１９９９年 三者若手 夏の学校

於：フェローズ イン 木島平

素粒子論パート 場の理論

「カイラルなゲージ理論の正則化」

講師 鈴木 博 氏 (茨城大学)

記 野村 大輔 石橋 真人 上杉 忠興 高柳 匡
浜中 真志 疋田 泰章 吉田 雄太

目 次

1 Introduction **2**

2 ベクトル的ゲージ理論での軸性アノマリー **3**

2.1 ベクトル的ゲージ理論 3
2.2 次元正則化によるアノマリーの計算 8
2.3 正則化によらないアノマリーの計算 12
2.4 アノマリーの簡単な計算法 13

3 カイラルゲージ理論でのアノマリー **14**

4 共変的正則化 **20**

5 カイラルなゲージ理論でのフェルミオン数アノマリー **24**

6 Supersymmetric なゲージ理論でのゲージアノマリー **26**

7 カイラルなゲージ理論の格子上での定式化について **32**

1 Introduction

この講義のタイトルは「カイラルなゲージ理論の正則化」ということですが、どういうことを念頭に置いているかということを最初に触れておきましょう。カイラルなゲージ理論のカイラルというのは、フェルミオンがゲージ場と γ_5 という matrix を通して結合しているという意味です。現象論的には、弱い相互作用の研究を通してカイラルな coupling が発見されたわけで、いわゆる標準模型 (QCD + Weinberg-Salam 理論) では、電弱相互作用の部分がカイラルな coupling を含みます。みなさん聞いたことがあると思いますが[1]、この標準模型というのはゲージ群が

$$SU(3) \times SU(2) \times U(1) \tag{1}$$

のゲージ理論で、理論の構成要素は

$$\text{ゲージ場} + \text{Weyl fermion} + \text{Higgs} \tag{2}$$

です。ゲージ理論ではいわゆるゲージ対称性というのが非常に重要になります。というのは、ゲージ対称性が理論の量子論的な consistency を保証する基本的対称性になっているからです。一方で、この標準模型というのは量子場の理論で一般に無限大 (発散) を含みますから、後で説明をしますけれども、正則化ということが途中段階で必要になります。そうしますと、このゲージ対称性をなるべく保って正則化したいわけです。しかし実は後で説明するように、この理論は Weyl fermion を含んでいるためにゲージアノマリーという現象が起こります。ゲージアノマリーは、正則化がゲージ対称性を保つことができないことから起こります。つまりゲージ対称性を保ちたいのだが、一方でゲージアノマリーという現象があるのでかならずしもそれは straightforward ではない、というような事情をここでは紹介したいと思います。さらに、こうした理論を見通しよく、なるべくゲージ対称性を尊重して正則化するにはどうすればいいかという議論も紹介したいと思います。

この辺までの話は、いわゆる摂動論的に、つまり Feynman diagram の段階でどうやってカイラルなゲージ理論を定式化するかということで、だいたい 80 年代半ばまでにはすべて理解されたことです。現在の興味はむしろこういう理論を非摂動論的に定式化するにはどうしたらよいかということにあります。非摂動論的定式化といいますと一番代表的なのは格子ゲージ理論ですけれども、格子ゲージ理論の枠内でこういう Weyl fermion を含んだゲージ理論をどう定式化するかというのは、いまだに非常に難しい問題です[2]。そういう問題を考えるにしても、まず摂動論的な概念を知っておく必要があるので、それに対する starting point ということでやりたいと思います。これがここでの一つの目標です。

標準模型を念頭に置いた motivation を言いましたけれども、もうひとつはアノマリーという概念が素粒子物理学ではいろいろな所で出てきますので、これについて親しもうというのがもう一つのねらいです。例えば現象論的な立場で見ても、新しいモデルを作るときにはこのアノマリーの考察というのは一番最初にやるステップです。それから、ストリングでもアノマリーというのは essential で、例えば 2 次元のストリングの世界面の上でのアノマリーの話もあるし、それからストリングが propagate している時空でのアノマリーを考える必要もあります。また、先ほど出て来た格子の話では、フェルミオンを格子にのせようとすると、やはりアノマリーの役割が essensial

[1]ゲージ理論全般 (アノマリーの議論も含めて) については、
九後 汰一郎, ゲージ場の量子論 I, II (培風館, 1989)
藤川 和男, ゲージ場の理論 (岩波書店)
などを参照してください。僕のここでの convention はすべて前者に揃えてあります。

[2]総合報告としては、Y. Shamir, Nucl. Phys. (Proc. Suppl.) **47** (1996) 212 があります。

であるということが知られています。ですから、どういうことを勉強していくにしろアノマリーというのは避けて通れないところなので、今回の講義ではその入口ぐらいを見てみようというわけです。

アノマリーというのは非常に広い subject で[3]、アプローチにも大きく 2 通りあります。1 つのアプローチは場の理論的なアプローチで、これは Feynman diagram を書いたりして場の理論的に計算するやり方です。もう 1 つのアプローチは、代数的または位相幾何学的なアプローチです。この 2 つのアプローチはもちろんお互いに関係していますし、両方とも重要ですが、この講義では場の理論的なアプローチをやろうと思います。それからアノマリーといってもいろいろあるのですが、実は大きく 2 つに分類できまして、1 つは γ_5 に関連したアノマリーで、カイラルアノマリーとか軸性 (axial) アノマリーとかの一連の名前がついているものです。この仲間として、ストリングの世界面の話ででてくるゴースト数アノマリーというのもあります。重力場中に Weyl fermion があった場合には一般座標変換にもアノマリーがでて、これを重力アノマリーといいますが、それもこのタイプのアノマリーです。もう 1 種類は、これもいろんな呼び方があるんですが、トレースアノマリー、コンフォーマルアノマリー、Weyl アノマリーとか呼ばれるタイプのアノマリーがあります。こっちは、たとえばくりこみ群の β 関数の話とか、ストリングに出て来る Virasoro 代数などと密接な関係があります。こんな風にいろんなアノマリーがありますが、今回の講義では全部はできないので、いわゆる γ_5 アノマリーをやります。しかも 4 次元に限ってやります。けれども、高次元のものや重力との相互作用が入っている場合でも基本的には同様に議論できます。

では本題に入ります。

2　ベクトル的ゲージ理論での軸性アノマリー

2.1　ベクトル的ゲージ理論

まずはじめに一番簡単なベクトル的ゲージ理論での軸性アノマリーの話をします。簡単のために質量が 0 の Dirac fermion を考えます。作用は

$$S = \int d^4x\, \overline{\psi} i \not{D} \psi \tag{3}$$

です。D にスラッシュしたものはいわゆる共変微分で定義は、

$$\not{D} = \gamma^\mu D_\mu = \gamma^\mu (\partial_\mu + A_\mu) \tag{4}$$

で A_μ がゲージ場です。以下では、A_μ はゲージ coupling g と Lie 代数の generator T^a を含んだもの

$$A_\mu = -igA_\mu^a T^a \tag{5}$$

とします。ベクトル的ゲージ理論というのは、フェルミオン ψ とゲージ場との coupling が γ_5 を含んでいないということです。たとえば QED や QCD がその例です。

γ 行列についてまとめておくと、γ 行列は 4 行 4 列の matrix で、

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \tag{6}$$

[3]場の理論でのアノマリーに関する総合的な review としては
L. Alvarez-Gaumé, *in* Fundamental problems of gauge field theory (Plenum Press, New York, 1986)
H. A. Bertlmann, Anomalies in quantum field theory (Oxford University Press, Oxford, 1996)
などがあります。

という代数を満たします。ここでは metric の signature は、

$$g^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(+1, -1, -1, -1) \tag{7}$$

とします。それから γ_5 行列は

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \frac{-i}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma \tag{8}$$

で定義されます。ここで ε というのは Levi-Civita symbol で、添字について完全反対称で、

$$\varepsilon^{0123} = +1 \tag{9}$$

とおきます。γ_5 はおもしろい性質を持っていて、他の γ マトリックスすべてと反交換します。

$$\{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0 \tag{10}$$

また、上の定義から従うことですけれども、

$$\mathrm{tr}\,\gamma_5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma = -4i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \tag{11}$$

となります。γ-matrix の代数を満たす表現は無数に作れますが、いわゆる「カイラル表示」では次のようになります。

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{12}$$

σ^i は Pauli 行列です。

さて、上の action は mass term をもっていないのでいわゆる大局的カイラル $U(1)$ 対称性という対称性があります。つまり、fermion field を

$$\psi(x) \to e^{i\alpha\gamma_5}\psi(x), \qquad \overline{\psi}(x) \to \overline{\psi}(x)e^{i\alpha\gamma_5} \tag{13}$$

と置き換えても、さきほどの action は

$$S \to \int d^4x\,\overline{\psi}(x)e^{i\alpha\gamma_5}i\gamma^\mu D_\mu \underline{e^{i\alpha\gamma_5}}\psi(x) = S \tag{14}$$

となり不変です。ここでは、下線部の $e^{i\alpha\gamma_5}$ を $i\gamma^\mu D_\mu$ の前に持って来ました。γ_5 は γ^μ と反交換するので、$e^{i\alpha\gamma_5}$ を前に持ってくると $e^{-i\alpha\gamma_5}$ となってもう一つの $e^{i\alpha\gamma_5}$ と cancel するわけです。古典論では、ある連続変換のもとで作用が不変ならば、それに対応した保存量があるという Noether の定理がありました。今の例では α というパラメータは連続的に変えられますから、対応する保存する current があるはずです。それを作る 1 つのやり方は、定数だった α を x に依存する local なパラメータに変えてやることです

$$\alpha \to \alpha(x) \tag{15}$$

先程の action は α を定数とした変換に対して不変だったわけですから、α を座標に depend したものに変えてやると、action は不変にならず少しおつりが出ます。ところが α が定数だったらそのおつりはないわけですから、そのおつりは α の一次まででは次のような構造をしています。

$$\begin{aligned} S &\to S - \int d^4x\,\partial_\mu\alpha(x)j_5^\mu(x) \\ &= S + \int d^4x\,\alpha(x)\partial_\mu j_5^\mu(x) \end{aligned} \tag{16}$$

$j_5^\mu(x)$ を軸性 (axial) current と言い、その具体型は

$$j_5^\mu(x) = \overline{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma_5\psi(x) \tag{17}$$

となります。思いだして欲しいのですが、古典論での運動方程式、すなわち Euler-Lagrange 方程式というのは、action の変分をゼロにするものでした。今やったのは action のある変分なわけで、つまり古典論では運動方程式のもとで

$$\partial_\mu j_5^\mu(x) = 0 \tag{18}$$

が成立することになります。これは Noether の定理 (連続的対称性があればそれに対応する保存則がある) の結論です。

次に量子論でやりましょう。量子論でもいろいろなやり方がありますが path integral (経路積分) でやりましょう。アノマリーの議論にはゲージ場の量子効果は本質的ではないので、この講義を通してゲージ場は力学的でない背景場として扱います。

$$\int \mathcal{D}\psi\mathcal{D}\overline{\psi}\ \exp(iS) \tag{19}$$

さきほどの action を exp の肩にのせて、ψ について積分してやれば量子論が作れるというのが経路積分ですが、この式を次のように書き換えてみます。

$$(19) = \int \mathcal{D}[\psi + i\alpha(x)\gamma_5\psi]\mathcal{D}[\overline{\psi} + \overline{\psi}i\alpha(x)\gamma_5]\ \exp i\left[S + \int d^4x\,\alpha(x)\partial_\mu j_5^\mu(x)\right] \tag{20}$$

ここでは、積分変数の名前の付けかえをしても積分の値自身は変わらないということから、積分変数を全て無限小カイラル変換をうけた形の変数で置換えました。作用 S についての書き換えは古典論でやったものと同じです。ここで path integral の measure が置き換え前後で不変だと仮定します[4]。すなわち、

$$\mathcal{D}[\psi + i\alpha(x)\gamma_5\psi]\mathcal{D}[\overline{\psi} + \overline{\psi}i\alpha(x)\gamma_5] = \mathcal{D}\psi\mathcal{D}\overline{\psi} \tag{21}$$

これを仮定し (20) に使うと、(19) = (20) は次の恒等式を与えます。

$$\int \mathcal{D}\psi\mathcal{D}\overline{\psi}\,\partial_\mu j_5^\mu(x)\exp(iS) = 0 \tag{22}$$

または、上の式は path integral の言葉で書いた期待値のことですから、

$$\langle\partial_\mu j_5^\mu(x)\rangle = 0 \tag{23}$$

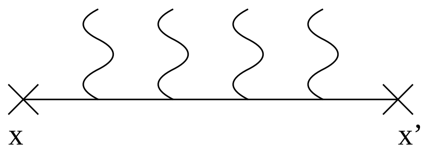
となります。つまり、古典論での (18) に対応して、量子論では古典論の式の期待値を取ったもの (23) が出てきます。

さて、(23) の右辺が実は 0 ではなくなる、というのがアノマリーなのですが、それを見るためにはこういう形式的な議論ではなくて、具体的に (23) の左辺を評価してやる必要があります。どうやるかにもいろんなやり方がありますが、ここでは次のようにしましょう。

基本的には複合演算子 $j_5^\mu(x)$ を構成して期待値をとります。そのためには背景ゲージ場中の fermion のプロパゲーターを知っておく必要があります。

$$\langle \mathrm{T}\psi(x)\overline{\psi}(x')\rangle = \frac{1}{\not{D}}\delta(x-x') \tag{24}$$

[4] この仮定の破れからアノマリーが出てくる、と考えるのが藤川の方法 K. Fujikawa, Phys. Rev. Lett. **42** (1979) 1195; **44** (1980) 1733; Phys. Rev. **D21** (1980) 2848; **D22** (1980) 1499(E) です。



(25)

フェルミオンが x' で作られて x で消えるというのがプロパゲーター (24) で、これを絵に書いたのが (25) です。今は自由なフェルミオンが飛んでいるだけではなく、飛んでいる間にゲージ場と相互作用していますから、途中に入っている波線は背景ゲージ場を表します。(24) の右辺のように共変微分の形で書くと、(24) はゲージ場との相互作用まで含めて (25) の形の diagram をすべて含んでいます。実際、(24) は

