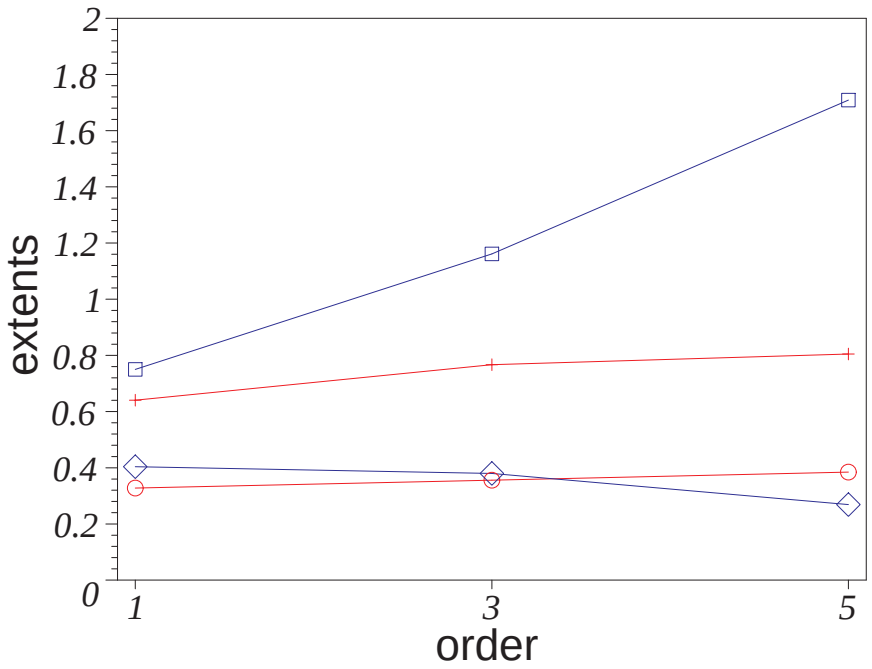


図 26: 「我々の時空」の広がり R と「内部空間」の広がり r のプロット。十字印と丸印が $\mathrm{SO}(7)$ の R と r、四角印とダイヤ印が $\mathrm{SO}(4)$ の R と r である。

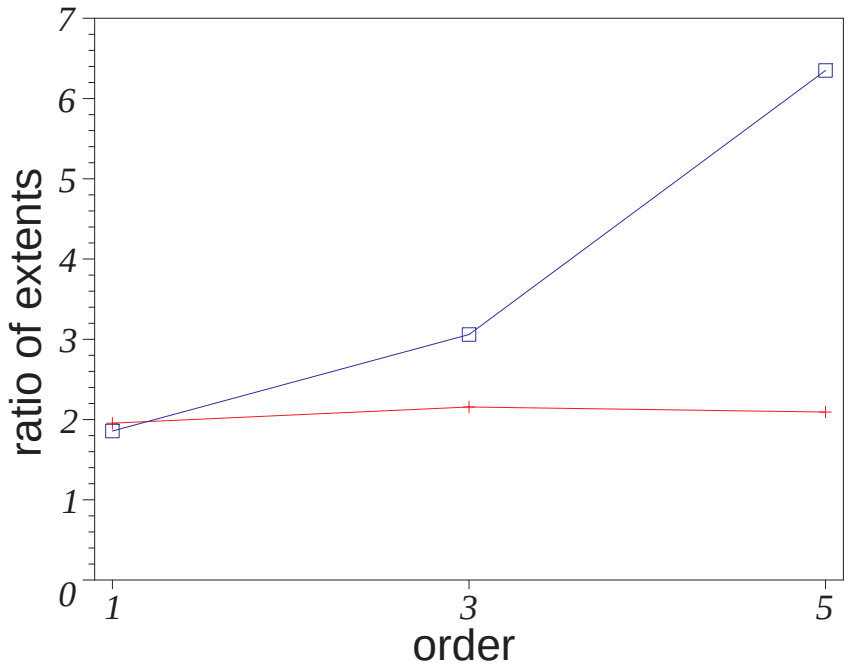


図 27: 「我々の時空」の広がり R と「内部空間」の広がり r の比 R/r のプロット。十字印が $\mathrm{SO}(7)$、四角印が $\mathrm{SO}(4)$ である。

10　結論と展望

10.1　IIB 型行列模型に関する結果

本文の流れとは逆になるが、まず IIB 型行列模型に IMFA を適用した結果をまとめる。

- 4 次元的な配位が IIB 型行列模型の経路積分を支配することを示した。
- SO(7) 仮定では、自由エネルギーと広がりの比は 5 次でかなり安定になった。一方、SO(4) 仮定の下では、自由エネルギーは 3 次の解よりも小さな値となったが、ある値に収束しそうな振る舞いを見せている。また、広がりの比は、期待通り、急速に増大した。これは、厳密値が有限の値ではなく、無限に大きな時空が真空であることを示唆する。
- フェルミオン場がローレンツ対称性の自発的破れの際に、決定的な役割を果たすことが分かった。フェルミオン場の 2 点関数が、残るローレンツ対称性を決めてしまうのである。

適当な解が存在しなかった SO(1) 仮定を除き、他の全ての仮定の下で、フェルミオン 2 点関数がゼロでない値を取る方向は、そうでない方向に対して、小さな広がりを持つ。そのため、これらの方向が「内部空間」と解釈できた。この、フェルミンに依る空間収縮には定性的な理解が出来ると面白いであろう。フェルミオン行列式の位相の効果を利用したローレンツ対称性の自発的破れ [37] との関係を明らかにすることとも繋がっているかもしれない。

SO(8) から SO(10) の対称性を持った仮定は、フェルミオン 2 点関数が消えてしまうため今のやり方では作ることが出来ない。また、超対称性は全て破れる仮定を置いた。平均場近似で良く知られているように、平均場が元々の作用の対称性を破っていたとしても、対称性が壊れない相を表す解では平均場は消えて対称性は回復する。前節の解析により、平均場がゼロでない値を取ったことから、本当の真空では SO(10) は回復せず、超対称性も全て壊れてしまうことが分かる。この結果は、[37] とも一致している。

SO(4) 仮定での広がりの比の急速な増大は、興味深い振る舞いである。更に高次の解析を行うことで、その値が本当に無限大まで行くのが適当なのかがはっきりするかもしれない。今の次数でも、無限大が本当の解であることを示唆しているため、10 次元時空は自発的に 4 次元の平坦な時空までコンパクト化されると思われる。とにかく、

改良された平均場近似は弦理論の非摂動的ダイナミクスをしっかりと捉えていることが分かった。その第一歩として時空の次元に関する情報を引き出した。おそらく、次なる一歩はゲージ対称性を予言 (証明) することであろう。IMFA の改良や、さらなる近似手法の開発が必要かもしれないが、近い将来には達成できる問題であろう。

10.2 IMFA と ITE に関するまとめと展望

論文 [1] で開発した ITE に関する事柄をまとめておこう。

1. IMFA の本質を抽出することにより、ITE という一般化された近似体系を得た。
2. ITE は、積分の形式で書かれた量の近似に限らず、関数列一般に適用できることを見た。つまり、ITE は独立した近似体系であり、自由エネルギーの概念とは全く独立であることを示した。
3. SDE を出発点として 2PI 自由エネルギーを導入し、2PI 自由エネルギーと通常の自由エネルギーがルジャンドル変換により関係付くことを確かめた。
4. 2. の性質を利用し、2PI 自由エネルギーに対して ITE を直接適用した。その結果、通常の自由エネルギーを経由することなく近似を行うことが可能になった。

IMFA は、厳密な意味での近似法とは言えない。その理由は、なぜ改良された自由エネルギーが厳密値に収束していくのかが、まだ分かっていないからである。しかしながら、IMFA を適当なモデルに適用した場合、素晴らしく良い近似の結果が得られる。その背後に隠されたメカニズムを理解する事は重要な課題であろう。より抽象化された ITE は、このメカニズムの解明に有用かもしれない。

IMFA や ITE を改良する方向性や問題点を挙げてみよう。

- IMFA を行う時、この論文では 2 点関数に対するソース (質量) のみを考慮したが、3 点関数やそれ以上のものに対するソースを含めてみるのも面白いかもしれない。特に、IIB 型行列模型への応用の場合には、部分的に超対称性を残した形の平均場作用を作れると、超対称性の自発的破れに対して新しい知見が得られるかもしれない。また、1 点関数を含めることも考えてみるべきであろう。
- 場の種類が多い場合には、平均場のパラメーターも合わせて多くなる。パラメーターが 1 つの時には改良された関数をプロットすることでプラトーを視覚的に

確認することが出来るが、パラメーターが増えるとそれは不可能になる。そのような場合にも用いることの出来ように、プラトーの見分け方または、プラトーが本当にどれくらい平らなのかを知る基準のようなものを明確にする必要がある。

- それに関連して、近似の結果に対して誤差評価まで出来ると、より客観性の高い近似法となるであろう。

現在の素粒子論のフロンティアは、パラメーターの無い構成的な理論から、我々の住む現実世界の全てを説明しよう、というところにある。つまり、重力と場の量子論を統一し、唯一性の問題を解決する一歩手前までようやく辿り着いたわけである。

謝辞

修士・博士を通して、5 年もの長きに渡りお世話になりました京都大学理学研究科物理第二教室素粒子論研究室の皆様に感謝致します。中でも川合光さんには、修士論文の頃から物理について解説・議論して頂いた上に、私個人の問題に関しても色々と相談にのっていただき、大変お世話になりました。九後汰一郎さん、畑浩之さん、福間将文さん、前川展祐さん、小林達夫さん、黒木経秀さん、羽柴次郎さん、横野貴志さん、野口達也さん、大橋圭介くん、河本祥一くん、後藤生也くん、東武大くん、寺口俊介くん、園部勲くん、桧垣徹太郎くん、藤田麻沙子さん、三輪光嗣くん、森田健くんには、物理の議論や飲み会その他、公私共々深くお世話になりました。また、京都大学高エネルギー物理学研究室の西川公一郎さん、笹尾登さん、Seoul National University の杉野文彦さん、基礎物理学研究所の益川敏英さん、二宮正夫さん、国友浩さん、大野木哲也さん、笹倉直樹さん、浅川嗣彦さん、細道和夫さん、松尾俊寛さん、百武慶文さん、羽原由修くん、松浦壮くん、福田剛司くん、京都大学人間環境学研究所の松田哲さん、吉田健太郎くん、大阪大学理学研究科の木村哲士くん、高エネルギー加速器研究機構の磯暁さん、東京工業大学の永見健次くん、永沼雅史くん、東京大学総合文化研究科の橋本幸士さん、村松哲行くん、東京大学理学部の上杉忠興くん、高柳匡くん、疋田泰章くん、名古屋大学の菊川芳夫さん、西村淳さん、鵜飼和昌くん、奈良女子大学の高橋智彦さん、笛木祐子さん、北海道大学の河本昇ダイセンセイ、理化学研究所の多田司さん、中村真さん、以上の方々には、夏の学校や研究会等の折りに付け、物理について触発され、加えて様々な無駄話までもしていただき、有意義な時間を過ごさせて頂きました。

さらに、素粒子理論には直接関係しないですが、井上武くん、今井慎一さん、岩尾さとこさん、宇田川明子さん、大音真由美さん、奥村ゆう湖さん、岡崎ゆみさん、

川上貴裕くん、川田直紀くん御一家の皆さま、崎川牧子さん、佐野雅之くん、瀬戸治くん、谷口由記さん、谷口順子さん、近岡千夏さん、西田昌平くん、パンチョさん・美喜さんをはじめ、ビク～ニャの関係者の皆さま、廣内正豪さん、松野陽一郎くん、真鍋勇一朗くん、山田孝男くん、山本志穂さん、湯村博士くん御一家の皆さま、横山弘和くん、吉村愛美さん、吉村咲喜子さん、そして私の家族と親戚の人々、皆さまには、今までの私を様々な面からご支援頂き、楽しい人生を過ごす糧をたくさん頂きました。素晴らしい方々に出会えたことを感謝しています。今後ともよろしくご指導ご鞭撻のほどをお願い申し上げます。

また、公私共々お世話になりました理論秘書室の横田清江様、神谷舞さん、物理教室事務室の皆さまにも合わせて感謝致します。重なりますが、川合光さん、河本祥一くん、松尾俊寛さん、黒木経秀さんには、物理に今一つ打ち込まない私と、この論文の基となる共同研究を我慢強くしていただき、大変ご迷惑をお掛け致しました。心より感謝致します。なお、この仕事は日本の文部科学省、並びに日本学術振興会より補助を受けています。

