目 次

1 Introduction **3**

2 GMSB モデル - a first look **6**

3 超対称性の力学的破れ **8**

3.1 Witten index 8
3.2 flat directions 10
3.3 DSB の一般的な条件 11
3.4 SQCD 13
3.4.1 $N_F = 0$ 13
3.4.2 $0 < N_F < N_C$ 15
3.4.3 $N_F = N_C$ 16
3.4.4 $N_F = N_C + 1$ 17
3.4.5 $N_F > N_C + 1$ 18

4 具体的なモデル **19**

4.1 ゲージタイプ 20
4.1.1 (3,2)model 型 20
4.1.2 IY model 型 24
4.2 Kähler タイプ 28
4.3 Yukawa タイプ 31
4.4 Direct タイプ 34
4.4.1 heavy messenger 型 34
4.5 composite タイプ 39

5 Minimal model **44**

5.1 MSSM 44
5.2 超対称性を破る soft パラメーター 45
5.3 MSSM のくりこみ群方程式 49
5.4 electro-weak 対称性の破れと mixing 52
5.4.1 Broken phase の Higgs ボソン 54
5.4.2 neutralinos と charginos 56
5.5 MSSM の質量スペクトル 58
5.5.1 gluino 58
5.5.2 squark と slepton 58
5.6 MSSM の質量スペクトル - まとめ 60
5.7 LSP - gravitino 71

5.8 NLSP . . . 73
5.9 DSB パラメータの制限 . . . 75
5.10 GMSB モデルの問題点 . . . 76
5.10.1 μ problem . . . 76

6 加速器実験からの制限 80
6.1 GMSB モデルでの超対称粒子のシグナル . . . 80
6.2 FCNC, CP からの制限 . . . 83

7 宇宙論からの制限 85
7.1 Freedman 宇宙 . . . 85
7.2 宇宙の熱力学 . . . 87
7.3 新粒子と宇宙論 . . . 88
7.4 Gravitino 問題 . . . 90
7.4.1 質量密度からの制限 . . . 91
7.4.2 BBN 後の軽元素の photo-dissociation . . . 96
7.5 Moduli 問題 . . . 98
7.6 新しい安定粒子は存在するか? . . . 108

8 GMSB model と宇宙論 109
8.1 Motivation . . . 109
8.2 $\tilde{\tau}_1$ NLSP シナリオでの $m_{3/2}$ への制限 . . . 110

9 Conclusions 115

A Appendix 119
A.1 SQCD の non-anomalous グローバル対称性 . . . 119
A.2 't Hooft anomaly matching 条件 . . . 120
A.3 spurion method による soft パラメータの計算 . . . 122
A.4 MSSM のくりこみ群方程式 . . . 125

1 Introduction

$SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ ゲージ群に基づく素粒子の標準模型 (Standard Model、以下 SM) は無数の実験結果を全て説明できている点で現在最も信頼できるものである。にもかかわらず、標準模型は最終理論とはみなされていない。その主な理由は次の通りである：

- 理論の枠内で決定できないパラメータが 18 個も存在する。
- 標準理論のスケール (以下 weak スケールと呼ぶ) よりも基本的と考えられている Planck スケール (あるいは GUT スケール) に比べてなぜ weak スケールが非常に小さいのか説明できない。
- tree level で weak スケール (i.e. Higgs ボソンの質量) が小さかったとしても、摂動で輻射補正を受けて 2 次発散してしまう。[1] 。

これらの疑問に答える標準理論を超えた理論の土台になると思われているのが超対称性である。超対称性はボソンとフェルミオンの間の対称性である。フェルミオンが存在すればそれに対して必ずボソン (super partner) が存在し (逆もまた然り)、それらの自由度の数と質量は等しくなる。これによりフェルミオンがループをまわるグラフから生じていた Higgs ボソンの質量の 2 次発散が、そのフェルミオンに対応するボソンがループをまわるグラフと相殺して ln 発散に落ちる。これよりまず weak スケールの安定性の問題が解決できる。また、超対称性はカップリングの間にも関係をつける[2] ので自由なパラメータの数を減らすことができる[3] 。

標準理論を超える理論として大統一理論 (Grand Unified Theory , GUT) も 70 年代から注目を集めて来たが、これを超対称化した $SU(5)$ SUSY GUT [2] では GUT スケール ($\sim 10^{16}$GeV) でゲージカップリングが統一されることが判明した [3]。これにより超対称理論の現実味がいっそう高まった。

超対称性を持つ現実的な理論を構築するのにはいくつか制限がある。まず、SM のクォーク、レプトンと同じ質量を持つボソンは実験で見付かっていないので、現在我々が実験で到達できるエネルギースケールでは超対称性は破れていなくてはいけない。対称性の破れ方には explicit な破れと 自発的な破れがあるが、超対称性が explicit に破れている (つまり Lagrangian $\mathcal{L}$ の中に超対称性を破る次元を持たないパラメータが存在する) ならば、超対称性の利点である scalar mass の 2 次発散の相殺が起こらなくなってしまう。よって、超対称性は自発的に破れていなくてはな

[1] これは SM が Planck あるいは GUT スケールまで有効である、つまり cut off が Planck / GUT スケールであると仮定したときの話である。cut off が例えば TeV スケールならばこの問題はなくなる [1]。

[2] 例えば、Higgs ボソンの 4 点カップリングはゲージカップリングの 2 乗になる。

[3] SM が超対称性を持つように拡張した Minimal Supersymmetric Standard Model (MSSM) では実は superpartner を新たに導入したことによりかえってパラメータが増えてしまう。(100 個程度。) しかし、超対称性を dynamical に破り MSSM セクターに伝えるモデルではその数は大幅に減る。この論文のテーマである gauge-mediated susy breaking モデルでは たったの 5 個である。

らない。つまり、充分高いエネルギースケールでは $\mathcal{L}$ には exact な超対称性があるが、あるスケール以下ではそれを破る真空が選択されているとする。その結果、破れのスケールより下での effective Lagrangian $\mathcal{L}_{eff}$ には超対称性を破る次元を持ったパラメータが含まれることになる。(これらを soft パラメータ と呼ぶ。)

SM を超対称化したモデル (例えば MSSM) に超対称性の破れの効果を取り入れた effective 理論ではこの新しいパラメータに制限をつけないと実験的によく知られている制限 (例えば FCNC,CP の破れ) にすぐに引っかかってしまう。そこで、このパラメータの制限を自然に導くモデルが必要になった。

以上の経緯から、超対称性が自発的に破れるモデルが精力的に研究されてきた。超対称性の自発的破れは、tree level での破れと量子補正により起こる dynamical な破れがある。超対称性のある理論では、摂動論の範囲では superpotential の非くりこみ定理が成り立つので tree level で超対称性が破れないなら摂動の全ての次数で破れない。よって、dynamical な破れは非摂動効果によるものである。

tree level で超対称性が破れた場合、理論の作用 (action) に含まれるパラメータが破れのスケールを与えるので、これと fundamental スケールの関係を説明しなくてはならない。特に、超対称性の破れが electro-weak 対称性の破れを引き起こすモデルを考えると、これでは weak スケールが fundamental スケールよりずっと小さいことを説明できない。

一方、超対称性が dynamical に破れた場合は、破れのスケールが小さいことを説明できる可能性がある。そしてそれができれば weak スケールが小さいことも説明できる。まず、基本的なスケールが一つであり、それが Planck あるいは GUT スケールであるとする。超対称性が非摂動効果により dynamical に破れると、破れのスケールは $\Lambda \sim \exp(-\mathcal{O}(4\pi^2/g^2))M$、ただし $M \sim M_{Pl}$ あるいは M_{GUT} である。超対称性を破る相互作用の effective なカップリング g が小さければ $\Lambda \ll M$ となる。

それでは、歴史を振り返りながら現在の主流となっているモデルに到達するまでの流れをみてみよう。

超対称性を破る最も単純なモデルは、超対称性が tree level で破れるもの (O'Raifeartaigh [4], Fayet-Iliopoulos [5]) である。まず MSSM セクター内で FI モデルにより超対称性が破れうるかみてみよう。MSSM の $U(1)_Y$ が FI D-term を与えるとすると、superpotential の中に squark,slepton の質量項がないのでポテンシャルは (Wess-Zumino ゲージで)

$$V = \frac{1}{2}\left|\kappa - g' \sum_i \phi_i^* Y_i \phi_i\right|^2$$

となり、極小となるのは ある i に対して $\langle\phi_i\rangle \neq 0$ のときである。そして極小値はゼロである。つまり、この真空は超対称性を保ち、カラー $SU(3)_C$ を破る。ここで ϕ_i はスカラー場、Y_i はその $U(1)_Y$ 量子数、和は全てのスカラー場について取り、 κ は D term である。次に O'Raifeartaigh

モデルはどうであろうか。O'Raifeartaigh モデルは chiral superfield の線形項を含むので、ゲージ一重項が必要だが、MSSM ではそのような場は存在しない。仮にそれ (ϕ と書く) を導入したとしても、超対称性の破れのスケール $\sqrt{F}$ (の 2 乗) が ϕ の係数になるのでそれが fundamental スケールよりずっと小さいことを説明するためには新たなパラメータを導入するかパラメータの fine tuning をしなくてはならず、「自然な」モデルではない。超対称性の破れで electro-weak 対称性の破れを引き起こすモデルを考えると、超対称性の破れのスケールは weak スケールに比べてあまり大きくならず、結局ヒエラルキーを説明するという当初の目的が達成できなくなる。

また、超対称性が自発的に破れたときには

- tree level である
- supergravity の効果を無視する[4]

という条件下でいわゆる trace formula $\mathrm{STr}M^2 = 0$ が成立している。よって、MSSM セクターの中で tree レベルで超対称性を破ると SM フェルミオンよりも軽い super partner が存在してしまう。以上から、超対称性を MSSM セクター内で tree level で破るのは困難である。

次に、MSSM セクターの中で dynamical に超対称性が破れたとする。このとき trace formula の拘束がなくなるので軽い super partner の問題は解決できる可能性がある。しかし、dynamical な破れには強結合の dynamics が必要で、その候補である QCD が強結合になるスケールが低すぎるのでこの可能性も排除される。

そこで、weak スケールでは MSSM セクターとほとんどカップルしていないセクターを導入し、まずそこで超対称性が (tree で、あるいは dynamical に) 破れると考えられた。そして、その破れの効果が

1. supergravity の効果で MSSM セクターに伝わる
2. SM ゲージ相互作用で伝わる

とした。1. のモデルを gravity mediated susy breaking モデル あるいは hidden sector susy breaking (HSSB) モデル、2. のモデルを gauge mediated susy breaking (GMSB) モデルと呼ぶ。weak スケールの起源を説明できる点で、現在は超対称性が dynamical に破れているモデルが主流である。そこで超対称性が破れるセクターを以下では DSB (Dynamical Susy-Breaking) セクターと呼ぶことにする。歴史的には、DSB セクターと MSSM セクターを直接カップルさせるモデルは現象論的な困難があり、DSB セクターと MSSM セクターを直接カップルさせずもう一つ別のセクターをそれらの間に挟むモデルが最初に成功を納めた。このセクターを messenger セクターと呼ぶ。現在は、DSB セクターと MSSM セクターを直接カップルさせるモデル (direct mediation モデル) の中にも現象論的に許されるものがある。

[4] minimal supergravity モデル ($K_{ij} = \delta_{ij}$) では $\mathrm{STr}M^2 = 2(n_\phi - 1)m_{3/2}$ ($m_{3/2}$ は gravitino の質量) である。

この論文の主題は GMSB モデルが予言する物理を詳しく調べることである。GMSB では上に挙げた MSSM の多くの問題がきれいに解決できていることがこの修士論文で明らかになるであろう。

2 GMSB モデル - a first look

本論に入る前に GMSB モデルの性質と、それを構築する際の問題を概観しておく。

まず、GMSB の主な利点は以下の通りである：

1. soft パラメータを場の理論の手法で具体的に計算できる。
2. 量子重力理論、弦理論を援用しなくて済む。
   典型的な GMSB モデルでは 破れのスケールが $\sim 10^{10}$GeV で、M_{Pl} よりも充分小さいので確かに量子重力の効果を無視できる。
3. フリーパラメータの数が非常に小さい。
4. messenger スケールでの soft scalar mass が SM ゲージ量子数だけで決まる。

4. により、

- 新たな FCNC への寄与が生じない。
- 最も軽い super particle (LSP) が gravitino になる。

FCNC については第 6 章で説明する。LSP が gravitino であることは宇宙論的に大きな意味を持つ。これについては主に第 7 章で説明する。

GMSB の欠点は以下の通りである：

1. electro-weak 対称性の破れを起こすために、Higgs セクターのいわゆる μ パラメータの fine tuning をするか、新しいパラメータを導入しなければならない。
2. messenger quark の質量項を「手で」落さなくてはいけない。

1. は 'μ problem' と呼ばれている問題である。これについてはいくつか解決策が提案されているが、第 5 章でその一つを説明する。

最後に、GMSB モデルのエッセンスとモデル構築の問題を説明する。GMSB とは超対称性を別のセクターで破り、それを我々のセクターにゲージ相互作用を通して伝える機構であった。どのモデルにも共通なのは、MSSM のゲージ群の一重項 S と vector-like な $q, \overline{q}$ を含むセクターがあって、それらが

$$W_{mess} = \int d\theta \; Sq\overline{q} + h.c. \tag{2.1}$$

というカップリングをしていて、超対称性の破れにより effective に S の F term が真空期待値をもつことである。また、S のスカラー成分も期待値を持つ。

$$\langle S \rangle = M + \theta^2 F \qquad (M, F \neq 0) \tag{2.2}$$

すると、MSSM の gaugino は 1-loop で、MSSM の sfermion は 2-loop で soft mass を拾う。後で示すように gaugino と squark,slepton の質量は、$F \ll M^2$ の近似でそれぞれ

$$M_a = \frac{\alpha_a}{4\pi} N \frac{F}{M} \quad ; \; a = 1, \cdots, 3 \tag{2.3}$$

$$m_{\tilde{f}}^2 = 2N \frac{F^2}{M^2} \sum_a \left(\frac{\alpha_a}{4\pi} \right)^2 C_a^{\tilde{f}} \tag{2.4}$$

となる。ここで、$C_a^{\tilde{f}}$ は sfermion $\tilde{f}$ が従うゲージ群の表現の 2 次のカシミア、N は 基本表現に従う messenger quark $q, \overline{q}$ の数[5] である。

このとき、カラーを破らないためには $\langle q \rangle = \langle \overline{q} \rangle = 0$ が必要である。これより、gaugino と squark,slepton の質量は同じ程度の大きさとなり、また squark,slepton の質量がゲージ量子数だけで決まるので、新たな FCNC が現れないこともわかる。しかも、MSSM では 100 個以上あった フリーパラメーターが、わずか数個 (M,$\Lambda \equiv F/M$,$\arg \mu$,$\tan \beta$,N) にまで減っていて、極めて高い予言能力を持っていることもわかる。

現象論的には実に望ましいモデルであることがわかるが、(2.2) は単純に (2.1) の superpotential だけでは実現できない。実際、(2.1) から求めたポテンシャルは[6]

$$V = |q\overline{q}|^2 + |S\overline{q}|^2 + |Sq|^2 \tag{2.5}$$

であり、これより $\langle q \rangle = \langle \overline{q} \rangle = 0, \langle S \rangle \equiv M =$ 任意、となる。しかし、$F = -\partial W^* / \partial S^* = -(q\overline{q})^* = 0$ となり、超対称が破れていない。

単純な解決策として、何らかの dynamics により effective に (F term がゼロにならないように) 次のような superpotential が得られたと考えてみる：

$$W_{mess} = \Lambda^2 S + S q \overline{q} \tag{2.6}$$

ポテンシャルは

$$V = |\Lambda^2 + q\overline{q}|^2 + |S\overline{q}|^2 + |Sq|^2 \tag{2.7}$$

となる。しかし今度は $\langle S \rangle \equiv M = 0, \langle q\overline{q} \rangle = -\Lambda^2$ となってしまい、カラーが破れ、$M = 0$ となってしまう。従って、(2.2) のような真空期待値を dynamical に得るには、もっと巧みにモデルを作る必要がある。

[5] 正確には N は q_i,$\overline{q_i}$ が従う表現の Dynkin index の 2 倍 n_i の和 $\sum_i n_i$ である。q_i が $SU(N)$ の基本表現に従うならば $n_i = 1$、adjoint 表現に従うならば $n_i = 3$ である。N を messenger index と呼ぶこともある。

[6] この論文では特に断らない限り Kähler ポテンシャルは minimal である、つまり $K_{ij} = \delta_{ij}$ とする。

次の第 3 章では、DSB のメカニズムを説明する。具体的な GMSB モデルはその後、第 4 章で導入する。第 5 章は minimal GMSB モデルの現象論である。パラメータ M, F_S に対する制限は第 5、6、7 章で折に触れて取り上げる。GMSB では LSP が gravitino であることから、宇宙論から強い制限を受ける。これを第 7 章でみる。第 8 章は、現在進行中の研究の報告である。

3 超対称性の力学的破れ

この章では、超対称性の力学的破れ (Dynamical SUSY breaking,DSB) の基本的事項をまとめる。特に断らない限り、ゲージ群は $SU(N)$ とする。

DSB を起こす具体的なモデル (例えば (3,2)model, Izawa-Yanagida model) については、それらを用いて構成した GMSB モデルのところ (第 4 章) で説明する。DSB モデルの説明に SQCD (Supersymmetric Quantum Chromo Dynamics) の知識を使うので、SQCD についてもこの章で review しておく。

SQCD とは $SU(N_C)$ ゲージ multiplet(vector superfield) と $SU(N_C)$ の fundamental,anti-fundamental 表現をなす matter superfield Q_i^α , $\overline{Q}_{\alpha i}$ (クォーク、反クォークと呼ぶ) それぞれ N_F フレーバーからなる理論である[7] 。SQCD のグローバル対称性については appendix にまとめた。

3.1 Witten index

グローバルな超対称性のある理論ではスカラーポテンシャルが

$$V = \sum_i \left| \frac{\partial W}{\partial \phi_i} \right|^2 + \frac{1}{2} D^a D^a \tag{3.1}$$

で与えられる[8] 。ので、真空のエネルギーがゼロ以上であるという特徴がある[9] 。一方、超対称性の代数より[10]

$$[Q_\alpha \, , \, \overline{Q}_{\dot{\alpha}}]_+ = 2(\sigma_\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} P^\mu \tag{3.2}$$

だから Hamiltonian を H として

$$H = P^0 = \frac{1}{4}(Q_1\overline{Q}_1 + \overline{Q}_1 Q_1 + Q_2\overline{Q}_2 + \overline{Q}_2 Q_2) \tag{3.3}$$

であり[11] 、よって超対称性を保つ真空 $|0\rangle$

$$Q_\alpha |0\rangle = 0 \, , \, \overline{Q}_{\dot{\alpha}} |0\rangle = 0 \tag{3.4}$$

[7] α は $SU(N_C)$ のカラーの足、i は $SU(N_F)$ のフレーバーの足である。
[8] ここで W は superpotential、ϕ は chiral superfield のスカラー成分、D^a は D-term である。Kähler ポテンシャルは minimal ($K_{ij} = \delta_{ij}$) であるとした。
[9] ローカルな超対称性理論 (supergravity theory) では必ずしもそうでない。
[10] この節では Q , $\overline{Q}$ は超対称変換の generator であるとする。SQCD の (反) クォークではない。
[11] $P^\mu = (H,0,0,0)$ となる frame を選んだ。(3.8) でもそうした。

に対しては

$$\langle 0|\, H\, |0\rangle = 0 \tag{3.5}$$

である。逆に、超対称性を自発的に破る真空に対しては (3.3) より

$$\langle 0|\, H\, |0\rangle > 0 \tag{3.6}$$

である。これから、超対称性が自発的に破れるための必要十分条件は真空のエネルギーが正になることである。

超対称性の破れを判定するのに便利な量が Witten index である [8]。これは

$$\mathrm{Tr}(-)^F \equiv \sum_E [n_B(E) - n_F(E)] \tag{3.7}$$

で定義される。$n_B(E)(n_F(E))$ はエネルギー E のボソン (フェルミオン) 状態の数である。エネルギー E のボソン (フェルミオン) 状態を $|B\rangle(|F\rangle)$ とかくと、

$$Q\,|B\rangle = \sqrt{E}\,|F\rangle \ ,\ Q\,|F\rangle = \sqrt{E}\,|B\rangle \tag{3.8}$$

だから $E \neq 0$ のときは必ず $|B\rangle$ と $|F\rangle$ が対になっている。つまり $E \neq 0$ のときは $n_B(E) = n_F(E)$ である。よって、

$$\mathrm{Tr}(-)^F = n_B(E=0) - n_F(E=0)$$

である。

$\mathrm{Tr}(-)^F \neq 0$ ならば $n_B(E=0) \neq 0$ あるいは $n_F(E=0) \neq 0$ だから必ずゼロエネルギー状態が存在し、超対称性は破れていない。$\mathrm{Tr}(-)^F = 0$ のときは $n_B(E=0) = n_F(E=0) = 0$ ならば超対称性は破れるが $n_B(E=0) = n_F(E=0) \neq 0$ ならば破れない[12] 。

Witten index は離散的な量なので、理論のパラメータ (例えば質量、カップリング、系の体積) の連続変形で不変である [8] と思われて来た。しかし、これは場の真空期待値が大きい領域でのポテンシャルの振舞がパラメータの変形で変化しない場合の話であり、そうでないならば Witten index は変化しうる[13] 。パラメータの変形で Witten index が変化しないならば、理論のカップリングが弱くなるようにパラメータを変形して正しく index を計算することが可能である。

matter のないゲージ理論 (Yang-Mills 理論) での Witten index は計算されていて、$SU(N)$ 群の場合は $\mathrm{Tr}(-)^F) = T_G = N$ である [8]。これはゼロでないから Yang-Mills 理論では超対称性は破れない。

Yang-Mills 理論に massive vector-like matter を加えても Witten index は変わらない。それは、質量 $m \to \infty$ の極限で理論は Yang-Mills 理論に帰着し、かつこの極限でポテンシャルの漸

[12] $n_B(E=0) = n_F(E=0) \neq 0$ でかつ超対称性が破れない例が [8] にある。

[13] 例えば真空が無限遠に飛んでいく (つまり場の真空期待値が無限大になる) ことが起こり得る。このような真空を run-away vacuum と呼ぶ。逆に真空が無限遠から飛んでくることもあり得る。

近的振舞が変化しないからである。(vector-like matter の理論では全ての matter field に mass term を導入できるので連続変形するパラメータとして mass term を選ぶことができるが、chiral matter の理論ではこれは不可能である。) このため、vector-like matter の理論では超対称性は破れないと思われてきた。これは有限の質量を持つ vector-like matter に対しては正しい主張である。ところが、$m \to 0$ の極限では真空が run-away して $\mathrm{Tr}(-)^F = 0$ となり、超対称性が破れることがある [19, 20]。つまり、massless vector-like matter の理論では超対称性が破れ得る。

3.2 flat directions

超対称ゲージ理論の特徴は、超対称性のないときと違って、ゲージ変換で互いに移り合えない真空が「連続的に」存在することである[14] 。この意味は、ポテンシャル V をゲージ不変な composite field の真空期待値の関数とみたとき、$V = 0$ である点が連続的に存在しているということである。これらの点の集合は多くの場合「線」である。そこで、この線を flat direction と呼ぶ。

flat direction を記述する座標としては matter field の composite である互いに独立な chiral gauge invariants を用いるのが普通である。この手続きは次の定理により保証されている。

定理　　classical な真空の空間は複素化したゲージ群の作用で不変な真空期待値の空間と同相である。特に、matter field から構成した独立な chiral gauge invariants 全ての組がこの空間の自然な座標である [37]。

(3.1) から、真空の条件は classical には

$$\langle D^a \rangle = 0 \ , \ \langle F_i \rangle = 0 \qquad \text{for all } a, i \tag{3.9}$$

である。superpotential がないときは $\langle D^a \rangle = 0$ が条件である。これを D-flat 条件と呼ぶ。superpotential からくる F-term $\langle F_i \rangle$ がゼロである条件を F-flat 条件と呼ぶ。一般に、F-flat 条件を解くのは簡単だが、D-flat 条件を解くのは non-trivial である。そこで、(3.9) を解くときはまず D-flat な方向を求めて、さらにその中に F-flat な方向があるか探すのが常道である。

一般に、superpotential がないとき classical な D-flat 方向はたくさん存在する。superpotential を入れると、それらの多くが持ち上がる。もし全ての D-flat 方向が持ち上がったなら、次の 3.3 節で挙げる DSB の (条件 1) の条件が一つ充たされる。

classical な flat direction は量子論的にはどうなるだろうか。摂動論の範囲では superpotential の非くりこみ定理より不変である。しかし、非摂動効果によりそれらは持ち上がったり変形されたりする。超対称性が破れるためには真空のエネルギーがゼロでなくなることが必要十分だった

[14] 超対称性がないときのワインボトル型ポテンシャルの底の各点は unbroken $U(1)$ ゲージ変換で互いに移り合う。

ので flat direction が変化する dynamics の理解は本質的に重要である。以下の節でそのメカニズムを調べる。

3.3 DSB の一般的な条件

ここで、DSB が起こるための一般的な条件をあげる。これらはいずれも十分条件である。

1. classical なポテンシャルに non-compact な flat direction がない場合、アノマリーを持たない連続なグローバル対称性が自発的に破れているなら超対称性も自発的に破れている。

   証明： 連続なグローバル対称性の破れに付随して massless goldstone boson (real scalar 場) が存在する。グローバル対称性を破る multiplet を $\phi(x)$ 、破れた generator を X^a とすると goldstone 場 ξ^a は ϕ を

   $$\phi(x) = e^{iX^a\xi^a(x)}|\phi(x)| \tag{3.10}$$

   のように parametrize する。これから真空は $\langle\xi^a\rangle$ により

   $$\langle\phi\rangle = e^{iX^a\langle\xi^a\rangle}\langle|\phi|\rangle \tag{3.11}$$

   と記述される。超対称性が破れていないと仮定すると、この goldstone boson と対になって chiral multiplet のスカラー成分 (complex) となる massless real scalar 場 η^a が存在するはずである。これはグローバル対称性の群が複素化されることを意味する。この操作を行っても moduli 空間が不変であるのが本質的である。η^a は真空を

   $$\langle\phi\rangle = e^{iX^a\langle i\langle\eta^a\rangle\rangle}\langle|\phi|\rangle = e^{-X^a\langle\eta^a\rangle}\langle|\phi|\rangle \tag{3.12}$$

   と parametrize する。これは non-compact な flat direction がないという仮定に反する。よって、超対称性は破れている。

2. superpotential に含まれない場が少なくとも一つ存在し、さらに gaugino condensation がある ($\langle\mathrm{Tr}(W^\alpha W_\alpha)\rangle \neq 0$) なら超対称性は破れている。

   証明：Konishi カレント $\overline{Q}_f e^V Q_f$ のアノマリーは

   $$\overline{D}^2(\overline{Q}_f e^V Q_f) = 4Q_f\frac{\partial W}{\partial Q_f} + \frac{T(R_f)}{2\pi^2}\mathrm{Tr}W^2 \tag{3.13}$$

   である [9]。この式は全てのフレーバー f に対して成り立つ式である。(f について和は取っていない。) superpotential に含まれない場が少なくとも一つあるならば、その Q_f に対して $\overline{D}^2(\overline{Q}_f e^V Q_f) \propto \mathrm{Tr}W^2$ となる。この真空期待値は

   $$\langle 0|\,\overline{D}^2(\overline{Q}_f e^V Q_f)\,|0\rangle = \langle 0|\left\{\overline{Q}\,,\,\left\{\overline{Q}\,,\,Q_f^\dagger e^V Q_f\right\}\right\}|0\rangle \propto \langle 0|\,\mathrm{Tr}W^2\,|0\rangle \neq 0 \tag{3.14}$$

   となる。($\overline{Q}$ は supercharge。) よって、$\overline{Q}\,|0\rangle \neq 0$ で、超対称性が破れている。

(条件 1) のグローバル対称性は、現在知られている具体的な DSB モデルではほとんどの場合 non-anomalous $U(1)_R$ である。第 4 章で挙げる例もそうなっている。実は $U(1)_R$ と DSB の間には密接な関係があり、強結合のゲージ相互作用系を積分した後に一般の (minimal でない) Kähler ポテンシャルで記述される Wess-Zumino モデルに帰着するような理論では、superpotential が充分一般的ならば (例えば mass term しかないとか 3 点カップリングしかないなどを除く) R 対称性があることが DSB の必要条件であることが証明されている [10]。これを以下で示す。

n 個の chiral superfield ϕ_i $(i = 1, \cdots, n)$ からなる Wess-Zumino モデルを考える。gauge multiplet はないとする。超対称性が破れていないための条件は

$$\frac{\partial W}{\partial \phi_i} = 0 \qquad\qquad \text{for all } i$$

であるが、これは n 本の n 変数方程式なので superpotential W に対称性からの制限がなく一般的ならば必ず解がある。自発的に破れた R 対称性がある理論ではどうだろうか。R-charge r_i をもつ superfield ϕ_1 のスカラー成分が期待値 $\langle\phi_1\rangle$ (chiral superfield ϕ_1 のスカラー成分、以下 superfield とそのスカラー成分に同じ記号を使う) を持って R 対称性が自発的に破れたとする。superpotential W の R-charge は 2 なので、$(n-1)$ 個の R-charge ゼロの superfield [15]

$$\psi_i = \frac{\phi_i^{1/r_i}}{\phi_1^{1/r_1}} \qquad\qquad (i = 2, \cdots, n) \tag{3.15}$$

を用いて

$$W = \phi_1^{2/r_1} G(\psi_2, \cdots, \psi_n) \tag{3.16}$$

とかける。ここで r_i は ϕ_i の R-charge、G は ψ_i ($i = 2, \cdots, n$) の解析関数である。超対称性が破れていない条件は (3.16) から

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \phi_1} &= \frac{2}{r_1}\phi_1^{\frac{2}{r_1}-1} G(\psi) = 0 \\ \frac{\partial W}{\partial \psi_i} &= \phi_1^{\frac{2}{r_i}} \frac{\partial G}{\partial \psi_i} = 0 \qquad \text{for} \qquad i = 2, \cdots, n \end{aligned} \tag{3.17}$$

である。これから

$$\begin{aligned} G(\langle\psi_i\rangle) &= 0 \\ \left(\frac{\partial G}{\partial \psi_i}\right)_{\psi=\langle\psi\rangle} &= 0 \qquad \text{for} \qquad i = 2, \cdots, n \end{aligned} \tag{3.18}$$

である。これらは n 本の $(n-1)$ 変数方程式なので G が一般的ならば解はない。よって、(より詳しい解析が必要な Kähler メトリックの特異点以外では) 超対称性が破れているといえる。

自発的に破れるグローバル対称性が R 対称性でない場合、superpotential は $k(< n)$ 個の invariants χ_i $(i = 1, \cdots, k)$ の関数になるが、超対称性が破れない条件 $\partial W/\partial \chi_i = 0$ は k 本の k

[15] ϕ_i は superfield、ϕ_1 はスカラー成分である。

変数方程式だから対称性が破れていない (あるいは始めからない) ときと同様に解がある。逆に、superpotential が一般的で R 対称性がない場合、グローバル対称性が自発的に破れるとゼロエネルギーの flat direction が存在すると言える。

superpotential が一般的でない場合、例えば非摂動効果で生成された superpotential が対称性の制限を受けている場合には R 対称性がなくても超対称性が破れることがある。

超対称性が破れるのに、R 対称性の存在が必要条件であり、その R 対称性が破れていることが十分条件であることは O'Reafeartaigh モデルで確かめることができる。このモデルで超対称性が破れているのは周知の事実である。このモデルの superpotential は充分一般的で、R 対称性も存在する。また、non-compact な pseudo-flat direction、つまりエネルギーが一定の方向がある。pseudo-flat direction に沿って至るところで R 対称性が破れているので十分条件になっている。また、原点では R 対称性があるが、超対称性はそこで破れている。よって、必要条件にもなっている。

以上の経緯から、DSB モデルとして R 対称性が存在し、それが自発的に破れるモデルが研究の対象になってきた。ところが、現象論的には R 対称性の破れに伴う Nambu-Goldstone (NG) ボソン (一般に R-axion と呼ばれる) の存在が問題を引き起こす。R 対称性が exact ならば R-axion は massless である。ところが、gluino が R charge 1 を持っていることから R-axion と QCD アノマリーがカップルしていて、いわゆる axion と同様にその質量は astro-physics と宇宙論から

$$10^{10}\mathrm{GeV} \lesssim m_{axion} \lesssim 10^{12}\mathrm{GeV} \tag{3.19}$$

の範囲にあるという制限がつくので、massless では困る。この問題は超対称性を回復しないくらい小さいが R-axion に (3.19) の範囲の質量を与えるような R 対称性を explicit に破る項を理論に加えることで解決できる [10]。

3.4 SQCD

3.4.1 $N_F = 0$

$N_F = 0$ は、クォーク、反クォークがない理論である。理論に現れる粒子はゲージボソンと gaugino (adjoint 表現に従うフェルミオン) だけである。$\mathcal{L}$ は

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{8g^2}\int d^2\theta\ \mathrm{Tr}W^\alpha W_\alpha + h.c. \\ &= \frac{1}{g^2}\left(-\frac{1}{4}F^{a\mu\nu}F^a_{\mu\nu} + i\lambda^a\,\sigma\cdot\mathcal{D}\,\overline{\lambda}^a\right) \end{aligned} \tag{3.20}$$

である[16] 。tree level でこの $\mathcal{L}$ には $\lambda \to e^{-i\alpha}\lambda$ のカイラル対称性がある。これは $W(x_L,\theta) \to e^{-i\alpha}W(x_L, e^{i\alpha}\theta)$ あるいは $V(x,\theta,\overline{\theta}) \to V(x, e^{i\alpha}\theta, e^{-i\alpha}\overline{\theta})$ の R 対称性ともみなせる。この対称性の保存カレントは

$$R_\mu = \frac{1}{2}(\sigma_\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} R^{\alpha\dot{\alpha}} = -\frac{1}{g^2}\lambda^a \sigma_\mu \overline{\lambda}^a \tag{3.21}$$

である。この R 対称性は 1-loop でアノマリーを持つ[17] ：

$$\partial_\mu R^\mu = \frac{T_G}{16\pi^2} F^a_{\mu\nu} \tilde{F}^{a\,\mu\nu} \tag{3.22}$$

しかし、(3.22) の右辺は実は Chern-Simons カレント

$$K^\mu = 4\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{Tr}\left[A_\nu \partial_\rho A_\sigma - \frac{i}{3}A_\nu (A_\rho A_\sigma)\right] \tag{3.23}$$

の total derivative で

$$\partial_\mu R^\mu = \frac{T_G}{16\pi^2}\partial^\mu K_\mu \tag{3.24}$$

と書けているので、

$$\tilde{R}_\mu \equiv R_\mu - \frac{T_G}{16\pi^2} \tag{3.25}$$

と定義し直すと (見かけ上ゲージ不変でなくなるが) anomaly free になる。よって、摂動の全ての次数で non-anomalous U(1) が存在する。

しかし、非摂動効果を考えると 1-インスタントンによりまず $U(1)$ が $\mathbf{Z}_{2N_C}$ に破れる[18] 。さらに、gaugino condensation により $\mathbf{Z}_{2N_C} \to \mathbf{Z}_2$ に破れる。この事情をみるためにまず chiral superfield のスカラー成分の相関関数が (θ 座標のみならず) 時空座標 x にも依らないことを確かめる。chiral superfield

$$\Phi_i = \phi_i + \theta^\alpha \psi_{i\alpha} + \theta^2 F_i \tag{3.26}$$

のスカラー成分 ϕ の相関関数は

$$G(x_1, \cdots, x_k) = \langle 0|\, \mathrm{T}\left[\phi_1(x_1)\cdots\phi_k(x_k)\right]|0\rangle \tag{3.27}$$

---

[16] superfield の convention は V = -$2\theta\sigma^\mu\overline{\theta}v_\mu$+$2i\theta^2(\overline{\theta}\lambda)$-$2i\overline{\theta}^2(\theta\lambda)$ + $\theta^2\overline{\theta}^2 D$ (Wess-Bagger の V の 2 倍)、$W_\alpha \equiv \frac{1}{8}\overline{D}^2\,(e^{-V}D_\alpha e^V) = i(\lambda_\alpha + i\theta_\alpha D - \theta^\beta G_{\alpha\beta} - i\theta^2 D_{\alpha\dot{\alpha}}\overline{\lambda}^{\dot{\alpha}})$ である。

[17] この式で $\mathrm{Tr}(T^a T^b) = T(R)\delta^{ab}$ 、$T(R)$ はフェルミオンのなす表現の dual Coxeter number (Dynkin index の半分) である。特に $SU(N)$ では $T(\text{adjoint}) \equiv T_G = N$, $T(\text{fundamental}) = \frac{1}{2}$ である。

[18] winding number 1 のインスタントン上では R 変換に対し

$$\delta S = \int d^4x\, \delta\mathcal{L} = \int d^4x\, \frac{T_G}{16\pi^2} F^a \tilde{F}^a \times \alpha = 2T_G\alpha$$

であるが、e^{iS} が不変になるためにはこれが $2\pi\mathbf{Z}$ でなくてはいけない。よって、

$$\alpha = \frac{\pi}{T_G}k \qquad (k = 1, \cdots, 2T_G)$$

である。

超対称性の代数より

$$[\overline{Q}_{\dot{\alpha}}\ ,\ \phi_i] = 0\ ,\ \{\overline{Q}_{\dot{\alpha}}\ ,\ \psi_{i\alpha}\} = i\sqrt{2}(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu\phi_i \tag{3.28}$$

だから $|0\rangle$ が超対称性を保つ ((3.4) を充たす) として

$$i\sqrt{2}(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial x_i^\mu}G(x_1,\cdots,x_k) = \langle 0|\,\phi_1(x_1)\cdots\{\overline{Q}_{\dot{\alpha}}\ ,\ \psi_{i\alpha}\}\cdots\phi_k(x_k)\,|0\rangle = 0 \tag{3.29}$$

となる。TrWW は chiral superfield だからそのスカラー成分 Tr$\lambda\lambda$ に対してこの事実が当てはまる。つまり Tr$\lambda\lambda$ の相関関数は x によらない。これと、gluino ゼロモードが $2N_C$ 個あることから

$$\langle 0|\,\mathrm{Tr}\lambda\lambda(x_1)\cdots\mathrm{Tr}\lambda\lambda(x_{N_C})\,|0\rangle \propto \Lambda^{3N_C}e^{i\theta} \tag{3.30}$$

となる。ここで Λ は $SU(N_C)$ が強結合になるスケール、θ は θ 真空のパラメータである。x_i をお互いに充分離してやると、cluster decomposition の原理から (3.30) は $\langle\mathrm{Tr}\lambda\lambda\rangle$ の N_C 乗になる。よって

$$\langle\mathrm{Tr}\lambda\lambda\rangle_k \propto \Lambda^3\exp\left(\frac{2\pi ik}{N_C}+i\frac{\theta}{N_C}\right)\ \ ;\ k=1,\cdots,N_C \tag{3.31}$$

のように N_C 個の超対称性を保つ真空が存在する。これは Witten index の結果 $\mathrm{Tr}(-)^F = T_G = N_C$ と一致している。これらの真空は、$\mathbf{Z}_{2N_C}$ 変換 $\lambda \to e^{-in\pi/N_C}\lambda$, $n=1,\cdots,2N_C$ のうち $n = N_C, 2N_C$ に対してのみ不変である。よって、対称性は $\mathbf{Z}_{2N_C} \to \mathbf{Z}_2$ に破れている。

3.4.2 $0 < N_F < N_C$

以下では matter を導入する。3.2 節で述べたように、matter field の複合演算子である互いに独立な chiral gauge invariants 全ての組が flat direction を記述する座標になる。

クォークの質量はゼロとする。このとき理論にある non-anomalous グローバル対称性は $SU(N_F)_L\times SU(N_F)_R\times U(1)_B\times U(1)_R$ である。$U(1)_R$ は anomalous である二つの $U(1)$、つまり $U(1)_A$ と $U(1)_X$(元々理論にあった R 対称性) の線形結合で、anomaly を持たないものである。このグローバル対称性に対する $W, Q, \overline{Q}$ の量子数は appendix に載せる。

$0 < N_F < N_C$ の場合、chiral gauge invariant は次の meson field だけである：

$$M_{ij} = Q_i^\alpha\overline{Q}_{\alpha\, j} \tag{3.32}$$

α はカラーの足、i,j はフレーバーの足である。これら N_F^2 個は全て互いに独立である。ゲージ対称性と non-anomalous グローバル対称性 をともに充たす superpotential は、比例定数を除いて一意に形が決まる：

$$W_{eff} = c\left(\frac{\Lambda^{3N_C-N_F}}{\det M}\right)^{\frac{1}{N_C-N_F}} \tag{3.33}$$

これは次の考察からすぐにわかる。M_{ij} はそれ自体 $U(1)_B$ 不変である。$SU(N_F)_L \times SU(N_F)_R$ で不変なのは $\det M_{ij}$ である。$\det M$ の R charge は $Q, \overline{Q}$ の R charge がそれぞれ $(1 - N_C/N_F)$ なので $2(N_F - N_C)$ である。これを 2 にするには $\det M$ を $\frac{1}{N_F - N_C}$ 乗すればよい。最後に、次元勘定から 理論のスケール ($SU(N_C)$ が強結合になるスケール) Λ のベキが決まる。

これから得られるポテンシャルは、$\langle Q \rangle, \left\langle \overline{Q} \right\rangle$ が無限遠点になるいわゆる run-away 型である。これから全ての classical flat direction が持ち上がることがわかる。(3.33) が実際どのように生成されるかは、N_F の値に依存する。

1. $N_F = N_C - 1$
   この場合、1-インスタントン効果による [11]。
2. $N_F < N_C - 1$
   この場合、低エネルギーでの gaugino condensation による [11]。

また、(3.33) より 真空が原点ではないのでグローバル対称性は破れる。よって、3.3 節の (条件 1) から、classical に non-compact flat direction がなければ超対称性が破れる。

3.4.3 $N_F = N_C$

$N_F \geq N_C$ の場合、flat direction の座標となる chiral gauge invariants としては、今度は meson (3.32) の他に baryon (anti-baryon) field がある：

$$\begin{aligned} B^{i_{N_C+1} \cdots i_{N_F}} &= \epsilon^{i_1 \cdots i_{N_F}} \epsilon_{\alpha_1 \cdots \alpha_{N_C}} Q^{\alpha_1}_{i_1} \cdots Q^{\alpha_{N_C}}_{i_{N_C}} \\ \overline{B}^{i_{N_C+1} \cdots i_{N_F}} &= \epsilon^{i_1 \cdots i_{N_F}} \epsilon^{\alpha_1 \cdots \alpha_{N_C}} \overline{Q}_{i_1\, \alpha_1} \cdots \overline{Q}_{i_{N_C}\, \alpha_{N_C}} \end{aligned} \tag{3.34}$$

$N_F = N_C$ では $B, \overline{B}$ は一つずつしかない。$Q, \overline{Q}$ が互いに交換する bosonic な場であることから、(3.32) と (3.34) は、次の constraint を充たす：

$$B\overline{B} - \det(M_{ij}) = 0 \tag{3.35}$$

その結果、(3.32) と (3.34) のうち $N_C + 1$ 個だけが独立である。

今度は、ゲージ対称性と non-anomalous グローバル対称性を全て充たす superpotential が存在しない[19] ので、W_{eff} が生成されることはない。しかし、instanton 効果を考えると、(3.35) の constraint は変形される。その様子ををみるために、superpotential に source を入れて、そのパラメータをゼロにする極限を調べる。

$$W_{source} = \mathrm{Tr}(mM) + bB + \overline{b}\,\overline{B} \tag{3.36}$$

[19] B, $\overline{B}$, M の R-charge が全てゼロであるから。

$m, b, \overline{b}$ がパラメータである。インスタントン計算の結果によると、真空期待値は次のようになる：

$$\begin{aligned} \langle M_{ij} \rangle &= \Lambda^2 (\det\ m_{ij})^{\frac{1}{N_C}} (m^{-1})_{ij} \\ \langle B \rangle &= \left\langle \overline{B} \right\rangle = 0 \end{aligned} \tag{3.37}$$

これらは、(3.35) ではなく、次の変形された constraint (quantum modified constraint と呼ぶ) を充たす：

$$B\overline{B} - \det(M_{ij}) = \Lambda^{2N_C} \tag{3.38}$$

これから、原点は quantum moduli space に含まれていない。よって、やはり (条件 1) から classical に non-compact flat direction がなければ超対称性が破れる。

以上の結果は Langrange multiplier field X を用いて effective superpotential で表現できる：

$$W_{eff} = X(B\overline{B} - \det(M_{ij}) - \Lambda^{2N_C}) \tag{3.39}$$

3.4.4 $N_F = N_C + 1$

このときは $B, \overline{B}$ は N_F 個ずつ存在する。(3.35) に相当する classical な constraint は

$$\begin{aligned} B_i \overline{B}_j - (\det M)(M^{-1})_{ij} &= 0 \\ B_i M_{ij} \ = \ M_{ij} \overline{B}_j &= 0 \end{aligned} \tag{3.40}$$

である。全てのグローバル対称性を充たす superpotential は存在して、

$$W_{eff} = \frac{1}{\Lambda^{2N_F - 3}} (B_i M_{ij} \overline{B}_j - \det M) \tag{3.41}$$

である。(3.41) からポテンシャル極小条件を求めると丁度 (3.40) になっている。

$N_F = N_C$ のときと異なるのは classical な constraint が量子論的にも成り立つことである。この事情を、$N_F = N_C$ のときと同じ方法で確かめてみる。まず、source を加える：

$$W_{source} = \mathrm{Tr}(mM) + b_i B_i + \overline{b}_j \overline{B}_j \tag{3.42}$$

すると真空期待値は今度は

$$(\det M)(M^{-1})_{ij} - B_i \overline{B}_j = \Lambda^{2N_C - 1} m_{ij} \tag{3.43}$$

をみたす。これは $m \to 0$ の極限で classical constraint と一致している。よって、classical な特異点 $\langle B \rangle = \left\langle \overline{B} \right\rangle = 0\ ,\ \det \langle M \rangle = 0$ は量子論でも存在する。しかし、その意味が異なっている。一般に、このような特異点は新たな massless 粒子の存在を示唆しているが、classical にはそれは明らかに

ゲージ場であるのに対し、量子論的にはゲージ場ではあり得ない[20] 。点 $\langle B\rangle = \left\langle \overline{B} \right\rangle = \langle M_{ij}\rangle = 0$ のまわりでは全てのグローバル対称性が保たれているのでこの点では $B, \overline{B}, M_{ij}$ すべて が massless と期待できる。実際、これら全てが massless で独立だとすると 't Hooft anomaly matching 条件を充たしている。(このことは appendix に詳しく書いた。) よって、この理論ではグローバル対称性が破れておらず、(条件 1) による DSB は起こらないと考えられる。

$N_F = N_C + 1$ の理論から matter field を一つ decouple させることで $N_F = N_C$ の理論を得ることができる。(3.41) に $mM_{1\,1}$ を付け加えて $Q_1^\alpha, \overline{Q}_{\alpha\,1}$ を積分すると、M_{11} の運動方程式から $N_F = N_C$ のときの constraint (3.38) が導かれる。

3.4.5 $N_F > N_C + 1$

$N_F > 3N_C$ では理論は漸近的自由でなくなり、IR(Infra Red) 領域で クォーク、反クォークの free 理論になる。興味があるのは $N_C + 1 < N_F < 3N_C$ の範囲である。

この場合も $B, \overline{B}, M$ が充たす classical constraint は (3.40) と同様であり、また量子論的にこれが成り立つことも同様である。しかし、今度は 't Hooft anomaly matching 条件が充たされない。また、$N_F = N_C + 1$ では存在していたグローバル対称性を充たす superpotential (3.41) も存在しない。(R 対称性を充たさない。)

そこで考えられたのが dulality である。これは $N_C + 1 < N_F < 3N_C$ の範囲で IR 領域を記述するのによい変数が元の変数 (クォーク、反クォーク) と dual な関係にあるものであるという conjecture である [41]。

元の理論 (ここでは electric theory と呼ぶ) はゲージ群 $SU(N_C)$、matter は $Q_i^\alpha, \overline{Q}_{\alpha\,i}$ であった。これに対しゲージ群 $SU(N_F - N_C)$、matter が $\mathcal{Q}_i^\alpha$, $\overline{\mathcal{Q}}_{\alpha\,j}$, $\mathcal{M}_{ij}$ である理論 (magnetic theory と呼ぶ) を定義する。この理論での superpotential を

$$W_{mag} = \lambda\, \mathcal{Q}_i \mathcal{M}_{ij} \overline{\mathcal{Q}}_j \tag{3.44}$$

とすると magnetic 理論と electric 理論のグローバル対称性は同じになる。この二つの理論は anomaly matching を充たしている。$N_F \geq 3N_C$ では electric theory が IR 領域で free 理論になるので理論を electric theory で記述するのがよい。一方、$N_F \geq 3(N_F - N_C)$ (i.e. $N_F \geq 3N_C/2$) では逆に magnetic theory が IR 領域で free 理論になるので、理論を magnetic theory で記述するのがよい。

最後に $3N_C/2 < N_F < 3N_C$ の場合を考える。SQCD では、β 関数が厳密に求まる [38] :

$$\beta(\alpha) \;=\; -\frac{\alpha^2}{2\pi}\frac{3T_G - \sum_i T(R_i)(1-\gamma_i)}{1 - \alpha T_G/2\pi} \tag{3.45}$$

[20] 量子論的には非摂動的な dynamics なのでカラーを持っていてはいけない。

$$\gamma_i(\alpha) \quad = \quad -\frac{\alpha}{2}\frac{N_C^2-1}{N_C} + \mathcal{O}(\alpha^2) \tag{3.46}$$

これから、$N_F = (3-\epsilon)N_C$ の範囲では electric theory が漸近的自由となり IR 領域に non-trivial fixed point を持つ、つまり $\beta(\alpha_*) = 0\,, \alpha_* \neq 0$ となる α_* が存在する [40] ことがわかる。このとき、energy-momentum tensor の trace がゼロとなり、理論は conformal 対称性を持つ。一方、$N_F = (3/2+\epsilon)N_C$ では magnetic theory が non-trivial fixed point を持ち、conformal 対称性を持つ。これらから、$3N_C/2 < N_F < 3N_C$ の範囲では IR の領域で理論が superconformal 対称性を持つと考えられる [41]。これもいくつかの状況証拠に支えられている。

4 具体的なモデル

歴史的には最初の具体的な GMSB モデルは [12] であった。このモデルをはじめ、初期に提案されたモデルには次に挙げる問題があった：

1. MSSM のゲージカップリングが摂動論的に統一しない。統一する前に $SU(3)_C$ が漸近的自由でなくなり、発散してしまう。
2. 超対称性の破れを引き起こす non-anomalous $U(1)_R$ 対称性の自発的破れに伴って massless Goldstone ボソン (R-axion と呼ぶ) が生じてしまう。

