Closed String Tachyon凝縮の研究

高柳　博充

２００２年1月9日

目 次

第 1 章　Introduction **3**

第 2 章　Boundary State **6**

2.1 Boundary State の例 6

2.1.1 Bosonic string の場合 6

2.1.2 Super string の場合 11

2.2 石橋 state と Cardy 条件を用いた boundary state の構成 16

2.2.1 Virasoro 代数 16

2.2.2 石橋 state 19

2.2.3 Cardy 条件 21

2.2.4 Cardy の解 23

2.2.5 Flat な空間の D-brane 24

2.3 Orbifold $\mathbb{C}/\mathbb{Z}_N$ 上の boundary state 36

2.3.1 セットアップと orbifold 群の作用 36

2.3.2 Cylinder amplitude ⋯ bosonic string の場合 37

2.3.3 石橋 state と石橋 character 41

2.3.4 Bosonic fractional brane 43

2.3.5 Super string の場合 45

2.4 $\mathbb{C}^n/\Gamma$ の場合の fractional brane 48

2.4.1 Orbifold 群の作用 48

2.4.2 Bosonic fractional brane 49

2.4.3 Super string の場合 51

2.5 SUSY ALE の fractional brane 53

2.5.1 Orbifold 群の作用と空間の性質 53

2.5.2 Witten index 55

2.5.3 SUSY ALE orbifold 上の fractional brane の物理的解釈 58

第 3 章　D-brane probe を用いた closed tachyon 凝縮の考察 **63**

3.1 概略 63

3.1.1 結果 63

3.1.2 基本的なアイデア 64

3.2 Tachyon 凝縮前の $\mathbb{C}/\mathbb{Z}_N$ orbifold 64

3.2.1 Twist の仕方と closed string spectrum 64

3.2.2 D-brane probe 上の open string spectrum 68

3.2.3 Quiver diagram 68

3.2.4 Open string の action 69

3.2.5 D-brane probe の方法 70
3.3 Substring 領域での $\mathbb{C}/\mathbb{Z}_{2\ell+1}$ の tachyon 凝縮 72
3.3.1 Open-closed 相互作用による scalar potential の変化 72
3.3.2 λ_J が一般の値を取る場合 75
3.3.3 λ_J が特殊な値を取る場合 78
3.4 $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_N$ の解析 82
3.4.1 調べた系と結果 82
3.4.2 セットアップ 83
3.4.3 $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_{2\ell(2\ell-1)}$ の deform(大雑把な説明) 85
3.4.4 詳細の説明 86

第 4 章 Conclusion **89**

付 録 A R セクターの ground state **92**
A.1 SO(1,9) の Γ 行列 92
A.1.1 Γ 行列の具体形と諸性質 92
A.1.2 昇降演算子と状態ベクトル 93
A.2 R セクターの ground state 94
A.2.1 RR セクターの基底 94
A.2.2 $|A\rangle$ の意味と内積の値 96

付 録 B Character の値と性質 **101**
B.1 Virasoro character の値と性質 101
B.1.1 Bosonic character 101
B.1.2 Fermionic character 103
B.2 石橋 character の値の計算 106
B.2.1 Boson の場合 106
B.2.2 Fermion の場合 110
B.3 Modular 変換と S-matrix 112

付 録 C 有用な公式 **118**
C.1 θ 関数 118
C.2 離散群の性質 120
C.3 有用な公式 121

第1章　Introduction

量子電磁力学やそれを拡張した標準模型 (standard model) などの場の理論は、重力以外の相互作用に対する物理量を非常に高い精度で再現し大きな成功を収めた。しかし場の理論で重力を同様に取り扱うことは出来ない。重力が繰り込み不可能なため、高エネルギー (Planck スケール) で破綻してしまうからである。そのため、高エネルギーでは別の理論が必要となるが、その候補として最も有力なものが弦理論 (string theory) である。String theory では loop 計算を行う時に理論に自然なカットオフが入るため発散が出ない事と、低エネルギーの極限で場の理論になる事がその理由である。

この様に string theory は重力も扱える統一理論となりうるが、この理論には幾つか欠点がある。まず 1 つ目は、理論の種類が多すぎることである。例えば超弦理論 (super string theory) を考えると、超対称性 (super symmetry $\cdots$ SUSY) があるものは 5 種類 (Type IIA , Type IIB , Type I , het $SO(32)$, het $E_8 \times E_8$) 知られていて、SUSY が無い理論としては Type 0 理論等が知られている。この様に理論の種類が多いと統一理論とは呼べないだろう。2 つ目は非摂動的な現象や off shell の過程を追うことが出来ない事である。非摂動が駄目なのは string theory が string 同士の Feynman diagram のみを定義した理論だからで、off shell が駄目なのは string theory に weyl 対称性 (スケール不変性) があるために on shell しか扱えないからである。そのため、このままでは string の真のダイナミクスは理解できない。

1 つ目の問題点は、最近の string theory の大きな発展である様々な双対性 (duality) の発見[1]によって 1 部分が解決された。具体的にはこれらの双対性のおかげで様々な soliton (D-brane や NS5-brane 等) が発見され、その結果 SUSY のある 5 種類の理論は全て双対性で繋がっている等価なものである事が示された [3] $\sim$ [7]。つまり SUSY のある 1 つの理論 (M 理論 [3]) を異なる見方で見ていただけだったと言う事である。“ある理論の強結合領域が別の理論の弱結合領域” の様な双対性になっているので、ただ同じ理論だと分かっただけではなく、それぞれの理論の利点を利用すれば string theory の理解をさらに深められる様になった。

2 つ目の問題点も少しずつではあるが、解決の兆しが見え始めている。まず soliton の発見によって、string theory の非摂動的な現象を見る事が出来るようになった。特に D-brane [8] は閉弦 (closed string) の電荷 (charge) を持っている板の様な soliton で非摂動的な物だが、開弦 (open string) の端が付く先と解釈する事も出来るので open string では摂動的に扱えるため、取り扱い易い soliton である。そのため現在では D-brane の様々な性質が分かっている。

一方 off shell の途中過程を持つ現象として tachyon 凝縮が知られている。これは SUSY が無い系は tachyon (質量の 2 乗が負の string) を含むため不安定で、tachyon が凝縮 (Higgs mechanism に対応) する事で安定化するという現象である。この様に tachyon 凝縮は不安定な系と安定な系を繋ぐ現象なので、SUSY がある系の間のみを繋いだ duality よりも広い範囲で統一的な取り扱いが出来るようになる。そのため tachyon 凝縮の性質を調べる事は非常に有用なのだが、この途中過程は off shell なので string theory では扱えない。Tachyon 凝縮は tachyon が open string であるか closed string であるかで open tachyon 凝縮と closed tachyon

[1] T-duality[1],S-duality [2],T-dual と S-dual を合わせた U-duality [2] 等。

凝縮の 2 種類に分類できるが、open tachyon 凝縮の方は最近の研究[2]でかなり理解されてきたのでどんなものか簡単に説明しよう。

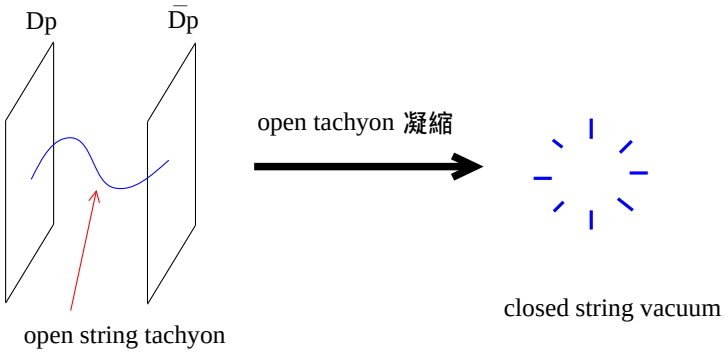

図 1.1: Brane-antibrane 系の open tachyon 凝縮

まず Type II 理論を考えて、図 1.1 の様に Dp-brane (Dp) と anti Dp-brane ($\bar{D}$p)[3]が 1 枚ずつ平行に並んだ系を考える [11]。この系は non-BPS で SUSY が無いので不安定な可能性があるが、実際 2 枚の brane の間の距離が十分小さいと、その間を繋ぐ open string に tachyon が含まれるため不安定となる。そのため、その場合は tachyon 凝縮を起こして安定化すると考えられるが、系全体の RR charge が 0 である事から tachyon 凝縮で 2 枚の brane が対消滅して closed string vacuum [4]へ変化すると考えられる (図 1.1)。もしこの考察が正しければ

"brane の tention の和=タキオン凝縮によって生じる真空の安定化エネルギー"

という Sen の予想が成り立っているべきだが、OSFT(open string field theory $\cdots$ open string の弦の場の理論) を用いた計算で、幾つかの具体的な系に対してこの予想が正しい事が確認された。例えば OSFT の 1 つである Witten 型の cubic-SFT [12] を用いて、bosonic D25-brane 1 枚の系の tachyon potential [5]を計算して求まる安定化エネルギーが非常に高い精度で[6]D25-brane の tention と一致する事がわかって、Sen の予想が正しい事が確認された [14][7]。他にも OSFT の 1 種である BSFT(boundary SFT) [16] を用いて Sen の予想が確かめられている[8]。最後に図 1.1 からも分かるように、一般的に open tachyon 凝縮では凝縮後に open string の付く先 (D-brane 等) の形状が変化する。

さて、以上を踏まえて初心に帰ってみよう。そもそも string theory が良く考えられるようになった理由が重力を取り扱いたいからであった。String theory では通常ゲージ場や物質は open string に対応して重力は closed string に対応しているので、重力の性質を調べるという

[2] A.Sen の論文 [9] から始まる一連の研究。それらのまとめとしては [10] がある。
[3] Dp と逆の RR charge を持った brane。
[4] Open string が存在しない真空という意味。
[5] Brane に付いている open string の場の potential の事。余談かも知れないが、[13] では tachyon potential の普遍性 (D-brane がどのような boundary state で記述されるかに依らない、つまり tachyon potential は D-brane の形状に依らず D-brane の次元にのみ依存する) が証明されている。
[6] cubic-SFT では場が無限個出てくるので、有限個の場だけを考えて (level truncation) 近似計算をしなければならない。
[7] Cubic-SFT を用いた open tachyon 凝縮の研究の review としては [15] があるので、それを参照して欲しい。
[8] 例えば [17] では bosonic D25-brane の系, [18] では Dp-$\bar{D}$p 系で Sen の予想が確かめられている。BSFT の利点として、cubic SFT の様な level truncation が必要なく、厳密な計算ができるという点がある。

事はclosed stringの性質を調べる事に相当している。よってclosed stringの現象を調べたい訳だが、今まで書いた成果がopen stringに関するもの(D-brane等)が多い事からも分かるように、非常に難しい。これはopen stringの理論はゲージ理論に対応しているので、良く知られたゲージ理論の取り扱い方と同様の手法で取り扱えるが、closed stringの理論の場合はそもそもそれに対応する重力の取り扱い方を我々は良く知らないので、closed stringをどう扱って良いかよく分からないからである。"やはり重力は難しい"という事である。

この事は今回著者が修士論文で取り扱おうとしているclosed tachyon凝縮の場合にも当てはまる。どうして困難であるかをまとめると以下の通りである。

1. Open tachyon凝縮がopen stringの付く先を変化させる過程だという事を踏まえると、closed tachyon凝縮は"closed stringの付く先"が変化する過程だと考えられる。Open stringはD-braneの様なboundaryに束縛されているので凝縮でboundaryが変化するだけだが、closed stringの場合はbulk全体を飛び回っているので凝縮でbulkが変化してしまうという事である。そのため途中過程を直接追うのは非常に困難で、それどころか安定化した時の状態がどのようになるかも分からない。
2. Open stringの場合のtachyon potentialに相当するものを、closed stringの場合は定義できない。重力自体のpotentialが定義できないのと同じ理由である。そのため、open tachyon凝縮のSenの予想に対応するものが無く、どのような物理量を調べれば良いかすらも分からない。
3. Closed string field theoryはまだ定式化されていない。OSFTと同様に定義しようとするとloop計算の各次にanomalyが出る事が知られている。

これら$1 \sim 3$を見ると、closed tachyon凝縮を調べる事でclosed stringのダイナミクスが分かり、bulk自体にSUSYが無い系(Type 0理論等)とSUSYがある系(Type II等)の繋がりを見る事が出来る可能性があるので非常に有用である事が分かるが、そのまま扱うと非常に困難であることも分かるだろう。

そこで極力簡単な系で考えて、open stringの性質もうまく用いてclosed tachyon凝縮を調べようと考えるのは自然な流れだろう。一般的に、曲がった空間を考えるとSUSYが無くなりclosed tachyonが生じるため、極力簡単に取り扱える曲がった空間を考えれば良い訳である。実際、最近になって曲がった空間の中でも比較的楽に取り扱えるorbifold上のclosed tachyon凝縮を、orbifold上にD-braneを置く事によって考察するやり方がPolchinskiらによって提案された[19]ので、修士論文としてそのorbifold上でのclosed tachyon凝縮の話と、その話の理解に必要なorbifoldの知識をまとめる事にする[9]。

最後に具体的な章立ては以下の通りである。まず、2章ではboundary stateの話をまとめる。Boundary stateはD-brane等のsolitonをCFTの状態としてうまく記述するための方法で、orbifold上のD-braneの性質を理解する事がこの章の目的である。3章ではこの修士論文のメインであるorbifold $\mathbb{C}/\mathbb{Z}_N$上のclosed tachyon凝縮をD-braneで調べる話を説明する。4章では結論を述べる。最後に付録A~Cとして2章の計算に必要な事柄をまとめておいたので、適宜参照して欲しい。

[9] 今回は時間の都合上follow出来なかったが、closed tachyon凝縮を扱った論文として[19]の他に最近になって[20] ~ [25]等が出された。World sheetのCFTの繰り込みを考えて、IR領域をtachyon凝縮後とする話が多い。特に[22]では、spacetime SUSYは破れているがworld sheet SUSYが残っている系を考える事で、量子補正も踏まえた議論が出来る事が議論されていて興味深い。また、[19]~[24]ではlocalized tachyon(closed tachyonが特異点に局在した系)を考えているが、[25]では空間全体にtachyonが存在する系を取り扱っている。

第2章　Boundary State

ここ近年での string theory の発展に D-brane は大きく貢献している。そして、今後考えたい closed string tachyon を含むような曲がった空間の場合も D-brane は非常に有用であると考えられる。

さて D-brane を取り扱う際に、open string の付く先と考えるよりも closed string の始状態や終状態 (boundary state) と考えた方が見通しが良くなる事が多く、orbifold 等の曲がった空間を考える時はその傾向が強くなる。

そこで、この章では boundary state についてまとめる。Orbifold 上の D-brane を boundary state で取り扱えるようになる事がこの章の最終目標である。

2.1　Boundary State の例

まず boundary state がどんなものかを理解するために、通常の平坦な空間での Disc(Open string の Neumann 境界条件に相当) と D-brane(Dirichlet 境界条件) の両者に対して具体的に boundary state を構築してみよう [26]。

2.1.1　Bosonic string の場合

まず bosonic string から。Notation は [27] に従い以下の通りである。

World sheet action

Euclid 的な world sheet (σ^1, σ^2) を考えた時、world sheet boson X^μ の action は

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int \mathrm{d}^2\sigma \, (\partial_1 X^\mu \partial_1 X_\mu + \partial_2 X^\mu \partial_2 X_\mu) \tag{2.1}$$

となる。Minkovski 的な world sheet (τ, σ)=(時間, 空間) を考えたい時は

$$\sigma \equiv \sigma^1 \quad , \quad \tau \equiv -i\sigma^2 \tag{2.2}$$

とすればよい。複素座標 w, z とその微分を

$$w \equiv \sigma^1 + i\sigma^2 \quad , \quad \bar{w} \equiv \sigma^1 - i\sigma^2 \quad , \quad z \equiv e^{-iw} = e^{-i\sigma^1+\sigma^2} \quad , \quad \bar{z} \equiv e^{i\bar{w}} = e^{i\sigma^1+\sigma^2} \tag{2.3}$$

$$\partial_w \equiv \frac{1}{2}(\partial_1 - i\partial_2) \quad , \quad \partial_{\bar{w}} \equiv \frac{1}{2}(\partial_1 + i\partial_2) \quad , \quad \partial_z \equiv \frac{\partial w}{\partial z}\partial_w \quad , \quad \partial_{\bar{z}} \equiv \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}}\partial_{\bar{w}} \tag{2.4}$$

と定義する。

Closed string のモード展開

Closed string を考える時、X^μ は

$$X^\mu(\sigma^1+2\pi,\sigma^2)=X^\mu(\sigma^1,\sigma^2) \tag{2.5}$$

の条件を満たしている。$\partial=\partial_z,\bar{\partial}=\partial_{\bar{z}}$ として

$$\partial X^\mu(z)=-i\left(\frac{\alpha'}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{\alpha_m^\mu}{z^{m+1}}\quad,\quad \bar{\partial}X^\mu(\bar{z})=-i\left(\frac{\alpha'}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{\tilde{\alpha}_m^\mu}{\bar{z}^{m+1}} \tag{2.6}$$

とモード展開する。w 座標で書くと

$$\partial X^\mu(w)=-\left(\frac{\alpha'}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\alpha_m^\mu e^{imw}\quad,\quad \bar{\partial}X^\mu(\bar{w})=\left(\frac{\alpha'}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\tilde{\alpha}_m^\mu e^{-im\bar{w}} \tag{2.7}$$

となっている[1]。ただし、式 (2.7) では $\partial=\partial_w,\bar{\partial}=\partial_{\bar{w}}$ としている。以下 $\partial,\bar{\partial}$ と書いた時には特にことわりが無い場合、引数で微分することにする。X^μ のモード展開は

$$X^\mu(z,\bar{z})=x^\mu-i\frac{\alpha'}{2}p^\mu\ln|z|^2+i\left(\frac{\alpha'}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{m\neq0}\frac{1}{m}\left(\frac{\alpha_m^\mu}{z^m}+\frac{\tilde{\alpha}_m^\mu}{\bar{z}^m}\right) \tag{2.8}$$

となる。ただし、

$$p^\mu\equiv\left(\frac{2}{\alpha'}\right)^{\frac{1}{2}}\alpha_0^\mu=\left(\frac{2}{\alpha'}\right)^{\frac{1}{2}}\tilde{\alpha}_0^\mu \tag{2.9}$$

である。交換関係は

$$[\alpha_m^\mu,\alpha_n^\nu]=[\tilde{\alpha}_m^\mu,\tilde{\alpha}_n^\nu]=m\delta_{m,-n}\eta^{\mu\nu} \tag{2.10}$$

$$[x^\mu,p^\nu]=i\eta^{\mu\nu} \tag{2.10 '}$$

となっていて、他は 0 である。式 (2.8) を w 座標で書くと、式 (2.3) より

$$X^\mu(w,\bar{w})=x^\mu-\frac{\alpha'}{2}p^\mu(w-\bar{w})+i\left(\frac{\alpha'}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{m\neq0}\frac{1}{m}\left(\alpha_m^\mu e^{imw}+\tilde{\alpha}_m^\mu e^{-im\bar{w}}\right) \tag{2.11}$$