A　イジング模型の簡単なレビュー

この節では、2 次元イジング模型 (Ising model) のレビューを行う。この模型は、簡単なハミルトニアンで与えられるにもかかわらず、弱結合展開と強結合展開や、秩序相-無秩序相間の相転移の存在 (自発磁化の発生)、それらに関連して、弱結合領域と強結合領域の自己双対性 (self duality) など、重要なダイナミクスを含んでいる。自発的対称性の破れや繰り込み群などを考える際にも、至る所で良い例題としてとして持ち出される模型でもある [41]。

A.1　ハミルトニアン

2 次元イジング模型のハミルトニアン H は以下で与えられる。

$$H = -J \sum_{(i,j)} S_i S_j - h \sum_i S_i. \tag{A.1}$$

ここで、スピン変数 S_i は 2 次元正方格子上の格子点 (lattice cite) に並んでいて、それぞれ ± 1 の値のみを取る。結合定数 J には、温度 T も含まれている。J/T で $T = 1$ としたと思っても良い。このため、

強結合 $\Leftrightarrow$ 低温

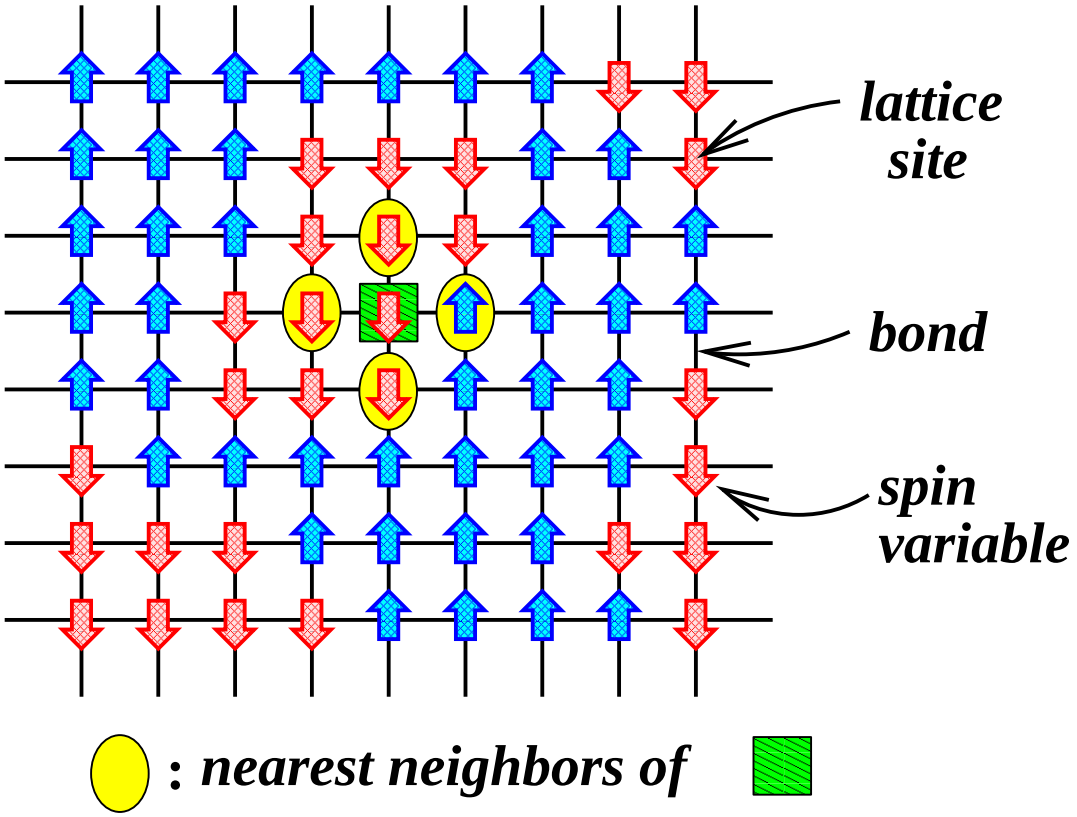


図 28: 2 次元正方格子上のイジング模型

弱結合 $\Leftrightarrow$ 高温

という言い方をすることもある。強磁性体を表す $J > 0$ の場合を主に考える。第 1 項目が相互作用項で、その和は上下左右の 4 つの最近接 (nearest neighbor) の組についてのものである。隣り合うスピンがそろった時に $-J$ となりエネルギーが下がる方向に符号を取った。この最近接スピンを繋ぐ線をボンド (bond) と呼ぶ。直感的にも、温度が高く (J が小さく) なるとエントロピーが勝って無秩序相になり、温度が低く (J が大きく) なるとエネルギーが重要になりスピンが揃いだす、というダイナミクスが考えうる。第 2 項目は外部磁場との結合を表しており、磁場がゼロでない時には、スピンは磁場の向きを好むようになる。相互作用項だけでは、全ての i に対して $S_i \to -S_i$ とする Z_2 対称性を持つが、自発的対称性の破れの議論の際には、磁場入れてこの対称性を破っておいて、最後に $h \to 0$ の極限を取る。

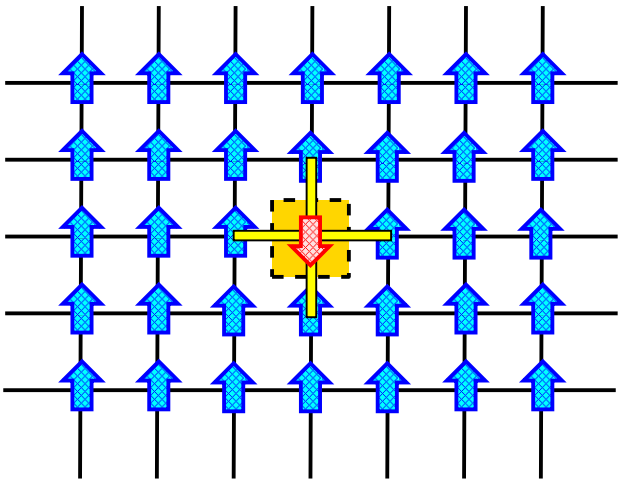


図 29: 1 次の項。下向きスピンまわりの 4 つのボンドにエネルギーが溜まる。

A.2 低温展開

まず、低温展開 ($J \sim \infty$) を考えよう。この場合には、ハミルトニアンを最小にする配位のみが寄与する。便宜上、全てのスピンが上向き $S_i = 1$ を出発点としよう。この状態から比較すると、いくつかのスピンを下向きに反転した状態では、上向きスピンと下向きスピンが両端にあるボンドに $2J$ のエネルギーがたまる。よって、分配関数は両端に違うスピンを持ったボンドの個数によって展開することが出来る。

$$Z = \sum_{\{S_i=\pm 1\}} e^{-H} \tag{A.2}$$

$$\begin{aligned} =& e^{J\cdot B}\Big\{1 + V(e^{-2J})^4 + 2V(e^{-2J})^6 \\ &+ \left((V^2 - 5V) + 6V + V\right)(e^{-2J})^8 + O\left((e^{-2J})^{10}\right)\Big\}. \end{aligned} \tag{A.3}$$

ここで、B はボンドの総数である。括弧の中の第 1 項目は全てのスピンが上向きの状態を表す。第 2 項目は、スピンが 1 つだけ下向きになり、異なるスピンが付くボンドが 4 本発生した状態に対応する (図 29 を参照)。この時の状態数はどこに下向きスピンが来るかに対応して、格子点の数だけある。これを V と書いた。 第 2 項目は異なるスピンが付くボンドが 6 つある状態で、これは隣合うスピンが同時に下向きになった時のみ起こる。上下に並ぶか左右に並ぶかの 2 通り (図 30) と、どの格子点で起こるかの V 通りの積が状態数である。次の次数では、少々ややこしいが、下向きスピ

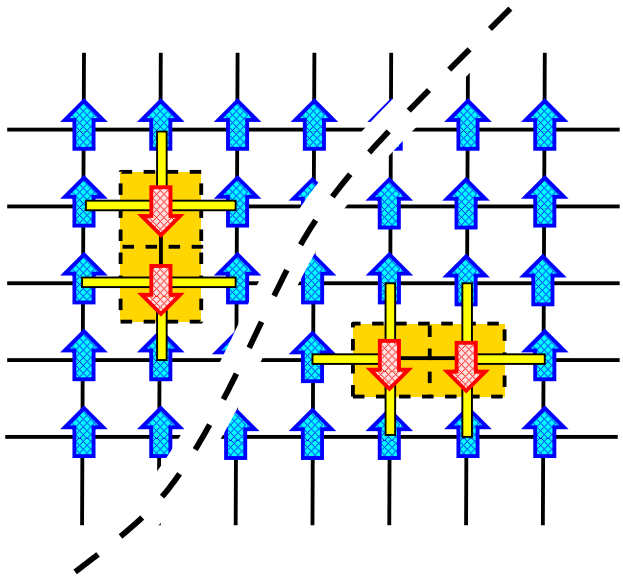


図 30: 2 次の項。

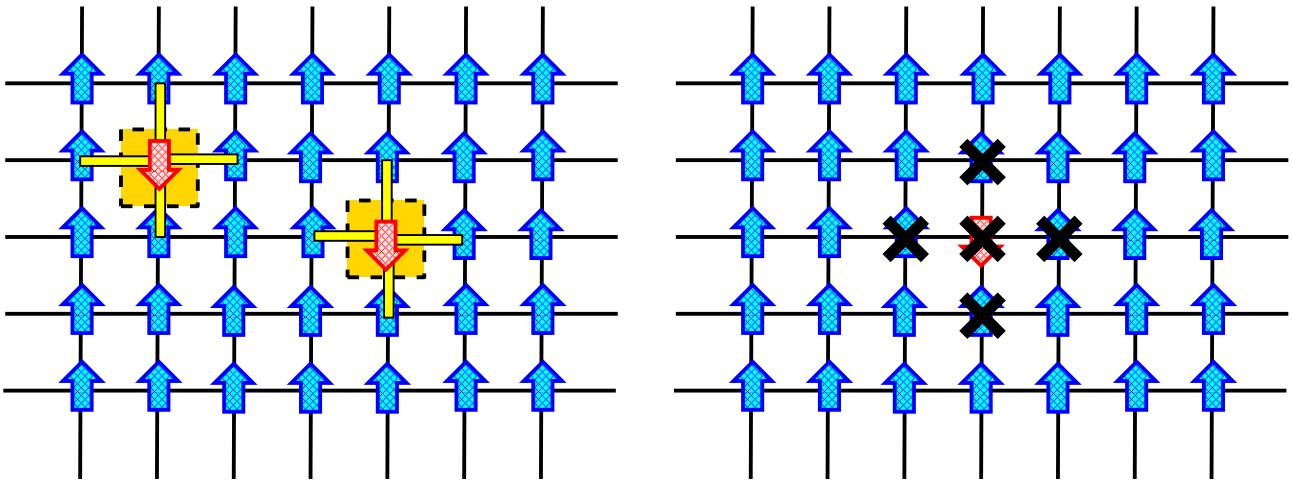


図 31: 3 次の項、その 1。右側の図のように 1 つ目のスピンを置いた時には、バッテンのある格子点には二番目の下向きスピンは置けない。

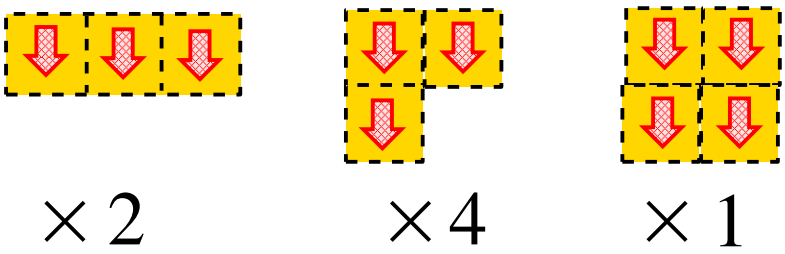


図 32: 3 次の項、その 2。

ンが 2、3、4 個の 3 通りの可能性が有る。2 個の場合は、図 31 にあるように、基本的に別々の格子点にある事になるので V^2 の因子が出るが、図の右側にあるバッテンが付いたところには置けないので、その分の $5V$ を引いとかなければならない。3、4 個の場合は図 32 に示したとおり、それぞれ $6V$、V の可能性がある。以下、同様に計算することが出来る。