まず 1. についてみてみる。一般に DSB モデルには anomaly-free で自発的に破れないグローバル対称性が存在する。その群を G_F とかく。GMSB の基本的なアイディアは、G_F が $SU(5)$ もしくは $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ を含むようなモデルを考え、G_F の部分群である $SU(5)$ や $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ を「弱く」ゲージ化し、超対称性の破れを MSSM セクターに伝えるというものであった[21] 。このとき、ゲージカップリングの統一を保つために messenger の役割を担う場は $SU(5)$ の complete multiplet であるとする。vector-like quark,lepton が DSB を起こすゲージ群 G_{DSB} の量子数を持つことは、例えばそれらが従う表現の次元を d とすると標準模型セクターから見るとそれらが d ファミリーあることになる。しかも、超対称性を破りかつ GUT の $SU(5)$ か MSSM の $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ を含むようなモデルでは DSB を起こすゲージ群 G_{DSB} は大きくなるので d も大きい。従って、messenger が軽いと $SU(3)_C$ が漸近的自由でなくなるスケールが低くなりすぎて、カップリングが統一する前にくりこみ群で発散してしまう。例えば、DSB セクターが SU(5) で、messenger スケールが $M \lesssim 10^8\,\mathrm{GeV}$ の場合、$5+\overline{5}$ messenger は 4 個以下 ($10+\overline{10}$ ならば 1 個以下) でなければいけない。

2. は、3.3 節で見た通り [10] 等で解決されている。

[21] 真空のエネルギーはゲージカップリングの連続関数のはずだからゲージ化した G_F のカップリングを充分小さくしておけば超対称性は破れたままである。

このような問題があるにもかかわらず、その後それらを巧みに回避する具体的なモデルが多数考案されて来た。それらは DSB セクターと MSSM セクターのつなぎ方によっていくつかのタイプに分類できる。この章では代表的ないくつかのタイプのモデルを取り上げてそれらの予言する物理をみてみる。

ここで、どのようなモデルが「望ましい」と考えられてきたかをまとめておく。

- ゲージカップリングが摂動論的に Planck スケールより手前で統一する。
- 超対称性を破り、標準理論の $SU(3) \times U(1)$ ゲージ群を破らない真空がグローバルな真空である。
- 次元を持つパラメータを explicit には含まない。

4.1 ゲージタイプ

DSB セクター と messenger セクター を分離し、二つのセクターを (標準理論の) ゲージ相互作用でつなぐ。Superpotential を通したくりこみ可能なカップリングは考えない。(これは後で述べる Yukawa 型である。)

DSB sector にどのモデルを使うかで分類できるが、ここでは (3,2)model を使ったもの [18] と Izawa-Yanagida(以下 IY) model を使ったもの [21] を考える。

4.1.1 (3,2)model 型

まず始めに (3,2)model を説明する。ゲージ群は $SU(3) \times SU(2)$ 、matter content は

$$Q^{a\alpha}(3,2),\ q_{fa}(\overline{3},1),\ L^{\alpha}(1,2) \tag{4.1}$$

である。a は $SU(3)$ の足、α は $SU(2)$ の足、$f(=1,2)$ はフレーバーの足である。$SU(2)$ 二重項が偶数個 (2 個) 含まれているので global anomaly はない。ゲージ対称性、global $U(1)_R$ 対称性[22] に加えて、次のグローバル $U(1)$ 対称性を課す：

$$Q(1/3),\ q_1(2/3),\ q_2(-4/3),\ L(-1) \tag{4.2}$$

括弧内の数字はこの U(1) 対称性の量子数である。これら全てを充たすくりこみ可能な superpotential は、

$$W = y\ Q^{a\alpha} q_{1\,a} L^{\beta} \epsilon_{\alpha\beta} \tag{4.3}$$

[22] これが自発的に破れることで超対称性が破れることを以下でみる。

だけである。質量項は許されないので、これは chiral なモデルである。flat direction を記述する gauge invariants は

$$I_f = Q^{a\alpha} q_{a\,f} L^{\beta} \epsilon_{\alpha\beta} \qquad (f = 1, 2)\,, \tag{4.4}$$

$$J = (Q^{a\alpha} q_{af})(Q^{b\beta} q_{bg}) \epsilon_{\alpha\beta} \epsilon^{fg} \equiv \det(Qq) \tag{4.5}$$

である。これから、(4.3) の superpotential がないとき ($y = 0$)、moduli 空間の複素次元は 3 である。$y \neq 0$ とすると、flat direction は全て持ち上がって真空は原点になる。実際、真空の条件は

$$\frac{\partial W}{\partial q_{1a}} = k Q^a L = 0 \tag{4.6}$$

$$\frac{\partial W}{\partial L^{\alpha}} = k Q^{\alpha} q_1 = 0 \tag{4.7}$$

だが、(4.6) に $q_{a\,f}$ をかけると $I_f = 0$ 、(4.7) に $\epsilon_{\alpha\beta} Q^{\beta} q_2$ をかけると $J = 0$ となる。global $U(1)_R$ は $U(1)_R$ 量子数を持つ場がゼロでない真空期待値を得ると破れる。instanton 効果により生成される superpotential を考えると実際にそうなることを次にみる。

$g_3 \gg g_2$ の場合、$SU(3)$ instanton の効果だけを考えれば良い。$SU(3)$ の表現は、fundamental 表現が Q から 2 個,anti-fundamental 表現が q から 2 個 であり、vector-like には 2 個存在する。したがって、これは $N_F = N_C - 1$ の場合であり、次の superpotential が 1 instanton 効果で生成される：

$$W_{1-inst} = \frac{\Lambda_3^7}{J} \tag{4.8}$$

$g_3 \ll g_2$ の場合、$SU(2)$ instanton の効果だけを考えれば良い。$SU(2)$ の表現は、fundamental(anti-fundamental) 表現が Q から 3 個, L から 1 個 であり、vector-like には 2 個存在する。したがって、これは $N_F = N_C$ の場合であり、classical な constraint

$$Z \equiv \epsilon_{abc} \epsilon_{\alpha\beta} \epsilon_{\gamma\delta} Q^{a\alpha} Q^{b\beta} Q^{c\gamma} L^{\delta} = 0 \tag{4.9}$$

が量子論的に変形され、次のようになる：

$$Z = \Lambda_2^4 \tag{4.10}$$

以上を合わせると、superpotential は一般に

$$W = y I_1 + \frac{\Lambda_3^7}{J} + X(Z - \Lambda_2^4) \tag{4.11}$$

となる。X は Lagrange multiplier である。(4.11) から、原点は真空になり得ないことがわかる。よって、ゼロでない真空期待値をもつ場が存在し、$U(1)_R$ が破れるので、超対称性が破れる。

さて、次に DSB セクター (上の (3,2)model) で破れた超対称性がどのように messenger に伝わり、一重項 S が (2.2) の期待値を得るのかをみる。DSB セクターのグローバル対称性をゲージ化し、messenger セクターの場にもこのゲージ量子数を持たせてこの二つのセクターをつなぎたい。上で導入した global $U(1)$ は、実は (4.2) より anomalous なのでゲージ化できない[23] 。そこで、$SU(3) \times SU(2)$ 量子数を持たない場 Z(+2) を導入して[24] anomaly free にする。この $U(1)$ を $U(1)_m$ と呼ぶことにする。

messenger の場には $U(1)_m$ 量子数を次のように割り当てる[25] :

$$E(+1),\ \overline{E}(-1),\ S(0),\ q(0),\ \overline{q}(0),\ l(0),\ \overline{l}(0) \tag{4.12}$$

ここで E, $\overline{E}$, S は MSSM の一重項である。messenger quark,lepton q, $\overline{q}$, l, $\overline{l}$ の MSSM ゲージ群の量子数は

$$q(\mathbf{3},1)_{-2/3},\ \overline{q}(\overline{\mathbf{3}},1)_{2/3},\ l(1,\mathbf{2})_1,\ \overline{l}(1,\mathbf{2})_{-1} \tag{4.13}$$

である。messenger の superpotential は

$$W_{mess} = \lambda_1 E\overline{E}S + \frac{\lambda_2}{2}ZE\overline{E} + \frac{\lambda_3}{3}S^3 + k_1 Sq\overline{q} + k_2 l\overline{l} \tag{4.14}$$

とする。これは DSB セクターも含めた完全な superpotential ではないことに注意する。DSB セクターと messenger セクターの matter content を整理すると次の表 1 のようになる。

表 1: (3,2) モデルに基づく GMSB モデルの field content

	field	$SU(3) \times SU(2)$	$U(1)_m$
DSB sector	$Q^{a\alpha}$	$(\mathbf{3},\ \mathbf{2})$	$\frac{1}{3}$
	$q_{1\,a}$	$(\overline{\mathbf{3}},\ 1)$	$\frac{2}{3}$
	$q_{2\,a}$	$(\overline{\mathbf{3}},\ 1)$	$-\frac{4}{3}$
	L^{α}	$(1,\ \mathbf{2})$	-1
	Z	$(1,\ 1)$	2
messenger	E	$(1,\ 1)$	1
	$\overline{E}$	$(1,\ 1)$	-1
	S	$(1,\ 1)$	0
	$q, \overline{q}$	$(1,\ 1)$	0
	$l, \overline{l}$	$(1,\ 1)$	0

(4.15)

[23] $\sum[U(1)\text{charges}] = \frac{1}{3}\times 3\times 2 + \frac{2}{3}\times 3 + (-\frac{4}{3})\times 3 + (-1)\times 2 = -2 \neq 0$ なので gravitational アノマリーを持つ。
[24] DSB セクターの 超対称性を破る dynamics を変えてしまわないため。
[25] もちろん、これらは $SU(3) \times SU(2)$ 量子数を持っていない。

簡単のため、$g_3 \gg g_2$ とする。すると、DSB セクターの superpotential は

$$W = yI_1 + \frac{\Lambda_3^7}{J} \tag{4.16}$$

である。これから、DSB セクターのスカラー場の質量は $m_s \sim yv$、ベクトル場の質量は $m_v \sim g_3 v$ $(v \sim \Lambda_3/y^{1/7})$ となる。DSB セクターの粒子がループをまわるグラフの $U(1)_m$ D-term への寄与は、1-loop で

$$\langle D \rangle = \frac{\alpha_m}{4\pi} \sum_s m_s^2 \ln\left(\frac{m_v^2}{m_s^2}\right) \tag{4.17}$$

となる。よって、ポテンシャルは、1-loop で

$$V = \sum_\phi \left|\frac{\partial W}{\partial \phi}\right|^2 + 2\pi\alpha_m(\langle D\rangle + 2|Z|^2 + |E|^2 - |\overline{E}|^2)^2 + m_E^2(4|Z|^2 + |E|^2 + |\overline{E}|^2) \tag{4.18}$$

である。ここで、α_m は $U(1)_m$ のゲージカップリングを g_m として $\frac{g_m^2}{4\pi}$ である。$\lambda_1 \ll \alpha_m$ のとき、m_E^2, m_Z^2 は

$$m_E^2 = -\frac{2\alpha_m^2}{\pi^2} \sum_s m_s^2 \ln\left(\frac{m_v^2}{m_s^2}\right) \tag{4.19}$$

$$m_Z^2 = 4m_E^2 \tag{4.20}$$

で与えられる。これより、真空は数値的に

$$\begin{aligned}
\langle Z \rangle &= 1.27 \times \sqrt{\langle D \rangle}, \\
\langle E \rangle &= 1.40 \times \sqrt{\langle D \rangle}, \\
\left\langle \overline{E} \right\rangle &= -2.44 \times \sqrt{\langle D \rangle}, \\
\langle S \rangle &= 1.28 \times \sqrt{\langle D \rangle}, \\
\langle F_S \rangle &= -0.188 \times \langle D \rangle \,.
\end{aligned}$$

となる [18]。よって、欲しい形の期待値 (2.2) が得られた。

effective な messenger スケールは

$$\Lambda_{mess} \equiv \frac{|\,\langle F_S\rangle\,|}{\langle S \rangle} \simeq \frac{0.188}{1.28}\sqrt{|\,\langle D\rangle\,|} \tag{4.21}$$

である。MSSM の gaugino,sfermion の質量が weak スケール程度になるためには $\Lambda_{mess} \sim 10^{4-5}$ GeV でなくてはならない。$y \sim \mathcal{O}(1)$, $v \sim \Lambda_3/y^{1/7} \sim \Lambda_3$, $\alpha_m \sim 10^{-2}$ とすると (4.21) より

$$\Lambda_3 \simeq 2 \times 10^{6-7} \text{ GeV} \tag{4.22}$$

となる。これから gravitino の質量は

$$m_{3/2} = \frac{F_{DSB}}{\sqrt{3}M_{Pl}^*} \simeq \frac{1}{4} \times \frac{\Lambda_3^2}{10^{18}}\ \mathrm{GeV} \sim (1\ -\ 100)\ \mathrm{keV} \tag{4.23}$$

である。ここで、$F_{DSB} \sim \Lambda_3^2$ とした。

(3,2)model により超対称性のやぶれを MSSM セクターに伝えることができたが、このモデルには困難がいくつか存在する。

1. meta-stable vacuum
   DSB セクターも含めた完全なポテンシャルを考えると、上で求めた真空は実は local で、global な真空では超対称性が回復していて MSSM の $\mathrm{SU}(3)_C\ times\ \mathrm{U}(1)$ が破れていることがわかる [25],[28]。解決策としては、messenger の質量項を「手で」入れる $(10^5 - 10^{15}\,\mathrm{GeV})$ のが考えられる。しかし、今度はこの新しいスケールの naturalness を説明する必要があり、元のもくあみである。あるいは、messenger 1 重項を導入するのが考えられる。しかし、入れすぎるとゲージカップリングが統一される前に発散してしまう問題がある。

2. $U(1)_Y - U(1)_m$ mixing
   一般に、U(1) ゲージ群が複数ある場合、kinetic term の mixing が許される。よって、例えば二つの $U(1)$ 群を $U(1)_1$, $U(1)_2$ とすると、それらの field strength を F_1, F_2 として $F_1^{\mu\nu}F_{2\,\mu\nu}$ のような項が mass suppression なしに $\mathcal{L}$ に入って来る。これに対応して、D_1D_2 mixing もある。すると、今の場合 MSSM 粒子が $U(1)_m$ D-term の寄与を受けて重くなりすぎてしまう。これの解決策としては、以下のものが考えられる：
   (a) DSB sector に vector-like model を使う [21]。
   これについては次の節で詳説する。
   (b) messenger ゲージ群として non-abelian 群を使う [29],[30]。
   [30] は messenger が複合場となるモデルである。これは節を改めて取り上げる。

4.1.2 IY model 型

まず DSB を起こす IY モデル [19] を説明する。ゲージ群は $SU(2)$、matter content は 2 重項 4 個 (Q_i)、1 重項 6 個 $(Z^{ij}\ ;\ Z^{ij} = -Z^{ji}\ ;\ i,j = 1,\cdots,4)$ である。 Superpotential は一般には

$$W_{tree} = \sum_{i,j,k,l} \lambda_{ij}^{kl} Z^{ij}(\epsilon_{\alpha\beta}Q_k^\alpha Q_l^\beta) \tag{4.24}$$

である。$\lambda_{ij}^{kl} = \lambda\delta_i^k\delta_j^l$ ならフレーバーのグローバル $SU(4)_F$ 対称性がある。ここではその部分群の $SP(4)_F$ を残して次のようにする

$$W_{tree} = \lambda Z(QQ) + \lambda_Z Z^a(QQ)_a \tag{4.25}$$

ここで Z , (QQ) は $SP(4)_F$ の 1 重項、Z^a , $(QQ)_a$ は 5 重項である。低エネルギーでの effective superpotential は naive dimensional analysis [22] を用いると $SU(2)$ ゲージ不変な composite field $V \sim \frac{4\pi}{\Lambda}(QQ)$, $V_a \sim \frac{4\pi}{\Lambda}(QQ)_a$ を用いて

$$W_{eff} = \frac{\lambda}{4\pi}\Lambda ZV + \frac{\lambda_Z}{4\pi}\Lambda(Z^a)(V_a) + X\left(V^2 + V_a^2 - \frac{\Lambda^2}{(4\pi)^2}\right) \tag{4.26}$$

とかける [22]。ここで Λ はゲージ群 $SU(2)$ が強結合になるスケールである。$\lambda_Z \gg \lambda$ として、真空は

$$\begin{aligned} \langle V_a \rangle &= 0, \\ \langle V \rangle &= -F_z^* = \frac{\Lambda}{4\pi}, \\ \langle Z_a \rangle &= 0, \\ 2\langle X \rangle + \lambda \langle Z \rangle &= 0. \end{aligned}$$

となる。また

$$\langle F_Z \rangle = \frac{\lambda\Lambda^2}{(4\pi)^2} \neq 0 \tag{4.27}$$

だから、超対称性は自発的に破れている。

次に、$SP(4)_F$ の $U(1)$ 部分群を「弱く」ゲージ化[26] して、それにより DSB セクターと messenger セクターの間に相互作用を持たせることを考える。これを $U(1)_m$ と呼ぶことにする。超対称性を破る真空 (4.27) が $U(1)_m$ を破っていないものとする。DSB セクターの $U(1)_m$ 量子数を次のように割り当てる：

$$\begin{aligned} &Q_1(+1), Q_2(-1), Q_3(0), Q_4(0) \\ &Z^{12}(0), Z^{34}(0), Z^{13}(-1), Z^{14}(-1), Z^{23}(+1), Z^{24}(+1) \end{aligned} \tag{4.28}$$

すると、superpotential に次の $\mathbf{Z_4}$ 対称性があることがわかる。

$$\begin{aligned} &Q_1 \to iQ_2, Q_2 \to iQ_1, Q_3 \to Q_3, Q_4 \to Q_4, V_{U(1)_m} \to -V_{U(1)_m} \\ &Z^{12} \leftrightarrow Z^{12}, Z^{13} \leftrightarrow -iZ^{23}, Z^{14} \leftrightarrow -iZ^{24}, Z^{34} \leftrightarrow -iZ^{14} \end{aligned} \tag{4.29}$$

ここで、$V_{U(1)_m}$ は $U(1)_m$ の vector superfield である。この対称性は、Fayet-Iliopoulos D term を禁止する。また、「軽い」場は Z のみで、実際 Z だけで 't Hooft anomaly matching condition を充たしている。

次に、messenger セクターを考える。Matter content は、MSSM ゲージ量子数を持たない

$$S(0), E(+1), \overline{E}(-1) \tag{4.30}$$

[26] このゲージ化した $U(1)$ は DSB には影響しないものとする。

(括弧内の数字は $U(1)_m$ 量子数) と、持つ vector-like quark,lepton $d, \overline{d}, l, \overline{l}$ である。d は SM ゲージ群に対しては right-handed d クォークと同じ量子数を持ち、l は left-handed レプトン 2 重項と同じ量子数を持つとする。$\overline{d}$, $\overline{l}$ はそれらの反粒子と同じ量子数を持つ。これらは、DSB セクターのゲージ群 $SU(2)$ に関しては一重項とする[27] 。$SU(2) \times U(1)_m$ はアノマリーを持たないことがわかる：

(4.31)

	$SU(2)$	$U(1)_m$
Q_1^α	**2**	1
Q_2^α	**2**	-1
Q_3^α	**2**	0
Q_4^α	**2**	0

(4.32)

	$SU(2)$	$U(1)_m$		$SU(2)$	$U(1)_m$
Z^{12}	1	0	Z^{14}	1	-1
Z^{34}	1	0	Z^{23}	1	1
Z^{13}	1	-1	Z^{24}	1	1

(4.33)

	$SU(2)$	$U(1)_m$
E	1	-1
$\overline{E}$	1	-1
S	1	0
$d, \overline{d}$	1	0
$l, \overline{l}$	1	0

このセクターの superpotential として、くりこみ可能で次元を持つパラメータを含まない、という条件を充たす中でもっとも一般的な次のものを考える:

$$W_{mess} = y_E S E \overline{E} + \frac{\lambda}{3} S^3 + y_d S d \overline{d} + y_l S l \overline{l} \tag{4.34}$$

ポテンシャルには、F term の 2 乗の他に、$E, \overline{E}$ の soft susy breaking mass と、湯川相互作用 $SE\overline{E}$ により $E, \overline{E}$ がループを回り、その結果くりこみで生じる S の mass が加わる：

$$\begin{aligned} V_{mess} &= \sum_i \left| \frac{\partial W_{mess}}{\partial \phi_i} \right|^2 + m_E^2 E^2 + m_{\overline{E}}^2 \overline{E}^2 - m_S^2 S^2 \\ &= |y_E E \overline{E} + \lambda S^2 + y_d d \overline{d} + y_l l \overline{l}|^2 \\ &\quad + |y_E S E|^2 + |y_E S \overline{E}|^2 \\ &\quad + |y_d S d|^2 + |y_d S \overline{d}|^2 \\ &\quad + |y_l S l|^2 + |y_l S \overline{l}|^2 \\ &\quad + m_E^2 |E|^2 + m_{\overline{E}}^2 |\overline{E}|^2 - m_S |S|^2 \end{aligned} \tag{4.35}$$

[27] messenger が DSB に影響しないようにするため。

ここで、

$$\begin{aligned} m_E &= m_{\overline{E}} \sim \frac{\alpha_m}{4\pi}\frac{\lambda F_Z}{\Lambda} \simeq \frac{\alpha_m}{4\pi}\frac{\lambda^2}{16\pi^2} \\ m_S &\simeq \frac{4}{(4\pi)^2} y_E^2 m_E^2 \ln\frac{\Lambda}{m_E} \end{aligned} \tag{4.36}$$

である。このポテンシャルの global minimum は (あるパラメータ領域で) 次のようになる：

$$\begin{aligned} \langle S^* S\rangle &= \frac{m_S^2}{2f^2}, \\ \langle |F_S|\rangle &= \frac{m_S^2}{2f}, \\ \langle E\rangle &= \left\langle \overline{E}\right\rangle = \langle d\rangle = \left\langle \overline{d}\right\rangle = \langle l\rangle = \left\langle \overline{l}\right\rangle = 0 \end{aligned} \tag{4.37}$$

これより、欲しかった (2.2) の形の真空期待値

$$\langle S\rangle = \frac{m_S}{\sqrt{2}f} + \theta^2 \frac{m_S^2}{2f} \tag{4.38}$$

が得られた。MSSM のゲージ量子数を持つ messenger quark d , l の真空期待値がゼロだからこの真空はカラーを保っている。

(3,2)model 型では超対称性を破りカラーを保つ真空が local minimum だったのに対し、IY 型では global minimum になった。これは、(3,2)model 型はカイラルなので messenger が threshold mass を拾うことができず、RGE により m_E^2 が負になってしまうのに対し、IY 型は vector-like なので大きな threshold mass を拾うことができて、m_E^2 が正になることに起因している。

(4.37) から、effective な messenger スケール は

$$\Lambda_{mess} \equiv \frac{\langle |F_S|\rangle}{\langle S\rangle} = \frac{m_S}{\sqrt{2}} \tag{4.39}$$

である。これを (4.27),(4.36) を用いて超対称性の破れのスケール $\sqrt{\langle F_Z\rangle}$ で書き直すと

$$\Lambda_{mess} \simeq \frac{\sqrt{2}}{(4\pi)^4}\alpha_m \lambda\sqrt{\lambda}\, k_E \sqrt{\ln\frac{(4\pi)^3}{\alpha_m\lambda^2}}\cdot\sqrt{F_Z} \tag{4.40}$$

となる。MSSM の gaugino,sfermion の質量が weak スケール程度になるためには $\Lambda_{mess} \sim 10^{4-5}$ GeV でなくてはならない。$\alpha_m \simeq 10^{-2}$, $\lambda \sim k_E \sim \mathcal{O}(1)$ とすると (4.40) より $\sqrt{F_Z} \simeq 10^{8-9}$ GeV となる。これから gravitino の質量は

$$m_{3/2} = \frac{F_Z}{\sqrt{3}M_{Pl}^*} \simeq (10\,\mathrm{MeV} \ - \ 1\,\mathrm{GeV}) \tag{4.41}$$

となる。

4.2 Kähler タイプ

このモデルは、messenger ゲージ群の代わりに Kähler ポテンシャルが superpotential から受ける補正を考えて 欲しい期待値を得るものである [23]。

まず、DSB セクターは ゲージ群が SU(2)、matter content は 2 重項 4 個 (Q_i)、1 重項 6 個 $(Z^{ij}\ ;\ Z^{ij}=-Z^{ji}\ ;\ (i,j=1,\cdots,4))$ である。superpotential は一般には

$$W_{tree}=\lambda_{ij}^{kl}Z^{ij}(Q_kQ_l) \tag{4.42}$$

であるが、ここではフレーバーの $SP(4)_F$ 対称性を持つ次のもの

$$W_{tree}=\lambda_Z Z^a(QQ)_a+\lambda Z(QQ) \tag{4.43}$$

を考える。ここで $Z^a,(QQ)_a$ は $SP(4)_F$ の 5 次元表現、$Z,(QQ)$ は一重項である。低エネルギーでの effective superpotential は、

$$W_{eff}^{DSB}=\lambda_Z ZV+\lambda Z^aV_a+X(V^2-V_aV_a-\Lambda^4) \tag{4.44}$$

である。$\lambda\gg\lambda_Z$ のとき、真空は

$$\begin{aligned}\langle Z_a\rangle&=0,\\ \langle V_a\rangle&=0,\\ \langle X\rangle&=0,\\ \langle Z\rangle&=0,\\ \langle V\rangle&=\frac{\Lambda^2}{4\pi}\end{aligned} \tag{4.45}$$

である。この真空のまわりでは、superpotential は次のように近似できる：

$$W_{eff}\simeq\lambda_Z\Lambda^2Z \tag{4.46}$$

これより、

$$|\,\langle F_Z\rangle\,|\simeq\lambda_Z\Lambda^2 \tag{4.47}$$

となり、超対称性が自発的に破れている。(4.44) の中の 湯川項 λ_ZZV により、Kähler ポテンシャルは以下のような補正を受ける：

$$K=ZZ^*-\frac{\eta}{4\Lambda^2}\lambda_Z^4(ZZ^*)^2+\cdots \tag{4.48}$$

ポテンシャルは

$$V_{eff}=\left(\frac{\partial^2K}{\partial A^i\partial A^j}\right)^{-1}\frac{\partial W}{\partial A^i}\left(\frac{\partial W}{\partial A^j}\right)^*\simeq\lambda_Z^2\Lambda^4\left(1+\frac{\eta}{4\Lambda^2}\lambda_Z^4(ZZ^*)^2+\cdots\right) \tag{4.49}$$

となる。これより、Z の質量の 2 乗は $\eta\lambda_Z^6\Lambda^2$ だが、これが正となるには $\eta > 0$ が必要である。これを仮定すると、真空は $\langle Z\rangle = 0$ となる。

次に、messenger セクターは SM ゲージ 1 重項 Y、(down)quark と同じ SM 量子数を持つ d、anti-lepton と同じ SM 量子数を持つ $\overline{l}$ とそれらの 反粒子 $\overline{d}, l$ からなる。これらは全て DSB セクターの SU(2) 量子数は持っていない。superpotential には DSB セクターと messenger セクターの相互作用が含まれている：

$$W_{mess} = \lambda_Y VY - \frac{f}{3}Y^3 + (k_1\overline{d}d + k_2\overline{l}l)Y \tag{4.50}$$

ただし、

$$V \sim \frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta}(Q_1^\alpha Q_2^\beta + Q_3^\alpha Q_4^\beta) \tag{4.51}$$

ここで、次元を持たないカップリング λ_Y, f, k_1, k_2 は全て正であるとする。GUT では d と l が一つの多重項に含まれるので $k_1 = k_2$ である。ここではこれを採用する。V が (4.45) の期待値を持つエネルギースケールの effective superpotential は

$$W_{eff} = \lambda_Z\Lambda^2 Z + \lambda_Y\Lambda^2 Y - \frac{f}{3}Y^3 + k(\overline{d}d + \overline{l}l)Y \tag{4.52}$$

である。この superpotential により Z と Y の Kähler ポテンシャルは以下のような補正を受ける。

$$\begin{aligned} K &= ZZ^* + YY^* - \frac{\eta}{4\Lambda^2}|\lambda_Z Z + \lambda_Y Y|^4 \\ &\quad -\frac{\delta}{4\Lambda^2}\frac{\lambda_Y^2}{16\pi^2}|\lambda_Z Z + \lambda_Y Y|^2(4f^2YY^* + k^2(dd^* + \overline{dd}^* + ll^* + \overline{lL}^*)) + \cdots \end{aligned} \tag{4.53}$$

ここで δ は $\mathcal{O}(1)$ の正の実数とする。この補正に寄与するグラフは図 1 である。(4.52),(4.53) から、$\mathcal{O}(\lambda_Y^2)$ の近似で次のポテンシャルを得る：

$$\begin{aligned} V_{eff} &\simeq \lambda_Z^2\Lambda^4 + \eta\lambda_Z^6\Lambda^2 ZZ^* + \eta\lambda_Z^5\lambda_Y\Lambda^2(ZY^* + YZ^*) + \eta\lambda_Z^4\lambda_Y^2\Lambda^2 YY^* \\ &\quad +\delta\frac{\lambda_Y^2}{64\pi^2}\lambda_Z^4\Lambda^2(4f^2YY^* + k^2(dd^* + \overline{dd}^* + ll^* + \overline{ll}^*)) \\ &\quad +|\lambda_Y\Lambda^2 - fY^2 + k(\overline{d}d + \overline{l}l)|^2 \\ &\quad +|k\overline{d}Y|^2 + |kdY|^2 \\ &\quad +|k\overline{l}Y|^2 + |klY|^2 \\ &\quad +\mathcal{O}(\lambda_Y^3) \end{aligned} \tag{4.54}$$

λ_Y と k の値を調節して $\langle d\rangle = \left\langle\overline{d}\right\rangle = \langle l\rangle = \left\langle\overline{l}\right\rangle = 0$ となるような (つまりカラーを破らない) 真空を選ぶ。このとき、

$$\begin{aligned} \langle F_Y\rangle &\simeq \left\langle\lambda_Y\Lambda^2 - fY^2\right\rangle \simeq \delta\frac{f^2}{16\pi^2}\frac{\lambda_Z^4\lambda_Y^2}{2f}\Lambda^2 \\ \left\langle Y^2\right\rangle &\simeq \frac{\lambda_Y}{f}\Lambda^2 \end{aligned} \tag{4.55}$$

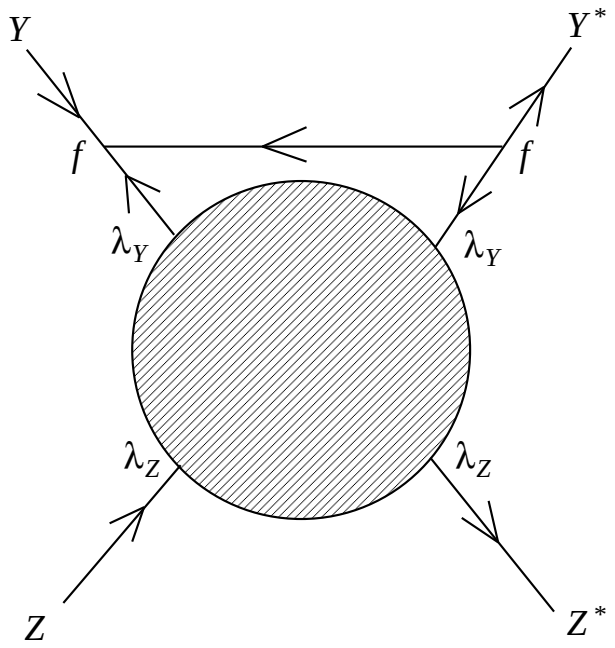


図 1: Kähler ポテンシャルへの補正

となり、やはり (2.2) の形の真空期待値が得られた。

(4.55) から effective な messenger スケールは

$$\Lambda_{mess} \equiv \frac{|\langle F_Y \rangle|}{\langle Y \rangle} = \delta \frac{f^2}{(4\pi)^2} \frac{\lambda_Z^4 \lambda_Y}{2} \sqrt{\frac{\lambda_Y}{f}} \Lambda \tag{4.56}$$

である。MSSM の gaugino,sfermion の質量が weak スケール程度になるためには $\Lambda_{mess} \sim 10^{4-5}$ GeV でなくてはならない。よって (4.56) から

$$\Lambda \simeq \frac{32\pi^2}{f^{3/2} \lambda_Z^4 \lambda_Y^{3/2}} \times 10^{4-5} \text{ GeV} \tag{4.57}$$

である。$\lambda_Z \sim f \sim 1$ とすると

$$\Lambda \simeq \frac{3}{\lambda_Y^{3/2}} \times 10^{6-7} \text{ GeV} \tag{4.58}$$

である。gravitino の質量は (4.47) から

$$m_{3/2} = \frac{F_Z}{\sqrt{3} M_{Pl}^*} \simeq \frac{1}{4} \times \frac{\lambda_Z \Lambda^2}{10^{18}} \text{ GeV} \sim \frac{1}{4} \times \frac{\Lambda^2}{10^{18}} \text{ GeV} \tag{4.59}$$

である。GMSB では ゲージ量子数が同じ MSSM セクターの squark , slepton の質量が縮退していたので自動的に FCNC が suppress されていた。この縮退が保たれるためには $m_{3/2} \lesssim 1$ GeV でないといけない [24]。よって (4.59) から $\Lambda \lesssim 10^9$ GeV である。すると (4.58) から λ_Y

$\gtrsim 10^{-2}$ である。また $\lambda_Y \lesssim 1$ とすると (4.58) から $\Lambda \gtrsim 10^{6-7}$ GeV である。以上から $10^6 \lesssim \Lambda \lesssim 10^9$ GeV である。これと (4.59) から 1 keV $\lesssim m_{3/2} \lesssim 1$ GeV である。

このモデルでは実は sfermion の soft mass を生成する 2-loop グラフに (4.50) の $\lambda_Y VY$ から 1-loop で生じる寄与がある、つまり 3-loop の寄与があることが [14] で言及されている。sfermion が $\mathcal{O}(4\pi)$ のファクターだけ gaugino よりも重くならないようにするには $\lambda_Y \lesssim (f/3)/(4\pi)$ としなければならない。つまり、パラメータの tuning が一つ必要である。

4.3 Yukawa タイプ

このモデルは DSB セクターと messenger セクターをくりこみ可能な Yukawa カップリング[28] で結び、超対称性の破れを伝えるものである [26],[27]。このモデルでは gaugino の soft mass の leading が F_S/M ではなく $F_S/M \cdot (F_S/M^2)^2)$ なので超対称性の破れのスケール $\sqrt{F_{DSB}}$ を小さくできる。すると、第 7 章で説明するように gravitino の質量 $m_{3/2}$ が小さくなるので標準宇宙論からみると性質のよいものである。

DSB セクターは Kähler タイプで扱ったモデルと同じものとする。つまり、tree level の superpotential は

$$W_{tree} = \lambda_Z Z^a (QQ)_a + \lambda Z(QQ) \tag{4.60}$$

であり、低エネルギーでの effective な superpotential は

$$W_{eff} = \lambda_Z Z^a V_a + \lambda ZV + S(V^2 + V^a V^a - \Lambda^4) \tag{4.61}$$

である。ここで $V^a \sim (QQ)^a$,$V \sim (QQ)$ が低エネルギーでの自由度である。S は quantum modified constraint をかけるための Lagrange multiplier である。$\lambda_Z \gg \lambda$ のとき、場の真空期待値は

$$\langle V \rangle = \lambda\Lambda^2 \qquad \text{(他はゼロ)} \tag{4.62}$$

であり、

$$|\langle F_Z \rangle| = \lambda\Lambda^2 \tag{4.63}$$

だから超対称性が破れている。これにさらに $Z(QQ)$ の項からくる Kähler ポテンシャルへの補正を考えると Z のポテンシャルは

$$V_{eff} = \left(\frac{\partial^2 K}{\partial A^i \partial A^j}\right)^{-1} \frac{\partial W}{\partial A^i} \left(\frac{\partial W}{\partial A^j}\right)^* \simeq \lambda_Z^2 \Lambda^4 \left(1 + \frac{\eta}{4\Lambda^2}\lambda_Z^4 (ZZ^*)^2 + \cdots\right) \tag{4.64}$$

と変更される。$\eta > 0$ ならば $\langle Z \rangle = 0$ で R 対称性は破れない。$\eta < 0$ ならば $\langle Z \rangle \sim |\lambda|^{-2}\Lambda$ となり、R 対称性が破れる。ここでは $\eta < 0$ の場合を考える。まとめると、真空は

$$\langle V \rangle \;=\; \lambda\Lambda^2$$

[28] くりこみ不可能な Yukawa カップリングを用いるモデルも存在する。

$$\begin{aligned} \langle Z \rangle &\sim |\lambda|^{-2}\Lambda \\ |\langle F_Z \rangle| &= \lambda\Lambda^2 \end{aligned} \tag{4.65}$$

次に messenger セクターは DSB を起こす $SU(2)$ の一重項で、MSSM ゲージ群に対してはそれぞれ d クォーク、レプトン二重項と同じ変換をする messenger quark $d, \overline{d}, d', \overline{d'}$ と $l, \overline{l}, l', \overline{l'}$ からなる。superpotential は

$$\begin{aligned} W &= \lambda_Z Z^a V^a + Z(\lambda(QQ) + k_d d\overline{d} + k_l l\overline{l}) + m_d d\overline{d'} + m_{\overline{d}} d'\overline{d} + m_l l\overline{l'} + m_{\overline{l}} l'\overline{l} \\ &\quad + S(V^2 + V^a V^a - \Lambda^4) \end{aligned} \tag{4.66}$$

とする。この中には messenger quark の質量項が入っているが、これらは Z に相当する一重項を 3 つに増やすモデルでは dynamical に期待値として出てくるものである。議論を簡単にするために、(4.66) をそのモデルの effective superpotential とみなすことにする。W に $d'\,\overline{d'}$ や $l'\,\overline{l'}$ を加えてしまうとポテンシャルには $|\overline{d} + \overline{d'}|^2 + |\overline{l} + \overline{l'}|^2$ という項があることになり、$\left\langle \overline{d} \right\rangle = 0$ ではなく $\left\langle \overline{d} + \overline{d'} \right\rangle = 0$ となってしまう。このとき、超対称性が回復してしまうことが多い。

上で求めた真空 (4.65) のまわりでポテンシャルを書くと

$$\begin{aligned} V &= |\lambda_Z V^a|^2 + |\lambda_Z Z^a|^2 + |\lambda(Z + |\lambda|^{-2}\Lambda)|^2 + |\lambda(\lambda\Lambda^2 + V) + k_d d\overline{d} + k_l l\overline{l}|^2 \\ &\quad + |k_d(Z + |\lambda|^{-2}\Lambda)\overline{d} + m_d \overline{d'}|^2 + |k_d(Z + |\lambda|^{-2}\Lambda)d + m_{\overline{d}} d'|^2 \\ &\quad + |k_l(Z + |\lambda|^{-2}\Lambda)\overline{l} + m_l \overline{l'}|^2 + |k_l(Z + |\lambda|^{-2}\Lambda)l + m_{\overline{l}} l'|^2 \\ &\quad + |m_{\overline{d}}\overline{d}|^2 + |m_d d|^2 + |m_{\overline{l}}\overline{l}|^2 + |m_l l|^2 \end{aligned} \tag{4.67}$$

これから、

$$\begin{aligned} |m_d m_{\overline{d}}|^2 &> |k_d \langle F_Z \rangle|^2 \\ |m_l m_{\overline{l}}|^2 &> |k_l \langle F_Z \rangle|^2 \end{aligned} \tag{4.68}$$

のときには次の安定な真空が存在する：

$$\begin{aligned} \langle V \rangle &= \lambda\Lambda^2 \\ \langle Z \rangle &\sim |\lambda|^{-2}\Lambda \\ \langle F_Z \rangle &\simeq \lambda\Lambda^2 \\ \langle d \rangle = \left\langle \overline{d} \right\rangle = \langle l \rangle = \left\langle \overline{l} \right\rangle &= \langle d' \rangle = \left\langle \overline{d'} \right\rangle = \langle l' \rangle = \left\langle \overline{l'} \right\rangle = 0 \end{aligned} \tag{4.69}$$

これはカラーを保ち、超対称性を破っている。superfield Z が (2.2) の形の真空期待値を得た。

次に gaugino,sfermion の soft mass を計算する。(4.66) では messenger quark の質量項を与える部分が

$$W_{mass} = \sum_{\psi=d,l} (\overline{\psi}, \overline{\psi'}) \mathbf{M}^{\psi} \begin{pmatrix} \psi \\ \psi' \end{pmatrix} \tag{4.70}$$

$$\mathbf{M}^{(\psi)} = \begin{pmatrix} k_\psi \langle Z \rangle & m_{\overline{\psi}} \\ m_\psi & 0 \end{pmatrix} \tag{4.71}$$

となっていて、messenger の間に mixing がある。一方、超対称性を破る質量項は

$$\mathcal{L}_{soft} = \sum_{\psi=d,l} k_\psi \langle F_Z \rangle \tilde{\psi}\tilde{\overline{\psi}} \tag{4.72}$$

である。これらから gaugino の質量は

$$\begin{aligned} m_{\tilde{g}_3} &= \frac{\alpha_3}{4\pi} k_d \langle F_Z \rangle (\mathbf{M}^{(d)\,-1})_{11} \\ m_{\tilde{g}_2} &= \frac{\alpha_2}{4\pi} k_l \langle F_Z \rangle (\mathbf{M}^{(l)\,-1})_{11} \\ m_{\tilde{g}_1} &= \frac{\alpha_1}{4\pi} \left\{ \frac{2}{5} k_d \langle F_Z \rangle (\mathbf{M}^{(d)\,-1})_{11} + \frac{3}{5} k_l \langle F_Z \rangle (\mathbf{M}^{(l)\,-1})_{11} \right\} \end{aligned} \tag{4.73}$$

となる。ここで注意すべきは、$(\mathbf{M}^{(\psi)\,-1})_{11} = 0$ なので、次数 $\mathcal{O}(F^{(\psi)}/m^{(\psi)})$ では gaugino の質量が生じないことである。次の次数 $\mathcal{O}(F^{(\psi)}/m^{(\psi)} \cdot (F^{(\psi)}/m^{(\psi)2})^2)$ からは寄与があり、

$$\begin{aligned} m_{\tilde{g}_3} &= \frac{\alpha_3}{4\pi} \left| \frac{k_d \langle F_Z \rangle}{m_\psi m_{\overline{\psi}}} \right|^2 \frac{k_d \langle F_Z \rangle}{\sqrt{m_\psi m_{\overline{\psi}}}} \mathcal{F}_d \\ m_{\tilde{g}_2} &= \frac{\alpha_2}{4\pi} \left| \frac{k_l \langle F_Z \rangle}{m_\psi m_{\overline{\psi}}} \right|^2 \frac{k_l \langle F_Z \rangle}{\sqrt{m_\psi m_{\overline{\psi}}}} \mathcal{F}_l \\ m_{\tilde{g}_1} &= \frac{\alpha_1}{4\pi} \left\{ \frac{2}{5} \left| \frac{k_d \langle F_Z \rangle}{m_\psi m_{\overline{\psi}}} \right|^2 \frac{k_d \langle F_Z \rangle}{\sqrt{m_\psi m_{\overline{\psi}}}} \mathcal{F}_d + \frac{3}{5} \left| \frac{k_l \langle F_Z \rangle}{m_\psi m_{\overline{\psi}}} \right|^2 \frac{k_l \langle F_Z \rangle}{\sqrt{m_\psi m_{\overline{\psi}}}} \mathcal{F}_l \right\} \end{aligned} \tag{4.74}$$

である。ここで $\mathcal{F}_\psi$ $(\psi = d, l)$ は gaugino の質量を対角化するのに用いた角度 ϕ, θ の関数で、最大値が ~ 0.1 の量である[29]。実験からの制限

$$\begin{aligned} m_{\tilde{g}_2} &\gtrsim 50 \text{ GeV} \\ m_{\tilde{g}_3} &\gtrsim 220 \text{ GeV} \end{aligned} \tag{4.75}$$

から、F_Z への制限

$$\begin{aligned} \langle F_Z \rangle &\gtrsim \frac{3 \times 10^8}{k_l \mathcal{F}_l^2} \left(\frac{m_l m_{\overline{l}}}{k_l \langle F_Z \rangle} \right)^5 \text{ GeV}^2 \\ \langle F_Z \rangle &\gtrsim \frac{5 \times 10^8}{k_d \mathcal{F}_d^2} \left(\frac{m_d m_{\overline{d}}}{k_d \langle F_Z \rangle} \right)^5 \text{ GeV}^2 \end{aligned} \tag{4.76}$$

が得られる。これから gravitino の質量 $m_{3/2} = \frac{\langle F_Z \rangle}{\sqrt{3} M_{Pl}^*}$ への制限

$$\begin{aligned} m_{3/2} &\gtrsim \frac{0.8}{k_l} \left(\frac{0.1}{\mathcal{F}_l} \right)^2 \left(\frac{m_l m_{\overline{l}}}{k_l \langle F_Z \rangle} \right)^5 \times 10^{-2} \text{ keV} \\ m_{3/2} &\gtrsim \frac{1.0}{k_d} \left(\frac{0.1}{\mathcal{F}_d} \right)^2 \left(\frac{m_d m_{\overline{d}}}{k_d \langle F_Z \rangle} \right)^5 \times 10^{-2} \text{ keV} \end{aligned} \tag{4.77}$$

[29] 具体的な形は [27] を参照。

が得られる。$|\mathcal{F}_\psi| \leq 0.1$ だから、$0.2 \lesssim (k_\psi \langle F_Z \rangle / m_\psi m_{\overline{\psi}})^2 \lesssim 1$ かつ $k_\psi \simeq 1$ $(\psi = d, l)$ の領域では $m_{3/2}$ は 1keV よりも軽くなりうることがわかる。

4.4 Direct タイプ

direct タイプとは、DSB セクターの グローバル対称性を「弱く」ゲージ化し、標準模型のゲージ群をそのゲージ群の部分群とするモデルである。DSB セクターと messenger セクターを分離するモデルでは、messenger field は DSB セクターのゲージ量子数を持たず、DSB には関与しなかったが、direct タイプでは DSB セクターの場が messenger の役割も果たす。歴史的には DSB が発見されたあと現実的なモデルとしてまず考えられたのがこのタイプであった [12]。しかし、このモデルにはこの章のはじめで見た通り、難点があったので広く認められるには至らなかった。ゲージカップリングを統一させる困難は messenger が軽いことに起因していたので、それらを重くすることが考えられる。まずこのタイプのモデルをみることにする。(これを heavy messenger 型と呼ぶ。)

4.4.1 heavy messenger 型

messenger スケールより低いスケールでは messenger 粒子は MSSM セクターの RGE の β 関数に寄与しない。よって、messenger スケールを高くすればゲージカップリングが統一するようにできる。これが可能なのは、(2.3),(2.4) より soft mass が M ではなく $\Lambda \equiv \langle F_S \rangle / M$ に依存しているからである。$\langle F_S \rangle$ も充分大きくしておけば soft mass が小さくなりすぎてしまうことはない。

具体的なモデルをみる前に、messenger を重くするメカニズムを説明する。

DSB セクターの matter content として、S (spurion になる場)、$q, \overline{q}$ (messenger quark になる場)、の他に $f, \overline{f}$ を考える。$f, \overline{f}$ は漸近的自由な $SU(m)$ の fundamental,anti-fundamental 表現に従うものとし、n フレーバーあるとする。また、$SU(m)$ が強結合になるスケールを Λ とする。

superpotential を

$$W = \lambda (S q \overline{q} + S f \overline{f}) \tag{4.78}$$

とする。大きな $\langle S \rangle$ が生成されれば、$q, \overline{q}$ が大きな質量を持つことになる。classical には S は flat direction である。

$\langle S \rangle$ は $q, \overline{q}$ と $f, \overline{f}$ の質量を与える。$\langle S \rangle$ より下のスケールでは W_{eff} は $q, \overline{q}$ と $f, \overline{f}$ を積分したものである。このスケールでは $SU(m)$ の dynamics が主要なものと仮定し、他に $SU(m)$ 量子数を持つ場がないとすると、W_{eff} は S で書かれるはずである。一方、gaugino condensation

により

$$W_{eff} = \Lambda_{eff}^3 \tag{4.79}$$

が生じる。スケール Λ で scale matching をすると $\Lambda_{eff}^{3m} = S^n \Lambda^{3m-n}$ である。ここで Λ_{eff}, Λ のベキは 1-loop β 関数の係数であり、S のベキは次元の一致から決めた。これから

$$W_{eff} = S^{n/m} \Lambda^{3(1-n/m)} \tag{4.80}$$

となる。

次に、スカラーポテンシャルを求める。$\langle S \rangle$ の大きい領域を考える。$\langle S \rangle \gg 1$ ならば Kähler ポテンシャルの $SS^\dagger$ のまわりの展開がよい。0 次では

$$V = \left| \frac{\partial W_{eff}}{\partial S} \right|^2 = |F_S|^2 \simeq S^{2(n/m-1)} \Lambda^{6(1-n/m)} \tag{4.81}$$

である。$n = m$ なら真空のエネルギーが ($\langle S \rangle$ が大きい領域で) $\langle S \rangle$ に依存せずに持ち上がっている。(いわゆる Plateau 型。) $n < m$ なら run away ポテンシャルである。

まず $n < m$ を考える。superpotential に tree level でくりこみ可能項を入れて真空を安定化し、大きな $\langle S \rangle$ を得ることはできない。例えば、

$$W = S^{n/m} \Lambda^{3(1-n/m)} + mS^2$$

とすると、$\langle S \rangle \neq 0,\ \langle F_S \rangle = 0$ となって超対称性が回復してしまう。超対称性を破る真空を得るには、非くりこみ可能項を加えなくてはいけない。このとき、ポテンシャルには例えば

$$\delta V = \frac{m^{5-k}}{M_{Pl}} S^k$$

のような補正が生じるが、これは M_{Pl} により非常に suppress されているので $\langle S \rangle$ が大きいところに真空が決まる。

次に、$n = m$ を考える。このときは Plateau ポテンシャルなので inverted hierarchy メカニズム [13] で大きな $\langle S \rangle$ が得られる。ただし、それには S が $SU(m)$ の量子数を持っていなければいけない。

Kähler ポテンシャルの 1-loop 補正を考えると

$$K(S, S^\dagger) = SS^\dagger \left[1 + (c_\lambda \lambda^2 - c_g g^2) \ln \left(\frac{\Lambda_G^2}{SS^\dagger} \right) \right] \tag{4.82}$$

である。ここで c_λ, c_g は正の定数である。また λ, g は S に依存する running カップリングである。ポテンシャルは

$$\begin{aligned} V &= \left(\frac{\partial^2 K}{\partial S\, \partial S^\dagger} \right)^{-1} \left| \frac{\partial W}{\partial S} \right|^2 \\ &\propto 1 - (c_g g^2 - c_\lambda \lambda^2) \ln \left(\frac{SS^\dagger}{\Lambda^2} \right) \end{aligned} \tag{4.83}$$

である。はじめ、低エネルギーでは g は大きく、λ は小さいので ln の係数は負である。よって、$\langle S\rangle$ を大きくしてゆくと V は減少する。g は漸近的自由だから $\langle S\rangle$ を大きくしてゆくと減少し、また一般に λ は増加する。よって、やがて ln の係数が正に転じる。その点が安定な真空になる。そのとき例えば $\ln(|S|^2) = c$ とすると $\langle S\rangle = e^{c/2}$ となるのでこれは非常に大きな値である。