と書ける[2]。最後に座標 (σ^1,σ^2) で表すと、

$$X^\mu(\sigma^1,\sigma^2)=x^\mu-i\alpha' p^\mu\sigma^2+i\left(\frac{\alpha'}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{m\neq0}\frac{1}{m}\left(\alpha_m^\mu e^{im(\sigma^1+i\sigma^2)}+\tilde{\alpha}_m^\mu e^{-im(\sigma^1-i\sigma^2)}\right) \tag{2.12}$$

とも書ける。

---

[1] conformal weight が (1,0) と (0,1) なので、$\partial_w X^\mu(w)=\frac{\partial z}{\partial w}\partial_z X^\mu(z),\partial_{\bar{w}}X^\mu(\bar{w})=\frac{\partial\bar{z}}{\partial\bar{w}}\partial_{\bar{z}}X^\mu(\bar{z})$ となる

[2] X^μ の conformal weight は (0,0) なので、ただ z を書き直せば OK

Open string のモード展開

Open string の場合、両端 $\sigma^1 = 0, \pi$ で X^μ に境界条件が付く。$\sigma^1 = 0$ での Neumann 境界条件、Dirichlet 境界条件は次の様になる。

$$\begin{array}{lll} \text{Neumann} & : & \partial_1 X^\mu(0,\sigma^2) = 0 \\ \text{Dirichlet} & : & X^\mu(0,\sigma^2) = y^\mu \quad (\text{定数}) \end{array} \tag{2.13}$$

$\sigma^1 = \pi$ の場合も同様である。式 (2.13) を w 座標で書くと、

$$\begin{array}{lllll} \text{Neumann} & : & \partial X^\mu(w) & = -\bar{\partial} X^\mu(\bar{w}) & \mathrm{Re}(w) = 0 \\ \text{Dirichlet} & : & X^\mu(w,\bar{w}) & = y^\mu & \mathrm{Re}(w) = 0 \end{array} \tag{2.14}$$

と書ける。Neumann$\cdots$N,Dirichlet$\cdots$D と書くと、$0 - \pi$ で N-N , D-D , N-D , D-N の 4 種類の境界条件がある。$X^\mu(w,\bar{w})$ を

$$X^\mu(w,\bar{w}) = X^\mu(w) + \tilde{X}^\mu(\bar{w}) \tag{2.15}$$

と分解すると、4 種類のそれぞれの境界条件で、以下の様にモード展開できる。

N-N の場合

$$X^\mu(w) = d^\mu + \left(\frac{\alpha'}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left[-\alpha_0^\mu w + i \sum_{\substack{m \in \mathbf{Z} \\ m \neq 0}} \frac{1}{m} \alpha_m^\mu e^{imw} \right] \tag{2.16}$$

とモード展開する。さらに $X^\mu(w)$ と $\tilde{X}^\mu(\bar{w})$ の間に

$$\tilde{X}^\mu(\bar{w}) = X^\mu(2\pi - \bar{w}) \tag{2.17}$$

の関係式を付ける。これは $\pi \leq \mathrm{Re}(w) \leq 2\pi$ の範囲の $X^\mu(w,\bar{w})$ を定義することに相当していて、このように変域が 2π までの関数を作ることを "double trick" と呼ぶ。すると $\mathrm{Re}(w)$=$0, \pi$ で確かに式 (2.14) の Neumann の方を満たしている事が分かる。その時 $X^\mu(w,\bar{w})$ は

$$X^\mu(w,\bar{w}) = x^\mu - \alpha' p^\mu (w - \bar{w}) + i \left(\frac{\alpha'}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\substack{m \in \mathbf{Z} \\ m \neq 0}} \frac{1}{m} \alpha_m^\mu \left(e^{imw} + e^{-im\bar{w}} \right) \tag{2.18}$$

とモード展開できる。x^μ, p^μ の定義と交換関係は

$$\begin{array}{rl} x^\mu & \equiv 2d^\mu - 2\pi \left(\frac{\alpha'}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \alpha_0^\mu \\ p^\mu & \equiv (2\alpha')^{-\frac{1}{2}} \alpha_0^\mu \\ [\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu] & = m \delta_{m,-n} \eta^{\mu\nu} \\ [x^\mu, p^\nu] & = i \eta^{\mu\nu} \end{array} \tag{2.19}$$

となっていて、その他の交換関係は 0 である。式 (2.18) を変域 $0 \leq \mathrm{Re}(w) \leq \pi$ で考えたものが open string のモード展開になっている。

D-D の場合

式 (2.16) に加えて、

$$\tilde{X}^{\mu}(\bar{w}) = c^{\mu} - X^{\mu}(2\pi - \bar{w}) \qquad x^{\mu} = \text{定数} \tag{2.20}$$

とすれば D-D 境界条件を満たす事がわかる。モード展開は

$$X^{\mu}(w,\bar{w}) = x^{\mu} + \frac{y^{\mu} - x^{\mu}}{2\pi}(w+\bar{w}) + i\left(\frac{\alpha'}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\substack{m\in\mathbf{Z}\\ m\neq 0}} \frac{1}{m}\alpha_m^{\mu}\left(e^{imw} - e^{-im\bar{w}}\right) \tag{2.21}$$

となっている。y^{μ} は x^{μ} と α_0^{μ} の適当な線型和で書けて、これは $\sigma^1 = 0$ で x^{μ},$\sigma^1 = \pi$ で y^{μ} の D-D 境界条件に対応している。

N-D と D-N の場合

残り 2 つの境界条件の場合、

$$X^{\mu}(w) = i\left(\frac{\alpha'}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{r\in\mathbf{Z}+\frac{1}{2}} \frac{1}{r}\alpha_r^{\mu} e^{irw} \tag{2.22}$$

とモード展開しておいて、

$$\begin{aligned} N-D \quad &: \quad \tilde{X}^{\mu}(\bar{w}) = x^{\mu} - X^{\mu}(2\pi - \bar{w}) \\ D-N \quad &: \quad \tilde{X}^{\mu}(\bar{w}) = x^{\mu} + X^{\mu}(2\pi - \bar{w}) \end{aligned} \tag{2.23}$$

と置けばよい。$X^{\mu}(w,\bar{w})$ のモード展開は

$$N-D \quad : \quad X^{\mu}(w,\bar{w}) = x^{\mu} + i\left(\frac{\alpha'}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{r\in\mathbf{Z}+\frac{1}{2}} \frac{1}{r}\alpha_r^{\mu}\left(e^{irw} + e^{-ir\bar{w}}\right) \tag{2.24}$$

$$D-N \quad : \quad X^{\mu}(w,\bar{w}) = x^{\mu} + i\left(\frac{\alpha'}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{r\in\mathbf{Z}+\frac{1}{2}} \frac{1}{r}\alpha_r^{\mu}\left(e^{irw} - e^{-ir\bar{w}}\right) \tag{2.25}$$

式 (2.24),(2.25) からもわかるように、string の片方の端が固定されているので、運動量 p^{μ} が無い。また、x^{μ} は固定端の位置に相当している。最後に、交換関係は

$$[\alpha_r^{\mu}, \alpha_s^{\nu}] = r\delta_{r,-s}\eta^{\mu\nu} \tag{2.26}$$

となっていて、その他の交換関係は 0 である。

以上を踏まえて、bosonic string の boundary state を構成してみよう。まず、Neumann boundary state から。

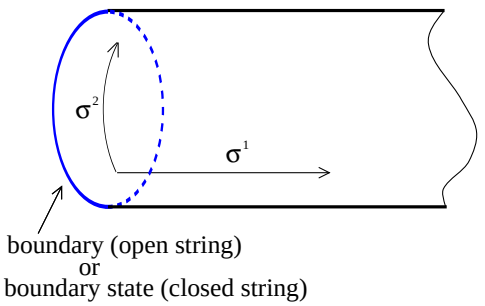

図 2.1: open string の 1-loop

Neumann boudary state

図 2.1 の様な open string の 1-loop を考える。この場合 σ^1とσ^2 を入れ替えると、open string の端 (境界条件) を closed string の始状態 (boundary state) と考えられて、closed string の tree level とみなせる。

では、ある 1 方向 μ だけを考えた時の boundary state を調べてみよう。

まず、Neumann boundary condition は式 (2.14) で与えられていた。$w' \equiv iw = -\sigma^2 + i\sigma^1$ と conformal 変換をすると、$\partial X^\mu(w)$ の conformal weight は (1,0) であることを踏まえて

$$\partial X^\mu(w) = \frac{\partial w'}{\partial w}\partial X^\mu(w') = i\partial X^\mu(w') \quad , \quad \bar\partial X^\mu(\bar w) = \frac{\partial \bar w'}{\partial \bar w}\bar\partial X^\mu(\bar w') = -i\bar\partial X^\mu(\bar w') \tag{2.27}$$

となる。よって、式 (2.14) は

$$\partial X^\mu(w') - \bar\partial X^\mu(\bar w') = 0 \quad , \quad \mathrm{Im}(w') = 0 \tag{2.28}$$

と書ける。さらに w' の $\sigma^2 \to -\sigma^2$ とすれば[3]、$w'' = \sigma^2 + i\sigma^1$ と書けて、図 2.1 でちょうど σ^1 とσ^2 を入れ替えた事に対応する。この場合も

$$\partial X^\mu(w'') - \bar\partial X^\mu(\bar w'') = 0 \quad , \quad \mathrm{Im}(w'') = 0 \tag{2.29}$$

をみたす[4]。w'' を実数倍する座標変換に対して式 (2.29) は不変なので、その変換で $\mathrm{Re}(w'')$ が 2π 周期になるように調節しておく。式 (2.29) を closed string の始状態 $|B_X\rangle_N$ の条件ととらえると、closed string のモード展開の式 (2.7) より x= $\mathrm{Re}(w'')$ として任意の実数 x で

$$\left[\partial X^\mu(x) - \bar\partial X^\mu(x)\right]|B_X\rangle_N = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_m \left(\alpha^\mu_m + \tilde\alpha^\mu_{-m}\right) e^{imx}|B_X\rangle_N = 0 \tag{2.30}$$

が成り立つ (添え字 N は Neumann の意味)。つまり、

$$\left(\alpha^\mu_m + \tilde\alpha^\mu_{-m}\right)|B_X\rangle_N = 0 \qquad \text{for} \quad {}^\forall m \in \mathbf{Z} \tag{2.31}$$

[3]この操作は left-moving w' と right-moving $\bar w'$ を入れ替える操作に対応している。

[4]Closed string の $X^\mu(w', \bar w')$ を式 (2.15) の様に分解した時に、left : X^μ , right : $\tilde X^\mu$ の入れ替えに対して理論が対称なので、w' と $\bar w'$ の入れ替えをしても boundary state の条件は変化しない事から分かる。式 (2.28),(2.29) は closed string の tree level と見た時、world sheet の空間方向 $\mathrm{Re}(w')$ の向きをどちらに選んでも同じ事を意味しているが、上の話からも分かるようにこれは理論が left と right で対称であることからくる帰結なので、そうでない物 (heterotic string 等) ではこのような話は出来ない。以下の boundary state の話では、全て left と right が対称なものを考えることにする。

が Neumann boundary state が満たしている条件である。式 (2.31) の解は、

$$|B_X\rangle_N = C_0 \prod_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{n}\alpha^{\mu}_{-n}\tilde{\alpha}_{\mu,-n}}|0;k^{\mu}=0\rangle \tag{2.32}$$

と書ける。ただし C_0 は適当な規格化定数で、この値を決める事も出来るがそれは後のセクションに譲る事にする。$|0;k^{\mu}=0\rangle$ は closed string の ground state で、運動量 $k^{\mu}=0$ の状態である。これは式 (2.31) に m=0 を代入して、これを p^{μ} に書き直すと分かる。最後に、これは 1 方向のみを考えているので勿論 μ で和を取らない。

Dirichlet boundary state

図 2.1 のセットアップで今度は Dirichlet boundary state を調べよう。Closed string の初期条件に直すと

$$X^{\mu}(w,\bar{w}) = y^{\mu} \quad , \quad \mathrm{Re}(w)=0 \qquad \Rightarrow \qquad X^{\mu}(w'',\bar{w}'') = y^{\mu} \quad , \quad \mathrm{Im}(w'')=0 \tag{2.33}$$

となる。式 (2.33) の右の方に closed string のモード展開の式 (2.11) を代入すると、boundary state $|B_X\rangle_D$ の条件は

$$\hat{x}^{\mu}|B_X\rangle_D = y^{\mu}|B_X\rangle_D \quad , \quad (\alpha^{\mu}_m - \tilde{\alpha}^{\mu}_{-m})\,|B_X\rangle_D = 0 \quad \text{for} \quad {}^{\forall}m \neq 0 \tag{2.34}$$

となる。まぎらわしいので operator $\hat{x}^{\mu}$ に hat を付けた。一方 y^{μ} は c 数である。式 (2.34) の解は

$$|B_X\rangle_D = D_0\delta(\hat{x}^{\mu}-y^{\mu}) \prod_{n=1}^{\infty} e^{\frac{1}{n}\alpha^{\mu}_{-n}\tilde{\alpha}_{\mu,-n}}|0;k^{\mu}=0\rangle \tag{2.35}$$

と書ける。D_0 は適当な規格化因子で、後のセクションで決める。Operator $\delta(\hat{x}^{\mu}-y^{\mu})$ は

$$\hat{x}^{\mu}\delta(\hat{x}^{\mu}-y^{\mu})|0;k^{\mu}=0\rangle = y^{\mu}\delta(\hat{x}^{\mu}-y^{\mu})|0;k^{\mu}=0\rangle \tag{2.36}$$

となるような operator である。$\hat{x}^{\mu}$ と p^{μ} は交換関係が $\neq 0$ なので、$|B_X\rangle_D$ は p^{μ} の固有状態ではない事に注意したい。

最後に、D-brane の boundary state を構成したい場合は、Neumann 方向を $|B_X\rangle_N$, Dirichlet 方向を $|B_X\rangle_D$ として、テンソル積を取ればよいことが分かる。

2.1.2 Super string の場合

同様のことを今度は super string (Type II 又は Type 0 を考える[5]) の場合で行おう。NS-R formalism で話をする。

[5] 前にも書いたように left と right が対称の理論を考えたいので。

World sheet action

Action は bosonic な action 式 (2.1) に world sheet fermion ψ^μ (left), $\tilde{\psi}^\mu$ (right) の action を加えたもので、

$$S = \frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}^2w \left(\frac{2}{\alpha'}\partial X^\mu \bar{\partial} X_\mu + \psi^\mu \bar{\partial}\psi_\mu + \tilde{\psi}^\mu \partial \tilde{\psi}_\mu\right) \tag{2.37}$$

と書ける。ただし、$2\,\mathrm{d}\sigma^1\,\mathrm{d}\sigma^2 \equiv \mathrm{d}^2w \sim \mathrm{d}w\,\mathrm{d}\bar{w}$ を用いた[6]。

Closed string のモード展開

Closed string を考える時、X^μ は 2.1.1 と全く同じ話だが、ψ^μ として

$$\begin{aligned} \text{Ramond (R)}: &\quad \psi^\mu(w+2\pi) = +\psi^\mu(w) \\ \text{Neveu-Schwarz (NS)}: &\quad \psi^\mu(w+2\pi) = -\psi^\mu(w) \end{aligned} \tag{2.38}$$

の 2 つのモードが考えられる。$\tilde{\psi}^\mu$ も同様に考えてまとめると

$$\begin{aligned} \psi^\mu(w+2\pi) &= e^{2\pi i\nu}\psi^\mu(w) \\ \tilde{\psi}^\mu(\bar{w}+2\pi) &= e^{-2\pi i\tilde{\nu}}\tilde{\psi}^\mu(\bar{w}) \end{aligned} \tag{2.39}$$

が考えられる。ただし、$\nu = 0\cdots R, \nu = \frac{1}{2}\cdots NS$ で、$\tilde{\nu}$ も同様である。Left と right でモードが違っても構わないので、(left , right)=(NS , NS) , (NS , R) , (R , NS) , (R , R) の 4 つのモードを考えれば良い事が分かる。

モード展開は

$$\psi^\mu(w) = i^{-\frac{1}{2}}\sum_{r\in\mathbf{Z}+\nu}\psi^\mu_r e^{irw} \quad , \quad \tilde{\psi}^\mu(\bar{w}) = i^{\frac{1}{2}}\sum_{r\in\mathbf{Z}+\tilde{\nu}}\tilde{\psi}^\mu_r e^{-ir\bar{w}} \tag{2.40}$$

で与えられる。これは z 座標で考えた時、ψ^μ と $\tilde{\psi}^\mu$ の conformal weight がそれぞれ $(\frac{1}{2},0)$,$(0,\frac{1}{2})$ である事を踏まえると

$$\psi^\mu(z) = \sum_{r\in\mathbf{Z}+\nu}\frac{\psi^\mu_r}{z^{r+\frac{1}{2}}} \quad , \quad \tilde{\psi}^\mu(\bar{z}) = \sum_{r\in\mathbf{Z}+\tilde{\nu}}\frac{\tilde{\psi}^\mu_r}{\bar{z}^{r+\frac{1}{2}}} \tag{2.41}$$

と書けることからきている[7]。これらは反交換関係

$$\{\psi^\mu_r, \psi^\nu_s\} = \{\tilde{\psi}^\mu_r, \tilde{\psi}^\nu_s\} = \eta^{\mu\nu}\delta_{r,-s} \quad , \quad \{\psi^\mu_r, \tilde{\psi}^\nu_s\} = 0 \tag{2.42}$$

を満たしている。

---

[6] 正確には $\mathrm{d}w\,\mathrm{d}\bar{w} = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial\sigma^1} & \frac{\partial w}{\partial\sigma^2} \\ \frac{\partial\bar{w}}{\partial\sigma^1} & \frac{\partial\bar{w}}{\partial\sigma^2}\end{pmatrix}\mathrm{d}\sigma^1\,\mathrm{d}\sigma^2 = \det\begin{pmatrix}1 & i\\ 1 & -i\end{pmatrix}\mathrm{d}\sigma^1\,\mathrm{d}\sigma^2 = -2i\,\mathrm{d}\sigma^1\,\mathrm{d}\sigma^2$ なので $-i$ 倍ずれるが、大きさと conformal 変換性は正しく表現されているのでこれで構わない。

[7] $\psi^\mu(z) = \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^{\frac{1}{2}}\psi^\mu(w) = i^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}}\psi^\mu(w)$ を用いた

Open string のモード展開

X^μ は 2.1.1 の場合と全く同じである。ψ^μ の方も consistent な boundary condition [8]を考えてみよう。

まず式 (2.37) の fermion の項を (σ^1, σ^2) で書いたとき、

$$S \sim \int \mathrm{d}\sigma^1 \, \mathrm{d}\sigma^2 \left[\psi^\mu (\partial_1 + i\partial_2) \psi_\mu + \tilde{\psi}^\mu (\partial_1 - i\partial_2) \tilde{\psi}_\mu \right] \tag{2.43}$$