大事なのは、エネルギーがボンドに溜まることと、e^{-2J} による展開になっていることである。

A.3 高温展開

今度は逆に高温展開 $(J \sim 0)$ を考える。スピン変数は ± 1 の値しか取らないことから、次の式が成り立つことに注意する。

$$\begin{aligned} e^{JS_iS_j} &= \begin{cases} e^J & \text{if } S_iS_j = 1, \\ e^{-J} & \text{if } S_iS_j = -1 \end{cases} \\ &= \cosh J \cdot (1 + \tanh J \cdot S_iS_j). \end{aligned} \tag{A.4}$$

以降、$\tanh J = k$ と書くことにする。今考えている極限では、$k \sim J \sim 0$ である。

この k について、分配関数は以下のように展開される。

$$Z = \sum_{S_i=\pm 1} \prod_{(i,j)} \cosh J \cdot (1 + kS_iS_j) \tag{A.5}$$

$$= (\cosh J)^B \sum_{S_i=\pm 1} \prod_{(i,j)} (1 + kS_iS_j) \tag{A.6}$$

$$= (\cosh J)^B 2^V \Big\{ 1 + Vk^4 + 2Vk^6$$

$$+\left((V^2-5V)+6V+V\right)k^8+O\left(k^{10}\right)\Big\}. \qquad \text{(A.7)}$$

この式の導出を説明しよう。第 1 項目は全てのボンドについて、$(1+kS_iS_j)$ の 1 を取ってきた項で、格子点の和に伴い、2^V の因子を出す。これは以下も同様なので括り出しておいた。1 つのボンドのみで kS_iS_j の項をとって、他の全ては 1 をとった場合、$\sum_{S_i=\pm1}$ の和で $+1+(-1)=0$ となり、分配関数には寄与しない。つまり、ある格子点に付いて、スピン変数が 1 つだけ浮いているときには常に寄与無しになる。よって、2 つや 3 つのボンドで k の項をとった場合も考えなくてよくて、次に寄与する項は k^4 である。この場合は、4 つのボンドが正方形を形作るときのみ、スピン変数は全て相棒を持つ。この時の状態数は正方形をどこに置くかで V 通りである。このように、高温展開で分配関数に寄与する状態は、ボンドが閉じたループを形作るものに限られる。また、閉曲線を作る時に、各ボンドは一回しか使えないため、交わらない閉曲線になる。このような、閉曲線の形は図 29 から 32 の中に描かれた破線を囲む図形で与えられる。今の展開での次数は閉曲線を作るのに用いたボンドの数であるが、低温展開の場合は、同じ閉曲線を横切るボンドの数であった。この対応により、結局低温展開と高温展開は全く同じ係数で展開されていく。

A.4 自己双対性

2 次元イジング模型は、低温展開と高温展開で全く同じ展開を持つことを見た。つまり、強結合-弱結合の入れ替えに対して自己双対な模型なのである[22]。これを用いて、イジング模型の相転移点を求めてみよう。

相転移点が一つしかないと仮定して、これを $J=J_*$ と書く。すると、低温側の展開は e^{-2J_*} が収束半径で、高温側の展開は $\tanh J_*$ が収束半径となる。展開は全く同じなので、これらは一致する。

$$e^{-2J_*}=\tanh J_* \qquad \text{(A.8)}$$

これは、簡単に解くことが出来て、相転移点として、

$$J_*=\frac{1}{2}\log(1+\sqrt{2})\sim 0.44068679351 \qquad \text{(A.9)}$$

を得る。

[22] 実際に、双対な変数を定義することもできる。低温側では、双対変数が無秩序パラメーターとなる。

A.5　数値計算

数値計算は、一見、力まかせの計算のように思われるかもしれないが、対象によっては非常に強力な近似法の一つである。加えて、簡単なモデルに対しても、視覚化することにより、物理的 · 数学的な感覚を身に付けるためにも有用であろう。

ここでは、モンテカルロ法 (Monte Carlo method) について、簡単にまとめる。まずは、π の値を四則演算のみで (近似的に) 計算する。そして、詳細つり合い (detailed balance) を説明した後、それを実現するためのアルゴリズムとして、熱浴法 (heat-bath method) とメトロポリス法 (Metropolis method) を紹介する。また、エルゴート性 (Ergodicity) は、言葉の定義だけ触れる。

最後にイジング模型に対して、シミュレーションを行い、相転移点を求めてみる。また、その時のスナップショットを見て、実際にスピンが揃っている領域が温度を下げると共に拡大していくことを見る。

A.5.1　円周率の計算: 直接サンプリング法

図 33 のように円の $1/4$ を考える。この面積は $\pi/4$ であるが、これを計算する方法

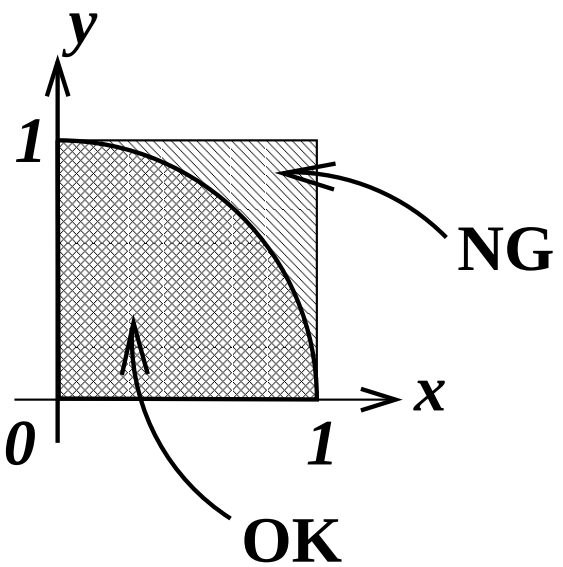


図 33: モンテカルロ法を用いて計算したい面積の図。網目のかかった円の 4 分の 1 を評価したい。

を考えてみよう。面積を積分で表して見ると、

$$S = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 \mathrm{d}y P(x,y), \tag{A.10}$$

$$P(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{if } x^2 + y^2 \leq 1, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{A.11}$$

と書くことが出来る。この積分は次の手順により近似的に評価できる。

1. $[0,1]$ 間の一様乱数を 2 つ作り、それらを r_1, r_2 とする。
2. $r_1^2 + r_2^2 \leq 1$ の時は「OK」(図の網目部分)、それ以外のときは「NG」(図の斜線部分) とする。
3. 上の 2 つの手順を N 回繰り返す。
4. 「OK」の回数を n とすると、$\pi/4$ の近似値は、OK の確立である

   $$p = \frac{n}{N} \tag{A.12}$$

   で与えられる。
5. また、誤差は二項分布の誤差で評価できるので、

   $$\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{N}} \tag{A.13}$$

   である。

このように、積分する空間全体に乱数を一様にばら撒くやり方を、直接サンプリング (direct sampling) という。この方法で近似値が得られる事は自明であろう。例えば、10^6 回の試行をやってみると、

$$\pi = 3.1416 \pm 0.0016 \tag{A.14}$$

4 桁に足らない程度まで計算できる。

A.5.2 マルコフ鎖サンプリングと詳細釣り合い

統計系を念頭において、次のような「相関関数」を考えよう。

$$\langle\ f\ \rangle = \frac{1}{Z} \sum_i f(i) P(i) \tag{A.15}$$

ここで、和は配位空間についての和で、$P(i) = e^{-H(i)}$ は「ボルツマンの重み関数」である。Z は分配関数 $\sum_i P(i)$ である。確率分布 $P(i)$ が配位空間中の一部のみで大きな値を取り、その他の大部分でほとんどゼロとなるときには、直接サンプリング法は使えない。そこで、マルコフ鎖サンプリング (Markov chain sampling) 法を用いる。この方法では、ある配位 i から次のステップの配位 j に移る確立を適当な遷移確率 $P(i \to j)$ で決めて、配位の鎖を作る。作られた鎖について和をとることで

$$\langle\ f\ \rangle = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(i_n) \tag{A.16}$$

として積分を評価する。ここで、N は鎖の長さである。この方法で重要なのは、マルコフ鎖 (Markov chain) が全ての配位空間を埋め尽くすことと、鎖によって得られる配位の集合が正しい確率分布 $P(i)$ を再現することにある。配位空間を埋め尽くすことをエルゴート性と呼ぶ。正しい確率分布を再現するための (十分) 条件を考えよう。系が定常状態にある時には、ある配位 i に注目して、i から他の配位へ移る確率と、他の配位から i に移ってくる確率は等しくならなければいけない。式で書くと

$$\sum_{j\neq i} P(i)P(i \to j) = \sum_{j\neq i} P(j)P(j \to i) \tag{A.17}$$

となる。この式を満たすために、各 j について

$$P(i)P(i \to j) = P(j)P(j \to i) \tag{A.18}$$

が成立することを要求すれば良い。これを詳細つり合い (detailed balance) の式と呼ぶ。これが満たされると、正しい確率分布はマルコフ鎖で次のステップへ移る時の固定点となり、相関関数が計算できることになる。

A.5.3 熱浴法とメトロポリス法

詳細つり合いを満たすための遷移確率のとり方には、代表的なものとして熱浴法 (heat bath method) とメトロポリス法 (Metropolis method) がある。

まず、イジング模型を例に熱浴法を説明しよう。ある格子点に注目して、そこのスピンを反転するかしないかだけが次のステップとする。つまり、二つ以上のスピンを反転する遷移確率はゼロとする。スピンが上向きの状態を $\uparrow$、下向きの状態を $\downarrow$ と書くと、

$$P(i \to j) = P_{\rm HB}(j) = \frac{P(j)}{P(\uparrow) + P(\downarrow)}, \quad i, j = \uparrow \text{ or } \downarrow \tag{A.19}$$

で遷移確率を定義する。この方法では、遷移確率は初めの配位には依らない。これは、周りの全てのスピンを固定した時 (熱浴とみなした時) のボルツマン型の遷移確率なので、詳細つり合いを満たすのは自明である。これをエネルギーで書くと、

$$P_{\mathrm{HB}}(\uparrow) = \frac{e^{-H(\uparrow)}}{e^{-H(\uparrow)} + e^{-H(\downarrow)}} \tag{A.20}$$

$$= \frac{1}{e^{H(\uparrow)-H(\downarrow)} + 1}, \tag{A.21}$$

$$P_{\mathrm{HB}}(\downarrow) = 1 - P_{\mathrm{HB}}(\uparrow) \tag{A.22}$$

となり、2 つの配位のエネルギー差だけで決まるため、最近接の情報だけで十分である。実際に計算する時には、[0,1] 間の一様乱数 r を発生させ、$r < P_{\mathrm{HB}}(\uparrow)$ の時には次のステップでのスピンは上向き、そうでない時は下向きとすればよい。このように熱浴法は、ある離散的な配位の組について、その「近傍」の情報のみでエネルギーが決まる場合に有用な方法である。

メトロポリス法に移ろう。この場合、遷移確率は

$$P(i \to j) = \min\left(1, \frac{P(j)}{P(i)}\right) \tag{A.23}$$

と定める。やはりこの時も遷移確率は 2 つの状態のエネルギー差だけで決まる。この遷移確率で詳細つり合いが成立している事は、すぐには分からないが、場合分けしてみれば明らかである。

	$P(i) > P(j)$	$P(j) > P(i)$
$P(i \to j)$	$P(j)/P(i)$	1
$P(i)P(i \to j)$	$P(j)$	$P(i)$
$P(j \to i)$	1	$P(i)/P(j)$
$P(j)P(j \to i)$	$P(j)$	$P(i)$

この方法は、連続自由度に対する遷移についても用いることが出来る強力な方法である。

A.5.4 イジング模型への適用

2 次元イジング模型に数値シミュレーションを適用してみよう。ここでは、熱浴法を用いる。まず、スナップショットを見てみよう。図 34 は $J = 0.4$ の場合で、大きなスピンの揃った領域は見えない。 図 35 にいくと、臨界点より少しだけ下の $J = 0.44$