次に、DSB セクターを考える。DSB を起こすことが知られている $SU(N) \times SU(M)$ モデルを選ぶことにする。先程 ゲージ群 $SU(m)$ の fundamental,anti-fundamental 表現 $f, \overline{f}$ を n フレーバー考えたが、$SU(N) \times SU(M)$ モデルでは $SU(m)$ が $SU(N)$ に対応し、さらにフレーバー空間に ゲージ対称性 $SU(M)$ を課したものになっている。

このモデルの IR 領域での dynamics を知りたいのだが、$M = N$ の場合は global minimum は超対称性を保ち、local minimum が超対称性を破っている。これは先程の $m = n$ の場合に相当する。$M = N-1, N-2$ の場合は超対称性が破れることが知られている。これは先程の $n < m$ の場合に相当する。現象論的にはどちらの場合も問題がある。それを以下でみる。

まず $M = N-1, N-2$ の場合を考える。$SU(N) \times SU(M)$ $(M = N-1, N-2)$ モデルでは (2.4) の他に Str $m^2_{mess} > 0$ による $m^2_{\tilde{f}}$ への寄与がある。(2.3),(2.4) が成り立つのは実は Str $m^2_{mess} = 0$ のときに限る。この寄与は 2-loop で

$$\delta m^2_{\tilde{f}} \simeq -g^4(\text{Str } m^2_{mess}) \ln\left(\frac{\Lambda_G}{m_{mess}}\right) \tag{4.84}$$

で与えられる [15]。Str $m^2_{mess} > 0$ の場合、これは負である。しかも、ln ファクターがついているので、(2.4) よりも絶対値が大きくなりうる。よって、軽い messenger が存在するなら MSSM の $SU(3)_C$ が破れてしまう。これに対しては次の解決策が提案されている：

- 非くりこみ可能項を superpotential に加えて DSB セクターに軽い charged field が出ないようにする。

これは後で詳しく説明するモデル [17] で用いられている。

次に、$N = M$ の場合を考える。$SU(N) \times SU(N)$ モデルでは adjoint 表現に従う gauge messenger が MSSM セクターの sfermion の質量を負にしてしまう [16]。これを解決するには

- 軽い場のスカラー成分の soft mass を大きくして Str $m^2_{mess} > 0$ とならないようにする。

このモデルでは超対称性が meta-stable な真空で破れる。この真空の寿命が現在の宇宙年齢より長いためには $\langle S\rangle / \Lambda > 10$ が必要である [16]。

また、DSB セクターの充たすべき条件は、MSSM ゲージ群を部分群として含むほど大きい (破れない) グローバル対称性があり、ゲージ化したあとそれがアノマリーを持たないことである。

以上の事情から、現象論的に満足できる direct 型モデルは数少ない。ここではそのようなモデルの一つを詳しくみることにする [17]。

DSB セクターのゲージ群を $SU(5)_1 \times SU(5)_2$ とする。また、グローバル対称性 $SU(5)_G$ があるとする。matter content は次の通りである：

	$SU(5)_1$	$SU(5)_2$	$SU(5)_G$
A	10	1	1
$\overline{F}$	$\overline{5}$	1	1
X	$\overline{5}$	5	1
$\overline{Q}$	5	1	$\overline{5}$
Q	1	$\overline{5}$	5

(4.85)

ここで $SU(5)_G$ は後で弱くゲージ化して MSSM のゲージ群を含むようにするものである。$Q, \overline{Q}$ は messenger の役割を果たすもの、X(正確にはその composite $S = \det(X)$) は spurion になるものである。$A, \overline{F}$ は DSB を起こす $SU(5)$ モデル [12] の matter content と一致している。低エネルギーの理論が $A, \overline{F}, X$ だけを含む (つまり messenger quark を含まない) ようにしたい。superpotential は

$$W = XQ\overline{Q} + \frac{1}{M_{Pl}^2} X^5 + \cdots \tag{4.86}$$

とする。これら以外に例えば $Q^5, \overline{Q}^5$ のような項を加えることもできるが、X が大きい領域を後で調べるのでこれらはいずれにせよ不要である。もちろん、対称性を課して落すこともできる。

(4.86) の第 1 項だけをまず考えると、次の 6 個の chiral gauge invariants で記述される flat direction が存在する：

$$\begin{aligned} S = \det(X),\ B = \det(Q),\ \overline{B} = \det(\overline{Q}), \\ P = A^2\overline{Q},\ N = A\overline{Q}^3,\ M = \overline{FQ}. \end{aligned} \tag{4.87}$$

以下でみるように、非摂動効果で S 以外の flat direction は持ち上がり原点に値を持つ。S の flat direction は (4.86) の第 2 項 (非くりこみ可能項) により遠方に期待値を持つ。

- B 方向
  この方向では $SU(5)_2$ が完全に破れ、$SU(5)_1$ は破れない。よって、$A, \overline{F}$ 以外の場は全て重くなり、低エネルギーでの理論は DSB を起こす $SU(5)$ モデルになる。B のポテンシャルは scale matching より
  $$V \sim \Lambda_L^4 \sim (B\Lambda_1^8)^{4/13}$$
  となり、$\langle B \rangle = 0$ となる。

- $\overline{B}$ 方向
  この方向では $SU(5)_1$ が完全に破れ、$SU(5)_2$ は破れない。今度は $SU(5)_2$ 量子数を持つ軽

い場がない ($A, \overline{F}$ は一重項) ので gaugino condensation により $\overline{B}$ の superpotential が生成される：

$$W = \Lambda_L^3 = \overline{B}^{1/5}\Lambda_2^2$$

$\overline{B}$ が大きい領域では $\overline{B}$ の Kähler ポテンシャルは $\overline{B}B^\dagger$ のまわりでの展開がよいので、ポテンシャルは 0 次では $\overline{B}$ に依存しない定数となる。しかし、Kähler ポテンシャルの 1-loop 補正を考えるとポテンシャルが持ち上がり、$\left\langle \overline{B} \right\rangle = 0$ となる。

- P,N 方向
  この場合も $SU(5)_2$ が破れない。P,N 方向どちらの場合も $SU(5)_2$ 量子数を持つ場が 5 フレーバー存在していて、それらは $SU(5)_2$ 一重項の $\overline{Q}$ とカップルしている。このような場合、ゲージ一重項を含む全ての classical flat direction は持ち上がることが一般に知られている。

- M 方向
  $SU(5)_1$ は $SU(4)_1$ までしか破れないが、$SU(4)_1$ 量子数を持っているのが 5 フレーバーの (4+6) 表現なので、superpotential が生成されない。よって、$\langle M \rangle$ が大きい領域では $SU(4)_1$ の dynamics は無視できる。あとは $SU(5)_2$ が破れない場合の議論からやはり $\langle M \rangle = 0$ となることがわかる。

以上から、S 以外の flat direction は遠方で全て持ち上がることがわかった。また、原点でポテンシャルが持ち上がっていることも確かめることができる。$\Lambda_2 \gg \Lambda_1$ の極限を考えると、Λ_2 より下のスケールでは (4.86) の第 1 項により XQ と $\overline{Q}$ が大きな質量を持つ。よって低エネルギーでは $A, \overline{F}$ だけが dynamical で、超対称性を破る $SU(5)$ モデルに帰着する。スケールは $\Lambda_L^{13} = \Lambda_1^8\Lambda_2^5$ である。したがって、原点付近に真空はない。これから、$\langle S \rangle$ が大きい領域の effective theory を考えればよい。

$\langle S \rangle$ が大きい領域ではゲージ群は対角な部分群である $SU(5)_L$ に破れる。また、$A, \overline{F}$, $S \equiv \det(X)$ だけが軽い場である。くりこみ可能項からくるポテンシャルは正確には計算できないので、scale matching からおおよその形を求めると、

$$V \sim \Lambda_L^4 \sim \left(\frac{\Lambda_1^8\Lambda_2^{10}}{(\det(X))^5} \right)^{4/13} \tag{4.88}$$

である。これは run away 型である。これに非くりこみ可能項の寄与

$$|F_S|^2 \sim \left| \frac{S^4}{M_{Pl}^2} \right|^2, \quad S \equiv \det(X) \tag{4.89}$$

を加えると真空が安定化する。この真空では

$$S \sim (M_{Pl}^{13}\Lambda^{18})^{1/31}, \; V \sim \left(\frac{\Lambda^{144}}{M_{Pl}^{20}} \right)^{1/31}$$

$$F_S \sim \left(\frac{\Lambda^{72}}{M_{Pl}^{10}}\right)^{1/31}, \ \frac{F_S}{S} \sim \left(\frac{\Lambda^{54}}{M_{Pl}^{23}}\right)^{1/31} \tag{4.90}$$

となる。確かに $S = \det(X)$ が spurion になっていることがわかる。ここで $\Lambda \equiv (\Lambda_1^4 \Lambda_2^5)^{1/9}$ である。

標準理論の $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ を $SU(5)_G$ の部分群とすると 重い $Q, \overline{Q}$ が messenger quark の役割を果たす。超対称性の破れのスケール $F_S/S \sim 10^{4-5}$GeV より

$$\Lambda \sim 10^{10-11}\text{GeV}, \ S \sim 10^{13-14}\text{GeV}$$
$$\sqrt{F_S} \sim 10^{8-9}\text{GeV} \tag{4.91}$$

となる。これから $m_{3/2} \simeq$ (10 MeV - 1 GeV) である。

Direct タイプのモデルでは典型的には $m_{3/2} > 100$ keV である。

4.5 composite タイプ

messenger セクターの場がより fundamental な場の複合場であるモデルを考える [30]。これを composite 型と呼ぶ。具体的には、vector-like matter を持ち confinement を起こす gauge dynamics を考え、それが強結合になるスケールよりも下での effective な場が messenger になるモデルである。このモデルには以下のような魅力的な点がある：

- messenger セクターの spurion のようなゲージ 1 重項が複合場となり、高いスケールの理論からなくなる。
- DSB セクターの global 対称性をゲージ化した messenger ゲージ群が不要。
- 複雑な superpotential が不要。
- 理論に現れるスケールは Planck スケールと confining gauge dynamics のスケールだけである。これらの組合せから M_{Pl} よりも小さい、GMSB に特徴的なスケールが生成される。superpotential に mass term を含んでいるが、それは confinig ゲージ群のスケール (と Planck スケール) で表せる。
- 全ての Yukawa カップリングが $\mathcal{O}(1)$ となる。

まずこのモデルの基本的なアイディアを説明する。

DSB セクターと messenger セクターを結び付ける 1 重項 $S, \overline{S}$ の他に messenger quark $Q, \overline{Q}$ と 超対称性を破る F-term を持つ DSB セクターの場 $V, \overline{V}$ を導入し、次の superpotential を考える：

$$W = SV\overline{V} + \overline{S}Q\overline{Q} + M_S S\overline{S} \tag{4.92}$$

$V, \overline{V}$ と $Q, \overline{Q}$ が $S, \overline{S}$ の Dirac 質量項だけで結び付いていることが重要である。$S, \overline{S}$ を積分した後の effective superpotential は

$$W_{eff} = -\frac{(V\overline{V})(Q\overline{Q})}{M_S} \tag{4.93}$$

である。ここで $V\overline{V}$ のスカラー成分と F-term 両方が真空期待値を持てばこれが effective に spurion の役割を果たす。このような真空期待値を実現し、さらに $S, \overline{S}$ の Dirac 質量項を dynamical に生成するために $S, \overline{S}$,$V, \overline{V}$,$Q, \overline{Q}$ を 低エネルギーでの effective な自由度とするような strong gauge dynamics を考える。

MSSM の gaugino,sfermion の質量の大きさを正しく再現するために、$V, \overline{V}$ と $Q, \overline{Q}$ にも質量項を導入する。

$$W = SV\overline{V} + \overline{S}Q\overline{Q} + M_S S\overline{S} + M_Q Q\overline{Q} + M_V V\overline{V} \tag{4.94}$$

まず、messenger quark $Q, \overline{Q}$ の質量項 $M_Q Q\overline{Q}$ と Yukawa カップリング $\overline{S}Q\overline{Q}$ を与える dynamics として、$SU(4)$ ゲージ群の fundamental、anti-fundamental 表現をなす vector-like quark $q^{\alpha f}, \overline{q}_{\alpha f}$ を 5 フレーバー導入する。この理論は $N_f = N_c + 1$ の SQCD であり、3.7 節で confinement が起こることをみた。グローバル対称性は $SU(5)_L \times SU(5)_R$ であり、これらの diagonal subgroup $SU(5)_D$ をゲージ化して MSSM の GUT ゲージ群とする。

(4.95)

	$SU(4)$	$SU(5)_L$	$SU(5)_R$	$SU(5)_D$
$q^{\alpha f}$	$\mathbf{4}$	$\mathbf{5}$	1	$\mathbf{5}$
$\overline{q}_{\alpha f}$	$\overline{\mathbf{4}}$	1	$\mathbf{5}$	$\overline{\mathbf{5}}$

(4.96)

	$SU(5)_L$	$SU(5)_R$	$SU(5)_D$
M_{fg}	$\mathbf{5}$	$\overline{\mathbf{5}}$	$\mathbf{24}+1 \ \rightarrow \Sigma \ + \ \overline{S}$
B_f	$\overline{\mathbf{5}}$	1	$\overline{\mathbf{5}} \ \rightarrow Q^f$
$\overline{B}_g$	1	$\mathbf{5}$	$\mathbf{5} \ \rightarrow \overline{Q}_g$

ゲージ群 $SU(4)$ が強結合になるスケールを $\Lambda_{SU(4)}$ とする。このスケールより上では q, $\overline{q}$、下では

$$\begin{aligned} M_{fg} &\sim q_f^{\alpha}\overline{q}_{\alpha g} \\ B_f &\sim \epsilon_{f f_1 f_2 f_3 f_4}\epsilon_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4} q_{f_1}^{\alpha_1}\cdots q_{f_4}^{\alpha_4} \\ \overline{B}_g &\sim \epsilon_{g g_1 g_2 g_3 g_4}\epsilon^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}\overline{q}_{\alpha_1 g_1}\cdots\overline{q}_{\alpha_4 g_4} \end{aligned} \tag{4.97}$$

が自由度である。B_f, $\overline{B}_g$ を rescale したものが messenger quark $Q, \overline{Q}$ になり、M_{fg} の中の 1 重項 を rescale したものが (4.96) の中の一重項 $\overline{S}$ になる。(4.96) で、$\rightarrow X$ は rescale した後の変数を表す。$SU(5)_D$ の規約成分で書いた。

3.7 節の (3.41) から、$\Lambda_{SU(4)}$ より下のスケールでの effective superpotential は

$$W_{eff} = \frac{1}{\Lambda^7_{SU(4)}} \Big(\det(M_{fg}) - B_f M_{fg} \overline{B}_g \Big) \tag{4.98}$$

である。これを normalize した変数 $\Lambda^6_{SU(4)}(Q\overline{Q}) = (q)^4(\overline{q})^4$ と $\Lambda_{SU(4)}\overline{S} = q\overline{q}$ を使ってかくと

$$W_{eff} \sim \overline{S} Q \overline{Q} \tag{4.99}$$

となる。これよりまず Yukawa カップリング $\overline{S}Q\overline{Q}$ が得られた。さらにそのカップリングの大きさは $\mathcal{O}(1)$ であることがわかる。

次に、$M_Q Q\overline{Q}$ を得るために次の tree-level superpotential を考える：

$$W_{tree} = \frac{q^4 \overline{q}^4}{M^5_{Pl}} \tag{4.100}$$

これは normalize した変数でかくと

$$W_{tree} = \frac{\Lambda^6_{SU(4)}}{M^5_{Pl}} Q\overline{Q} \tag{4.101}$$

となる。これから

$$M_Q = \frac{\Lambda^6_{SU(4)}}{M^5_{Pl}} \tag{4.102}$$

である。

次に、質量項 $M_V V\overline{V}$, $M_S S\overline{S}$ と Yukawa カップリング $SV\overline{V}$ を得るために別の strong gauge dynamics を考える。ゲージ群を $SU(2)$ とし、その fundamental 表現に従う quark,anti-quark $p^{\alpha f}$,$\overline{p}_{\alpha f}$ を 3 フレーバー導入する。この理論もやはり $N_f = N_c + 1$ の SQCD であり、(4.98) と同じ形の superpotential が生成される。グローバル対称性は $SU(3)_L \times SU(3)_R$ であり、この diagonal subgroup $SU(3)_D$ をゲージ化して DSB セクターのゲージ群の一部とする。これについてはすぐ後で説明する。

(4.103)

	$SU(2)$	$SU(3)_L$	$SU(3)_R$	$SU(3)_D$
$p^{\alpha f}$	$\mathbf{2}$	$\mathbf{3}$	1	$\mathbf{3}$
$\overline{p}_{\alpha f}$	$\mathbf{2}$	1	$\overline{\mathbf{3}}$	$\overline{\mathbf{3}}$

(4.104)

	$SU(3)_L$	$SU(3)_R$	$SU(3)_D$
N_{fg}	$\mathbf{3}$	$\overline{\mathbf{3}}$	$\mathbf{8} + 1 \to \Sigma' + S$
C_f	$\overline{\mathbf{3}}$	1	$\overline{\mathbf{3}} \to V$
$\overline{C}_g$	1	$\mathbf{3}$	$\mathbf{3} \to \overline{V}$

ゲージ群 $SU(2)$ が強結合になるスケールを $\Lambda_{SU(2)}$ とする。このスケールより上では p, $\overline{p}$、下では

$$\begin{aligned} N_{fg} &\sim p_f^{\alpha}\overline{p}_{\alpha g} \\ C_f &\sim \epsilon_{ff_1f_2}\epsilon_{\alpha_1\alpha_2}p_{f_1}^{\alpha_1}p_{f_2}^{\alpha_2} \\ \overline{C}_g &\sim \epsilon_{gg_1g_2}\epsilon^{\alpha_1\alpha_2}\overline{p}_{\alpha_1 g_1}\overline{p}_{\alpha_2 g_2} \end{aligned} \tag{4.105}$$

が自由度である。また、今度は次の superpotential

$$W_{eff} = \frac{1}{\Lambda_{SU(2)}^5}\Big(\det(N_{fg}) - C_f N_{fg}\overline{C}_g\Big) \tag{4.106}$$

が生成される。normalize した変数で書けば $SV\overline{V}$ が得られる。やはり Yukawa カップリングの大きさは $\mathcal{O}(1)$ になっている。

質量項を得るために、tree-level superpotential

$$W_{tree} = \frac{(pp)(\overline{pp})}{M_{Pl}} + \frac{(q\overline{q})(p\overline{p})}{M_{Pl}} \tag{4.107}$$

を導入する。これは normalize した変数 $\Lambda_{SU(2)}S = p\overline{p}$, $\Lambda_{SU(2)}^4 V\overline{V} = (p^3)(\overline{p}^3)$ で書くと

$$W_{tree} \sim \frac{\Lambda_{SU(2)}^2}{M_{Pl}}V\overline{V} + \frac{\Lambda_{SU(4)}\Lambda_{SU(2)}}{M_{Pl}}S\overline{S} \tag{4.108}$$

である。よって

$$M_V = \frac{\Lambda_{SU(2)}^2}{M_{Pl}}, \qquad M_S = \frac{\Lambda_{SU(4)}\Lambda_{SU(2)}}{M_{Pl}} \tag{4.109}$$

である。

最後に、DSB セクターは (3,2) モデルに $V, \overline{V}$ を加えたものとする。ただし、$M_S > M_V > \Lambda_{SU(3)_{DSB}}$ を仮定し、超対称性を dynamical に破る (3,2) モデルの dynamics は V, $\overline{V}$ の影響を受けないとする。

(4.110)

	$SU(3)$	$SU(2)$
P	$\mathbf{3}$	$\mathbf{2}$
$\overline{U}$	$\overline{\mathbf{3}}$	1
$\overline{D}$	$\overline{\mathbf{3}}$	1
L	1	$\mathbf{2}$
V	$\mathbf{3}$	1
$\overline{V}$	$\overline{\mathbf{3}}$	1

まず M_S より下のスケールでは

$$W = -\frac{(V\overline{V})(Q\overline{Q})}{M_S} + M_V V\overline{V} + M_Q Q\overline{Q} + \lambda P\overline{U}L$$

$$= \left(M_V - \frac{Q\overline{Q}}{M_S}\right) V\overline{V} + M_Q Q\overline{Q} + \lambda P\overline{U}L \tag{4.111}$$

である。さらに M_V より下のスケールでは、$V\,, \overline{V}$ を積分した後の effective スケールが

$$\Lambda_{eff}^7 = \left(M_V - \frac{Q\overline{Q}}{M_S}\right) \Lambda_{SU(3)_{DSB}}^6$$

だから、超対称性が破れることと、messenger quarks の F-term が生成されることと、$\langle Q\rangle = \left\langle \overline{Q}\right\rangle = 0$ を仮定すると

$$W = \frac{M_V[1-(Q\overline{Q})/M_V M_S]\Lambda_{SU(3)_{DSB}}^6}{(P\overline{U})(P\overline{D})} + M_Q Q\overline{Q} + \lambda P\overline{U}L \tag{4.112}$$

となる。これから、effective な spurion F-term は

$$F_{eff} = \frac{F\Phi^2}{M_V M_S} \tag{4.113}$$

である。ここで F は DSB セクターの超対称性を破る F-term の大きさ、Φ は DSB セクターのスカラー場の真空期待値の大きさである。今の (3,2) モデルの場合、$\Phi \sim \Lambda_{SU(3)_{DSB}}\,, F \sim \Lambda_{SU(3)_{DSB}}^2$ である。この理論の高いスケールでの superpotential をまとめると

$$W = \lambda P\overline{U}L + \frac{1}{M_{Pl}^5} q^4\overline{q}^4 + \frac{1}{M_{Pl}} p^2\overline{p}^2 + \frac{1}{M_{Pl}}(q\overline{q})(p\overline{p}) \tag{4.114}$$

である。

M_Q と F_{eff} にはどの GMSB モデルにも共通する以下の制限がつく。

- gaugino と sfermion の質量が 100GeV $\sim$ 1TeV になるためには $F_{eff}/M_Q \simeq 10^{4-5}$GeV である。
- gravity-mediated soft term よりも gauge-mediated soft term が大きくなるためには $F_{max} \leq 10^{18}\mathrm{GeV}^2$ である。
- messenger quark の質量が負にならないためには $M_Q \geq F_{eff}/M_Q \simeq 10^{4-5}$GeV である。
- 上で考えた effective theory が正しいためは $M_S > M_V > \Lambda_{SU(3)_{DSB}}$ である。

これらの制限をあわせると、gauge dynamics のスケールに次の制限がつく：

$$\begin{aligned} \Lambda_{SU(4)} &\geq 10^{15-16}\mathrm{GeV} \\ 10^{15-16}\mathrm{GeV} &\geq \Lambda_{SU(2)} \geq 10^{12-13}\mathrm{GeV} \\ \Lambda_{SU(3)} &\leq 10^9\mathrm{GeV} \end{aligned} \tag{4.115}$$

5 Minimal model

第 2 章で、超対称性の破れを感じて (2.2) のようにスカラー成分と F term が真空期待値を持つ messenger セクターの superfield を S と書いた[30] 。より一般的には、このような superfield が複数存在していても良い。ここでは S が一つしか存在しないモデルを minimal model と呼ぶことにする[31] 。minimal model の拡張としては

- spurion S を 2 個以上含む
- $q, \overline{q}$ が基本表現以外の表現をなす
  例えば adjoint 表現や $SU(5)$ の $(\mathbf{10} + \overline{\mathbf{10}})$ 表現など

などが考えられる。

以下では minimal GMSB モデルの枠内で MSSM を考察する。

5.1 MSSM

はじめに MSSM を定義し、その matter content をまとめる。標準理論が超対称性を持つように拡張するもっとも簡潔な方法は、標準理論に登場する場をそれぞれ superfield に置き換えることである。quark , lepton を それぞれ superfield に格上げするのは問題ないが、Higgs ボソン を superfield にすると、新たにフェルミオンが入って来る。よって、せっかく SM で相殺していたアノマリーが生じてしまう。これを避けるには最低二つの互いに conjugate な表現をなす Higgs superfield を導入しなくてはいけない。これらを H_u, H_d と書く。また、MSSM では、全ての quark , lepton に質量を持たせるためには二つの互いに conjugate な表現をなす Higgs superfield が必要である。それは、superpotential が holomorphic なので $\overline{u}\mathbf{y_u}QH_u$ は許されても $\overline{d}\mathbf{y_d}QH_u^*$ は許されないからである。Higgs superfield を最小個数 (二個) 含むこのモデルを Minimal Supersymmetric Standard Model (MSSM) という。

MSSM の matter content を次の表 2,3 にまとめる。chiral superfields は全て 左巻き (left-handed) に統一した。 超対称性の破れの効果は次の節で考えることにし、この節では超対称性を持つ MSSM の $\mathcal{L}$ を書き下す。

$$\mathcal{L}_{MSSM} = \sum_{\psi} \int d^4\theta\, \psi^\dagger e^{g_\psi V} \psi + \int d^2\theta\, W_{MSSM} \tag{5.1}$$

$$g_\psi V \equiv \sum g \sum_a V^a T^a(R_\psi) \tag{5.2}$$

[30] この superfield は spurion と呼ばれることがある。
[31] 一般には さらに 基本表現に従う messenger quark $q, \overline{q}$ を 1 世代だけ含むモデルを minimal model と呼ぶようであるが、ここでは messenger index N ($q, \overline{q}$ の世代数) はフリーパラメータとしておく。

表 2: MSSM の matter content (chiral multiplet)

chiral superfields	ボソン	フェルミオン	表現
Q	$(\tilde{u}_L\ ,\ \tilde{d}_L)$	$(u_L\ ,\ d_L)$	$(\mathbf{3},\mathbf{2},\frac{1}{6})$
$\overline{u}$	$\tilde{u}_R^*$	$u_R^\dagger$	$(\overline{\mathbf{3}},\mathbf{1},-\frac{2}{3})$
$\overline{d}$	$\tilde{d}_R^*$	$d_R^\dagger$	$(\overline{\mathbf{3}},\mathbf{1},\frac{1}{3})$
L	$(\tilde{\nu}\ ,\ \tilde{e}_L)$	$(\nu\ ,\ e_L)$	$(\mathbf{1},\mathbf{2},-\frac{1}{2})$
$\overline{e}$	$\tilde{e}_R^*$	$e_R^\dagger$	$(\mathbf{1},\mathbf{1},1)$
H_u	$(h_u^+\ ,\ h_u^0)$	$(\tilde{h}_u^+\ ,\ \tilde{h}_u^0)$	$(\mathbf{1},\mathbf{2},\frac{1}{2})$
H_e	$(h_d^0\ ,\ h_d^-)$	$(\tilde{h}_d^0\ ,\ \tilde{h}_d^-)$	$(\mathbf{1},\mathbf{2},-\frac{1}{2})$

表 3: MSSM の matter content (gauge multiplet)

vector superfields	フェルミオン	ボソン	表現
gluino,gluon	$\tilde{g}$	g	$(\mathbf{8},\mathbf{1},0)$
wino,W boson	$\tilde{W}^\pm,\tilde{W}^0$	$W^\pm,W^0$	$(\mathbf{1},\mathbf{3},0)$
bino,B boson	$\tilde{B}^0$	B^0	$(\mathbf{1},\mathbf{1},0)$

$$W_{MSSM} \quad = \quad -(\overline{u}\mathbf{y_u}QH_u - \overline{d}\mathbf{y_d}QH_d - \overline{e}\mathbf{y_e}LH_d) + h.c. \tag{5.3}$$

(5.1) で、和は全ての chiral superfields に渡って取るものとする。(5.2) で、$T^a(R_\psi)$ は chiral superfield ψ が従うゲージ群の生成子の表現行列、g はそのゲージカップリングである。二つ以上のゲージ群の量子数を持つ superfield についてはそれらの和を取る。(5.3) で、符号は Higgs 場が真空期待値を持った後で squark , slepton の質量項の符号が負になるように選んだ。H_u, H_d は

$$H_u = \begin{pmatrix} h_u^+ \\ h_u^0 \end{pmatrix}, H_d = \begin{pmatrix} h_d^0 \\ h_d^- \end{pmatrix}$$

である。Yukawa カップリング $\mathbf{y_u}, \mathbf{y_d}, \mathbf{y_e}$ は世代の空間の 3×3 行列である。

5.2 超対称性を破る soft パラメーター

超対称性に基づく現実的なモデルでは超対称性は exact だが自発的に破れていなければならないことは述べた。このとき、超対称性の破れのスケールより下での $\mathcal{L}_{eff}$ がどうなるかまず一般的に調べる。$\mathcal{L}_{eff}$ に含まれる新しいパラメータを soft パラメータと呼ぶ。

まず、スカラー質量項の 2 次発散が起こらないためには、soft パラメータは次元を持たなくてはいけない (必要条件)。また、ゲージ対称性から許されるくりこみ可能な最も一般的な $\mathcal{L}$ は

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{soft} &= -\frac{1}{2}(M_a\lambda^a\lambda^a + c.c.) - (m^2)^i_j\phi^{*j}\phi_i \\ &\quad -(\frac{1}{2}b^{ij}\phi_i\phi_j + \frac{1}{6}a^{ijk}\phi_i\phi_j\phi_k + c.c.) \qquad (5.4)\\ \mathcal{L}'_{soft} &= -\frac{1}{2}c_i^{jk}\phi^{*i}\phi_j\phi_k + c.c. \qquad (5.5)\end{aligned}$$

である。ここで ϕ はスカラー場 (squark , slepton , Higgs ボソン)、λ は gaugino である。カイラルフェルミオンの質量項を含めなかったが、それは superpotential と $\phi\phi, \phi^*\phi$ の再定義で吸収できてしまうためである。MSSM のゲージ一重項があるときは (5.5) でスカラー質量項の 2 次発散の相殺が起こらなくなるが、MSSM にはそのような場が存在しないので (5.5) を排除しない。しかし、(5.5) があるとモデル構築が著しく複雑になるため、普通考えない。

(5.4) を $\mathcal{L}_{MSSM}$ に含めてもスカラー質量項の 2 次発散の相殺が摂動の全ての次数で起こることが厳密に証明されている [35]。

MSSM の notation で $\mathcal{L}_{soft}$ を書くと次のようになる：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{MSSM}_{soft} &= -\frac{1}{2}(M_3\tilde{g}\tilde{g} + M_2\tilde{W}\tilde{W} + M_1\tilde{B}\tilde{B}) + h.c. \\ &\quad -(\tilde{\bar{u}}\mathbf{a_u}\tilde{Q}H_u - \tilde{\bar{d}}\mathbf{a_d}\tilde{Q}H_d - \tilde{\bar{e}}\mathbf{a_e}\tilde{L}H_d) + h.c. \\ &\quad -\tilde{Q}^\dagger\mathbf{m^2_Q}\tilde{Q} - \tilde{L}^\dagger\mathbf{m^2_L}\tilde{L} - \tilde{\bar{u}}\mathbf{m^2_{\bar{u}}}\tilde{\bar{u}}^\dagger - \tilde{\bar{d}}\mathbf{m^2_{\bar{d}}}\tilde{\bar{d}}^\dagger - \tilde{\bar{e}}\mathbf{m^2_{\bar{e}}}\tilde{\bar{e}}^\dagger \\ &\quad -\mathbf{m^2_{H_u}}H_u^*H_u - \mathbf{m^2_{H_d}}H_d^*H_d \\ &\quad +(bH_uH_d + h.c.) \qquad (5.6)\end{aligned}$$

soft パラメータは以下のものである：

$$\begin{aligned}&M_1, M_2, M_3, \mathbf{a_u}, \mathbf{a_d}, \mathbf{a_e}, \\ &\mathbf{m^2_Q}, \mathbf{m^2_L}, \mathbf{m^2_{\bar{u}}}, \mathbf{m^2_{\bar{d}}}, \mathbf{m^2_{\bar{e}}}, \mathbf{m^2_{H_u}}, \mathbf{m^2_{H_d}}, b \qquad (5.7)\end{aligned}$$

GMSB モデルでは messenger スケールでの soft パラメーターが計算できて、しかも任意パラメータを 5 個 (M,$\Lambda \equiv F/M$,$\arg\mu$,$\tan\beta$,N) しか含まない。低いエネルギースケールでのそれらの値はくりこみ群方程式 (RGE) を解いて求める。

GMSB モデルで soft パラメータの weak スケールでのスペクトルが加速器実験からの制限をクリアしていることは第 6 章で説明する。まずこの節では messenger スケールでの soft パラメータを計算する。そして次の節でくりこみ群方程式を導き、weak スケールでのスペクトルを上の 5 個のパラメ− タの関数として求める。

soft mass M_a , $m^2_{\tilde{f}}$ に寄与するグラフは図 2,3 に挙げた。 gaugino の soft mass は 1-loop で、

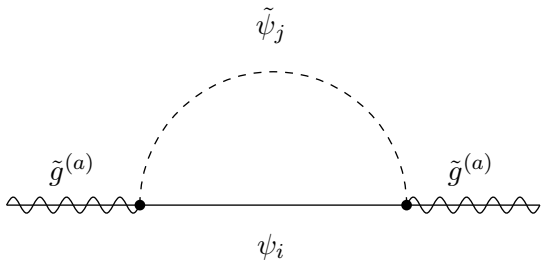


図 2: gaugino soft mass に寄与する 1-loop グラフ

scalar の soft mass は 2-loop で生じることがわかる。原理的にはこれを直接計算すればよい。結果は

$$M_a = \frac{\alpha_a}{4\pi} N \frac{F}{M} \sum_i n_a(i) g(x_i) \qquad (a = 1, \cdots, 3) \tag{5.8}$$

$$m_{\tilde{f}}^2 = 2N \frac{F^2}{M^2} \sum_a \left(\frac{\alpha_a}{4\pi}\right)^2 C_a^{\tilde{f}} \sum_i n_a(i) f(x_i) \tag{5.9}$$

$$x_i \equiv \left|\frac{F}{\lambda_i M^2}\right|$$

$$g(x) = \frac{1}{x^2}\left[(1+x)\ln(1+x) + (1-x)\ln(1-x)\right] \tag{5.10}$$

$$f(x) \equiv \frac{1+x}{x^2}\left[\ln(1+x) - 2\mathrm{Li}\left(\frac{x}{1+x}\right) + \frac{1}{2}\mathrm{Li}\left(\frac{2x}{1+x}\right)\right] + (x \to -x) \tag{5.11}$$

である [32]。ここで $C_a^{\tilde{f}}$ は sfermion $\tilde{f}$ が従うゲージ群の表現の 2 次のカシミアである。また λ_i は spurion S と messenger quark の Yukawa カップリングである。この計算は、特に scalar mass のグラフは 2-loop であり非常に複雑である。ある近似の下で soft パラメータの値を見通しよく正しく再現する方法が提案されている [39] [32] のでここではこの方法により gaugino と squark,slepton の soft パラメータを導く。詳しい計算は Appendix に載せる。結果は

$$M_a = \frac{\alpha_a}{4\pi} N \frac{F}{M}\left(1 + \mathcal{O}(F^2/M^4)\right) \tag{5.12}$$

$$m_{\tilde{f}}^2 = 2N \frac{F^2}{M^2} \sum_a \left(\frac{\alpha_a}{4\pi}\right)^2 C_a^{\tilde{f}}\left(1 + \mathcal{O}(F^2/M^4)\right) \tag{5.13}$$

である。

これらから、GMSB モデルでは gaugino と sfermion の質量の大きさが同じ程度になっていることがわかる[33] 。また、$M_a \propto N$ なのに対し $m_{\tilde{f}} \propto \sqrt{N}$ であるから N を大きくして行くと相対

[32] 高い精度の近似を得るには、[6] 参照。

[33] gravity mediation モデルでは FCNC の amplitude を suppress するために gaugino と sfermion の質量がそれぞれ universal であると仮定するが、それらの間には何の関係もなかった。

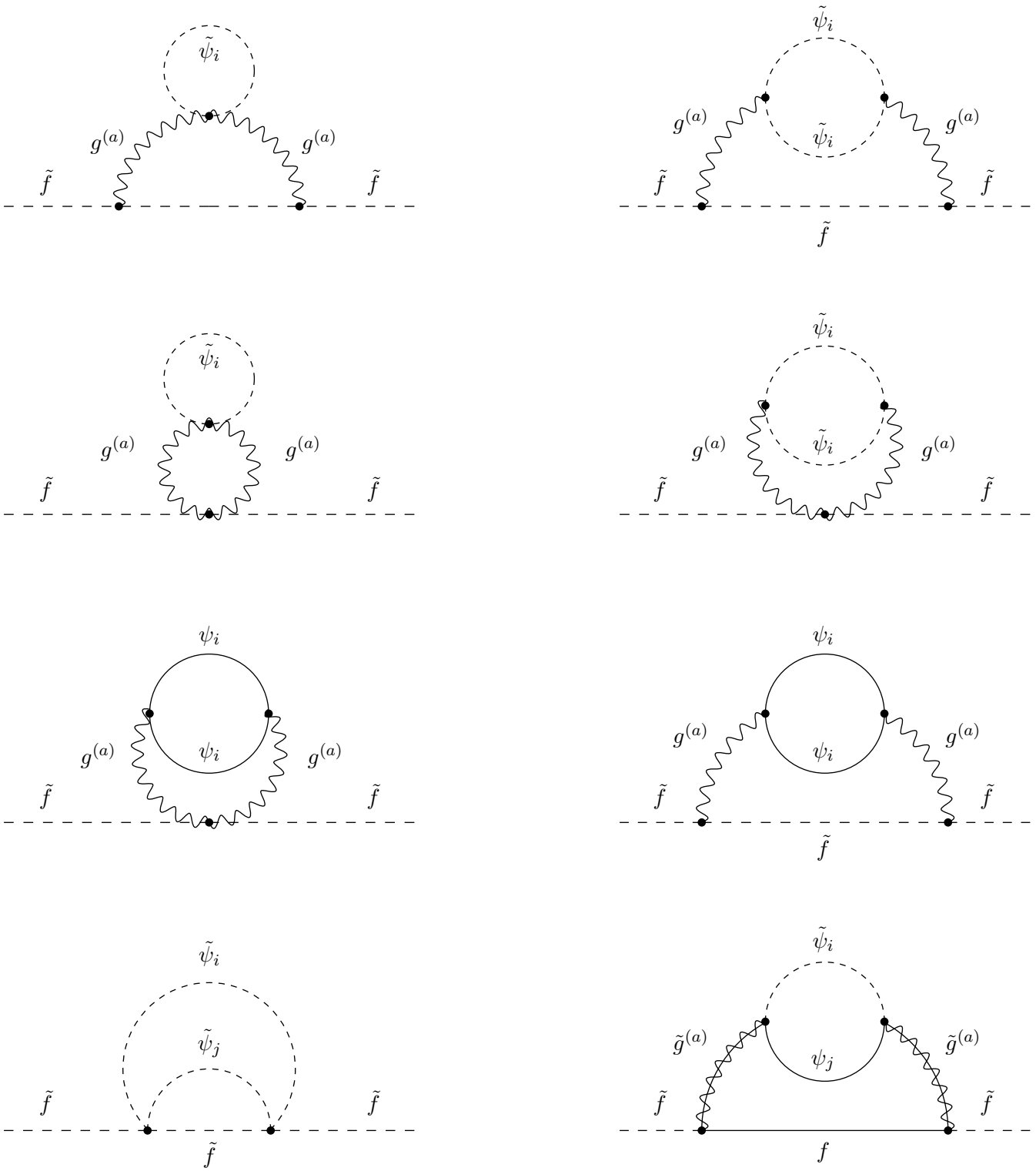


図 3: squark, slepton と Higgs ボソンの soft mass に寄与する 2-loop グラフ

的に squark,slepton よりも gaugino の方が重くなって行くこともわかる。(5.11) で $f(x)$, $g(x)$ の近似形は

$$\begin{aligned} g(x) &= 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{15} + \frac{x^6}{28} + \mathcal{O}(x^8) \\ f(x) &= 1 + \frac{x^2}{36} - \frac{11}{450}x^4 - \frac{319}{11760}x^6 + \mathcal{O}(x^8) \end{aligned} \tag{5.14}$$

だから確かに leading order で (5.12),(5.12) が成り立っている。

a-term **a** は Appendix の (A.44) から messenger スケールではゼロである。

b-term は electro-weak 対称性の破れの条件 (5.39) から weak スケールで決まる。

以上で GMSB における soft パラメータが出そろった。これらは、現象論的に非常に良い性質のものであり、新たな FCNC への寄与が非常に suppress される。これについては、第 6 章で詳しく取り上げる。

5.3 MSSM のくりこみ群方程式

Introduction で述べたように、SUSY GUT では GUT スケールでゲージカップリングが統一される。これは weak スケールでのゲージカップリングの実験値をくりこみ群で走らせて得た結果である。これから、soft パラメータをくりこみ群で走らせるという手続きに意味があると期待できる。この節ではくりこみ群方程式を 1-loop で導く方法の概要を説明する。具体的な計算の結果は Appendix に載せる。

messenger スケールでの soft mass , a-term の値から weak スケールでのそれらの値を求めるには次の量のくりこみ群方程式 (RGE) が必要である。

- gaugino , squark , slepton の soft mass
- Higgs ボソンの質量項
- ゲージカップリング
- Yukawa カップリング、μ term
- a term

μ , b は他のパラメータの RGE の右辺に現れないので考えなくてよい。(tree レベルでは weak スケールで electro-weak 対称性の破れが起こる条件から決まる。(5.38),(5.39) 参照。)

ゲージカップリングの β 関数はよく知られているように

$$\beta \equiv \frac{\partial g_a}{\partial \ln \mu} = \frac{b_a g_a^3}{16\pi^2} \quad , \quad b_a = \left\{ \begin{array}{c} 33/5 \\ 1 \\ -3 \end{array} \right\} \tag{5.15}$$

である[34] 。次に Yukawa カップリングの β 関数を求める。超対称性のある理論では superpotential の非くりこみ定理があるので Yukawa カップリングの vertex correction はなく、Kähler ポテンシャルのくりこみ (波動関数のくりこみ) があるだけである。Kähler ポテンシャルを canonical に規格化すると Yukawa カップリングが波動関数のくりこみを受ける。従って、Yukawa カップリングの β 関数は vertex にくっついている場の γ 関数の和になる。例えばくりこみスケール μ での Kähler ポテンシャルと superpotential を

$$\begin{aligned} K(\mu) &= \sum_i Q_i^\dagger(\mu) e^V Q_i(\mu) \\ W(\mu) &= y_{ijk}(\mu) Q_i(\mu) Q_j(\mu) Q_k(\mu) + h.c. \end{aligned} \tag{5.16}$$

とすると、スケール μ' での Kähler ポテンシャルは

$$\begin{aligned} K(\mu') &= \sum_i Q_i^\dagger(\mu') e^V Q_i(\mu') = \sum_i Z_{Q_i}(\mu') Q_i^\dagger(\mu) e^V Q_i(\mu) \\ Q_i(\mu') &= Z_{Q_i}(\mu')^{1/2} Q_i(\mu) \end{aligned}$$

となるが、superpotential は $W(\mu') = W(\mu)$ だから

$$\begin{aligned} W(\mu') &= y_{ijk}(\mu') Q_i(\mu') Q_j(\mu') Q_k(\mu') \\ &= y_{ijk}(\mu') Z_{Q_i}(\mu')^{1/2} Z_{Q_j}(\mu')^{1/2} Z_{Q_k}(\mu')^{1/2} Q_i(\mu) Q_j(\mu) Q_k(\mu) \\ &= y_{ijk}(\mu) Q_i(\mu) Q_j(\mu) Q_k(\mu) \end{aligned}$$

より

$$y_{ijk}(\mu) \prod_i Z_{Q_i}(\mu)^{1/2} = \text{const.}$$

である。この式の ln を取って $\ln \mu$ で微分すれば

$$\begin{aligned} \beta(y) &\equiv \frac{\partial y}{\partial \ln \mu} = y \frac{\partial \ln y}{\partial \ln \mu} \\ &= -\frac{1}{2} y \sum_i \frac{\partial \ln Z_{Q_i}}{\partial \ln \mu} = \frac{1}{2} y \sum_i \gamma_{Q_i} \\ \gamma_Q &\equiv -\frac{\partial \ln Z_Q}{\partial \ln \mu} \end{aligned} \tag{5.17}$$

となる。よって、MSSM 粒子に対する chiral superfield の γ 関数を求めればよい。

[34] $U(1)_Y$ ゲージカップリング g' の β 関数の係数 b' は $\frac{33}{5} \times \frac{5}{3} = 11$ である。

そこでまず γ 関数への Yukawa カップリングの寄与を考える。chiral superfield の 1-loop での 2 点関数 $\Sigma_2(p^2)$ (p は外線運動量) をくりこみ点 μ^2 のまわりで展開したときの p^2 の 1 次の係数 $\Sigma_2^{(1)}(\mu^2)$ は cut off スケールを Λ として

$$\Sigma_2^{(1)}(\mu^2) = -\frac{|y|^2}{(4\pi)^2}\ln\frac{\Lambda^2}{\mu^2} + \text{finite}$$

であり、また 波動関数のくりこみ $Z \simeq 1 - \Sigma_2^{(1)}(\mu^2)$ だから

$$\gamma \equiv -\frac{\partial \ln Z}{\partial \ln \mu} \simeq \frac{\partial \Sigma_2^{(1)}(\mu^2)}{\partial \ln \mu} = \frac{|y|^2}{8\pi^2} \tag{5.18}$$

となる。これは loop をまわる粒子 1 自由度あたりの寄与である。粒子が N カラーまわるならばその寄与は N 倍になる。

同様にゲージカップリングの寄与を考えると $\Sigma_2^{(1)}(\mu^2)$ は

$$\Sigma_2^{(1)}(\mu^2) = \frac{2g^2 C_2(R)}{(4\pi)^2}\ln\frac{\Lambda^2}{\mu^2} + \text{finite}$$

である。ここで g は ゲージカップリング、$C_2(R)$ は chiral superfield が従うゲージ群の表現 R の 2 次のカシミア である。これから

$$\gamma = -\frac{g^2}{4\pi^2}C_2(R) \tag{5.19}$$

である。(5.18) と (5.19) の符号が逆になっていることは重要である。μ term の β 関数も同様に求めることができる。

次に soft mass の β 関数を求める。まず gaugino の soft mass はゲージカップリングからの寄与だけである。これは図 2 のグラフである。 この計算結果は (5.12) で得られているのでこれを $t = \ln\mu$ で微分すればよい。

squark,slepton の soft mass に寄与するのはゲージカップリング、Yukawa カップリング、a-term、$U(1)_Y$ D-term である。ゲージカップリングからの寄与は図 3 のグラフである。この計算結果は (5.13) で得られているのでこれを $t = \ln\mu$ で微分すればよい。

Yukawa カップリングと a-term からの寄与は 1-loop の Feynman グラフを計算する。(5.24) と $\mathbf{a} \propto \mathbf{y}$ を仮定するとこの寄与を受けるのは第 3 世代粒子 (と Higgs ボソン) だけである。例えば第 3 世代の squark 2 重項 $\tilde{Q}_3$ の質量に寄与する 1-loop グラフの和は

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{(4\pi)^2}\left[|y_b|^2(m_{Q_3}^2 + m_{\tilde{b}}^2 + m_{H_d}^2) + |a_b|^2\right]\ln\left(\tfrac{\mu^2}{\Lambda^2}\right)\\ +&\tfrac{1}{(4\pi)^2}\left[|y_t|^2(m_{Q_3}^2 + m_{\tilde{t}}^2 + m_{H_u}^2) + |a_t|^2\right]\ln\left(\tfrac{\mu^2}{\Lambda^2}\right)\end{aligned}$$

である。これを $t = \ln\mu$ で微分すると

$$\frac{d}{dt}m_{Q_3}^2 = \frac{1}{16\pi^2}(X_t + X_b) \tag{5.20}$$

$$X_t = 2|y_t|^2(m_{Q_3}^2 + m_{\tilde{t}}^2 + m_{H_u}^2) + 2|a_t|^2 \quad (5.21)$$
$$X_b = 2|y_b|^2(m_{Q_3}^2 + m_{\tilde{b}}^2 + m_{H_d}^2) + 2|a_b|^2 \quad (5.22)$$

となる。Higgs ボソンの mass も同様である。

$U(1)_Y$ D-term からの寄与もグラフを計算する。スカラー場 $\tilde{q}_i$ の mass term に寄与する 1-loop グラフからは

$$\frac{d}{dt}m_{\tilde{q}_i}^2 = \frac{g'^2}{16\pi^2}Y_i\sum_j Y_j m_{\tilde{q}_j} \quad (5.23)$$

の寄与がある。ここで Y_i は $\tilde{q}_i$ の $U(1)_Y$ 量子数である。GMSB モデルでは、messenger スケールでこれらはゼロになっている。よって、それ以下のスケールでもゼロのままである。よって、以下の考察ではこの寄与を無視する。

最後に a term の β 関数を求める。a-term は波動関数のくりこみと vertex correction の両方を受けるが、$\mathbf{a} \propto \mathbf{y}$ を仮定して $\mathbf{a} = A\mathbf{y}$ と Yukawa カップリングで規格化した A を考えると、A の β 関数には波動関数のくりこみの効果は現れない。vertex correction に寄与するグラフは gaugino と quark(lepton) がループをまわるグラフ (g^2M に比例) とスカラーの 4 点カップリングを含むグラフ (y^2A に比例) である。これらを計算して $\ln\mu$ で微分すればよい。g^2M に比例するグラフについては、その寄与の具体形が得られている [(A.44)] のでそれを直接微分してもよい。

5.4 electro-weak 対称性の破れと mixing

超対称性の破れが electro-weak 対称性の破れを誘発するモデルを考えたい。第 1、2 世代の Yukawa カップリングは第 3 世代のに比べて充分小さいので、以下では 3 行 3 列成分だけがゼロでないとする:

$$\mathbf{y_t} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_t \end{pmatrix}, \mathbf{y_b} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_b \end{pmatrix}, \mathbf{y}_\tau = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_\tau \end{pmatrix} \quad (5.24)$$

MSSM のポテンシャルは

$$V = \sum_i \left|\frac{\partial W}{\partial \phi_i}\right|^2 + \frac{1}{2}\sum_a g_a^2(\sum_i \phi_i^* T^a \phi_i)^2 - \mathcal{L}_{soft}^{quad} \quad (5.25)$$

である。右辺第 1,2 項は全てのスカラー場について和を取るものとする。$\mathcal{L}_{soft}^{quad}$ は (5.6) の 2 次項である。V には Higgs ボソンの他に squark,slepton を含む項があるが、これらの質量の二乗は大きいので真空期待値を持たないとする。すると、

$$V_{Higgs} = |\mu|^2(|h_u^+|^2 + |h_u^0|^2 + |h_d^0|^2 + |h_d^-|^2) \quad (5.26)$$

$$+m_{H_u}^2(|h_u^+|^2+|h_u^0|^2)+m_{H_d}^2(|h_d^0|^2+|h_d^-|^2)$$
$$+b(h_u^+h_d^- - h_u^0h_d^0)+c.c. \tag{5.27}$$
$$+\frac{1}{2}g^2[(H_u^*\frac{\sigma_a}{2}H_u)+(H_d^*\frac{\sigma_a}{2}H_d)]^2+\frac{1}{2}g'^2(Y_uH_u^*H_u+Y_dH_d^*H_d)^2 \tag{5.28}$$