とかけるので、変分を取ると

$$\delta S \sim 2 \int \mathrm{d}\sigma^1 \, \mathrm{d}\sigma^2 \left[\delta\psi^\mu (\partial_1 + i\partial_2) \psi_\mu + \delta\tilde{\psi}^\mu (\partial_1 - i\partial_2) \tilde{\psi}_\mu \right] + \int \mathrm{d}\sigma^2 \left[\psi^\mu \delta\psi_\mu + \tilde{\psi}^\mu \delta\tilde{\psi}_\mu \right]_{\sigma^1=0}^{\sigma^1=\pi} \tag{2.44}$$

となる[9]。式 (2.44) の表面項 (右辺第 2 項) が 0 になる事が consistent な boundary condition の条件で、open string(left と right に対応が付いている string) の場合は

$$\begin{aligned} \psi^\mu(0, \sigma^2) &= i\eta_1 \tilde{\psi}^\mu(0, \sigma^2) \\ \psi^\mu(\pi, \sigma^2) &= i\eta_2 \tilde{\psi}^\mu(\pi, \sigma^2) \end{aligned} \tag{2.45}$$

となる。ここで、$\eta_1, \eta_2 = \pm 1$ である。しかし、X^μ のような物理的な解釈 (string の位置) が出来ないので Neumann や Dirichlet と言っても良く分からない。そこで、次の様に定義する。

N-N の場合

まず、N-N boundary condition を

$$\begin{aligned} \psi^\mu(0, \sigma^2) &= -i\eta_1 \tilde{\psi}^\mu(0, \sigma^2) \\ \psi^\mu(\pi, \sigma^2) &= -i\eta_2 \tilde{\psi}^\mu(\pi, \sigma^2) \end{aligned} \tag{2.46}$$

と定義する[10]。さらに、$\pi \leq \mathrm{Re}(w) \leq 2\pi$ の範囲の $\psi^\mu, \tilde{\psi}^\mu$ を

$$-i\eta_2 \tilde{\psi}^\mu(\bar{w}) = \psi^\mu(2\pi - \bar{w}) \tag{2.47}$$

で定義すると、$\psi^\mu(2\pi, \sigma^2) = -i\eta_2 \tilde{\psi}^\mu(0, \sigma^2) = \frac{\eta^2}{\eta_1} \psi^\mu(0, \sigma^2)$ より、

$$R: \quad \text{for} \quad \eta_1 = \eta_2 \qquad , \qquad NS: \quad \text{for} \quad \eta_1 = -\eta_2 \tag{2.48}$$

と考えられる[11]。よって、モード展開は ψ^μ を R,NS それぞれの場合で式 (2.40) の左で展開したものである[12]。

---

[8] boundary で conformal 対称性が破れないための条件

[9] fermion なので、反交換 ($\psi\delta\psi = -\delta\psi\psi$) であることに注意。

[10] -1 倍で定義しているのは、良く知られている最終結果と合わせる為である。

[11] 後で boundary state を考えたいので $\sigma^1 = 0, \pi$ で対称に書いたが、$\eta_2 \tilde{\psi}^\mu \to \tilde{\psi}^\mu$ と再定義 (OPE を変えない) すると $\eta^2 = 1$ と置けるので有効な自由度は実は η_1 だけである。

[12] こう考えると、定義式 (2.46) でパラメータ η_1, η_2 に物理的解釈を与えていると考えられる。

D-D の場合

T-duality で Neumann boundary condition が Dirichlet boundary condition に変化することを用いる[13]。T-duality は right 成分のみ -1 倍するような変換と見ることも出来る。つまり

$$\psi^\mu(w) \overset{\text{T-dual}}{\to} \psi^\mu(w) \quad , \quad \tilde{\psi}^\mu(\bar{w}) \overset{\text{T-dual}}{\to} -\tilde{\psi}^\mu(\bar{w}) \tag{2.49}$$

ということである。式 (2.46),(2.47) は (2.49) で

$$\begin{aligned} \psi^\mu(0,\sigma^2) &= i\eta_1\tilde{\psi}^\mu(0,\sigma^2) \\ \psi^\mu(\pi,\sigma^2) &= i\eta_2\tilde{\psi}^\mu(\pi,\sigma^2) \\ i\eta_2\tilde{\psi}^\mu(\bar{w}) &= \psi^\mu(2\pi-\bar{w}) \end{aligned} \tag{2.50}$$

となることが分かる。今回も前と同様に

$$R: \quad \text{for} \quad \eta_1=\eta_2 \quad , \quad NS: \quad \text{for} \quad \eta_1=-\eta_2 \tag{2.51}$$

と定義すると[14]、$\psi^\mu(2\pi,\sigma^2) = i\eta_2\tilde{\psi}^\mu(0,\sigma^2) = \frac{\eta^2}{\eta_1}\psi^\mu(0,\sigma^2)$ より、より、$\psi^\mu(w)$ のモード展開は式 (2.40) の左に従う。

N-D,D-N の場合

N-N のうち、片方を D にすれば良いので、D にしたい方だけ境界条件を式 (2.46),(2.47) から変化させれば良い事が分かる。例えば D-N の場合は

$$\begin{aligned} \psi^\mu(0,\sigma^2) &= i\eta_1\tilde{\psi}^\mu(0,\sigma^2) \\ \psi^\mu(\pi,\sigma^2) &= -i\eta_2\tilde{\psi}^\mu(\pi,\sigma^2) \\ -i\eta_2\tilde{\psi}^\mu(\bar{w}) &= \psi^\mu(2\pi-\bar{w}) \end{aligned} \tag{2.52}$$

とすれば良く、N-D の場合は η_1 の代わりに η_2 の所の符号を-1 倍すれば良い。R と NS の定義は他の境界条件の場合と合わせるために、今までと同じ形の

$$R: \quad \text{for} \quad \eta_1=\eta_2 \quad , \quad NS: \quad \text{for} \quad \eta_1=-\eta_2 \tag{2.53}$$

とする。注意するべき点は今回の場合は $\psi^\mu(2\pi,\sigma^2) = -\frac{\eta^2}{\eta_1}\psi^\mu(0,\sigma^2)$ なので、$\psi^\mu(w)$ のモード展開 (2.40) が R と NS で逆になる (R が半整数モード ,NS が整数モードになる) ことである。

以上を踏まえて、ある 1 方向 μ の $\psi^\mu, \tilde{\psi}^\mu$ の boundary state を調べる。

ψ^μ の boudary state

前のセクションの話をまとめると、$\sigma^1=0$ の boundary condition は

$$\psi^\mu(w) = -i\Omega\eta_1\tilde{\psi}^\mu(w) \quad , \quad \mathrm{Re}(w)=0 \tag{2.54}$$

[13] T-duality の詳細は [27]Vol 1,sec 8 を参照。

[14] R や NS はそれぞれの方向で独立に決める事が出来ないので、境界条件に依らないように定義を合わせておく必要がある。

と書ける事が分かる。ただし、

$$\Omega = \begin{cases} 1 & \cdots \quad \text{Neumann} \\ -1 & \cdots \quad \text{Dirichlet} \end{cases} \tag{2.55}$$

である。2.1.1 にならって 1-loop (周期 T) amplitude を考えると、周期境界条件として

$$\begin{aligned} \psi^\mu(\sigma^1, 0) &= \eta_3 \psi^\mu(\sigma^1, T) \\ \tilde{\psi}^\mu(\sigma^1, 0) &= \eta_4 \tilde{\psi}^\mu(\sigma^1, T) \end{aligned} \tag{2.56}$$

が考えられる。ただし、$\eta_3, \eta_4 = \pm 1$ である[15]。しかし、

$$\begin{aligned} \psi^\mu(0,0) &= -i\Omega\eta_1 \tilde{\psi}^\mu(0,0) = -i\Omega\eta_1\eta_4 \tilde{\psi}^\mu(0,T) \\ \psi^\mu(0,0) &= \eta_3 \psi^\mu(0,T) = \eta_3(-i)\Omega\eta_1 \tilde{\psi}^\mu(0,T) \end{aligned} \tag{2.57}$$

から、$\eta_3 = \eta_4$ でないと consistent でない。よって、以下 $\eta_3 = \eta_4$ として考える。

$w' = iw$ と書き直して closed string の tree level と読み直すと

$$\begin{aligned} \psi^\mu(w) &= \left(\tfrac{\partial w'}{\partial w}\right)^{\frac{1}{2}} \psi^\mu(w') = \sqrt{i}\psi^\mu(w') \\ \tilde{\psi}^\mu(\bar{w}) &= \left(\tfrac{\partial \bar{w}'}{\partial \bar{w}}\right)^{\frac{1}{2}} \tilde{\psi}^\mu(\bar{w}') = \sqrt{-i}\tilde{\psi}^\mu(\bar{w}') \end{aligned} \tag{2.58}$$

より、式 (2.54),(2.56) は

$$\begin{aligned} \psi^\mu(w') = \Omega\eta_1 \tilde{\psi}^\mu(\bar{w}') \qquad , \quad \mathrm{Im}(w') = 0 \\ \psi^\mu(w') = \eta_3 \psi^\mu(w' + 2\pi) \\ \tilde{\psi}^\mu(\bar{w}') = \eta_3 \tilde{\psi}^\mu(\bar{w}' + 2\pi) \end{aligned} \tag{2.59}$$

となる[16]。ただし w' を適当に実数倍して[17]、2π 周期にした。式 (2.59) から分かるように、closed string の立場で見たときは R-R セクター ($\eta_3 = 1$) と NS-NS セクター ($\eta_3 = -1$) のみが存在する。つまり、boundary state は closed string のうち spacetime boson と couple することが分かる。

式 (2.59) に closed string のモード展開式 (2.40) を代入すると

$$i^{-\frac{1}{2}} \sum_{r \in \mathbf{Z}+\nu} \left(\psi^\mu_r - i\Omega\eta_1 \tilde{\psi}^\mu_{-r} \right) e^{irx} |B_\psi, \eta_1\rangle_{\Omega,\nu} = 0 \qquad \text{for} \quad {}^\forall x \ \in \ \mathbb{R} \tag{2.60}$$

となる。ただし、

$$\begin{aligned} \eta_3 &= 1 \qquad \cdots \quad R-R \qquad \cdots \quad \nu = 0 \\ \eta_3 &= -1 \qquad \cdots \quad NS-NS \quad \cdots \quad \nu = \tfrac{1}{2} \end{aligned} \tag{2.61}$$

という対応になっている。表記 $|B_\psi, \eta\rangle_{\Omega,\nu}$ は ψ に対する boundary state であるという事がはっきり分かるのだが、表記に無駄が多いのでこれを以下では $|\nu, \eta\rangle_\Omega$ と書く。また Ω, ν は場合によって N,D や R,NS と書くことがある。式 (2.60) は

$$\left(\psi^\mu_r - i\Omega\eta \tilde{\psi}^\mu_{-r} \right) |\nu, \eta\rangle_\Omega = 0 \qquad \text{for} \quad {}^\forall r \ \in \ \mathbf{Z} + \nu \tag{2.62}$$

[15] world sheet fermion を考えているためにこのような自由度が許される。X^μ の場合は boson なのでこのような自由度は無く、特に考慮に入れる必要が無かった。

[16] left と right で理論が対称なので、w'' を考えても同じ式になる。

[17] 前にも書いたように、この変換で式 (2.59) は不変。

となり、これが boundary state の条件である。式 (2.62) の解は、NS の場合

$$|NS,\eta\rangle_\Omega = C_\Omega \prod_{r=\frac{1}{2}}^{\infty} e^{i\eta\Omega\psi^\mu_{-r}\tilde{\psi}_{\mu,-r}}|0\rangle \tag{2.63}$$

となる。ただし C_Ω は規格化定数で、$|0\rangle$ は NS-NS の ground state である。

R の場合も同様に規格化定数 D_Ω を用いて

$$|R,\eta\rangle_\Omega = D_\Omega \prod_{m=1}^{\infty} e^{i\eta\Omega\psi^\mu_{-m}\tilde{\psi}_{\mu,-m}}|R,\eta\rangle^{(0)}_\Omega \tag{2.64}$$

と書けるが、R セクターには 0 モード $|R,\eta\rangle^{(0)}_\Omega$ があるので少し複雑になる。$|R,\eta\rangle^{(0)}_\Omega$ は

$$\left(\psi^\mu_0 - i\Omega\eta\tilde{\psi}^\mu_0\right)|R,\eta\rangle^{(0)}_\Omega = 0 \tag{2.65}$$

の解だが、具体形の導出は後のセクションに譲ることにする。

2.2 石橋 state と Cardy 条件を用いた boundary state の構成

前のセクションで boundary state の幾つかを具体的に構成したわけだが、毎回このような方法を行うのは面倒で、もっと形式的に取り扱えると楽である。そのような方法として、石橋 state [28] と Cardy 条件 [29] [18]を用いて構成する方法がある。特に、この方法は複雑な系 (曲がった空間等) の boundary state を考える際に非常に有用であるので、このセクションではこれを [30] にしたがって説明することにする。

2.2.1 Virasoro 代数

まず石橋 state を構築する上でも、このセクションのその後の話でも、Virasoro 代数が重要な役割を果たす。そこで Virasoro 代数の具体形をまとめておく事にする。

Flat な bosonic string の場合

まず 2.1 で考えた様な flat な空間上の、ある 1 方向 μ の X^μ に対する Virasoro 代数を考えよう。Closed string の場合

$$L^X_n = \frac{1}{2}\sum_{m\in\mathbf{Z}} \alpha^\mu_{-m}\alpha_{\mu,n+m} \quad \text{for} \quad n\neq 0 \qquad , \qquad L^X_0 = \frac{\alpha'}{4}p^\mu p_\mu + \sum_{n=1}^{\infty}\alpha^\mu_{-n}\alpha_{\mu,n} \tag{2.66}$$

$$\tilde{L}^X_n = \frac{1}{2}\sum_{m\in\mathbf{Z}} \tilde{\alpha}^\mu_{-m}\tilde{\alpha}_{\mu,n+m} \quad \text{for} \quad n\neq 0 \qquad , \qquad \tilde{L}^X_0 = \frac{\alpha'}{4}p^\mu p_\mu + \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{\alpha}^\mu_{-n}\tilde{\alpha}_{\mu,n} \tag{2.66'}$$

で与えられる。1 方向のみを考えているので、式 (2.66), (2.66') では μ で和を取らない事に注意。全方向分の Virasoro 代数を使いたい場合は、それぞれの方向で式 (2.66), (2.66') を考えてそれらを足せば良い。

[18]両者がどのようなものであるかは後述。

Open string の場合は、N-N,D-D の場合

$$N-N: \quad L_n^X = \frac{1}{2}\sum_{m\in\mathbf{Z}} \alpha^\mu_{-m}\alpha_{\mu,n+m} \quad \text{for} \quad n\neq 0 \quad , \quad L_0^X = \alpha' p^\mu p_\mu + \sum_{n=1}^{\infty}\alpha^\mu_{-n}\alpha_{\mu,n} \tag{2.67}$$

$$D-D: \quad L_n^X = \frac{1}{2}\sum_{m\in\mathbf{Z}} \alpha^\mu_{-m}\alpha_{\mu,n+m} \quad \text{for} \quad n\neq 0 \quad , \quad L_0^X = \frac{\Delta x^\mu \Delta x_\mu}{4\pi^2\alpha'} + \sum_{n=1}^{\infty}\alpha^\mu_{-n}\alpha_{\mu,n} \tag{2.68}$$

となっている。ただし、$\Delta x^\mu \equiv x^\mu - y^\mu$ である。今回も μ で和を取っていないことに注意。N-D や D-N の場合も書くことが出来るが、それは “一般の場合の Virasoro 代数” に回すことにする。

交換関係は closed , open の場合共に、

$$[L_m^X, L_n^X] = (m-n)L^X_{m+n} + \frac{c}{12}(m^3-m)\delta_{m,-n} \quad , \quad c=1 \tag{2.69}$$

$$[\tilde{L}_m^X, \tilde{L}_n^X] = (m-n)\tilde{L}^X_{m+n} + \frac{\tilde{c}}{12}(m^3-m)\delta_{m,-n} \quad , \quad \tilde{c}=1 \tag{2.69'}$$

となっている。$c, \tilde{c}$ は X^μ の central charge で今回は共に 1 となるが、一般の $c, \tilde{c}$ を持つ場に対する Virasoro 代数の交換関係も式 (2.69),(2.69') の形で書けるので、今後この式を流用する。

Flat な super string の場合

同様に flat な空間の super string の場合を考えると、X^μ に対する Virasoro 代数は前の結果と同じである。$\psi^\mu, \tilde{\psi}^\mu$ に対する Virasoro 代数は、closed string の場合、

$$L_n^\psi = \frac{1}{4}\sum_{r\in\mathbf{Z}+\nu}(n+2r)\psi^\mu_{-r}\psi_{\mu,r+n} \quad \text{for} \quad n\neq 0 \qquad , \qquad L_0^\psi = \sum_{r>0} r\psi^\mu_{-r}\psi_{\mu,r} + a_0 \tag{2.70}$$

$$\tilde{L}_n^\psi = \frac{1}{4}\sum_{r\in\mathbf{Z}+\tilde{\nu}}(n+2r)\tilde{\psi}^\mu_{-r}\tilde{\psi}_{\mu,r+n} \quad \text{for} \quad n\neq 0 \qquad , \qquad \tilde{L}_0^\psi = \sum_{r>0} r\tilde{\psi}^\mu_{-r}\tilde{\psi}_{\mu,r} + \tilde{a}_0 \tag{2.70'}$$

とまとめられる。ただし $a_0, \tilde{a}_0$ は、

$$R: \quad a_0 = \frac{1}{16} \qquad , \qquad NS: \quad a_0 = 0 \tag{2.71}$$

で、$\tilde{a}_0$ の場合も同じである。Open string の場合は 2.1.2 の通りに、それぞれの境界条件に対応する様に double trick を使って変域が 2π までの $\psi^\mu(w)$ を作り、それの周期性に対応した Virasoro 代数 (2.70) を考えればよい。例えば (間違えやすい例を挙げると)N-D なら R:半整数,NS:整数モードで展開といった具合である。もちろん a_0 の値は

$$\text{periodic}: \quad a_0 = \frac{1}{16} \qquad , \qquad \text{antiperiodic}: \quad a_0 = 0 \tag{2.72}$$

と考える。Virasoro 代数の交換関係は式 (2.69),(2.69') に $c = \tilde{c} = \frac{1}{2}$ を代入したものである。

a_0 の値を簡単に求める記憶法

L_0^X や L_0^ψ には定数 a_0 が入っているが、この a_0 を簡単に出すための記憶法がある。ここではそれを紹介する。

まず、world sheet boson に対して

$$\text{periodic boson}: \quad f_0 \equiv -\frac{1}{24} \qquad , \qquad \text{antiperiodic boson}: \quad f_0 \equiv \frac{1}{48} \tag{2.73}$$

と定義して、world sheet fermion に対して

$$\text{periodic fermion}: \quad f_0 \equiv \frac{1}{24} \qquad , \qquad \text{antiperiodic fermion}: \quad f_0 \equiv -\frac{1}{48} \tag{2.74}$$