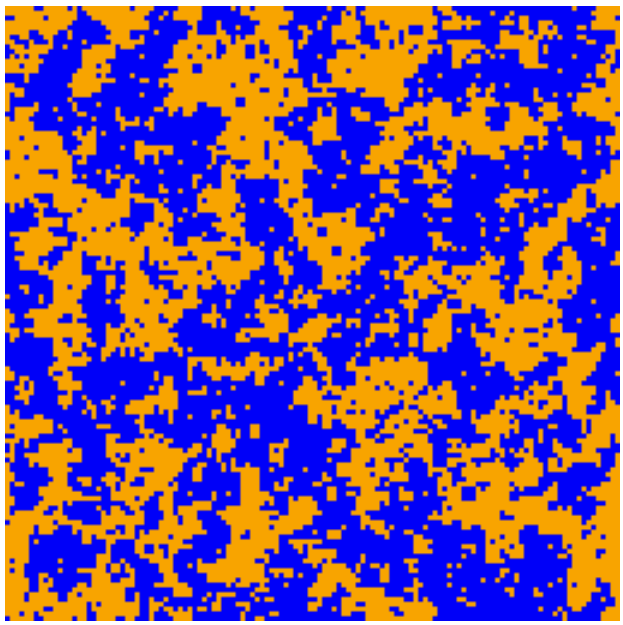


図 34: イジング模型のスナップショット。$J = 0.4$ の場合。

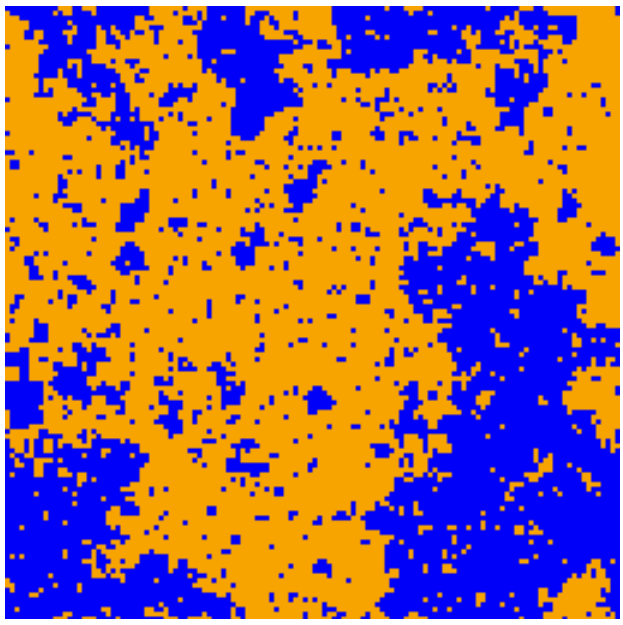


図 35: イジング模型のスナップショット。$J = 0.44$ の場合。

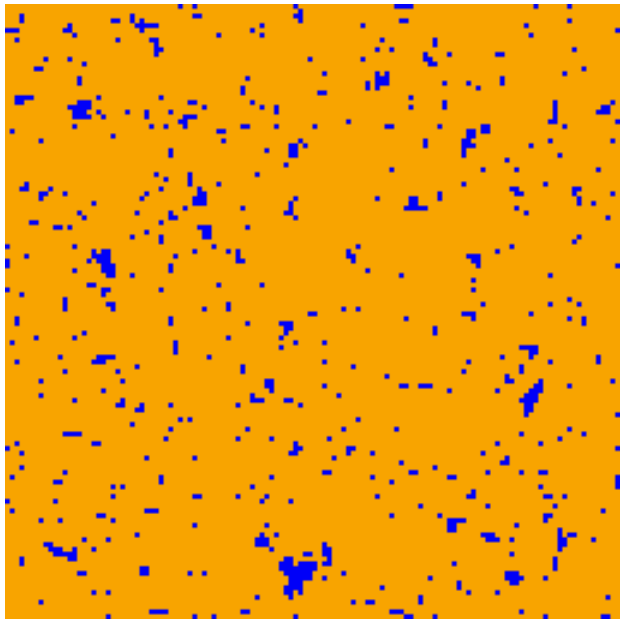


図 36: イジング模型のスナップショット。$J = 0.5$ の場合。

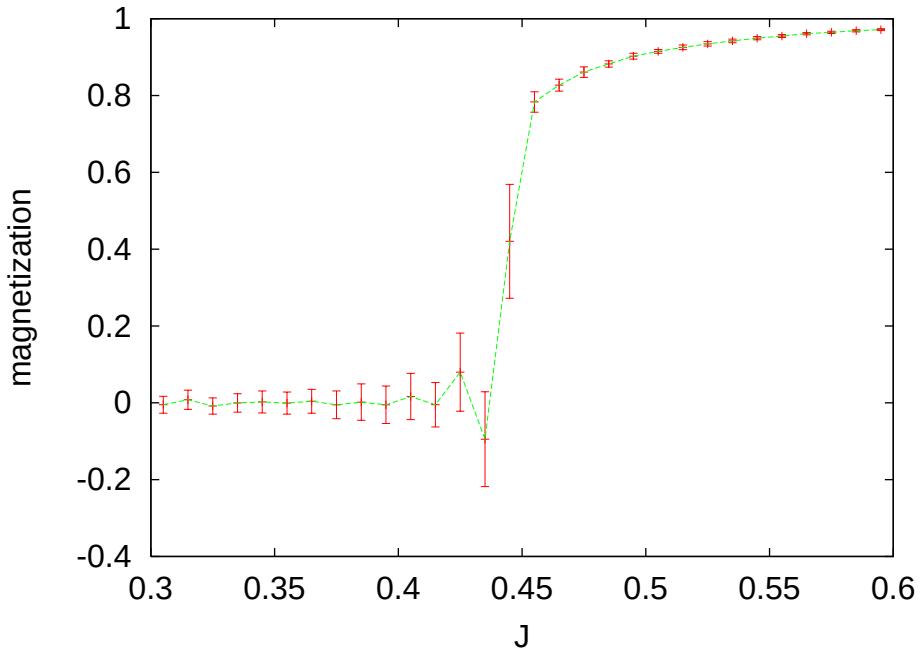


図 37: イジング模型のモンテカルロシミュレーションによる磁化の値。横軸は結合定数である。

であり、スピンが場所ごとに揃いはじめている。最後に、図 36 は臨界点を越えて、$J = 0.5$ とした。ここまで来ると磁化が発生したことが分かる。

色々な結合定数の値に対して、磁化を計算してみると図 37 を得る。この結果から、相転移点として $J \sim 0.44$ を求めることが出来る。

B　ITE の面白い振る舞い

第 3 節で、$\sum(-)^n x^n$ なる級数に対して ITE を適用した。その時には、$x_0 = 1.1$ と置くことで、$x = 3/2$ 辺りの値を上手く近似することが出来た。更に、x_0 の値を色々と変えることで、別の領域で近似を良くする事も可能である。しかしながら、x がある程度大きいところでは、この方法では良い近似は得られない。そこで、ITE を違うやり方で利用することを考えよう。ITE を適用する変数を変えてみるのである。考える関数は、同じく

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g^n (-)^n x^n (= \frac{1}{1+gx}), \tag{B.1}$$

$$f_k(x) = f(x)\big|_k \tag{B.2}$$

である。ここでは、副節 3.3 のやり方で形式展開係数 g を導入しておいた。

どの変数で ITE を適用するかを決めるために、x が大きくなった時には、x の冪級数では振る舞いが悪くなることに注意しよう。この場合、より適した変数は x の逆数になるのである。そのため、次のように、$1/x$ に対して ITE を適用しよう。

$$\frac{1}{x} \to \frac{1}{x_0} + g\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right), \tag{B.3}$$

$$f_k^{\text{improved}} = f\left(\frac{1}{\frac{1}{x_0} + g\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right)}\right)\Bigg|_k. \tag{B.4}$$

ただし、ここでも f_k^{improved} は、元の x での冪展開 (B.1) から、初めの $k+1$ 項の情報しか使っていない。一旦、$1/(1+gx)$ の形を知ってから解析接続しているわけではないのだ。

ITE を適用した後の関数列で、$x_0 = 0.8$ としたものを、図 38 にプロットした。20 ページの図 8 と比べると、それぞれの関数列の振る舞いが劇的に変わっていることが見て取れる。x の逆数で改良された級数は、元々の級数が発散していた $x > 1$ の領域で収束しているのである。数値を細かく見ると、例えば $x = 3$ における誤差は、近似

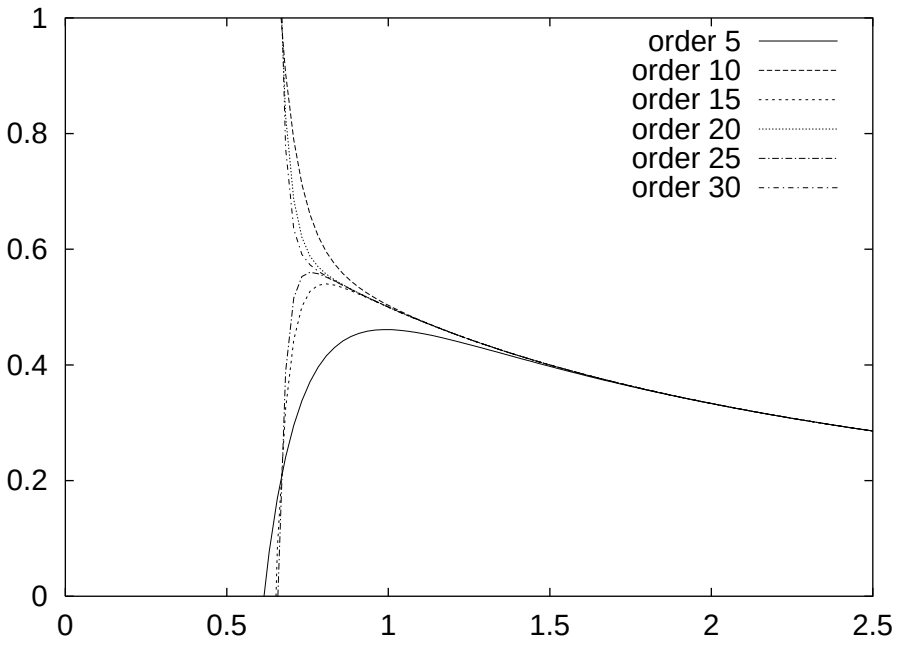


図 38: 改良された関数列。横軸は x である。

の次数が上がるごとに、大体 $1/10$ ずつ減っていくことが分かる。逆数で改良することで、かなり良い収束列を得たことになる。

C　漸近級数に対する ITE の適用

我々の目的は IIB 型行列模型を解析することにあり、その自由エネルギーのプラナー和は有限の収束半径を持っている。この意味で、ゼロ次元の行列 ϕ^4 理論や、第 3 節で扱った $1/(1+x) = \sum(-)^n x^n$ 等が、有用な例になるのは間違いない。しかし IMFA は、行列ではない普通の ϕ^4 理論に適用した場合でも、元の摂動展開が漸近展開であるにもかかわらず、非常に良い近似を得た。そこで、ITE の場合に、漸近展開に対してはどのような改良になるのかを見ておくのも面白いであろう。

ここでは、ガンマ関数の無限大まわりでの展開を例に取ろう。

$$J(x) = x^{-1/2}\left(\log\Gamma(x^{-1/2}) - x^{-1/2}(\log x^{-1/2} - 1) + \frac{1}{2}\log\frac{x^{-1/2}}{2\pi}\right) \tag{C.1}$$

$$= \frac{1}{12} - \frac{1}{360}gx + \frac{1}{1260}g^2x^2 - \frac{1}{1680}g^3x^3 + \frac{1}{1188}g^4x^4 - \frac{691}{360360}g^5x^5\cdots. \tag{C.2}$$

図 39 にこの関数列をプロットした。それを見ても分かるように、この展開は漸近展開である。

ここでも、x の逆数に対する ITE を行ってみよう。図 40 に改良された関数列の振る舞いが示してある。ここで、$x_0 = 0.03$ とした。 大きな x の領域での関数の振る舞