(5.26) は F term からの寄与である。(5.27) は $\mathcal{L}_{soft}$ からの寄与である。(5.28) は D term からの寄与で、

$$\frac{1}{8}(g^2+g'^2)(|h_u^+|^2+|h_u^0|^2-|h_d^0|^2-|h_d^-|^2)^2+\frac{1}{2}\,g^2|h_d^+h_d^{0*}+h_u^0h_d^{-*}|^2 \tag{5.29}$$

と書き直せる。

以下では真空を探す。よって、スカラー場は全てその真空期待値を表すものとする。まず、gaugino の質量項 M_a が 実で正になるように λ^a の phase を決める。$SU(2)_L$ を使って $h_u^+=0$ とすると、真空の条件

$$0=\left(\frac{\partial V}{\partial h_u^+}\right)_{min}=\left(\frac{\partial V}{\partial h_u^+}\right)_{h_u^+=0}=bh_d^- \tag{5.30}$$

より、$h_d^-=0$ である。よって、$h_u^+=0, h_d^-=0$ だから、この真空では $U(1)_{em}$ は破れていない。V_{Higgs} に $h_u^+=0, h_d^-=0$ を代入すると

$$\begin{aligned} V_{Higgs} &= (|\mu|^2+m_{H_u}^2)|h_u^0|^2+(|\mu|^2+m_{H_d}^2)|h_d^0|^2-(bh_u^0h_d^0+h.c.) \\ &\quad +\frac{1}{8}(g^2+g'^2)(|h_u^0|^2-|h_d^0|^2)^2 \end{aligned} \tag{5.31}$$

となる。b が実で正になるように h_u^0, h_d^0 の phase を再定義する。すると、$-(bh_u^0h_d^0+h.c.)$ が最小になるのは h_u^0 と h_d^0 の phase が逆のときである[35] 。そこで、今度は $U(1)_Y$ を使って h_u^0, h_d^0 を実で正にできる[36] 。

次に、 h_u^0, h_d^0 がゼロでない真空期待値を持つための条件を求める。原点 $(h_u^0, h_d^0)=(0,0)$ 付近で、負の曲率を持つ方向が存在するための条件は次の行列が負の固有値を持つことである：

$$V\simeq V_{quad}=\left(h_u^0\,,\,h_d^0\right)\begin{pmatrix} |\mu|^2+m_{H_u}^2 & -b \\ -b & |\mu|^2+m_{H_d}^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_u^0 \\ h_d^0 \end{pmatrix}$$

これから、

$$(|\mu|^2+m_{H_u}^2)(|\mu|^2+m_{H_d}^2)\;<\;b \tag{5.32}$$

また、遠方でポテンシャルが持ち上がっていないと安定な真空がなくなってしまう。4 次の項の係数 ≥ 0 なので 4 次の項がゼロの方向 $|h_u^0|=|h_d^0|$ に沿って二次の係数 >0 ならば良い。この条件は

$$2|\mu|^2+m_{H_u}^2+m_{H_d}^2-2b\;>\;0 \tag{5.33}$$

[35] $\alpha\equiv\arg(h_u^0)$, $\beta\equiv\arg(h_d^0)$ とすると、b が 実で正として $-b(h_u^0h_d^0+h.c.)=-2b\cos(\alpha+\beta)|h_u^0||h_d^0|$ より、これが最小になるのは $\alpha+\beta=0 \pmod{2\pi}$ のとき。

[36] h_u^0, h_d^0 の $U(1)_Y$ 量子数が逆だから。

次に、ポテンシャルの底でのパラメータ間の関係式をみる。これは weak スケールで成り立つ式である。まず、ポテンシャルの停留点の条件から

$$\frac{\partial V}{\partial h_u^0} = (|\mu|^2 + m_{H_u}^2)h_u^{0*} - bh_d^0 + \frac{1}{4}(g^2+g'^2)[|h_u^0|^2 h_u^{0*} - |h_d^0|^2 h_u^{0*}] = 0 \tag{5.34}$$

$$\frac{\partial V}{\partial h_d^0} = (|\mu|^2 + m_{H_d}^2)h_d^{0*} - bh_u^0 + \frac{1}{4}(g^2+g'^2)[|h_d^0|^2 h_d^{0*} - |h_u^0|^2 h_d^{0*}] = 0 \tag{5.35}$$

である。これらは $\frac{1}{4}(g^2+g'^2)[|h_u^0|^2 - |h_d^0|^2] = \frac{1}{4}\frac{2m_Z^2}{v_u^2+v_d^2}(v_u^2 - v_d^2) = \frac{m_Z^2}{2}\cos 2\beta$ より

$$|\mu|^2 + m_{H_u}^2 = b\cot\beta + \frac{m_Z^2}{2}\cos 2\beta \tag{5.36}$$

$$|\mu|^2 + m_{H_d}^2 = b\tan\beta - \frac{m_Z^2}{2}\cos 2\beta \tag{5.37}$$

と書き直せる。(5.36),(5.37) から b を消去して

$$|\mu|^2 + \frac{m_Z^2}{2} = \frac{m_{H_d}^2 - m_{H_u}^2\tan^2\beta}{\tan^2\beta - 1} \tag{5.38}$$

m_Z を消去して

$$\sin 2\beta = \frac{2b}{2|\mu|^2 + m_{H_u}^2 + m_{H_d}^2} \tag{5.39}$$

ここで注意すべきは、$SU(2)_L \times U(1)_Y$ ゲージ対称性、λ^a, h_u^0, h_d^0 の phase の自由度を使ったので、μ の phase を吸収するための場の phase の自由度がもはやなくなってしまったことである。$\arg(\mu) \neq 0$ だと CP が破れてしまう。これは大きな問題だが、とりあえず $\arg(\mu) = 0$ と「手で」おいておく。

5.4.1 Broken phase の Higgs ボソン

unbroken phase では Higgs ボソンの自由度は複素スカラー場が 4 個 (実スカラー場 8 個) であった。broken phase では、実スカラー場 3 個がゲージ場 $Z^0, W^\pm$ の縦波成分になり、physical な自由度は実スカラー場 5 個である。ゲージ場に吸われるスカラーを G^0 , $G^\pm$、physical なスカラーを A^0 , $H^\pm$, h^0 , H^0 と書く。A^0 は CP odd 、h^0 , H^0 は CP even である。

V_{Higgs} に $h_u^0 \to v_u + h_u^0$, $h_d^0 \to v_d + h_d^0$ を代入し、2 次の項を抜き出すと

$$\begin{aligned} V_{quad} = {} & (|\mu|^2 + m_{H_u}^2)(|h_u^0|^2 + |h_u^+|^2) + (|\mu|^2 + m_{H_d}^2)(|h_d^0|^2 + |h_d^-|^2) \\ & + b(h_u^+ h_d^- - h_u^0 h_d^0) + h.c. \\ & + \frac{1}{8}(g^2+g'^2)[(v_u^2 + 2v_u \mathrm{Re}\,(h_u^0) + |h_u^0|^2) \\ & - (v_d^2 + 2v_d \mathrm{Re}\,(h_d^0) + |h_d^0|^2) + |h_u^+|^2 - |h_d^-|^2]^2 \\ & + \frac{1}{2}g^2 \left| v_d h_u^+ + h_u^+ h_d^{0*} + h_u^0 h_d^{-*} + v_u h_d^{-*} \right|^2 \end{aligned} \tag{5.40}$$

これより mass matrix を読み取ると次のようになる。
$\mathrm{Re}\, h_u^0$ と $\mathrm{Re}\, h_d^0$ は

$$\begin{pmatrix} |\mu|^2 + m_{H_u}^2 + \frac{1}{4}(3v_u^2 - v_d^2)(g^2 + g'^2) & -b - \frac{1}{2}(g^2 + g'^2)v_u v_d \\ -b - \frac{1}{2}(g^2 + g'^2)v_u v_d & |\mu|^2 + m_{H_d}^2 + \frac{1}{4}(3v_d^2 - v_u^2)(g^2 + g'^2) \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Im}\, h_u^0$ と $\mathrm{Im}\, h_d^0$ は

$$\begin{pmatrix} |\mu|^2 + m_{H_u}^2 + \frac{1}{4}(v_u^2 - v_d^2)(g^2 + g'^2) & b \\ b & |\mu|^2 + m_{H_d}^2 + \frac{1}{4}(v_d^2 - v_u^2)(g^2 + g'^2) \end{pmatrix}$$

h_u^+ と h_d^{-*} は

$$\begin{pmatrix} |\mu|^2 + m_{H_u}^2 + \frac{1}{4}g'^2(v_u^2 - v_d^2) + \frac{1}{4}g^2(v_u^2 + v_d^2) & b + \frac{1}{2}g^2 v_u v_d \\ b + \frac{1}{2}g^2 v_u v_d & |\mu|^2 + m_{H_d}^2 + \frac{1}{4}g'^2(v_d^2 - v_u^2) + \frac{1}{4}g^2(v_u^2 + v_d^2) \end{pmatrix}$$

上の式は $m_Z^2 \equiv \frac{1}{2}(g^2 + g'^2)v^2$, $\tan\beta \equiv v_u/v_d$ を用いると簡単にできる。
$\mathrm{Re}\, h_u^0$ と $\mathrm{Re}\, h_d^0$ は

$$\begin{pmatrix} b\cot\beta + m_Z^2 \sin^2\beta & -b - \frac{1}{2}m_Z^2 \sin 2\beta \\ -b - \frac{1}{2}m_Z^2 \sin 2\beta & b\tan\beta + m_Z^2 \cos^2\beta \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Im}\, h_u^0$ と $\mathrm{Im}\, h_d^0$ は

$$\begin{pmatrix} b\cot\beta & b \\ b & b\tan\beta \end{pmatrix}$$

h_u^+ と h_d^{-*} は

$$\begin{pmatrix} \cot\beta(b + \frac{1}{2}m_Z^2 \sin 2\beta \cos^2\theta_W) & b + \frac{1}{2}m_Z^2 \sin 2\beta \cos^2\theta_W \\ b + \frac{1}{2}m_Z^2 \sin 2\beta \cos^2\theta_W & \tan\beta(b + \frac{1}{2}m_Z^2 \sin 2\beta \cos^2\theta_W) \end{pmatrix}$$

次に、これらを対角化する。

$$\begin{pmatrix} G^0 \\ A^0 \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \sin\beta & -\cos\beta \\ \cos\beta & \sin\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{Im}\, h_u^0 \\ \mathrm{Im}\, h_d^0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} m_{G^0} &= 0 \\ m_{A^0}^2 &= \frac{2b}{\sin 2\beta} \end{aligned} \tag{5.41}$$

$$\begin{pmatrix} G^+ \\ H^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\beta & -\cos\beta \\ \cos\beta & \sin\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_u^+ \\ h_d^{-*} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} m_{G^+} &= 0 \\ m_{H^+}^2 &= \frac{2}{\sin 2\beta}\left(b + \frac{m_Z^2}{2}\sin 2\beta \cos^2\theta_W\right) \\ &= m_{A^0}^2 + m_W^2 \end{aligned} \tag{5.42}$$

$$\begin{pmatrix} h^0 \\ H^0 \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\, h_u^0 \\ \mathrm{Re}\, h_d^0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} m_{h^0}^2 &= \frac{1}{2}(m_{A^0}^2 + m_Z^2 - \sqrt{(m_{A^0}^2 + m_Z^2)^2 - 4m_Z^2 m_{A^0}^2 \cos^2 2\beta}) \\ m_{H^0}^2 &= \frac{1}{2}(m_{A^0}^2 + m_Z^2 + \sqrt{(m_{A^0}^2 + m_Z^2)^2 - 4m_Z^2 m_{A^0}^2 \cos^2 2\beta}) \end{aligned} \tag{5.43}$$

但し、新たな mixing angle α は次の式を充たすものである：

$$\frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\beta} = -\frac{m_{A^0}^2 + m_Z^2}{m_{H^0}^2 - m_{h^0}^2} \ , \ \frac{\cos 2\alpha}{\cos 2\beta} = -\frac{m_{A^0}^2 - m_Z^2}{m_{H^0}^2 - m_{h^0}^2} \tag{5.44}$$

MSSM では、クォークとレプトンの質量と CKM 行列は superpotential に含まれる Yukawa カップリングと $\tan\beta$ の値で決まる。tree-level では

$$y_t = \frac{g m_t}{\sqrt{2} m_W \sin\beta}, \quad y_b = \frac{g m_b}{\sqrt{2} m_W \cos\beta}, \quad y_\tau = \frac{g m_\tau}{\sqrt{2} m_W \cos\beta} \tag{5.45}$$

である。これから

$$\frac{y_b}{y_t} = \frac{m_b}{m_t} \tan\beta, \quad \frac{y_\tau}{y_t} = \frac{m_\tau}{m_t} \tan\beta \tag{5.46}$$

である。$m_t \gg m_b,\ m_\tau$ であっても $\tan\beta$ が大きいと y_t に比べて $y_b,\ y_\tau$ を無視できない。

(5.45) から、$\sin\beta$ が小さすぎると unification スケールより手前で y_t が発散してしまう。これから $\underline{\tan\beta \gtrsim 2}$ という制限がつく。一方、$\cos\beta$ が小さすぎると $y_t < y_b,\ y_\tau$ となってしまう。これから $\underline{\tan\beta \lesssim 65}$ という制限がつく。

5.4.2 neutralinos と charginos

electro-weak 対称性の破れによって、gaugino と higgsino が mixing を起こす。$U(1)_{em}$ 量子数を持つ場と持たない場がそれぞれ混じる。mixing 後の中性の場を neutralino、電荷をもつ場を chargino という。

$$\begin{aligned} \psi^0 &= (\tilde{B}, \tilde{W^3}, \tilde{h_d^0}, \tilde{h_u^0}) \to (\tilde{N_1}, \tilde{N_2}, \tilde{N_3}, \tilde{N_4}) \\ \psi^\pm &= (\tilde{W^+}, \tilde{h_u^+}, \tilde{W^-}, \tilde{h_d^-}) \to (\tilde{C_1^+}, \tilde{C_2^+}, \tilde{C_1^-}, \tilde{C_2^-}) \end{aligned} \tag{5.47}$$

neutralino の番号付は質量の小さい順とする。$\mathcal{L}$ の二次の項は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{quad} &= -\frac{1}{2}(M_3 \tilde{g^a} \tilde{g^a} + M_2 \tilde{W^i} \tilde{W^i} + M_1 \tilde{B}\tilde{B}) + h.c. \\ &\quad -\mu(\tilde{h_u^+}\tilde{h_d^-} - \tilde{h_u^0}\tilde{h_d^0}) + h.c. \\ &\quad -\sqrt{2}g \left[(0\ ,\ v_u) \frac{\sigma_a}{2} \begin{pmatrix} \tilde{h_u^+} \\ \tilde{h_u^0} \end{pmatrix} \tilde{W^a} + (v_d\ ,\ 0) \frac{\sigma_a}{2} \begin{pmatrix} \tilde{h_d^0} \\ \tilde{h_d^-} \end{pmatrix} \tilde{W^a} \right] + h.c. \\ &\quad -\sqrt{2}g' \left[(0\ ,\ v_u) \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tilde{h_u^+} \\ \tilde{h_u^0} \end{pmatrix} \tilde{B} + (v_d\ ,\ 0) \left(-\frac{1}{2}\right) \begin{pmatrix} \tilde{h_d^0} \\ \tilde{h_d^-} \end{pmatrix} \tilde{B} \right] + h.c. \end{aligned} \tag{5.48}$$

である。質量項を

$$-\frac{1}{2}(\psi^0)^T\mathbf{M}_{\tilde{\mathbf{N}}}\psi^0 \ + \ -\frac{1}{2}(\psi^{\pm})^T\mathbf{M}_{\tilde{\mathbf{C}}}\psi^{\pm} \ + \ h.c. \tag{5.49}$$

と定義すると

$$\mathbf{M}_{\tilde{\mathbf{N}}} = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & -m_Z\sin\theta_W\cos\beta & m_Z\sin\theta_W\sin\beta \\ 0 & M_2 & m_Z\cos\theta_W\cos\beta & -m_Z\cos\theta_W\sin\beta \\ -m_Z\sin\theta_W\cos\beta & m_Z\cos\theta_W\cos\beta & 0 & -\mu \\ m_Z\sin\theta_W\sin\beta & -m_Z\cos\theta_W\sin\beta & -\mu & 0 \end{pmatrix} \tag{5.50}$$

$$\mathbf{M}_{\tilde{\mathbf{C}}} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{X^T} \\ \mathbf{X} & 0 \end{pmatrix} \ , \ \mathbf{X} = \begin{pmatrix} M_2 & \sqrt{2}\sin\beta m_W \\ \sqrt{2}\cos\beta m_W & \mu \end{pmatrix} \tag{5.51}$$

である。これより、$m_Z \ll |\mu \pm M_1|, |\mu \pm M_2|$ のとき質量の固有状態は

$$\begin{aligned} \tilde{N_1} &\simeq \tilde{B} \\ \tilde{N_2} &\simeq \tilde{W^3} \\ \tilde{N_3}, \tilde{N_4} &\simeq \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{h_u^0} \pm \tilde{h_d^0}) \\ \tilde{C_1^{\pm}} &\simeq \tilde{W^{\pm}} \\ \tilde{C_2^{+}} &\simeq \tilde{h_u}^+ \\ \tilde{C_2^{-}} &\simeq \tilde{h_d}^- \end{aligned} \tag{5.52}$$

である。また、質量固有値は

$$m_{\tilde{N}_1} \simeq M_1 - \frac{m_Z^2\sin^2\theta_W(M_1+\mu\sin 2\beta)}{\mu^2 - M_1^2} \tag{5.53}$$

$$m_{\tilde{N}_2} \simeq M_2 - \frac{m_W^2(M_2+\mu\sin 2\beta)}{\mu^2 - M_2^2} \tag{5.54}$$

$$m_{\tilde{N}_3} \simeq |\mu| + \frac{m_Z^2(1-\epsilon\sin 2\beta)(|\mu| + M_1\cos^2\theta_W + M_2\sin^2\theta_W)}{2(|\mu|+M_1)(|\mu|+M_2)} \tag{5.55}$$

$$m_{\tilde{N}_4} \simeq |\mu| + \frac{m_Z^2(1+\epsilon\sin 2\beta)(|\mu| - M_1\cos^2\theta_W - M_2\sin^2\theta_W)}{2(|\mu|-M_1)(|\mu|-M_2)} \tag{5.56}$$

$$m_{\tilde{C}_1} \simeq M_2 - \frac{m_W^2(M_2+\mu\sin 2\beta)}{\mu^2 - M_2^2} \tag{5.57}$$

$$m_{\tilde{C}_2} \simeq |\mu| + \frac{m_W^2(|\mu| + \epsilon M_2\sin 2\beta)}{\mu^2 - M_2^2} \tag{5.58}$$

である。ここで $\epsilon = \pm 1$ は μ の符号である。質量が $m_{\tilde{N}_i} < m_{\tilde{N}_j}$ for $i < j$, $m_{\tilde{C}_1} < m_{\tilde{C}_2}$ となるように $M_1 < M_2 < \mu$ を仮定した。

5.5 MSSM の質量スペクトル

一般にゲージ対称性が自発的に破れると、質量固有状態がゲージ固有状態からずれる。MSSM では、mixing を起こす相互作用は Yukawa, μ, それに soft term の a である。

Higgs ボソン、neutralino,chargino の質量固有値は前節で求めたので、この節では残りの gluino、squark、slepton の質量を求める。

5.5.1 gluino

gluino は $SU(3)_C$ 8 重項のフェルミオンなので、他の MSSM 粒子と混ざることはない。また、GMSB の枠内では 1-loop の精度で

$$\frac{M_3}{\alpha_3} = \frac{M_2}{\alpha_2} = \frac{M_1}{\alpha_1} \tag{5.59}$$

が任意のくりこみスケールで成り立つ。[(5.12) から。]

weak スケールでの値 $\alpha_S \simeq 0.118$, $\sin^2\theta_W \simeq 0.23$ から、

$$M_3 : M_2 : M_1 \simeq 7 : 2 : 1 \qquad \text{at weak scale} \tag{5.60}$$

である。

physical な質量 (pole mass , $m_{\tilde{g}}$) は running mass パラメータ M_3 と同じではない。ゲージボソンと quark,squark による 1-loop 補正を考えると $m_{\tilde{g}}$ と M_3 には $\overline{DR}$ スキームでは

$$m_{\tilde{g}} = M_3(Q)\left(1 + \frac{\alpha_S}{4\pi}[15 + 6\ln(Q/M_3) + \sum A_{\tilde{q}}]\right) \tag{5.61}$$

$$A_{\tilde{q}} \equiv \int_0^1 dx\, x \ln\left[x\frac{m_{\tilde{q}}^2}{M_3^2} + (1-x)\frac{m_{\tilde{q}}^2}{M_3^2} - x(1-x)\right] \tag{5.62}$$

という関係がある [36]。(5.61) で、和は全ての quark,squark についてとるものとする。

5.5.2 squark と slepton

第 1、2 世代の Yukawa カップリング を無視すると、$a \propto y$ の仮定の下では第 1、2 世代の a も無視できる。MSSM では、μ は $y\mu$ の形でのみ含まれる[37] から、y が充分小さいならこれも無視できる。よって、第 1、2 世代は mixing がなく、スペクトルは 7 つの (ほとんど) 縮退した組 $(\tilde{e_R}, \tilde{\mu_R})$, $(\tilde{\nu_e}, \tilde{\nu_\mu})$, $(\tilde{e_L}, \tilde{\mu_L})$, $(\tilde{u_R}, \tilde{c_R})$, $(\tilde{d_R}, \tilde{s_R})$, $(\tilde{u_L}, \tilde{c_L})$, $(\tilde{d_L}, \tilde{s_L})$ からなる。

[37] 例えば (5.69) 参照。

各 squark,slepton は インプットスケールでの質量の他に、くりこみ群から補正を受ける。それは、その量子数に応じて

$$K_a(Q) = -\frac{1}{2\pi^2}\begin{pmatrix} 3/5 \\ 3/4 \\ 4/3 \end{pmatrix}\int_{\ln Q_0}^{\ln Q} dt\ g_a^2(t)\,|M_a(t)|^2\ ,\ a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{5.63}$$

である。Q はくりこみスケールである。

weak スケールでの質量スペクトルはくりこみ群で走らせたパラメータで書かれた $\mathcal{L}_{eff}$ から読み取れる。

$$\mathcal{L}_{eff} \supset \mathcal{L}_{mass} = \mathcal{L}_{F-term} + \mathcal{L}_{D-term} + \mathcal{L}_{soft} \tag{5.64}$$

$\mathcal{L}_{D-term}$ は $SU(2)\times U(1)_Y$ の D-term から生じる。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{D-term} &= -\frac{1}{2}\left(\sum_i \phi_i^* g\frac{\sigma_a}{2}\phi_i\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\sum_i \phi_i^* g' Y_i \phi_i\right)^2 \\ &= -\sum_i \phi_i^* \Delta_i \phi_i \qquad (5.65) \\ \Delta_i &\equiv m_Z^2 \cos 2\beta (I_3 - Q_{em}\sin^2\theta_W) \qquad (5.66) \end{aligned}$$

ここで I_3 は $SU(2)$ アイソスピンの第 3 成分、Q_{em} は $U(1)_Y$ 量子数である。この中にはくりこみ群で走る量は含まれていない。

一方、$\mathcal{L}_{F-term}$ からは superpartner が 超対称性によりもつ質量 (例えば squark に対しては標準理論のクォークの質量と同じ大きさ) と Yukawa カップリングによる mixing がくるが、これは $|y|^2, y\mu$ の項から生じるので、第 3 世代に対してだけ存在する。例えば $\tilde{t}$ に対しては、 $\mathcal{L}_{F-term}$ は

$$\mathcal{L}_{F-term} = -(\tilde{t}^*\ ,\ \tilde{\bar{t}})\begin{pmatrix} M_t^2 & -\mu y_t v\cos\beta \\ -\mu y_t v\cos\beta & M_t^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{t} \\ \tilde{\bar{t}}^* \end{pmatrix} \tag{5.67}$$

ここで、$v^2 \equiv v_u^2 + v_d^2\ ,\ M_t^2 \equiv |y_t|^2 v_u^2$ である。M_t^2 は超対称性により $\tilde{t}$ がもつ質量である。$\tilde{b}, \tilde{\tau}$ に対しても同様である。第 1、2 世代の squark,slepton は非対角成分を持たない。この中で、μ, y_t はくりこみ群で走る量である。

$\mathcal{L}_{soft}$ からは soft mass と a term による mixing がくるが、今の場合やはり mixing は第 3 世代に対してだけ存在する。例えば $\tilde{t}$ に対しては $\mathcal{L}_{soft}$ は

$$\mathcal{L}_{soft} = -(\tilde{t}^*\ ,\ \tilde{\bar{t}})\begin{pmatrix} m_Q^2 & a_t v\sin\beta \\ a_t v\sin\beta & m_{\bar{t}}^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{t} \\ \tilde{\bar{t}}^* \end{pmatrix} \tag{5.68}$$

である。この中で、$a_t, m_Q, m_{\bar{t}}$ はくりこみ群で走る量である。

(5.65),(5.67),(5.68) を合わせると、質量行列が得られる。例えば $(\tilde{t}\ ,\ \tilde{\bar{t}}^*)$ の質量行列は :

$$\mathbf{m_{\tilde{t}}^2} = \begin{pmatrix} m_Q^2 + M_t^2 + \Delta_t & v(a_t\sin\beta - \mu y_t\cos\beta) \\ v(a_t\sin\beta - \mu y_t\cos\beta) & m_{\bar{t}}^2 + M_t^2 + \Delta_{\bar{t}} \end{pmatrix} \tag{5.69}$$

$(\tilde{\tau}\,,\,\tilde{\overline{\tau}}^*)$ に対しては、

$$\mathbf{m}^{\mathbf{2}}_{\tilde{\tau}} = \begin{pmatrix} m_L^2 + M_\tau^2 + \Delta_\tau & v(a_\tau \cos\beta - \mu y_\tau \sin\beta) \\ v(a_\tau \cos\beta - \mu y_\tau \sin\beta) & m^2_{\overline{\tau}} + M_\tau^2 + \Delta_{\overline{\tau}} \end{pmatrix} \tag{5.70}$$

$\tau \to b$ と置き換えると $(\tilde{b}\,,\,\tilde{\overline{b}}^*)$ の質量行列が得られる。

(5.69) と (5.70) では非対角成分の $\tan\beta$ 依存性が違っている。(5.69) では、$\tan\beta$ が小さくなると小さい方の固有値がより小さくなる。逆に、(5.70) では、$\tan\beta$ が大きくなると小さい方の固有値がより小さくなる。$SU(3) \times U(1)_{em}$ が破れないためには $m_{\tilde{t}}^2, m_{\tilde{b}}^2, m_{\tilde{\tau}}^2 > 0$ が必要である。これから、$\tan\beta$ への制限がつく。

5.6 MSSM の質量スペクトル - まとめ

最後に、MSSM の質量スペクトルをまとめておく[38] 。Yukawa カップリングの形は (5.24) を仮定し、第 1、2 世代の mixing を無視する。

まず、matter content は次の表 4 の通りである。これらのスペクトルの特徴的な性質をまとめておく。

表 4: MSSM の matter content

粒子	スピン	質量固有状態	ゲージ固有状態
Higgs bosons	0	$h^0\ A^0\ H^0\ H^\pm$	$h_u^0\ h_u^+\ h_d^0\ h_d^-$
squarks	0	$\tilde{u_L}\ \tilde{u_R}\ \tilde{d_L}\ \tilde{d_R}$ $\tilde{c_L}\ \tilde{c_R}\ \tilde{s_L}\ \tilde{s_R}$ $\tilde{t_1}\ \tilde{t_2}\ \tilde{b_1}\ \tilde{b_2}$	同左 同左 $\tilde{t_L}\ \tilde{t_R}\ \tilde{b_L}\ \tilde{b_R}$
sleptons	0	$\tilde{e_L}\ \tilde{e_R}\ \tilde{\nu}_e$ $\tilde{\mu_L}\ \tilde{\mu_R}\ \tilde{\nu}_m$ $\tilde{\tau_1}\ \tilde{\tau_2}\ \tilde{\nu}_\tau$	同左 同左 $\tilde{\tau_L}\ \tilde{\tau_R}\ \tilde{\nu}_\tau$
gluino	$\frac{1}{2}$	$\tilde{g}$	同左
neutralino	$\frac{1}{2}$	$\tilde{N_1}\ \tilde{N_2}\ \tilde{N_3}\ \tilde{N_4}$	$\tilde{W}^0\ \tilde{B}\ \tilde{h_u}^0\ \tilde{h_d}^0$
chargino	$\frac{1}{2}$	$\tilde{C_1}^\pm\ \tilde{C_2}^\pm$	$\tilde{W}^\pm\ \tilde{h_u}^\pm$
gravitino/goldstino	$\frac{3}{2}/\frac{1}{2}$	$\tilde{G}$	同左

- gaugino と squark, slepton の質量の大きさが同じ程度になる。

[38] Higgs ボソン以外の標準理論粒子は既知として省略する。

- 大きい y_t, y_b と mixing の効果により $\tilde{t}_1$, $\tilde{b}_1$ は第 1、2 世代の squark よりも軽くなる。
- $SU(2)$ の RGE の分だけ $\tilde{q}_L$ は $\tilde{q}_R$ よりも重くなる。
- $SU(3)_C$ の RGE の分だけ $\tilde{C}, \tilde{N}$ は $\tilde{g}$ より軽くなる。
- N が大きくなると gaugino は sfermion に比べて重くなる。
- $\tan\beta$ が大きいと $\tilde{b}_1$, $\tilde{\tau}_1$ は軽くなる。($\tilde{t}_1$ は重くなる。)
- $\tan\beta$ が小さいと $\tilde{t}_1$ は軽くなる。($\tilde{b}_1$, $\tilde{\tau}_1$ は重くなる。)
- 最も軽い Higgs ボソン h^0 は 150GeV より軽い。

superpartner の soft mass の正確な値は messenger スケールでの値を RGE で weak スケールまで引っ張って求める。これには数値計算が必要である。superpartner の質量の値は soft mass と超対称性により持つ質量と $SU(2)\times U(1)_Y$ D-term の和である。第 3 世代粒子に対しては Yukawa カップリング、a term、μ term を含む mixing がある。weak スケールでの m_{H_u} , m_{H_d} の値と (5.38),(5.39) から μ term、b term が決まる。μ term は第 3 世代粒子の mixing と higgsino-gaugino mixing を解くのに使う。b term が決まると (5.41) から Higgs ボソン A^0 の質量が決まる。さらに (5.42),(5.43) から $H^{\pm}$, h^0 , H^0 の質量が決まる。RGE として Appendix に挙げた式を用いて数値計算した結果を次の図 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 に載せる。これらから上で挙げたスペクトルの性質を読み取ることができる。加速器実験からついている super particle の質量の下限は第 6 章で挙げる。

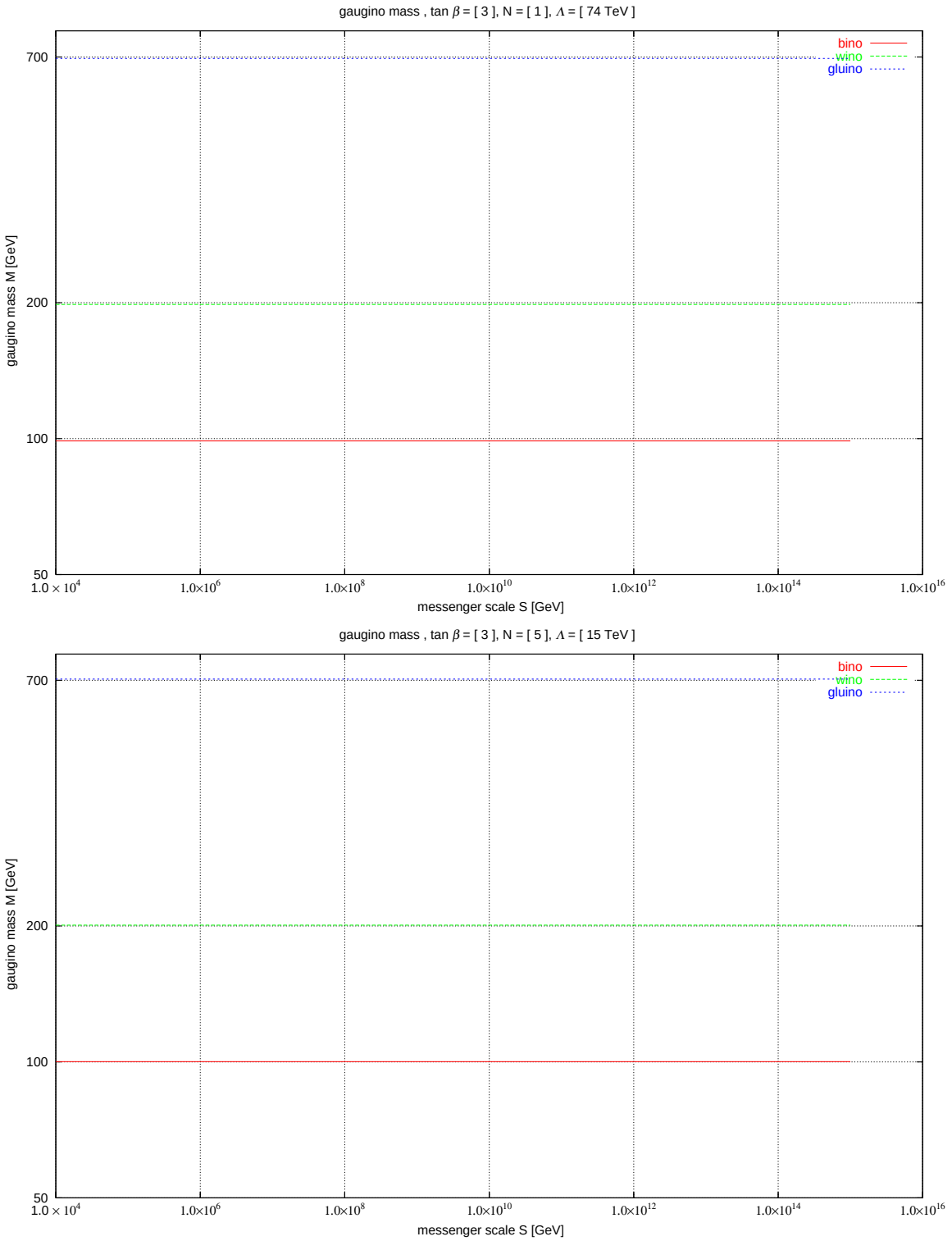


図 4: messenger スケールの関数としてみた MSSM の gaugino の (weak スケールでの) スペクトル。(上のグラフは $\Lambda = 74$ TeV,$N = 1$、下のグラフは $\Lambda = 15$ TeV,$N = 5$.) Λ を固定しているのでスケールのよらず一定である。gaugino mass relation (5.59) が成立していることがわかる。

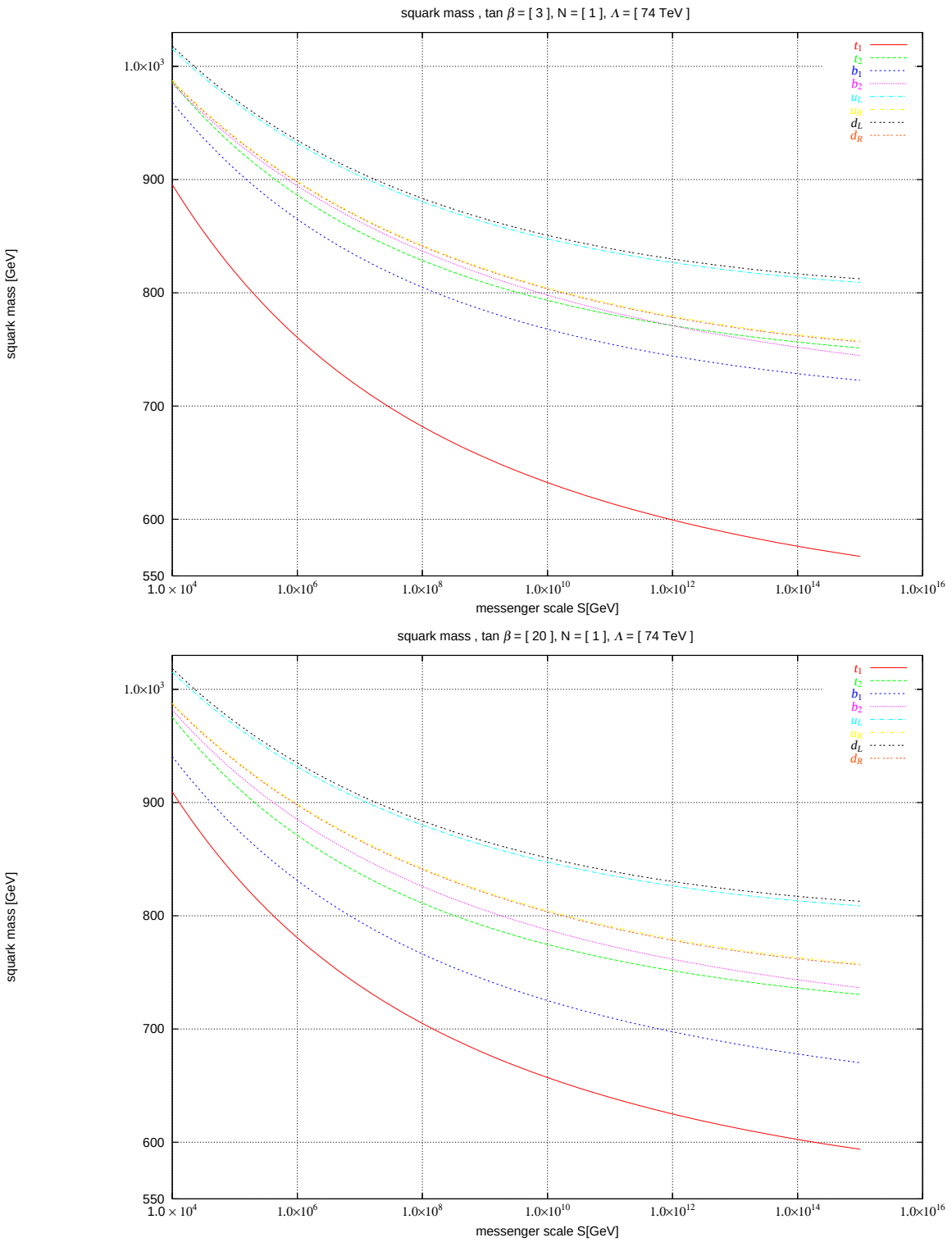


図 5: messenger スケールの関数としてみた MSSM の squark の (weak スケールでの) スペクトル。(上のグラフは $\Lambda = 74$ TeV,$N = 1$,$\tan\beta = 3$、下のグラフは $\Lambda = 74$ TeV,$N = 1$,$\tan\beta = 20$.) このとき $\tilde{B}$ がおよそ 100 GeV である。

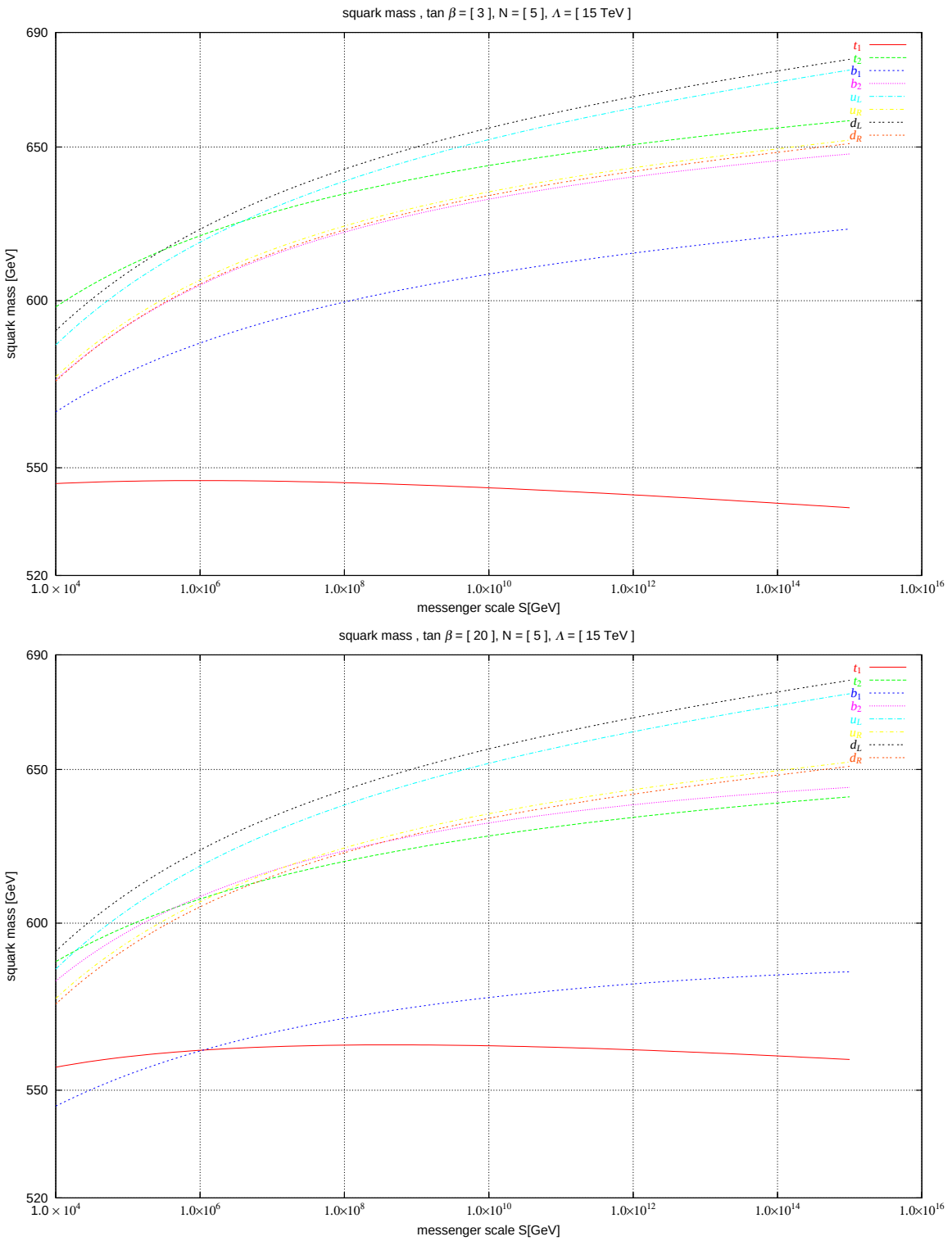


図 6: messenger スケールの関数としてみた MSSM の squark の (weak スケールでの) スペクトル。(上のグラフは $\Lambda = 15$ TeV,$N = 5$,$\tan\beta = 3$、下のグラフは $\Lambda = 15$ TeV,$N = 5$,$\tan\beta = 20$.) このとき $\tilde{B}$ がおよそ 100 GeV である。

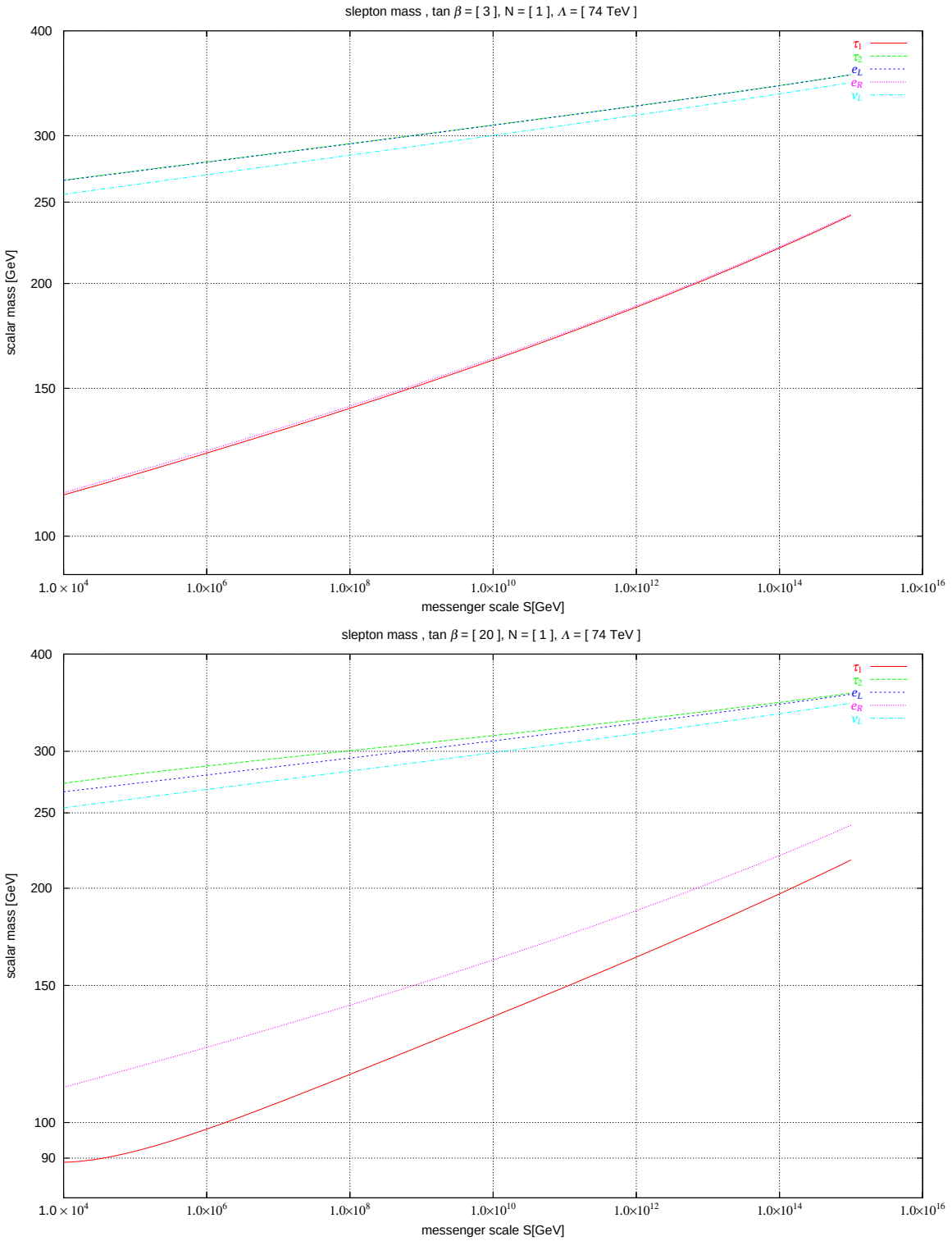


図 7: messenger スケールの関数としてみた MSSM の slepton の (weak スケールでの) スペクトル。(上のグラフは $\Lambda = 74$ TeV,$N = 1$,$\tan\beta = 3$、下のグラフは $\Lambda = 74$ TeV,$N = 1$,$\tan\beta = 20$.) このとき $\tilde{B}$ がおよそ 100 GeV である。

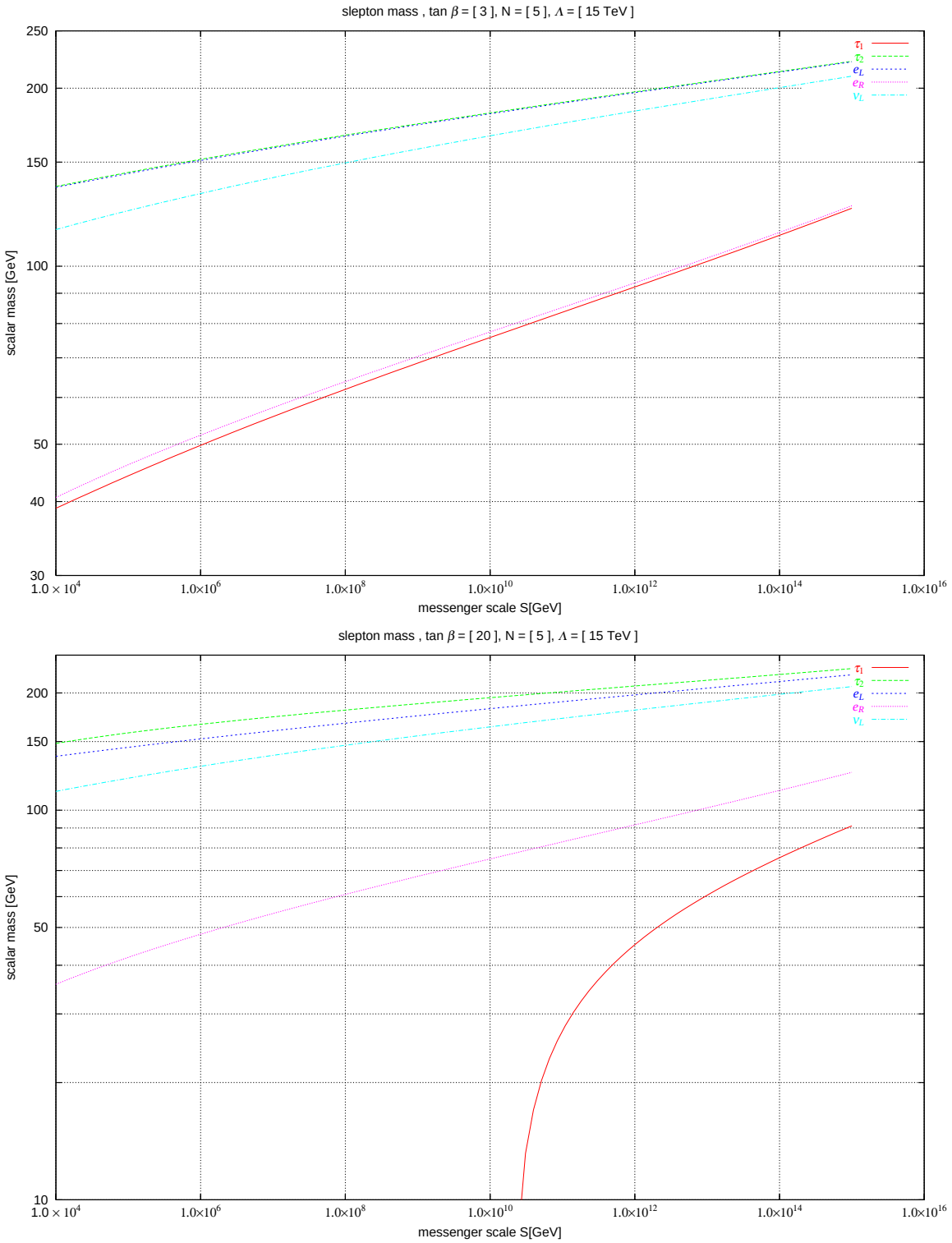


図 8: messenger スケールの関数としてみた MSSM の slepton の (weak スケールでの) スペクトル。(上のグラフは $\Lambda = 15$ TeV,$N = 5$,$\tan\beta = 3$、下のグラフは $\Lambda = 15$ TeV,$N = 5$,$\tan\beta = 20$.) このとき $\tilde{B}$ がおよそ 100 GeV である。