と定義する。すると a_0 は central charge c を用いて

$$a_0 = f_0 + \frac{c}{24} \tag{2.75}$$

と求まる。Right の場合は c の代わりに $\tilde{c}$ とすれば良い。

例えば open string で N-N の場合 X^μ は periodic で c=1 なので、$a_0 = -\frac{1}{24} + \frac{1}{24} = 0$ で確かに式 (2.67) を再現しているし、ψ^μ は R の場合 periodic で $c = \frac{1}{2}$ なので、$a_0 = \frac{1}{24} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{24} = \frac{1}{16}$ となりこれも良い。

一般の場合の Virasoro 代数

一般の場 A に対する Virasoro 代数も式 (2.69) の交換関係を持つ代数として定義できるというのは前にも書いた通りであるが、菅原 construction([27],Vol2, sec 11.5 参照) を用いて具体的に構築出来る場合がある。以下 left の場合で話をするが、right の場合も全く同様である。

まず A を適当に組み合わせて conformal weight (1,0) の current J^a を作る。そしてこの J^a をモード展開した時、その交換関係が

$$[J^a_m, J^b_n] = m\hat{k}d^{ab}\delta_{m,-n} + if^{ab}{}_c J^c_{m+n} \tag{2.76}$$

であるとする。ただし m,n は整数で、$f^{ab}{}_c$ はある群 G(generator 間の内積が d^{ab} で、根の最大長が ψ) の構造定数である[19]。$k = \frac{2\hat{k}}{\psi^2}$ は正の整数で level と呼ばれ、この時、式 (2.76) を level k の G current 代数 (又は affine Lie 代数) と呼ぶ。一般性を持たせるため式 (2.76) の様な形で書いたが、通常 $d^{ab} = \delta^{ab}, \psi^2 = 2$ のセットアップで話をするのでその時は $k = \hat{k}$ となっていて level が見やすい。

この J^a_m を用いて Virasoro 代数 L_n は次の様に書ける。

$$L_n = \frac{1}{(k+h(G))\psi^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J^a_m J^a_{n-m} \quad \text{for} \quad n \neq 0 \tag{2.77}$$

$$L_0 = \frac{1}{(k+h(G))\psi^2} \left(J^a_0 J^a_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} J^a_{-n} J^a_n \right) \tag{2.77'}$$

ただし a で和を取っている。また、h(G) は

$$f^{ac}{}_d f^{bd}{}_c = -h(G)\psi^2 d^{ab} \tag{2.78}$$

で与えられる。式 (2.77) で作られた Virasoro 代数は central charge

$$c = \frac{k\dim(G)}{k+h(G)} \tag{2.79}$$

[19]式 (2.76) から分かる様に、current J^a が整数モードで展開出来ないとこの話は使えない。

の交換関係を満たしている。群が symply-laced [20]の時は $h(G)+1=\dim(G)/\mathrm{rank}(G)$ より、式 (2.79) は

$$c=\frac{k\dim(G)\mathrm{rank}(G)}{\dim(G)+(k-1)\mathrm{rank}(G)} \tag{2.80}$$

と書き直せる。

具体例として、c=1 の free boson $X(w,\bar{w})(\mu\neq 0$ の 1 方向) を見てみよう。$J^a(w)$ を

$$J(w)=i\left(\frac{2}{\alpha'}\right)^{\frac{1}{2}}\partial X(w) \tag{2.81}$$

とすると、$\partial X(w)$ が periodic の時は上の話が使える。その時は $J_m=\alpha_m$ となって、交換関係 (2.10) より level 1 の U(1) current 代数となっている[21]。$k\psi^2=2\hat{k}=2$ を式 (2.77),(2.77') に代入すると確かに式 (2.66) を再現する。また、式 (2.79) に $\dim(\mathrm{U}(1))=1$ を代入すると c=1 も再現される。Antiperiodic boson(N-D の X^μ 等) の場合は $J(w+2\pi)=-J(w)$ となってしまうのでこの話は使えない。このように、twist された場に対しては twisted affine Lie 代数 (式 (2.76) の分数モード版) を用いて話をするのだが、今回はその話は割愛する。

最後に、後の話で L_0 の具体形が必要なのでそれを書くと、場 A に対する L_0^A は

$$L_0^A=0\text{ モード (運動量や }\Delta x\text{ のエネルギー項)}+\sum_{r>0}rN_r+a_0^A \tag{2.82}$$

の形で書ける。ただし N_r は A のモード展開 A_s のうち、A_{-r} $(r>0)$ の数を数える number operator である。

例えば open string で N-D や D-N の X^μ は antiperiodic boson なので $a_0=\frac{1}{48}+\frac{1}{24}=\frac{1}{16}$ となり、

$$L_0^X=\sum_{r=\frac{1}{2}}^{\infty}rN_r+\frac{1}{16} \tag{2.83}$$

と書ける[22]。

2.2.2 石橋 state

さて 2.1.2 で述べたように、consistent な境界条件は boundary で conformal 対称性を破らないという事だった。そのため、その条件は boundary state の言葉では Virasoro 代数を用いて

$$\left(L_n^A-\tilde{L}_{-n}^A\right)|B\rangle=0\qquad,\quad\text{for}\quad{}^\forall n\ \in\ \mathbf{Z} \tag{2.84}$$

と書ける事がわかる。しかし式 (2.84) をそのまま解くのは困難なので、これをもっと簡単な十分条件に置き換えることを考える。これは boundary state 全体のうち、ある特徴を持った一部分を考える事に相当する。これも具体例で説明する。

[20]Dinkin diagram が 1 本で繋がっているという事。

[21]U(1) の場合構造定数が 0 なので level がうまく定義出来ない。なので、$\hat{k}=1$ となるように調節しておいて、それを level 1 と呼ぶ。

[22]N-D や D-N のモード展開式 (2.24),(2.25) から分かるように運動量も Δx も存在しないので、0 モードのエネルギー項は無い

例えば free boson X^μ の場合、boundary state condition (2.31), (2.34) をまとめると

$$(\alpha^\mu_m - \Omega\tilde{\alpha}^\mu_{-m})\,|B_X\rangle_\Omega = 0 \quad {}^\forall m \ \in \ \mathbf{Z} \quad , \quad \Omega = \begin{cases} 1 & \text{for Neumann} \\ -1 & \text{for Dirichlet} \end{cases} \tag{2.85}$$

と書けるわけだが、式 (2.66),(2.66') を踏まえると式 (2.85) を満たす $|B_X\rangle_\Omega$ は自動的に式 (2.84) を満たすので、consistent な boundary state の 1 部 (Neumann と Dirichlet) を求める方程式になっているといった具合である。

同様に free fermion ψ^μ に対しても式 (2.62) は

$$\left(\psi^\mu_r - i\Omega\eta\tilde{\psi}^\mu_{-r}\right)|\nu,\eta\rangle_\Omega = 0 \qquad \text{for} \quad {}^\forall r \ \in \ \mathbf{Z}+\nu \tag{2.86}$$

だった訳だが、これも式 (2.70),(2.70') を踏まえると自動的に式 (2.84) を満たす。

一般形は W の代数を $\mathcal{A}_L$,$\tilde{W}$ の代数を $\mathcal{A}_R$ とした時、

$$\left(W_r - (-1)^s\Omega\tilde{W}_{-r}\right)|B_W\rangle = 0 \tag{2.87}$$

で与えられる。ただし、Ω は $\mathcal{A}_L$ と $\mathcal{A}_R$ の間の automorphism [23]で s は W のスピン [24]である。式 (2.87) は "貼り合わせの条件" とも呼ばれていて、確かに s=1 の場合式 (2.85) となり、$s=\frac{1}{2}$ の場合は $(-1)^{\frac{1}{2}} = \pm i$ より (2.86) となる。W は別に場でなくても構わない。例えば current 代数 J^a は $s=1$ なので、

$$\left(J^a_n + \Omega\tilde{J}^a_{-n}\right)|B_J\rangle = 0 \tag{2.88}$$

を条件とした boundary state を考える事が出来る。ということで、式 (2.87) の解を考えてみよう。

まず W が $\mathcal{A}_L$ の表現 j に属しているとして、その highest weight state を $|j;0\rangle$ とする。次に状態を $\prod_I W_{-n_I}|j;0\rangle$ で構成して、完全系 $|j;N\rangle$ を作る。同様にして $\tilde{W}$ でも $\widetilde{|j;N\rangle}$ を構成する[25]。

表現 j の石橋 state $|j\rangle\!\rangle$ は

$$|j\rangle\!\rangle \equiv \sum_N |j;N\rangle \otimes \Omega U\widetilde{|j;N\rangle} \tag{2.89}$$

で与えられる。ただし U は

$$U\widetilde{|j;0\rangle} = \widetilde{|j;0\rangle}^* \qquad , \qquad U\tilde{W}_{-n_I}U^{-1} = (-1)^s\tilde{W}_{-n_I} \tag{2.90}$$

とするような anti-unitary operator [26]である。すると、$|j\rangle\!\rangle$ は式 (2.87) の解となっている事が分かる [28]。

---

[23]訳すと自己同型写像。つまり K, K' を体として全単射 $K \to K'$ を考えた時、K' が K 自身となるような写像の事である。確かに Neumann($\Omega=1$) や Dirichlet($\Omega=-1$) はそうなっていて、それを一般化した形になっている。

[24]今回の場合は W の conformal weight と言い換えても良い。

[25]$\mathcal{A}_L$ と $\mathcal{A}_R$ は automorphism で繋がっているので $\tilde{W}$ は W と同じ表現 j に入っている。

[26]$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ として $U(\alpha\Phi+\beta\Psi) = \alpha^* U\Phi + \beta^* U\Psi$ を満たし (そのため線型演算子でない)、内積が $(U\Phi, U\Psi) = (\Phi,\Psi)^*$ となる operator の事。詳しくは [31]Vol 1 , sec 2 参照のこと。

少し話が抽象的になって分かり難くなったので、具体例を挙げる。Free boson X^μ の Dirichlet boundary state の場合、式 (2.35) を Taylor 展開すると、定数倍を無視して

$$|k^\mu\rangle\!\rangle_D = \prod_m \left[\sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{N!}} \left(\frac{\alpha^\mu_{-m}}{\sqrt{m}} \right)^N |0;k^\mu\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{N!}} \left(\frac{\tilde{\alpha}_{\mu,-m}}{\sqrt{m}} \right)^N |0;k^\mu\rangle \right] \tag{2.91}$$

と書き直せる。ただし $|k^\mu\rangle\!\rangle_D$ は、$\delta(x^\mu - y^\mu)$ のうち運動量が k^μ のモードを考えていて、$|0;k^\mu\rangle$ は運動量が k^μ の ground state である。式 (2.91) において

$$|k^\mu;N\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \prod_m \left(\frac{\alpha^\mu_m}{\sqrt{m}} \right)^N |0;k^\mu\rangle \tag{2.92}$$

は確かに完全系をなしていて[27]、Ω と U の作用が

$$\Omega\tilde{\alpha}^\mu_{-m}\Omega^{-1} = -\tilde{\alpha}^\mu_{-m} \quad , \quad U\tilde{\alpha}^\mu_{-m}U^{-1} = -\tilde{\alpha}^\mu_{-m} \tag{2.93}$$

となっている事を踏まえると、確かに $|k^\mu\rangle\!\rangle_D$ は式 (2.89) の形になっている。

2.2.3 Cardy 条件

石橋 state を用いる事で conformal 対称性を破らない boundary state を求める事が出来たわけだが、実はこれだけでは string 理論として正しい boundary state にはならない。ここではその理由と、正しい boundary state のための条件 (Cardy 条件)[29] を説明する。

Open-closed 対応

String で cylinder amplitude を考えた時 open string の 1-loop とも closed string の tree とも見れるというのは何度も書いている通りだが、Weyl 対称性から図 2.2 の対応となっている。

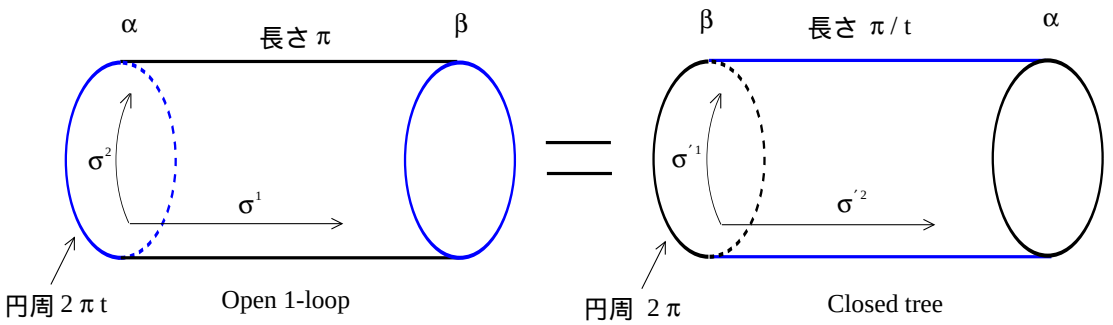

図 2.2: Open-closed 対応

これを式で書くと次の通りである。まず open string の Hamiltonian を H として、Virasoro character $\chi_a(q)$ を

$$\chi_a(q) \equiv Tr_a q^H = Tr_a q^{L_0 - \frac{c}{24}} \quad , \quad q \equiv e^{2\pi i\tau} \quad , \quad \tau \equiv it \tag{2.94}$$

[27] $|k^\mu;N\rangle$ と $|0;k^\mu\rangle$ を混同しないように注意。

と定義する。様々なケースでの $\chi_a(q)$ の値は付録 B にまとめてある。$\chi_a(q)$ を用いると $\alpha(0)-\beta(\pi)$ 型の境界条件を持つ $2\pi t$ 周期の open 1-loop amplitude (図 2.2 左)$Z_{\alpha\beta}$ は次のように書ける。

$$Z_{\alpha\beta} = \sum_a n^a_{\alpha\beta}\chi_a(q) \tag{2.95}$$

ここで $n^a_{\alpha\beta}$ は 0 以上の整数で、1-loop amplitude 中に表現 a のモードが出てくる回数 (multiplicities) である。$q = e^{-2\pi t}$ とも書けるので、$2\pi t$ 周期である事をちゃんと踏まえている事に注意しよう。

次にこれは boundary state $|\beta\rangle$ から $|\alpha\rangle$ へ長さ $\frac{\pi}{t}$ だけ伝播している closed tree amplitude (図 2.2 右) とも見る事が出来るので

$$Z_{\alpha\beta} = \langle\alpha|\tilde{q}^{\frac{1}{2}(L_0+\tilde{L}_0-\frac{c}{12})}|\beta\rangle \qquad , \qquad \tilde{q} \equiv e^{-\frac{2\pi i}{\tau}} = e^{-\frac{2\pi}{t}} \tag{2.96}$$

とも書ける。Closed string の Hamiltonian H は

$$H = L_0 + \tilde{L}_0 - \frac{c+\tilde{c}}{24} = L_0 + \tilde{L}_0 - \frac{c}{12} \tag{2.97}$$

と書けるので、closed string が長さ $\frac{\pi}{t}$ だけ伝播する様子が再現できている。

注意するべき性質として、$Z_{\alpha\beta} = Z_{\beta\alpha}$ つまり

$$\langle\alpha|\tilde{q}^{\frac{1}{2}(L_0+\tilde{L}_0-\frac{c}{12})}|\beta\rangle = \langle\beta|\tilde{q}^{\frac{1}{2}(L_0+\tilde{L}_0-\frac{c}{12})}|\alpha\rangle \tag{2.98}$$

がある。これは図 2.2 右で σ'^1 の向きを決めた後に σ'^2 の向きを逆にしても結果が同じことを意味しているが、left と right で対称な理論を考えているので p.10 の脚注 4 で書いたことと同様の理由から確かにそのようになっている。

このように α と β の入れ替えに対して $Z_{\alpha\beta}$ は対称なので、対応する closed tree amplitude でどちらを始状態とするかは好きに決めてよく、図 2.2 右の様に座標を張った理由は式 (2.96) で右辺の α, β が逆になるのが嫌だった程度である。

Cardy 条件

さて、boundary state $|\alpha\rangle$ を石橋 state $|j\rangle\!\rangle$ を用いて

$$|\alpha\rangle = \sum_j B^j_\alpha |j\rangle\!\rangle \tag{2.99}$$

と書こう。ただし B^j_α は適当な複素数とする。すると、式 (2.96) は

$$Z_{\alpha\beta} = \sum_j \left(B^j_\alpha\right)^* B^j_\beta \chi_j(\tilde{q}) \tag{2.100}$$

と書き直せる。ただし、石橋 state の直交関係

$$\langle\!\langle j|\tilde{q}^{\frac{1}{2}(L_0+\tilde{L}_0-\frac{c}{12})}|j\rangle\!\rangle \equiv \chi_j(\tilde{q}) \tag{2.101}$$

$$\langle\!\langle j'|\tilde{q}^{\frac{1}{2}(L_0+\tilde{L}_0-\frac{c}{12})}|j\rangle\!\rangle = 0 \qquad \text{for} \quad j' \neq j \tag{2.102}$$

の性質を用いた。$\chi_j(\tilde{q})$ は石橋 character と呼ばれている。

さて、S-matrix S_a^j を

$$\chi_a(q) \equiv \sum_j S_a^j \chi_j(\tilde{q}) \tag{2.103}$$

と定義すると、式 (2.95) は

$$Z_{\alpha\beta} = \sum_{a,j} n_{\alpha\beta}^a S_a^j \chi_j(\tilde{q}) \tag{2.104}$$

と書き直せる。式 (2.100) と比較すると、

$$\sum_a S_a^j n_{\alpha\beta}^a = \left(B_\alpha^j\right)^* B_\beta^j \tag{2.105}$$

を満たしている必要があることが分かり、この式は “Cardy 条件” と呼ばれている。注意するべき点は、Cardy 条件の左辺の $n_{\alpha\beta}^a$ が 0 以上の整数だという事である。そのため Cardy 条件を満たすある B_α^j の組を適当に実数倍した時、それは一般的には Cardy 条件を満たさない (対応する $n_{\alpha\beta}^a$ が無い)[28]。整数倍なら Cardy 条件を満たすことも踏まえると、これは boundary state が soliton 的 (1 個 2 個と数えられる) であることを示唆している。

2.2.4 Cardy の解

では Cardy 条件 (2.105) を満たす B_α^j を求めて string 理論に現れる boundary state を求めてみよう。

(1) まず $n_{00}^a = \delta_0^a$ の時、boundary state $|0\rangle$ を

$$Z_{00} = \chi_0(q) \equiv \langle 0|\tilde{q}^{\frac{1}{2}(L_0+\tilde{L}_0-\frac{c}{12})}|0\rangle \qquad , \qquad |0\rangle = \sum_j B_0^j |j\rangle\!\rangle \tag{2.106}$$

と定義すると、Cardy 条件 (2.105) から

$$S_0^j = |B_0^j|^2 \quad \Rightarrow \quad B_0^j \equiv \sqrt{S_0^j} \quad \Rightarrow \quad |0\rangle = \sum_j \sqrt{S_0^j}|j\rangle\!\rangle \tag{2.107}$$