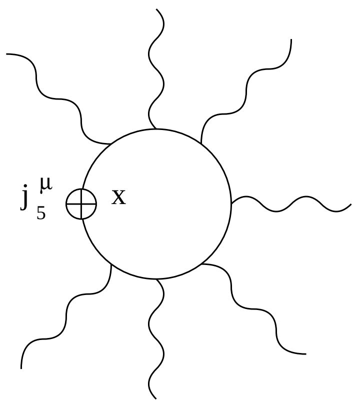
$$(24) = \frac{-i}{-i(\not\partial + \not A)}\delta(x-x') \tag{26}$$

で、$\not\partial$ が自由なフェルミオンの部分で、$\not A$ がゲージ場との相互作用を表していますが、これは等比級数の和の形をしていますからゲージ場のべきについて展開すると

$$(26) = -i\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{-i\not\partial}i\not A\right)^n \frac{1}{-i\not\partial}\,\delta(x-x') \tag{27}$$

となります。ここで、n 次項は (25) の図で n 個のゲージ場が couple しているものの寄与を表します。こういうのを用意しておいて、やりたかった $j_5^\mu(x)$ の期待値を考えると

$$\begin{aligned}\langle j_5^\mu(x)\rangle &= \langle\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma_5\psi(x)\rangle \\ &= i\lim_{x'\to x}\mathrm{tr}\,\gamma^\mu\gamma_5\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{-i\not\partial}i\not A\right)^n\frac{1}{-i\not\partial}\,\delta(x-x')\end{aligned} \tag{28}$$



(29)

となります。絵で書くと、$\langle\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma_5\psi(x)\rangle$ はフェルミオンについて bilinear で、同じ点 x でくっついていて、かつゲージ場と相互作用していますから、(29) のようになります。

次に (28) を momentum space で評価しましょう。次のように Fourier 変換します。

$$A_\mu(x) = \int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,e^{-ikx}A_\mu(k), \qquad \delta(x-x') = \int\frac{d^4\ell}{(2\pi)^4}\,e^{-i\ell(x-x')} \tag{30}$$

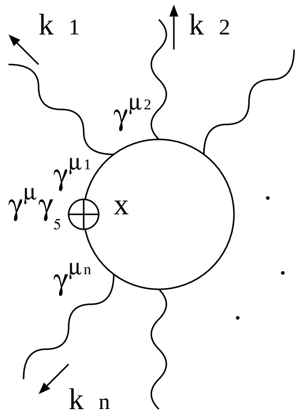
(30) を (28) に代入して計算すればよいのですが、まず図 (29) で n 本のゲージ場が couple したグラフからの寄与をとり出して考えます。それを $\langle j_5^\mu(x)\rangle\big|_n$ と書くと、

$$\langle j_5^\mu(x)\rangle\big|_n = i\int\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{d^4k_i}{(2\pi)^4}\right)e^{i\sum_i k_i x}\,\mathrm{tr}(A_{\mu_1}(-k_1)\cdots A_{\mu_n}(-k_n))\,\mathit{\Gamma}_5^{(n)\mu\mu_1\cdots\mu_n}(k_1,\cdots,k_n) \tag{31}$$

で、$\Gamma_5^{(n)\mu\mu_1\cdots\mu_n}(k_1,\cdots,k_n)$ は

$$\begin{aligned}&\Gamma_5^{(n)\mu\mu_1\cdots\mu_n}(k_1,\cdots,k_n)\\ =\ &\int\frac{d^4\ell}{i(2\pi)^4}\,\mathrm{tr}\left[i\gamma^\mu\gamma_5\frac{1}{-\not\ell}i\gamma^{\mu_1}\frac{1}{-(\not\ell+\not k_1)}i\gamma^{\mu_2}\frac{1}{-(\not\ell+\not k_1+\not k_2)}\cdots i\gamma^{\mu_n}\frac{1}{-(\not\ell+\not k_1+\cdots+\not k_n)}\right]\end{aligned} \tag{32}$$

となります。これを図で書くと次のようになります。



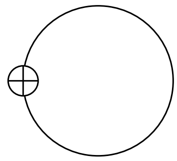
(33)

上の図で、$\gamma^\mu\gamma_5$ はもともとの axial current からくる vertex で、k_i はゲージ場が持つ momentum で外向きに出ているとします。具体的には上の式の構造は、自由な propagator と vertex γ^{μ_i} のくりかえしで、図で言うとぐるりと一周しているので trace が入ってきて、ループ積分 $\int d^4\ell/(2\pi)^4$ をしています。

従って、摂動論的には (32) の積分を評価すればよいわけです。そこで、$n=0,\,1,\,2\,\ldots$ と具体的に計算してみることにします。

1) $n=0$

$$\Gamma_5^{(0)\mu} \quad =$$

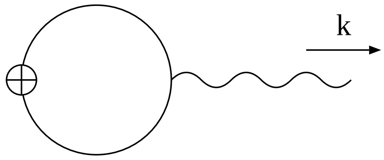


$$= \quad 0 \tag{34}$$

これが 0 になることはすぐに分かります。(32) は γ_5 を 1 つ含んでいるので ε-tensor に比例するはずです。ε-tensor には足が 4 つありますが、$\Gamma_5^{(0)\mu}$ は 1 つしか足がありません。そこで、3 つ足をつぶさなければいけないのですが、その 3 つの足をつぶす材料がここにはありません。なぜかというと、上の図には外から momentum が入って来ないので、ただの定数だからです。そうすると 0 になるしかない、というわけです。

2) $n=1$

$$\Gamma_5^{(1)\mu\nu} \quad =$$

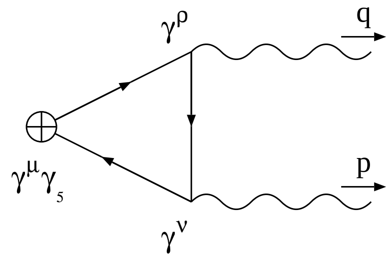


$$= \quad 0 \tag{35}$$

これも $n = 0$ の場合と同じ理由で ε-tensor の足をつぶす材料が k^μ だけでは足りないからです。$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}k_\rho k_\sigma = 0$ に注意すればわかるでしょう。

3) $n = 2$

$$\Gamma_5^{(2)\mu\nu\rho}(p,q) \quad =$$



$$= \int \frac{d^4\ell}{i(2\pi)^4}\,\mathrm{tr}\,\frac{1}{-(\not\ell + \not q)} i\gamma^\mu\gamma_5 \frac{1}{-(\not\ell - \not p)} i\gamma^\nu \frac{1}{-\not\ell} i\gamma^\rho \tag{36}$$

この $n = 2$ が 0 にならない最初の non-trivial なグラフですが、この積分は発散しています。power counting をやってみると、被積分関数の分母は ℓ が 3 個で積分は 4 次元積分ですから、

$$\sim \int^\Lambda \frac{d^4\ell}{\ell^3} \tag{37}$$

となって、$O(\Lambda)$ で一次発散しています。もともと $\langle j_5^\mu(x)\rangle$ は $\lim_{x'\to x}\delta(x-x')$ という組合せを含んでいましたから、この積分が発散しているのは予想されることです。

しかし、無限大そのものを扱うことはできないので、最終的な結果は無限大になるにしても、途中の段階では何らかの方法で有限にしてから解析するのが自然です。上のように、Λ という momentum cutoff を入れるのは 1 つの方法ですが、ここではもう少し見通しのよい「次元正則化」でやってみましょう。

2.2 次元正則化によるアノマリーの計算

次元正則化[5]というのは奇抜なアイデアですが、もし (37) で、$d^4\ell$ が $d^2\ell$ や $d\ell$ だったら発散していないということに注目して、積分測度を $d^4\ell \to d^n\ell$ におきかえてやります。すなわち、4 次元空間の積分を n 次元空間の積分に解析接続してやります。(36) の例だと、$d^4\ell \to d^n\ell$ として、n 次元で積分を計算してやって、最後に 4 次元にもっていきます。いったん n 次元にいくと解析接続の意味で (36) の積分は有限に定義できます。その後で 4 次元にもっていくと、$\varepsilon = (4-n)/2$ としたとき、元の積分が発散していたことから、$1/\varepsilon$, $1/\varepsilon^2$ ... といった特異性が出てきます。これが次元正則化の特徴です。

それで、(36) の積分を有限に正則化できるのですが、やや微妙な点があります。それは γ_5 の特殊性です。今、一般の n 次元でも

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \tag{38}$$

が成立していると仮定します。同様に

$$\{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0 \qquad \text{in } n \text{ dim.} \tag{39}$$

[5] G. 'tHooft and M. Veltman, Nucl. Phys. **B44** (1972) 189.
J. C. Collins, Renormalization (Cambridge University Press, Cambridge, 1984) に大変くわしい解説があります。

としたいのですが、このように要請するとうまくいかないことが次のように分かります。(38) と (39) の両方を仮定すると、次の関係式を示すことができます

$$
\begin{aligned}
& (n-4)\,\mathrm{tr}\,\gamma_5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma = 0 \\
\Longrightarrow\quad & n=4 \qquad \text{又は} \qquad \mathrm{tr}\,\gamma_5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma = 0
\end{aligned} \tag{40}
$$

今、我々は 4 次元から離れたいわけだから、$\mathrm{tr}\,\gamma_5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma = 0$ となります。ところが、少なくとも 4 次元では (11) 式が成立するわけで、これでは困ります。というのも、今 n 次元になめらかに解析接続したいのですが、4 次元から離れたとたんに $\mathrm{tr}\,\gamma_5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma$ は 0 になってしまいます。つまり、なめらかにつながっていないのでまずいのです。そこで、普通はどうするかというと、悩ましいのですが (39) をあきらめることにします。そして

$$
\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \tag{41}
$$

を γ_5 の定義とします。そうすると少しややこしいことになって、

$$
\{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0 \qquad (\mu = 0,1,2,3) \tag{42}
$$

なのですが、μ がそれ以外だと、

$$
[\gamma_5, \gamma^\mu] = 0 \qquad (\text{それ以外}) \tag{43}
$$

となってしまいます。それでいろいろと変なことが起こります。

このことに注意してさっきの話に戻ります。もともと $\langle j_5^\mu(x)\rangle$ の divergence が 0 になるかどうかを調べたかったのですが、それの $n=2$ の部分は

$$
\partial_\mu \langle j_5^\mu(x)\rangle|_2 = -\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\, e^{i(p+q)x}\,\mathrm{tr}(A_\nu(-p)A_\rho(-q))i(p_\mu+q_\mu)\mathit{\Gamma}_5^{(2)\mu\nu\rho}(p,q) \tag{44}
$$

となります。$\mathit{\Gamma}_5^{(2)\mu\nu\rho}(p,q)$ に次元正則化をほどこします。あまり細かいことはやりませんが、どこから変なことが起こるかをお見せします。$\mathit{\Gamma}_5^{(2)\mu\nu\rho}(p,q)$ の中には、$\gamma_5\gamma^\mu$ というのが入っているので、

$$
i(p_\mu+q_\mu)i\gamma^\mu\gamma_5 \tag{45}
$$

こういう部分が計算の中に入ってきます。少し書き直してやると、

$$
(45) = (\not\ell - \not p)\gamma_5 - (\not\ell + \not q)\gamma_5 \tag{46}
$$

で、いま、n 次元空間では γ_5 というのは (42) と (43) という性質があるので、n 次元空間ベクトル ℓ を 4 次元の部分と $(n-4)$ 次元の部分に分けて書きます。すなわち、

$$
\underbrace{\ell}_{n\,\text{次元}} = \underbrace{\underline{\ell}}_{4\,\text{次元}} + \underbrace{r}_{(n-4)\,\text{次元}} \tag{47}
$$

すると、(42) と (43) に注意すれば、

$$
\begin{aligned}
(46) &= (\not{\underline{\ell}} + \not r - \not p)\gamma_5 - (\not\ell + \not q)\gamma_5 \\
&= \gamma_5(-\not{\underline{\ell}} + \not r + \not p) - (\not\ell + \not q)\gamma_5
\end{aligned} \tag{48}
$$

$\not r$ の符号に注意して下さい。p は外線の momentum なので、4 次元に保っておきます。

(質問) 今、4 次元から n 次元にもってきていて、最初は発散を避けるには n を 4 より小さい $n=1$, $2\ldots$ くらいにすればよいということだったわけですが、ℓ を 4 次元の部分と 4 次元より大きい部分に分けるとはどういう意味ですか。

(回答) 確かにわかりにくいですね。一般の次元といったときに一般の n に解析接続したいので、増やす可能性まで含めないといけないのです。つまり、もし解析接続があったとすると、$n=100$ でも $n=200$ でもつくれるはずですから、そういうところまで考えておかないといけないのです。

今、(48) の $\hat{\not{\ell}}$ の符号が素朴に考えたものと異なることに注意しましょう。こうなるのは、γ_5 が自然に解析接続できず、(43) 式のようなことが起きてしまっているためです。そこで、(48) を素朴な形の部分とそれ以外とに書き直します。つまり

$$\begin{aligned}(48) &= \gamma_5(-\underline{\not{\ell}} - \hat{\not{\ell}} + \not{p}) - (\not{\ell} + \not{q})\gamma_5 + \underline{2\gamma_5\hat{\not{\ell}}} \\ &= \gamma_5(-\not{\ell} + \not{p}) - (\not{\ell} + \not{q})\gamma_5 + \underline{2\gamma_5\hat{\not{\ell}}} \qquad (49)\end{aligned}$$

つまり、γ_5 の奇妙な性質を慎重に考えると、(49) 式第三項 (下線部) のようなおつりが出てきてしまいます。そして、素朴に出てくる部分、すなわち (49) 式の第一項と第二項はアノマリーに効かないことがすぐに分かります。アノマリーにきくのは素朴には出てこない第三項です。この部分の寄与は

$$i(p_\mu + q_\mu)\Gamma_5^{(2)\mu\nu\rho}(p,q) = \int \frac{d^n\ell}{i(2\pi)^n}\,\mathrm{tr}\,\frac{(\not{\ell}+\not{q})\underline{2\gamma_5\hat{\not{\ell}}}(\not{\ell}-\not{p})\gamma^\nu\not{\ell}\gamma^\rho}{(\ell+q)^2(\ell-p)^2\ell^2} \qquad (50)$$

です。(50) 式の中の下線部が (49) の第三項からきたものです。この積分は dimensional regularization の technique を使うと (ここではやりませんが)

$$(50) \xrightarrow{n\to 4} -\frac{i}{4\pi}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}p_\mu q_\sigma \qquad (51)$$