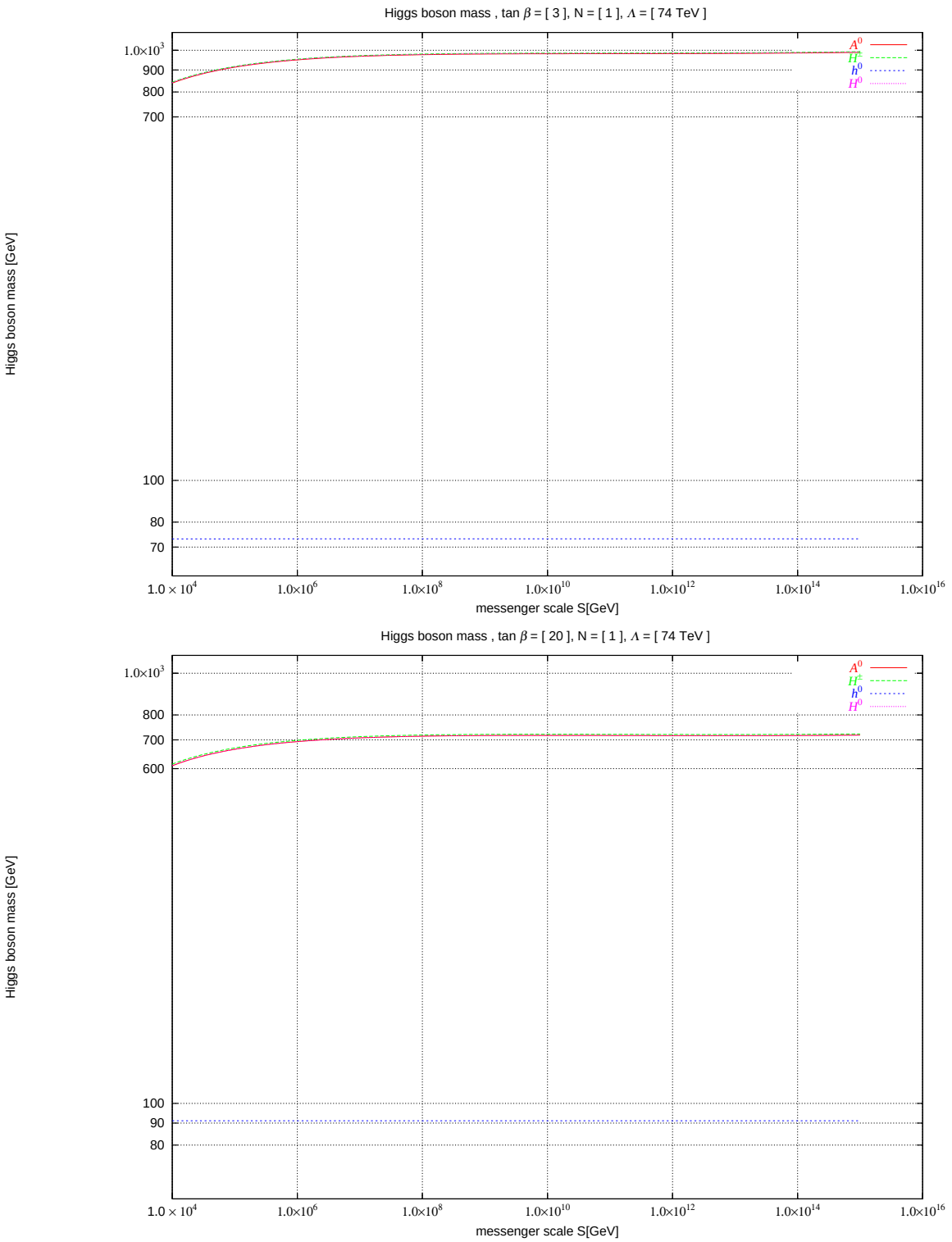


図 9: messenger スケールの関数としてみた MSSM の Higgs ボソンの (weak スケールでの) スペクトル。(上のグラフは $\Lambda = 74$ TeV,$N = 1$,$\tan\beta = 3$、下のグラフは $\Lambda = 74$ TeV,$N = 1$,$\tan\beta = 20$.) このとき $\tilde{B}$ がおよそ 100 GeV である。

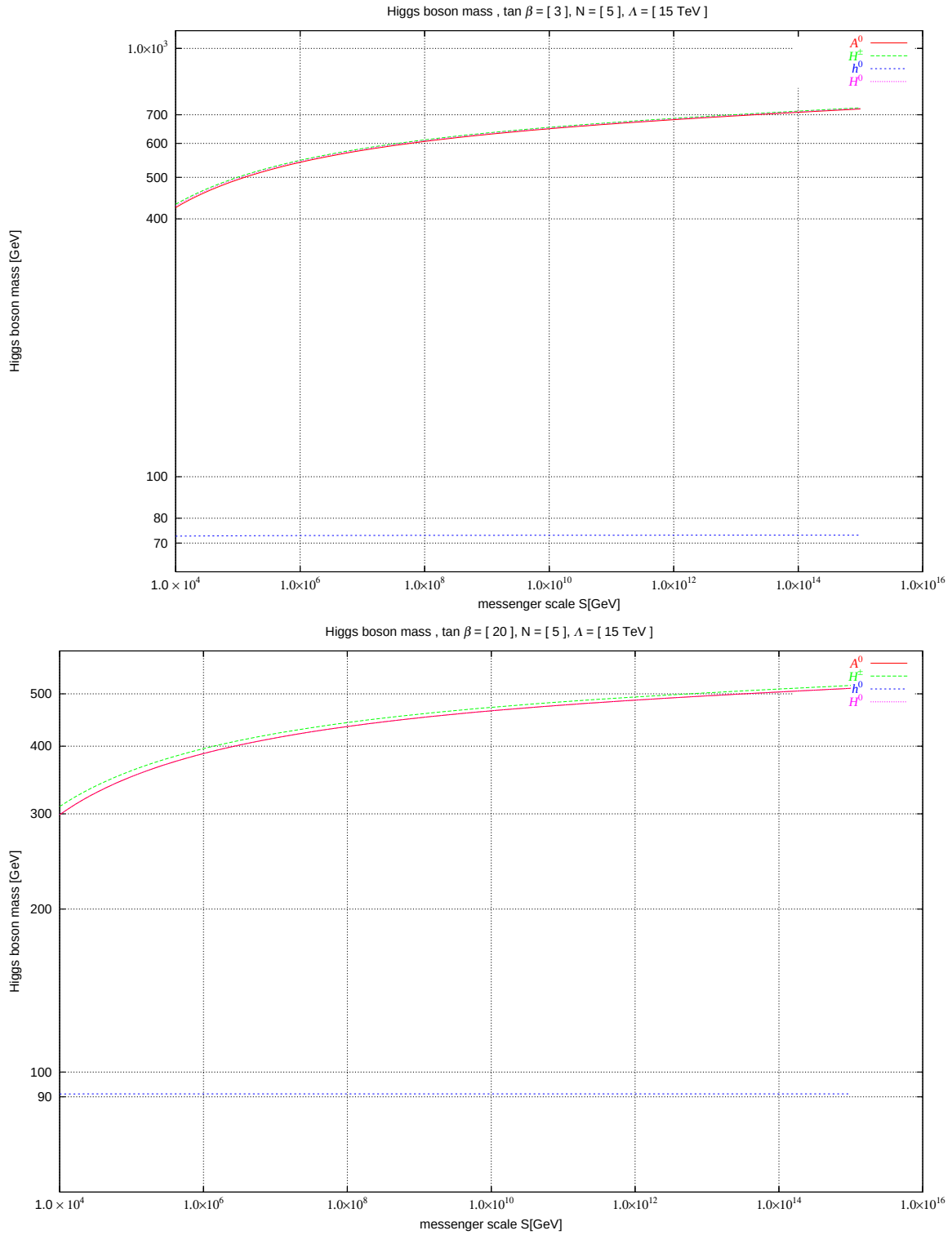


図 10: messenger スケールの関数としてみた MSSM の Higgs ボソンの (weak スケールでの) スペクトル。(上のグラフは $\Lambda = 15$ TeV,$N = 5$,$\tan\beta = 3$、下のグラフは $\Lambda = 15$ TeV,$N = 5$,$\tan\beta = 20$.) このとき $\tilde{B}$ がおよそ 100 GeV である。

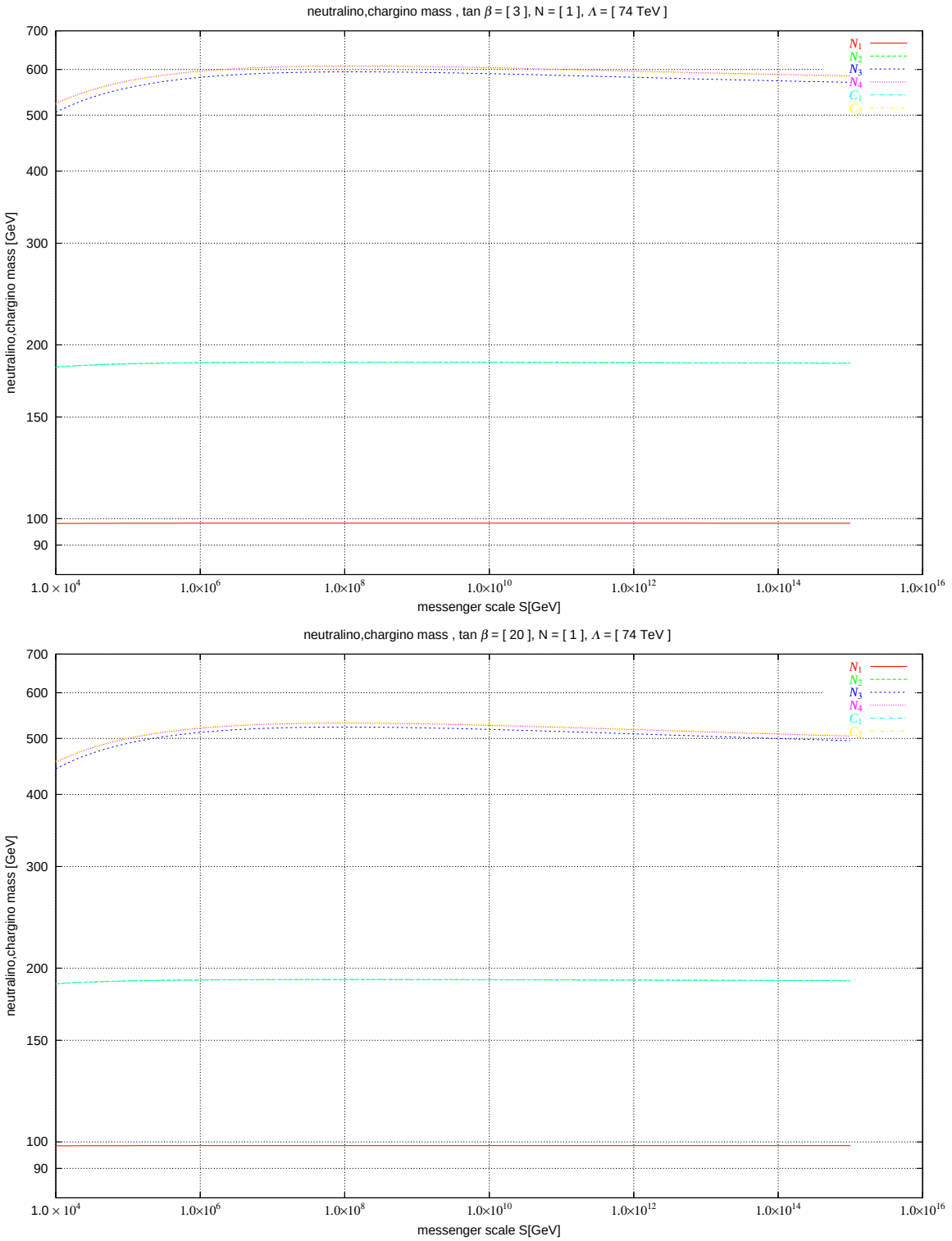


図 11: messenger スケールの関数としてみた MSSM の neutralino,chargino の (weak スケールでの) スペクトル。(上のグラフは $\Lambda = 74$ TeV,$N = 1$,$\tan\beta = 3$、下のグラフは $\Lambda = 74$ TeV,$N = 1$,$\tan\beta = 20$.) このとき $\tilde{B}$ がおよそ 100 GeV である。

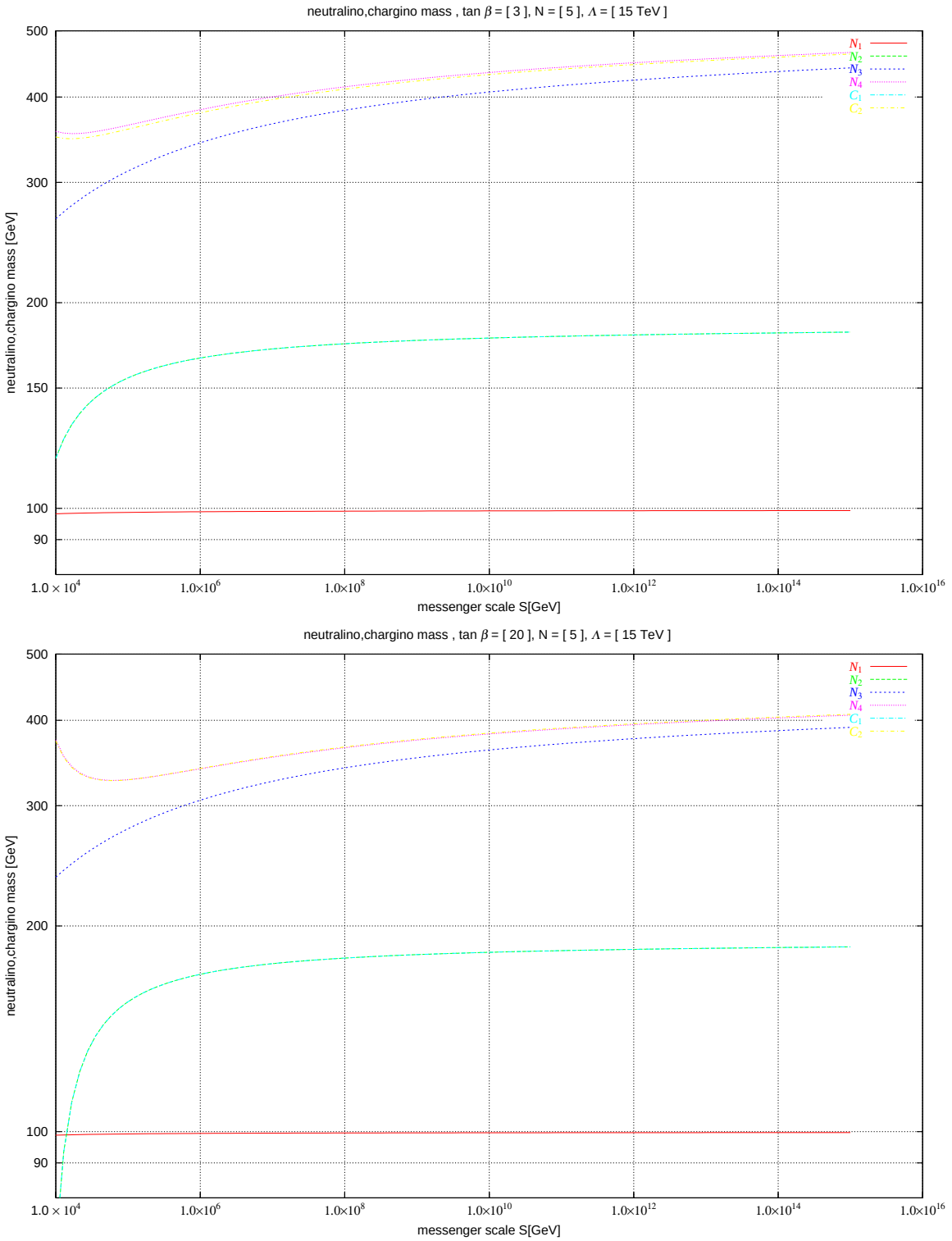


図 12: messenger スケールの関数としてみた MSSM の neutralino,chargino の (weak スケールでの) スペクトル。(上のグラフは $\Lambda = 15$ TeV,$N = 5$,$\tan\beta = 3$、下のグラフは $\Lambda = 15$ TeV,$N = 5$,$\tan\beta = 20$.) このとき $\tilde{B}$ がおよそ 100 GeV である。

5.7 LSP - gravitino

GMSB モデルでは一般に gravitino が LSP(lightest susy particle) である[39] 。R パリティが保存するとき、全ての susy particle は崩壊を重ねて最終的に安定な LSP になる。従って、LSP は宇宙論的に大きな意味を持つ。gravitino と宇宙論については第 7 章で詳しく取り上げることにして、ここでは gravitino の質量と超対称性の破れの関係、gravitino と他の粒子のカップリングを調べておくことにする。

まず グローバルな超対称性のある理論から始める。グローバルな超対称性が自発的に破れると massless フェルミオン (goldstino と呼ぶ) が生じる。これは、超対称性を破る F-term/ D-term を含む chiral /vector superfield のフェルミオン成分である。これを具体的にみてみる。

F-term/ D-term の真空期待値がゼロでない chiral/ vector superfield をそれぞれ $\Phi = (\phi,\, \psi)$、$V = (A^a_\mu,\, \lambda^a)$ とする。$\mathcal{L}$ のフェルミオンを含む部分は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{fermion} &= -\sqrt{2}g[(\phi^* T^a \psi)\lambda^a + \lambda^\dagger_a(\psi^\dagger T^a \phi)] \\ &\quad - \left(\frac{1}{2}W^{ij}\psi_i\psi_j + h.c.\right) \end{aligned} \tag{5.71}$$

これからフェルミオンの質量行列を読み取ると

$$M_f = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}g(\langle\phi^*\rangle\, T^a)_i \\ \sqrt{2}g(\langle\phi^*\rangle\, T^a)_i & \langle W_{ij}\rangle \end{pmatrix} \tag{5.72}$$

となる。次のベクトル

$$\tilde{G} \equiv \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\langle D^a\rangle \\ \langle F_i\rangle \end{pmatrix} \tag{5.73}$$

は M_f のゼロ固有値の固有ベクトルである。これを以下で確かめる。

$$M_f\tilde{G} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}g\,\langle\phi_i^*\rangle\, T^a\,\langle F_j\rangle \\ g\,\langle D^a\rangle\,(\langle\phi^*\rangle\, T^a)_j + \langle F_i\rangle\,\langle W_{ij}\rangle \end{pmatrix} \tag{5.74}$$

まず superpotential W のゲージ不変性より

$$\delta_\epsilon\, W = \frac{\partial W}{\partial\phi_i}\,\delta_\epsilon\,\phi_i = -F_i^*\epsilon^a T^a_{ij}\phi_j = 0$$

これから第 1 行はゼロである。次に ポテンシャル $V = \sum_k |F_k|^2 + \frac{1}{2}(D^a)^2$ の極小条件より

$$0 = \frac{\partial V}{\partial\phi_i} = -F_k W^{ki} - gD^a(\phi^* T^a)_i$$

[39] これは gauge mediation で伝わる soft mass が gravity mediation で伝わる soft mass よりも充分大きいという要請の帰結である。この要請は、GMSB モデルが FCNC を自動的に suppress する利点を生かすために必要である。5.9 節で求める $\sqrt{F_{DSB}}$ の上限の値を参照。

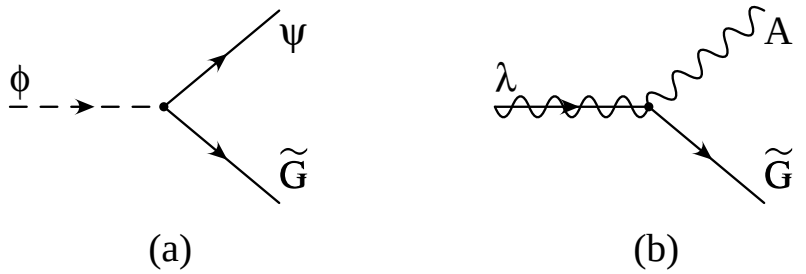


図 13: goldstino のスピン $1/2$ 成分と chiral multiplet (ϕ, ψ)、gauge multiplet (λ^a, A^a) とのカップリング

が期待値に対して成り立つ。($D^a = -g\phi_k^* T_{kl}^a \phi_l$。) よって第 2 行もゼロである。以上から

$$\tilde{G} = \frac{\langle D^a \rangle}{\sqrt{2}} \lambda^a + \langle F_i \rangle \, \psi_i \tag{5.75}$$

である。

次に goldstino と他のボソン、フェルミオンのカップリングを調べる。超対称性の保存カレント (supercurrent) は

$$\begin{aligned} J_\alpha^\mu &= (\sigma^\nu \overline{\sigma}^\mu \psi_i)_\alpha \, D_\nu \phi^{i\,*} - i(\sigma^\mu \psi^{i\,\dagger})_\alpha W_i^* \\ &\quad - \frac{1}{2\sqrt{2}} (\sigma^\nu \overline{\sigma}^\rho \sigma^\mu \lambda^{a\,\dagger})_\alpha \, F_{\nu\rho}^a - \frac{i}{\sqrt{2}} (g\phi^* T^a \phi)(\sigma^\mu \lambda^{a\,\dagger})_\alpha \end{aligned} \tag{5.76}$$

である。第 1 行は goldstino 成分 ψ と ϕ, F とのカップリングであり、第 2 行は goldstino 成分 λ と A_μ, D とのカップリングである。以下では簡単のため期待値を持つ F が一つだけあるとする。

カレントの保存 $\partial_\mu J_\alpha^\mu = 0$ より

$$\begin{aligned} 0 &= i \langle F \rangle (\sigma^\mu \partial_\mu \tilde{G}^\dagger)_\alpha + \partial_\mu j_\alpha^\mu \\ j_\alpha^\mu &\equiv J_\alpha^\mu - i(\sigma^\mu \tilde{G})_\alpha F \end{aligned} \tag{5.77}$$

これを運動方程式として与える $\mathcal{L}_{eff}$ は

$$\mathcal{L}_{\tilde{G}} = -i\tilde{G}^\dagger \overline{\sigma}^\mu \partial_\mu \tilde{G} - \frac{1}{\langle F \rangle} (\tilde{G} \partial_\mu j^\mu + h.c.) \tag{5.78}$$

これから、goldstino のカップリングは pion π と同様に強さ $1/F$ の微分カップリングになっていることがわかる。

goldstino がカップルしている場が on-shell のときは、運動方程式を使って (5.78) を書き直すことができる。j_α^μ には既に 1 個微分が含まれているので、$\partial_\mu j^\mu$ には 2 個微分が含まれる。これは運動方程式から質量の 2 乗に置き換わる。具体的に計算すると

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{\langle F \rangle} \left[(m_\psi^2 - m_\phi^2) \phi^{i\,*} \psi_i^\alpha + \frac{M_\lambda}{4\sqrt{2}} \lambda^{a\,\beta} (\sigma^{\nu\rho})_\beta^\alpha F_{\nu\rho}^a \right] \tilde{G}_\alpha + h.c. \tag{5.79}$$

である。$F \to 0$ の極限でカップリングは大きくなるが、$m_\psi^2 - m_\phi^2$ と M_λ もゼロに近付くのでこのカップリングは $F \to 0$ でゼロになる。

local な超対称性のある理論 (supergravity) では超対称性が破れると goldstino がゲージ場であるスピン $\frac{3}{2}$ の gravitino に吸われてその縦波成分 (スピン $\frac{1}{2}$ 成分) になる。(これを super-Higgs mechanism という。) したがって、gravitino の質量と超対称性の破れのスケールに関係がつくことがわかる。goldstino を含む superfield (簡単のため一つだけ存在すると仮定する)

$$\Phi = \phi + \sqrt{2}\theta^\alpha \tilde{G}_\alpha + \theta^2 F_{DSB}$$

が canonical な kinetic term をもち、ポテンシャル (宇宙定数) がゼロのとき、gravitino の質量 $m_{3/2}$ は

$$m_{3/2} = \frac{\langle F_{DSB} \rangle}{\sqrt{3} M_{Pl}^*} \tag{5.80}$$

で与えられる [48]。ここで M_{Pl}^* は reduced Planck mass $(8\pi G_N)^{-1/2} = 2.4 \times 10^{18}\mathrm{GeV}$ である。これは supergravity 理論での $\mathcal{L}$ から読み取った gravitino の質量が

$$m_{3/2}^2 = e^{\langle K \rangle} \left| \frac{\langle W \rangle}{M_{Pl}^{*\,2}} \right|^2$$

であることと、スカラーポテンシャルが

$$\mathcal{V} = e^K \left[K^{i\,j*} \left(\frac{\partial W}{\partial \phi_i} \right) \left(\frac{\partial W}{\partial \phi_j} \right)^* - 3 \frac{|W|^2}{M_{Pl}^{*\,2}} \right] \tag{5.81}$$

であることから従う。

gravitino のスピン $\frac{3}{2}$ 成分は $1/M_{Pl}$ で suppress されたカップリングしかないのに対し、goldstino 成分は $1/\langle F_{DSB} \rangle$ で suppress されたカップリングも持つ。よって、GMSB モデルのように $\langle F_{DSB} \rangle \ll M_{Pl}$ ならば他の粒子と相互作用する gravitino は goldstino 成分だけであるとしてしまってよい。つまり、gravitino のカップリングを与える $\mathcal{L}_{eff}$ として (5.78),(5.79) を使ってよい。このとき重力相互作用は gravitino に (5.80) の質量を与える役割しか担わない。

第 4 章で具体的な GMSB モデルを考察したが、それらが与える gravitino の質量の範囲をまとめておく：

5.8 NLSP

NLSP(next-to-lightest susy particle) は gravitino の次に軽い susy particle である。R-パリティが保存する[40] なら、全ての susy particle は崩壊を重ねてまず NLSP になり、それから $1/F$

[40] SUSY GUT で早い陽子崩壊を引き起こす相互作用を禁止するためには R-パリティの保存が必要である。

表 5: GMSB モデルと典型的な gravitino の質量の値

model	gravitino mass
(3,2)	$1\text{keV} \lesssim m_{3/2} \lesssim 100\text{keV}$
IY	$10\text{MeV} \lesssim m_{3/2} \lesssim 1\text{GeV}$
Kähler	$1\text{keV} \lesssim m_{3/2} \lesssim 1\text{GeV}$
Yukawa	possibly $m_{3/2} \lesssim 1\text{keV}$
direct	$100\text{keV} \lesssim m_{3/2}$

カップリングで gravitino になる。したがって、NLSP が何であり、その性質がどのようなものであるかは非常に重要である。

質量スペクトルのところでみたように、GMSB モデルでは NLSP はパラメータ空間の多くの部分で $\tilde{N}_1$ または $\tilde{\tau}_1$ である[41] 。NLSP の崩壊モードは、$\tilde{X}$ を NLSP、X をその superpartner (標準模型粒子)、 $\psi_{3/2}$ を gravitino とすると、

$$\tilde{X} \to X + \psi_{3/2} \tag{5.82}$$

だけである。NLSP より十分重い super particle $\tilde{Y}$ は直接 $\tilde{Y} \to Y + \psi_{3/2}$ と崩壊するのではなく 3 体崩壊 $\tilde{Y} \to Y + \tilde{X} + X$ をして NLSP になってから $\psi_{3/2}$ に崩壊する。しかし、NLSP とほぼ同じ質量を持つ super particle は 3 体崩壊が phase space 積分により suppress されてしまうので直接 $\tilde{Y} \to Y + \psi_{3/2}$ と崩壊するのが主要なモードになってしまう。このような粒子を co-NLSP と呼ぶ。宇宙論で gravitino の数密度を考えるとき、co-NLSP があるかどうかは重要である。

right-handed slepton が NLSP の場合、left-right mixing を考えないと $\tilde{e}_R$, $\tilde{\mu}_R$, $\tilde{\tau}_R$ の質量は縮退していて、mixing により $\tilde{\tau}_1$ が最も軽くなる。よって、$\tan\beta$ が小さいと mixing が小さくなって $m_{\tilde{e},\tilde{\mu}}$ - $m_{\tilde{\tau}_1} < m_\tau$ となり、3 体崩壊 $\tilde{\mu} \to \mu + \tilde{\tau} + \tau$ が 禁止される。つまり、$\tilde{\mu}$,$\tilde{e}$ が co-NLSP となる。$\tan\beta \sim 4 - 8$ ならば $\tilde{\tau}_1$ が $\tilde{e}, \tilde{\mu}$ より充分軽くなって $\tilde{e}, \tilde{\mu}$ は co-NLSP ではなくなる。

NLSP の崩壊率は (5.79) から計算できて、次の表式で与えられる[42] 。NLSP が gaugino (例えば bino-like neutralino) のとき

$$\Gamma(\lambda \to \psi_{3/2} + A_\mu) = \frac{1}{48\pi} \frac{m_\lambda^5}{m_{3/2}^2 M_{Pl}^{*\,2}} \left\{ 1 - \left(\frac{m_{3/2}}{m_\lambda} \right)^2 \right\}^3 \tag{5.83}$$

NLSP が sfermion (例えば $\tilde{\tau}_1$) のとき

$$\Gamma(\phi \to \psi_{3/2} + \chi) = \frac{1}{48\pi} \frac{m_\phi^5}{m_{3/2}^2 M_{Pl}^{*\,2}} \left\{ 1 - \left(\frac{m_{3/2}}{m_\phi} \right)^2 \right\}^2 \tag{5.84}$$

である。

[41] $\tilde{\nu}$ が NLSP となる非常に狭い領域もある。
[42] フェルミオンがその superpartner より充分軽いとした。

5.9 DSB パラメータの制限

GMSB モデルにはいくつかのスケールが存在する。DSB セクターの F term の真空期待値 $\langle F\rangle$、messenger セクターの spurion の 期待値 M と F_S ($\langle S\rangle = M + \theta^2 F_S$) である。DSB セクターの $\langle F\rangle$ のうち最大のものを $\langle F_{DSB}\rangle$ と書くことにする。超対称性の破れが DSB セクターから MSSM セクターに直接伝わるモデル (例えば direct タイプ) では $\langle F_S\rangle$ は $\langle F_{DSB}\rangle$ にカップリング (例えば messenger の superpotential の Yukawa カップリング) がかかったものになるので、カップリングが $\lesssim 1$ であることを要求すると $\langle F_S\rangle \lesssim \langle F_{DSB}\rangle$ である。一方、超対称性の破れが DSB セクターから MSSM セクターにループを経て伝わるモデル (例えば ゲージタイプ、Kähler タイプなど) では $\langle F_S\rangle$ は、$\langle F_{DSB}\rangle$ にループファクターがかかったものになる。よって、一般に $\langle F_{DSB}\rangle \gg \langle F_S\rangle$ である[43] 。

gaugino と squark,slepton の soft mass は、基本表現の messenger quark が N family あるとして、$F_S \ll M$ の近似でそれぞれ

$$M_a = \frac{\alpha_a}{4\pi} N \frac{F_S}{M} \quad , \ a = 1, \cdots, 3 \tag{5.85}$$

$$m_{\tilde{f}}^2 = 2N \frac{F_S^2}{M^2} \sum_a \left(\frac{\alpha_a}{4\pi}\right)^2 C_a^{\tilde{f}} \tag{5.86}$$

で与えられる [(5.12),(5.13)。]

まず、$\Lambda \equiv \langle F_S\rangle / M$ の上限と下限を見積もる。slepton の質量の下限は加速器実験から

$$m_{\tilde{l}} > 45\mathrm{GeV} \tag{5.87}$$

となっている。これと (5.13) から

$$\sqrt{N} \times \Lambda > 30 \ \mathrm{TeV} \tag{5.88}$$

一方、messenger quark/lepton のスカラー成分の質量 (の 2 乗) は tree level で $M^2 \pm \langle F_S\rangle$ である。messenger quark/lepton は MSSM ゲージ量子数を持つので、messenger の質量 (の 2 乗) が負になると カラーが破れてしまう。小さい方が負にならないためには

$$\Lambda < \langle S\rangle \ \text{and} \ \Lambda < \sqrt{\langle F_S\rangle} \tag{5.89}$$

が必要である。また、gaugino, sfermion の質量が weak スケール程度の大きさになるには

$$\Lambda < 10^{4-5} \ \mathrm{GeV} \tag{5.90}$$

[43] 実際、第 4 章で調べた具体的なモデルではそうなっている。例えば

ゲージタイプの (3,2)model 型では $\sqrt{F_S} \sim 10^{-2} \times \sqrt{F_{DSB}}$、
ゲージタイプの IY model 型では $\sqrt{F_S} \sim 10^{-4} \times \sqrt{F_{DSB}}$、
Kähler タイプでは $\sqrt{F_S} \sim 10^{-2} \times \sqrt{F_{DSB}}$

である。

が必要である。

また、FCNC が充分小さくなるという条件から messenger スケール M と超対称性の破れのスケール $\sqrt{F_{DSB}}$ に対して制限がつく。messenger スケールでの sfermion soft mass がゲージ量子数だけで決まるので自動的に FCNC がキャンセルするのが GMSB の大きな motivation であったことは前に述べた。この利点が効果を発揮するのは、gravity mediated soft mass よりも gauge mediated soft mass が充分大きいときである。それには $\sqrt{F_{DSB}},\ M \ll M_{Pl}$ が必要である。これは以下の考察からわかる：

$$m_{soft}^{gauge} \sim \sqrt{N} \times \frac{\alpha}{4\pi} \frac{\langle F_S \rangle}{M} \sim 10^{2-3}\ \mathrm{GeV} \tag{5.91}$$

$$m_{soft}^{gravity} \sim m_{3/2} \tag{5.92}$$

$$\sim \frac{\langle F_{DSB} \rangle}{M_{Pl}^*} \tag{5.93}$$

ここで $m_{soft}^{gauge} \gg m_{soft}^{gravity}$ を要請すると

$$\sqrt{F_{DSB}} \ll 10^{10}\ \mathrm{GeV} \tag{5.94}$$

また $F_S < M^2$ より

$$\frac{\alpha}{4\pi}\sqrt{N}\,\frac{M^2}{M} > \frac{\alpha}{4\pi}\sqrt{N}\,\frac{F_S}{M} \sim 10^{2-3}\ \mathrm{GeV} \ll \frac{F_{DSB}}{M_{Pl}^*} \tag{5.95}$$

である。これから

$$M \gg \left(\sqrt{N} \times \frac{\alpha}{4\pi}\right)^{-1} \frac{F_{DSB}}{M_{Pl}^*} \tag{5.96}$$

$$M \ll \sqrt{N} \times \frac{\alpha}{4\pi} \frac{\langle F_S \rangle}{\langle F_{DSB} \rangle} M_{Pl}^* \simeq \sqrt{N} \times 10^{15}\ \mathrm{GeV} \tag{5.97}$$

という制限がつくことがわかる。

5.10 GMSB モデルの問題点

第 4 章で見た具体的な GMSB モデルは多くの問題をクリアーし、現象論的にもよいものであった。しかし、全ての問題が解決できたわけではない。以下で残された問題 (とその解決) をみる。

5.10.1 μ problem

GMSB の minimal model では Higgs セクターの二つのパラメータ $\mu,\ B_\mu$ を決定できないことは先に述べた。超対称性があるときに superpotential に $\mu\, H_d\, H_u$ が含まれるなら、μ の値は

M_{Pl} か何か別の fundamental スケールの大きさを持つはずである。しかし、μ は tree level の higgsino の 質量を与えるので、$\sim m_Z$ のはずである。そこで、超対称性があるときには $\mu\, H_d\, H_u$ が禁止されると仮定し[44] 、超対称性の破れによりこの項が生成されると考える。すると、μ は他の soft パラメータと同じ程度の大きさになる。次の条件を充たすメカニズムを考案できればこの問題を「自然に」解決できたとして良いだろう：

1. μ, B_μ が同じメカニズムで生成される
2. μ は 1-loop で、B_μ は 2-loop で生成される。
3. weak スケールに新たな粒子が登場しない
4. 導入した新しいカップリングは "naturalness" の観点から全て $\mathcal{O}(1)$ である。

gravity mediation モデルでは (超対称性があるとき $\mu\ H_u\ H_d$ が禁止されるという仮定の下で) 超対称性の破れにより初めて μ, B_μ が生成され、しかもそれぞれが weak スケールとその二乗の大きさになるメカニズムが提案されている。まずこれをみてみる。以下では、カップリングは全て $\mathcal{O}(1)$ とする。

non-minimal Kähler ポテンシャルを考え、

$$K \supset \frac{1}{M_{Pl}} \Phi^\dagger\, H_u\, H_d + \frac{1}{M_{Pl}^2} \Phi^\dagger \Phi\, H_u\, H_d \tag{5.98}$$

とする。$\langle F_\Phi \rangle \sim m_Z M_{Pl}$ ならば $\mu = \langle F_\Phi \rangle / M_{Pl} \sim m_Z$, $B_\mu = |\langle F_\Phi \rangle / M_{Pl}|^2 \sim m_Z^2$ となり現象論的に望ましくなる[45] 。

しかし、GMSB では FCNC の条件 $m_{soft}^{gauge} \gg m_{soft}^{gravity}$ より $\langle F_\Phi \rangle \ll m_Z M_{Pl}$ でなければいけないので、別のメカニズムを探す必要がある。

まず、tree レベルで μ, B_μ を生成する簡単なモデルを考える。MSSM ゲージ一重項 Z を導入し、

$$W \supset a\, Z\, H_u\, H_d \tag{5.99}$$

とする。$\mu = a \langle Z \rangle$, $B_\mu = a \langle F_Z \rangle$ である。(5.99) のようなポテンシャルは、(2.1) と同じ形であり、Z は messenger S と同一のものと考えたくなる。

しかし、このとき

$$\Lambda \equiv \frac{\langle F_Z \rangle}{\langle Z \rangle} = \frac{B_\mu}{\mu} \sim 10^{4-5}\ \mathrm{GeV} \tag{5.100}$$

となって $\mu \sim m_Z$, $B_\mu \sim m_Z^2$ を同時に充たすことができなくなる。$B_\mu \sim m_Z^2$ とすると $\mu \ll m_Z$ となり、higgsino の質量が小さくなりすぎる。$\mu \sim m_Z$ とすると B_μ が大きくなりすぎて電弱の破れの条件 (真空の安定条件) である (5.39) が fine-tuning をしないと成立しなくなる。

[44] MSSM の superpotential の中で R 対称性を破る項は $\mu\, H_d\, H_u$ だけなので、例えば R 対称性を課すことでこの項を禁止できる。

[45] electro-weak 対称性の破れの条件 (5.38),(5.39) から $\mu \sim 10^{2-3}$ GeV, $B_\mu \sim \mu^2$ でなければいけないことがわかる。

そこで次に μ, B_μ をループで生成するモデルを考える。gravity mediation の場合と同じ形のオペレーター

$$K \supset \frac{1}{M} X^\dagger H_u H_d + \frac{1}{M^2} X^\dagger X H_u H_d \tag{5.101}$$

(ただし今度は M は messenger スケール、X が spurion) が重い field (messenger quark など) を積分した結果得られたと考えると μ を生成できる。しかし、このとき B_μ も 1-loop で生成されてしまうため、

$$\mu \sim \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{\langle F_X \rangle}{\langle X \rangle} \tag{5.102}$$

$$B_\mu = \Lambda \mu \tag{5.103}$$

となってしまう。これでは、やはり $\mu \sim m_Z$, $B_\mu \sim m_Z^2$ を同時に充たすことができない。

以上の困難を解決するメカニズムとして提案されたのが、次のものである [31]。messenger セクターの spurion X, messenger quark Φ, $\overline{\Phi}$ の他に二つの singlet S, N を導入する。このうち S だけが tree level で H_u, H_d とカップルするとする。superpotential は

$$W = S\left(\lambda_1 H_u H_d + \frac{\lambda_2}{2} N^2 + \lambda \Phi \overline{\Phi} - M_N^2\right) + X(\Phi \overline{\Phi} + \text{h.c.}) \tag{5.104}$$

とする[46] 。$M_N = \mathcal{O}(\sqrt{F_X})$ を仮定する。

Φ の 1-loop グラフから effective に次の Kähler ポテンシャルが生じる:

$$\frac{1}{16\pi^2 M^2} \int d^4\theta \, H_d H_u \frac{D^2}{M_N^2} (X^\dagger X) \tag{5.105}$$

すぐ後でみるように、S の質量は $\sim M_N$ である。($\left\langle S^\dagger S \right\rangle = \frac{D^2}{M_N^2}$ である。) $D^2(X^\dagger X)$ は anti-chiral だから[47] これから $\overline{\theta}^2$ を拾うと次の μ が生成される：

$$\mu \sim \frac{1}{16\pi^2} \frac{|F|^2}{M M_N^2} \sim \frac{1}{16\pi^2} \Lambda \tag{5.106}$$

しかし、$\frac{D^2}{M_N^2}(X^\dagger X)$ から $\theta^2 \overline{\theta}^2$ を拾うことはできないので、B_μ は生成されない。B_μ はさらに高い次数の loop 補正から生じる。

このことを以下で詳しく見てみる。tree レベルの F term からくるポテンシャルは

$$\begin{aligned} V_{F-term} &= |\lambda_1 S H_d|^2 + |\lambda_1 S H_u|^2 + |\lambda_2 N S|^2 + |(\lambda S \Phi + X \Phi)|^2 \\ &\quad + |(\lambda S \overline{\Phi} + X \overline{\Phi})|^2 + \left|\lambda_1 H_u H_d + \frac{\lambda_2}{2} N^2 + \lambda \Phi \overline{\Phi}\right|^2 + |\Phi \overline{\Phi}|^2 \end{aligned} \tag{5.107}$$

[46] B_μ が 1-loop で生成されないようにするため、$N\Phi\overline{\Phi}$,NS^2 を落した。
[47] この意味では、$X^\dagger X$ は任意のエルミートオペレーター $G(X^\dagger X)$ でよいが、簡単のため $X^\dagger X$ としておく。

この真空は

$$\langle H_u \rangle = \langle H_d \rangle = \langle \Phi \rangle = \left\langle \overline{\Phi} \right\rangle = 0$$
$$\langle S \rangle = \langle F_S \rangle = 0$$
$$\left\langle N^2 \right\rangle = \tfrac{2}{\lambda_2} M_N^2$$

この真空のまわりでは S のポテンシャルは $\lambda_2^2 N^2 S^2 = 2\lambda_2 M_N^2 S^2$ である。また、S, N の質量は

$$V \supset \sqrt{2\lambda_2} M_N S N$$

より $\sqrt{2\lambda_2} M_N = \mathcal{O}(\sqrt{F_X})$ となり、重いので weak スケールでは積分されてしまう。messenger quark の質量は $\langle X \rangle \equiv M$ でやはり重い。これから、weak スケールでは新しい粒子は登場しないことがわかる。また、

$$\mu = \lambda_1 \langle S \rangle \tag{5.108}$$
$$B_\mu = \lambda_1 \langle F_S \rangle \tag{5.109}$$

より、tree level では $\mu,\ B_\mu$ どちらも生成されないことがわかる。

さて、loop 補正を考えると、Φ の 1-loop グラフから effective に S と X の kinetic term が mixing を起こす：

$$\frac{5\lambda}{16\pi^2} \int d^4\theta \, (S\, X^\dagger \ln(X^\dagger X) + h.c.) \tag{5.110}$$

これは、$\langle F_X \rangle = 0$ ならゼロだから、超対称性が破れていないならばポテンシャルは変更を受けず、やはり (5.108),(5.109) から $\mu,\ B_\mu$ どちらも生成されない。

次に $\langle F_X \rangle \neq 0$ とする。(5.110) で X,$X^\dagger$ から θ^4 を拾うと[48] 、

$$\frac{5\lambda}{16\pi^2} \left(\frac{|F_X|^2}{M} S \ + \ h.c. \right) \tag{5.111}$$

となる。よって、S のポテンシャルは

$$V_{1-loop} = V_{tree} + \delta V = 2\lambda_2 M_N^2 S^2 + \frac{5\lambda}{8\pi^2} \frac{|F_X|^2}{M} S \tag{5.112}$$

と変更を受ける。これから

$$\langle S \rangle = -\frac{5\lambda}{32\pi^2} \frac{\lambda}{\lambda_2} \frac{|F_X|^2}{M M_N^2} \sim -\frac{5\lambda}{32\pi^2} \frac{\lambda}{\lambda_2} \frac{|F_X|}{M} \tag{5.113}$$

となる。これと (5.108) から

$$\mu = -\frac{5\lambda}{32\pi^2} \frac{\lambda\lambda_1}{\lambda_2} \frac{|F_X|^2}{M M_N^2} \sim -\frac{5\lambda}{32\pi^2} \frac{\lambda\lambda_1}{\lambda_2} \frac{|F_X|}{M} \tag{5.114}$$

[48] S のポテンシャルへの変更をみたいから。

となる。このとき、N のポテンシャルは

$$\lambda_2 S^2 N^2 \ + \ \left| \frac{\lambda_2}{2} N^2 - M_N^2 \right|^2 \tag{5.115}$$

である。第 2 項は $|F_S|^2$ である。第 1 項と第 2 項の N^2 の係数を比較すると、第 1 項は $\sim (F_X/M)^2/(16\pi^2) \sim m_Z^2$ なのに対し第 2 項は $\sim F_X$ であり、 第 2 項の方が充分大きい。よって、$\langle N \rangle^2 = 2M_N/\lambda_2$, つまり $\langle F_S \rangle = 0$ のままであり、1-loop では $B_\mu = 0$ である。

2-loop では

$$\frac{1}{(16\pi^2)^2 M^4} \int d^4\theta \ H_d H_u \ \frac{\overline{D}^2}{M_N^2} \frac{D^2}{M_N^2} (X^\dagger X) \tag{5.116}$$

が生成される。今度は $\frac{\overline{D}^2}{M_N^2}\frac{D^2}{M_N^2}(X^\dagger X)$ から $\theta^2\overline{\theta}^2$ を拾って B_μ が生成される：

$$B_\mu \sim \left(\frac{1}{16\pi^2} \right)^2 \Lambda^2 \sim \frac{1}{16\pi^2} \mu\Lambda \tag{5.117}$$

ここで $\Lambda \equiv |F_X|/M$ である。また、H_u, H_d の tree-level 質量項は

$$|S|^2 \lambda_1^2 (|H_u|^2 + |H_d|^2) \tag{5.118}$$

で、$\langle S \rangle = 0$ ならばゼロだが、この 2-loop 補正から生成される。これとゲージ、top ループの寄与を足したものが Higgs の質量となる。

このモデルは、始めにあげた条件を全て充たしているので、μ problem の解決の一つの候補と考えられる。

ただ、問題なのは superpotential の中に「手で」次元を持ったパラメータ M_N を導入し、その大きさを fine-tune したことである。これに対しては、M_N を望ましい大きさで dynamical に生成する DSB セクターのモデルが提案されている [33]。

6 加速器実験からの制限

6.1 GMSB モデルでの超対称粒子のシグナル

グローバルな超対称理論をゲージ化する (supergravity theory) と重力が自然に理論に組み込まれる。しかし、重力相互作用が非常に弱いためこの効果を加速器実験で検証するのは不可能であると一見思える。自発的に破れたローカルな超対称理論ではゲージ場 gravitino が goldstino をその縦波成分として吸収して質量を得る。この スピン $1/2$ の goldstino 成分は $1/M_{Pl}$ で suppress された重力相互作用の他に超対称性の破れのスケール (の 2 乗分の 1) $1/F_{DSB}$ で suppress され

た相互作用も持つ [(5.79)]。よって、F_{DSB} (あるいは (5.80) から $m_{3/2}$) が充分小さければ X の寿命が充分短くなり、

$$\tilde{X} \to X + \tilde{G}$$

にまつわるシグナルが検出器の中で見える可能性がある。($\tilde{X}$ は NLSP、X はその super partner、$\tilde{G}$ は gravitino の goldstino 成分である。)

このことは Collider Detector at Fermilab (CDF) で $e^+e^-\gamma\gamma + \not{E}_T$ というシグナルが観測されたという報告 [43] によりにわかに関心を集めた。ここで $e^{\pm}$, γ は background から区別できる高エネルギーのレプトンとフォトンである。また $\not{E}_T$ は縦方向の missing energy で、$\not{E}_T \simeq 53$ GeV であった。

フォトンのエネルギーが大きかった (つまり制動輻射ではなかった) ことと、e^+e^- と $\gamma\gamma$ が同時に観測されたことはこのシグナルを説明し得るプロセスを大きく制限する。標準理論ではこのシグナルは $WW\gamma\gamma$ の生成で説明できる。しかし、この反応の断面積は CDF のデータを説明するために必要な断面積の 1000 分の 1 しかない。よって、標準理論による解釈は難しい。一方、超対称理論では F_{DSB} が充分小さければ、充分な大きさの断面積を持つ反応が存在する。よって、$m_{3/2}$ が小さい超対称理論で説明できる可能性がある。GMSB では gravitino が LSP である。そこで GMSB でこのシグナルが説明できるかどうか調べられた。

以下では neutralino $\tilde{N}_1$ が NLSP の GMSB モデルを考える。neutralino の崩壊モードは

$$\tilde{N}_1 \to \gamma + \tilde{G} \tag{6.1}$$

$$\tilde{N}_1 \to Z + \tilde{G} \tag{6.2}$$

$$\tilde{N}_1 \to h^0 + \tilde{G}\ ,\ A^0\tilde{G}\ ,\ H^0\tilde{G} \tag{6.3}$$

である。A^0 , H^0 は $\tilde{N}_1$ より質量が大きいのでこのモードは許されない。NLSP の崩壊率は一般に

$$\Gamma(\tilde{X} \to X\tilde{G}) = \frac{m_{\tilde{X}}^5}{16\pi \left\langle F_{DSB} \right\rangle^2} \left(1 - \frac{m_X^2}{m_{\tilde{X}^2}}\right)^4 \tag{6.4}$$

で与えられる。m_Z,$m_{h^0} \simeq m_{\tilde{N}_1}$ なので $\Gamma(\tilde{\tilde{N}}_1 \to Z\tilde{G})$, $\Gamma(\tilde{\tilde{N}}_1 \to h^0\tilde{G})$ はそれぞれ $(1-m_Z^2/m_{\tilde{N}_1}^2)^4$,$(1-m_{h^0}^2/m_{\tilde{N}_1}^2)^4$ で suppress される。よって (6.1) が主要なモードである。[49] 。

$\tilde{N}_1$ が NLSP である GMSB モデルでは $e^+e^-\gamma\gamma + \not{E}_T$ は $p\overline{p} \to \tilde{e}^+\tilde{e}^- \to \tilde{N}_1 e^+ \tilde{N}_1 e^-$, $\tilde{N}_1 \to \gamma\tilde{G}$ という反応で説明できる。一方、典型的に $\tilde{N}_1$ が LSP になる HSSB モデル (gravitino は重くなる。$m_{3/2} \sim 1$ TeV) では $p\overline{p} \to \tilde{e}^+\tilde{e}^- \to \tilde{N}_2 e^+ \tilde{N}_2 e^-$, $\tilde{N}_2 \to \tilde{N}_1\gamma$ である。$\tilde{N}_2 \to \tilde{N}_1\gamma$ は loop グラフによる崩壊である。この反応が検出器の中で見えるためには $\tilde{N}_2$ の $\tilde{B}$ 成分が大きくなくてはならない。一方、$\tilde{N}_2 \to \tilde{N}_1$ が充分早く起こるためには $\tilde{N}_1$,$\tilde{N}_2$ のどちらかがほとんど

[49] $\tilde{N}_1$ の フォトン成分が非常に小さい場合は $\tilde{N}_1 \to h^0 + \tilde{G}$ が主要なモードになり得る。このときのシグナルは $bbbbX + \not{E}_T$ である。

$\tilde{B}$ でもう片方がほとんど $\tilde{h}$ でなくてはならない。よって、$\tilde{N}_1 \simeq \tilde{h}$, $\tilde{N}_2 \simeq \tilde{B}$ である。これは GMSB モデルでは実現できない。