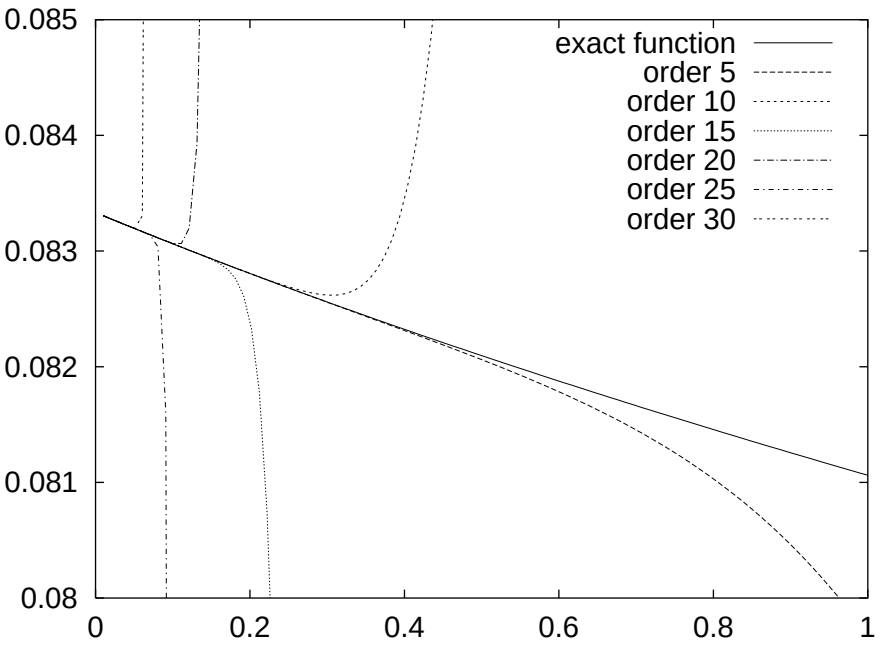


図 39: 元々の関数列の振る舞い。横軸は x である。

いは ITE によって滑らかなものになっている。ここで、逆に x を $1/3$ に固定してみると、図 41 に示したように、改良された自由エネルギーはそれぞれ、プラトーを形成することが分かる。極値を取る点での厳密値からの誤差は、改良された関数については、6 次から 26 次の間で 10^{-5} 程度である。しかし、改良をしない切断しただけの関数では、3 次から 7 次の間で 10^{-4} 程度となる。その後は、共に誤差は大きくなっていく。ITE を施すことにより、誤差が小さくなると同時に、関数列の振る舞いも滑らかなものになった。

D　2 次元トーラス上での行列正則化

本文中では、行列正則化を議論するとき、2 次元面のトポロジーが S^2 の場合に限って話をした。ここではもう一つ具体的に正則化が構成できる T^2 のトポロジーを持つ

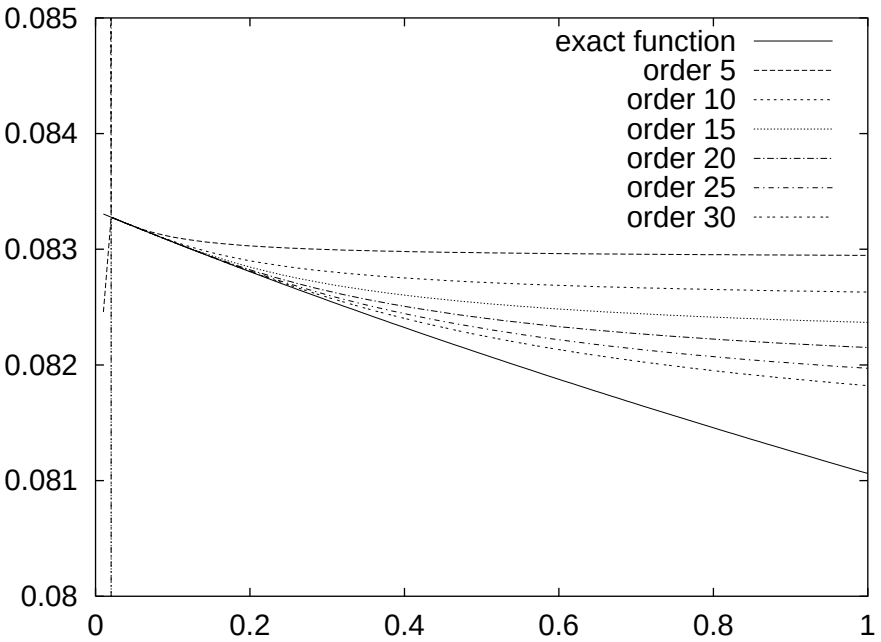


図 40: ITE により改良された関数列の振る舞い。横軸は x である。

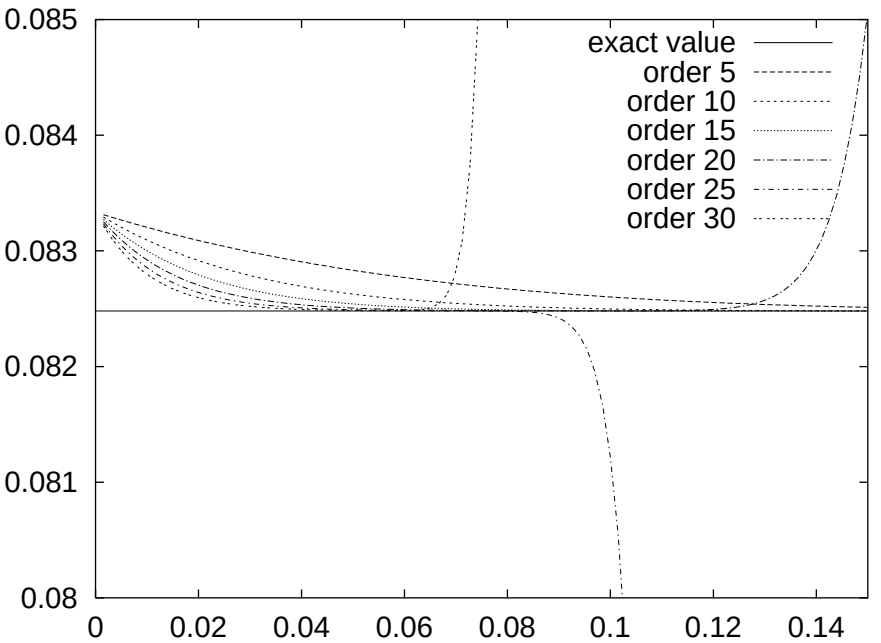


図 41: 改良された関数列のプラトー。横軸は x_0 である。

2 次元面を考えよう。$T^2 \simeq S^1 \times S^1$ なので、S^2 の場合よりも簡単である。

T^2 の座標は $\sigma^1, \sigma^2 \in [0, 2\pi)$ とする。固定するスカラー密度は、S^2 の場合と同じ規格化、

$$\int_0^{2\pi} d\sigma^1 \int_0^{2\pi} d\sigma^2 \omega(\sigma^1, \sigma^2) = 4\pi \tag{D.1}$$

になるように $\omega = 1/\pi$ と決めよう。

第 1 ステップは関数側の完全系を定めることである。これは単なるフーリエモードで、

$$y_{\ell_1 \ell_2} \triangleq e^{i\ell_1 \sigma^1} e^{i\ell_2 \sigma^2} \tag{D.2}$$

とすれば良い。規格化は $\int d^2\sigma\ \omega \left| y_{\ell_1 \ell_2} \right|^2 = 4\pi$ で決めた。これらの間のポアソンブラケットから、構造定数を次のように定める。

$$\{ y_{\ell_1 \ell_2}, y_{m_1 m_2} \} = \frac{1}{\omega} \epsilon^{ab} \partial_a y_{\ell_1 \ell_2}\ \partial_b y_{m_1 m_2} \tag{D.3}$$

$$= -\pi(\ell_1 m_2 - \ell_2 m_1)\ y_{(\ell_1 + m_1)(\ell_2 + m_2)} \tag{D.4}$$

$$\triangleq g_{\ell_1 \ell_2, m_1 m_2}{}^{n_1 n_2} y_{n_1 n_2} \tag{D.5}$$

関数側はこれで終りで、行列側に移る。$e^{i\ell_1 \sigma^1}$ には、固有値を S^1 上にほぼ一様に持った次の対角行列

$$U = \begin{pmatrix} q^0 & & & & \\ & q^1 & & & \\ & & q^2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & q^{N-1} \end{pmatrix} \tag{D.6-a}$$

を対応させることにしよう。ここで $q = \exp(2\pi i/N)$ である。$e^{i\ell_2 \sigma^2}$ に対応する行列は、やはり同じ固有値を持っていてほしいので、次のようなちょっとひねった行列を対応させよう。

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ 1 & & & & 0 \end{pmatrix} \tag{D.6-b}$$

これらの行列に対する公式を書いておくと、

$$U^N = 1, \qquad UVU^\dagger = q^{-1} V, \qquad UV = q^{-1} VU \tag{D.7}$$

$$V^N = 1, \qquad VUV^\dagger = qU, \qquad VU = qUV \tag{D.8}$$

である。U, V を使って、行列側の基底は

$$Y_{\ell_1\ell_2} \triangleq U^{\ell_1}V^{\ell_2} = q^{\ell_1\ell_2}V^{\ell_2}U^{\ell_1} \qquad \ell_1, \ell_2 = 0, 1, \cdots (N-1) \tag{D.9}$$

と書かれる。規格直交性はほとんど明らかである。それでは行列側で構造定数を求めよう。

$$-i\frac{N}{2}\left[\, Y_{\ell_1\ell_2}, Y_{m_1m_2}\,\right] = -i\frac{N}{2}\left(U^{\ell_1}V^{\ell_2}\cdot U^{m_1}V^{m_2} - U^{m_1}V^{m_2}\cdot U^{\ell_1}V^{\ell_2}\right) \tag{D.10}$$

$$= -i\frac{N}{2}\left(q^{\ell_2 m_1} - q^{\ell_1 m_2}\right) Y_{(\ell_1+m_1)(\ell_2+m_2)} \tag{D.11}$$

$$\triangleq G_{\ell_1\ell_2,m_1m_2}{}^{n_1n_2} Y_{n_1n_2} \tag{D.12}$$

固定された ℓ_1, ℓ_2, m_1, m_2 に対して、$N \to \infty$ の極限では、$q^{\ell_2 m_1} = i\frac{2\pi}{N}\ell_2 m_1 + O(1/N)$ から、二つの構造定数は一致することが分かる。

よって、T^2 の場合でも S^2 の場合と全く同じ行列正則化の手続き

$$f(\sigma) = \sum_{\ell_1,\ell_2}^{\infty} c_{\ell_1\ell_2} y_{\ell_1\ell_2} \quad \longrightarrow \quad F = \sum_{\ell_1,\ell_2}^{N-1} c_{\ell_1\ell_2} Y_{\ell_1\ell_2} \tag{D.13}$$

$$\{\, f\,, g\,\} \quad \longrightarrow \quad -i\frac{N}{2}\left[\, f\,, g\,\right] \tag{D.14}$$

$$\frac{1}{4\pi}\int d^2\sigma\ \omega \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{N}\mathrm{tr} \tag{D.15}$$

で良いことが分かる。S^2 でも T^2 でも同じ手続き正則化されるが、実は任意の種数を持った 2 次元面上でも同じ形に正則化される [46]。つまり、正則化後の行列になった変数は元の 2 次元面がどういう形だったかを知らない。またはいろいろな種数を持った 2 次元面上の関数の重ね合わせと言ってもいいかもしれない。これも行列正則化の奥深さを感じさせる事柄である。

E　10 次元での超対称ゲージ理論

超対称ゲージ理論理論は、(9+1) 次元でクリティカルである。ここではその理論について、作用、超対称変換を与える。簡単のため $\mathrm{SU}(N)$ でやる (何でも同じ)。

まず、(9+1) 次元では、マヨラナワイル (MW) スピナーが 16 成分であることから、ベクトル場 1 つと MW スピナー 1 つずつで自由度が合うことが分かる ($10 - 2 = 16/2 =$

8)。ベクトル場はゲージ群のアジョイント表現に属するので、超対称性の相棒 (super partner) であるフェルミオン (gaugino) も同じ表現にいる。よって、作用は次のようになる。

$$S_{\mathrm{SYM}_{10}} = -\frac{1}{g_{\mathrm{YM}}^2}\int d^{10}x\ \mathrm{tr}\left(\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{i}{2}\overline{\lambda}\Gamma^{\mu}D_{\mu}\lambda\right) \tag{E.1}$$

ここで、

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i\left[\, A_\mu\,, A_\nu\,\right] \\ &= -i\left[\, i\vec{\partial}_\mu + A_\mu\,, i\vec{\partial}_\nu + A_\nu\,\right] \end{aligned} \tag{E.2}$$

$$\begin{aligned} D_\mu\lambda &= \partial_\mu\lambda - i\left[\, A_\mu\,, \lambda\,\right] \\ &= -i\left[\, i\vec{\partial}_\mu + A_\mu\,, \lambda\,\right] \end{aligned} \tag{E.3}$$