となり、驚くべきことに答えは 0 ではなく有限値をとります。これはアノマリーがある、つまり保存則が破れていることを示しています。実際 (51) 式と (44) 式を使って momentun space から configuration space に戻りますと

$$\partial_\mu\langle j_5^\mu(x)\rangle\big|_2 = \frac{1}{4\pi^2}\,\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\mu A_\nu \partial_\rho A_\sigma(x) \qquad (52)$$

となります。これが configuration space でみたアノマリーの形です。これは、素朴には 0 になるはずなのですが、実際に今みたいに計算してみると、何か知らないけれどもおつりが出てきました。しかも、このおつりにはいろいろ特徴的なことがあります。

(質問) (49) 式の第一項、第二項からの寄与は実際にはどうなるのですか。

(回答) この部分は元の式に代入すると、第一項と第二項で cancel します。だから、(49) 式の第三項だけがへんてこなものを出すということが分かります。(49) 式の第一項、第二項はもともと γ_5 の奇妙な性質を全然考えないでも出てくる部分で、一番最初に path integral で demonstrate したように、もしも素朴なことをやってしまうとアノマリーはでません。すなわち、アノマリーはいつも (49) 式の第三項のような微妙なところから出てきます。

いろいろと奇妙なことがあります。まず、さっき (44) の $\Gamma_5^{(2)\mu\nu\rho}(p,q)$ は発散量だと言いました。ところが、いったん正則化して 4 次元に戻ってくると、(44) は有限になっています。このように、(γ_5 に関連した) アノマリーはいつも有限になります。今の例では、(49) 式の第三項のうちの $\not{t}$ はもともと $(n-4)$ 次元の部分で、これは、我々の住む 4 次元に行くとなくなってしまうものです。そしてこの $(n-4)$ がもともとの発散積分からくる $1/\varepsilon$ とかけあわさって有限な答えが出てくると考えることができます。雰囲気としては

$$(2\gamma_5\not{t})\times(\text{発散部分})\sim\underbrace{(n-4)\ \text{次元}}_{\sim\varepsilon}\times\frac{1}{\varepsilon}\to\text{有限} \tag{53}$$

という感じです。また、アノマリーに特徴的なのはそれが「局所的」だということです。ここで、「局所的」というのはどういう意味かというと、x という点での divergence を考えると出てくる答えも x という点での関数が出てくるということです。そんなのあたりまえだと思うかもしれませんが、後でやってみせますが、一般に量子論の Green 関数というのは「非局所的」で、たとえば、(28) のような式の左辺で点 x における何かを考えたとしても、一般には右辺は非局所的な部分を含んでいるというのが普通なのです。アノマリーの場合では右辺は必ず点 x のみの関数になります。それも、もとをただせば、アノマリーが発散している部分からきているという性質に関係しています。こういった点でアノマリーは特異な性質を持っています。

上と同様の計算は高い n に対しても適用できて、例えば $n=3$ では

$$\partial_\mu\langle j_5^\mu(x)\rangle|_3=\frac{1}{4\pi^2}\frac{2}{3}\,\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,\mathrm{tr}\,\partial_\mu(A_\nu A_\rho A_\sigma) \tag{54}$$

となります。また、一般的な議論から $n=4$ 以上ではアノマリーがない、$\partial_\mu\langle j_5^\mu(x)\rangle|_n=0$ for $n\geq 4$ ということもわかります。それでまとめると、結局

$$\partial_\mu\langle j_5^\mu(x)\rangle=\frac{1}{16\pi^2}\,\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,\mathrm{tr}\,F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} \tag{55}$$

となります。ここで $F_{\mu\nu}$ は $F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu+[A_\mu,A_\nu]$ で定義される field strength です。

以上が、アノマリーの一番簡単な例ですけれども、一言でいうと、アノマリーとは「古典的な対称性が量子論的な効果によって破れる現象」ということになります。上ではベクトル的ゲージ理論での γ_5 に付随したカイラル $U(1)$ 対称性の破れを見ました。

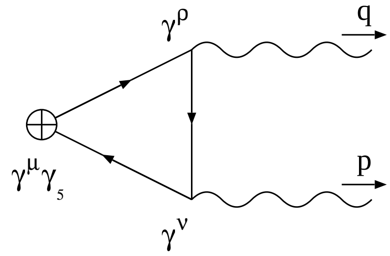
これで、この例は終わりなのですが、何か釈然としません。何が釈然としないかというと、ここでは「次元正則化」でやったらこういう結果になりました、といっているだけなのです。「次元正則化」では $[\gamma_5,\gamma^\mu]=0$ となることを反映しているわけですが、それでは他のやり方でやったら答えは変わるのか? 例えば、Pauli-Villars 正則化を使ってもこれは計算できますが[6]、それで計算したら違う答えが出てくるのか? などと疑問がたえません。だから、採用する正則化によらない議論[7]ができたらもっとよいですね。次にそれを紹介しましょう。

[6] J. S. Bell and R. Jackiw, Nuovo Cim. **60A** (1969) 47.

[7] S. L. Adler, Phys. Rev. **177** (1969) 2426; *in* Lectures on elementary particles and quantum field theory (MIT Press, 1970)

2.3 正則化によらないアノマリーの計算

もともと問題だったのは、



(56)

という三角形のダイアグラムでした。式で書くと、

$$\Gamma_5^{(2)\mu\nu\rho}(p,q) = \int \frac{d^4\ell}{i(2\pi)^4} \mathrm{tr}\, \frac{1}{-(\not\ell+\not q)} i\gamma^\mu\gamma_5 \frac{1}{-(\not\ell-\not p)} i\gamma^\nu \frac{1}{-\not\ell} i\gamma^\rho \tag{57}$$

で、これは p と q の関数で、γ_5 が一つ入ってますから ε tensor に比例するはずです。そこで、Lorentz covariance は仮定するとして、$\Gamma_5^{(2)\mu\nu\rho}$ の可能な一般形を考えると、

$$\begin{aligned}\Gamma_5^{(2)\mu\nu\rho}(p,q) &= A_1 p_\alpha \varepsilon^{\alpha\mu\nu\rho} + A_2 q_\alpha \varepsilon^{\alpha\mu\nu\rho} + A_3 p^\rho p_\alpha q_\beta \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \\ &+ A_4 q^\rho p_\alpha q_\beta \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} + A_5 p^\nu p_\alpha q_\beta \varepsilon^{\alpha\beta\mu\rho} + A_6 q^\nu p_\alpha q_\beta \varepsilon^{\alpha\beta\mu\rho}\end{aligned} \tag{58}$$

となります。ここで A_1 から A_6 は、Lorentz scalar である p^2, q^2, $p\cdot q$ の関数です。この式は、外線の momentum p, q についての展開になっていることに注意してください。一般に Green 関数を外線の momentum について展開したときは、高次の係数は収束積分であたえられます。なぜかと言うと、展開するにつれて分母の次数が上がるからで、今の場合 A_1 と A_2 は発散積分で表され、A_3 から A_6 は有限量となります。A_3 から A_6 は有限なのでどんな正則化をしても値は同じで、実際

$$\begin{aligned}A_3 &= 16\int_0^1 dy \int_0^1 dx\, x(1-x)y^3 \int \frac{d^4\ell}{i(2\pi)^4} \frac{1}{(\ell^2+B)^3} \\ &= \frac{1}{2\pi^2}\int_0^1 dy \int_0^1 dx\, x(1-x)y^3 B^{-1}\end{aligned} \tag{59}$$

となります。ここで

$$B = (1-x)(1-y+xy)p^2 + 2x(1-x)yp\cdot q + x(1-xy)q^2 \tag{60}$$

で、他の関数についても同様に

$$\begin{aligned}A_4 &= \frac{1}{2\pi^2}\int_0^1 dy \int_0^1 dx\, xy(1-xy)B^{-1} \\ A_5 &= \frac{-1}{2\pi^2}\int_0^1 dy \int_0^1 dx\, (1-x)y(1-y+xy)B^{-1} \\ A_6 &= -A_3\end{aligned} \tag{61}$$

が得られます。

さて、$\Gamma_5^{(2)\mu\nu\rho}(p,q)$ の一般形からアノマリーは

$$i(p_\mu+q_\mu)\Gamma_5^{(2)\mu\nu\rho}(p,q) = i(A_1-A_2)\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}p_\mu q_\sigma \tag{62}$$

と A_1 と A_2 で表されますので発散しています。 無限大の量は計算の仕方で答が変わりますので、このままでは上の量の意味はよく分かりません。そこで、次のようにして $\Gamma_5^{(2)\mu\nu\rho}$ を定義するこ

とにします。問題の axial current $j_5^\mu(x)$ にゲージ不変性を課します。具体的には $\langle j_5^\mu(x)\rangle$ の式で、$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu\lambda + [A_\mu, \lambda]$ と変化させても値が変わらないことを要請します。この条件は $\Gamma_5^{(2)\mu\nu\rho}$ で書くと、$p_\nu \Gamma_5^{(2)\mu\nu\rho}(p,q) = q_\rho \Gamma_5^{(2)\mu\nu\rho}(p,q) = 0$ となります。このように $\langle j_5^\mu(x)\rangle$ にゲージ不変性を要求すると、(58) 式から

$$A_1 = -p\cdot q A_3 - q^2 A_4, \qquad A_2 = -p^2 A_5 - p\cdot q A_6 \tag{63}$$

という関係が成立します。驚くべきことに、発散積分であったはずの A_1 と A_2 が有限量 A_3 から A_6 で書けてしまいました! よって発散積分の答は一意的に決まってしまい、以上からアノマリーを評価すると、

$$i(p_\mu + q_\mu)\Gamma_5^{(2)\mu\nu\rho}(p,q) = -\frac{i}{4\pi^2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\mu q_\sigma \tag{64}$$

となり前に次元正則化で求めたものと同じになります。この解析が言っていることは、アノマリーという現象は見かけのものではなくカイラルカレントのゲージ不変性を要求する限り避けられないものだ、ということです。だから、カイラルカレントをゲージ不変に定義する正則化を使う限り、上と同じ結果になります。実は、次元正則化はこのゲージ不変性を自動的に満たすので、この結果が出ていたわけです。高い n についても同様に議論できます。

ここまでの話をまとめますと、vectorlike なゲージ理論での軸性アノマリー

$$\partial_\mu \langle j_5^\mu(x)\rangle = \frac{1}{16\pi^2}\,\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,\mathrm{tr}\,F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}(x) \tag{65}$$

を考察しました。これは古典論での保存則が量子効果で破れる現象です。アノマリーは有限で局所的であり、$\langle j_5^\mu(x)\rangle$ のゲージ不変性を要求すると答が一意的に決まってしまいます。こうした意味でアノマリーは他の Green 関数から際だった性質を持っています。

2.4　アノマリーの簡単な計算法

ゲージ不変性を課す限り、どのように計算しても axial anomary は等しいことが分かりましたから、もう少しスマートにやる方法もありまして、次のようにやります。

$$\begin{aligned}\langle j_5^\mu(x)\rangle &= \langle \overline{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi(x)\rangle \\ &= -\lim_{x'\to x}\mathrm{tr}\,\gamma^\mu\gamma_5\frac{1}{\not{D}}\,\delta(x-x')\end{aligned} \tag{66}$$

上で見たようにこれは one-loop ダイアグラムの集合になっています。このままでは発散量なので、これを次のようにゲージ不変に正則化します。

$$\langle j_5^\mu(x)\rangle \equiv -\lim_{M\to\infty}\lim_{x'\to x}\mathrm{tr}\,\gamma^\mu\gamma_5\frac{1}{\not{D}}e^{-\not{D}^2/M^2}\delta(x-x') \tag{67}$$

ここで M は正則化の cutoff です。$e^{-\not{D}^2/M^2}$ の factor は (Wick rotation の後) ultraviolet の momentum に対する収束因子になっていて、ゲージ不変な正則化を行っていることになります。このことは、ゲージ場に対するゲージ変換のもとで共変微分は $\not{D} \to e^{-\lambda}\not{D}e^{\lambda}$, $e^{-\not{D}^2/M^2} \to e^{-\lambda}e^{-\not{D}^2/M^2}e^{\lambda}$ と変換することからわかります。そこで、(67) 式の divergence をとると

$$\partial_\mu\langle j_5^\mu(x)\rangle = -\lim_{M\to\infty}\lim_{x'\to x}\mathrm{tr}\left(\not{\partial}\gamma_5\frac{1}{\not{D}}e^{-\not{D}^2/M^2} - \gamma_5\frac{1}{\not{D}}e^{-\not{D}^2/M^2}\overleftarrow{\not{\partial}}\right)\delta(x-x') \tag{68}$$

ここで、$x' \to x$ の後で微分するので ∂_μ は x' にも作用することに注意して下さい。$\partial_{x'}\delta(x-x') = -\partial_x\delta(x-x')$ ということも用いています。さて、この式中の $\not\partial$ は $\not D$ でおきかえることができます。なぜなら $\not D$ の中の $\not A$ の項は第一項と第二項で cancel するからです。さらに、$\not D$ と γ_5 は反交換することを用いると

$$\begin{aligned}\partial_\mu\langle j_5^\mu(x)\rangle &= -\lim_{M\to\infty}\lim_{x'\to x}\mathrm{tr}\left(\not D\gamma_5\frac{1}{\not D}e^{-\not D^2/M^2} - \gamma_5\frac{1}{\not D}e^{-\not D^2/M^2}\not D\right)\delta(x-x') \\ &= 2\lim_{M\to\infty}\lim_{x'\to x}\mathrm{tr}\,\gamma_5 e^{-\not D^2/M^2}\delta(x-x') \end{aligned}\tag{69}$$

とこんなに簡単な式になってしまいます。この計算法はなかなかいいでしょう。この式を見てすぐに分かるのは、アノマリーが局所的であるということです。つまり、非局所性のもとになる積分演算子である $1/\not D$ が含まれていません。もう一つ面白いのは、2 つの極限 $\lim_{M\to\infty}$ と $\lim_{x'\to x}$ の順序を入れ替えると $\partial_\mu\langle j_5^\mu(x)\rangle = 0$ となってしまうことです。つまり、アノマリーは非常に微妙なところから出てきています。(69) 式の評価は面白い計算ですが、時間が無いので詳細は文献[8]に譲ることにします。結果だけいうと、一般論から期待されるように、式 (65) と完全に一致します。