終状態の粒子のエネルギーの観測値とこの反応の断面積と分岐率から GMSB モデルのパラメータに制限をつけることができる [45, 44]。また、この反応が検出器の中で起こったという条件から $\langle F_{DSB} \rangle$ $(m_{3/2})$ の上限をつけることができる。(6.1) の崩壊率は

$$\Gamma(\tilde{N}_1 \to \gamma + \tilde{G}) = 2 \times 10^{-3} \times \left(\frac{m_{\tilde{N}_1}}{100\mathrm{GeV}} \right)^5 \times \left(\frac{\sqrt{\langle F_{DSB} \rangle}}{100\mathrm{TeV}} \right)^{-4} \times \kappa_{1\gamma} \ \mathrm{eV} \tag{6.5}$$

である [44]。ここで κ は $|\mathbf{N}_{11} \cos\theta_W + \mathbf{N}_{12} \sin\theta_W|^2$ である。(6.5) から $\tilde{N}_1$ の平均の崩壊長さ [50] は

$$d = 9.9 \times 10^{-3} \ \frac{1}{\kappa_{1\gamma}} \left(\frac{E^2}{m^2_{\tilde{N}_1}} - 1 \right)^{1/2} \left(\frac{m_{\tilde{N}_1}}{100\mathrm{GeV}} \right)^{-5} \times \left(\frac{\sqrt{\langle F_{DSB} \rangle}}{100\mathrm{TeV}} \right)^4 \ \mathrm{cm} \tag{6.6}$$

である。ここで E は $\tilde{N}_1$ の実験室系でのエネルギーである。終状態粒子のエネルギーから E の値を見積もることができる。また、$\tilde{N}_1$ 対生成の実験から $m_{\tilde{N}_1}$ の下限もわかっている。これと $d < 150$ cm という条件から (6.6) により $m_{3/2} \lesssim 250$ eV となる。以上をまとめると、CDF の $e^+e^-\gamma\gamma + \not{E}_T$ というシグナルは $\tilde{N}_1$ が NLSP でかつ $\sqrt{F_{DSB}} \lesssim 10^6$ GeV である GMSB モデルで説明できる[51] 。

R パリティが厳密に保存するならば、超対称粒子は対生成により作られる。しかし、今のところ加速器実験では超対称粒子は発見されていない。それらの質量の下限がついているだけである。これを次の表 6 に挙げる[52] 。

表 6: GMSB モデルでの超対称粒子の質量の下限

粒子	質量の下限 [GeV]
$\tilde{\chi}_1^{\pm}$	150
$\tilde{\chi}_1^0$	75
$\tilde{\nu}$	43
$\tilde{\mu}_R$,$\tilde{\tau}_R$	76
$\tilde{t}_1$	64-86
$\tilde{g}$	180-190
$\tilde{q}$	230-260

[50] 崩壊長さ d は粒子が距離 x だけ走る間に崩壊する確率が $1 - e^{-x/d}$ となるような長さである。
[51] 現在では、$ee\gamma\gamma + \not{E}T$ の γ が 実は π^0 であったと思われているようである。従って、超対称性が加速器で検出されたとは思われていない。
[52] $\tilde{\mu}_R$,$\tilde{\tau}_R$ の質量の下限はこれらが安定であるとした場合の値である。

$\tilde{\nu}$ の質量の下限から $\Lambda \equiv \langle F_S \rangle / \langle S \rangle$ に下限をつけることができる。$\tilde{\nu}$ の質量は (5.13) から

$$m_{\tilde{\nu}} = 2N\Lambda^2 \left[\frac{3}{4} \left(\frac{\alpha_2}{4\pi} \right)^2 \right]$$

これが (43 GeV)^2 以上であることより

$$\Lambda > \frac{1}{\sqrt{N}} \times 1 \times 10^4 \,\mathrm{GeV} \tag{6.7}$$

である。

これからさらに $m_{3/2}$ の下限が決まる。最も一般的な (モデルによらない) 制限は、(6.7) と $\Lambda^2 < \langle F_S \rangle < \langle F_{DSB} \rangle$ から

$$m_{3/2} = \frac{\langle F_{DSB} \rangle}{\sqrt{3} M_{Pl}^*} > \frac{\Lambda^2}{\sqrt{3} M_{Pl}^*} > 0.02 \times \frac{1}{N} \,\mathrm{eV} \tag{6.8}$$

である。特定のモデルを考えると、下限はこれよりも大きくなる[53] 。

6.2 FCNC, CP からの制限

現在 加速器実験で非常に良い精度で測定されていて、理論のパラメータに強い制限を与える量に以下のものがある：

1. Flavor Changing Neutral Current (FCNC)、LFV (Lepton Flavor Violation) の amplitude
2. CP の破れ (電子、中性子の電気双極子モーメントの精密測定より)

超対称性を導入すると、新たに soft パラメータ (5.7) が $\mathcal{L}_{eff}$ に現れる。これらが一般だと FCNC と CP の破れが実験の制限を超えてしまう。ここでは実験の制限を充たすための soft パラメータに対する条件を考える。

まず、FCNC から始める。例として $\mu \to e\gamma$ を考える[54] 。$\mathbf{m_L^2}$ に非対角成分があると $\tilde{e}$,$\tilde{\mu}$ の間に mixing が存在する。すると、図 14(a) のグラフ の寄与が無視できなくなり FCNC の制限を超えてしまう。これを避けるには soft mass が対角であると仮定すればよい。また、electroweak 対称性が破れた phase では a term による squark,slepton の mixing も存在する。これを避けるには、a term がそれぞれ対応する Yukawa カップリングに (行列として) 比例すると仮定すればよい。

$$\begin{gathered}
\mathbf{m_Q^2} = m_Q^2 \mathbf{1} \,,\, \mathbf{m_{\bar{u}}^2} = m_{\bar{u}}^2 \mathbf{1} \,,\, \mathbf{m_{\bar{d}}^2} = m_{\bar{d}}^2 \mathbf{1} \,,\, \mathbf{m_L^2} = m_L^2 \mathbf{1} \,,\, \mathbf{m_{\bar{e}}^2} = m_{\bar{e}}^2 \mathbf{1} \,, \\
\mathbf{m_{H_u}^2} = m_{H_u}^2 \mathbf{1} \,,\, \mathbf{m_{H_d}^2} = m_{H_d}^2 \mathbf{1} \,, \\
\mathbf{a_u} = A_u \mathbf{y_u} \,,\, \mathbf{a_d} = A_d \mathbf{y_u} \,,\, \mathbf{a_e} = A_e \mathbf{y_u} \,.
\end{gathered} \tag{6.9}$$

[53] 5.7 節の表を参照。
[54] クォークでは $b \to s\gamma$ など。

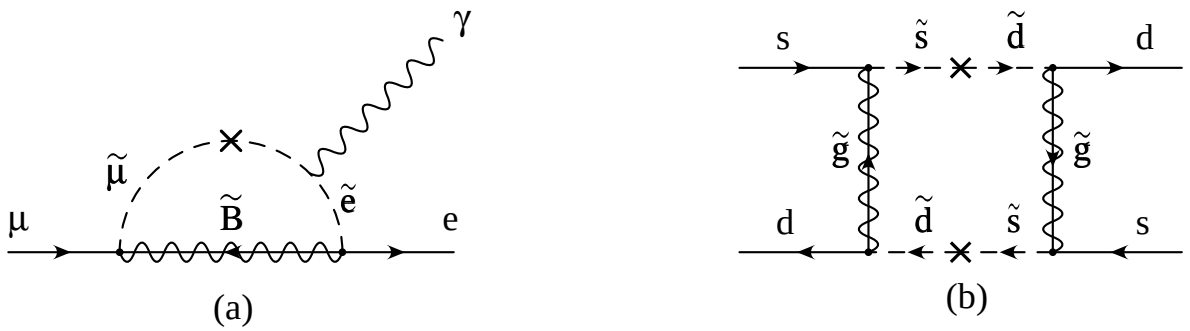


図 14: フレーバーを破るグラフ (a) $\mu \to e\gamma$ と、(b) $K^0 \leftrightarrow \overline{K}^0$

同様に、図 14(b) のグラフでも squark の soft mass が対角ならばこれはゼロになり、新たな $K^0 - \overline{K}^0$ mixing は生じない。

soft term による mixing の他に、超対称性の導入により新たに現れた相互作用からも FCNC への寄与が生じる。例として、図 14(b) で内線の gaugino を higgsino に置き換えたグラフを考える。今度は squark の内線は $\tilde{d}$, $\tilde{s}$, $\tilde{b}$ である。$\tilde{b}$ は $\tilde{d}$, $\tilde{s}$ に比べて充分重いので無視する。すると、フレーバー空間の行列 U_{fg} は

$$U_{fg} = \begin{pmatrix} \cos\theta_c & \sin\theta_c \\ -\sin\theta_c & \cos\theta_c \end{pmatrix}$$

である。ここで、θ_c は Cabbibo 角の超対称理論での対応物である。amplitude は

$$y^4 \left[\sum_f \overline{d}\, U_{1f}^\dagger \frac{1}{p^2 - m_f^2} U_{f2}\, s \right]^2 \tag{6.10}$$

に比例する。ここで $m_f = (m_1, m_2)$ は $\tilde{d}$, $\tilde{s}$ の soft mass である。これは

$$\overline{d}\frac{1}{p^2 - m_1^2} \sum_f \left(U_{1f}^\dagger U_{f2} \right) s + \overline{d}\frac{m_2^2 - m_1^2}{(p^2 - m_1^2)^2} U_{12}^\dagger U_{22} s + \mathcal{O}\left((m_2^2 - m_1^2)^2 \right) \tag{6.11}$$

に比例する。第 1 項はゼロである。第 2 項は $U_{12}^\dagger$ = - $\sin\theta_c$, $U_{22} = \cos\theta_c$ より

$$\sin\theta_c \cos\theta_c (m_2^2 - m_1^2)$$

に比例する。θ_c が標準理論の値と同じと仮定すると、m_2^2-m_1^2 は非常に小さくなくてはならない。(6.9) が成り立っているならば m_2^2-m_1^2 =0 だから問題ない。

GMSB では、messenger スケールでの sfermion の soft mass がゲージ量子数だけで決まっている [(2.4)]。また、a term は messenger スケールでゼロである。これらはまさに (6.9) を充たしており、新たな FCNC への寄与が自動的に suppress されていることがわかる。

一方、gravity mediation では M_{Pl} or M_{GUT} スケールで soft mass が universal であると仮定することで FCNC の制限を充たすようにしなければならない。この仮定には理論的根拠がないのが弱点である。

もちろん、以上は messenger スケールでの話で、weak スケールでは RGE により soft パラメータは変更を受ける。しかし、

- RGE は新たな complex phase を持ち込まない
- ゲージカップリングによる補正は (6.9) を変更しない
- Yukawa カップリングによる補正は一般に (6.9) を変えてしまうが、第 1、2 世代の Yukawa カップリングは無視できる程小さいので第 1、2 世代粒子だけが関与するプロセス $\mu \to e\gamma$, $K^0 \leftrightarrow \overline{K^0}$ mixing の制限はクリアできる。

という事情から、weak スケールでの実験にも引っかからない。

次に、CP の破れを考える。新たな CP の破れを避けるには、soft パラメ− タが新たな complex phase を持たないと仮定すればよい。(6.9) で m_{H_u} , m_{H_d} , m_Q , $m_{\overline{u}}$, m_L ,$m_{\overline{e}}$ が実数でないと $\mathcal{L}_{MSSM}$ がエルミートでなくなるから、これらは実数であり、問題ない。gaugino の質量 M_a は λ_a の phase の再定義で吸収できるから問題ない。b は 5.4 節で h_u^0, h_d^0 の phase で吸収した。残るは $\arg(\mu)$ であるが、これらは GMSB の枠内でも決定できない。これは現在でも問題である。これらについては

$$\arg(\mu) = 0 \tag{6.12}$$

と仮定しておく。μ については 5.10 節で述べる。

7 宇宙論からの制限

考察に必要な宇宙論を概観してから、宇宙論の観測からどのようなパラメータの制限が付けられるのかを見る。

7.1 Freedman 宇宙

現在観測できる範囲では宇宙はほとんど一様かつ等方である。そこで、宇宙全体も一様・等方と近似して宇宙を記述する。すると宇宙のメトリックはいわゆる Robertson-Walker メトリックとなり、パラメータは 宇宙のスケールファクター $R(t)$ と共動座標 (comoving coordinate) (r, θ, ϕ) だけになる。宇宙の時間発展の情報は $R(t)$ に含まれる。

$R(t)$ の時間発展を記述する方程式は Einstein 方程式

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathcal{R}g_{\mu\nu} = 8\pi G T^{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \tag{7.1}$$

から導かれる。Λ は宇宙定数である。右辺のエネルギー・運動量テンソル $T^{\mu\nu}$ は一様・等方性から

$$T^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(\rho, -p, -p, -p)$$

と決まる。ここで $p(t)$ は宇宙の圧力、$\rho(t)$ は宇宙のエネルギー密度である。保存則 $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$ の第 0 成分から

$$d(\rho R^3) = -p d(R^3) \tag{7.2}$$

が成り立つ。現在の観測では w を時間に依存しない定数として $p = w\rho$ がよい精度で成り立っている。これと (7.1) から $\rho \propto R^{-3(1+w)}$ である。特に 輻射、物質、真空エネルギーに対しては

radiation	$\frac{1}{3}\rho$	$\rho \propto R^{-4}$
matter	$p = 0$	$\rho \propto R^{-3}$
vacuum	$p = -\rho$	$\rho = \mathrm{const.}$

である。

Robertson-Walker メトリックでの Ricci テンソル、スカラー曲率を (7.1) に代入すると、$(0,0)$ 成分と (i,i) 成分は

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{k}{R^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} \tag{7.3}$$

$$2\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{k}{R^2} = -8\pi G\rho + \frac{\Lambda}{3} \tag{7.4}$$

である。(7.1),(7.3),(7.4) のうち独立なのは 2 本である。(7.1),(7.3) から

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3} \tag{7.5}$$

である。過去において常に $\rho + 3p > 0$ だったならば $\ddot{R} < 0$ だったことになり、現在 $\dot{R} \geq 0$ であることと併せると過去において常に $\dot{R} \geq 0$ だったことになる。よって、有限の過去のある時刻で $R = 0$ となる。この時刻を宇宙のはじまりと定義する。また、このような宇宙のモデルを Big-Bang 宇宙モデルと呼ぶ。

宇宙の膨張率は Hubble parameter

$$H \equiv \frac{\dot{R}}{R} \tag{7.6}$$

で表される。その逆数 H^{-1} は宇宙膨張の時間スケールを与える。$\Delta t = H^{-1}$ の間に宇宙は約 2 倍の大きさになる。H を使って (7.3) を書き直すと

$$\frac{k}{H^2R^2} = \frac{\rho}{\frac{3H^2}{8\pi G}} - 1 \equiv \Omega - 1 \tag{7.7}$$

$$\Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_{cr}} \qquad , \qquad \rho_{cr} \equiv \frac{3H^2}{8\pi G} \tag{7.8}$$

となる。これから $k = 1(\Omega > 1)$ のとき宇宙は閉じていて、$k = 0(\Omega = 1)$ のとき宇宙は flat で、$k = -1(\Omega < 1)$ のとき宇宙は開いていることがわかる。

7.2 宇宙の熱力学

現在の宇宙は熱平衡にないが初期には熱平衡にあったと考えられる。よって、初期宇宙における粒子の分布は粒子の統計性に応じて Fermi 分布または Bose 分布とする。宇宙初期における粒子の数密度 n、エネルギー密度 ρ、圧力 p の表式とその漸近形は次の通りである[55] 。

$$n = \frac{g}{(2\pi)^3}\int d^3p\, f(\mathbf{p}) = \frac{g}{2\pi^2}\int_m^\infty dE\, \frac{E(E^2-m^2)^{1/2}}{\exp[(E-\mu)/T] \pm 1} \tag{7.9}$$

$$\rho = \frac{g}{(2\pi)^3}\int d^3p\, f(\mathbf{p})E(\mathbf{p}) = \frac{g}{2\pi^2}\int_m^\infty dE\, \frac{E^2(E^2-m^2)^{1/2}}{\exp[(E-\mu)/T] \pm 1} \tag{7.10}$$

$$p = \frac{g}{(2\pi)^3}\int d^3p\, f(\mathbf{p})\frac{\mathbf{p}^2}{3E} = \frac{g}{6\pi^2}\int_m^\infty dE\, \frac{(E^2-m^2)^{3/2}}{\exp[(E-\mu)/T] \pm 1} \tag{7.11}$$

(7.12)

	n	ρ	p
$T \gg m$	$\frac{\zeta(3)}{\pi^2}gT^3$ (boson)	$\frac{\pi^2}{30}gT^4$	$\frac{1}{3}\rho$
$(T \gg \mu)$	$\frac{3}{4}\frac{\zeta(3)}{\pi^2}gT^3$ (fermion)	$\frac{7}{8}\frac{\pi^2}{30}gT^4$	$\frac{1}{3}\rho$
$T \ll m$	$g\left(\frac{mT}{2\pi}\right)^{3/2}\exp\left[-\frac{m-\mu}{T}\right]$	mn	$nT = \rho\frac{T}{m} \ll \rho$

また、熱力学第 1、2 法則から comoving volume あたりのエントロピー S が

$$S = \frac{R^3(p+\rho)}{T} \tag{7.13}$$

で与えられて、更に

$$dS = 0$$

であることが従う。

[55] $f(\mathbf{p}) = [\exp((E-\mu)/T) \pm 1]^{-1}$, $E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$ (Fermi/Bose 分布) である。また、g は粒子の内部自由度の数である。

粒子の反応が宇宙膨張に追い付けなくなると粒子は熱浴から切り離されるので熱平衡にある粒子の自由度 g は一定ではない。上の表から明らかなように、非相対論的粒子は n , ρ にほとんど寄与しない。よって、温度 T での粒子の effective な自由度は

$$g_*(T) = \frac{30}{\pi^2}\frac{\rho(T)}{T^4} \tag{7.14}$$

で与えられる。

エントロピー密度 s を $s \equiv S/R^3$ と定義すると $s = (p+\rho)/T$ である。s により粒子の effective な自由度を定義することもできる。

$$g_{*s}(T) = \frac{45}{2\pi^2}\frac{s(T)}{T^3} \tag{7.15}$$

熱浴から切り離された相対論的粒子がないときは $g_* = g_{*s}$ であるが、一般にはそうでない。例えばニュートリノが切り離される温度 ~ 1 TeV 以下でもニュートリノは相対論的だから、$T \lesssim 1$ TeV では $g_* \neq g_{*s}$ である。ニュートリノ以外の標準模型粒子は熱浴から切り離されるよりも前に非相対論的になるので、$T \gtrsim 1$ TeV では $g_* = g_{*s}$ である。

標準模型粒子に対する g_* , g_{*s} を次の図 15 に挙げる。ここで クォーク、ハドロン相転移温度を 300 MeV と仮定した。また、ニュートリノが熱浴から切り離される温度を 500 keV と仮定した。

$T \ll$ MeV のときは相対論的粒子はフォトンとニュートリノだけなので $g_* = 3.36$ である。100 MeV $\gtrsim T \gtrsim$ 1 MeV のときは相対論的粒子は上述のものに電子、陽電子が加わるので $g_* = 10.75$ である。$T \gtrsim 300$ GeV のときは全ての標準模型粒子が相対論的である。よって、 $g_* = 106.75$ である。

7.3 新粒子と宇宙論

超対称性が予言する新しい粒子の性質は、現時点では加速器で観測されていない以上、直接調べることができない。それらの質量が加速器実験で測定できる値以上であることくらいしかわからない。しかし、宇宙論を考えると、いろいろな制限をつけることができる。中でも宇宙初期における元素合成と現在の宇宙のエネルギー密度はこの新しい粒子とそれに関連した物理に強い制限を加える。以下では、新粒子を exotic particle と呼ぶことにする。

1. BBN(Big-Bang Neucleo-synthesis ; ビッグ・バンによる元素合成) の最中の exotic particle のエネルギー密度に上限がつく。それが大きすぎると、インフレーションの速度が速くなりすぎて中性子と陽子の数の比 n/p が大きくなり、その結果 ^{4}He が多く作られすぎてしまう。
2. Exotic partile の崩壊により生じるエントロピーが多すぎてはいけない。バリオンとフォトンの比率が現在観測されている値 $n_B/s \sim \mathcal{O}(10^{-9} - 10^{-10})$ よりも小さくなってしまう。

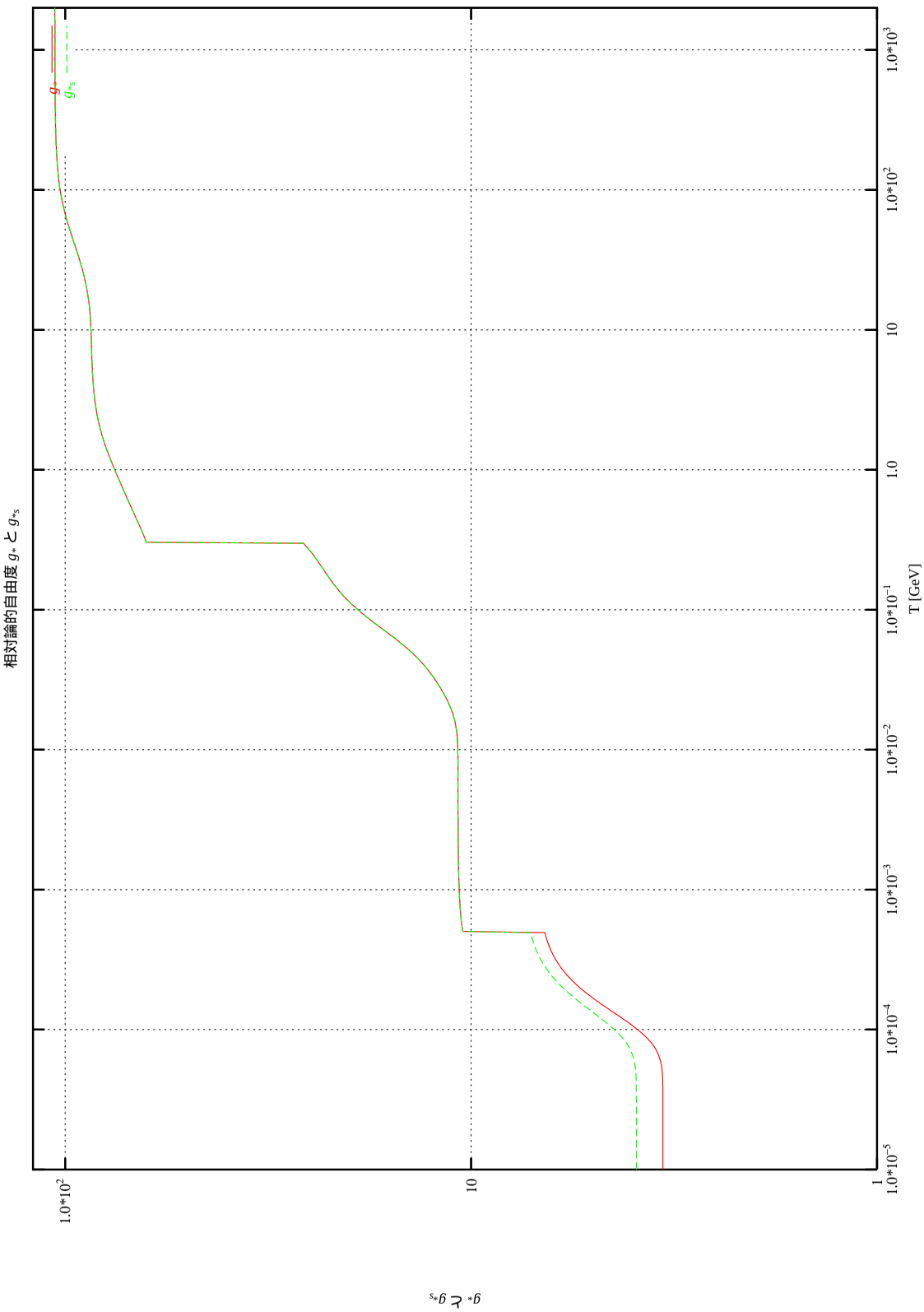


図 15: 標準模型での effective な相対論的自由度 g_* , g_{*s} 。

3. BBN が始まった後に exotic particle が崩壊すると、それにより生じたフォトンや荷電粒子がカスケードを起こして高エネルギーのフォトンを生成する。するとそのフォトンが軽元素 (D, ^{3}He, ^{4}He) の量を変えてしまう[56] 。
4. Exotic particle の寿命が 10^{10} sec よりも長いと現在の宇宙背景輻射の温度を変えてしまう。
5. Exotic particle が安定だと、そのエネルギー密度が現在観測されている宇宙のエネルギー密度を超えてしまう。

以上の制限を標準ビッグ・バン宇宙モデルで充たそうとすると、いくつかの困難に直面する。「標準ビッグ・バン宇宙モデル」とは軽元素がビッグ・バンの最中に作られたとし、また現在の宇宙の密度パラメータ Ω が 1 より小さいとするモデルのこととする。以下では、exotic particle として gravitino, moduli field を考える。

7.4 Gravitino 問題

まず標準ビッグ・バン宇宙モデルで考えて矛盾が生じることをみる。

1. Gravitino が安定でない場合 (例えば hidden sector susy breaking の場合)

   (a) gravitino の崩壊による軽元素の photo-dissociation を避けるには、大部分の gravitino が BBN の前に崩壊してフォトンを出してしまえば良い。Weinberg によると [46] それには $m_{3/2} \gtrsim 10$ TeV が必要である。
   (b) $m_{3/2} \gtrsim 10$ TeV のモデルでは gravitino の崩壊により大量のフォトンが作られるので現在のバリオンとフォトンの比 $\eta_B \sim \mathcal{O}\left(10^{-9} - 10^{-10}\right)$ を説明するには gravitino の崩壊の前の η_B を非常に大きくしなくてはならない。
   (c) R-parity が保存するモデルでは、gravitino は LSP に崩壊する。LSP は安定である。生成した LSP が減らないとすると、LSP のエネルギー密度は現在の宇宙のエネルギー密度を大きく超えてしまう [47]。よって、LSP が対消滅することが必要だが、充分 LSP が減るためには 宇宙の温度が $T \gtrsim (1 \sim 10)$ GeV の時期に gravitino が崩壊しなくてはいけない。それには $m_{3/2} \gtrsim (10^6 - 10^7)$ GeV が必要である。これは naturalness の観点から言って不自然な程大きい値である。

2. Gravitino が安定な場合 (例えば gauge mediated susy breaking の場合)

   gravitino は LSP である。gravitino が宇宙初期に熱平衡にあったとする (これを、「一次的 gravitino」と呼ぶ[57] 。) すると、現在の gravitino のエネルギー密度が現在の宇宙のエネル

[56] これを 軽元素の photo-dissociation と呼ぶ。BBN は現在の軽元素の量をよい精度で予言するので、それが変わってしまうのはまずい。
[57] これは warm dark matter の候補である。

ギー密度を超えないためには $m_{3/2} \lesssim 2h^2$ keV でなくてはならない[58] 。$h \simeq 0.7$ の場合、$m_{3/2} \lesssim 1$ keV である [50]。これは、加速器の制限 (6.8) とは両立している。しかし Kähler ポテンシャル が minimal で宇宙定数がゼロの場合、(5.80) より $m_{3/2} = F_{DSB}/(\sqrt{3}M_{Pl}^*)$ だから、これはモデルに非常に強い制限をつけることになる。

以上の問題は、インフレーション宇宙モデルを採用すると解決できる [51]。それは、インフレーション前に存在した一次的 gravitino はインフレーションにより無視できるくらいに薄められてしまうからである。しかし、問題が完全に解決されるわけではない。インフレーション後の宇宙の reheating により二次的に gravitino が作られるからである。

1. Gravitino が安定でない場合

   100 GeV $\lesssim m_{3/2} \lesssim$ 10 TeV では gravitino の寿命は 10^2 sec $\lesssim \tau_{3/2} \lesssim 10^8$ sec となり、ほとんどが BBN の後で崩壊する。よって、軽元素の photo-dissociation から制限がつく。重要な量は、reheating 後に作られる gravitino (これを「二次的 gravitino」と呼ぶ[59] 。) の数密度と、gravitino の崩壊により生じる高エネルギーフォトンのスペクトルである。これから、reheating の起こる温度 T_R の上限が決まる。

2. Gravitino が安定な場合

   二次的 gravitino の質量が $m_{3/2} \sim 1$ keV の場合、gravitino が熱平衡に達すると現在の宇宙の臨界密度と同じ程度のエネルギー密度を与える。よって、gravitino は dark matter の候補になる。$m_{3/2} \gtrsim 1$ keV の場合はインフレーションを考えないといけない。このときは二次的 gravitino の現在のエネルギー密度が臨界密度を超えない条件から T_R の上限が ($m_{3/2}$ の関数として) 決まる。また、NLSP が gravitino に崩壊するときに生じるフォトンによる軽元素の photo-dissociation の条件から $m_{3/2}$ の上限が決まる。

GMSB モデルでは gravitino は LSP であり、安定である。よって以下の節では上述の 2. の場合を調べる。

7.4.1 質量密度からの制限

この節ではインフレーション後に二次的に作られる gravitino のエネルギー密度の現在での値を求める。

[58] h は 100 km/sec/Mpc で規格化した Hubble 定数である。現在の観測値は $h \simeq 0.7$ である。
[59] これは熱平衡にはならないので cold dark matter の候補である。

まず、gravitino の数密度 $n_{3/2}$ の時間発展は次の Boltzmann 方程式で記述される。

$$\frac{d\,n_{3/2}}{d\,t} + 3H\,n_{3/2} = \langle \Sigma_{tot}\, v_{rel} \rangle\, n_{rad}^2 + \sum_i n_i \frac{m_i}{\langle E_i \rangle} \Gamma_i - n_{3/2} \frac{m_{3/2}}{\left\langle E_{3/2} \right\rangle} \Gamma_{3/2} \tag{7.16}$$

ここで n_{rad} は熱浴中にある相対論的スカラーボソンの数密度[60]

$$n_{rad} = \frac{\zeta(3)}{\pi^2} T^3$$

、v_{rel} は散乱する相対論的粒子の相対速度、H はハッブル定数、Σ_{tot} は gravitino を生成する反応 (散乱) の全散乱断面積、$n_i\,, m_i\,, E_i\,, \Gamma_i$ は順に superpartner の数密度、質量、エネルギー、崩壊率である。また $\langle \cdots \rangle$ は熱平均である。輻射優勢の宇宙ではハッブル定数は

$$H \equiv \frac{\dot{R}}{R} = \sqrt{\frac{g_*\,\pi^2}{90 M_{Pl}^{*\,2}}} T^2 \tag{7.17}$$

で与えられる。R は宇宙のスケールファクター、g_* は相対論的粒子の effective な自由度である。全ての MSSM 粒子を含めると $g_* \simeq 915/4 = 228.75$、また $g_*(T \ll 1\mathrm{MeV}) \simeq 43/11 = 3.36$ である。(7.16) の右辺第 1 項は相対論的粒子の散乱からの寄与、第 2 項は superpartner の崩壊からの寄与、第 3 項は gravitino の崩壊の寄与である。この他に右辺第 1 項の逆反応により gravitino が消える寄与もあるはずだが、gravitino 生成が始まって間もない間は無視できる。この寄与の扱いについては後述する。

MSSM の matter chiral multiplet、gauge multiplet 内の mass splitting $m_\psi^2 - m_\phi^2\,,\ m_\lambda$ に比べて gravitino の質量 $m_{3/2}$ が充分小さければ (5.79) から gravitino の スピン $1/2$ 成分のカップリングの方がスピン $3/2$ 成分のそれよりも大きくなることがわかる。gravitino が LSP の場合はそうなっているので、gravitino のスピン $1/2$ 成分の生成だけ考えればよい。

二次的 gravitino を生成するプロセスとして、次のものを考える：

$$A^a\ A^b \ \rightarrow\ \psi\ \lambda^c \tag{7.18}$$
$$A^a\ \lambda^b \ \rightarrow\ \psi\ A^c \tag{7.19}$$
$$\chi\ \phi^* \ \rightarrow\ \psi\ A^a \tag{7.20}$$
$$\lambda^a\ \lambda^b \ \rightarrow\ \psi\ \lambda^c \tag{7.21}$$
$$\chi\ \overline{\chi} \ \rightarrow\ \psi\ \lambda^a \tag{7.22}$$
$$\phi\ \phi^* \ \rightarrow\ \psi\ \lambda^a \tag{7.23}$$
$$A^a\ \phi_i \ \rightarrow\ \psi\ \chi_j \tag{7.24}$$
$$A^a\ \chi_i \ \rightarrow\ \psi\ \phi_j \tag{7.25}$$
$$\lambda^a\ \chi_i \ \rightarrow\ \psi\ \chi_j \tag{7.26}$$
$$\lambda^a\ \phi_i \ \rightarrow\ \psi\ \phi_j \tag{7.27}$$

[60] gravitino が二次的に生成されるときの温度 ($\simeq$ 宇宙の再加熱温度 T_R) は充分高いので全ての MSSM 粒子は相対論的である。

ここで、A はゲージボソン、λ は gaugino、ψ は gravitino、χ は MSSM のフェルミオン、ϕ は MSSM のボソンである。

(5.79) から gravitino のスピン $1/2$ 成分 (以後単に gravitino と呼ぶ) と matter のカップリングは次元 4 のオペレーターであるのに対し、gravitino と gaugino, ゲージボソンのカップリングは次元 5 のオペレーターである。よって、高エネルギーでは gaugino, ゲージボソンとのカップリングが gravitino を生成する主要な相互作用である。つまり、(7.18)-(7.23) が主要な相互作用である。これから gravitino を生成する反応の全散乱断面積 Σ_{tot} は

$$\begin{aligned}\Sigma_{tot} &\simeq \frac{1}{2}\sum_{x,y,z}\eta_x\eta_y\,\sigma(x+y\to\psi+z)\\ &= 5.9\cdot\frac{g_3^2M_3^2}{m_{3/2}^2M_{Pl}^{*\,2}}\end{aligned}\tag{7.28}$$

で与えられる [56]。ここで M_3 は $\tilde{g}$ の質量、g_3 はそのゲージカップリング、 η_x は粒子 x がボソンのとき 1、フェルミオンのとき $3/4$ である。

reheating 直後の時期 $T\sim T_R($ 宇宙の再加熱温度 $)$ では gravitino はインフレーションにより薄められているので (7.16) の右辺第 3 項は無視できる。(7.16) を解くために、とりあえず宇宙の断熱膨張の式 $RT=$ const. と 'yield variable' $Y_{3/2}\equiv n_{3/2}/n_{rad}$ を使って (7.16) を書き直すと

$$\frac{d\,Y_{3/2}}{d\,T}=-\frac{n_{rad}\,\langle\Sigma_{tot}v_{rel}\rangle}{HT}-\sum_i\frac{m_i}{\langle E_i\rangle}\frac{Y_i\Gamma_i}{HT}\tag{7.29}$$

となる。$n_{rad}\propto T^3\,, H\propto T^2$ より右辺第 1 項はほぼ T に依存しない。よって簡単に積分できる。$T\sim T_R$ のときは断熱膨張の仮定はよい近似だったが、$T\ll T_R$ となるとそうではない。このときは正確なエントロピー保存則

$$sR^3=\text{const.}$$

を使わなければならない。s はエントロピー密度である。$R^3n_{3/2}=$ const. ならば、温度 T_1 と T_2 での $Y_{3/2}$ の間の関係は次のようになる：

$$\begin{aligned}Y_{3/2}(T_1) &= \frac{n_{3/2}(T_1)}{n_{rad}(T_1)}=\frac{R(T_2)^3}{R(T_1)^3}\frac{n_{3/2}(T_2)}{n_{rad}(T_1)}\\ &= \frac{s(T_1)}{s(T_2)}\frac{s_0(T_2)}{s_0(T_1)}\frac{n_{3/2}(T_2)}{n_{rad}(T_2)}\\ &\equiv \frac{g_{*s}(T_1)}{g_{*s}(T_2)}Y_{3/2}(T_2)\end{aligned}\tag{7.30}$$

ここで $s_0\equiv(2\pi/45)T^3$、$g_{*s}\equiv s/s_0$ であり、また $n_{rad}\propto s_0$ を使った。全ての MSSM 粒子を含めると $g_{*s}\simeq 228.75$、また $g_{*s}(T\ll T_R)\simeq 3.91$ である。(7.29),(7.30) から温度 $T(\ll T_R)$ での yield は

$$Y_{3/2}(T)=\frac{g_{*s}(T)}{g_{*s}(T_R)}\times\left[\overline{Y}_{scatt}+\overline{Y}_{decay}\right]\tag{7.31}$$

ただし

$$\overline{Y}_{scatt} = \frac{n_{rad}(T_R)\,\langle\Sigma_{tot}v_{rel}\rangle}{H(T_R)} \tag{7.32}$$

$$\overline{Y}_{decay} = \int_T^{T_R}\frac{dT}{T}\sum_i\frac{m_i\Gamma_i}{\langle E_i\rangle\,H}Y_i \tag{7.33}$$

である。$\overline{Y}_{scatt}$ は T_R に比例している。一方、$\overline{Y}_{decay}$ は T_R が superparticle の質量よりも充分大きければ T_R に依存しない。

gravitino の温度 T でのエネルギー密度は

$$\rho(T) = m_{3/2}Y_{3/2}(T)n_{rad}(T) \tag{7.34}$$

である。gravitino の現在のエネルギー密度が臨界密度を超えないための条件は

$$\rho(T_0) \leq \rho_c \tag{7.35}$$

ここで $T_0 = 2.7\mathrm{K}$、現在の宇宙の臨界密度 $\rho_c \simeq 8.1\times10^{-47}h^2\mathrm{GeV}^4$ $(0.4\lesssim h\lesssim 1)$ である。これから ($m_{3/2}$ の関数として) T_R に制限がつくことがわかる。

これから T_R の上限を $m_{3/2}$ の関数として求めたのが次の図 16 である [56]。数値計算の際、全ての squark,slepton の質量を 1TeV、$\tilde{B}$ の質量 $m_1 = 50\mathrm{GeV}$、$h = 1$ とした。また、gaugino mass relation (5.59) を仮定した。(7.31) で $\overline{Y}_{scatt}, \overline{Y}_{decay}$ が $\mathcal{O}(1)$ になったら正しくは gravitino を壊す反応、つまり (7.18) ~ (7.27) の逆反応の効果を取り入れないといけない。gravitino が熱平衡に達したときの yield は 3/2 だから、$\overline{Y}_{scatt}+\overline{Y}_{decay} \geq 3/2$ になったら gravitino が熱平衡に達したと考えて $\overline{Y}_{scatt}+\overline{Y}_{decay} = 3/2$ とすることでこの効果を取り入れた。

このグラフからわかることは、$m_{3/2}\gtrsim 10^{-4}\mathrm{GeV}$ ではT_R の上限は $m_{3/2}$ に比例し、$2\mathrm{keV}\lesssim m_{3/2}\lesssim 100\mathrm{keV}$ では $T_R \sim \mathcal{O}(100\mathrm{GeV})$ であり、$m_{3/2}\lesssim 2\mathrm{keV}$ では T_R には制限がつかないことである。これは次の考察から定性的に理解できる。

まず、$m_{3/2}\gtrsim 10^{-4}\mathrm{GeV}$ の場合、(5.83),(5.84) から gaugino,sfermion の崩壊率が小さくなるので輻射の散乱による gravitino 生成がほとんどである。(7.31),(7.32) から

$$Y_{3/2}(T_0) = \frac{g_{*s}(T_0)}{g_{*s}(T_R)}\frac{\sqrt{90}\zeta(3)M_{Pl}^*}{\pi^3\sqrt{g_*}}\,\langle\Sigma_{tot}v_{rel}\rangle\,T_R \tag{7.36}$$

である。さらに (7.28) から $\Sigma_{tot}\propto m_{3/2}^{-2}$ だから (7.34),(7.35) から T_R の上限が $m_{3/2}$ に比例することがわかる。実際、

$$T_R \lesssim 10^{12}\mathrm{GeV}\times\left(\frac{m_{3/2}}{100\mathrm{GeV}}\right) \tag{7.37}$$

である。

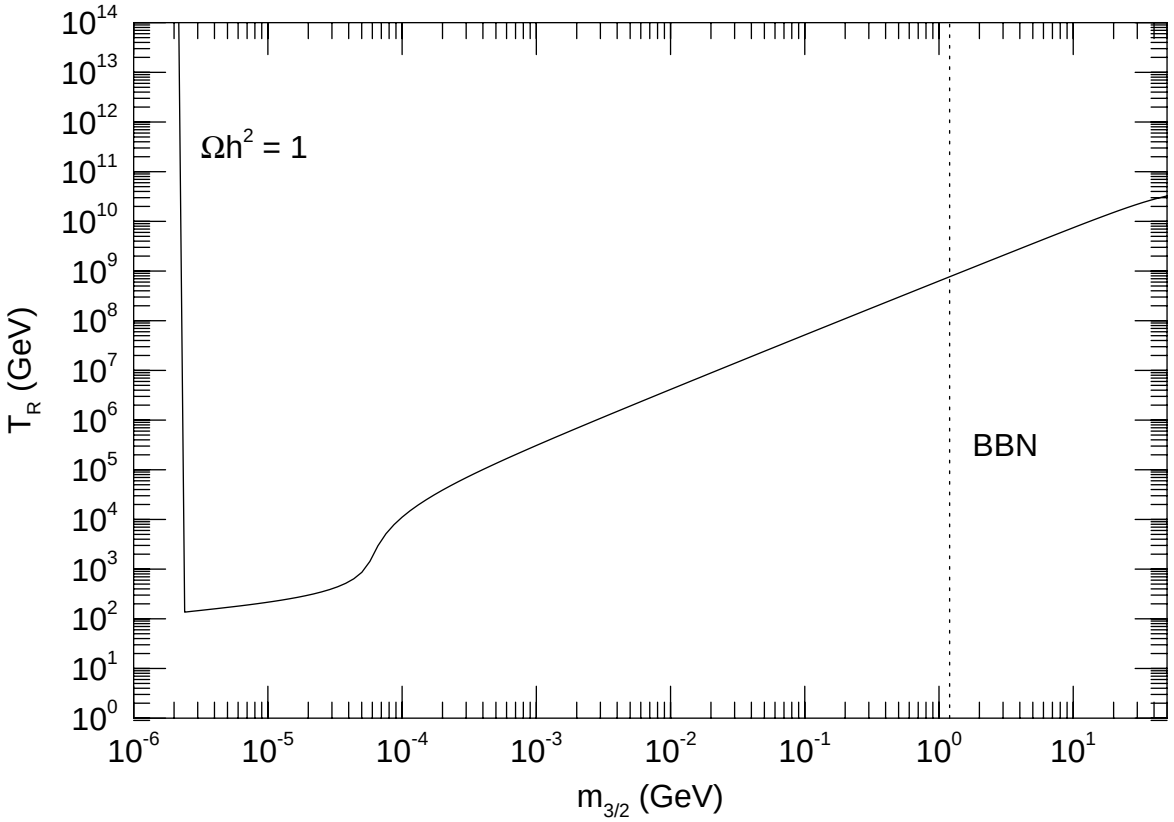


図 16: gravitino が LSP であるときの $m_{3/2}$ と T_R への制限。$\tilde{B}$ の質量を 50 GeV とした。実線はエネルギー密度から求めた T_R の上限である。点線は photo-dissociation から求めた $m_{3/2}$ の上限である。これは次の節で求める。

次に、$2\text{keV} \lesssim m_{3/2} \lesssim 100\text{keV}$ の場合、gaugino,sfermion の崩壊の寄与が無視できなくなる。$\rho_{3/2} \leq \rho_c$ となるのは T_R が sfermion の質量より小さいときである。よって、T_R の上限は $\mathcal{O}(100\text{GeV})$ となる。

最後に、$m_{3/2} \lesssim 2\text{keV}$ の場合は $m_{3/2}$ が充分小さいので gravitino が熱平衡に達してもそのエネルギー密度が臨界密度を超えることがない。

次に、NLSP が LSP に崩壊するときに生じるフォトンや荷電粒子が BBN で生成された軽元素の量を変えてしまわないための条件を考える。

7.4.2 BBN 後の軽元素の photo-dissociation

ビッグ・バン宇宙モデルの大きな成功の一つに、原子番号 7 以下の軽元素合成が挙げられる。(Big-Bang Nucleosynthesis,BBN.) ビッグ・バンの最中にこれらの軽元素が合成されたと考えると、バリオンとフォトンの比 η_B が $\eta_B \simeq 3 \times 10^{-10}$ ならば現在の軽元素の量を驚く程よく再現できる [55]。一方、R-パリティが保存する超対称性理論では全ての superparticle は崩壊を重ねて安定な LSP になる。このとき放出されるフォトンや荷電粒子がカスケードを起こし、高エネルギーのフォトンが発生する。これらが BBN の後に発生すると軽元素と反応を起こしてせっかく適切な量だけできた軽元素の量が変わってしまう。このプロセスを photo-dissociation と呼ぶ。NLSP は崩壊するモードが (5.82) だけなので他の superparticle より崩壊するのが遅い。よって、NLSP は BBN の後に崩壊する可能性がある。計算によると $m_{NLSP} \gtrsim$ 数 TeV だと NLSP は BBN の前に崩壊するので photo-dissociation からの制限はつかない。$m_{NLSP} \lesssim$ TeV のときは $m_{3/2}$ に上限がつく。(あるいは、$m_{3/2}$ を fix するならば m_{NLSP} に下限がつく。) この節ではこれを求める。

ここでは NLSP が $\tilde{B}$ であるとし、

$$\tilde{B} \to \gamma + \psi_{3/2} \tag{7.38}$$

によりフォトンが発生するとする[61] 。このフォトンがカスケードを起こした結果、フォトンと電子の分布関数 $f_\gamma(\epsilon_\gamma)$, $f_e(\epsilon_e)$ (エネルギー ϵ_γ , ϵ_e のフォトン、電子の数密度) がどうなるかを知りたい。カスケードのプロセスとしては

- 2 フォトンによる対生成　　$\gamma + \gamma \to e^+ + e^-$
- フォトン散乱　　$\gamma + \gamma \to \gamma + \gamma$
- 原子核中の対生成　　$\gamma + N \to e^+ + e^- + N$
- コンプトン散乱　　$\gamma + e^- \to \gamma + e^-$
- 逆コンプトン散乱　　$e^\pm + \gamma \to e^\pm + \gamma$

が考えられる。ここで N は原子核である。これらの効果を取り入れて $f_\gamma(\epsilon_\gamma)$, $f_e(\epsilon_e)$ に対する Boltzmann 方程式を立てて数値的に解けば f_γ , f_e が得られる。

軽元素 (D , T , ^{3}He , ^{4}He) と輻射の反応としては次のものを考える [49] :

[61] $\tilde{B}$ は Z^0 にも崩壊し得るが、今の場合 $m_{\tilde{B}} \sim 50$GeV を考えるのでこの崩壊モードは kinematical にほとんど許されない。

反応	threshold energy (MeV)
$\mathrm{D} + \gamma \to \mathrm{n} + \mathrm{p}$	2.225
$\mathrm{T} + \gamma \to \mathrm{n} + \mathrm{D}$	6.257
$\mathrm{T} + \gamma \to \mathrm{p} + \mathrm{n} + \mathrm{n}$	8.482
$^3\mathrm{He} + \gamma \to \mathrm{p} + \mathrm{D}$	5.494
$^3\mathrm{He} + \gamma \to \mathrm{p} + \mathrm{D}$	7.718
$^4\mathrm{He} + \gamma \to \mathrm{p} + \mathrm{T}$	19.815
$^4\mathrm{He} + \gamma \to \mathrm{n} + {}^3\mathrm{He}$	20.578
$^4\mathrm{He} + \gamma \to \mathrm{p} + \mathrm{n} + \mathrm{D}$	26.072

これらの反応を考慮にいれて D , T ,^{3} He ,^{4} He の Boltzmann 方程式を立てると次のようになる：

$$\begin{aligned}
\frac{dn_{\mathrm{D}}}{dt} + 3Hn_{\mathrm{D}} &= -n_{\mathrm{D}} \sum_i \int_{E_i} d\epsilon_\gamma \, \sigma^i_{\mathrm{D}\to a}(\epsilon_\gamma) f_\gamma(\epsilon_\gamma) \\
&\quad + \sum_i \int_{E_i} d\epsilon_\gamma \, \sigma^i_{a\to \mathrm{D}}(\epsilon_\gamma) \, n_a \, f_\gamma(\epsilon_\gamma) \\
\frac{dn_{\mathrm{T}}}{dt} + 3Hn_{\mathrm{T}} &= -n_{\mathrm{T}} \sum_i \int_{E_i} d\epsilon_\gamma \, \sigma^i_{\mathrm{T}\to a}(\epsilon_\gamma) f_\gamma(\epsilon_\gamma) \\
&\quad + \sum_i \int_{E_i} d\epsilon_\gamma \, \sigma^i_{a\to \mathrm{T}}(\epsilon_\gamma) \, n_a \, f_\gamma(\epsilon_\gamma) \\
\frac{dn_{^3\mathrm{He}}}{dt} + 3Hn_{^3\mathrm{He}} &= -n_{^3\mathrm{He}} \sum_i \int_{E_i} d\epsilon_\gamma \, \sigma^i_{^3\mathrm{He}\to a}(\epsilon_\gamma) f_\gamma(\epsilon_\gamma) \\
&\quad + \sum_i \int_{E_i} d\epsilon_\gamma \, \sigma^i_{a\to {}^3\mathrm{He}}(\epsilon_\gamma) \, n_a \, f_\gamma(\epsilon_\gamma) \\
\frac{dn_{^4\mathrm{He}}}{dt} + 3Hn_{^4\mathrm{He}} &= -n_{^4\mathrm{He}} \sum_i \int_{E_i} d\epsilon_\gamma \, \sigma^i_{^4\mathrm{He}\to a}(\epsilon_\gamma) f_\gamma(\epsilon_\gamma) \\
&\quad + \sum_i \int_{E_i} d\epsilon_\gamma \, \sigma^i_{a\to {}^4\mathrm{He}}(\epsilon_\gamma) \, n_a \, f_\gamma(\epsilon_\gamma)
\end{aligned} \tag{7.39}$$

ここで n_X は 粒子 X の数密度、$\sigma^i_{X\to a}(\epsilon)$ は反応 i: $X + \gamma \to a + \cdots$ の断面積 (ϵ は入射フォトンのエネルギー)、E_i は反応 i の起こる threshold エネルギーである。$\sigma^i_{X\to a}$ は具体的には上の表に挙げた反応の断面積である。

BBN により生成された軽元素の質量密度は次の制限を充たす [55]：

$$\begin{aligned}
0.22 < \left[\frac{\rho_{^4\mathrm{He}}}{\rho_B}\right]_{\mathrm{primordial}} &< 0.24 \\
\left[\frac{n_{\mathrm{D}}}{n_{\mathrm{H}}}\right]_{\mathrm{primordial}} &> 1.8 \times 10^{-5} \\
\left[\frac{n_{\mathrm{D}} + n_{^3\mathrm{He}}}{n_{\mathrm{H}}}\right]_{\mathrm{primordial}} &< 1.0 \times 10^{-4}
\end{aligned} \tag{7.40}$$