と定義した。$\vec{\partial}$ はその右側にある関数は全て微分する微分演算子である。ゲージ変換は、

$$(i\vec{\partial}_\mu + A_\mu) \to g(x)(i\vec{\partial}_\mu + A_\mu)g(x)^{-1} \tag{E.4}$$

$$\lambda \to g(x)\lambda g(x)^{-1} \tag{E.5}$$

で、無限小変換 $g(x) = e^{ia(x)}$ で書けば

$$\delta A_\mu = \partial_\mu a(x) - i\left[\, A_\mu\,, a(x)\,\right] = D_\mu a(x) \tag{E.6}$$

$$\delta\lambda = -i\left[\, \lambda\,, a(x)\,\right] \tag{E.7}$$

である。一方、超対称変換は、定数のマヨラナワイルスピナー ϵ をパラメーターとして、

$$\delta A_\mu = -\frac{i}{2}\bar{\epsilon}\Gamma_\mu\lambda \tag{E.8}$$

$$\delta\lambda = \frac{1}{4}F_{\mu\nu}\Gamma^{\mu\nu}\epsilon \tag{E.9}$$

$$\delta F_{\mu\nu} = i\bar{\epsilon}\Gamma_{[\mu}D_{\nu]}\lambda \tag{E.10}$$

と書ける。

超対称変換の交換子は次のようになっている。

$$\left[\,\delta_1\,, \delta_2\,\right] A_\mu = \frac{i}{2}\overline{\epsilon_2}\Gamma^\nu\epsilon_1 F_{\nu\mu} \tag{E.11}$$

$$\left[\,\delta_1\,, \delta_2\,\right] \lambda = \frac{i}{2}\overline{\epsilon_2}\Gamma^\nu\epsilon_1 D_\nu\lambda + (\lambda\text{ の運動方程式に比例する項}) \tag{E.12}$$

λ に対する式は、

$$\delta_1\delta_2\lambda = \delta_1\left(\frac{1}{4}F_{\mu\nu}\Gamma^{\mu\nu}\epsilon_2\right) \tag{E.13}$$

$$= \frac{i}{4}\epsilon_1\Gamma_\mu D_\nu\lambda\cdot\Gamma^{\mu\nu}\epsilon_2 \tag{E.14}$$

$$= -\frac{i}{4}\epsilon_1\Gamma_\mu D_\nu\lambda\cdot\Gamma^\nu\Gamma^\mu\epsilon_2 \ + \frac{i}{4}\epsilon_1\not{D}\lambda\cdot\epsilon_2 \tag{E.15}$$

とした後で、最左辺の第一項に Fierz 変換をすると、5 階反対称の Γ の項は簡単に落ちて、3 階反対称の Γ の項は、$\epsilon_{1,2}$ の反対称化から消えるので、簡単に求まる。$c^\mu = \frac{i}{2}\overline{\epsilon_2}\Gamma^\mu\epsilon_1, a(x) = -c^\mu A_\mu$ と書くと、

$$[\,\delta_1\,,\delta_2\,] = c^\mu\partial_\mu + \delta_a \tag{E.16}$$

と書ける。ここで δ_a は $a(x)$ をパラメーターとする無限小ゲージ変換である。よってこのゲージ変換を無視すると、きちんと並進になっていることが分かる。

一応ユークリッド化したものを書いておくと、

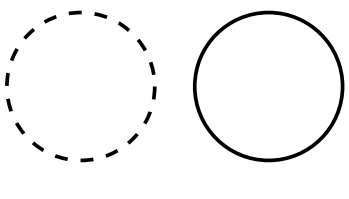
$$S^{(\mathrm{E})}_{\mathrm{SYM}_{10}} = \frac{1}{g^2}\int d^{10}x\ \mathrm{tr}\left(\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{i}{2}\bar{\lambda}\Gamma^\mu D_\mu\lambda\right) \tag{E.17}$$

である。超対称性の形はミンコフスキーの場合と同じである。

F　プラナー 2PI ファインマングラフ

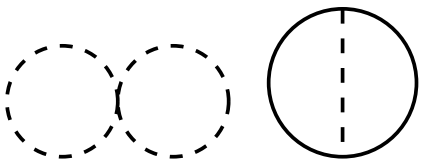
0 次から 5 次までの全てのプラナー 2PI ファインマングラフを示す。グラフの下に書いてある数字は対称性因子である。