3 カイラルゲージ理論でのアノマリー

さて、今までは vectorlike なゲージ理論のアノマリーについて話をして来ましたが、次にカイラルゲージ理論のアノマリー[9]について考えたいと思います。フェルミオンの部分の action を書くと、

$$S = \int d^4x\,\overline{\psi}i\not D_R\psi, \qquad \not D_R = \gamma^\mu D_{R\mu} = \gamma^\mu(\partial_\mu + A_\mu P_R) \tag{70}$$

ここで P_R はフェルミオンのカイラリティーの projection operator です。つまり Dirac フェルミオンのうち、右手型のカイラリティーの成分だけがゲージ場と相互作用するようにしてあります。projection operator の定義とその性質は、

$$\begin{aligned}&P_R = \frac{1+\gamma_5}{2}, \qquad P_L = \frac{1-\gamma_5}{2}, \\ &P_R^2 = P_R, \qquad P_L^2 = P_L, \qquad P_RP_L = P_LP_R = 0\end{aligned}\tag{71}$$

です。例えばニュートリノなど standard model の fermion はこのような coupling を持っています。上の action は次のカイラルなゲージ変換のもとで不変です。

$$\begin{aligned}&\psi(x) \to e^{\lambda(x)P_R}\psi(x), \qquad \overline{\psi}(x) \to \overline{\psi}(x)e^{-\lambda(x)P_L}, \\ &D_{R\mu} \to e^{\lambda(x)P_R}D_{R\mu}e^{-\lambda(x)P_R}, \quad \text{または} \quad A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu\lambda(x) + [A_\mu, \lambda(x)], \\ &S \to \int d^4x\,\overline{\psi}(x)e^{-\lambda(x)P_L}i\gamma^\mu e^{\lambda(x)P_R}D_{R\mu}e^{-\lambda(x)P_R}e^{\lambda(x)P_R}\psi(x) = S\end{aligned}\tag{72}$$

以上は古典論でしたが、次に量子論を考えます。fermion のみ量子化して有効作用

$$e^{i\Gamma[A]} = \int \mathcal{D}\psi\mathcal{D}\overline{\psi}\,e^{iS[\psi,A]} \tag{73}$$

を以下考えます。ここでの問題は、$S[\psi, A]$ はゲージ不変だけれども、$\Gamma[A]$ もゲージ不変になっているか、ということです。もし、fermion の量子効果でゲージ不変性が破れると、さらにゲージ場 A_μ で path integrate したときに物理的状態空間での unitarity (とくりこみ可能性) が保証されず、

[8] 前にあげた藤川の方法の文献を参照してください。
[9] W. A. Bardeen, Phys. Rev. **184** (1969) 1848.

確率解釈可能な量子論になりません。素朴には、$S[\psi, A]$ がゲージ不変なので $\Gamma[A]$ もそうであると考えられますが、我々はすでに古典的対称性が量子論で常に保たれるわけではないことを知っています。確かにこの系は γ_5 を含んでいて怪しいのです。

それでは、このことを摂動論的に調べてみましょう。Feynman rule は

$$\begin{aligned}\Gamma[A] &= \frac{1}{i}\ln\int\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\overline{\psi}\,\exp i\int d^4x\,\overline{\psi}i\not{D}_R\psi \\ &= \frac{1}{i}\ln\mathrm{Det}\,i\not{D}_R = \frac{1}{i}\mathrm{Tr}\ln i\not{D}_R \\ &= \frac{1}{i}\mathrm{Tr}\ln(i\not{\partial}+i\not{A}P_R)\end{aligned} \tag{74}$$

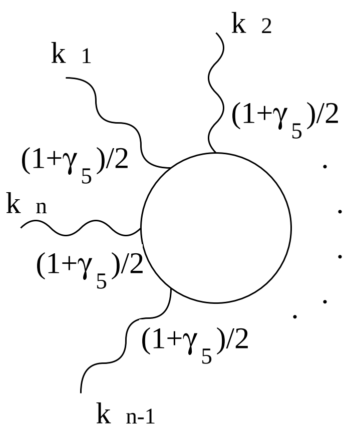
を$\not{A}$について展開したものであたえられます。さらに momentum space に移ります。

$$\begin{aligned}\Gamma[A]|_n &= \int\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{d^4k_i}{(2\pi)^4}\right)(2\pi)^4\delta^4(\sum_i k_i)\left(-\frac{1}{n}\right)\mathrm{tr}\left(A_{\mu_1}(-k_1)\cdots A_{\mu_n}(-k_n)\right) \\ &\times\ \Gamma^{(n)\mu_1\cdots\mu_n}(k_1,\cdots,k_n)\end{aligned} \tag{75}$$

ここで、

$$\begin{aligned}&\Gamma^{(n)\mu_1\cdots\mu_n}(k_1,\cdots,k_n) \\ =\ &\int\frac{d^4\ell}{i(2\pi)^4}\mathrm{tr}\left[\frac{1}{-\not{\ell}}i\gamma^{\mu_1}P_R\frac{1}{-(\not{\ell}+\not{k}_1)}i\gamma^{\mu_2}P_R\frac{1}{-(\not{\ell}+\not{k}_1+\not{k}_2)}\cdots\frac{1}{-(\not{\ell}+\not{k}_1+\cdots+\not{k}_{n-1})}i\gamma^{\mu_n}P_R\right]\end{aligned} \tag{76}$$

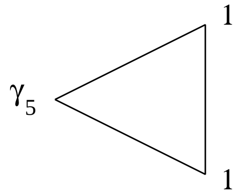
です。ダイアグラムは、



(77)

となり、今度はゲージ結合の所に projection operator $P_R = (1+\gamma_5)/2$ がかかります。

調べたいのは、$\Gamma^{(n)\mu_1\cdots\mu_n}$ がゲージ不変かどうかということですが、これは axial anomaly の議論に似ていることがわかります。axial anomaly は



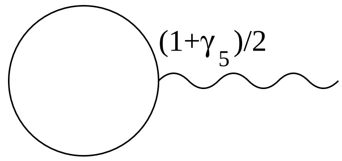
(78)

のダイアグラムで 2 つの "1" の vertex にゲージ不変性を課すと γ_5 の vertex にアノマリーが生じる (divergence が 0 ではない) というものでした。今の場合は (77) のダイアグラムで、全ての頂点

でゲージ不変性が成り立つかということで、これは axial anomaly の経験から類推して不可能と思われます。

次元正則化を用いて実際に計算してみますと

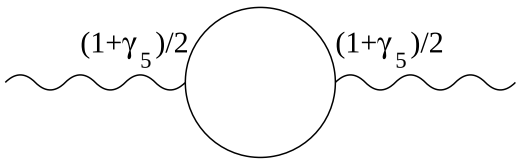
$$\Gamma^{(1)\mu} \quad =$$



$$= \quad 0 \tag{79}$$

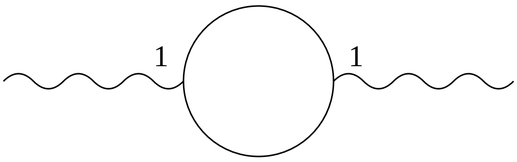
また $n=2$ については

$$\Gamma^{(2)\mu\nu}(k,p) \quad =$$

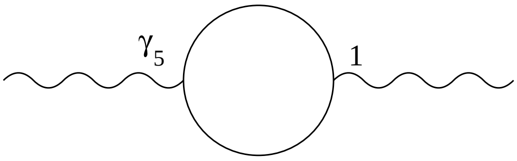


$$= \quad \int \frac{d^n\ell}{i(2\pi)^n}\,\mathrm{tr}\left[\frac{1}{-\not{\ell}} i\gamma^\mu P_R \frac{1}{-(\not{\ell}+\not{k})} i\gamma^\nu P_R\right] \tag{80}$$

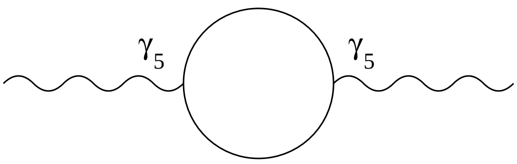
ここで γ_5 の入り方には 3 通りの combination があってそれぞれ



$$= \quad \frac{1}{12\pi^2}\left[\frac{1}{\varepsilon} - \gamma + \ln 2\pi + \frac{5}{3} - \ln(-k^2)\right](k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu}), \tag{81}$$



$$= \quad 0 \tag{82}$$



$$= \quad \frac{1}{12\pi^2}\left[\frac{1}{\varepsilon} - \gamma + \ln 2\pi + \frac{5}{3} - \ln(-k^2)\right](k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu}) - \frac{1}{12\pi^2}k^2 g^{\mu\nu} \tag{83}$$

となります。ここで注意して欲しいのは、$\gamma_5^2 = 1$ なので (81) と (83) のダイアグラムの値は素朴には等しいように思えますが、忠実に次元正則化を適用すると、もともと積分が発散しているためにこのように両者の値が有限だけずれます。この結果から、2 点関数は、

$$(80) = \frac{1}{24\pi^2}\left[\frac{1}{\varepsilon} - \gamma + \ln 2\pi + \frac{5}{3} - \ln(-k^2)\right](k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu}) \underbrace{-\frac{1}{48\pi^2}k^2 g^{\mu\nu}}_{(*)} \tag{84}$$

となり、元々の effective action の言葉ではこれは

$$\begin{aligned}\Gamma[A]|_2 &= \int d^4x\,\frac{1}{24\pi^2}\left(\frac{1}{\varepsilon}-\gamma+\ln 2\pi\right)\mathrm{tr}\,\partial_\mu A_\nu\partial^\mu A^\nu \\ &+ \int d^4x\,\frac{-1}{96\pi^2}\,\mathrm{tr}\,A_\mu\Box A^\mu \\ &+ \int d^4x\,d^4y\,\frac{-1}{48\pi^2}\,\mathrm{tr}\,A_\mu(x)A_\nu(y)\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{-ik(x-y)}(k^\mu k^\nu-k^2g^{\mu\nu})\left(\ln\frac{1}{-k^2}+\frac{5}{3}\right)\end{aligned} \tag{85}$$

と表されます。さて、この式で紫外発散しているところは $\mathrm{tr}\,\partial_\mu A_\nu\partial^\mu A^\nu$ の term で local です。この発散は通常のくりこみで処理されます。2 つめの term は前の $(*)$ の項から生じていてゲージ対称性を破っています。3 つめの term は non-local ですがゲージ不変となっています。前に述べたように effective action は一般に non-local であることもわかりました。ゲージ対称性を調べるにはゲージ場に対して微小ゲージ変換 $\delta_\lambda A_\mu=\partial_\mu\lambda+[A_\mu,\lambda]$ をしてやればいいわけですが、この変換のもとで第 2 項はゲージ不変ではなく

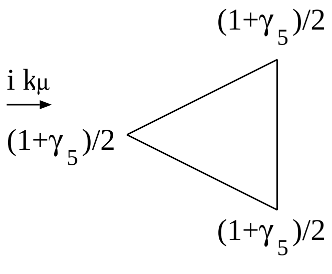
$$\delta_\lambda\Gamma[A]|_2=\int d^4x\,\frac{1}{48\pi^2}\,\mathrm{tr}\,\lambda\Box\partial_\mu A^\mu+O(A^2)\neq 0 \tag{86}$$

となります。さて、この破れは前にやった axial anomaly と何か関係があるのでしょうか？ anomaly は (78) のダイアグラムから生じましたが今は (80) のダイアグラムを考えているので関係はないようです。では、どのように違うのでしょうか？ 実は、今の場合はゲージ対称性の破れを局所相殺項 (local counterterm)

$$\Delta\Gamma_2[A]=\int d^4x\,\frac{1}{96\pi^2}\,\mathrm{tr}\,A_\mu\Box A^\mu \tag{87}$$

をもともとの action に付け加えることで修復することができます。つまり、$\Gamma[A]+\Delta\Gamma_2[A]$ は $O(A^2)$ の項を除いてゲージ不変になっています。そもそも、次元正則化がカイラルなゲージ対称性を保つかどうかは不明だったわけですが、(86) 式の破れは次元正則化がカイラルなゲージ対称性をあらわに破っているために生じたものと考えられます。しかしこの破れは局所相殺項で回復することができるので、通常の有限繰り込みと同様にみなして、Slavnov-Taylor 恒等式を成立させるように修復可能なわけです。こうした意味で、局所相殺項で打ち消すことのできるゲージ対称性の破れは物理的に無害です。

さて、次は 3 点関数



(88)

を評価したいのですが、全てを直接計算するのは面倒なのでその divergence だけを計算します。結果は次のようになります。

$$\begin{aligned}ik_\mu\Gamma^{(3)\mu\nu\rho}(k,p,q) &= -\Gamma^{(2)\nu\rho}(p,k+q)+\Gamma^{(2)\rho\nu}(q,k+p) \\ &+ \frac{1}{48\pi^2}(-2p^\nu p^\rho+p^2g^{\nu\rho}-2q^\nu q^\rho+q^2g^{\nu\rho}) \\ &+ \frac{i}{24\pi^2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}p_\mu q_\sigma\end{aligned} \tag{89}$$

または effective action の言葉では

$$\begin{aligned}\delta_\lambda(\varGamma[A]|_2+\Delta\varGamma_2[A]+\varGamma[A]|_3) &= \underbrace{\int d^4x\,\frac{-1}{48\pi^2}\,\mathrm{tr}[A_\mu,\lambda](2\partial^\mu\partial^\nu A_\nu-\Box A^\mu)}_{(**)}\\ &+\int d^4x\,\frac{-i}{24\pi^2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,\mathrm{tr}\,\lambda\partial_\mu A_\nu\partial_\rho A_\sigma+O(A^3)\end{aligned}\tag{90}$$

となります。今は、ゲージ変換 $\delta_\lambda A_\mu=\partial_\mu\lambda+[A_\mu,\lambda]$ のもとでの、A のべきの各次数でのゲージ不変性を調べているわけですが、$\delta_\lambda\varGamma|_2$ の中の $[A_\mu,\lambda]$ からくる $O(A^2)$ の部分を (89) の右辺第 1 行目が cancel します。さて、(90) に見るように、ゲージ対称性はまだ $O(A^2)$ の項で破れていますが、$(**)$ の部分は次の local な相殺項を付け加えることにより消すことができます。

$$\Delta\varGamma_3[A]=\int d^4x\,\frac{-1}{24\pi^2}\,\mathrm{tr}\,A_\mu A_\nu(\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu)\tag{91}$$