$[\cdots]_{\mathrm{primordial}}$ は宇宙初期、つまり BBN 直後の $\cdots$ の量を表す。初期条件、つまり (7.39) を解くためには初期条件が必要である。このうち入射するフォトンの数密度は NLSP の yield Y_{NLSP}

で決まる。軽元素の質量密度の初期条件は (7.40) である。(7.39) をこれらの初期条件の下で解いた結果が再び (7.40) を充たすという条件から $m_{NLSP}Y_{NLSP}$ と τ_{NLSP} に制限がつく。

NLSP の yield Y_{NLSP} は [52, 53, 54] で計算されている。これによると neutralino が NLSP のとき、パラメータの広い領域で $Y_{NLSP} \gtrsim \rho_{cr}/s \times 10^{-3}$ である。これは

$$m_{NLSP}Y_{NLSP} \geq 5.0 \times 10^{-11}\mathrm{GeV}^3 \tag{7.41}$$

に相当する[62] 。ここでは控え目に見積もって $m_{NLSP}Y_{NLSP} = 5.0 \times 10^{-11}\mathrm{GeV}^3$ とする。

解析によると ${}^3\mathrm{He} + \mathrm{D}$ が生成されすぎないためには $\tau_{NLSP} \leq 2.6 \times 10^6\mathrm{sec}$ でなければならない [59]。これと (5.83) から

$$\left[\frac{1}{48\pi}\frac{m_{NLSP}^5}{m_{3/2}^2 M_{Pl}^{*2}}\left\{1-\left(\frac{m_{3/2}}{m_{NLSP}}\right)^2\right\}^3\right]^{-1} \leq 2.6 \times 10^6\mathrm{sec} \tag{7.42}$$

である。左辺の値は m_{NLSP} の値に大きく依存している。m_{NLSP} が小さいとき、$m_{3/2}$ への強い制限が得られる。$m_{NLSP} = 50\mathrm{GeV}$ のとき $m_{3/2} \leq 1.2\mathrm{GeV}$ である。この制限は図 16 にも示した。

T_R が NLSP の質量よりも充分小さいならば NLSP があまり生成されないのでこの制限はつかない。また、$\tilde{\nu}$ が NLSP のとき、崩壊によりフォトンが大量に生成されることがないのでやはりこの制限はつかない。

7.5 Moduli 問題

この節では、超対称ゲージ理論が自発的にコンパクト化された超弦理論であるという仮定から生じる問題を扱う。

超弦理論ではポテンシャルの flat direction が数多く存在するが、それらを parametrize するスカラー場を moduli と呼ぶ。以下、moduli を ϕ と書く。moduli の真空期待値はコンパクト化された次元の座標になっている。具体的には、例えば超弦理論に現れる dilaton が moduli の候補である。超対称性が破れていない限り、moduli は質量を持たないが、超対称性が破れると $m_\phi \sim m_{3/2}$ の質量を得る [65]。超弦理論のスケール M_{Pl} に比べるとこれは非常に小さいので、ポテンシャルはほとんど flat である。よって、moduli のエネルギーは宇宙に偏在しているとみなせる。つまり、真空のエネルギーとみなせる。これは、宇宙の加速/減速に影響しない。

超弦理論の低エネルギー effective 理論になっている supergravity 理論の action に含まれる唯一のスケールが M_{Pl} なので、初期宇宙では moduli (の期待値) は $\sim M_{Pl}$ のはずである。ハッブル定数が $H < m_\phi$ になると、moduli はポテンシャルの底のまわりで振動を始めると仮定する。

[62] 他の NLSP (例えば $\tilde{\tau}_1$) でもこれが成立していると考えられる。

このとき、moduli が初期宇宙で崩壊せず寿命が現在の宇宙年齢より長いならば moduli の振動のエネルギー密度

$$\epsilon_\phi = \frac{1}{2} m_\phi \langle\phi\rangle^2 \sim \frac{1}{2} m_\phi M_{Pl}^{*\,2} \tag{7.43}$$

が現在の宇宙の臨界密度を超えてしまう。一方、moduli が初期宇宙で崩壊するならば今度はそれにより生じるフォトンが多くなりすぎてバリオンとフォトンの比 η_B が観測値よりはるかに小さくなってしまう。hidden sector susy breaking(HSSB) モデルと GMSB モデルでどちらの問題が生じるか見てみる。

まず、moduli の崩壊幅は

$$\Gamma_\phi \sim N \frac{m_\phi^3}{M_{Pl}^2} \tag{7.44}$$

である。N は崩壊モードの数である。これより moduli の寿命は

$$\tau_\phi = \Gamma_\phi^{-1} \sim 1 \times 10^{20} \times \frac{1}{N} \left(\frac{10\mathrm{MeV}}{m_\phi} \right)^3 \ \mathrm{sec} \tag{7.45}$$

である。まず HSSB モデルでは

$$m_\phi \sim m_{3/2} \sim 10^3 \mathrm{GeV} \tag{7.46}$$

だから

$$\tau_\phi \sim \frac{1}{N} \times 10^{-4} \mathrm{sec} \tag{7.47}$$

である。よって、moduli は初期宇宙で崩壊する。これから、HSSB モデルでは moduli の崩壊の η_B への影響を考えなくてはいけない。

一方、GMSB モデルでは

$$m_\phi \sim m_{3/2} \sim (10^{-2}\mathrm{keV} - 1\mathrm{GeV}) \tag{7.48}$$

である。このうち、

$$m_\phi \sim (10^{-2}\mathrm{keV} - 100\mathrm{MeV})$$

の領域では $\tau_\phi \geq \tau_0$ (τ_0 は現在の宇宙年齢) で、現在も存在するので moduli のエネルギー密度の問題が生じる。

$$m_\phi \sim (100\mathrm{MeV} - 1\mathrm{GeV})$$

の領域では $\tau_\phi \leq \tau_0$ となるが、今度は moduli の崩壊で生成されるフォトンが現在の η_B を変えてしまう危険がある。

以下では GMSB モデルに焦点をしぼり、どの様にして moduli の現在のエネルギー密度を薄めるかを考える [61, 62]。最終的には、moduli の質量に制限がつくが、$m_\phi \sim m_{3/2}$ であることから、ひいては超対称性の破れのスケール $\sqrt{F_{DSB}}$ に制限がつく。

宇宙の臨界密度は $\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}$ であり、時間とともに減少して行く。一方、moduli のエネルギーは (他の場との相互作用が小さいとして) ポテンシャルエネルギーが dominant であり、$H > m_\Phi$ の間はほとんど一定であるので、moduli が薄められるか何かしなければ容易に $\Omega_\Phi > 1$ となってしまう。

moduli(の期待値) は M_{Pl} からポテンシャルの底に向かってゆっくり転がり始める。

moduli を薄めるために、moduli が振動を始める前に宇宙がさらにインフレーションを起こす時期があった (これを thermal inflation [57] と呼ぶ) と仮定する。thermal inflation を引き起こすスカラー場を flaton と呼ぶことにする[63] 。また、thermal inflation で薄められるこの moduli を big-bang moduli (BB moduli) と呼ぶことにする。

flaton を χ とかく。flaton のポテンシャルは

$$V = V_0 - m^2|\chi|^2 + \frac{1}{M_*^2}|\chi|^{2n+4} \tag{7.49}$$

である。ここで V_0 は宇宙定数をゼロにするために加えた定数、$|\chi|^2$ の項は超対称性の soft breaking term、$|\chi|^{2n+4}$ の項は F-term の寄与である。また、M_* は理論の cut off スケールである。[57] ではこれを M_{Pl}^* としていたが、ここではより一般に free parameter としておく。$\partial V/\partial\chi = 0$ より

$$\langle\chi\rangle = \left(\frac{1}{n+2}\right)^{\frac{1}{2n+2}} (mM_*^n)^{\frac{1}{n+1}} \equiv M \tag{7.50}$$

$V(\chi = M) = 0$ より V_0 が決まる：

$$V_0 = m^2M^2 - \frac{M^{2n+4}}{M_*^{2n}} = \frac{n+1}{n+2}m^2M^2 \tag{7.51}$$

次に flaton の崩壊を考える。主要な崩壊モードは

1. $\chi \to H\overline{H}$
2. $\chi \to \gamma\gamma$
3. $\chi \to aa$

ここで H は Higgs ボソン/ Higgsino、γ はフォトン、a は (7.49) の $U(1)_R$ 対称性が $\langle\chi\rangle = M$ で自発的に破れて生じる R-axion である。flaton は、正しくは複素スカラー場 X の動径成分であり、角度成分が R-axion である：

$$X = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\chi + M\right)\exp\left(\frac{ia}{\sqrt{2}M}\right) \tag{7.52}$$

ここでは簡単のため 3. をとりあえず無視して 1.,2. を考える。

[63] 通常 (普通の) インフレーションを引き起こすスカラー場を inflaton と呼ぶが、ここでは flat direction を記述する場という意味で [57] にならい flaton という言葉を使う。

flaton と MSSM 粒子のくりこみ可能なカップリングは

$$W \subset \lambda \chi H_u H_d \tag{7.53}$$

だけである[64] 。もともと $\mathcal{L}$ に含まれていた超対称性な Higgs mass μ_H は、$\langle\chi\rangle$ により effective に $(\mu_H + \lambda \langle\chi\rangle)$ となる。これが weak スケール程度であるためには $\lambda \langle\chi\rangle \leq \mu_H$、つまり $\lambda \leq \mu_H/M$ でなければいけない。

(7.53) のカップリングにより flaton は Higgs ボソン、Higgsino に崩壊できる。$M \lesssim 10^{12}$GeV ならば χ の寿命から T_R を計算すると $T_R \gtrsim 10$MeV となり BBN が効率よく起こる。$M \gtrsim 10^{12}$GeV だと flaton の崩壊が遅くなりすぎて T_R が低くなりすぎてしまう。

次に $2.(\chi \to 2\gamma)$ は Higgs superfield がループをまわるグラフからの寄与である。b term を無視すると χ と 2γ の effective なカップリングは

$$\mathcal{L}_{eff} = \frac{\alpha_{em}}{4\pi} \frac{\lambda}{\mu_{H\,eff}} \chi F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \tag{7.54}$$

である。ここで $\mu_{H\,eff} = \mu_H + \lambda M$ である。最も弱い制限を得るために、 $\mu_{H\,eff} = \lambda M$ とする。すると

$$\mathcal{L}_{eff} = \frac{\alpha_{em}}{4\pi} \frac{1}{M} \chi F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \tag{7.55}$$

となる。これから崩壊幅 $\Gamma(\chi \to 2\gamma)$ は

$$\Gamma(\chi \to 2\gamma) = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{\alpha_{em}}{4\pi}\right)^2 \frac{m_\chi^3}{M^2} \tag{7.56}$$

である。T を宇宙の温度、t を時間として T_R を $T_R \equiv T(t = \Gamma_\chi^{-1})$ と定義すると

$$\Gamma_\chi^{-1} \simeq \frac{1}{2H} \simeq \frac{1}{2} \left(\frac{8\pi^3}{90}\right)^{-1/2} \frac{M_{Pl}}{g_*^{1/2}} T_R^{-2}$$

と (7.56) から

$$T_R = 0.25 \times \frac{\alpha_{em}}{(4\pi)^{3/2}} \frac{m_\chi}{M} (m_\chi M_{Pl})^{1/2} \tag{7.57}$$

ここで

$$m_\chi^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial\chi \partial\chi}\right)_{\chi=M} = 2(n+1)m^2 \tag{7.58}$$

である。

Higgs ボソン、Higgsino の質量の下限は 65GeV である。よって、$m_\chi < 130$GeV ならば $\chi \to H\overline{H}$ が不可能である。よって T_R は $\chi \to 2\gamma$ で決まる (7.57) である。一方、$m_\chi \geq 130$GeV ならば $\chi \to H\overline{H}$ が起こる。このときは $T_R = 10$MeV とする。

[64] $\chi \to b\bar{b}$ は phase space 積分で suppress されてしまう。

次に flaton の dynanmics を考えて moduli のエネルギー密度の下限を求める。moduli が温度 T の熱平衡にある粒子とカップルしているとき effective なポテンシャルは

$$V_{eff} = V_0 - m^2|\chi|^2 + \frac{1}{M_*^{2n}}|\chi|^{2n+4} + cT^2|\chi|^2 \tag{7.59}$$

である。ここで $c \sim \mathcal{O}(1)$ である。これから $T > T_c \simeq m$ のときは $m_\chi^2 > 0$ で、$\langle\chi\rangle \simeq 0$ となる。つまり flaton のエネルギー密度はほぼゼロである。一方、輻射のエネルギー密度は

$$\rho_{rad} = \frac{\pi^2}{30} g_* T^4$$

だが、$T < T_* \simeq V_0^{1/4}$ のときは $\rho_{rad} < V_0$ となる。よって、$T_c \lesssim T \lesssim T_*$ のときは宇宙の全エネルギー密度は V_0 が dominant になり、thermal inflation がおこる [57]。

$T < T_c$ となると $\langle\chi\rangle \simeq M$ となり thermal inflation が終る。flaton は $\langle\chi\rangle \simeq M$ のまわりで振動をする。flaton の崩壊で解放されるエントロピー密度は

$$\frac{4}{3}\frac{V_0}{T_R}$$

である。thermal inflation が終ったときの輻射のエントロピー密度は

$$s_{rad} \simeq \frac{2\pi^2}{45} g_{*s} T_c^3$$

だから、flaton の崩壊で、エントロピー密度は factor にして

$$\Delta = \frac{4V_0/3T_R}{\frac{2\pi^2}{45} g_{*s} T_c^3} \simeq \frac{V_0}{70 T_R T_c^3}$$

だけ増加する。

通常のインフレーションが終り reheating が完全に起こった後 thermal inflation が始まるとすると (つまり thermal inflation の最中 $m_\phi > H$ であるとすると)、thermal inflation が始まる前の BB moduli の abundance は

$$\left(\frac{n_\phi}{s}\right)_{BB} \simeq \frac{m_\phi \phi_0^2/2}{8.6 m_\phi^{3/2} M_{Pl}^{*\,3/2}} \simeq \frac{\phi_0^2}{17 m_\phi^{1/2} M_{Pl}^{*\,3/2}} \tag{7.60}$$

で、thermal inflation 後の abundance は

$$\left(\frac{n_\phi}{s}\right)_{BB} \simeq 4 \left(\frac{T_c}{m_\chi}\right)^3 \left(\frac{\phi_0}{M_{Pl}^*}\right)^2 \left(\frac{M_{Pl}^*}{m_\phi}\right)^{1/2} \frac{m_\chi^3 T_R}{V_0} \tag{7.61}$$

である [57]。thermal inflation によって moduli の真空期待値も

$$\delta\phi \sim \frac{V_0}{m_\phi^2 M_{Pl}^{*\,2}} \phi_0 \tag{7.62}$$

だけずれる。これにより moduli のエネルギー密度は

$$\frac{1}{2}m_\phi^2(\delta\phi)^2$$

となる。この moduli を thermal inflation (TI) moduli と呼ぶことにする。TI moduli の abundance は

$$\left(\frac{n_\phi}{s}\right)_{TI} \simeq \frac{3}{8}\left(\frac{\phi_0}{M_{Pl}^*}\right)^2 \frac{V_0 T_R}{m_\phi^3 M_{Pl}^{*2}} \tag{7.63}$$

である。これから moduli のエネルギー密度 (密度パラメータ) の最小値を求め、それが GMSB モデルの枠内では臨界密度 $\Omega_c h^2 \simeq 0.25$ より小さくなり得ることを示したい。moduli のエネルギー密度の下限は

$$\begin{aligned}\frac{\rho_\phi}{s} &\gtrsim m_\phi\sqrt{\left(\frac{n_\phi}{s}\right)_{BB}\left(\frac{n_\phi}{s}\right)_{TI}} \\ &= \frac{3}{2}\left(\frac{\phi_0}{M_{Pl}^*}\right)^2\left(\frac{T_c}{m_\chi}\right)^{3/2}\left(\frac{m_\chi^2}{m_\phi M_{Pl}^*}\right)^{4/3} T_R \end{aligned}\tag{7.64}$$

である。

まず $m_\chi \geq 130\mathrm{GeV}$ のとき、$T_R \geq 10\mathrm{MeV}$ より (7.64) は $T_R = 10\mathrm{MeV}$ のとき最小になる。また、$\phi_0 \simeq M_{Pl}^*$, $T_c \simeq m_\chi$, $m_\chi \gtrsim 130\mathrm{GeV}$ とすると

$$\frac{\rho_\phi}{s} \gtrsim 5.3\times 10^{-11}\times\left(\frac{m_\phi}{\mathrm{MeV}}\right)^{-3/4}\mathrm{GeV} \tag{7.65}$$

となる。これから

$$\Omega_\phi h^2 \equiv \frac{\rho_\phi h^2}{\rho_c} = \frac{\rho_\phi/s}{\rho_c/s}h^2 \gtrsim 1.5\times 10^{-2}\times\left(\frac{m_\phi}{\mathrm{MeV}}\right)^{-3/4} \tag{7.66}$$

となる。ここで h は 100km/sec/Mpc 単位で測ったハッブル定数である。$\Omega_\phi h^2$ を m_ϕ の関数としてグラフにしたのが次の図 17 の長実線である。これから $m_\phi \gtrsim 20\mathrm{keV}$ ならば $\Omega_\phi h^2 < \Omega_c h^2$ となることがわかる。

次に $m_\chi < 130\mathrm{GeV}$ のとき、(7.57) より

$$M \sim 10^{-4}\times m_\chi^{3/2} M_{Pl}^{*\,1/2} T_R^{-1} \tag{7.67}$$

である。これと (7.58) から V_0 [(7.51)] を m_χ と T_R で書くと

$$V_0 = \frac{1}{2(n+2)}m_\chi^2 M^2 = \frac{1}{2n+4}m_\chi^5 M_{Pl}^* T_R^{-2} \tag{7.68}$$

となる。これを使って (7.61),(7.63) をかきなおすと

$$\left(\frac{n_\phi}{s}\right)_{BB} \simeq 4\left(\frac{T_c}{m_\chi}\right)^3\left(\frac{\phi_0}{M_{Pl}^*}\right)^2\left(\frac{M_{Pl}^*}{m_\phi}\right)^{1/2}\frac{(2n+4)T_R^3}{m_\chi^2 M_{Pl}^*}\times 10^8 \tag{7.69}$$

$$\left(\frac{n_\phi}{s}\right)_{TI} \simeq \frac{3}{8}\left(\frac{\phi_0}{M_{Pl}^*}\right)^2\frac{m_\chi^5\times 10^{-8}}{(2n+4)M_{Pl}^* m_\phi^3 T_R} \tag{7.70}$$

となる。moduli の全 abundance $(n_\phi/s)_{BB}+(n_\phi/s)_{TI}$ は

$$\left(\frac{n_\phi}{s}\right)_{BB}+\left(\frac{n_\phi}{s}\right)_{TI}\gtrsim\sqrt{\left(\frac{n_\phi}{s}\right)_{BB}+\left(\frac{n_\phi}{s}\right)_{TI}}$$

であるが、等号が成立するのは $(n_\phi/s)_{BB}=(n_\phi/s)_{TI}$ のときである。このときの m_χ を $m_{\chi,min}$ とかくと

$$m_{\chi,min}=190\times(2n+4)^{2/7}\times T_R^{4/7}\times M_{Pl}^{*\,1/14}\times m_\phi^{5/14} \tag{7.71}$$

となる。(7.64) から

$$\begin{aligned}\Omega_\phi h^2 &\gtrsim 1.5\times10^{-2}\times\left(\frac{m_\phi}{\mathrm{MeV}}\right)^{-3/4}\times\left(\frac{m_{\chi,min}}{130\mathrm{GeV}}\right)^{3/2}\\ &\simeq 2.3\times10^{-3}\times\left(\frac{m_\phi}{\mathrm{MeV}}\right)^{-3/14}\end{aligned} \tag{7.72}$$

である。$\Omega_\phi h^2$ を m_ϕ の関数としてグラフにしたのが次の図 17 の短点線である。この下限は $10^{-2}\mathrm{keV}\le m_\phi\le 1\mathrm{GeV}$ の全領域で $\Omega_c h^2$ を下回っていることがわかる。

最後に、宇宙の現在の $X(\gamma)$ 線の数密度からの制限 (η_B からの制限と同じ) をみる [60]。moduli の最も大きい崩壊モードは $\phi\to\gamma\gamma$ である[65] 。このプロセスを表す $\mathcal{L}_{eff}$ は

$$\mathcal{L}_{eff}=\frac{b}{16\pi\alpha_{em}}\frac{\phi}{M_{Pl}^*}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{7.73}$$

である。ここで b は $\mathcal{O}(1)$ の定数で、もとになる超弦理論とそのコンパクト化の種類に依存する[66] 。以下の解析は b の値にあまり依存しないので、簡単のため $b=1$ とする。すると、moduli の寿命 τ_ϕ は

$$\tau_\phi\sim 6\times\frac{M_{Pl}^2}{m_\phi^3}\sim 7\times10^{23}\times\left(\frac{m_\phi}{\mathrm{MeV}}\right)^{-3}\ \mathrm{sec} \tag{7.74}$$

である。moduli の崩壊により生成される $X(\gamma)$ 線の分布関数 $F_\gamma(E)$ は

$$F_\gamma(E)=\frac{n_{\phi,0}}{2\pi\tau_\phi H_0\Omega_0}\left(\frac{2E}{m_\phi}\right)^{3/2}\times\exp\left[-\frac{2}{3\tau_\phi H_0\Omega_0^{1/2}}\left(\frac{2E}{m_\phi}\right)^{3/2}\right] \tag{7.75}$$

[65] $\phi\to\nu\nu$ はカイラリティから ν の質量がゼロならば禁止される
[66] M-theory [63] のコンパクト化では $b=\sqrt{2}$ である [64]。

で与えられる [60]。ここで $n_{\phi,0}$ は現在の moduli の数密度、H_0 は現在のハッブル定数、Ω_0 は現在の宇宙の密度パラメータである。これが最大になる E の値 E_{max} は

$$\begin{aligned} E_{max} &= \frac{m_\phi}{2} \qquad \text{if} \qquad \tau_\phi > \frac{2}{3} H_0^{-1} \Omega_0^{-1/2} \\ E_{max} &= \frac{m_\phi}{2} \left(\frac{3\tau_\phi H_0 \Omega_0^{1/2}}{2} \right)^{2/3} \qquad \text{if} \qquad \tau_\phi < \frac{2}{3} H_0^{-1} \Omega_0^{-1/2} \end{aligned} \tag{7.76}$$

である。F_γ の最大値 $F_{\gamma\, max}$ が観測されている値 $F_{\gamma\, obs}$ を超えないという条件から $\Omega_\phi h^2$ の上限がつく。これが図 17 中の実線である。以上の三つの条件から許される m_ϕ の範囲は

$$m_\phi \lesssim 300\text{keV} \tag{7.77}$$

であることがわかる。これから、

$$F_{DSB} \lesssim \sqrt{3} \times M_{Pl}^* \times 300\text{GeV} \simeq 1.2 \times 10^{15}\text{GeV}^2 \tag{7.78}$$

つまり $\sqrt{F_{DSB}} \lesssim 3.5 \times 10^7\text{GeV}$ である。

このとき baryon asymmetry が作られるか確かめておく。[58] によると、Affleck-Dine mechanism を採用すると

$$\Omega_\Phi h^2 > \frac{m_\Phi}{100\text{keV}} \times 10^{-6} \tag{7.79}$$

で充分 baryon asymmetry が作られる。(7.77) のとき

$$\Omega_\Phi h^2 > 3 \times 10^{-6} \tag{7.80}$$

で、これは図 17 から充たされていることがわかる。

以上の解析では $\chi \to 2a$ の崩壊を考えなかったが、実はこれを考えると GMSB の枠内でも $10^{-2}\,\text{keV} \lesssim m_{3/2} \lesssim 1\,\text{GeV}$ の全領域が禁止されてしまう [61]。これは GMSB モデルでは R-axion の質量 m_a が flaton の質量 m_χ よりも充分小さいので $\chi \to 2a$ が主要な崩壊モードになってしまうためである。新しいスケールを導入せずにこれを解決するには、modified thermal inflation というモデルが現在知られている唯一のものである [62]。これは superpotential に R 対称性を explicit に破る項

$$\delta W = \alpha \chi$$

を入れて R-axion への崩壊を禁止するものである。このモデルでも上で行ったのと同様の解析をすると moduli のエネルギー密度 $\Omega_\phi h^2$ の下限と、フォトン密度からつく上限を得ることができる。これが図 18 である [62]。これから $m_\Phi < 2\,\text{MeV}$ であることがわかる。よって、$\sqrt{F_{DSB}}$ への制限は

$$\sqrt{F_{DSB}} = (\sqrt{3} m_{3/2} M_{Pl}^*)^{1/2} < 5 \times 10^7\ \text{GeV} \tag{7.81}$$

となる。

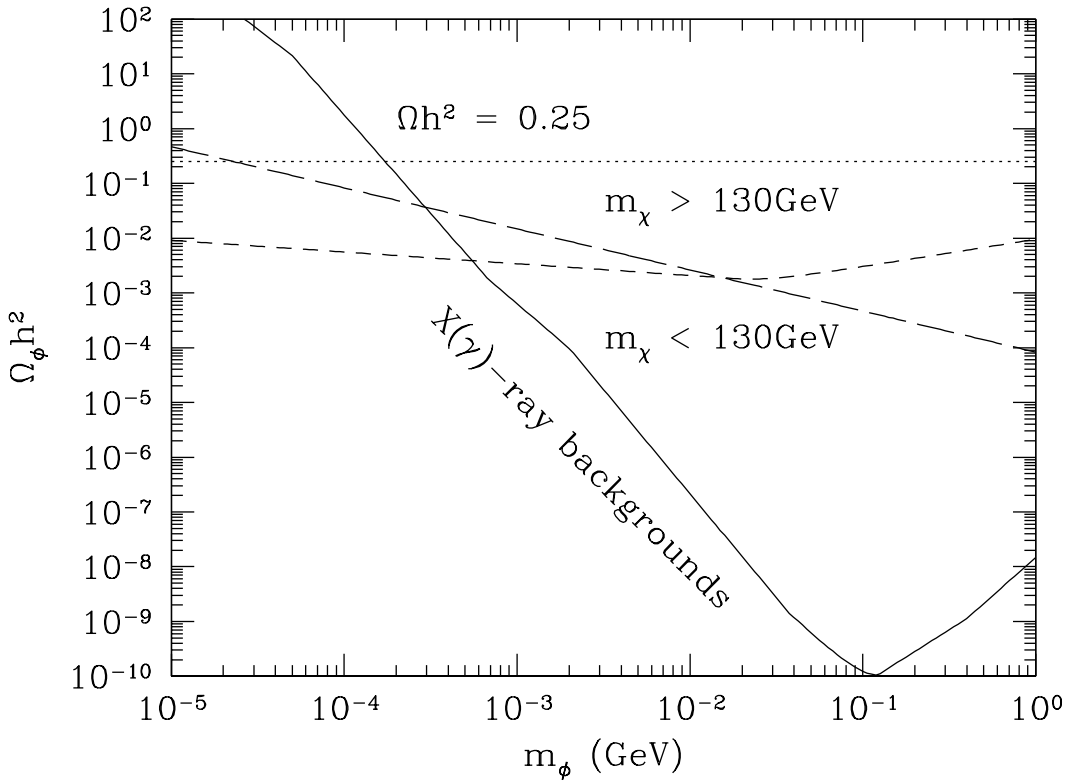


図 17: thermal inflation モデルにおける $\Omega_\phi h^2$ と m_ϕ の制限。長点線は $m_\phi > 130\mathrm{GeV}$ のときの下限、短点線は $m_\phi > 130\mathrm{GeV}$ のときの下限、実線は $X(\gamma)$ 線の量からつく上限である。水平な点線は $\Omega h^2 = 0.25$ の線である [61]。

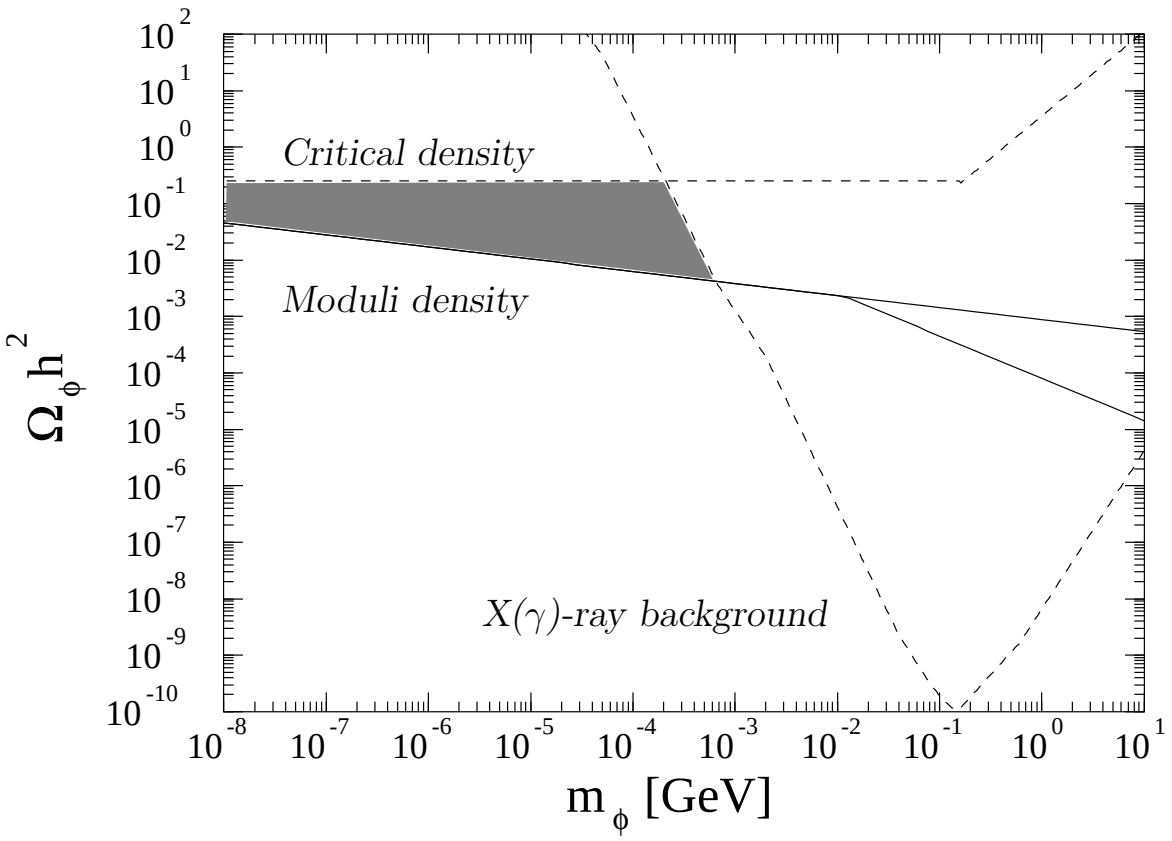


図 18: modified thermal inflation (n=1) モデルにおける moduli の質量の制限。斜線が許される領域である。

7.6 新しい安定粒子は存在するか?

超対称性を自発的に破るために DSB セクターと messenger セクターを導入したが、これらのセクターに global 対称性があるならば、その量子数を持つ最も軽い粒子は安定になる。よって、そのような粒子が一旦生成されると、崩壊はせず、対消滅によってのみその数が減少する。このような安定粒子が存在しうるかどうか、また dark matter となり得るかどうかを検討する [32]。

1. DSB セクターの安定粒子
   安定粒子の質量を m_B、密度パラメータを Ω_B とする。安定粒子が対消滅して global 対称性の量子数を持たない粒子になる反応の断面積を求めて現在の Ω_B を見積もると [66]

$$\Omega_B h^2 \gtrsim \left(\frac{m_B}{300\mathrm{TeV}}\right)^2 \tag{7.82}$$

   である。よって、$m_B \sim 100$ TeV ならばこの粒子は cold dark matter の候補である。

2. messenger セクターの安定粒子
   messenger セクターの場のうち、SM ゲージ 1 重項 (spurion) S だけが DSB セクターとカップルしていて、かつ messenger-MSSM mixing がない場合、messenger quark/lepton がもつ global 対称性の量子数が保存することがわかる。このときも global 対称性の量子数を持つ最も軽い粒子は安定になる。最も軽い messenger 粒子で $U(1)_{em}$ 量子数を持っているもの (いないもの) を q_+ (q_0) 、その質量を m_+ (m_0) と書く。

   (a) $m_+ < m_0$ の場合
   荷電粒子が最も軽い場合、宇宙線のスペクトルが観測と合わないことが知られている [67]。

   (b) $m_+ > m_0$ の場合
   MSSM の SU(2) D-term からの tree level の寄与は

$$\begin{aligned}(m_+^2 - m_0^2)_{tree} &= \sqrt{(\lambda \langle F_S \rangle)^2 + \frac{1}{4} m_Z^4 \cos^2 2\beta} \\ &\quad - \sqrt{(\lambda \langle F_S \rangle)^2 + \left(\sin^2\theta_W - \frac{1}{2}\right)^2 m_Z^4 \cos^2 2\beta}\end{aligned} \tag{7.83}$$

   である。messenger 粒子が $SU(2)$ ゲージボソンより重い、つまり $\frac{\Lambda^2}{x^2} \gtrsim 1$ TeV^2 ($\Lambda \equiv F_S/M$, $x \equiv F_S/M^2$) とすると、1 ループの寄与は

$$(m_+^2 - m_0^2)_{1loop} = \frac{\alpha}{4\pi} m_Z^2 \left(4 \ln \frac{x}{1-x} - \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{2x}{1-x} \ln \frac{2x}{1+x} - 4\right) \tag{7.84}$$

   である。これらを加えて、$m_+ > m_0$ となるように x に条件をつける。
   さらに、元素合成とエネルギー密度から条件がつく。

- 元素合成
  q_+ の崩壊率は
  $$\Gamma(q_+ \to q_0 e\nu) = \frac{G_F^2}{15\pi^3}(m_+ - m_0)^5 \tag{7.85}$$
  である。$m_+ - m_0$ が小さ過ぎると q_+ の寿命が長くなる。q_+ は荷電粒子だから BBN の後に崩壊すると軽元素の量を変えてしまう。それを避けるには $\tau_{q_+} \lesssim 1$ sec なら良い。これは $m_+ - m_0 \gtrsim 5$ MeV に相当する。
- エネルギー密度
  $\Omega h^2 < 1$ より $m_0^2 < 25\,\mathrm{TeV}^2$ である。

これら三つの条件から $(\Lambda\ ,\ x)$ の allowed region を求めると、$(1 >)\ x \gtrsim 0.95$ となり、とても狭いことがわかる。複数の世代をいれて allowed region を広げることもできるが、 m_0 = 5 TeV としても dark matter の質量密度よりずっと小さいので dark matter の候補にはなり得ない。この問題は インフレーションの時期を遅くするか、$T_R \sim m_Z$ とすることで解決される可能性もある。しかし、以上を総合すると、messenger の global 対称性は mixing などにより全て破れていて、messenger セクターには新たな安定粒子はないとする方が自然である。

8 GMSB model と宇宙論

8.1 Motivation

この修士論文では GMSB モデルの動機、長所、短所などについて調べてきた。最後に、現在進行中の研究の成果を載せる。

初期宇宙に熱平衡にあった gravitino [67] はインフレーションにより薄められて現在の宇宙のエネルギー密度に寄与しないと考えられているが reheating 後に作られる gravitino は寄与し得る。この gravitino の質量が 1 keV より小さいならば gravitino が熱平衡にあったとしても (このとき yield は $Y_{3/2} \sim 10^{-3}$) gravitino のエネルギー密度 $\rho_{3/2}$ は現在の宇宙の臨界密度 ρ_{crit} よりも小さくなり問題はなくなる。

gravitino の質量が 1 keV よりも大きいならば gravitino の数密度に上限がつく。数密度 $n_{3/2} \propto T_R$ なのでこの制限 (gravitino overclosure からの制限) は T_R の上限になる。

また、gravitino は NLSP の崩壊によっても作られる。R-パリティが保存するモデルでは NLSP の寿命が BBN の終了後になるため、NLSP の崩壊で生じるフォトン ($\tilde{B}$ の場合) やハドロン ($\tilde{l}^{\pm}$ の場合) が熱浴にあるフォトンと散乱してカスケードを起こし、BBN で作られた軽元素を壊す (

[67] gravitino の相互作用は $1/M_{Pl}$ で suppress されているが、その goldstino 成分には $1/F$ カップリングもあるので熱平衡になり得る。

photo-dissociation) のに充分なエネルギーのフォトンを大量に作ってしまう。このプロセスを禁止するためには NLSP が崩壊するよりも以前に対消滅をしてその数密度が小さくなっていればよい。

第 5 章で GMSB モデルでの MSSM 粒子の質量スペクトルを求めたが、それによると NLSP は $\tilde{B}$ (N が小さいとき) あるいは 最も軽い charged slepton $\tilde{\tau}_1$ (N が大きく $\tan\beta$ も大きいとき) であった。$\tilde{B}$ NLSP の場合は s-channel の対消滅モードがないので $\tilde{B}$ はあまり減らない。一方、$\tilde{\tau}_1$ が NLSP の場合は、 s-channel の対消滅モードがあるので $Y_{\tilde{\tau}_1}$ が小さくなり、$\tilde{B}$ NLSP の場合よりも高い T_R が許される可能性がある。そこで $\tilde{\tau}$ NLSP の場合に宇宙論からの制限がどうなるか調べてみようというのがこの研究の動機である。

8.2 $\tilde{\tau}_1$ NLSP シナリオでの $m_{3/2}$ への制限

$\tilde{\tau}_1$ の寿命が BBN の時期よりも充分短いならば 崩壊

$$\tilde{\tau}_1 \to \tau\psi_{3/2} \tag{8.1}$$

による軽元素の photo-dissociation からの制限はつかない。(8.1) の崩壊率は (5.84) から

$$\Gamma(\tilde{\tau}_1 \to \psi_{3/2} + \tau) = \frac{1}{48\pi}\frac{m_{\tilde{\tau}_1}^5}{m_{3/2}^2 M_{Pl}^{*\,2}}\left\{1 - \left(\frac{m_{3/2}}{m_{\tilde{\tau}_1}}\right)^2\right\}^2 \tag{8.2}$$

で与えられる。これから、$m_{3/2}$, $m_{\tilde{\tau}_1}$, $\tilde{\tau}_1$ の寿命 $\tau_{\tilde{\tau}_1}$ の間に関係がつく。典型的な値、例えば $m_{3/2} \sim 1$ GeV 、$m_{\tilde{\tau}_1} \sim 100$ GeV では $\tau_{\tilde{\tau}_1} \sim 10^4$ sec となる。これは BBN の時期より後である。よって、photo-dissociation からの制限を考える必要がある。

宇宙膨張率が粒子の反応率よりも大きくなり、粒子と熱浴との反応が起こらなくなると粒子は熱浴から切り離される。質量 m の粒子が熱浴から切り離される (decouple する) 温度は典型的には $T_f \sim m/20$ である[68] 。$m_{\tilde{\tau}_1} \sim 100$ GeV とすると $T_f \sim 5$ GeV である。BBN は 10^2 MeV - 10^{-2} MeV の間に起こるので、$\tilde{\tau}_1$ が decouple するのは BBN よりも前である。よって、$\tilde{\tau}_1$ が decouple した後の $\tilde{\tau}_1$ の量 $Y_{\tilde{\tau}_1}$ (yield) を知る必要がある。

粒子の decoupling という現象は熱平衡過程からの離脱である。これは次の Boltzmann 方程式で記述される。

$$\frac{dn}{dt} = -3Hn - \langle\sigma v_{rel}\rangle\,(n^2 - n_{eq}^2) + \sum_i n_i\frac{m_i}{E_i}\Gamma_i - n\frac{m}{E}\Gamma \tag{8.3}$$

この式で、n,n_0,m,σ,Γ,E は順に注目している粒子 (以下 X と呼ぶ) の数密度、(熱平衡にあるときの) 数密度、質量、全散乱断面積、崩壊率、エネルギーで、v_{rel} は X と散乱する相手の粒子との相対速度、また添字 i がついている量は X に崩壊する粒子に対するものである。また $H \equiv \dot{R}/R$ はハッブルパラメータで、宇宙膨張の効果は $-3Hn$ に含まれている。

[68] 後で挙げる解析結果もそうなっている。

$\tilde{\tau}_1$ にこの式を適用する。$\tilde{\tau}_1$ が崩壊する前の量を知りたいので $-n(m/E)\Gamma$ の項は落す。$\tilde{\tau}_1$ に崩壊する粒子の寄与は $\tilde{\tau}_1$ とほぼ同じ質量を持つ $\tilde{e}_1$, $\tilde{\mu}_1$ だけを考えればよい[69] 。ここではとりあえずこの項を無視して次の式を考える。

$$\frac{dn}{dt} = -3Hn - \langle \sigma v_{rel} \rangle \left(n^2 - n_{eq}^2 \right) \tag{8.4}$$

これは $\tilde{\tau}_1$ の実際の数密度の時間発展方程式である。宇宙膨張の効果を吸収して yield variable Y の方程式に書き直したい。宇宙の全エントロピーは $g_{*\,s} T^3 R^3$ に比例するので、エントロピーの保存より

$$\frac{\dot{R}}{R} = -\frac{\dot{T}}{T} - \frac{1}{3} \frac{g'_{*\,s}}{g_{*\,s}} \dot{T} \tag{8.5}$$

である。ここで $g'_{*\,s} \equiv dg_{*\,s}/dT$ である。また、Robertson-Walker 宇宙では

$$\frac{\dot{R}}{R} = \left(\frac{8}{3} \pi G \rho \right)^{1/2} \tag{8.6}$$

である。ここで ρ は $\tilde{\tau}_1$ のエネルギー密度、G は Newton 定数 $1/M_{Pl}^2$ である。(8.5),(8.6) により (8.4) を書き直すと

$$\begin{aligned} \frac{dq(T)}{dT} &= \left[\frac{4}{45} \pi^3 G g_*(T) \right]^{-1/2} \left(g_{*\,s}(T) + \frac{1}{3} T g'_{*\,s}(T) \right) \\ &\quad \times \langle \sigma v_{rel} \rangle \left(q^2(T) - q_{eq}^2(T) \right) \end{aligned} \tag{8.7}$$

となる。ここで $q \equiv \frac{2\pi^2}{45} Y$ である。

(8.4) の定性的な振舞を見てみよう。q_{eq} が小さくない間は q は q_{eq} に引っ張られて変化する。しかし、表 7.12 からわかるように、$T \lesssim m$ になると粒子の数密度 n は指数関数的に減少する。すると $dq/dT \propto q^2$ となり、q が小さくなると右辺は無視できる程小さくなり $dq/dT \simeq 0$ となる。つまり、q は一定となる。これが decoupling の過程である。

(8.4) を解くためには g_* , $g_{*\,s}$, $\langle \sigma v_{rel} \rangle$ が必要である。g_* , $g_{*\,s}$ は図 15 に挙げたものを用いる。$\langle \sigma v_{rel} \rangle$ を得るには、$\tilde{\tau}_1$ の対消滅の amplitude を求め、その熱平均を取らなければならない。

$\tilde{\tau}_1$ が対消滅する amplitude の絶対値 2 乗を $|\mathcal{T}|$ とかく。始状態のスピンについては平均を取り、終状態のスピンについては和を取るものとする。入射する $\tilde{\tau}_1$ の 4-momentum を p_1,p_2 とすると

$$\sigma v_{rel} = \frac{1}{4 E_1 E_2} \int d\Pi |\mathcal{T}|^2 \tag{8.8}$$

である。ここで Π はローレンツ不変な phase space factor で

$$d\Pi = (2\pi)^4 \delta^4 \left(p_1 + p_2 - \sum_f p_f \right) \prod_f \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3 2 p_f^0} \tag{8.9}$$

[69] R-パリティが保存するモデルでは全ての超対称粒子は崩壊を重ねて NLSP(あるいは co-NLSP) になる。$\tilde{\tau}_1$ が NLSP となる GMSB モデルでは一般に $\tilde{e}_1$,$\tilde{\mu}_1$ 以外は $\tilde{\tau}_1$ よりも充分重くて $\tilde{\tau}_1$ が decouple する前に崩壊して $\tilde{\tau}_1$ になるので、その直後は $\tilde{\tau}_1$ の量が増えてもすぐに熱平衡値に戻る。

である。ここで和と積は終状態粒子についてのものである。典型的には粒子の decoupling 温度は $T_f \sim m/20$ なので今興味のある温度領域では粒子の分布は Boltzmann 分布としてよい。よって、終状態の粒子の統計性に応じてかかる $(1 \pm f)$ (f は分布関数) の因子は無視できる。$\int \Pi |\mathcal{T}|^2$ はローレンツ不変なので $s = -(p_1 + p_2)^2$ のみに依存する。そこで

$$w(s) \equiv \frac{1}{4} \int d\Pi \, |\mathcal{T}|^2 = E_1 E_2 \sigma v_{rel} \tag{8.10}$$

を定義するのが便利である。これを用いて σv_{rel} の熱平均を定義する。$\tilde{\tau}_1$ の分布関数を $f(E)$ ($E = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_{\tilde{\tau}_1}}$) として σv_{rel} の熱平均 $\langle \sigma v_{rel} \rangle$ を

$$\langle \sigma v_{rel} \rangle \equiv \frac{1}{n_{eq}^2} \int d^3p_1 \, d^3p_2 \, f(E_1) f(E_2) \, \frac{1}{E_1 E_2} \, w(s) \tag{8.11}$$

とする。ここで $n_{eq} = \int d^3p \, f(E)$ である。

一般的に (8.11) を解析的に求めるのは難しい。そこで $x \equiv T/m$ が小さいときに有効な近似式として、(8.11) を x でベキ展開した式を求める。積分変数をうまく変換して計算すると

$$\begin{aligned} \langle \sigma v_{rel} \rangle \;\; = \;\; & \frac{1}{m_{\tilde{\tau}_1}} [w - \frac{3}{2}(2w - w')x + \frac{3}{8}(16w - 8w' + 5w'')x^2 \\ & - \frac{5}{16}(30w - 15w' + 3w'' - 7w''')x^3 + \mathcal{O}(x^4)]_{s/4m_{\tilde{\tau}_1}=1} \end{aligned} \tag{8.12}$$

となる [68]。ここで w' は $s/4m_{\tilde{\tau}_1}$ による微分である。これから、$\langle \sigma v_{rel} \rangle$ を求めるには $w(s)$ を求めればよいことになる。

$\tilde{\tau}_1$ の崩壊モードには

$$\tilde{\tau}_1 \;\; \rightarrow \;\; \gamma\gamma \tag{8.13}$$

$$\tilde{\tau}_1 \;\; \rightarrow \;\; ZZ, Z\gamma, W^+W^- \tag{8.14}$$

$$\tilde{\tau}_1 \;\; \rightarrow \;\; f\overline{f} \tag{8.15}$$

$$\tilde{\tau}_1 \;\; \rightarrow \;\; h^0 h^{0\,*} \tag{8.16}$$

がある。このうち、終状態の粒子の質量とカップリングの強さから (8.13) が主要モードであると考えられる。そこで最も強い制限としてまず (8.13) のみを考える。(8.13) には s,t,u channel が存在する。これらを計算して $|\mathcal{T}|^2$ を求め、(8.11) に代入して計算すると $\langle \sigma v_{rel} \rangle$ は

$$\langle \sigma v_{rel} \rangle = \frac{1}{m_{\tilde{\tau}_1}} \, \frac{e^4}{8\pi} (1 - 5x + \mathcal{O}(x^2)) \tag{8.17}$$

となる。

(8.17) と g_*,$g_{*\,s}$ を (8.7) に代入して数値的に解くと図 19 のようなグラフになった。

$Y_{\tilde{\tau}_1}$ は $m_{\tilde{\tau}_1}$ に依存している。$m_{\tilde{\tau}_1}$ の関数として $Y_{\tilde{\tau}_1}$ を求める図 20 のようになった。

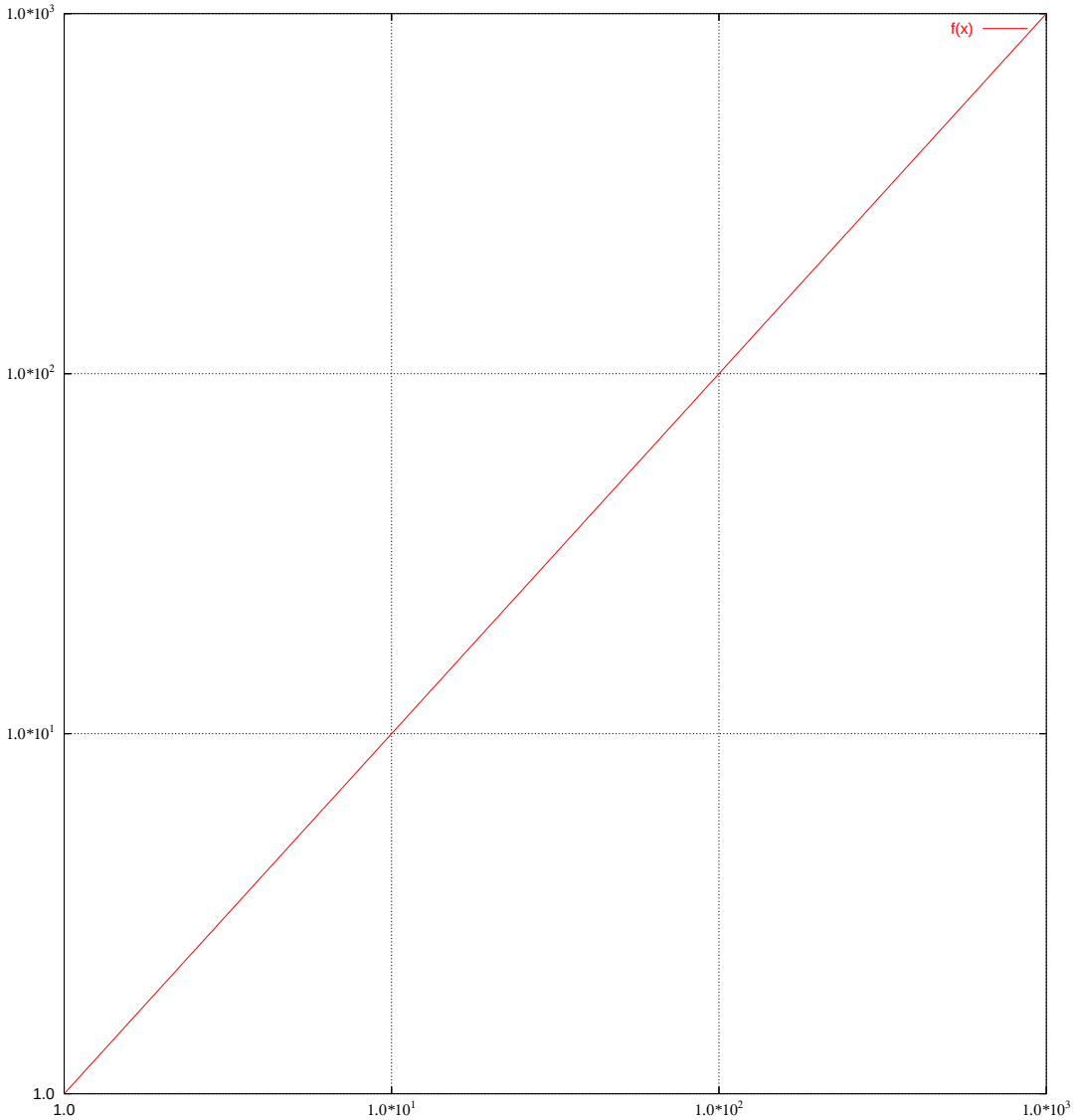
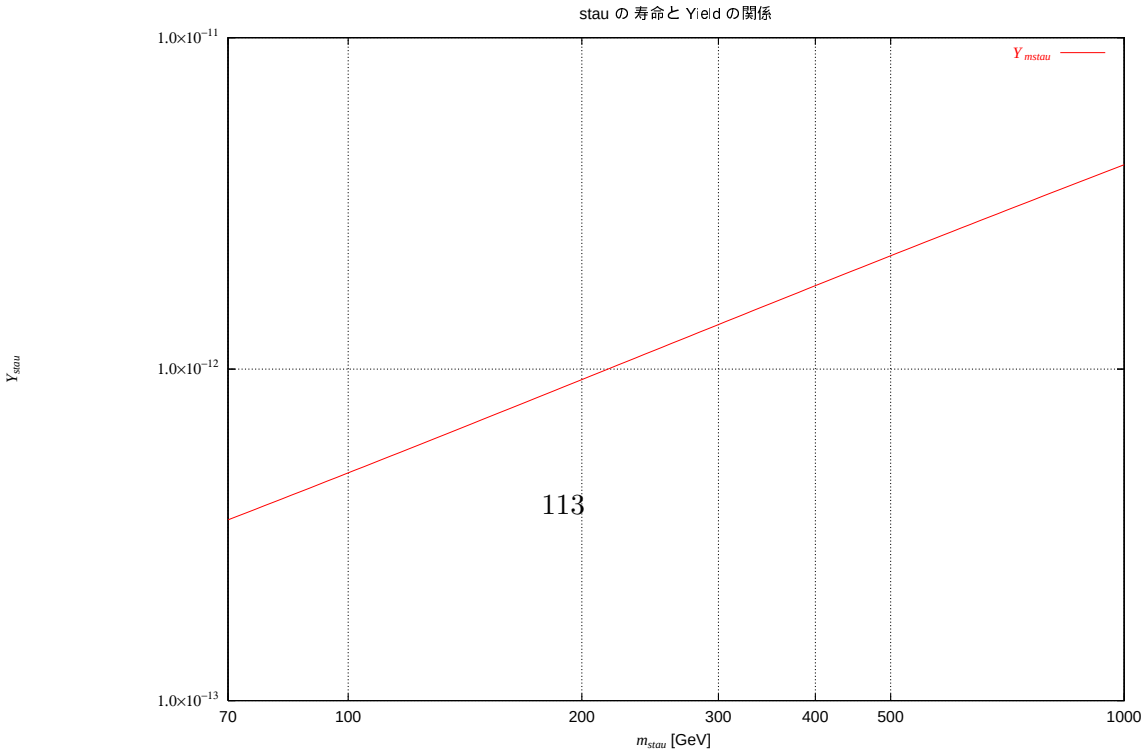