と $|0\rangle$ が求まる[29]。

(2) 次に $n_{0\alpha}^a = \delta_\alpha^a$ の時、boundary state $|\alpha\rangle$ を

$$Z_{0\alpha} = \chi_\alpha(q) \equiv \langle 0|\tilde{q}^{\frac{1}{2}(L_0+\tilde{L}_0-\frac{c}{12})}|\alpha\rangle \qquad , \qquad |\alpha\rangle = \sum_j B_\alpha^j |j\rangle\!\rangle \tag{2.108}$$

と定義すると、これも Cardy 条件から

$$S_\alpha^j = \sqrt{S_0^j} B_\alpha^j \quad \Rightarrow \quad B_\alpha^j = \frac{S_\alpha^j}{\sqrt{S_0^j}} \quad \Rightarrow \quad |\alpha\rangle = \sum_j \frac{S_\alpha^j}{\sqrt{S_0^j}}|j\rangle\!\rangle \tag{2.109}$$

と求まる[30]。

[28] S_a^j は石橋 state を決めると一意的に決まる。

[29] 一般的に S_0^j は正なので、矛盾は無い。

[30] ただし、$B_0^j = \sqrt{S_0^j} \in \mathbb{R}$ を用いた

Verlinde の公式との対応

以上で求めた $|\alpha\rangle$ を使って、$|\alpha\rangle, |\beta\rangle$ 間の amplitude $Z_{\alpha\beta}$ を

$$\langle\alpha|\tilde{q}^{\frac{1}{2}(L_0+\tilde{L}_0-\frac{c}{12})}|\beta\rangle \equiv Z_{\alpha\beta} = \sum_a n^a_{\alpha\beta}\chi_a(q) \tag{2.110}$$

と求めた時の $n^a_{\alpha\beta}$ がどう与えられるか考えてみよう。Cardy 条件 (2.105) に式 (2.109) で求めた B^j_α を代入すると、

$$\sum_a S^j_a n^a_{\alpha\beta} = \frac{(S^j_\alpha)^* S^j_\beta}{S^j_0} \tag{2.111}$$

より、$n^a_{\alpha\beta}$ は

$$n^a_{\alpha\beta} = \sum_j \frac{(S^j_\alpha)^* S^j_\beta (S^{-1})^a_j}{S^j_0} \qquad , \qquad \sum_j (S^{-1})^b_j S^j_a = \delta^b_a \tag{2.112}$$

と求められる。

さて $|\alpha\rangle$ が表現 D_α である時、$\langle\alpha|$ は表現 $\bar{D}_\alpha$ なので式 (2.110) は

$$\bar{D}_\alpha \otimes D_\beta = \sum_a n^a_{\alpha\beta} D_a \tag{2.113}$$

の fusion をしている事に相当していて、その時 $n^a_{\alpha\beta}$ は fusion 係数と解釈出来る。

実際 $D_\alpha \otimes D_\beta = \sum_a n'^a_{\alpha\beta} D_a$ の fusion を考えた時の fusion 係数 $n'^a_{\beta\alpha}$ は Verlinde の公式

$$n'^a_{\alpha\beta} = \sum_j \frac{S^j_\alpha S^j_\beta (S^{-1})^a_j}{S^j_0} \tag{2.114}$$

で書けるが、これは $S^j_\alpha \to (S^j_\alpha)^*$ で式 (2.112) の $n^a_{\alpha\beta}$ となるので確かにその通りになっている。

2.2.5 Flat な空間の D-brane

Cardy の解の具体例として flat な空間の D-brane に対応した boundary state を構成してみよう。まず、bosonic string の場合を考えよう。

Bosonic D-brane

考えている 1 方向を半径 R にコンパクト化して考えて、後で $R \to \infty$ とする。コンパクト化しているので、

$$\hat{p} = (\alpha_0 + \tilde{\alpha}_0)/\sqrt{2\alpha'} \quad , \quad \hat{w} = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}(\alpha_0 - \tilde{\alpha}_0)/R \tag{2.115}$$

のように運動量の他に winding number $\hat{w}$ も現れる[31]。$n, w \in \mathbf{Z}$ として状態 $|(n,w)\rangle$ を

$$\hat{p}|(n,w)\rangle = \frac{n}{R}|(n,w)\rangle \qquad , \qquad \hat{w}|(n,w)\rangle = w|(n,w)\rangle \tag{2.116}$$

と定義しておく。

[31] 1 方向のみを考えているので足 μ は省略した

Dirichlet boundary state

以上のセッティングで、Dirichlet の石橋 state から Dirichlet の boundary stete を構成してみよう。まず、Dirichlet の場合の石橋 state は式 (2.91) の様に

$$|(n,0)\rangle\!\rangle_D = \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\alpha_{-m}\tilde{\alpha}_{-m}\right)|(n,0)\rangle \tag{2.117}$$

で与えられる。すると石橋 character $\chi_{D,n}(\tilde{q})$ は式 (2.101) より

$$\chi_{D,n}(\tilde{q}) = \langle\!\langle(n,0)|_D\tilde{q}^{\frac{1}{2}(L_0+\tilde{L}_0-\frac{c}{12})}|(n,0)\rangle\!\rangle_D = \frac{\tilde{q}^{\frac{\alpha' n^2}{4R^2}}}{\eta(\tilde{q})} \tag{2.118}$$

と計算できる。この計算は B.2.2 にまとめてある。また η 関数の定義は C.1 を参照して欲しい。

次に Δx だけ離れている D-D 間の Virasoro character は式 (B.17) より

$$\chi(q)_{D,\Delta x} = \sum_{w=-\infty}^{\infty}\frac{q^{\frac{(2\pi Rw+\Delta x)^2}{4\pi^2\alpha'}}}{\eta(q)} \tag{2.119}$$

と書ける[32]。ただし、$\frac{(2\pi Rw+\Delta x)^2}{4\pi^2\alpha'}$ は L_0 の 0 モード (2.82 参照) に対応している。式 (2.68) の L_0 の 0 モードと同じ形をしているが、今回はコンパクト化しているので winding number が w の時 $2\pi Rw$ だけ effective な Δx が増えている。Poisson resummation formula (C.45) と η 関数の S 変換 (C.26) を使って式 (2.119) を書き直すと

$$\chi(q)_{D,\Delta x} = \sum_{w=-\infty}^{\infty}\frac{q^{\frac{(2\pi Rw+\Delta x)^2}{4\pi^2\alpha'}}}{\eta(q)} = \frac{\sqrt{\alpha'}}{\sqrt{2}R}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{i\Delta x\frac{n}{R}}\frac{\tilde{q}^{\frac{\alpha' n^2}{4R^2}}}{\eta(\tilde{q})} = \frac{\sqrt{\alpha'}}{\sqrt{2}R}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{i\Delta x\frac{n}{R}}\chi_{D,n}(\tilde{q}) \tag{2.120}$$

となっているので、式 (2.103) と照らし合わせて S-matrix を読み取ると

$$S_x^n = \frac{\sqrt{\alpha'}}{\sqrt{2}R}e^{ix\frac{n}{R}} \tag{2.121}$$

と分かる。よって 2.2.4 の話より boundary state $|x\rangle_D$ を

$$|x\rangle_D = \left(\frac{\sqrt{\alpha'}}{\sqrt{2}R}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{ix\frac{n}{R}}|(n,0)\rangle\!\rangle_D \tag{2.122}$$

と構成出来る。Amplitude を計算してみると

$$\langle x|_D q^{\frac{1}{2}(L_0+\tilde{L}_0-\frac{c}{12})}|y\rangle_D = \chi(q)_{D,x-y} \tag{2.123}$$

より[33]、ラベル x は Dirichlet boundary の位置と解釈出来る。最後に式 (2.122) で $R\to\infty$ の極限を取ると、$\frac{n}{R}=k$(運動量) を踏まえて

$$|y\rangle_D \sim \int \mathrm{d}k e^{iky}|k\rangle\!\rangle_D \sim \delta(\hat{x}-y)|0\rangle\!\rangle_D \tag{2.124}$$

となるので、確かに式 (2.35) の形をしている事が分かる。

[32] このように $\chi(q)_{D,\Delta x}$ は両端の位置 x,y ではなくその差 Δx に依っているので、Δx を a として $\chi_a(q)$ に対応させる。

[33] 式 (2.123) の右辺はそのまま計算すると $\chi(q)_{D,y-x}$ だが、x と y を入れ替えても値を変えないので直感的に理解しやすい形にした。すると fusion rule は $\bar{D}_x\otimes D_y = D_{x-y}$ と読み取れる。

Neumann boundary state

同様の話をNeumannの場合でやってみよう。まずDirichlet境界条件のT-dualがNeumannである事を踏まえると、石橋stateが

$$|(0,w)\rangle\!\rangle_N = \exp\left(-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\alpha_{-m}\tilde{\alpha}_{-m}\right)|(0,w)\rangle \tag{2.125}$$

と書けることが分かる[34]。よって、石橋characterは

$$\chi_{N,w}(\tilde{q}) = \langle\!\langle(0,w)|_N\tilde{q}^{\frac{1}{2}(L_0+\tilde{L}_0-\frac{c}{12})}|(0,w)\rangle\!\rangle_N = \frac{\tilde{q}^{\frac{R^2w^2}{4\alpha'}}}{\eta(\tilde{q})} \tag{2.126}$$

と計算できる。これも計算はB.2.2にまとめておいた。

次にN-N間のVirasoro characterは、Wilson line θをラベルとして[35]

$$\chi(q)_{N,\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{q^{\left(\frac{n}{R}-\frac{\theta}{2\pi R}\right)^2}}{\eta(q)} \tag{2.127}$$

で与えられる[36]。ただし$0 \le \theta < 2\pi$である。式(2.127)も前と同様にPoisson resummation formula等を使って書き直すと

$$\chi(q)_{N,\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{q^{\left(\frac{n}{R}-\frac{\theta}{2\pi R}\right)^2}}{\eta(q)} = \frac{R}{\sqrt{2\alpha'}}\sum_{w=-\infty}^{\infty}e^{i\theta w}\frac{\tilde{q}^{\frac{R^2w^2}{4\alpha'}}}{\eta(\tilde{q})} = \frac{R}{\sqrt{2\alpha'}}\sum_{w=-\infty}^{\infty}e^{i\theta w}\chi_{N,w}(\tilde{q}) \tag{2.128}$$

となるので、S-matrixは

$$S_\theta^w = \frac{R}{\sqrt{2\alpha'}}e^{i\theta w} \tag{2.129}$$

と分かり、boundary state $|\theta\rangle_N$は

$$|\theta\rangle_N = \left(\frac{R}{\sqrt{2\alpha'}}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{w=-\infty}^{\infty}e^{i\theta w}|(0,w)\rangle\!\rangle_N \tag{2.130}$$

と構成できる事が分かる。

最後に、式(2.130)の$R\to\infty$の極限を考えよう。この極限では$\frac{\theta}{2\pi R}\to 0$なので、式(2.127)中の$\theta$のラベルの意味が無くなる。ということで、$R\to\infty$ではWilson lineを考えず$\theta=0$のみを考えればよい。また$R\to\infty$でwinding number $w\neq 0$のモードもdecoupleすることも踏まえると、Neumann boundary stateは

$$|0\rangle_N \sim |(0,0)\rangle\!\rangle_N \sim \exp\left(-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\alpha_{-m}\tilde{\alpha}_{-m}\right)|0;k=0\rangle \tag{2.131}$$

となり、確かに式(2.32)を再現する。

[34] Ωを$-1\to 1$とした事で$\alpha_{-n}\tilde{\alpha}_{-n}$の係数が-1倍となり、T-dualで$n$と$w$が入れ替わるので。

[35] Dirichletの場合のΔxはWilson line θのT-dualから来ている事から、これが妥当であると理解できる。

[36] Wilson lineによるゲージ場$A_\theta = \frac{\theta}{2\pi R}$のため運動量が$\frac{n}{R}\to\frac{n}{R}-\frac{\theta}{2\pi R}$となり、これで$L_0$の0モードを計算する必要がある。

Dp-brane の係数の決定

d 次元の string 理論の bosonic Dp-brane の boundary state は Numann 方向を $\alpha = 0, 1, \cdots, p$ として、Dirichlet 方向を $i = p+1, \cdots, d-1$ とすると N_p を定数として

$$|B_{X,p}\rangle = N_p \delta^{d-p-1}(\hat{x}^i - y^i) \exp(-\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \alpha_{-m}^{\mu} S_{\mu}{}^{\nu} \tilde{\alpha}_{\nu,-m}) |0;0\rangle \tag{2.132}$$

で与えられる[37]。ただし、$S_{\mu}{}^{\nu}$ は

$$S_{\mu\nu} \equiv (\eta_{\alpha\beta}, -\delta_{ij}) \qquad , \qquad \eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, 1, \cdots, 1) \tag{2.133}$$

で定義される。式 (2.132) の定数 N_p を決める事がこのセクションの目的である。[26] では式 (2.132) の形のまま open-closed 対応を計算して N_p を決めているが、せっかくコンパクト化半径 R の時の boundary state を係数も含めて求めたのでそれを使って N_p を求めよう。実際こちらの方法のほうが計算が楽な上に、それぞれの項の役割がはっきりと分かる。

簡単のためコンパクト化半径がどの方向も R であるとすると、Dp-brane の boundary stete は式 (2.122),(2.130) より、$\ell \equiv p+1$ として

$$|B_{X,p}\rangle_c = \left(\frac{R}{\sqrt{2\alpha'}}\right)^{\frac{\ell}{2}} \left(\frac{\sqrt{\alpha'}}{\sqrt{2}R}\right)^{\frac{d-\ell}{2}} \sum_{\mathbf{n} \in \Gamma} e^{i\mathbf{y}\cdot\frac{\mathbf{n}}{R}} |(\mathbf{n},0)\rangle\!\rangle_D |(0,0)\rangle\!\rangle_N \tag{2.134}$$

となっている[38]。ただし $\mathbf{y}, \mathbf{n}$ は $d-\ell$ 次元の vector で、Γ は $\mathbf{n}$ の成分が全て整数となるような格子である。また、後で $R \to \infty$ とした時 θ, w の効果は無視できるので両方 0 とした。

$$\frac{n}{R} = k \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{d}n = R\,\mathrm{d}k \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{d}^{d-\ell}n = R^{d-\ell}\,\mathrm{d}^{d-\ell}k \tag{2.135}$$

を踏まえると、式 (2.134) は $R \to \infty$ で

$$\begin{aligned}
|B_{X,p}\rangle_c &= R^{\frac{d}{2}} \left(\sqrt{\alpha'}\right)^{\frac{d}{2}-\ell} 2^{-\frac{d}{4}} \int \mathrm{d}^{d-\ell}k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}} |(\mathbf{k},0)\rangle\!\rangle_D |(0,0)\rangle\!\rangle_N \\
&= R^{\frac{d}{2}} \left(\sqrt{\alpha'}\right)^{\frac{d}{2}-\ell} 2^{-\frac{d}{4}} (2\pi)^{d-\ell} \delta^{d-\ell}(\hat{x}^i - y^i) |(0,0)\rangle\!\rangle_D |(0,0)\rangle\!\rangle_N \\
&= (2\pi)^{\frac{d}{2}-\ell} 2^{-\frac{d}{4}} \left(\sqrt{\alpha'}\right)^{\frac{d}{2}-\ell} \delta^{d-\ell}(\hat{x}^i - y^i) (2\pi R)^{\frac{d}{2}} |(0,0)\rangle\!\rangle_D |(0,0)\rangle\!\rangle_N \\
&= \underbrace{(2\pi)^{\frac{d}{2}-\ell} 2^{-\frac{d}{4}} \left(\sqrt{\alpha'}\right)^{\frac{d}{2}-\ell}}_{N'_p} \delta^{d-\ell}(\hat{x}^i - y^i) \exp(-\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \alpha_{-m}^{\mu} S_{\mu}{}^{\nu} \tilde{\alpha}_{\nu,-m}) |0;0\rangle
\end{aligned} \tag{2.136}$$

となる。ただし最後の等号は R 有限と無限大での規格化の差

$$|0;0\rangle = \sqrt{2\pi R} |(0,0)\rangle \tag{2.137}$$

から来ている。以上より、$|B_{X,p}\rangle_c$ の規格化定数 N'_p は

$$N'_p = (2\pi)^{\frac{d}{2}-\ell} 2^{-\frac{d}{4}} \left(\sqrt{\alpha'}\right)^{\frac{d}{2}-\ell} \tag{2.138}$$

[37] Bosonic string なので d=26 だが、後で super string (d=10) の場合にも流用したいので d と書いておく。

[38] 時間方向 ($\mu = 0$) もコンパクト化するのは奇妙だが、計算の便宜上の話なので我慢してもらいたい。又、Cardy の解で作ったので添え字 c を付けた。

と求まった。しかし $|B_{X,p}\rangle$ と $|B_{X,p}\rangle_c$ は定義が若干違うので[39]、実は $N_p \neq N'_p$ である。では具体的にどこが違うかを説明しよう。

まず、本来 open-closed 対応は cylinder の modulous で積分した total の amplitude でついているべきものである。Open 1-loop の modulous t の積分と closed tree の modulous $s = \pi/t$ の積分の対応は、

$$\mathrm{d}s = -\pi \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \qquad \Rightarrow \qquad \int_0^\infty \mathrm{d}s = \pi \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \tag{2.139}$$

となっている。次に、closed string の propagator は

$$\Delta = \frac{\alpha'}{2} \int_0^\infty \mathrm{d}s e^{-s(L_0 + \tilde{L}_0 - \frac{c}{12})} = \frac{\alpha'}{2} \int_0^\infty \mathrm{d}s \tilde{q}^{\frac{1}{2}(L_0 + \tilde{L}_0 - \frac{c}{12})} \tag{2.140}$$

となっている[40]。つまり、$\alpha'/2$ だけ値がずれている。最後に、ghost の効果も取り入れなければならない。Ghost(2 個分) の open 1-loop amplitude は

$$\eta(it)^2 \tag{2.141}$$

で与えられる[41]。η 関数の S 変換 (C.26) より

$$\eta(it) = t^{-1/2}\eta(i/t) \tag{2.142}$$

である事を覚えておこう。

以上を踏まえると、まず modulous の積分と ghost の効果は式 (2.136) より

$$2 \times \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{2t} \eta(it)^2 = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \eta(i/t)^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \mathrm{d}s \eta(i/t)^2 \tag{2.143}$$

と書ける。ただし、左辺が open 1-loop の measure+ghost の効果と解釈できるように係数や t のべきを調節した。また向き付け可能な理論を考えているため、σ^1 の向きの取り方を逆にしたものが別のものとなっていて、左辺の factor 2 が出ている。Ghost 抜きの d 次元分の open 1-loop の分配関数を $Z(q)$ とすると、今までの話から

$$Z(q) = \langle B_{X,p}|_c \tilde{q}^{\frac{1}{2}(L_0 + \tilde{L}_0 - \frac{c}{12})} |B_{X,p}\rangle_c \tag{2.144}$$