したがって、今までの計算をまとめると、

$$\delta_\lambda(\varGamma[A]+\Delta\varGamma_2[A]+\Delta\varGamma_3[A])=\int d^4x\,\frac{-i}{24\pi^2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,\mathrm{tr}\,\lambda\partial_\mu A_\nu\partial_\rho A_\sigma+O(A^3)\tag{92}$$

となります。ここで残った $O(A^2)$ のゲージ不変性の破れも local な相殺項で cancel できるでしょうか？ この term は ε-tensor に比例していて、ゲージ変換を考えると相殺項は A に関して 3 次なはずです。さらに Lorentz invariance を考えるとそのようなものは $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,\mathrm{tr}\,A_\mu A_\nu\partial_\rho A_\sigma$ しかありません。しかし、すぐわかるようにこの term をゲージ変換すると 0 になります。従って、このゲージ不変性の破れの term は local な相殺項で相殺できません。

さて、上の解析から分かったことをまとめます。まず、effective action を適当な正則化を使って計算すると、一般にはゲージ不変ではない、ということです。しかし、その破れの大半は局所相殺項で取り除けますので無害です。このように局所相殺項で取り除けるゲージ対称性の破れを fake な anomaly と呼ぶことにします。一方、局所的な項ではどうしても取り除けない intrinsic な破れもあって、これがゲージアノマリーと呼ばれるものです。今の計算では、一番低い次数だけ求めましたが、高い次数まで次元正則化で計算を続けることができて、結果は (局所相殺項の寄与を除いて) 次のようになります。

$$\delta_\lambda\varGamma[A]=\int d^4x\,\frac{-i}{24\pi^2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,\mathrm{tr}\left\{\lambda\left[\partial_\mu A_\nu\partial_\rho A_\sigma+\frac{1}{2}\partial_\mu(A_\nu A_\rho A_\sigma)\right]\right\}\tag{93}$$

この計算を別の方法でやると、形が変わったりしないかという心配がありますが、これに関しては Wess-Zumino の consistency condition[10]を解析することによって、この形が unique であることがわかっています。Wess-Zumino consistency condition とは次のようなものです。ゲージアノマリーとは有効作用をゲージ変換したときのおつりです。

$$\delta_\lambda\varGamma[A]=\mathcal{A}_\lambda\tag{94}$$

一方、ゲージ変換は次の代数を満たします。

$$\delta_\xi\delta_\lambda-\delta_\lambda\delta_\xi=\delta_{[\lambda,\xi]}\tag{95}$$

この恒等式を $\varGamma[A]$ に作用させると

$$\delta_\xi\delta_\lambda\varGamma[A]-\delta_\lambda\delta_\xi\varGamma[A]=\delta_{[\lambda,\xi]}\varGamma[A]\tag{96}$$

[10] J. Wess and B. Zumino, Phys. Lett. **37B** (1971) 95.

となり、ゲージアノマリーの定義から

$$\delta_\xi \mathcal{A}_\lambda - \delta_\lambda \mathcal{A}_\xi = \mathcal{A}_{[\lambda,\xi]} \tag{97}$$

が成り立たなければなりません。これを Wess-Zumino consistency condition といいます。この関係式の一般解の解析から、(93) の形以外の破れは全て local な counter term で取り除けることが証明できます[11]。

さて、(93) から、カイラルな coupling を持つゲージ理論の effective action は一般にゲージ不変でないことがわかりました。これは、言い方を替えると、ゲージ相互作用する Weyl fermion に対しては一般にゲージ不変性を保つ正則化が存在しないということです。なぜなら、もしゲージ不変な正則化が存在したとすると、その正則化を使えばゲージアノマリーは出ないはずです。一方、正則化の影響は理論の紫外発散に関係した部分、つまり短距離の構造にしか影響しないので、二つの異なった正則化の違いは局所的な項の違いに吸収できるはずです。ところがゲージアノマリーは局所相殺項では取り除けないのですから、結局、ゲージ不変な正則化は存在しないことになります。このとき、理論の unitarity、くりこみ可能性は壊れてしまいますので、こうしたゲージ理論は consistent に定式化できないことになります。

それでは、カイラルなゲージ理論である標準模型も consistent に定式化できないのかという疑問がわきます。実は、カイラルなゲージ理論には例外があります。前の $\delta_\lambda \Gamma[A]$ の式は、$d^{abc} \equiv \operatorname{tr} T^a\{T^b, T^c\}$ という、フェルミオンの属する Lie 代数の表現から作られる combination に比例しています。そこで、フェルミオンの表現が $d^{abc} = 0$ となる時、(局所相殺項をうまく選べば) $\delta_\lambda \Gamma[A] = 0$ とゲージ不変になります。この場合だけは定式化を consistent に行えるのです。標準模型でも (何故かは分からないけれど) クォークとレプトンの寄与を加え合わせると $d^{abc} = 0$ となっています。それで、量子論として consistent に定式化できるわけです。

従って、カイラルなゲージ理論は $d^{abc} = 0$ となる時に限って (これを anomaly-free な場合と呼びます) 局所相殺項をうまく選んで effective action をゲージ不変にすることが可能です。$d^{abc} = 0$ の理論のみを考えることにすれば原理的にはこれでいいのですが、ゲージ不変でない正則化を使うとたとえ $d^{abc} = 0$ でも fake anomaly があらわれ、各次数で相殺項を選んでゆく作業が必要となります。一般論からは anomaly-free ならば、ゲージ不変な正則化が存在してもよいわけですから、$d^{abc} = 0$ ならば自動的にゲージ不変性を保つような処方箋はないのでしょうか？ そうすれば、正則化のまずさからくる余分な相殺項は必要ないはずです。それは明日の課題としましょう。

昨日の復習から入ります。Weyl フェルミオンからくる有効作用 $\Gamma[A]$ をゲージ変換した式は

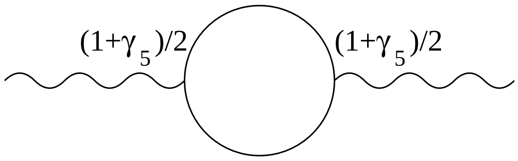
$$\delta_\lambda \Gamma[A] = \underbrace{\int d^4x \, \frac{-i}{24\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \operatorname{tr}\left\{\lambda \left[\partial_\mu A_\nu \partial_\rho A_\sigma + \frac{1}{2}\partial_\mu (A_\nu A_\rho A_\sigma)\right]\right\}}_{\text{minimal な anomaly} \propto d^{abc}} + \underbrace{\cdots}_{\text{fake anomaly}} \tag{98}$$

となりました。一般には有効作用 $\Gamma[A]$ はゲージ不変でなく、(98) の右辺のようなおつりが出て来ます。このおつりの項は正則化の方法によって違ったものになるのですが、式 (98) の第一項の部分は共通に現れる項で d^{abc} に比例します。この項を minimal な anomaly と呼びます。$d^{abc} \neq 0$ のときは consistent な理論が作れません。これに対して、式 (98) の第二項の部分 $\cdots$ は local な counter term を元の action に加えることで消すことができます。この項を fake anomaly と呼びます。式 (98) の第二項は正則化の方法に依存するので、この項が 0 になるようなうまい正則化の方法がないかと考えるのは、自然なことです。今日はその話をしたいと思います。

[11] C. Becchi, A. Rouet and R. Stora, Commum. Math. Phys. **42** (1975) 127; Ann. Phys. **98** (1976) 287.

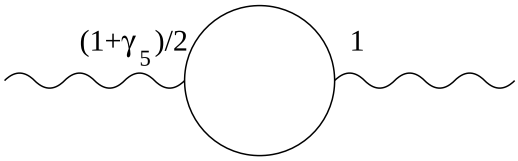
4　共変的正則化

この共変的正則化というのは、「次元正則化」のような特定の正則化の名前ではなく、フェルミオンの one loop diagram を扱う際のある種の処方箋の総称です。まず 2 角形ダイアグラムについて考えます。昨日、次元正則化の方法で計算しましたが、



$$= \quad C(-k^2)(k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu}) - \frac{1}{48\pi} k^2 g^{\mu\nu} \tag{99}$$

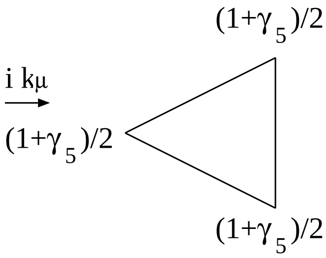
でした。右辺の第一項は transverse なゲージ不変な部分で、第二項は fake anomaly です。fake anomaly が出ないようにしたいのですが、次のように考えてみます。今、massless なので、素朴には projection operator $(1+\gamma_5)/2$ を他の頂点に移動することができ、$((1+\gamma_5)/2)^2 = (1+\gamma_5)/2$ から、ダイヤグラム (99) は、次のダイヤグラムと素朴には同じと考えられます。



$$= \quad C(-k^2)(k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu}) \tag{100}$$

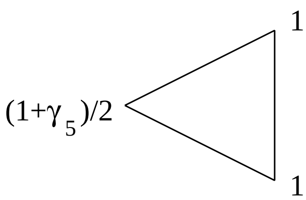
ところが次元正則化で実際に計算してみると、(99) と (100) とは結果が違います。(100) では fake anomaly がありません。

3 角形ダイアグラムでも似たような事情があります。昨日計算したように、



$$= \quad \frac{1}{48\pi^2}(-2p^\nu p^\rho + p^2 g^{\nu\rho} - 2q^\nu q^\rho + q^2 g^{\nu\rho}) + \frac{i}{24\pi^2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\mu q_\sigma \tag{101}$$

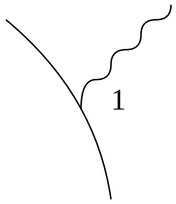
でしたが、これに対して、projection operator $(1+\gamma_5)/2$ を一ヶ所のの頂点に押しつけたものは、



$$= \quad \frac{i}{8\pi^2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\mu q_\sigma \tag{102}$$

となって、やはり fake anomaly がありません。

上の例から、一般に projection operator $(1+\gamma_5)/2$ をどれか 1 つの頂点に押しつけてから計算すれば、simple な表式が得られることが予想されます。これは、次元正則化では、ベクトル的な



(103)

の形の頂点でのゲージ対称性は自動的に保たれるという性質によります。ともかく実際上は、projection operator $(1+\gamma_5)/2$ または γ_5 を $\gamma_5^2=1$ の関係を使ってどこか 1ヶ所の頂点に押しつけ、その後で次元正則化を適用すれば、simple な (fake anomaly を含まない) 答えが得られるということがいえます。この処方箋は各頂点間の Bose 対称性を破りますが、答えが出た後で頂点に関して平均化してやれば良いのです[12]。

上で言ったのと等価な処方箋は次のようにもっと systematic に定式化することもできます[13]。今考えているのは有効作用

$$e^{i\Gamma[A]} = \int \mathcal{D}\psi\mathcal{D}\overline{\psi}\, e^{iS[\psi,A]} \tag{104}$$

です。ここで A を tA に置き換えます。すると、

$$\begin{aligned}
\Gamma[A] &= \Gamma[tA]|_{t=1} \\
&= \int_0^1 dt\, \frac{d}{dt}\Gamma[tA] \qquad (\text{簡単のため } \Gamma[0]=0 \text{ とした}) \\
&= \int_0^1 dt \int d^4x\, A_\mu^a(x)\, \left.\frac{\delta\Gamma[A]}{\delta A_\mu^a(x)}\right|_{A\to tA} \\
&= \int_0^1 dt \int d^4x\, A_\mu^a(x) \left\langle \frac{\delta S}{\delta A_\mu^a(x)} \right\rangle_{A\to tA} \qquad (\text{式 (104) より})
\end{aligned} \tag{105}$$

となります。ここで最後の期待値の中身はゲージ場と結合するフェルミオンのカレント、つまりゲージカレントです。そのままでは発散量なので次のように定義します。

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\delta S}{\delta A_\mu^a(x)} \right\rangle &= \langle g\overline{\psi}(x)\gamma^\mu T^a P_R \psi(x)\rangle \\
&= -\lim_{x'\to x} g\,\mathrm{tr}\,\gamma^\mu T^a P_R \frac{1}{\not\partial + \not A P_R}\,\delta(x-x') \\
&= -\lim_{x'\to x} g\,\mathrm{tr}\,\gamma^\mu T^a P_R \frac{1}{\not\partial + \not A}\,\delta(x-x') \\
&= -\lim_{x'\to x} g\,\mathrm{tr}\,\gamma^\mu T^a P_R \frac{1}{\not D}\,\delta(x-x') \\
&\equiv -\lim_{M\to\infty}\lim_{x'\to x} g\,\mathrm{tr}\,\gamma^\mu T^a P_R \frac{1}{\not D} e^{-\not D^2/M^2}\delta(x-x')
\end{aligned} \tag{106}$$

です。1 行目から 2 行目にいく際、

$$\langle \mathrm{T}\psi(x)\overline{\psi}(x')\rangle = \frac{1}{\not D_R}\,\delta(x-x') \tag{107}$$

[12]例えば、重力アノマリーの最初の論文 L. Alvarez-Gaumé and E. Witten, Nucl. Phys. **B234** (1983) 269 にも同様の処方箋が述べてあります。
[13]ここでの方法は H. Banerjee, R. Banerjee and P. Mitra, Z. Phys. **C32** (1986) 445 によるものです。

を用いましたが、その後 projection operator を１つの頂点に押しつけて、vector-like なプロパゲーター $\not{D}$ に書き換えています。また、最後の行では、dumping factor $e^{-\not{D}/M^2}$ を入れて正則化を行いました。この dumping factor $e^{-\not{D}/M^2}$ がゲージ変換のもとでゲージ共変にふるまう点が重要です。このために、上のように正則化した $\langle \delta S/\delta A_\mu^a(x)\rangle$ にゲージ変換をほどこすと、

$$\delta_\lambda \left\langle \frac{\delta S}{\delta A_\mu^a(x)} \right\rangle = -g f_{abc} \lambda^c \left\langle \frac{\delta S}{\delta A_\mu^b(x)} \right\rangle, \qquad [T^a, T^b] = i f_{abc} T^c \tag{108}$$