図 19: $m_{\tilde{\tau}_1} = 100$ GeV のときの $\tilde{\tau}_1$ の yield、Y と Y_{eq}



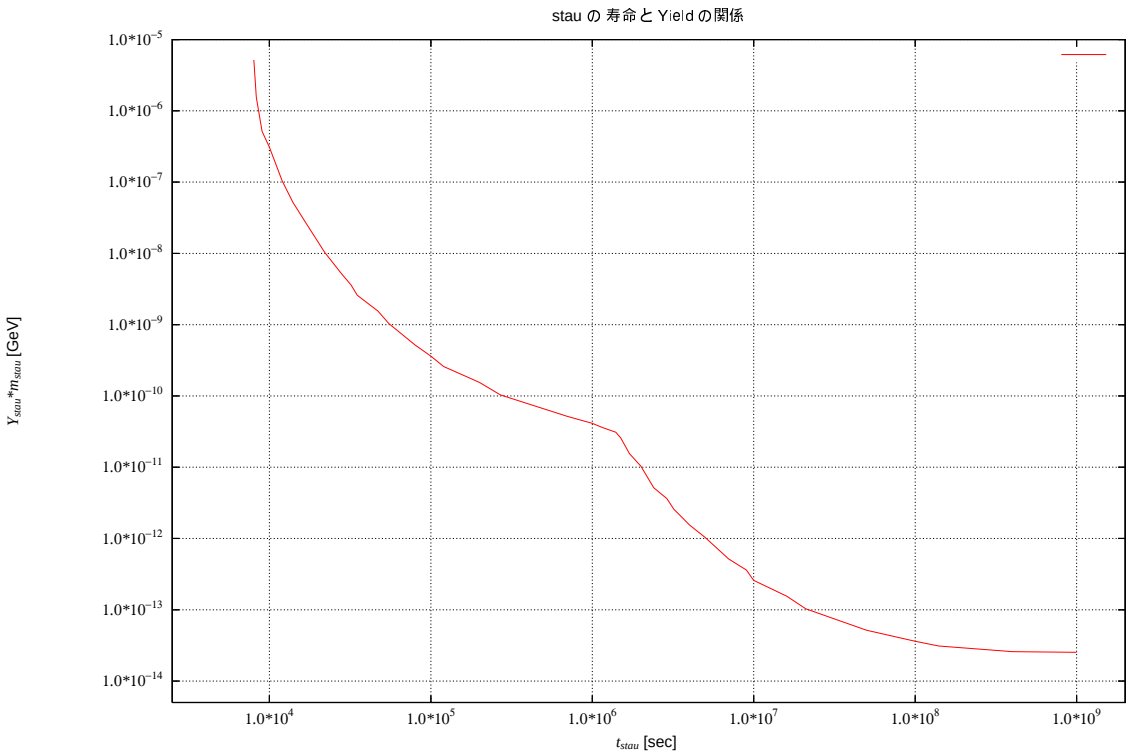


図 21: $\tilde{\tau}_1$ の 寿命 $\tau_{\tilde{\tau}_1}$ と $Y_{\tilde{\tau}_1} \dot{m}_{\tilde{\tau}_1}$ の関係。[69] より引用。

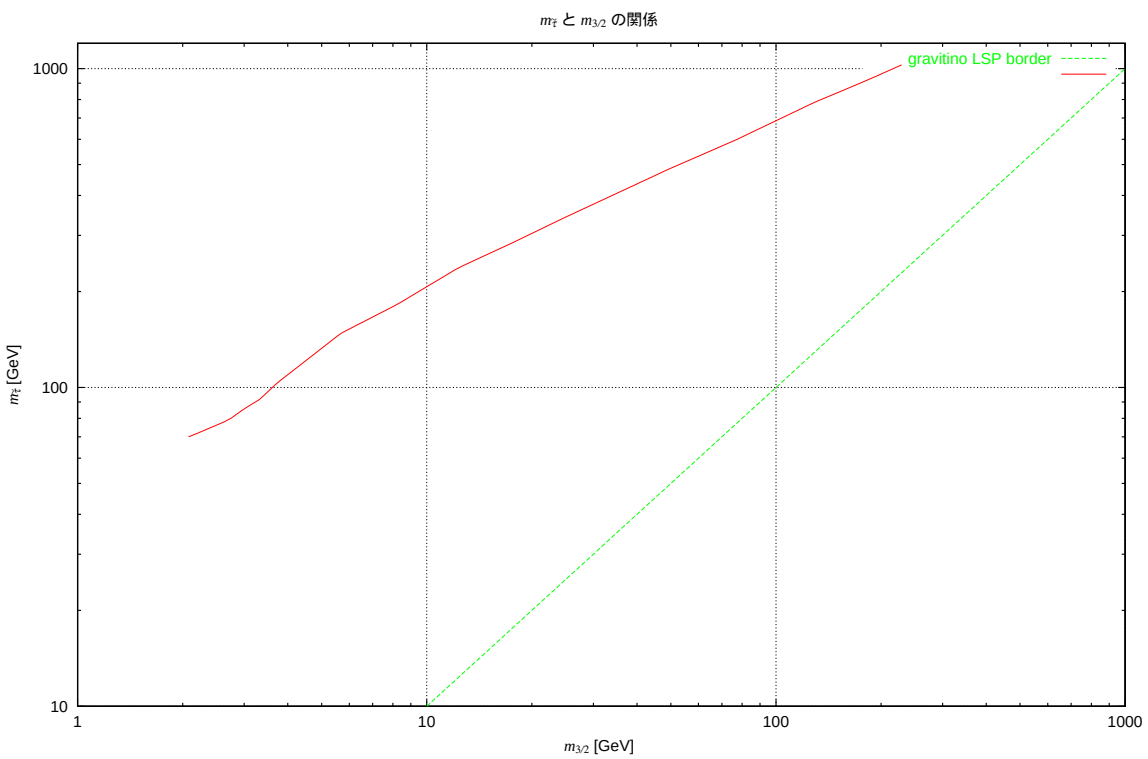


図 22: $m_{\tilde{\tau}_1}$ と $m_{3/2}$ の関係

BBN の終了後に崩壊する粒子 (X とする) のエネルギー密度 $Y_X m_X$ とその寿命 τ_X の間には軽元素の photo-dissociation を避けるための条件から制限がついている [69]。これを図 21 に引用する。図 20 と 図 21 を併せると ($m_{3/2}$ を固定したとき) $m_{\tilde{\tau}_1}$ に対して $\tau_{\tilde{\tau}_1}$ の上限が決まることがわかる。すると (8.2) から $m_{\tilde{\tau}}$ の上限が決まる。これが図 22 である。

$m_{\tilde{\tau}_1}$ は $\Lambda = F_S/M$, M , $\tan\beta$, $\arg\mu$, N で決まるが、$\tan\beta$ と $\arg\mu$ を固定すると (5.12),(5.13) から gaugino の質量の下限がつく。宇宙の reheating 後に作られる二次的 gravitino を作る反応の断面積は (7.28) から

$$\begin{aligned} \Sigma_{tot} &= \frac{1}{2}\sum_{x,y,z} \eta_x \eta_y \, \sigma(x+y \to \psi + z) \\ &\sim 5.9 \cdot \frac{g_3^2 M_3^2}{m_{3/2}^2 M_{Pl}^{*\,2}} \end{aligned} \tag{8.18}$$

で与えられる [58]。これと (7.36) から

$$Y_{3/2} \propto \frac{M_3^2 T_R}{M_{Pl}^* m_{3/2}^2} \tag{8.19}$$

である。ここで M_3 は $\tilde{g}$ の質量である。gravitino による 宇宙の overclosure を避ける制限 $\rho_{3/2} \leq \rho_{crit}$ と (8.19) を併せると

$$T_R \lesssim \frac{M_{Pl}^* m_{3/2} (\rho_{crit}/s_0)}{M_3^2} \tag{8.20}$$

となる。ここで s_0 は現在の宇宙のエントロピー密度である。これから、M_3 の下限がつくと T_R の最もゆるい制限がつくことがわかる。GMSB モデルでは gaugino mass relation

$$\frac{M_3}{\alpha_3} = \frac{M_2}{\alpha_2} = \frac{M_1}{\alpha_1}$$

が成立するので、M_3 を M_1 で置き換えることができる。よって、$\tilde{B}$ の質量の下限を求めれば良い。この解析は現在進行中である。

9 Conclusions

素粒子の標準理論は今のところ全ての実験結果を説明できているので少なくとも近似的に正しいことは疑いないが、いくつか不満足な点があった。標準理論には重力が含まれていないが、重力をも含めた統一理論が存在すると仮定するならばその理論のスケールは Planck スケールであると考えられる。しかし、Planck スケールは $\sim 10^{19}$ GeV であり、electro-weak スケール $\sim 10^2$ GeV がなぜ Planck スケールよりこんなに小さいのかは標準理論の枠内では説明できない。また、tree level で weak スケールが 10^2 GeV だったとしても、標準理論の cut off スケールが Planck スケールだとするならば大きな量子補正を受けてしまう。つまり摂動に対して安定でなくなって

しまう。この問題を解決するのに有力なのが超対称性であった。超対称性はこのような現象論的問題を解決するのみならず、重力の統一理論の有力候補である超弦理論では必須の柱となっているし、それ自体審美的にも好ましいものである。

超対称性はフェルミオンと同じ質量を持つボソンの存在を予言するが、そのような粒子は実験で見付かっていないので超対称性は破れていなくてはならない。スカラー場の質量の 2 次発散の相殺、weak スケールの安定性という超対称性の利点が残るためには、超対称性の破れは自発的でなくてはいけない。自発的破れには tree level での破れと 量子補正よる力学的破れがあるが、超対称性の破れのスケール、ひいては weak スケールが Planck スケールに比べて非常に小さいことを説明できる可能性がある点で 力学的破れがより望ましいと考えられてきた。一方、摂動論の範囲では超対称性のある理論では superpotential がくりこみを受けないという性質があるので、tree level で破れないならば摂動の全ての次数で破れない。よって、超対称性の力学的破れは非摂動効果によって起こる。

この事情から超対称理論の非摂動効果の研究と、超対称性が力学的に破れるモデルの研究が精力的に行われてきた。しかし、我々のセクター (MSSM セクター) の中で超対称性を破るのは難しいことが判明し、weak スケールでは我々のセクターとほとんどカップルしていない超対称性を力学的に破るセクター (DSB セクター) を考え、そこから破れの効果が伝わってくるものと考えられた。中でも標準理論のゲージ相互作用で超対称性の破れが我々のセクターに伝わると考える gauge mediated susy breaking (GMSB) モデルは、標準理論を超対称化したときに生じるさまざまな現象論的問題を解決できる有力なものであった。超対称性の破れを effective に取り入れたモデル (supersymmetric standard model , SSM)、その中でも最小のモデル (minimal SSM , MSSM) では破れの効果は $\mathcal{L}$ の中に次元を持つパラメータ (soft parameters) として含まれているが、上述の「現象論的問題」はこれらのパラメータが一般的だと生じるものであった。それらは、例えば加速器実験から制限がついている FCNC、LFV、CP の破れ や宇宙論から制限がついてる gravitino , moduli の影響などである。GMSB モデルでは 100 個以上あった soft parameters がわずか数個のパラメータで表現できて、しかもその結果これらの問題が自然に解決できることがわかった。

GMSB の初期のモデルは GMSB セクターと MSSM セクターを直接結ぶもので、ゲージカップリングが摂動論的に統一しない等の問題があったが、その後これらの問題を解決したモデルがいくつも考案された。はじめに成功を納めたのは GMSB セクターと MSSM セクターの間に もう一つ別の messenger セクターを導入するモデルであった。このモデルは、GMSB セクターと messenger セクターのつなぎ方によりいくつかのタイプに分類できる。GMSB セクターと MSSM セクターを直接結ぶモデルも今では改良が加えられて現象論的に問題ないモデルがいくつか提案されている。

しかし、GMSB モデルにも問題がまだ残されていた。例えば Higgs superfield の superpotential に含まれる μ パラメータと ポテンシャルに含まれる B_μ パラメータの起源とその大きさを説明

できないことである。この問題に対しても非くりこみ可能なカップリングを考えた解決策などが提案されている。また、最近では GMSB の minimal model では ゲージカップリングの統一が 2-loop では成り立っていないという研究成果も報告されている。

また、GMSB モデルでは gravitino が LSP になるが、それから宇宙論的な問題が生じる。軽い安定な gravitino に伴う宇宙論的問題は既に調べられていたが、我々のグループはこの問題を GMSB モデルの枠内で研究した。(第 8 章の内容。) その結果、gravitino が 1 GeV 程度以上の領域で今まで知られていたよりも厳しい制限がつくことがわかった。

とはいっても、以上からわかる通り、GMSB モデルは標準理論を超えた理論の有力候補であり、今後も新たな実験結果や観測結果との照合を続けてその妥当性を確かめるに値する理論であるといえる。

謝辞

修士課程での勉学と研究を指導してくださった柳田勉先生に心から感謝致します。助手の井沢健一さん、川野輝彦さんには特にセミナーでお世話になりました。浅賀岳彦さん、野村泰紀さん、黒澤毅一さん、濱口幸一さんには物理のみならずあらゆることを教えていただきました。深く感謝致します。

研究室の他の皆様にも大変お世話になりました。ありがとうございました。

A Appendix

A.1 SQCD の non-anomalous グローバル対称性

SQCD で非摂動効果を考えるとき、正確にはインスタントン計算をしなければならないが、superpotential の holomorphy と non-anomalous グローバル対称性から、非摂動的に生成される superpotential の形や場の真空期待値の形が決まってしまうことがある。ここでは non-anomalous グローバル対称性とその量子数を求める。$SU(N_C)$ ゲージ multiplet W と matter superfield Q_i^α , $\overline{Q}_{\alpha i}$ の $\mathcal{L}$ は

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{g^2}\int d^4\theta \left[Q^\dagger_{i\,\alpha}(e^V)^\alpha_\beta Q_i^\beta + \overline{Q}_{j\,\alpha}(e^{-V})^\alpha_\beta \overline{Q}_j^{\beta\,\dagger}\right] \\ &\quad + \frac{1}{4g^2}\left(\int d^2\theta\, W^{a\,\alpha}W^a_\alpha + h.c.\right) \end{aligned} \tag{A.21}$$

である。この $\mathcal{L}$ の classical な対称性は

- Q をまわす $U(N_F)_L$
- $\overline{Q}$ をまわす $U(N_F)_R$
- $Q, \overline{Q}, W$ を次のように回す R 対称性 $U(1)_X$ [70]

$$\begin{aligned} Q_i^\alpha(x_L,\theta) &\to Q_i^\alpha(x_L, e^{i\alpha}\theta) \\ \overline{Q}_i^\alpha(x_R,\overline{\theta}) &\to \overline{Q}_i^\alpha(x_R, e^{-i\alpha}\overline{\theta}) \\ W(x_L,\theta) &\to e^{-i\alpha}W(x_L, e^{i\alpha}\theta) \end{aligned}$$

である。つまり、$\mathcal{L}$ の classical なグローバル対称性は $U(N_F)_L \times U(N_F)_R \times U(1)_X \simeq SU(N_F)_L \times SU(N_F)_R \times U(1)_B \times U(1)_A \times U(1)_X$ である。これらのうち、$U(1)_A, U(1)_X$ は anomalous である。しかし、それらの線形結合が一つ non-anomalous になる。

まず、フェルミオンの量子数を次の表に挙げる：

	$U(1)_A$	$U(1)_X$	$SU(N_C)$
$\psi(Q)$	1	-1	$\mathbf{N_C}$
$\psi(\overline{Q})$	1	-1	$\overline{\mathbf{N}}_\mathbf{C}$
λ^a	0	1	$\mathbf{N_C^2 - 1}$

アノマリーは

[70] 実は、$Q, \overline{Q}$ の R-charge はこの時点では任意である。

1. $U(1)_A - SU(N_C)^2$

$$\sum \mathrm{Tr}(T_\alpha T_\beta)\cdot Y_A = \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}\cdot 1\cdot N_F + \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}\cdot 1\cdot N_F = N_F\delta_{\alpha\beta} \tag{A.22}$$

2. $U(1)_X - SU(N_C)^2$

$$\begin{aligned}\sum \mathrm{Tr}(T_\alpha T_\beta)\cdot Y_X &= \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}\cdot(-1)\cdot N_F + \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}\cdot(-1)\cdot N_F + \delta_{\alpha\beta}N_C \\ &= (N_C - N_F)\delta_{\alpha\beta}\end{aligned} \tag{A.23}$$

である。これより $Y \equiv \frac{Y_A}{N_F} - \frac{Y_X}{N_C - N_F}$ を量子数とするような $U(1)$ は anomaly-free である。これを $U(1)_R$ と呼ぶ。さらに、Y は W の R charge が 1 になるように normalize する。

$$Y = \frac{N_C - N_F}{N_F}Y_A - Y_X \tag{A.24}$$

すると、この $U(1)_R$ のもとで

$$\begin{aligned} Q_i^\alpha(x_L,\theta) &\to e^{-i\alpha(\frac{N_F-N_C}{N_F})}Q_i^\alpha(x_L,e^{i\alpha}\theta) \\ \overline{Q}_{i\,\alpha}(x_R,\overline{\theta}) &\to e^{-i\alpha(\frac{N_C-N_F}{N_F})}\overline{Q}_{i\,\alpha}(x_R,e^{-i\alpha}\overline{\theta}) \\ W(x_L,\theta) &\to e^{-i\alpha}W(x_L,e^{i\alpha}\theta)\end{aligned}$$

と変換する。つまり、Q の R charge は $\frac{N_F-N_C}{N_F}$、W の R charge は 1 である。

A.2 't Hooft anomaly matching 条件

ゲージ群 G_C のゲージ理論に non-anomalous で自発的に破れていないグローバル対称性 G_F があるとき、G_F を「弱く」(つまり G_C 理論の dynamics を変えないように) ゲージ化して $G_C\times G_F$ のゲージ理論を考える。このとき、高いスケールでの理論を記述する元々の場 (elementary field と呼ぶ) が新たに理論に加わった G_F のゲージ場とカップルして生じるアノマリーと、低いスケールの理論を記述すると考えられる場 (composite field と呼ぶ。G_C の一重項である。) が G_F のゲージ場とカップルして生じるアノマリーは一致していなければならない。これを 't Hooft anomaly matching 条件という。この条件は、低いスケールの effective 理論がどのような自由度で記述されるかに制限を与える。ただ、注意すべきはこれは必要条件であって、十分ではないことである。実際、この条件を充たしていながら正しくない effective 理論の例が知られている [42]。

例として、3.7 節 の $(N_F = N_C + 1)$ SQCD をみる。elementary field は massless (反) クォーク $Q_i^\alpha, \overline{Q}_{\alpha\,i}$ のフェルミオン成分と gaugino λ^a である。composite field は メソン M_{ij} と (反) バリオン $B_i, \overline{B}_i$ である。$M, B, \overline{B}$ がすべて massless でグローバル対称性 $G_F = SU(N_F)_L \times$

$SU(N_F)_R \times U(1)_B \times U(1)_R$ が exact のとき、anomaly matching が成立していることを以下で確かめる。

以下では chiral superfield X のフェルミオン成分を $\psi(X)$ と書く。elementary,composite fermionic field の各量子数は次の表の通りである。

	$SU(N_F)_L$	$SU(N_F)_R$	$U(1)_B$	$U(1)_R$	自由度の数
$\psi(Q_i^\alpha)$	N_F	1	1	$-\frac{N_C}{N_F}$	$N_C N_F$
$\psi(\overline{Q}_{\alpha\, i})$	1	$\overline{N}_F$	-1	$-\frac{N_C}{N_F}$	$N_C N_F$
λ^a	1	1	0	1	$N_C^2 - 1$
$\psi(B_i)$	$\overline{N}_F$	1	N_C	$N_C - 1 - \frac{N_C^2}{N_F}$	N_F
$\psi(\overline{B}_i)$	1	N_F	$-N_C$	$N_C - 1 - \frac{N_C^2}{N_F}$	N_F
$\psi(M_{ij})$	N_F	$\overline{N}_F$	0	$1 - \frac{2N_C}{N_F}$	N_F^2

フェルミオンと G_F のゲージボソンがカップルする triangle アノマリー (の係数) は次の表の通りである：

	elementary	composite
$SU(N_F)_L^3$	$N_C d^{(3)}(N_F)$	$(N_F - 1) d^{(3)}(N_F)$
$SU(N_F)_L^2 - U(1)_R$	$-\frac{N_C^2}{N_F} d^{(2)}(N_F)$	$-\frac{(N_F-1)^2}{N_F} d^{(2)}(N_F)$
$SU(N_F)_L^2 - U(1)_B$	$N_C d^{(2)}(N_F)$	$N_C d^{(2)}(N_F)$
$U(1)_R^3$	$-\frac{2N_C^4}{N_F^2} + N_C^2 - 1$	$2N_F(-\frac{1}{N_F})^3 + (1 - \frac{2N_C}{N_F})^3 N_F^2$
$U(1)_B^2 - U(1)_R$	$2N_C N_F(-\frac{N_C}{N_F})$	$2N_C^2 N_F(-\frac{1}{N_F})$
$U(1)_R^2 - U(1)_B$	0	0

ここで $d^{(2)}(N)$, $d^{(3)}(N)$ は $SU(N)$ の fundamental 表現の生成子を T^a として、

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(T^a T^b) &= d^{(2)}(N)\, \delta^{ab} \\ \mathrm{Tr}[T^a \{T^b\, ,\, T^c\}] &= d^{(3)}(N) d^{abc} \end{aligned} \tag{A.25}$$

で定義される定数である。また、gravitational アノマリーは次の通りである：

	elementary	composite
$U(1)_R$	$2N_C N_F(-\frac{N_C}{N_F}) + (N_C^2 - 1)$	$2N_F(-\frac{1}{N_F}) + (1 - \frac{2N_C}{N_F}) N_F^2$

これらの elementary field と composite field のアノマリーが一致していることは $N_F = N_C + 1$ を使って簡単に確認できる。

A.3 spurion method による soft パラメータの計算

まず、扱う理論を整理する。DSB セクターはブラックボックスとし、messenger セクターの matter content と superpotential は 2 章で扱ったものとする。つまり、

$$W_{mess} = \int d^2\theta \; SX\overline{X} + h.c. \tag{A.26}$$

$$\langle S \rangle = M + \theta^2 F \qquad\qquad (M, F \neq 0) \tag{A.27}$$

superpotential はくりこみ可能で、摂動論が適用できるものである。S が (A.27) の期待値を持つと (A.26) から X のスカラー成分 X の質量の二乗は $m_X^2 = M^2 \pm F$、スピノル成分 ψ_X の質量は $m_{\psi_X} = M$ となって超対称性の破れが messenger セクターに伝わる。これが MSSM ゲージ相互作用でどのように MSSM セクターに伝わるのかが問題である。

以下では $F \ll M^2$ とする。このとき、超対称性の破れは小さいので、破れが MSSM セクターに伝わるスケール (messenger スケール) より下での $\mathcal{L}_{eff}$ が超対称性を持つとしてよい。この $\mathcal{L}_{eff}$ と (A.27) から soft パラメータを求める以下の方法を spurion method と呼ぶことにする。

まず、gaugino を考える。superpotential の非くりこみ定理から、messenger クォークを積分した効果はカップリングにのみ現れるはずである。よって、くりこみスケール μ ($\mu \ll M \ll \Lambda_{UV}$) での $\mathcal{L}_{eff}$ は

$$\mathcal{L}_{eff} = \int d^2\theta \; S(X, \mu) \, W^{a\,\alpha} W^a_\alpha + h.c. \tag{A.28}$$

の形になる。ここで、superpotential の holomorphy より S は X だけに依存し、$X^\dagger$ を含まない。この $\mathcal{L}_{eff}$ を (A.27) の真空のまわりで展開すると、

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{eff} &= S(M,\mu) \int d^2\theta \; W^{a\,\alpha} W^a_\alpha + (-\lambda^a \lambda^a) \int d^2\theta \; S(X,\mu) \\
&= S(M,\mu) \left[-\frac{1}{2} (F^{a\,\mu\nu} F^a_{\mu\nu} - i F^{a\,\mu\nu} \tilde{F}^a_{\mu\nu}) + 2i \lambda^{a\,\alpha} (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} D_\mu \overline{\lambda}^{a\,\dot{\alpha}} + D^a D^a \right] \\
&\quad + \left(\frac{\partial S(X)}{\partial \ln X} \right)_{X=M} \frac{F}{M} \, (-\lambda^a \lambda^a) \; + h.c.
\end{aligned} \tag{A.29}$$

となる。ゲージ場の kinetic term を canonical に規格化すると gaugino mass は

$$M_\lambda(\mu) = -\frac{1}{2\mathrm{Re}\; S(M,\mu)} \left(\frac{\partial S(X,\mu)}{\partial \ln X} \right)_{X=M} \frac{F}{M} \tag{A.30}$$

である。これから、$S(X,\mu)$ がわかれば gaugino mass が得られる。$S(X,\mu)$ を正確に知るのは難しいので、$S(X,\mu)$ が $S(M,\mu)$ を superfield に拡張したものであるという仮定をおくことにする。この妥当性は後程議論する。以下ではまず $S(M,\mu)$ をゲージカップリングの tree level matching から explicit に求める。そして M を X に置き換える。

(A.29) の $F^a_{\mu\nu}F^{a\,\mu\nu}$ term の係数 $-\mathrm{Re}\,S(M,\mu)$ がゲージ場の canonical kinetic term の係数 $-\frac{1}{16\pi\alpha(M,\mu)}$ に等しいことと、$F^a_{\mu\nu}\tilde{F}^{a\,\mu\nu}$ term の係数 $-\mathrm{Im}\,S(M,\mu)$ がカイラルアノマリーの係数 $\frac{\Theta}{32\pi^2}$ に等しいことから

$$S(M,\mu)=\frac{1}{16\pi^2\alpha(M,\mu)}-\frac{i\Theta}{32\pi^2} \tag{A.31}$$

となる。$\alpha(M,\mu)$ はくりこみ群方程式から決まる。ゲージカップリングのくりこみ群方程式は

$$\frac{d}{d\ln\mu}\alpha^{-1}(\mu)=\frac{b}{2\pi} \tag{A.32}$$

である。b は fundamental 表現が N_f フレーバーの $SU(N_c)$ SQCD では $b=3N_c-N_f$ である。messenger スケール $|M|$ より下での b を単に b と書くことにすると、$|M|$ より上では messenger quark の寄与 $(-\frac{1}{2}\times 2N=-N)$ がこれに加わるから、$b'\equiv b-N$ である。よって

$$\int_\mu^{\Lambda_{UV}} d(\alpha^{-1}(\mu))=\int_{|M|}^{\Lambda_{UV}} d(\ln\mu)\,\frac{b'}{2\pi}+\int_\mu^{|M|} d(\ln\mu)\,\frac{b}{2\pi} \tag{A.33}$$

これより

$$\mathrm{Re}\,S(M,\mu)=\frac{1}{16\pi\alpha(\Lambda_{UV})}+\frac{b'}{32\pi^2}\ln\frac{|M|}{\Lambda_{UV}}+\frac{b}{32\pi^2}\ln\frac{\mu}{|M|} \tag{A.34}$$

である。これを superfield に拡張して $|M|\to X$ とする。

$$S(X,\mu)=\frac{1}{16\pi\alpha(\Lambda_{UV})}-\frac{i\Theta}{32\pi^2}+\frac{b'}{32\pi^2}\ln\frac{X}{\Lambda_{UV}}+\frac{b}{32\pi^2}\ln\frac{\mu}{X} \tag{A.35}$$

次に、この置き換えの妥当性を確かめる。一般に、フェルミオンの mass term

$$-\frac{1}{2}m\psi^c\psi-\frac{1}{2}m^*\overline{\psi}^c\overline{\psi}$$

は 場を

$$\psi\to e^{-\frac{i}{2}\arg m}\psi\ ,\ \psi^c\to e^{-\frac{i}{2}\arg m}\psi^c$$

と再定義すると $m\in\mathbf{R}$ となるが、その代わりこのカイラル $U(1)$ 変換からアノマリー

$$\frac{i}{32\pi^2}(-\frac{1}{2}\arg m\times 2)=-\frac{i}{32\pi^2}\arg m$$

が生じる。つまり、 $\Theta\to\Theta+\arg m$ となる。今の場合、(A.35) で $X=|M|e^{i\arg X}$ とすると $\mathrm{Re}\,S(M,\mu)$ は (A.34) と一致し、

$$\mathrm{Im}\,S(M,\mu,)=-\frac{1}{32\pi^2}[\Theta+(b-b')\arg X]$$

となる。つまり、この置き換えをすると $\Theta\to\Theta+N\arg X$ となる。これは上のアノマリーの議論と一致している。よって、この拡張は妥当であると期待できる。

$S(X,\mu)$ が explicit に求まったので、gaugino mass が (A.30) と (A.35) から計算できる[71] 。その結果は

$$M_\lambda = \frac{\alpha(\mu)}{4\pi} N \frac{F}{M} \tag{A.36}$$

である。これは Feynman グラフを直接計算した結果と (F/M^2 の 1 次まで) 一致している。

次に scalar を考える。この場合も量子補正は Kähler ポテンシャルにのみつく。ただし、今度は kinetic term が chiral ではないので $X, X^\dagger$ に依存する。

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{eff} &= \int d^4\theta \; Z_Q(X, X^\dagger)\, Q^\dagger Q \\
&= \int d^4\theta \left[Z_Q + \frac{\partial Z_Q}{\partial \ln X} \frac{F}{M}\theta^2 + \frac{\partial Z_Q}{\partial \ln X^\dagger} \left(\frac{F}{M}\right)^* \overline{\theta}^2 + \frac{\partial^2 Z_Q}{\partial \ln X \, \partial \ln X^\dagger} \left|\frac{F}{M}\right|^2 \theta^2\overline{\theta}^2 \right]_{X=M} \\
&\quad \times Q^\dagger Q
\end{aligned} \tag{A.37}$$

ここで、kinetic term が canonical になるように

$$Q = Z_Q^{-1/2} \left[1 - \frac{\partial \ln Z_Q}{\partial \ln X} \frac{F}{M}\theta^2 \right]_{X=M} Q' \tag{A.38}$$

と変数変換すると

$$\mathcal{L}_{eff} = \int d^4\theta \; Q'^\dagger Q' + \left(\frac{\partial^2 \ln Z_Q(X, X^\dagger, \mu)}{\partial \ln X \, \partial \ln X^\dagger} \right)_{X=M} \left|\frac{F}{M}\right|^2 \; \phi^\dagger_{Q'} \phi_{Q'} \tag{A.39}$$

となる。よって、scalar soft mass は

$$m^2_{\tilde{Q}} = -\left(\frac{\partial^2 \ln Z_Q(X, X^\dagger, \mu)}{\partial \ln X \, \partial \ln X^\dagger} \right)_{X=M} \left|\frac{F}{M}\right|^2 \tag{A.40}$$

である。

次に $Z_Q(X, X^\dagger, \mu)$ を求める。波動関数のくりこみ群方程式は

$$\frac{d}{d\ln\mu} \ln Z_Q = \frac{C_2}{\pi} \alpha(\mu) \tag{A.41}$$

である。C_2 は 2 次のカシミアである。S の場合と同様に M で tree-level matching を行い、今度は $M \to \sqrt{XX^\dagger}$ と置き換えると

$$\begin{aligned}
Z_Q(X, X^\dagger, \mu) &= Z_Q(\Lambda_{UV}) \left[\frac{\alpha(\Lambda_{UV})}{\alpha(X)} \right]^{\frac{2c}{b'}} \left[\frac{\alpha(X)}{\alpha(\mu)} \right]^{\frac{2c}{b}} \\
\alpha^{-1}(\mu) &= 16\pi \mathrm{Re}\, S(\mu) = \alpha^{-1}(X) + \frac{b}{4\pi} \ln \frac{\mu^2}{XX^\dagger} \\
\alpha^{-1}(X) &= 16\pi \mathrm{Re}\, S(X) = \alpha^{-1}(\Lambda_{UV}) + \frac{b'}{4\pi} \ln \frac{XX^\dagger}{\Lambda^2_{UV}}
\end{aligned} \tag{A.42}$$

[71] $S(\Lambda_{UV})$ を固定して微分する。

となる。これから[72]

$$
\begin{aligned}
m_{\tilde{Q}}^2(\mu) &= 2C_2\frac{\alpha^2(\mu)}{(4\pi)^2}N\left[\xi^2+\xi\frac{N}{b}(1-\xi^2)\right]\left(\frac{F}{M}\right)^2 \\
\xi &\equiv \frac{\alpha(M)}{\alpha(\mu)} = \left[1+\frac{b}{2\pi}\alpha(\mu)\ln\frac{M}{\mu}\right]^{-1}
\end{aligned}
\tag{A.43}
$$

となる。

(A.38) の変換をしたことで、スカラーポテンシャルに変更が生じている。それが丁度 a term になっている。ポテンシャルの変化分は

$$
\delta V = \sum_i \left(\frac{\partial \ln Z_i}{\partial \ln X}\right)_{X=M}\frac{F}{M}\,Q_i\partial_{Q_i}W + h.c.
$$

だから $a = Ay$ と A を定義すると、

$$
A_i(\mu) = \left(\frac{\partial \ln Z_i}{\partial \ln X}\right)_{X=M}\frac{F}{M} = \frac{2C_2^i}{b}\frac{\alpha(\mu)}{4\pi}N(\xi-1)\frac{F}{M}
\tag{A.44}
$$

となる。

(A.44) から、messenger スケール $\mu = M$ では $a = 0$ になっていることがわかる。

A.4 MSSM のくりこみ群方程式

MSSM での soft parameters のくりこみ群方程式を列挙する。これらは全て 1-loop のオーダーである。Yukawa カップリングは (5.24) を仮定する。

以下では くりこみスケールを μ、cut off スケールを M として $t \equiv \ln(\mu/M)$ を変数として使う。

まずゲージカップリングは

$$
\frac{dg_i^2}{dt} = \frac{1}{8\pi^2}b_i g_i^4 \quad , b_i = \left\{\begin{array}{c} 33/5 \\ 1 \\ -3 \end{array}\right\}
\tag{A.45}
$$

つぎに Yukawa カップリングは (5.18) と (5.19) から[73]

$$
\frac{d}{dt}y_t = \frac{y_t}{16\pi^2}\left[6|y_t|^2+|y_b|^2-\frac{16}{3}g_3^2-3g_2^2-\frac{13}{15}g_1^2\right]
$$

[72] $Z_Q(\Lambda_{UV})$,$\alpha(\Lambda_{UV})$ を固定して微分する。

[73] ゲージカップリングの normalization には GUT のを用いる。標準理論での $SU(2)_L \times U(1)_Y$ のカップリング g, g' と GUT の g_2, g_1 の関係は $g_2 = g$, $g_1 = \sqrt{5/3}g'$ である。

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}y_b &= \frac{y_b}{16\pi^2}\left[6|y_b|^2+|y_t|^2+|y_\tau|^2-\frac{16}{3}g_3^2-3g_2^2-\frac{7}{15}g_1^2\right]\\
\frac{d}{dt}y_\tau &= \frac{y_\tau}{16\pi^2}\left[4|y_\tau|^2+3|y_b|^2-3g_2^2-\frac{9}{5}g_1^2\right]\\
\frac{d}{dt}\mu &= \frac{\mu}{16\pi^2}\left[3|y_t|^2+3|y_b|^2+|y_\tau|^2-3g_2^2-\frac{3}{5}g_1^2\right]
\end{aligned}
\tag{A.46}
$$

a term の RGE は、$a = yA$ と Yukawa カップリングをぬきだした A の RGE を代わりに考える[74] と

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}A_t &= \frac{1}{8\pi^2}\left[\frac{16}{3}g_3^2M_3+3g_2^2M_2+\frac{13}{15}g_1^2M_1+6|y_t|^2A_t+|y_b|^2A_b+|y_\tau|^2A_\tau\right]\\
\frac{d}{dt}A_b &= \frac{1}{8\pi^2}\left[\frac{16}{3}g_3^2M_3+3g_2^2M_2+\frac{7}{15}g_1^2M_1+|y_t|^2A_t+6|y_b|^2A_b\right]\\
\frac{d}{dt}A_\tau &= \frac{1}{8\pi^2}\left[3g_2^2M_2+\frac{9}{5}g_1^2M_1+3|y_b|^2A_b+4|y_\tau|^2A_\tau\right]
\end{aligned}
\tag{A.47}
$$

b term も同様に $b = yB$ と定義した B の RGE を代わりに考えると

$$
\frac{d}{dt}B = \frac{1}{8\pi^2}\left[3g_2^2M_2+\frac{3}{5}g_1^2M_1+3|y_t|^2A_t+3|y_b|^2A_b+|y_\tau|^2A_\tau\right]
\tag{A.48}
$$

gaugino mass は

$$
\frac{d}{dt}M_a = \frac{b_a}{2\pi}\alpha_a\, M_a
\tag{A.49}
$$

Higgs mass は

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}m_{H_u}^2 &= \frac{1}{16\pi^2}\left(3X_t-6g_2^2-\frac{6}{5}g_1^2|M_1|^2\right)\\
\frac{d}{dt}m_{H_d}^2 &= \frac{1}{16\pi^2}\left(3X_b+X_\tau-6g_2^2-\frac{6}{5}g_1^2|M_1|^2\right)\\
\frac{d}{dt}\mu &= \frac{\mu}{16\pi^2}\left(-3g_2^2|M_2|^2-g_1^2|M_1|^2+3|y_t|^2+3|y_b|^2+|y_\tau|^2\right)
\end{aligned}
\tag{A.50}
$$

ここで X_t , X_b , X_τ は

$$
\begin{aligned}
X_t &= 2|y_t|^2(m_{Q_3}^2+m_{\tilde{t}}^2+m_{H_u}^2)+2|a_t|^2\\
X_b &= 2|y_b|^2(m_{Q_3}^2+m_{\tilde{b}}^2+m_{H_d}^2)+2|a_b|^2\\
X_\tau &= 2|y_\tau|^2(m_{L_3}^2+m_{\tilde{\tau}}^2+m_{H_d}^2)+2|a_\tau|^2
\end{aligned}
\tag{A.51}
$$

[74] Yukawa カップリングのくりこみの効果を吸収する。

である。

scalar mass は

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}m_{Q_3}^2 &= \frac{1}{16\pi^2}\left(X_t + X_b - \frac{32}{3}g_3^2|M_3|^2 - 6g_2^2|M_2|^2 - \frac{2}{15}g_1^2|M_1|^2\right) \\
\frac{d}{dt}m_{\bar{t}}^2 &= \frac{1}{16\pi^2}\left(2X_t - \frac{32}{3}g_3^2|M_3|^2 - \frac{32}{15}g_1^2|M_1|^2\right) \\
\frac{d}{dt}m_{\bar{b}}^2 &= \frac{1}{16\pi^2}\left(2X_b - \frac{32}{3}g_3^2|M_3|^2 - \frac{8}{15}g_1^2|M_1|^2\right) \\
\frac{d}{dt}m_{L_3}^2 &= \frac{1}{16\pi^2}\left(X_\tau - 6g_2^2|M_2|^2 - \frac{6}{5}g_1^2|M_1|^2\right) \\
\frac{d}{dt}m_{\bar{\tau}}^2 &= \frac{1}{16\pi^2}\left(2X_\tau - \frac{24}{5}g_1^2|M_1|^2\right) \qquad \text{(A.52)}
\end{aligned}$$

である。

参考文献

[1] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, and G. Dvali, *Phys. Lett.* **B429** (1998) 263.

[2] S. Dimopoulos and H. Georgi, *Nucl. Phys.* **B193** (1981) 150;
N. Sakai, *Z. Phys.* **C11** (1981) 153.

[3] J. Ellis, S. Kelley, and D.V. Nanopoulos, *Phys. Lett.* **B260** (1991) 131;
U. Amaldi, W. de Boer, and H. Fürstenau, *Phys. Lett.* **B260** (1991) 447;
P. Langacker and M.-X. Luo, *Phys. Rev.* **D44** (1991) 817;
C. Giunti, C.W. Kim, and U.W. Lee, *Mod. Phys. Lett.* **A6** (1991) 1745.

[4] L. O'Raifeartaigh, *Nucl. Phys.* **B96** (1975) 331.

[5] P. Fayet and J. Iliopoulos, *Phys. Lett.* **B51** (1974) 461;
P. Fayet, *Nucl. Phys.* **B90** (1975) 104.

[6] N. Arkani-Hamed, G.F. Giudice, M.A. Luty and R. Rattazzi, *Phys. Rev.* **D58** (1998) 115005.

[7] E. Witten, *Nucl. Phys.* **B188** (1981) 513.

[8] E. Witten, *Nucl. Phys.* **B202** (1982) 253.

[9] K. Konishi, *Phys. Lett.* **B135** (1984) 439;
K. Konishi and K. Shizuya, *Nuovo Cimento* **A90** (1985) 111;
T.E. Clark, O. Piguet, and K. Sibold, *Nucl. Phys.* **B159** (1989) 1.

[10] A.E. Nelson and N. Seiberg, *Nucl. Phys.* **B416** (1994) 46.

[11] I. Affleck, M. Dine and N. Seiberg, *Phys. Rev. Lett.* **51** (1983) 1026;
Nucl. Phys. **B241** (1984) 493.

[12] I. Affleck, M. Dine and N. Seiberg, *Nucl. Phys.* **B256** (1985) 557.

[13] E. Witten, *Phys. Lett.* **B105** (1981) 267.

[14] G.F. Giudice and R. Rattazzi, hep-ph/9801271.

[15] E. Poppitz and S.P. Trivedi, *Phys. Lett.* **B401** (1997) 38.

[16] S. Dimopoulos, G. Dvali, R. Rattazzi and G.F. Giudice, *Nucl. Phys.* **B510** (1999) 12.

[17] E. Shirman, *Phys. Lett.* **B417** (1998) 281.

[18] M. Dine, A. Nelson, E. Shirman, *Phys. Rev.* **D51** (1995) 1362;
M. Dine, A. Nelson, Y. Nir, E. Shirman, *Phys. Rev.* **D53** (1996) 2658.

[19] K.-I. Izawa, and T. Yanagida, *Prog. Theor. Phys.* **95** (1996) 829.

[20] K. Intriligator and S. Thomas, *Nucl. Phys.* **B473** (1996) 121.

[21] Y. Nomura, K. Tobe, and T. Yanagida, *Phys. Lett.* **B425** (1998) 107.

[22] M.A. Luty, *Phys. Rev.* **D57** (1998) 1531.

[23] T. Hotta, K.-I. Izawa, and T. Yanagida, *Phys. Rev.* **D55** (1997) 415.

[24] F. Gabbiani and A. Masiero, *Nucl. Phys.* **B322** (1989) 235;
J. Hagelin, S. Kelley and T. Tanaka, *Nucl. Phys.* **B415** (1994) 293.

[25] I. Dasgupta, B. Dobrescu, and L. Randall, *Nucl. Phys.* **B483** (1997) 95.

[26] K.-I. Izawa, Y. Nomura, K. Tobe, and T. Yanagida, *Phys. Rev.* **D56** (1997) 2886.

[27] Y. Nomura, and K. Tobe, *Phys. Rev.* **D58** (1998) 055002.

[28] N. Arkani-Hamed,et.al, *Phys. Rev.* **D54** (1996) 7032.

[29] K.-I. Izawa, *Prog. Theor. Phys.* **98** (1997) 443.

[30] C. Csáki, L. Randall, and W. Skiba, *Phys. Rev.* **D57** (1998) 383

[31] G. Dvali, G.F. Giudice, and A. Pomarol, *Nucl. Phys.* **B478** (1996) 31.

[32] S. Dimopoulos, G.F. Giudice, and A. Pomarol, *Phys. Lett.* **B389** (1996) 37;
S.P. Martin, *Phys. Rev.* **D55** (1997) 3177.

[33] S. Dimopoulos, G. Dvali, and R. Rattazzi, *Phys. Lett.* **B413** (1998) 336.

[34] T. Gherghetta, G. Jungman, and E. Poppitz, hep-ph/9511317.

[35] L. Girardello, M.T. Grisaru, *Nucl. Phys.* **B194** (1982) 65.

[36] S.P. Martin and M.T. Vaughn, *Phys. Lett.* **B318** (1993) 331.

[37] M.A. Luty and W. Taylor, *Phys. Rev.* **D53** (1996) 3399.

[38] V.A. Novikov, M.A. Shifman, A.I. Vainstein, and V.I. Zakharov,
Nucl. Phys. **B223** (1983) 445;
Nucl. Phys. **B229** (1983) 381;
Nucl. Phys. **B260** (1985) 157;

Phys. Lett. **B166** (1986) 329;
Phys. Lett. **B166** (1986) 334.

[39] G.F. Giudice and R. Rattazzi, *Nucl. Phys.* **B511** (1998) 25.

[40] T. Banks and A. Zaks, *Nucl. Phys.* **B196** (1982) 189.

[41] N. Seiberg, *Nucl. Phys.* **B435** (1995) 129.

[42] J. Brodie, P. Cho and K. Intriligator, *Phys. Lett.* **B429** (1998) 319.

[43] S. Park representing the CDF collaboration, in *10th Topical Workshop on Proton-Antiproton Collider Physics, Illinois, 1995*, edited by R. Raja and J. You, AIP Conf. Proc. No. 357 (AIP, New York, 1996)

[44] S. Ambrosanio, G.L. Kane, G.D. Kribs and S.P. Martin, *Phys. Rev. Lett.* **76** (1996) 3498.

[45] S. Dimopoulos, M. Dine, S. Raby and S. Thomas, *Phys. Rev. Lett.* **76** (1996) 3494.

[46] S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **48** (1982) 1303.

[47] L.M. Krauss, *Nucl. Phys.* **B277** (1983) 556.

[48] S. Deser and B. Zumino, *Phys. Rev. Lett.* **38** (1977) 1433;
D.V. Volkov and V. Akulov, *Phys. Lett.* **B46** (1973) 109.

[49] M. Moroi, Dr.thesis, hep-ph/9503210.

[50] H. Pagels and J.R. Primack, *Phys. Rev. Lett.* **48** (1982) 223.

[51] J. Ellis, A.D. Linde and D.V. Nanopoulos, *Phys. Lett.* **B118** (1982) 59.

[52] J. McDonald, K.A. Olive and M. Srednicki, *Phys. Lett.* **B283** (1992) 80.

[53] S. Mizuta and M. Yamaguchi, *Phys. Lett.* **B298** (1993) 120.

[54] M. Drees and M.M. Nojiri, *Phys. Rev.* **D47** (1993) 376.

[55] T.P. Walker, G. Stergman, D.N. Schramm, K.A. Olive and H.-S. Kang, Ap.J.**376** (1991) 51.

[56] T. Moroi, H. Murayama and M. Yamaguchi, *Phys. Lett.* **B303** (1993) 289.

[57] D.H. Lyth and E.D. Stewart, *Phys. Rev. Lett.* **75** (1995) 201; *Phys. Rev.* **D53** (1996) 1784.

[58] A. Gouvêa, T. Moroi and H. Murayama, *Phys. Rev.* **D56** (1997) 1281.

[59] J. Ellis, G.B. Gelmini, J.L. Lopez, D.V. Nanopoulos and S. Sarkar, *Nucl. Phys.* **B373** (1992) 399.

[60] M. Kawasaki and T. Yanagida, *Phys. Lett.* **B399** (1997) 45.

[61] J. Hashiba, M. Kawasaki and T. Yanagida, *Phys. Rev. Lett.* **79** (1997) 4525.

[62] T. Asaka, J. Hashiba, M. Kawasaki and T. Yanagida, *Phys. Rev.* **D58** (1999) 083509.

[63] P. Horava and E. Witten, *Nucl. Phys.* **B460** (1996) 506.

[64] E. Dudas and C. Grojean, hep-ph/9704177.

[65] B. de Carlos, J.A. Casas, F. Quevedo, and E. Roulet, *Phys. Lett.* **B318** (1993) 447.

[66] K. Griest and M. Kamionkowski, *Phys. Rev. Lett.* **64** (1990) 615.

[67] A. De Rujula, S. Glashow and S. Sarid, *Nucl. Phys.* **B333** (1990) 173.

[68] M. Srednicki, R. Watkins and K.A. Olive, *Nucl. Phys.* **B310** (1988) 693.

[69] E. Holtmann, M. Kawasaki, K. Kohri and T. Moroi, *Phys. Rev.* **D60** (1999) 023506.