だったので open-closed 対応は式 (2.140) を踏まえて

$$\begin{aligned} 2 \times \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{2t} \eta(it)^2 Z(q) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \mathrm{d}s \eta(i/t)^2 \langle B_{X,p}|_c \tilde{q}^{\frac{1}{2}(L_0 + \tilde{L}_0 - \frac{c}{12})} |B_{X,p}\rangle_c \\ &= \frac{2}{\pi\alpha'} \langle B_{X,p}|_c \underbrace{\int_0^\infty \mathrm{d}s \eta(i/t)^2 \frac{\alpha'}{2} \tilde{q}^{\frac{1}{2}(L_0 + \tilde{L}_0 - \frac{c}{12})}}_{\text{effective な propagator } \Delta_{\text{eff}}} |B_{X,p}\rangle_c \\ &\equiv \langle B_{X,p}|\Delta_{\text{eff}}|B_{X,p}\rangle \end{aligned} \tag{2.145}$$

となっていて、この式で $|B_{X,p}\rangle$ を定義している。式 (2.138),(2.145) から、

$$N_p = \left(\frac{2}{\pi\alpha'}\right)^{\frac{1}{2}} N'_p = \frac{\sqrt{\pi}}{2} 2^{\frac{10-d}{4}} (2\pi\sqrt{\alpha'})^{\frac{d}{2}-\ell-1} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} 2^{\frac{10-d}{4}} (2\pi\sqrt{\alpha'})^{\frac{d}{2}-p-2} \tag{2.146}$$

とよく知られた結果[42]が求まる。

[39] Closed propagator の定義が違い、さらに ghost の効果も取り入れた上で total の amplitude で定義している。詳しくは後述。

[40] Propagator が $E^{-2} \sim \alpha'$ (E はエネルギーの次元) の order なのと、$\alpha' = 2$ の limit で前の定数が 1 となることを踏まえると分かる。

[41] 詳しくは [27]Vol 1 , sec 7 参照。

[42] 例えば、[26] , p36 等。

Super string D-brane

同様の話を今度は super string (Type 0 or II) の場合で行う。最初は GSO projection をかけずに話を始めよう。

Dp-brane を考えると、まず world sheet boson の部分は係数を含めて bosonic string の話で d=10 としたものになっているので、後は world sheet fermion ψ の部分を調べればよい。今回は light cone ゲージで考えることにしよう。そうする事で super ghost の効果が取り入れられる。まず ψ の貼り合わせの条件は式 (2.86),(2.133) より

$$\left(\psi^{\mu}_{r} - i\eta S^{\mu}{}_{\nu}\tilde{\psi}^{\nu}_{-r}\right)|\sigma;\eta,p\rangle\!\rangle_{lc} = 0 \qquad , \qquad \sigma = \mathrm{NS}\ ,\ \mathrm{R} \quad , \quad \eta = \pm 1 \tag{2.147}$$

とまとめられるので石橋 state $|\sigma;\eta\rangle\!\rangle_{lc}$ は

$$|\sigma;\eta,p\rangle\!\rangle_{lc} = \prod_{r>0}\exp\left(i\eta\sum_{\mu,\nu=2}^{9}\psi^{\mu}_{-r}S_{\mu}{}^{\nu}\tilde{\psi}_{\nu,-r}\right)|\sigma;\eta,p\rangle\!\rangle^{(0)}_{lc} \tag{2.148}$$

となる。式 (2.148) で μ,ν の和から 0,1 を除いたのは light-cone ゲージで考えているからである。$|\sigma;\eta,p\rangle\!\rangle^{(0)}_{lc}$ は NS の場合ただの ground state だが、R の場合は 0 モードのため少し複雑になるのは 2.1.2 で述べた通りである。$|R;\eta,p\rangle\!\rangle^{(0)}_{lc}$ の導出は付録 A に譲る事にして結果だけ書くと、$|R;\eta,p\rangle\!\rangle^{(0)}_{lc}$ は

$$\left(\psi^{\mu}_{0} - i\eta S^{\mu}{}_{\nu}\tilde{\psi}^{\nu}_{0}\right)|R;\eta,p\rangle\!\rangle^{(0)}_{lc} = 0 \tag{2.149}$$

の解でこれは

$$|R;\eta,p\rangle\!\rangle^{(0)}_{lc} = M'_{AB}|A,\tilde{B}\rangle \tag{2.150}$$

と書ける。ただし $|A,\tilde{B}\rangle$ は spin $SO(1,9)$ の基底で ($\tilde{B}$ の方は right)、M'_{AB} は

$$M'_{AB} = \left[\left(\frac{1+P}{2}\right)\Gamma^{0}\cdots\Gamma^{p}C\frac{1+i\eta\Gamma_{11}}{1+i\eta}\left(\frac{1-P}{2}\right)\right]_{AB} \tag{2.151}$$

となっている。ただし Γ^{μ} は $SO(1,9)$ の Γ 行列で、$\Gamma_{11} = \Gamma^{0}\cdots\Gamma^{9}$ で与えられる。C は charge conjugation 行列で、$\left(\frac{1\pm P}{2}\right)$ は 0-1 方向のスピン $s_0 = \pm\frac{1}{2}$ への射影演算子である[43]。これも詳しい話は付録 A を参照して欲しい。平行な Dp-brane 2 枚を考えた時の 0 モード間の内積は式 (A.64) より

$$\begin{aligned} {}^{(0)}_{lc}\langle\!\langle NS;\eta_1,p|NS;\eta_2,p\rangle\!\rangle^{(0)}_{lc} &= 1 \\ {}^{(0)}_{lc}\langle\!\langle R;\eta_1,p|R;\eta_2,p\rangle\!\rangle^{(0)}_{lc} &= 16\delta_{\eta_1\eta_2} \end{aligned} \tag{2.152}$$

となっている。最後に 0 モード以外も含めた内積は

$$\begin{aligned} {}_{lc}\langle\!\langle NS;\eta_1,p|NS;\eta_2,p\rangle\!\rangle_{lc} &= \tilde{q}^{a_0-\frac{c}{24}}\textstyle\prod_{r=\frac{1}{2}}^{\infty}(1+\eta_1\eta_2\tilde{q}^{r})^{8} &&= Tr_{NS}\left[(-1)^{(\frac{\eta_1-\eta_2}{2})F}\tilde{q}^{L_0-\frac{c}{24}}\right] \\ {}_{lc}\langle\!\langle R;\eta_1,p|R;\eta_2,p\rangle\!\rangle_{lc} &= 16\delta_{\eta_1\eta_2}\tilde{q}^{a_0-\frac{c}{24}}\textstyle\prod_{r=1}^{\infty}(1+\eta_1\eta_2\tilde{q}^{r})^{8} &&= Tr_{R}\left[(-1)^{(\frac{\eta_1-\eta_2}{2})F}\tilde{q}^{L_0-\frac{c}{24}}\right] \end{aligned} \tag{2.153}$$

となっている。この計算は付録 B.2.2 にまとめてあるのでそれを参照してほしい。

[43] Light cone ゲージを考えているのでこのような項が入っている。Left と right で 0-1 方向の projection が逆なのでこれは一見 physical で無いように見えるが、これで正しいのは付録 A で述べた通りである。

GSO projection

次に GSO projection をかけて考えたい。まず $SO(2n)$ の open string 1-loop の Virasoro character はそれぞれの GSO projection で次のようにまとめられる。

$$NS(+): \quad \chi'_v(q) \equiv \frac{1}{2}Tr_{NS}\left[(1-(-1)^F)q^{L_0-\frac{c}{24}}\right] = \chi_v(q) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\theta_3(0|\tau)}{\eta(\tau)}\right)^n - \left(\frac{\theta_4(0|\tau)}{\eta(\tau)}\right)^n\right]$$

$$NS(-): \quad \chi'_o(q) \equiv \frac{1}{2}Tr_{NS}\left[(1+(-1)^F)q^{L_0-\frac{c}{24}}\right] = \chi_o(q) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\theta_3(0|\tau)}{\eta(\tau)}\right)^n + \left(\frac{\theta_4(0|\tau)}{\eta(\tau)}\right)^n\right]$$

$$R(+): \quad \chi'_s(q) \equiv -\frac{1}{2}Tr_{R}\left[(1+(-1)^F)q^{L_0-\frac{c}{24}}\right] = -\chi_s(q) = -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\theta_2(0|\tau)}{\eta(\tau)}\right)^n + \left(-i\frac{\theta_1(0|\tau)}{\eta(\tau)}\right)^n\right]$$

$$R(-): \quad \chi'_c(q) \equiv -\frac{1}{2}Tr_{R}\left[(1-(-1)^F)q^{L_0-\frac{c}{24}}\right] = -\chi_c(q) = -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\theta_2(0|\tau)}{\eta(\tau)}\right)^n - \left(-i\frac{\theta_1(0|\tau)}{\eta(\tau)}\right)^n\right]$$

これは基本的には式 (B.23) に $\nu = \nu' = 0$ を代入して $SO(2n)$ に拡張したものであるが、$R(\pm)$ セクターは 0 モードを含むので式 (B.30),(B.31) を使って書き直す必要がある。さらに R セクターで factor -1 が付いているのは spacetime の統計性 (フェルミオンは分配関数に $-$ を付ける) から来ている。特に今回は light cone ゲージで $SO(8)$ $(n=4)$ の場合を考えたいので、$n=4$ とするとこれらの式は

$$NS(+): \quad \chi'_v(q) = \chi_v(q) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\theta_3(0|\tau)}{\eta(\tau)}\right)^4 - \left(\frac{\theta_4(0|\tau)}{\eta(\tau)}\right)^4\right] \tag{2.154}$$

$$NS(-): \quad \chi'_o(q) = \chi_o(q) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\theta_3(0|\tau)}{\eta(\tau)}\right)^4 + \left(\frac{\theta_4(0|\tau)}{\eta(\tau)}\right)^4\right] \tag{2.154b}$$

$$R(+): \quad \chi'_s(q) = -\chi_s(q) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\theta_2(0|\tau)}{\eta(\tau)}\right)^4 \tag{2.154c}$$

$$R(-): \quad \chi'_c(q) = -\chi_c(q) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\theta_2(0|\tau)}{\eta(\tau)}\right)^4 \tag{2.154d}$$

となる。ここで $\theta_1(0|\tau) = 0$ であることに注意しよう。

次に boundary state に対する GSO projection を考えよう。まず NS セクターの場合は world sheet fermion number F は

$$NS: \qquad F = \sum_{r=1/2}^{\infty} \psi^{\mu}_{-r}\psi_{\mu,r} - 1 \quad , \quad \tilde{F} = \sum_{r=1/2}^{\infty} \tilde{\psi}^{\mu}_{-r}\tilde{\psi}_{\mu,r} - 1 \tag{2.155}$$

と書ける[44]。ここで "-1" は NS セクターの ground state が -1 から始まることに相当している[45]。よって式 (2.148),(2.155) より

$$(-1)^F|NS;\eta,p\rangle\!\rangle_{lc} = -|NS;-\eta,p\rangle\!\rangle_{lc} \quad , \quad (-1)^{\tilde{F}}|NS;\eta,p\rangle\!\rangle_{lc} = -|NS;-\eta,p\rangle\!\rangle_{lc} \tag{2.156}$$

と分かる。ただし固有値 -1 は $F, \tilde{F}$ の中の -1 から来ている。次に R セクターの場合は

$$R: \qquad (-1)^F = \psi_{11}(-1)^{\sum_{m=1}^{\infty}\psi^{\mu}_{-m}\psi_{\mu,m}} \quad , \quad (-1)^{\tilde{F}} = -\tilde{\psi}_{11}(-1)^{\sum_{m=1}^{\infty}\tilde{\psi}^{\mu}_{-m}\tilde{\psi}_{\mu,m}} \tag{2.157}$$

[44] Boundary state を light cone ゲージで考えているので $0,1$ 方向の励起は無い。そのため、式 (2.155) の μ の和は $0,1$ 方向を含めても省いても良い。

[45] Super ghost の効果。

で与えられる。ただし $\psi_{11}, \tilde{\psi}_{11}$ は Γ_{11} と同一視出来るように

$$\psi_{11} \equiv 2^5 \psi^0 \psi^1 \cdots \psi^9 \cong \Gamma_{11} \quad , \quad \tilde{\psi}_{11} \equiv 2^5 \tilde{\psi}^0 \tilde{\psi}^1 \cdots \tilde{\psi}^9 \cong \tilde{\Gamma}_{11} \tag{2.158}$$

と定義したもので (付録 A 参照)、式 (2.157) で $(-1)^{\tilde{F}}$ に factor -1 が掛かっているのは super ghost の効果である[46]。Dp-brane を考えた時は式 (2.150),(2.151),(A.21),(A.21') 等を利用する事で

$$(-1)^F |R;\eta,p\rangle\!\rangle_{lc} = (-1)^p |R;-\eta,p\rangle\!\rangle_{lc} \quad , \quad (-1)^{\tilde{F}} |R;\eta,p\rangle\!\rangle_{lc} = -|R;-\eta,p\rangle\!\rangle_{lc} \tag{2.159}$$

と分かる[47]。

Type 0 理論の D-brane

以上を踏まえて Type 0 理論の D-brane の boundary state を求めよう。GSO projection は

$$\begin{array}{lll} 0A & : & (NS+,NS+),(NS-,NS-),(R+,R-),(R-,R+) \\ 0B & : & (NS+,NS+),(NS-,NS-),(R+,R+),(R-,R-) \end{array} \tag{2.162}$$

となっているが、今回は具体的に $0B$ の方を考えて話をする。前の話より、GSO projection を満たす石橋 state は p を奇数として[48]

$$|v,p\rangle\!\rangle \equiv |NS+,NS+,p\rangle\!\rangle = \frac{1}{2}\left(|NS;+,p\rangle\!\rangle - |NS;-,p\rangle\!\rangle\right) \tag{2.163}$$

$$|o,p\rangle\!\rangle \equiv |NS-,NS-,p\rangle\!\rangle = \frac{1}{2}\left(|NS;+,p\rangle\!\rangle + |NS;-,p\rangle\!\rangle\right) \tag{2.164}$$

$$|s,p\rangle\!\rangle \equiv |R-,R-,p\rangle\!\rangle = \frac{1}{2}\left(|R;+,p\rangle\!\rangle + |R;-,p\rangle\!\rangle\right) \tag{2.165}$$

$$|c,p\rangle\!\rangle \equiv |R+,R+,p\rangle\!\rangle = \frac{1}{2}\left(|R;+,p\rangle\!\rangle - |R;-,p\rangle\!\rangle\right) \tag{2.166}$$

---

[46] 具体的には付録 A の脚注 6 で述べたように、R セクターの boundary state は left と right で picture number が 1 ずれているため left と F の定義が 1 ずれるためである。

[47] 一応計算を載せておくと、

$$\begin{aligned} \psi_{11}|R;\eta,p\rangle\!\rangle^{(0)}_{lc} &= \left[\left(\frac{1+P}{2}\right)\Gamma^0\cdots\Gamma^p C \frac{1+i\eta\Gamma_{11}}{1+i\eta}\left(\frac{1-P}{2}\right)\right]_{AB}\psi_{11}|A,\tilde{B}\rangle \\ &= \left[\Gamma_{11}\left(\frac{1+P}{2}\right)\Gamma^0\cdots\Gamma^p C \frac{1+i\eta\Gamma_{11}}{1+i\eta}\left(\frac{1-P}{2}\right)\right]_{AB}|A,\tilde{B}\rangle \\ &= (-1)^{p+2}\left[\left(\frac{1+P}{2}\right)\Gamma^0\cdots\Gamma^p C \frac{\Gamma_{11}+i\eta}{1+i\eta}\left(\frac{1-P}{2}\right)\right]_{AB}|A,\tilde{B}\rangle \\ &= (-1)^{p}\left[\left(\frac{1+P}{2}\right)\Gamma^0\cdots\Gamma^p C \frac{1-i\eta\Gamma_{11}}{1-i\eta}\left(\frac{1-P}{2}\right)\right]_{AB}|A,\tilde{B}\rangle \\ &= (-1)^p |R;-\eta,p\rangle\!\rangle^{(0)}_{lc} \end{aligned} \tag{2.160}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_{11}|R;\eta,p\rangle\!\rangle^{(0)}_{lc} &= \left[\left(\frac{1+P}{2}\right)\Gamma^0\cdots\Gamma^p C \frac{1+i\eta\Gamma_{11}}{1+i\eta}\left(\frac{1-P}{2}\right)\Gamma_{11}\right]_{AB}|A,\tilde{B}\rangle \\ &= |R;-\eta,p\rangle\!\rangle^{(0)}_{lc} \end{aligned} \tag{2.161}$$

を用いる。Non-zero モードは NS と同様 η が逆になるだけである。

[48] p が奇数でないと R セクターで GSO projection を満たす石橋 state が作れない。同様に 0A の場合は p が偶数でないと R セクターの石橋 state が作れない。

となっている事が分かる。これらの石橋 state 間の内積は付録 B.2.2 より

$$\langle\langle m,p|\tilde{q}^{\frac{1}{2}(L_0+\tilde{L}_0-\frac{c}{12})}|n,p\rangle\rangle = \delta_{mn}\chi_m(\tilde{q}) \qquad m,n = v,o,s,c \tag{2.167}$$

と Virasoro character $\chi_v \sim \chi_c$ で書ける。しかし open closed 対応を付けるためにはこれらが χ_m では無く χ'_m となっているべきなので、$\langle\langle R;\eta|$ の定義を変えなければならない。しかし今回は幸いに $\langle\langle R;\eta|$ の定義を変える代わりに

$|R;\eta\rangle\rangle$ 間の内積は単純に計算した値を -1 倍する

というルールを採用すると

$$\langle\langle m,p|\tilde{q}^{\frac{1}{2}(L_0+\tilde{L}_0-\frac{c}{12})}|n,p\rangle\rangle = \delta_{mn}\chi'_m(\tilde{q}) \qquad m,n = v,o,s,c \tag{2.168}$$

となってうまくいく[49]のでそうすることにしよう。

この様に石橋 character が Virasoro character χ'_m で書けるので、S-matrix を求める際に付録 B.3 の話が使える。$S'_{(8)}$ を

$$\chi'_m(q) = \sum_n S'^n_{(8)m}\chi'_n(\tilde{q}) \tag{2.169}$$

と定義すると、足の順番を v,o,s,c として式 (B.119) より

$$S'_{(8)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.170}$$

と書ける。以上を Cardy の解 (2.109) に代入して boundary state を求めよう。まず $S'^m_{(8)v} = \frac{1}{2}$ で値が全て正なので、式 (2.107) の boundary state $|0\rangle$ に対応するものが

$$\begin{aligned} |v\rangle &= \sum_m \sqrt{S'^m_{(8)v}}|m\rangle\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|v\rangle\rangle + |o\rangle\rangle + |s\rangle\rangle + |c\rangle\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|NS;+,p\rangle\rangle + |R;+,p\rangle\rangle) \end{aligned} \tag{2.171}$$