と共変的 (gauge covariant) にふるまいます。そのため、$\langle \delta S/\delta A_\mu^a(x)\rangle$ のことを covariant (gauge) current といいます。これは、ダイアグラムで言うと γ_5 をすべて x という頂点に押しつけそれ以外の頂点でのゲージ対称性を保つ正則化を行っていることに対応しています。

一方、有効作用 $\Gamma[A]$ のゲージ場に対する変分として consistent (gauge) current という、別のゲージカレントを考えることができます。

$$\left\langle \frac{\delta S}{\delta A_\mu^a(x)} \right\rangle \qquad \text{covariant current} \tag{109}$$

$$\frac{\delta \Gamma[A]}{\delta A_\mu^a(x)} \qquad \text{consistent current} \tag{110}$$

式 (106) を見ても分かるように、素朴には covariant current と consistent current とは同じものです。

$$\frac{\delta \Gamma[A]}{\delta A_\mu^a(x)} \overset{\text{素朴には}}{=} \left\langle \frac{\delta S}{\delta A_\mu^a(x)} \right\rangle \tag{111}$$

素朴と言う意味は、この式は両辺とも発散していますから正則化からくる微妙な部分を除いて、という意味です。実際、今の我々の有効作用の定義 (105) から consistent current を計算してやると、

$$\begin{aligned}
\frac{\delta \Gamma[A]}{\delta A_\mu^a(x)} &= \int_0^1 dt \, \frac{dt}{dt} \left\langle \frac{\delta S}{\delta A_\mu^a(x)} \right\rangle_{A\to tA} + \int_0^1 dt \int d^4y \, A_\nu^b(y) \frac{\delta}{\delta A_\mu^a(x)} \left\langle \frac{\delta S}{\delta A_\nu^b(y)} \right\rangle_{A\to tA} \\
&= \left\langle \frac{\delta S}{\delta A_\mu^a(x)} \right\rangle - \int_0^1 dt \, t \frac{d}{dt} \left\langle \frac{\delta S}{\delta A_\mu^a(x)} \right\rangle_{A\to tA} + \int_0^1 dt \int d^4y \, A_\nu^b(y) \frac{\delta}{\delta A_\mu^a(x)} \left\langle \frac{\delta S}{\delta A_\nu^b(y)} \right\rangle_{A\to tA} \\
&= \left\langle \frac{\delta S}{\delta A_\mu^a(x)} \right\rangle + \underbrace{\int_0^1 dt \int d^4y \left\{ A_\nu^b(y) \left[\frac{\delta}{\delta A_\mu^a(x)} \left\langle \frac{\delta S}{\delta A_\nu^b(y)} \right\rangle - \frac{\delta}{\delta A_\nu^b(y)} \left\langle \frac{\delta S}{\delta A_\mu^a(x)} \right\rangle \right] \right\}_{A\to tA}}_{\text{Bardeen-Zumino current}}
\end{aligned} \tag{112}$$

となり、両者は一致しないことが分かります。第１項を部分積分する際、$dX[tA]/dt = \int d^4y \, A_\nu^b(y) \times \delta X[tA]/\delta(tA_\nu^b(y))$ を用いました。consistent current と covariant current の差を Bardeen-Zumino current といいます。Bardeen-Zumino current の中身は covariant current の functional rotation とでもいうべき形をしていますね。詳細は文献[14]に譲りますが、実は covariant current の定義式 (106) から、functional rotation を ($M \to \infty$ で) 具体的に計算することができて

$$\frac{\delta}{\delta A_\mu^a(x)} \left\langle \frac{\delta S}{\delta A_\nu^b(y)} \right\rangle - \frac{\delta}{\delta A_\nu^b(y)} \left\langle \frac{\delta S}{\delta A_\mu^a(x)} \right\rangle \overset{M\to\infty}{=} \frac{ig^2}{16\pi^2} \delta(x-y) \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \underbrace{\mathrm{tr}\, T^a \{T^b, F_{\rho\sigma}\}}_{\propto d^{abc}} \tag{113}$$

[14] covariant current と consistent current の違いの重要性を強調したのは K. Fujikawa, Phys. Rev. **D29** (1984) 285 です。W. A. Bardeen and B. Zumino, Nucl. Phys. **B244** (1984) 421 では両者の差が代数的方法で導出されています。これを、場の理論的方法で計算したのが H. Leutwyler, Phys. Lett. **B152** (1985) 78 です。同等の内容をここで紹介したような簡単な方法で定式化したのが前にあげた Banerjee et. al. の論文です。

となります。アノマリー自身と同様に、この量も有限で局所的であるのが興味深い点です。また、anomaly-free $d^{abc}=0$ の場合は Bardeen-Zumino current は 0 になる、つまり

$$(\text{consistent current}) - (\text{covariant current}) \propto d^{abc} \tag{114}$$

となっています。具体的な表式は、式 (113) を式 (112) に代入して t 積分を実行すると得られ、

$$\frac{\delta \Gamma[A]}{\delta A_\mu^a(x)} = \left\langle \frac{\delta S}{\delta A_\mu^a(x)} \right\rangle - \frac{g}{48\pi^2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,\mathrm{tr}\,T^a(A_\nu F_{\rho\sigma} + F_{\nu\rho}A_\sigma - A_\nu A_\rho A_\sigma) \tag{115}$$

となります。

以上やったことをまとめると、我々は (105) に基づいて (106) の covariant current を使って有効作用を定義したわけです。この処方箋をここでは共変的正則化と呼ぶことにしましょう。一般に有効作用をゲージ場で変分して得られるゲージカレントを consistent current と呼びますが、我々の処方箋から得られる consistent current は covariant current とちょうど d^{abc} に比例する項 (Bardeen-Zumino current) だけの差を持っています。

さて、欲しかったのは、$d^{abc}=0$ の時には自動的に有効作用をゲージ不変にする (fake anomaly を出さない) 正則化でした。我々の今の処方箋がこうなっているのを見るには $d^{abc}=0$ のときはアノマリーがない、$\delta_\lambda \Gamma[A]=0$ となることを言えばいいわけです。ゲージ変換の形から

$$\begin{aligned}\delta_\lambda \Gamma[A] &= \int d^4x\, D_\mu \lambda^a(x) \frac{\delta \Gamma[A]}{\delta A_\mu^a(x)} \\ &= -\int d^4x\, \lambda^a(x) D_\mu \frac{\delta \Gamma[A]}{\delta A_\mu^a(x)}\end{aligned} \tag{116}$$

ですが、これに (115) を使います。第 1 項の covariant current の発散については、以前の axial anomaly とほとんど同じ計算をくりかえすことができます。

$$\begin{aligned}D_\mu \left\langle \frac{\delta S}{\delta A_\mu^a(x)} \right\rangle &= -\lim_{M\to\infty} D_\mu \lim_{x'\to x} g\,\mathrm{tr}\,\gamma^\mu T^a P_R \frac{1}{\not{D}} e^{-\not{D}^2/M^2}\delta(x-x') \\ &= -\lim_{M\to\infty} D_\mu \lim_{x'\to x} g\,\mathrm{tr}\,\gamma^\mu T^a P_R \frac{1}{\not{D}} e^{-\not{D}^2/M^2}\delta(x-x') \\ &= \lim_{M\to\infty}\lim_{x'\to x} g\,\mathrm{tr}\,T^a\gamma_5 e^{-\not{D}^2/M^2}\delta(x-x') \\ &= \frac{g}{32\pi^2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,\mathrm{tr}\,T^a F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} \propto d^{abc}\end{aligned} \tag{117}$$

となります。covariant current の発散は共変アノマリーと呼ばれますが、共変アノマリーは、(108) の共変性からいつでも $F_{\mu\nu}$ だけに依存したきれいな形をしています。この事情は重力アノマリーでも同様です。一方、(115) の第 2 項、Bardeen-Zumino current は d^{abc} に比例しているわけですから、ゲージ対称性の破れ、$\delta_\lambda \Gamma[A]$ 全体が d^{abc} に比例していることがわかり、目標は達成されたことになります。最終的に我々の処方箋でのゲージアノマリーの表式は、

$$\begin{aligned}\delta_\lambda \Gamma[A] &= \int d^4x\, \frac{-i}{32\pi^2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,\mathrm{tr}\,\lambda F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} \\ &+ \int d^4x\, \frac{i}{8\pi^2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,\mathrm{tr}\,\lambda\Big(\frac{2}{3}\partial_\mu A_\nu \partial_\rho A_\sigma + \frac{5}{6}\partial_\mu A_\nu A_\rho A_\sigma - \frac{1}{6}A_\nu \partial_\mu A_\rho A_\sigma \\ &\qquad + \frac{5}{6}A_\nu A_\rho \partial_\mu A_\sigma + A_\mu A_\nu A_\rho A_\sigma\Big) \\ &= \int d^4x\, \frac{-i}{24\pi^2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,\mathrm{tr}\,\lambda\left[\partial_\mu A_\nu \partial_\rho A_\sigma + \frac{1}{2}\partial_\mu(A_\nu A_\rho A_\sigma)\right]\end{aligned} \tag{118}$$

となってこれは以前述べた minimal anomaly に一致しています。注意して欲しいのは、上の計算では局所相殺項を全く導入する必要がなかったことです。これは covariant current といういい性質を持つゲージカレントをもとに有効作用を定義しているから、と考えることができます。covariant current の定義は、ある頂点を特別扱いするので頂点間の Bose 対称性を破りますが、有効作用 (105) の t 積分が頂点に関する平均操作を行い、Bose 対称性を回復させているのだとみなすことができます。ちなみに、consistent current の名前の由来は、有効作用から定義されるアノマリー (つまり consistent current の発散) が Wess-Zumino consistency condition を満足するところから来ています。共変アノマリーは Wess-Zumino consistency condition を満たさないことも容易に示すことができます。

5　カイラルなゲージ理論でのフェルミオン数アノマリー

この話題も重要です。標準模型のようなカイラルなゲージ理論では、アノマリーの効果と instanton 等の非摂動論的配位の効果を考えるとフェルミオン数は保存しないと考えられています[15]。フェルミオン数の保存則は、$U(1)$ 変換

$$\psi(x) \to e^{i\alpha}\psi(x), \qquad \overline{\psi}(x) \to \overline{\psi}(x)e^{-i\alpha}, \tag{119}$$

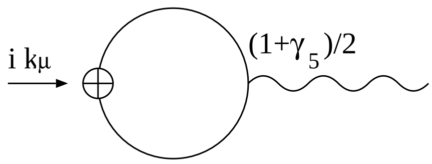
に対する action の不変性から導かれます。対応するフェルミオン数のカレントは具体的には、

$$j^\mu(x) = \overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) \tag{120}$$

です。古典的にはもちろん、Noether の定理より、

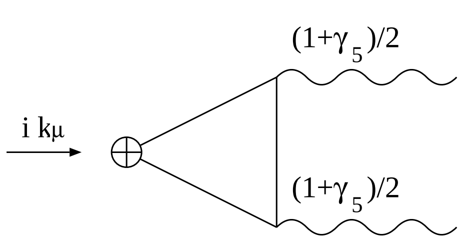
$$\partial_\mu j^\mu(x) = 0 \tag{121}$$

がなりたち、フェルミオン数は保存します。ところが量子論に行くと、ゲージ相互作用が γ_5 を含むためにこの保存則は微妙になります。そこで、フェルミオン数カレントの発散に対応した、次のダイアグラムを次元正則化で計算してみると



$$= \quad 0 \tag{122}$$

この図の $\otimes$ の部分にさっきのカレント (120) が入っています。次のダイアグラムでも、



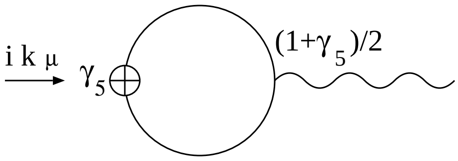
$$= \quad 0 \tag{123}$$

[15] G. 't Hooft, Phys. Rev. Lett. **37** (1976) 8.

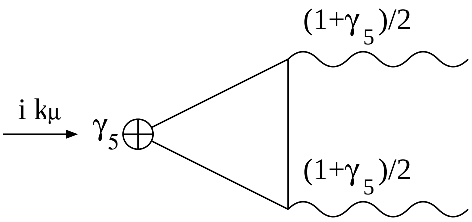
となり、フェルミオン数は保存しているように見えます。そこでもう少し違ったやり方をしてみましょう。いま、Weyl fermion ($\gamma_5\psi = \psi$) を考えていますので、素朴には、フェルミオン数カレントを

$$j^\mu(x) = \overline{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma_5\psi(x) \tag{124}$$

と書いてもかまわないように思われます。こう書いた後でさきほどと同様の計算をすると今度は、



$$= \quad -\frac{i}{24\pi^2}k^2k^\nu \tag{125}$$



$$= \quad \frac{i}{12\pi^2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}p_\mu q_\sigma + \frac{1}{24\pi^2}(-2p^\nu p^\rho + p^2 g^{\nu\rho} - 2q^\nu q^\rho + q^2 g^{\nu\rho}) \tag{126}$$

となり、今度はフェルミオン数は保存しないように見えます。フェルミオン数の保存という観測できはずのものが、取扱いによって違ってしまうのは大問題です。どうしてこんなことになったのか反省してみますと、もともとフェルミオン数のカレントを量子論的にどう定義するのかはっきりさせていないことから問題が生じています。そこで、観測可能量はゲージ不変である必要があるので

$$\langle j^\mu(x)\rangle = \langle\overline{\psi}\gamma^\mu\psi(x)\rangle \tag{127}$$

をゲージ不変に定義することを考えます。それには、例えば

$$\langle j^\mu(x)\rangle = -\lim_{M\to\infty}\lim_{x'\to x}\operatorname{tr}\gamma^\mu P_R\frac{1}{\not{D}}e^{-\not{D}^2/M^2}\delta(x-x') \tag{128}$$