F.0　zeroth order



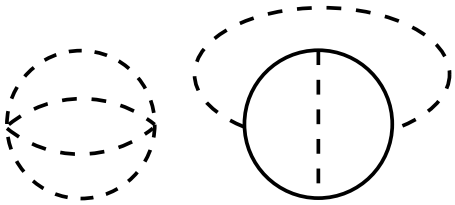
1　　1

F.1 first order



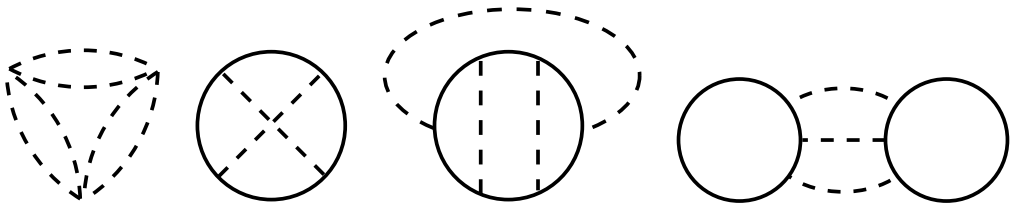
2 2

F.2 second order



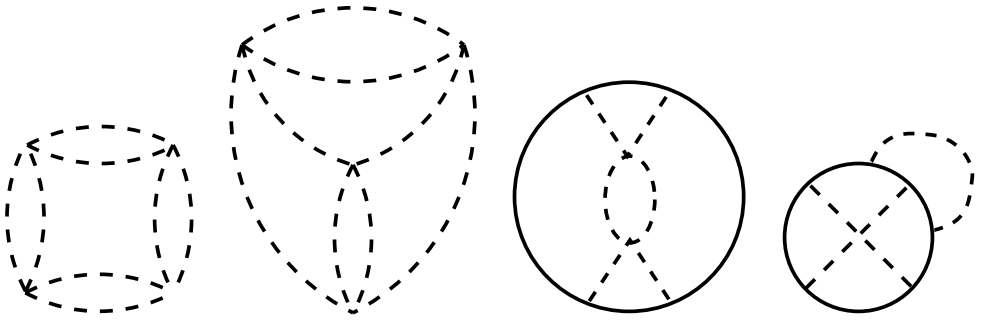
8 4

F.3 third order

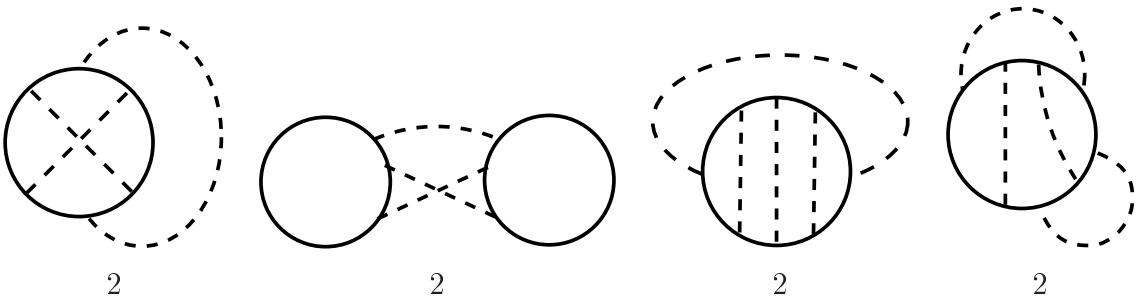


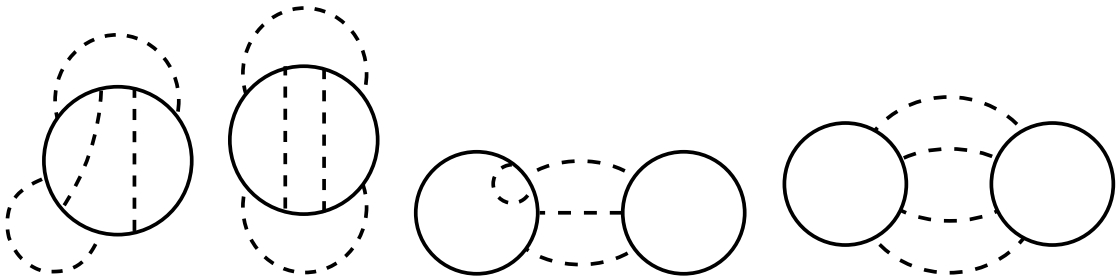
6 4 2 6

F.4 fourth order

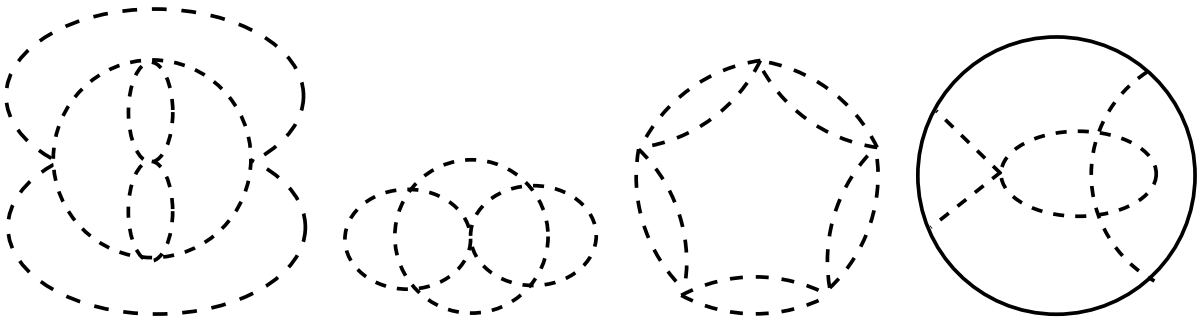


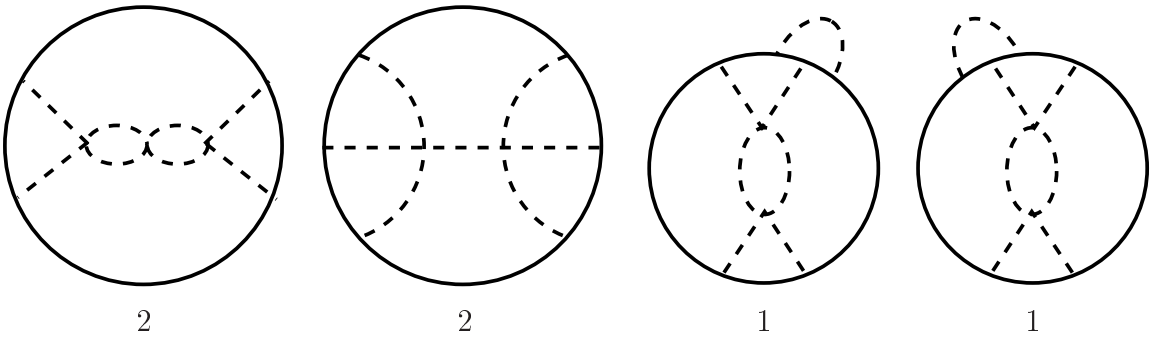
8 4 2 1

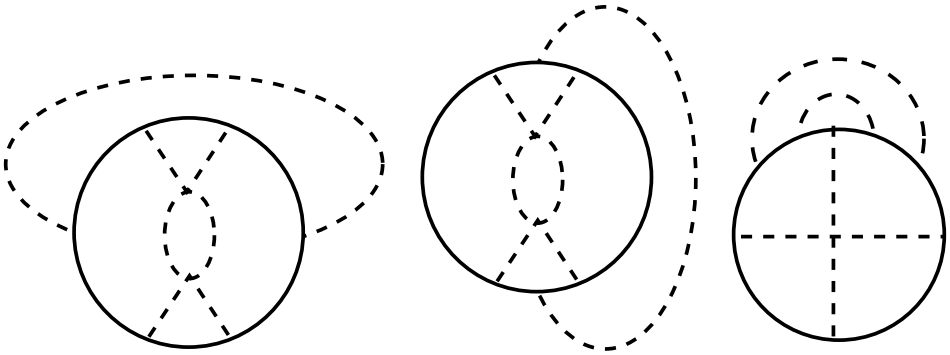




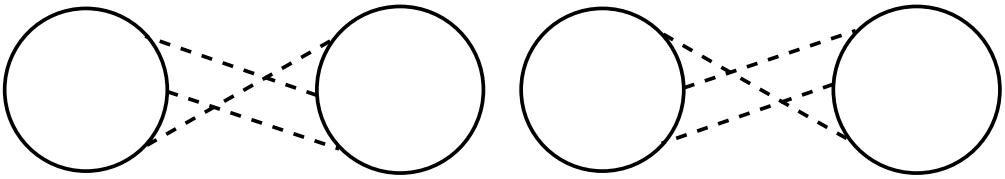
F.5 fifth order



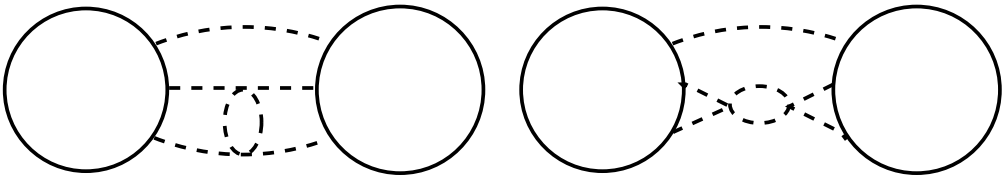




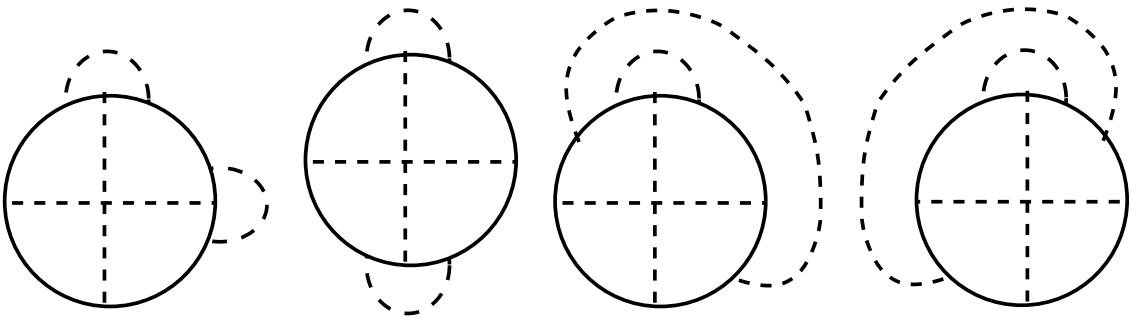
2 2 1



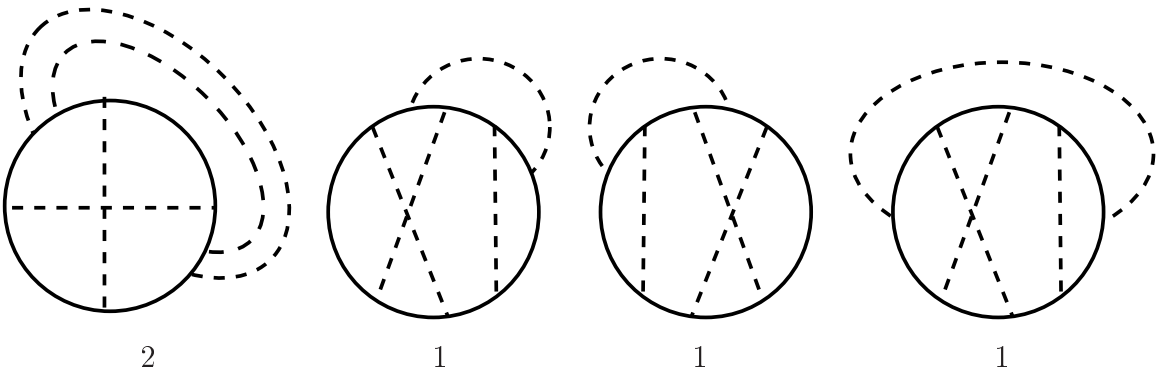
2 2



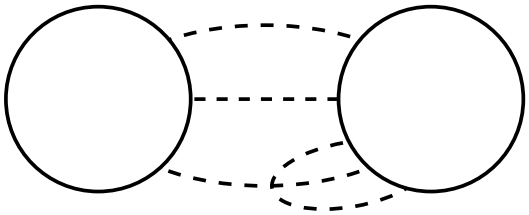
2 2



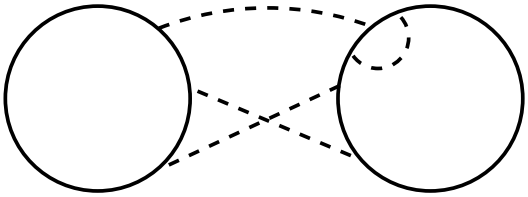
1 2 1 1



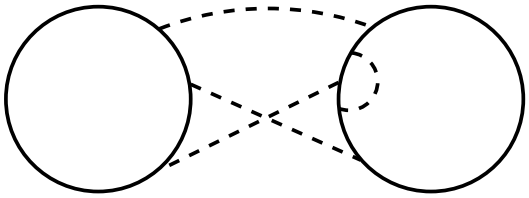
2 1 1 1



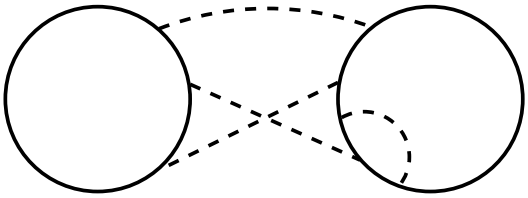
1



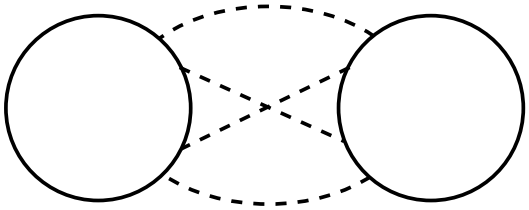
1



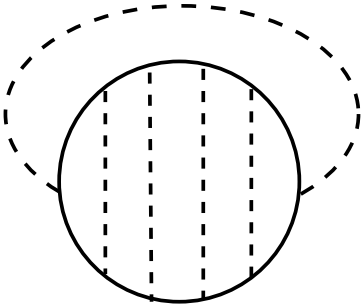
1



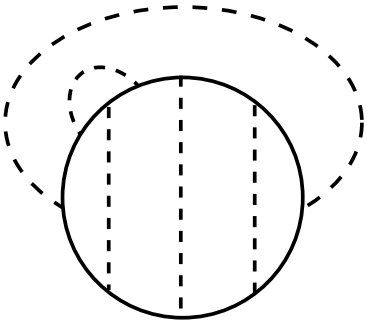
1



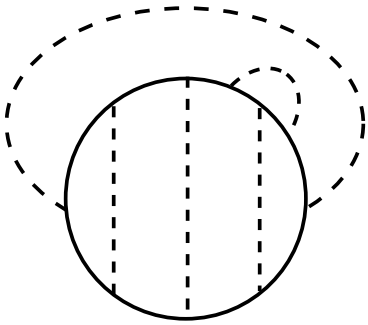
2



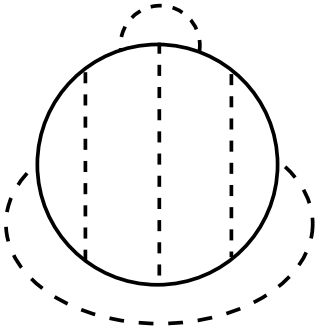
2



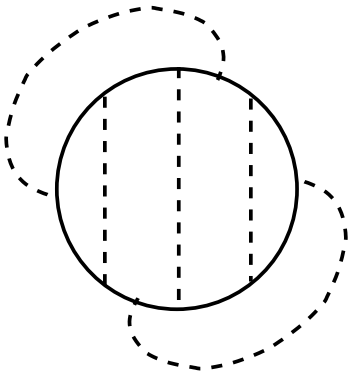
1



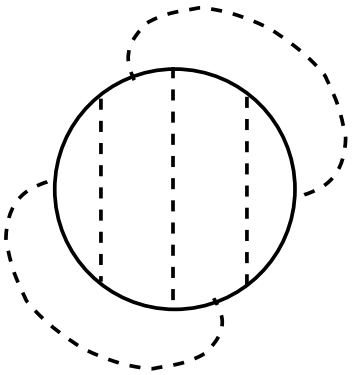
1



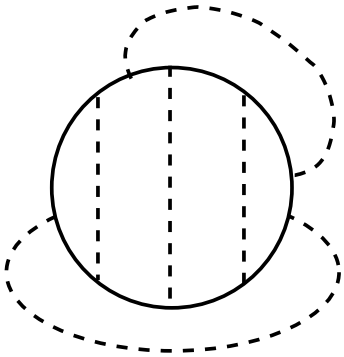
1



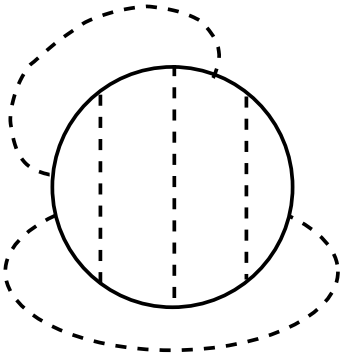
2



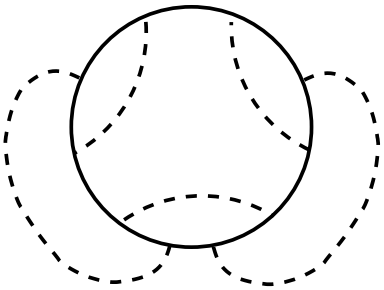
2



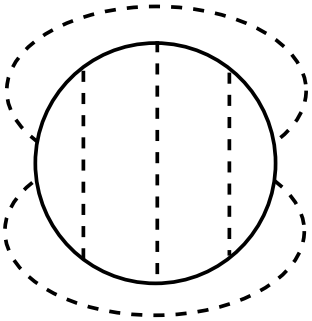
1



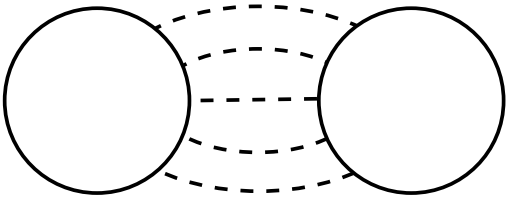
1



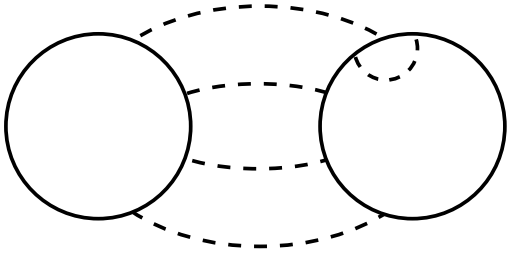
1



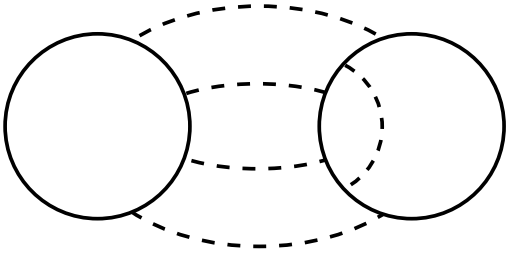
2



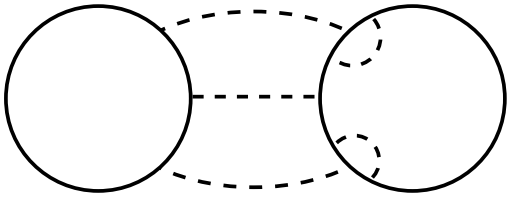
10



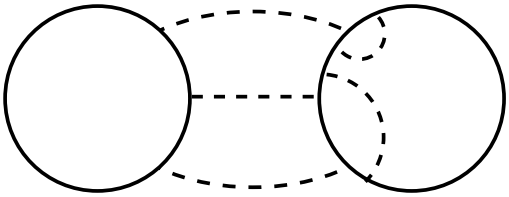
1



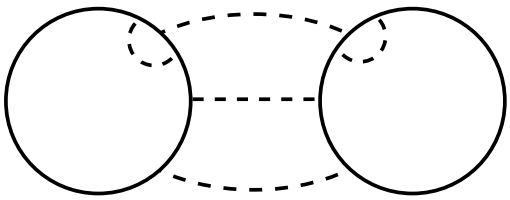
2



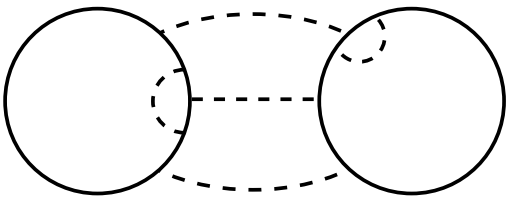
1



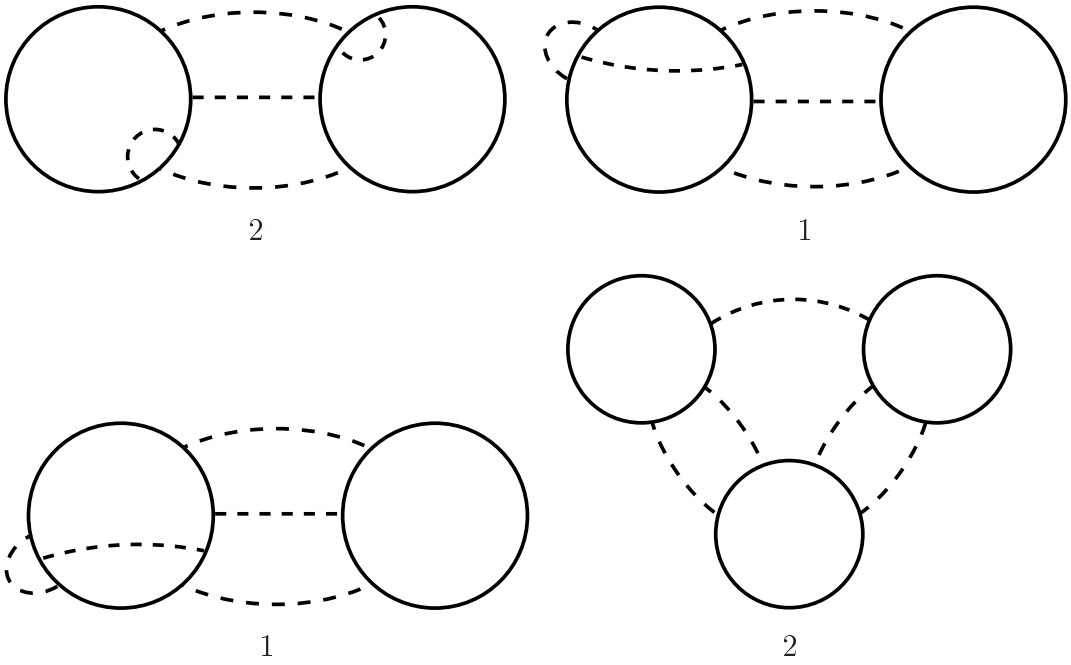
1



2



2



参考文献

[1] H. Kawai, S. Kawamoto, T. Kuroki, T. Matsuo and S. Shinohara, "Mean field approximation of IIB matrix model and emergence of four dimensional space-time," Nucl. Phys. B **647**, 153 (2002) [arXiv:hep-th/0204240].

[2] H. Kawai, S. Kawamoto, T. Kuroki and S. Shinohara, "Improved Perturbation Theory and Four-Dimensional Space-Time in IIB Matrix Model," [arXiv:hep-th/0211272].

[3] Shoichi Kawamoto, "Spontaneous Symmetry Breakdown in the IIB Matrix Model."

[4] エリ·デ·ランダウ、イェ·エム·リフシッツ著; 恒藤敏彦, 広重徹訳: 「場の古典論：電気力学, 特殊および一般相対性理論」東京図書 [ISBN:448901161X].

[5] J. J. Sakurai 著; San Fu Tuan 編; 桜井明夫訳: 「現代の量子力学」(上下) 吉岡書店 [ISBN:4842702222, 4842702257].

[6] 猪木慶治、川合光著「量子力学」I,II, 講談社 [ISBN:406153209X, 406153212X].

[7] K. G. Wilson, "Confinement Of Quarks," Phys. Rev. D **10**, 2445 (1974).

[8] M. B. Green and J. H. Schwarz, "Anomaly Cancellation In Supersymmetric D=10 Gauge Theory And Superstring Theory," Phys. Lett. B **149**, 117 (1984).

[9] M. B. Green, J. H. Schwarz and E. Witten, "Superstring theory," vols. 1 and 2, Cambridge monographs on mathematical physics [ISBN:0521323843, 0521357535].

[10] J. Polchinski, "String theory," vols.1 and 2, Cambridge monographs on mathematical physics [ISBN:0521633044].

[11] 川合光 編著、高橋繁行 作画: 「マンガ超ひも理論 われわれは 4 次元の膜に住んでいる」講談社 SOPHIA BOOKS [ISBN:4-06-269195-7].

[12] J. C. Baez, "The Octonions," arXiv:math.ra/0105155.

[13] J. Distler and H. Kawai, "Conformal Field Theory And 2-D Quantum Gravity Or Who's Afraid Of Joseph Liouville?," Nucl. Phys. B **321**, 509 (1989).

[14] E. Brezin and V. A. Kazakov, "Exactly Solvable Field Theories Of Closed Strings," Phys. Lett. B **236**, 144 (1990).

[15] J. Hoppe, "Quantum Theory of a relativistic surface", 素粒子論研究 80 巻 3 号 (1989 年) 145.

[16] B. de Wit, J. Hoppe and H. Nicolai, "On the quantum mechanics of supermembranes," Nucl. Phys. **B305**, (1988) 545.

[17] T. Eguchi and H. Kawai, "Reduction Of Dynamical Degrees Of Freedom In The Large N Gauge Theory," Phys. Rev. Lett. **48**, 1063 (1982).

[18] J. Polchinski, "Dirichlet-branes and Ramond-Ramond charges," Phys. Rev. Lett. **75**, 4724 (1995) [arXiv:hep-th/9510017].

[19] J. Maldacena, "The large N limit of superconformal field theories and supergravity," Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 231 (1998) [Int. J. Theor. Phys. **38**, 1113 (1998)] [arXiv:hep-th/9711200].

[20] O. Aharony, S. S. Gubser, J. Maldacena, H. Ooguri and Y. Oz, "Large N field theories, string theory and gravity," Phys. Rept. **323**, 183 (2000) [arXiv:hep-th/9905111].

[21] G. 't Hooft, "A Planar Diagram Theory For Strong Interactions," Nucl. Phys. B **72**, 461 (1974).

[22] T. Banks, W. Fischler, S. H. Shenker and L. Susskind, "M theory as a matrix model: A conjecture," Phys. Rev. D **55**, 5112 (1997) [arXiv:hep-th/9610043].