と分かり、$|\alpha\rangle$ に対応するものが

$$\begin{aligned} |o\rangle &= \sum_m \frac{S'^m_{(8)o}}{\sqrt{S'^m_{(8)v}}}|m\rangle\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|v\rangle\rangle + |o\rangle\rangle - |s\rangle\rangle - |c\rangle\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|NS;+,p\rangle\rangle - |R;+,p\rangle\rangle) \\ |s\rangle &= \sum_m \frac{S'^m_{(8)s}}{\sqrt{S'^m_{(8)v}}}|m\rangle\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|v\rangle\rangle - |o\rangle\rangle + |s\rangle\rangle - |c\rangle\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-|NS;-,p\rangle\rangle + |R;-,p\rangle\rangle) \\ |c\rangle &= \sum_m \frac{S'^m_{(8)c}}{\sqrt{S'^m_{(8)v}}}|m\rangle\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|v\rangle\rangle - |o\rangle\rangle - |s\rangle\rangle + |c\rangle\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-|NS;-,p\rangle\rangle - |R;-,p\rangle\rangle) \end{aligned} \tag{2.172}$$

[49] このようなルールにしておかないと $\langle\langle R;\eta|$ が $|R;\eta\rangle\rangle$ の単純な複素共役にならずに話が煩雑になる。

であることが分かる。

Type 0 Dp-brane の分類

式 (2.171),(2.172) で求めた boundary state $|v\rangle \sim |c\rangle$ の物理的解釈を考えよう。まず $|R;\pm,p\rangle\!\rangle$ 間の内積

$$\langle\!\langle R;+,p|\tilde{q}^{\frac{1}{2}(L_0+\tilde{L}_0-\frac{c}{12})}|R;+,p\rangle\!\rangle \equiv A_{RR} \tag{2.173}$$

は Dp-brane 間の RR charge による相互作用と考えられる。よって $|R;\pm,p\rangle\!\rangle$ の前の係数は Dp-brane の持つ RR charge の符号となっている事が分かるので、$|v\rangle$ と $|o\rangle$ は brane と anti brane の関係になっている。同様に $|s\rangle$ と $|c\rangle$ も brane と anti brane の関係になっている事が分かるが、$|R;\eta,p\rangle\!\rangle$ の η が逆なので $|v\rangle,|o\rangle$ とは別の種類の D-brane である。

以上より Type 0 理論には 2 種類の D-brane と anti D-brane の組があることが分かる。これらは

$$\begin{array}{ll} |v\rangle : \text{electric Dp-brane} & |o\rangle : \text{electric anti Dp-brane} \\ |s\rangle : \text{magnetic Dp-brane} & |c\rangle : \text{magnetic anti Dp-brane} \end{array} \tag{2.174}$$

と呼ばれている。

Fusion rule

最後に $v \sim c$ の表現 $D_v \sim D_c$ 間の Fusion rule を調べよう。Verlinde の公式 (2.114) より

$$\bar{D}_m \otimes D_n = \sum_k n_{mn}^k D_k \quad , \quad n_{mn}^k = \sum_j \frac{(S'^{lj}_{(8)m})^* S'^{lj}_{(8)n} (S'^{-1}_{(8)})^k_j}{S'^{lj}_{(8)v}} \quad , \quad \sum_j (S'^{-1}_{(8)})^m_j S'^{lj}_{(8)n} = \delta^m_n \tag{2.175}$$

の n_{mn}^k を計算すれば良い。式 (2.170) より $S'_{(8)}$ が実対称行列かつ直交行列だと分かるので、$\bar{D}_m = D_m$ と $S'^{-1}_{(8)} = S'_{(8)}$ を満たしていることを踏まえると

$$D_m \otimes D_n = \sum_k n_{mn}^k D_k \quad , \quad n_{mn}^k = 2\sum_j S'^{lj}_{(8)m} S'^{lj}_{(8)n} S'^{lk}_{(8)j} \tag{2.176}$$

を計算すれば良い事がわかる。式 (2.170) を代入して計算すると

$$\begin{array}{lll} D_v \otimes D_m = D_m \quad , & D_m \otimes D_m = D_v \quad , & D_o \otimes D_s = D_c \\ D_o \otimes D_c = D_s \quad , & D_s \otimes D_c = D_o & \end{array} \tag{2.177}$$

と分かる。この式から D_v が単位元として振舞う事が分かる。同様のことを χ_m で行いたい場合は、付録 B.3 で述べたように S と S' の入れ替えは v と o の入れ替えに対応しているので式 (2.177) で v と o を入れ替えれば良い。

Type II 理論の D-brane

Spacetime boson [50]だけを見た時は Type II 理論は Type 0 理論の半分の数 boson を持った理論なので、Type II 理論の D-brane は Type 0 のそれに GSO projection をかける事で得ら

[50]ここでは closed string のみを考えている。

れる事が予想できる。ここでは実際にそうなっている事を Type IIB 理論の場合で確かめよう。まず Type II 理論には以下の 4 種類がある。

$$\begin{array}{rcl} IIA & : & (NS+,NS+),(R+,NS+),(NS+,R-),(R+,R-) \\ IIB & : & (NS+,NS+),(R+,NS+),(NS+,R+),(R+,R+) \\ IIA' & : & (NS+,NS+),(R-,NS+),(NS+,R+),(R-,R+) \\ IIB' & : & (NS+,NS+),(R-,NS+),(NS+,R-),(R-,R-) \end{array} \tag{2.178}$$

ここで prime 付きとそうでないやつは world sheet fermion $\psi^\mu, \tilde{\psi}^\mu$ を

$$\psi^\mu \to -\psi^\mu \quad , \quad \tilde{\psi}^\mu \to -\tilde{\psi}^\mu \tag{2.179}$$

と変換する事で移り変わるので全く等価である。今回は Type IIB' 理論を考えると式 (2.166) より GSO projection で生き残る石橋 state は $|v\rangle\rangle, |s\rangle\rangle$ と分かる。よって石橋 character としては $\hat{\chi}'_M \equiv (\chi'_v, \chi'_s, \chi'_o, \chi'_c)$ のうちの最初の 2 つのみが理論に現れてよい。次に Virasoro character $\hat{\chi}'_A$ $(A = 0, \cdots, 3)$ を

$$\hat{\chi}'_A \equiv (\chi'_v + \chi'_s, \chi'_o + \chi'_c, \chi'_v - \chi'_s, \chi'_o - \chi'_c) \tag{2.180}$$

と定義しよう。こうする理由は後で分かる。すると S-matrix $\hat{S}'$ と GSO projection P を

$$\hat{\chi}'_A(q) \equiv \sum_M \hat{S}'^M_A \hat{\chi}'_M(\tilde{q}) \quad , \quad \hat{\chi}'_{p,N} = \sum_M P^M_N \hat{\chi}'_M(\tilde{q}) \tag{2.181}$$

とした時に行列表示で

$$\hat{S}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.182}$$

と書ける。ただし $\hat{\chi}'_{p,N} = (\chi'_v, \chi'_s, 0, 0)$ である。まず重要な事は式 (2.182) で $\hat{S}'$ が 2×2 の行列でブロック対角化されている事である。そのようにするために $\hat{\chi}'_A$ を定義した。次に $\hat{\chi}'_A$ を定義する際に χ'_m を整数係数で和を取ったのは、open 1-loop の Tr と解釈出来る条件が $\hat{\chi}'_A$ が整数個出てきた時であるという主張 (2.95) を今回も使えるようにするためである。

以上より open string の方を $A = 1, 2$ のみ考えて、closed string の方を $M = v, s$ のみ考えても理論が閉じている (これだけで open-closed 対応が付けられる) 事が分かる。

よって Type IIB' 理論の D-brane は石橋 state を $|\hat{M}\rangle\rangle$ $(\hat{M} = v, s)$ として

$$\begin{aligned} |0\rangle &= \sum_{\hat{M}} \sqrt{\hat{S}'^{\hat{M}}_0} |\hat{M}\rangle\rangle = |v\rangle\rangle + |s\rangle\rangle \\ &= \frac{1}{2}(|NS;+,p\rangle\rangle - |NS;-,p\rangle\rangle + |R;+,p\rangle\rangle + |R;-,p\rangle\rangle) \\ |1\rangle &= \sum_{\hat{M}} \frac{\hat{S}'^{\hat{M}}_1}{\sqrt{\hat{S}'^{\hat{M}}_0}} |\hat{M}\rangle\rangle = |v\rangle\rangle - |s\rangle\rangle \\ &= \frac{1}{2}(|NS;+,p\rangle\rangle - |NS;-,p\rangle\rangle - |R;+,p\rangle\rangle - |R;-,p\rangle\rangle) \end{aligned} \tag{2.183}$$

といった boundary state $|\hat{A}\rangle$ $(\hat{A} = 0, 1)$ で与えられる。この様に Type 0B 理論から作れる事からも分かるように、Type IIB 理論の Dp-brane も p が奇数で無ければならない事に注意しよう。同様に Type IIA 理論の Dp-brane は p が偶数でなければならない。

Type II Dp-brane の分類

式 (2.183) から分かるように $|0\rangle$ と $|1\rangle$ は $|R;\eta,p\rangle\rangle$ の係数の符号を逆にしたものなので

$$|0\rangle : \text{Dp-brane} \quad |1\rangle : \text{anti Dp-brane} \tag{2.184}$$

と解釈できる。Type 0 理論と違い Type II 理論には Dp-brane ,anti Dp-brane の組が 1 種類しかない事に注意しよう。

Fusion rule

これも最後に fusion rule を調べよう。

$$\hat{S}'^{\hat{M}}_{\hat{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad (\hat{S}'^{-1})^{\hat{A}}_{\hat{M}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.185}$$

と $\hat{S}'^{\hat{M}}_{0} = 1$ を踏まえて

$$D_{\hat{A}} \otimes D_{\hat{B}} = \sum_{\hat{C}} n^{\hat{C}}_{\hat{A}\hat{B}} D_{\hat{C}} \qquad , \quad n^{\hat{C}}_{\hat{A}\hat{B}} = \sum_{\hat{M}} \hat{S}'^{\hat{M}}_{\hat{A}} \hat{S}'^{\hat{M}}_{\hat{B}} (\hat{S}'^{-1})^{\hat{C}}_{\hat{M}} \tag{2.186}$$

を計算すれば良い。結果は

$$D_{\hat{A}} \otimes D_{\hat{A}} = D_0 \quad , \quad D_0 \otimes D_1 = D_1 \tag{2.187}$$

となって、 mod 2 で $\hat{A} + \hat{B}$ の fusion となっている。これを open string の分配関数の言葉で書くと、式 (C.24) を踏まえて

$$Z_{00} = Z_{11} = \hat{\chi}'_0(q) = \chi'_v + \chi'_s = 0 \quad , \quad Z_{01} = Z_{10} = \hat{\chi}'_1(q) = \chi'_o + \chi'_c \tag{2.188}$$

と書ける。この結果の解釈をしよう。まず brane-brane 系や anti brane- anti brane 系はその間に付く open string は massless mode からで、amplitude も 0 なので安定である。一方 brane-anti brane 系ではその間に付く open string が tachyon から (χ'_o の項) なので不安定である事が分かる。

2.3 Orbifold $\mathbb{C}/\mathbb{Z}_N$ 上の boundary state

最後に前のセクションでまとめた石橋 state と Cardy 条件による boundary state の構成法を使ってこの章の目的である空間 $\mathbb{R}^{1,d-1-2n} \times \mathbb{C}^n/\Gamma$ 上の "brane" [51]に対応する boundary state を調べたい [30]。

しかし最初から一般的に話をすると分かりにくいので、まず具体例 $\mathbb{C}/\mathbb{Z}_N$ [52]を考えて話をすることにするが、後で簡単に一般化できるようにするために極力一般的な表記で計算結果をまとめていく事にする。

2.3.1 セットアップと orbifold 群の作用

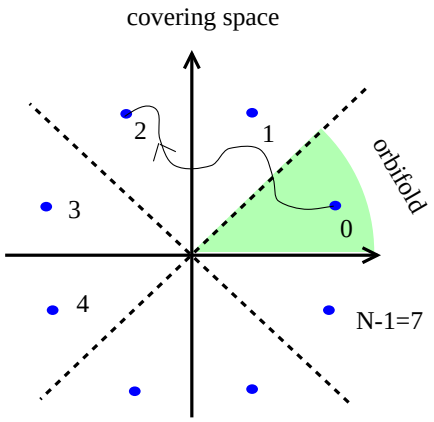

図 2.3: $\mathbb{C}/\mathbb{Z}_N$(N=8) 上の D-brane とその image

まず $\mathbb{C}/\mathbb{Z}_N$ のセットアップは図 2.3 の通りである。この図では N=8 の場合が描かれているが、話は一般の N で進める。この orbifold 上の 1 点に D-brane を 1 枚、複素平面と垂直になるように置く [33]。つまり複素平面の方向にはこの D-brane は点に見える。Covering space も含めて考えると点は N 個あり (D-brane 1 個とその像が $N-1$ 個)、それらの点を図 2.3 の様に反時計回りに 0,1,$\cdots$,N-1 とラベルを付ける。このラベルは Chan Paton の足と呼ばれていて、以下では a,b 等と書く。すると端が a $(\sigma^1 = 0)$, b $(\sigma^1 = \pi)$ の open string の場 ψ は $|\psi, a, b\rangle$ と書ける。例えば、図 2.3 の open string がゲージ場だった時は、$|A^\mu, 0, 2\rangle$ と書ける。

次に orbifold 群 $\mathbb{Z}_N$ の元 R($\frac{2\pi}{N}$ 回転) は、この様な open string $|\psi, a, b\rangle$ に対して

$$|\psi, a, b\rangle \quad \stackrel{R}{\to} \quad R_{aa'}|\hat{R}\psi, a', b'\rangle(R^{-1})_{b'b} \quad , \quad R_{ab} = \delta_{a+1,b} \tag{2.189}$$

と作用する。場 ψ がスピンを持っていた場合は回転で変化を受けるので、その効果が $\hat{R}$ で表されている。$\hat{R}$ の具体的な作用は後で明らかになる。また $\frac{2\pi}{N}$ 回転で点 a が 1 つ分反時計回りに動くので、その効果が $R_{aa'}$ で書かれている。

[51]ここで "brane" としたのは、求まる boundary state が 2.2.5 で考えた Type II 理論に出てくるような D-brane ではなく "fractional brane"[32](持っている tension と RR-charge が分数の brane) であることが後で分かるからである。

[52]以後特に必要が無い時は $\mathbb{R}^{1,d-1-2n}$ の方向を表記しない上に考えない。

Open string の場 ψ は $|\psi\rangle = \psi_{ab}|\psi, a, b\rangle$ で与えられて、式 (2.189) の R の作用で不変な (R-invariant な)ψ が orbifold 上で生き残る。しかし式 (2.189) では R_{ab} の効果が分かりにくいので、以下の様に基底を変える。

$$|\psi, I, J\rangle \equiv U_{Ia}|\psi, a, b\rangle U^{-1}_{bJ} \qquad , \qquad U_{Ia}\text{は Unitary 行列} \tag{2.190}$$

式 (2.190) は、D-brane とその像の足 a の線型結合を取ることに相当している。すると $\hat{R}$ の効果を無視して、式 (2.189) から

$$|\psi, I, J\rangle \qquad \stackrel{R}{\to} \qquad U_{Ia}R_{aa'}R^{-1}_{b'b}U^{-1}_{bJ}|\psi, a', b'\rangle \tag{2.191}$$

と書き直せる。ここで U を $U_{Ia}R_{aa'}U^{-1}_{a'K} = \xi_I\delta_{IK}$ (I で和をとらない) と R を対角化する様に取ると (実際に取れる事が後で分かる) 式 (2.190),(2.191) から

$$|\psi, I, J\rangle \qquad \stackrel{R}{\to} \qquad \xi_I\xi_J^{-1}|\psi, I, J\rangle \qquad \text{I,J で和を取らない} \tag{2.192}$$

となり、都合の良い基底が得られる。R_{ab} を式 (2.193) の様に $N \times N$ 行列で書くと、U_{Ia} 等は以下の様になる。

$$R_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & & & & 1 \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad , \qquad U^{-1}_{aI} = U^{\dagger}_{aI} = (\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_I, \cdots, \mathbf{v}_{N-1}) \tag{2.193}$$

ただし、

$$\mathbf{v}_I \equiv \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^{-I} \\ \omega^{-2I} \\ \vdots \\ \omega^{-(N-1)I} \end{pmatrix} \quad , \quad \omega \equiv \exp\left(\frac{2\pi i}{N}\right) \quad , \quad R\mathbf{v}_I = \omega^I\mathbf{v}_I \quad , \quad \xi_I = \omega^I \tag{2.194}$$

である。これらから、$U_{Ia} = \frac{1}{\sqrt{N}}\omega^{Ia}$ とも分かるので、$\hat{R}$ の効果も含めて結果を書くと、

$$|\psi, I, J\rangle \qquad \stackrel{R}{\to} \qquad \omega^{I-J}|\hat{R}\psi, I, J\rangle \qquad , \qquad |\psi, I, J\rangle \equiv \frac{1}{N}\omega^{Ia}\omega^{-Jb}|\psi, a, b\rangle \tag{2.195}$$

となっている。

2.3.2 Cylinder amplitude ··· bosonic string の場合

次に bosonic string を考えた時の open string の cylinder amplitude を考えたいので、まずそのための準備をしよう。

Complex boson の性質

ここでは complex boson の性質を記号の定義が分かる程度にまとめる。詳しい話は付録 B.1.1 にまとめておいたので、それを参照して欲しい。複素平面を 8-9 方向とした時に complex boson $X, \bar{X}$ を

$$X \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(X^8 + iX^9) \qquad , \quad \bar{X} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(X^8 - iX^9) \tag{2.196}$$

と定義しよう。R^k $(k = 0, \cdots, N-1)$ twisted sector の $X, \bar{X}$ は

$$\begin{aligned} X \ &\in \ \mathcal{H}_{R^k} : \quad X(w + 2\pi) = e^{2\pi i \frac{k}{N}} X(w) = \omega^k X(w) \qquad , \quad \omega \equiv e^{\frac{2\pi i}{N}} \\ \bar{X} \ &\in \ \mathcal{H}_{R^k} : \quad \bar{X}(w + 2\pi) = e^{-2\pi i \frac{k}{N}} \bar{X}(w) = \omega^{-k} \bar{X}(w) \end{aligned} \tag{2.197}$$

で与えられる[53]。式 (2.197) より R^k twisted sector の $X, \bar{X}$ は $\nu'_k \equiv \frac{k}{N}$ として

$$X(w) = i\left(\frac{\alpha'}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{r \in \mathbf{Z} + \nu'_k} \frac{1}{r} \alpha_r e^{irw} \qquad , \quad \bar{X}(w) = i\left(\frac{\alpha'}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{r \in \mathbf{Z} - \nu'_k} \frac{1}{r} \bar{\alpha}_r e^{irw} \tag{2.198}$$

と $\alpha_{n+\nu'_k}, \bar{\alpha}_{n-\nu'_k}$ $(n \in \mathbf{Z})$ を使ってモード展開できる。これらの交換関係は

$$[\alpha_{n+\nu'_k}, \bar{\alpha}_{m-\nu'_k}] = (n + \nu'_k)\delta_{n,-m} \qquad , \quad [\alpha_r, \alpha_s] = [\bar{\alpha}_r, \bar{\alpha}_s] = 0 \tag{2.199}$$