と定義すればよく (projection operator P_R は Weyl fermion であることを表現するために挿入しました)、その結果

$$\begin{aligned}
\partial_\mu\langle j^\mu(x)\rangle &= -\lim_{M\to\infty}\lim_{x'\to x}\operatorname{tr}\left(\not{D}P_R\frac{1}{\not{D}}e^{-\not{D}^2/M^2} - P_R\frac{1}{\not{D}}e^{-\not{D}^2/M^2}\not{D}\right)\delta(x-x') \\
&= -\lim_{M\to\infty}\lim_{x'\to x}\operatorname{tr}\left(P_L e^{-\not{D}^2/M^2} - P_R e^{-\not{D}^2/M^2}\right)\delta(x-x') \\
&= \lim_{M\to\infty}\lim_{x'\to x}\operatorname{tr}\gamma_5 e^{-\not{D}^2/M^2}\delta(x-x') \\
&= \frac{1}{32\pi^2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\operatorname{tr}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}
\end{aligned} \tag{129}$$

となり、このカレントはアノマリーを持っていることがわかります。axial anomaly の時と同様に、この結果は Weyl fermion のフェルミオン数カレントをゲージ不変に定義するかぎり正則化によらないことが議論できます。こうしたわけで、標準模型では非摂動論的にはフェルミオン数が破れると考えられています。

6 Supersymmetric なゲージ理論でのゲージアノマリー

ここでは共変的正則化の応用例として、4 次元の supersymmetric なゲージ理論[16]におけるゲージアノマリーの評価について紹介したいと思います。まず、SUSY について基本的なことがらをまとめます。γ 行列の表示を以前と同じにとると Lorentz 変換の generator は

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu], \qquad \sigma^{0i} = i\begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{pmatrix}, \qquad \sigma^{ij} = \varepsilon_{ijk}\begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix} \tag{130}$$

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{131}$$

となります。μ, ν は 0, 1, 2, 3 を、i, j, k は 1, 2, 3 を走ります。$\sigma^{\mu\nu}$ と γ_5 は互いに交換する $[\sigma^{\mu\nu}, \gamma_5] = 0$ ので、γ_5 の固有値 ± 1 に対応する 2 つの固有ベクトルは、Lorentz 変換のもとで互いに独立に変換します。つまり、4 成分 spinor は 2 つの 2 成分 spinor に既約分解されます。

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_\alpha \\ \chi^{\dot\alpha} \end{pmatrix} \tag{132}$$

ここで、α, $\dot\alpha$ は 1, 2 を走ります。この意味で 4 成分 spinor よりも 2 成分 spinor の方が基本的で、SUSY は 2 成分 spinor をもとに考えたほうが見通しが良いです。2 成分 spinor は Weyl fermion そのものですから、SUSY の場合は基本的にカイラルなものが構成要素であるといっていいでしょう。

最も簡単なモデルから始めましょう。ラグランジアンはこんな恰好をしています。

$$\mathcal{L} = \partial_\mu A^* \partial^\mu A + \overline{\psi}_{\dot\alpha} \overline{\sigma}^{\mu\dot\alpha\alpha} \partial_\mu \psi_\alpha + F^* F \tag{133}$$

A　　複素スカラー (ボゾン)

ψ_α　　2 成分スピノール (フェルミオン)

F　　複素スカラー

$$\overline{\sigma}^{\mu\dot\alpha\alpha} = (1, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3), \qquad \sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha} = (1, -\sigma^1, -\sigma^2, -\sigma^3) \tag{134}$$

$$\sigma_\mu \overline{\sigma}_\nu + \sigma_\nu \overline{\sigma}_\mu = \overline{\sigma}_\mu \sigma_\nu + \overline{\sigma}_\nu \sigma_\mu = 2g_{\mu\nu} \tag{135}$$

添字 α, β は $SL(2, \mathbf{C})$ の表現の足となっています。ε tensor $\varepsilon_{\alpha\beta}$ は $SL(2, \mathbf{C})$ の不変テンソルです。これは反対称テンソルであり、添字の上げ下げに用いられます。

$$\varepsilon^{12} = -\varepsilon^{21} = -\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = 1 \tag{136}$$

$$\psi^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta}\psi_\beta, \qquad \psi_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta}\psi^\beta \tag{137}$$

supersymmetry とは次の変換に対する不変性です。

$$\begin{aligned} \delta_\theta A(x) &= \sqrt{2}\theta^\alpha \psi_\alpha(x) \\ \delta_\theta \psi_\alpha(x) &= -i\sqrt{2}\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\overline{\theta}^{\dot\alpha}\partial_\mu A(x) + \sqrt{2}\theta_\alpha F(x) \\ \delta_\theta F(x) &= -i\sqrt{2}\overline{\theta}_{\dot\alpha}\overline{\sigma}^{\mu\dot\alpha\alpha}\partial_\mu \psi_\alpha(x) \end{aligned} \tag{138}$$

$\overline{\theta}$ は θ の Hermite 共役を表します。また θ は Grassmann 数です。Grassmann 数とは順番を入れ換えるとマイナスが出る数のことで、特に自分自身の 2 乗は 0 となります：

θ_α,　　グラスマン数

$$\theta_1\theta_2 = -\theta_2\theta_1, \qquad (\theta_1)^2 = (\theta_2)^2 = 0 \tag{139}$$

[16]例えば J. Wess and J. Bagger, Supersymmetry and supergravity (Princeton University Press, Princeton, 1992) を参照してください。

さて、変換則 (138) を見ても分かるように、SUSY 変換はフェルミオンとボゾンを入れ換える変換です。また、フェルミオンとボゾンの自由度が等しいという性質があります。それをチェックしてみましょう。フェルミオンの運動方程式は 1 階の微分方程式ですので、フェルミオンの方は自由度が半分に落ちます。ボゾンについては、まず補助場 F の方は運動項がないので力学的自由度は 0 です。スカラー場 A は 2 階の微分方程式に従います。したがって、

	(実数で数えた) 成分の数	力学的自由度
フェルミオン ψ_α	4	4/2
ボゾン A	2	2
ボゾン F	2	0

となり、フェルミオンとボゾンの成分および力学的自由度がそれぞれ等しいことが分かります。今書いたものは、相互作用項のない free なラグランジアンですが、さらに相互作用項を付け加えることもできます：

$$\mathcal{L}_{\rm free} = \partial_\mu A^* \partial^\mu A + \overline{\psi}_{\dot{\alpha}} \overline{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\alpha} \partial_\mu \psi_\alpha \tag{140}$$

$$\mathcal{L}_{\rm int} = m(-\frac{1}{2}\psi^\alpha\psi_\alpha + FA) + g(FA^2 - A\psi^\alpha\psi_\alpha) + \text{h.c.} \tag{141}$$

この模型の輻射補正に特徴的なことは、free part の部分は波動関数の繰り込みが ψ と A とで共通で、一方、interaction part の方は mass m が対数的繰り込みしか受けません。普通、non-SUSY の理論では、スカラー場の mass は 2 次発散の繰り込みを受けます。標準模型の Higgs の mass についても同様で、このことが gauge hierarchy 問題や naturalness 問題を生み出します。したがって、SUSY はこれらの問題の解決に有望です。また、真空のエネルギーは正確に 0 です。これは、フェルミオンとボゾンの零点エネルギーが互いに逆符号で cancel するからです。このような SUSY のきれいな性質は例えば Seiberg-Witten 理論で full に活用されました。

今紹介したものは SUSY を持つ模型のほんの一例にすぎません。一般には、次のように考えることができます。まず $N=1$ SUSY 代数というものを次のように定義します。

$$\begin{aligned} &[\theta^\alpha Q_\alpha, \overline{\theta}_{\dot{\alpha}}\overline{Q}^{\dot{\alpha}}] = -2\theta^\alpha \sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}} \overline{\theta}^{\dot{\alpha}} \qquad (P_\mu = -i\partial_\mu) \\ &[\theta^\alpha Q_\alpha, \theta^\beta Q_\beta] = 0 \end{aligned} \tag{142}$$

ここで $Q, \overline{Q}$ を supercharge と呼びます。先程の変換 (138) はこの代数の一つの実現だと考えることができます。実際、SUSY 変換を例えばスカラー場 A について

$$\delta_\theta A = (\theta^\alpha Q_\alpha + \overline{\theta}_{\dot{\alpha}}\overline{Q}^{\dot{\alpha}}) \times A \tag{143}$$

と書くことにすると、変換 (138) より、

$$(\delta_{\theta_1}\delta_{\theta_2} - \delta_{\theta_2}\delta_{\theta_1})A = 2i(\theta_1^\alpha \sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}} \theta_2^\alpha - \theta_2^\alpha \sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}} \theta_1^\alpha)\partial_\mu A \tag{144}$$

となります。他の場についても同じ結果が得られます。また、以下では、simple に

$$\psi^\alpha \chi_\alpha = \psi\chi, \qquad \overline{\psi}_{\dot{\alpha}} \overline{\chi}^{\dot{\alpha}} = \overline{\psi}\overline{\chi} \tag{145}$$

と表すことにします。

ここで、SUSY 代数の表現を体系的に見付ける方法はないか、あるいは A, ψ, F をまとめて扱うことはできないかという疑問がわきます。その答えを与えるのが superfield の方法です。superfield は、任意の場 (例えば $A(x)$) をもってきて、次のように作られます。

$$
\begin{aligned}
\Phi(x,\theta,\overline{\theta}) &= e^{\delta_\theta} A(x) \\
&= A(x) + \delta_\theta A(x) + \cdots \\
&= e^{(\theta Q + \overline{\theta Q})\times} A(x) \\
&= e^{\theta Q \times} e^{\overline{\theta Q}\times} e^{\theta \sigma^m \overline{\theta} P_m \times} A(x)
\end{aligned}
\tag{146}
$$

３行目から４行目にいく際、Baker-Campbell-Hausdorff の公式を用いました (P_m と $Q, \overline{Q}$ とは可換です)。Superfield とは $(x, \theta, \overline{\theta})$ で座標づけされる superspace に住んでいる場と考えることができます。式 (146) の両辺を θ で微分すると次の関係式が得られます。

$$
\xi^\alpha \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} \Phi(x,\theta,\overline{\theta}) = (\xi Q + \xi \sigma^\mu \overline{\theta} P_\mu) \times \Phi(x,\theta,\overline{\theta}) \tag{147}
$$

したがって、superfield の上では supercharge $Q, \overline{Q}$ は、

$$
Q_\alpha \leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} + i \sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}} \overline{\theta}^{\dot{\alpha}} \partial_\mu \tag{148}
$$

$$
\overline{Q}_{\dot{\alpha}} \leftrightarrow -\frac{\partial}{\partial \overline{\theta}^{\dot{\alpha}}} - i \theta^\alpha \sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}} \overline{\theta}^{\dot{\alpha}} \partial_\mu \tag{149}
$$

として微分演算子として実現されます。これが superfield の強力な特徴です。このことから superfield の積もまた superfield になることが分かります。superfield の一般形は次のようになります。

$$
\begin{aligned}
F(x,\theta,\overline{\theta}) &= f(x) + \theta\phi(x) + \overline{\theta}\overline{\chi}(x) + \theta^2 m(x) + \overline{\theta}^2 n(x) + \theta\sigma^\mu\overline{\theta} v_\mu(x) \\
&+ \theta\theta\overline{\theta}\overline{\lambda}(x) + \overline{\theta}\overline{\theta}\theta\psi(x) + \theta\theta\overline{\theta}\overline{\theta} d(x)
\end{aligned}
\tag{150}
$$

$\theta, \overline{\theta}$ のおのおのの 2 次までしか展開されないのは、θ が 2 成分 spinor でかつ Grassmann 数の 2 乗は 0 だからです。supercharge の表式 (148) と (149) から各 component field の変換性がすぐに分かります。例えば

$$
\delta_\xi f(x) = \xi\phi + \overline{\xi}\overline{\chi} \tag{151}
$$

となります。superfield の一般形 (150) に対しては、

$$
(\xi Q + \overline{\xi Q}) F(x,\theta,\overline{\theta}) = \delta_\xi f(x) + \delta_\xi \psi(x) + \cdots + \theta^2 \overline{\theta}^2 \delta_\xi d(x) \tag{152}
$$

となります。重要なことは

$$
\delta_\xi d(x) = \partial_\mu (\cdots) \tag{153}
$$

が成り立つことです。このことを用いて、SUSY 不変なラグランジアンを

$$
\mathcal{L} = d(x) + \text{h.c.} \tag{154}
$$

として作ることができます。

ところがここで一つ問題があります。このままだとまだ field が多すぎて表現が一般に既約ではありません。そこで一般の superfield に適当な constraint を課して既約表現を作る必要があります。constraint としては 4 次元だと代表的なものが 2 つあります。

1. chiral superfield
   constraint は
$$\overline{D}_{\dot{\alpha}}\Phi = 0, \qquad \overline{D}_{\dot{\alpha}} \equiv -\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}} + i\theta^{\alpha}\sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_{\mu} \tag{155}$$
   です。これが SUSY と矛盾しない constraint であることは
$$\{Q_{\alpha}, \overline{D}_{\dot{\beta}}\} = 0 \tag{156}$$
   から従います。この constraint を満たす superfield の一般形は
$$\Phi = A(y) + \sqrt{\theta}\psi(y) + \theta^2 F(y), \qquad y = x - i\theta\sigma^{\mu}\overline{\theta} \tag{157}$$
   となります。なお、この chiral superfield を使うと、最初に紹介した SUSY 不変なラグランジアンは
$$\mathcal{L} = \Phi^{\dagger}\Phi|_{\theta^2\overline{\theta}^2} \tag{158}$$
$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \frac{m}{2}\Phi^2|_{\theta^2} + \frac{g}{3}\Phi^3|_{\theta^2} + \text{h.c.} \tag{159}$$
   と非常に simple に書くことができます。

2. vecter (or real) superfield
   constraint は
$$V^{\dagger} = V \tag{160}$$
   です。この条件を満たす superfield の一般形は
$$\begin{aligned} V \;=\; & C(x) + i\theta\chi(x) - i\overline{\theta}\overline{\chi}(x) \\ +\; & \frac{i}{2}\theta\theta[M(x) + iN(x)] - \frac{i}{2}\overline{\theta\theta}[M(x) - iN(x)] \\ +\; & \theta\sigma^{\mu}\overline{\theta}v_{\mu}(x) + \theta\theta\overline{\theta}\left[\overline{\lambda}(x) + \frac{i}{2}\overline{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\overline{\chi}(x)\right] \\ -\; & i\overline{\theta\theta}\theta\left[\lambda(x) + \frac{i}{2}\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\overline{\chi}(x)\right] + \frac{1}{2}\theta\theta\overline{\theta\theta}\left[D(x) + \frac{1}{2}\Box C(x)\right] \end{aligned} \tag{161}$$
   となります。constraint (160) から v_{μ} は real であることが分かります。この superfield に特徴的なことはベクトル boson v_{μ} と、その SUSY partner である gaugino λ が含まれていることです。