[23] L. Motl, "Proposals on nonperturbative superstring interactions," [arXiv:hep-th/9701025],
T. Banks and N. Seiberg, "Strings from matrices," Nucl. Phys. B **497**, 41 (1997) [arXiv:hep-th/9702187],
R. Dijkgraaf, E. Verlinde and H. Verlinde, "Matrix string theory," Nucl. Phys. B **500**, 43 (1997) [arXiv:hep-th/9703030].

[24] H. Itoyama and A. Tokura, "USp($2k$) matrix model: F theory connection," Prog. Theor. Phys. **99**, 129 (1998) [arXiv:hep-th/9708123],
H. Itoyama and A. Tsuchiya, "USp($2k$) matrix model," Prog. Theor. Phys. Suppl. **134**, 18 (1999) [arXiv:hep-th/9904018].

[25] S. J. Rey, "Heterotic M(atrix) strings and their interactions," Nucl. Phys. B **502**, 170 (1997) [arXiv:hep-th/9704158],
D. A. Lowe, "Heterotic matrix string theory," Phys. Lett. B **403**, 243 (1997) [arXiv:hep-th/9704041].

[26] N. Ishibashi, H. Kawai, Y. Kitazawa and A. Tsuchiya, "A large-N reduced model as superstring," Nucl. Phys. B **498**, 467 (1997) [arXiv:hep-th/9612115].

[27] M. Fukuma, H. Kawai, Y. Kitazawa and A. Tsuchiya, "String Field Theory from IIB Matrix Model," Nucl. Phys. **B510** (1998) 158, [hep-th/9705128].

[28] S. Iso and H. Kawai,
"Space-Time and Matter in IIB Matrix Model
— gauge symmetry and diffeomorphism —", [hep-th/9903217].

[29] H. Aoki, S. Iso, H. Kawai, Y. Kitazawa, A. Tsuchiya and T. Tada, "IIB matrix model," Prog. Theor. Phys. Suppl. **134** (1999) 47 [arXiv:hep-th/9908038].

[30] Shun'ichi Shinohara, 「行列正則化とIIB行列模型」素粒子論研究 第101巻 第3号 111ページ (2000年6月).

[31] A. Schild,
"Classical null strings," Phys. Rev. **D16** (1977) 1722.

[32] P. Austing and J. F. Wheater, "The convergence of Yang-Mills integrals," JHEP **0102**, 028 (2001) [arXiv:hep-th/0101071].

[33] P. Austing and J. F. Wheater, "Convergent Yang-Mills matrix theories," JHEP **0104**, 019 (2001) [arXiv:hep-th/0103159].

[34] L. Smolin, "M theory as a matrix extension of Chern-Simons theory," Nucl. Phys. B **591**, 227 (2000) [arXiv:hep-th/0002009].

[35] T. Azuma, S. Iso, H. Kawai and Y. Ohwashi, "Supermatrix models," Nucl. Phys. B **610**, 251 (2001) [arXiv:hep-th/0102168].

[36] L. Smolin, "The exceptional Jordan algebra and the matrix string," [arXiv:hep-th/0104050].

[37] J. Nishimura and G. Vernizzi, "Spontaneous breakdown of Lorentz invariance in IIB matrix model," JHEP **0004** 015, (2000) [arXiv: hep-th/0003223];
"Brane world from IIB matrices," Phys. Rev. Lett. **85**, 4664 (2000) [arXiv: hep-th/0007022];
J. Ambjorn, K.N. Anagnostopoulos, W. Bietenholz, T. Hotta and J. Nishimura, "Monte Carlo studies of the IIB matrix model at large N," JHEP **0007** 011, (2000) [arXiv: hep-th/0005147];
K.N. Anagnostopoulos and J. Nishimura, "A new solution of the complex action problem and the dynamical space-time in the IIB matrix model," [arXiv: hep-th/0108041].

[38] J. Nishimura and F. Sugino, "Dynamical generation of four-dimensional space-time in the IIB matrix model," [arXiv:hep-th/0111102].

[39] D. Kabat and G. Lifschytz, "Approximations for strongly-coupled supersymmetric quantum mechanics," Nucl. Phys. B **571**, 419 (2000) [arXiv:hep-th/9910001];
S. Oda and F. Sugino, "Gaussian and mean field approximations for reduced Yang-Mills integrals," JHEP **0103** 026, (2001) [arXiv:hep-th/0011175];

F. Sugino, "Gaussian and mean field approximations for reduced 4D supersymmetric Yang-Mills integral," JHEP **0107** 014, (2001) [arXiv:hep-th/0105284].

[40] E. Brezin, C. Itzykson, G. Parisi and J. B. Zuber, "Planar Diagrams," Commun. Math. Phys. **59**, 35 (1978).

[41] パリージ著; 青木薫、青山秀明共訳: 「場の理論:統計論的アプローチ」吉岡書店 [4842702451].

[42] For example, see R. Fukuda, M. Komachiya, S. Yokojima, Y. Suzuki, K. Okumura and T. Inagaki, "Novel use of Legendre transformation in field theory and many particle systems," Prog. Theor. Phys. Suppl. **121** (1995) 1.

[43] Jun Nishimura, "Exactly Solvable Matrix Models for the Dynamical Generation of Space-Time in Superstring Theory," Phys. Rev. D **65**, 105012 (2002) [aeXiv: hep-th/0108070].

[44] J. Nishimura, T. Okubo and F. Sugino, "Convergent Gaussian expansion method: Demonstration in reduced Yang-Mills integrals," JHEP **0210**, 043 (2002) [arXiv:hep-th/0205253].

[45] W. Krauth, "Introduction To Monte Carlo Algorithms," arXiv:cond-mat/9612186.

[46] M. Bordemann, E. Meinrenken and M. Schlichenmaier, "Toeplitz quantization of Kähler manifolds and gl(N), $N \to \infty$ limits," Commun. Math. Phys. **165** (1994) 281, [hep-th/9309134].