ここまでの準備で、supersymmetric なゲージ理論が作れます。ゲージ群の Lie 代数は
$$V = V^a T^a, \qquad T^a : \text{リー代数の生成子} \tag{162}$$
として導入します。ゲージ場に対する superfield を使ったゲージ変換は chiral superfield であるゲージ変換のパラメーター Λ
$$\overline{D}_{\dot{\alpha}}\Lambda = 0 \tag{163}$$
を導入して
$$e^{V'} = e^{-i\Lambda^{\dagger}}e^{V}e^{i\Lambda} \tag{164}$$

と定義されます。non-SUSY の時の $F_{\mu\nu}$ に対応した "field strength" は

$$W_\alpha = -\frac{1}{4}\overline{D}^2(e^{-V}D_\alpha e^V) \tag{165}$$

で定義されます。$\{\overline{D}_{\dot\alpha}, \overline{D}_{\dot\beta}\} = 0$ から、$\overline{D}_{\dot\alpha}\overline{D}_{\dot\beta}\overline{D}_{\dot\gamma} = 0$ が従うので、W_α 自身は chiral superfield

$$\overline{D}_{\dot\alpha}W_\alpha = 0 \tag{166}$$

で、gauge covariant です。

$$W'_\alpha = e^{-i\Lambda}W_\alpha e^{i\Lambda} \tag{167}$$

さて、共変的正則化の SUSY でのゲージアノマリーへの応用をやりましょう。ここで考える系は

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \Phi^\dagger e^V \Phi|_{\theta^2\overline{\theta}^2} \\ &= \int d^2\theta d^2\overline{\theta}\, \Phi^\dagger e^V \Phi \end{aligned} \tag{168}$$

です。Grassmann 数の積分 $\int d^2\theta d^2\overline{\theta}$ は微分と同じなので $\theta^2\overline{\theta}^2$ に比例した項を取り出していることになります。この系は最初にやった $\Phi^\dagger\Phi$ の系にゲージ相互作用を入れたものです。e^V の部分が gauge interaction をあたえます。V は外場として扱って量子化は行いません。上で見たように chiral superfield Φ は Weyl fermion を含んでいるので、この系からはゲージアノマリーがでると期待されます。作用は

$$S = \int \underbrace{d^4x d^2\theta d^2\overline{\theta}}_{d^8z\ \text{と書く}}\, \Phi^\dagger e^V \Phi \tag{169}$$

です。この系の量子論を考えたいので、有効作用を導入します。

$$e^{i\Gamma[V]} = \int \mathcal{D}\Phi\mathcal{D}\Phi^\dagger\, e^{iS[\Phi,V]} \tag{170}$$

共変的正則化を考えるにはまず、ゲージ変換に対する共変微分を作っておかなければなりません。まず $\overline{D}_{\dot\alpha}$ はそれ自身で共変微分となっています。なぜなら、ゲージ変換のパラメーター Λ は chiral ($\overline{D}_{\dot\alpha}\Lambda = 0$) でしたから、

$$\overline{D}_{\dot\alpha} \xrightarrow{\text{ゲージ変換}} \overline{D}_{\dot\alpha} = e^{-i\Lambda}\overline{D}_{\dot\alpha}e^{i\Lambda} \tag{171}$$

と書けて、ゲージ共変とみなせるからです。$\overline{D}_{\dot\alpha}$ に conjugate な

$$D_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} - i\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\overline{\theta}^{\dot\alpha}\partial_\mu \tag{172}$$

に対しては

$$\nabla_\alpha = e^{-V}D_\alpha e^V \tag{173}$$

として共変微分を定義します。これで実際、

$$\nabla_\alpha \xrightarrow{\text{ゲージ変換}} e^{-i\Lambda}\nabla_\alpha e^{i\Lambda} \tag{174}$$

となり、covariant にふるまいます。さらにベクトル的共変微分 ∇_μ も導入しなければなりませんが、それは次のように定義します。

$$\{\nabla_\alpha, \overline{D}_{\dot\alpha}\} = 2i\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\nabla_\mu \tag{175}$$

それでは始めましょう。SUSY といっても場の種類が増えているだけですから、原理的には以前と同じ要領で各次数で局所相殺項を選んでいけば、$d^{abc}=0$ の時は有効作用をゲージ不変にできるはずです。ところが non-SUSY の場合と違って厄介な問題がいくつかあります。まず、fake anomaly (ゴミ) に対する局所相殺項の候補が無数にあるということです。non-SUSY の場合はゲージ場の質量次元は $\dim[A_\mu]=1$ で $\dim[\mathcal{L}_{\rm counter}]=4$ ですから $\mathcal{L}_{\rm counter}$ の候補はたかだか知れていました。ところがゲージ場に対応する superfield V は次元を持たない (θ の mass dimension は $-1/2$ です) $\dim[V]=0$ ので、V の任意関数が counter term の候補になれます。もう一つ厄介なことは、V のゲージ変換が非常に複雑だということです。無限小変換に対して

$$\delta_\Lambda V = i\mathcal{L}_{V/2}\cdot\Big[(\Lambda+\Lambda^\dagger)+\coth(\mathcal{L}_{V/2})\cdot(\Lambda-\Lambda^\dagger)\Big], \qquad \mathcal{L}_V\cdot X \equiv [V,X] \tag{176}$$

(ここで、$\coth(\mathcal{L}_{V/2})$ の部分は Taylor 展開してから定義されます) となります。こうしたわけで、superfield を使うと、SUSY ゲージ理論における正則化やゲージアノマリー[17]の取扱いは、非常に複雑になることは昔から知られていました。そこで、今日紹介したゴミの出ない共変正則化の方法で、直接 minimal な anomaly を求めてみます。といっても、もう時間がありませんので、考え方と最終結果だけを述べて終わりにしたいと思います。

まず、gauge superfield V を tV $(0\le t\le 1)$ に置き換えて non-SUSY の時と同様に

$$\begin{aligned}\mathit{\Gamma}[V] &= \mathit{\Gamma}[tV]\big|_{t=1}\\ &= \int_0^1 dt\int d^8z\,V^a(z)\,\frac{\delta\mathit{\Gamma}[V]}{\delta V^a(z)}\bigg|_{V\to tV}\\ &= \int_0^1 dt\int d^8z\,V^a(z)\left\langle\frac{\delta S}{\delta V^a(z)}\right\rangle_{V\to tV}\end{aligned} \tag{177}$$

とします。最後の行のゲージカレントを gauge covariant に正則化します。

$$\begin{aligned}\left\langle\frac{\delta S}{\delta V^a(z)}\right\rangle &= \mathrm{tr}\,\frac{\partial e^V}{\partial V^a}\langle \mathrm{T}\Phi(z)\Phi^\dagger(z)\rangle\\ &\equiv -\frac{i}{16}\lim_{M\to\infty}\lim_{z'\to z}\mathrm{tr}\,e^{-V}\frac{\partial e^V}{\partial V^a}\overline{D}^2\frac{1}{\Box_+}e^{-\Box_+/M^2}\nabla^2\delta(z-z')\end{aligned} \tag{178}$$

ここで、chiral superfield の propagator が $\langle\mathrm{T}\Phi(z)\Phi^\dagger(z')\rangle=-\frac{i}{16}\overline{D}^2\frac{1}{\Box_+}\nabla^2e^{-V}\delta(z-z')$ と書けることをつかいました。$\Box_+$ はゲージ共変な SUSY での d'Alembertian で

$$\Box_+ = -\frac{1}{16}\overline{D}^2\nabla^2-\frac{1}{16}\nabla^2\overline{D}^2+\frac{1}{8}\overline{D}_{\dot\alpha}\nabla^2\overline{D}^{\dot\alpha} \tag{179}$$

で定義されます。後は以前の non-SUSY の場合と同様で

$$\underbrace{\frac{\delta\mathit{\Gamma}[V]}{\delta V^a(z)}}_{\text{consistent current}} = \underbrace{\left\langle\frac{\delta S}{\delta V^a(z)}\right\rangle}_{\text{covariant current}} +(\text{Bardeen-Zumino current の部分}) \tag{180}$$

と分離します。covariant current を元に有効作用を定義したことを反映して、SUSY の場合でも Bardeen-Zumino current は d^{abc} に比例する形になります。最後にゲージアノマリーの結果を書きますと、

$$\delta_\Lambda\mathit{\Gamma}[V] = -\frac{1}{64\pi^2}\int d^6z\ \mathrm{tr}\,i\Lambda W^\alpha W_\alpha+\frac{1}{64\pi^2}\int d^6\overline{z}\ \mathrm{tr}\,i\Lambda^\dagger\overline{W}_{\dot\alpha}\overline{W}^{\dot\alpha}$$

[17] この問題に対するあらゆる (場の理論的、位相幾何学的および代数的な) 角度からの解析は I. N. McArthur and H. Osborn, Nucl. Phys. **B268** (1986) 537 でなされました。

$$+ \quad \frac{1}{64\pi^2}\int d^8z \int_0^1 dt \int_0^1 d\beta \ \mathrm{tr}\, e^{-\beta tV}\delta_\Lambda V e^{\beta tV}$$
$$\times\Big([\mathcal{D}^\alpha V, W_\alpha] + [\overline{D}_{\dot\alpha} V, e^{-V}\overline{W}^{\dot\alpha} e^V] + \{V, \mathcal{D}^\alpha W_\alpha\}\Big)_{V\to tV} \qquad (181)$$

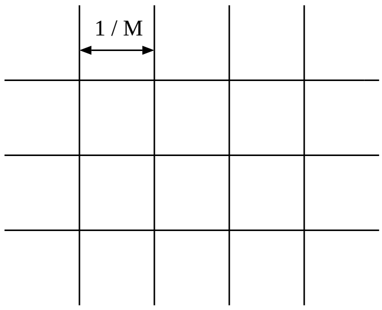
となります。右辺第 1 行目は covariant current の発散からきたもので、$\mathrm{tr}(T^aFF)$ のきれいな形をしています[18]。また、

$$\mathcal{D}^\alpha X = \begin{cases} [\nabla^\alpha, X], & X \text{ の統計性が偶のとき} \\ \{\nabla^\alpha, X\}, & X \text{ の統計性が奇のとき} \end{cases} \qquad (182)$$

です。したがって、anomaly-free $d^{abc}=0$ ならば $\delta_\Lambda\Gamma[V]=0$ となることはすぐわかります。つまり、minimal なアノマリーが得られました[19]。言い方をかえると、この正則化では余分な相殺項が必要ありません。

7 カイラルなゲージ理論の格子上での定式化について

今までは全て perturbative な話でした。最後に、non-perturbative な定式化について、ほんのちょっとだけ comment をして終わりにしたいと思います。格子の上に何らかの方法でゲージ場と相互作用する Weyl fermion を定義したとしましょう。我々は、連続理論にはゲージアノマリーが存在することを知っていますから、格子上の Weyl fermion の定式化が健全なものとすると、格子上で fermion を経路積分して得られる有効作用は一般にはゲージ不変ではないはずです[20]。



(183)

連続理論では、cutoff M を無限大にもっていって考えますが、格子理論だと格子間隔 $1/M$ が有限ですから、有効作用のゲージ変分には連続理論での表式におつりが付きます。

$$\delta_\lambda\Gamma[A] \quad = \quad \int d^4x\, \frac{-i}{24\pi^2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,\mathrm{tr}\left\{\lambda\left[\partial_\mu A_\nu\partial_\rho A_\sigma + \frac{1}{2}\partial_\mu(A_\nu A_\rho A_\sigma)\right]\right\} + \underbrace{O\left(\frac{1}{M}\right)}_{\text{おつり}} \qquad (184)$$

さて、我々が物理的に興味がある anomaly-free な理論 ($d^{abc}=0$) では上式の第 1 項は落ちます。しかし、有限の格子間隔では $O(1/M)$ 以降のおつりがあって、このおつりの部分の構造については今までの話からは全く不明です。そのために、格子間隔を有限にとどめたままゲージ場について経路積分すると、一般には ($d^{abc}=0$ でも) ゲージ自由度が decouple せず、いろいろな問題を引

[18]K. Konishi and K. Shizuya, Nuovo Cim. **90A** (1985) 344.

[19]ここでの簡単な方法は Y. Ohshima, K. Okuyama, H. Suzuki and H. Yasuta, Phys. Lett. **B457** (1999) 291 によるものです。

[20]このことはいわゆる Nielsen-二宮の定理 H. B. Nielsen and M. Ninomiya, Phys. Lett. **B105** (1981) 219; Nucl. Phys. **B185** (1981) 20; **B195** (1982) 541(E); **B193** (1981) 173 によって保証されます。

き起こします。このことがカイラルなゲージ理論を格子上で non-perturbative に定式化する際の困難の原因と考えられます。

したがって、M を有限にとどめたままで上のおつりの構造を理解することは非常に重要ですが、技術的には困難で、どこから手を付けてよいのかすらわかっていませんでした。ところがごく最近この問題に関連して大きな進展[21]がありまして、Ginsparg-Wilson relation というものを満たす格子上の Dirac 演算子を用いると、このおつりの部分の構造に強い制限がつくことがわかりました。特に、ゲージ群が $U(1)$ のときは、d^{abc} に比例する部分を除いて、おつりすべてが格子上の局所相殺項で打ち消せることが厳密に証明されました[22]。つまり、$U(1)$ の anomaly-free なカイラルなゲージ理論は non-perturbative に定義できるわけです。この視点からの格子上のカイラルなゲージ理論の研究は、特に非 Abel 的なゲージ群の場合についてはまさに始まったばかり[23]ですが、近い将来大きな理論的進展が予想されます。

[21] F. Niedermayer, Nucl. Phys. (Proc. Suppl.) **73** (1999) 105 および、そこにあげられている文献を参照してください。

[22] M. Lüscher, Nucl. Phys. **B538** (1999) 515; **B549** (1999) 295.

[23] H. Suzuki, "Anomaly cancellation condition in lattice gauge theory" hep-lat/0002009 および、そこにあげてある文献を参照してください。