となっているので、

$$(\alpha_{n+\nu'_k})^\dagger \equiv \bar{\alpha}_{-n-\nu'_k} \qquad , \quad (\bar{\alpha}_{n-\nu'_k})^\dagger = \alpha_{-n+\nu'_k} \tag{2.200}$$

と定義する。次に $\hat{R}^k$ の作用は $|X\rangle \sim \alpha^\dagger|0\rangle, |\bar{X}\rangle \sim \bar{\alpha}^\dagger|0\rangle$ に対して

$$\hat{R}^k : \quad |X\rangle \ \overset{\hat{R}^k}{\to} \ e^{2\pi i \frac{k}{N}}|X\rangle = \omega^k|X\rangle \qquad , \quad |\bar{X}\rangle \ \overset{\hat{R}^k}{\to} \ e^{-2\pi i \frac{k}{N}}|\bar{X}\rangle = \omega^{-k}|\bar{X}\rangle \tag{2.201}$$

となっている。R^k twisted sector の Virasoro 代数は

$$\begin{aligned} L_m^X &= \sum_{n \in \mathbf{Z}} \alpha_{n+\nu'_k} \bar{\alpha}_{-n-\nu'_k+m} \qquad , \quad \text{for} \quad m \neq 0 \\ L_0^X &= \sum_{n=0}^{\infty} (n + \nu'_k) N_{n+\nu'_k} + \sum_{n=1}^{\infty} (n - \nu'_k) \bar{N}_{n-\nu'_k} + a_0^X \end{aligned} \tag{2.202}$$

と書ける。ただし $N_{n+\nu'_k}$ は $(\alpha_{n+\nu'_k})^\dagger$ の励起数で $\bar{N}_{n-\nu'_k}$ は $(\bar{\alpha}_{n-\nu'_k})^\dagger$ の励起数である。また定数 a_0^X は

$$a_0^X = \frac{1}{2}\nu'_k(1 - \nu'_k) \tag{2.203}$$

である。

最後に untwisted sector $(k = 0)$ の場合は 0 モードの存在のために以上の話がそのまま適用できない事に注意しなければならないが、その効果は後で調べる事にする。

[53] Closed string を考えたいのなら同じ性質を満たす right 成分 $\tilde{X}, \tilde{\bar{X}}$ も考えて、open string を考えたいのなら double trick で周期 2π にした $X, \bar{X}$ を 1 組考えれば良い。

cylinder amplitude の計算

以上を踏まえて、式 (2.195) で定義された open string $|\psi, I, J\rangle$ の cylinder amplitude $Z_{IJ}(q)$ の値を求めよう。まず cylinder amplitude は次の式で与えられる[54]。

$$Z_{IJ}(q) = \frac{1}{|\Gamma|}\sum_{k=0}^{N-1} Tr_{IJ}(R^k q^{L_0 - \frac{c}{24}}) = \frac{1}{|\Gamma|}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{\psi}\langle\psi, I, J|R^k q^{L_0-\frac{c}{24}}|\psi, I, J\rangle \tag{2.204}$$

ただし $|\Gamma|$ は $\mathbb{Z}_N$ の群の数 $= N$ で、$\sum_\psi$ は全ての open string の励起状態 ψ で和を取るという意味である。式 (2.204) で注意したいのは Tr に untwisted sector しか現れないことである。これは open string には twisted sector が存在しないからで、その事は図 2.4 から理解できる。

closed string のtwisted sector　　open string

図 2.4: $\mathbb{C}/\mathbb{Z}_N$ 上の closed string (twisted sector) と open string

つまり open string は端が繋がっていないので、closed string の twisted sector の様に fixed point (図 2.4 では円錐の頂点) に巻きついて束縛された状態にはなる事が出来ないという事である。

次に式 (2.204) に式 (2.190) を代入すると、

$$Z_{IJ}(q) = \frac{1}{|\Gamma|}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{\psi,a,b,c,d} U^*_{Ia}U^{-1*}_{bJ}U_{Ic}U^{-1}_{dJ}\langle\psi, a, b|R^k q^{L_0-\frac{c}{24}}|\psi, c, d\rangle \tag{2.205}$$

と書ける。その中の $\sum_\psi\langle\psi, a, b|R^k q^{L_0-\frac{c}{24}}|\psi, c, d\rangle$ は式 (2.189) より

$$\begin{aligned}\sum_{\psi}\langle\psi, a, b|R^k q^{L_0-\frac{c}{24}}|\psi, c, d\rangle &= \sum_{c',d'} R^k_{cc'}R^{-k}_{d'd}\overbrace{\sum_{\psi}\langle\psi, a, b|\hat{R}^k q^{L_0-\frac{c}{24}}|\psi, c', d'\rangle}^{\delta_{ac'}\delta_{bd'}\hat{\chi}_e^{(X)R^k}(q)} \\ &= R^k_{ca}R^{-k}_{bd}\hat{\chi}_e^{(X)R^k}(q)\end{aligned} \tag{2.206}$$

と計算できる。ただし $\hat{R}^k$ は式 (2.201) で定義されているもので、Chan Paton の足には作用しない。$\hat{\chi}_e^{(X)R^k}(q)$ は untwisted sector で insertion が $\hat{R}^k$ の Virasoro character から 0 モード

[54]式 (2.204) では 0 モードの効果は考慮されていない。今回は Dirichlet 境界条件なので brane a の位置 x_a の効果を本来考えなければならないが、その効果は後で取り扱うことにする。

の寄与を省いたもので

$$\hat{\chi}_e^{(X)R^k}(q) = q^{-\frac{1}{12}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi i \frac{k}{N}} q^n)^{-1} (1 - e^{-2\pi i \frac{k}{N}} q^n)^{-1} = 2 \sin\left(\frac{\pi k}{N}\right) \frac{\eta(\tau)}{\theta_1(\frac{k}{N}|\tau)} \tag{2.207}$$

となっている。この計算は付録 B.1.1 にまとめてあるのでそれを参照して欲しい。最後に

$$\langle \psi, a, b | \hat{R}^k q^{L_0 - \frac{c}{24}} | \psi, c', d' \rangle \propto \delta_{ac'} \delta_{bd'} \tag{2.208}$$

は open string の始点と終点が時間で変化しない事を意味しているので、この関係式は正しいと考えられる。

式 (2.206) を式 (2.205) に代入すると、式 (2.194) で定義された $\mathbf{v}_I$ を用いて

$$\begin{aligned}
Z_{IJ}(q) &= \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{a,b,c,d} U_{Ia}^* U_{bJ}^{-1*} U_{Ic} U_{dJ}^{-1} R_{ca}^k R_{bd}^{-k} \hat{\chi}_e^{(X)R^k}(q) \\
&= \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{k=0}^{N-1} (\mathbf{v}_I^\dagger R^k \mathbf{v}_I)(\mathbf{v}_J^{*\dagger} R^k \mathbf{v}_J^*) \hat{\chi}_e^{(X)R^k}(q) \\
&\equiv \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{k=0}^{N-1} (tr_{D_I} R^k)(tr_{\bar{D}_J} R^k) \hat{\chi}_e^{(X)R^k}(q) \\
&\equiv \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{k=0}^{N-1} \rho_I^k \rho_J^{k*} \hat{\chi}_e^{(X)R^k}(q) \\
&= \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{k=0}^{N-1} \rho_I^{k*} \rho_J^k \hat{\chi}_e^{(X)R^k}(q)
\end{aligned} \tag{2.209}$$

と計算できる。ただし ρ_I^k と $tr_{D_I} R^k$ は

$$\rho_I^k \equiv tr_{D_I} R^k \equiv \mathbf{v}_I^\dagger R^k \mathbf{v}_I \qquad , \quad tr_{\bar{D}_I} R^k \equiv \mathbf{v}_I^{*\dagger} R^k \mathbf{v}_I^* = \rho_I^{k*} \tag{2.210}$$

で定義されるが、

$$R^k \mathbf{v}_I = \omega^{kI} \mathbf{v}_I \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_I \in D_I \qquad , \qquad R^k \mathbf{v}_I^* = \omega^{-kI} \mathbf{v}_I^* \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_I^* \in \bar{D}_I \tag{2.211}$$

よりこの表記は納得できる。また式 (2.209) の計算で最後に I, J を入れ替えたが、式 (2.98) よりこれは正しい事が分かる。この操作は後で fusion rule を考えるときに直感的に理解しやすい様に行った。ρ_I^k の具体値を書いておくと、式 (2.211) より

$$\rho_I^k = \omega^{kI} \tag{2.212}$$

となっている事が分かる。最後に式 (2.209) を適当な整数係数 n_{IJ}^K を用いて

$$Z_{IJ}(q) = \sum_K n_{IJ}^K \chi_K(q) \tag{2.213}$$

という形に書き直したい。式 (2.209) に $I = 0$ を代入すると、$\rho_0^K = 1$ より[55]

$$Z_{0I}(q) = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{k=0}^{N-1} \rho_I^k \hat{\chi}_e^{(X)R^k}(q) = \sum_K \delta_I^K \chi_K(q) = \chi_I(q) \tag{2.214}$$

[55] D_0 が $\mathbb{Z}_N$ の trivial な表現なので $tr_{D_0} R^k = 1$ と分かる。今回は式 (2.212) から直接求めても良い。

とわかるので[56] $\chi_I(q)$ を

$$\chi_I(q) = \frac{1}{|\Gamma|}\sum_{k=0}^{N-1}\rho_I^k\hat{\chi}_e^{(X)R^k}(q) \tag{2.215}$$

とすれば良い事がわかる。

2.3.3 石橋 state と石橋 character

次に $\mathbb{C}/\mathbb{Z}_N$ の石橋 state を調べよう [34]。Dirichlet 条件を考えると石橋 state は $|B_X, R^k\rangle\!\rangle$ とラベルされる。これは R^k sector の complex boson の始状態である石橋 state という意味である。Untwisted sector の場合は 0 モードを含んでいて煩雑なので後で考える事にして、まず twisted sector を考えよう。

つまり $(k = 1, \cdots, N-1)$ の場合を考えると $|B_X, R^k\rangle\!\rangle$ は flat な場合と同様に

$$\begin{aligned}(X^{(k)}(w) + \tilde{X}^{(k)}(\bar{w}))|B_X, R^k\rangle\!\rangle &= x^{(k)}|B_X, R^k\rangle\!\rangle \qquad , \quad \text{for } \mathrm{Im}(w) = 0 \\ (\bar{X}^{(k)}(w) + \tilde{\bar{X}}^{(k)}(\bar{w}))|B_X, R^k\rangle\!\rangle &= \bar{x}^{(k)}|B_X, R^k\rangle\!\rangle \qquad , \quad \text{for } \mathrm{Im}(w) = 0\end{aligned} \tag{2.216}$$

の 2 つの条件を同時に満たす解である。$X^{(k)}$ 等のラベル k は R^k twisted sector の complex boson である事を明確にするために書いた。また $x^{(k)}, \bar{x}^{(k)}$ は $|B_X, R^k\rangle\!\rangle$ の複素平面上での位置とその複素共役であるが、

$$x^{(k)} = \bar{x}^{(k)} = 0 \quad \text{for } k = 1, \cdots, N-1 \tag{2.217}$$

と書ける。今回は twisted sector の closed string が fixed point $(x = 0)$ に束縛されているので、それと couple する石橋 state は fixed point にいなければならないからである[57]。

式 (2.216) は貼り合わせの条件

$$(\alpha_r - \tilde{\alpha}_{-r})|B_X, R^k\rangle\!\rangle = (\bar{\alpha}_s - \tilde{\bar{\alpha}}_{-s})|B_X, R^k\rangle\!\rangle = 0 \qquad {}^\forall r \in \mathbf{Z} + \nu_k', s \in \mathbf{Z} - \nu_k' \tag{2.218}$$

となるので[58]、解は

$$|B_X, R^k\rangle\!\rangle = \exp\left(\sum_{r>0}\frac{1}{r}\bar{\alpha}_{-r}\tilde{\alpha}_{-r} + \sum_{s>0}\frac{1}{s}\alpha_{-s}\tilde{\bar{\alpha}}_{-s}\right)|0\rangle \qquad r \in \mathbf{Z} + \nu_k', s \in \mathbf{Z} - \nu_k' \tag{2.219}$$

と書ける。最後に untwisted sector の場合は位置 $x^{(0)}$ にあるとして

$$|B_X, e, x^{(0)}\rangle\!\rangle \equiv \delta^2(\hat{x} - x^{(0)})|0; p = 0\rangle \otimes |B_X, R^0\rangle\!\rangle \tag{2.220}$$

と定義しておこう。ただし $|B_X, R^0\rangle\!\rangle$ は式 (2.219) に $k = 0$ を代入したものである。

[56] 式 (2.214) で $n_{0I}^K = \delta_I^K$ としたのは、今までの様に $Z_{0I}(q)$ を $|0\rangle$ と $|I\rangle$ の間の amplitude と解釈したいからである。

[57] 今回は twisted sector には 0 モードが無いので運動量の operator が存在しない。そのため位置の operator $\hat{x}$ の固有値は自動的に 0 となる。

[58] $x \in \mathbb{R}$ として

$$X(x) = i\left(\frac{\alpha'}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{r\in\mathbf{Z}+\nu_k'}\frac{\alpha_r}{r}e^{irx}$$

$$\tilde{X}(x) = i\left(\frac{\alpha'}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{s\in\mathbf{Z}-\nu_k'}\frac{\tilde{\alpha}_s}{s}e^{-isx} = -i\left(\frac{\alpha'}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{r\in\mathbf{Z}+\nu_k'}\frac{\tilde{\alpha}_{-r}}{r}e^{irx}$$

等の関係式から計算できる。

石橋 character の計算

式 (2.219) は

$$|B_X, R^k\rangle\!\rangle = \exp\left(\sum_{r>0}\frac{1}{r}\alpha_r^\dagger\tilde{\alpha}_r^\dagger + \sum_{s>0}\frac{1}{s}\bar{\alpha}_s^\dagger\tilde{\alpha}_s^\dagger\right)|0\rangle \qquad r\in\mathbf{Z}+\nu_k', s\in\mathbf{Z}-\nu_k' \tag{2.221}$$

と書き直せて、交換関係が

$$[\alpha_r, \alpha_{r'}^\dagger] = r\delta_{rr'} \quad ,\cdots \tag{2.222}$$

であったことを踏まえると $c=2$ として

$$\begin{aligned}\langle\!\langle B_X, R^k|\tilde{q}^{\frac{1}{2}(L_0+\tilde{L}_0-\frac{c}{12})}|B_X, R^{k'}\rangle\!\rangle &= \delta_{kk'}\tilde{q}^{\frac{1}{2}\nu_k'(1-\nu_k')-\frac{c}{24}}\prod_{n=0}^{\infty}(1-\tilde{q}^{n+\nu_k'})^{-1}(1-\tilde{q}^{n+(1-\nu_k')})^{-1}\\ &= \begin{cases}\delta_{kk'}\chi_{R^k}^{(X)e}(\tilde{q}) & k\neq 0\\ \delta_{kk'}\hat{\chi}_e^{(X)e}(\tilde{q}) & k=0\end{cases}\end{aligned} \tag{2.223}$$

とわかる。この計算は付録 B.2.2 にまとめてあるので、必要ならば参照して欲しい。$k=0$ の場合は 0 モード の効果

$$\begin{aligned}A^{(0)} &\equiv \langle 0; p=0|\delta^2(\hat{x}-y^{(0)})e^{-\frac{\pi\alpha'}{2t}\hat{p}^2}\delta^2(\hat{x}-x^{(0)})|0; p=0\rangle\\ &= \frac{t}{2\pi^2\alpha'}\exp\left(-\frac{|y^{(0)}-x^{(0)}|^2}{2\pi\alpha'}t\right) \qquad , \quad \tau = it\end{aligned} \tag{2.224}$$

を[59]式 (2.223) に掛ける必要がある。最後に $\chi_{R^k}^{(X)e}(\tilde{q})$ 等の具体形は、式 (B.15) などより

$$\chi_{R^k}^{(X)e}(\tilde{q}) = i\tilde{q}^{-\frac{\nu_k'^2}{2}}\frac{\eta(\tilde{\tau})}{\theta_1(\tilde{\tau}\nu_k'|\tilde{\tau})} \qquad , \quad \text{for} \quad k\neq 0 \tag{2.225}$$

$$\chi_e^{(X)e}(\tilde{q}) = \eta(\tilde{\tau})^{-2} \qquad , \quad \tilde{\tau} = -1/\tau \tag{2.226}$$

となっている。

---

[59]

$$\begin{aligned}A^{(0)} &= \int\frac{\mathrm{d}Q'^2}{(2\pi)^2}\int\frac{\mathrm{d}Q^2}{(2\pi)^2}\langle p=0|e^{iQ'\cdot(\hat{x}-y^{(0)})}e^{-\frac{\pi\alpha'}{2t}\hat{p}^2}e^{iQ\cdot(\hat{x}-x^{(0)})}|p=0\rangle\\ &= \int\frac{\mathrm{d}Q'^2}{(2\pi)^2}\int\frac{\mathrm{d}Q^2}{(2\pi)^2}e^{-i(Q'\cdot y^{(0)}+Q\cdot x^{(0)})}\langle p=-Q'|e^{-\frac{\pi\alpha'}{2t}\hat{p}^2}|p=Q\rangle\\ &= \int\frac{\mathrm{d}Q^2}{(2\pi)^2}e^{iQ\cdot(y^{(0)}-x^{(0)})}e^{-\frac{\pi\alpha'}{2t}Q^2}\\ &= \frac{t}{2\pi^2\alpha'}\exp\left(-\frac{|y^{(0)}-x^{(0)}|^2}{2\pi\alpha'}t\right)\end{aligned}$$

より。ただし、$\langle p=Q'|p=Q\rangle = (2\pi)^2\delta^2(Q'-Q)$ と式 (C.44) を用いた。

2.3.4 Bosonic fractional brane

以上の話を踏まえて open-closed 対応から fractional brane の boundary state を求めたいが、その前に今まで特に考慮しなかった 0 モードの効果を考えよう。

0 モードの効果

まず fractional brane の boundary state を種類を表すラベル I と位置を表すラベル x を用いて $|I,x\rangle$ と表すと

$$|I,x\rangle = B^0_{I,x}|B_X,e,x^{(0)}\rangle\!\rangle + \sum_{k=1}^{N-1} B^k_{I,x}|B_X,R^k\rangle\!\rangle \tag{2.227}$$

の形で書ける。$B^k_{I,x}$ は open-closed 対応で決まる定数だがここでは重要でない。次に $|I,x\rangle$ に位置の operator $\hat{x}$ を掛けると式 (2.217) より

$$x|I,x\rangle = \hat{x}|I,x\rangle = B^0_{I,x}\hat{x}|B_X,e,x^{(0)}\rangle\!\rangle = B^0_{I,x}x^{(0)}|B_X,e,x^{(0)}\rangle\!\rangle \tag{2.228}$$

と計算出来るので $x = x^{(0)} = 0$ でなければならない。つまり、

$$\hat{x}|I,x\rangle = 0 \qquad , \quad \text{有効なラベルは } x=0 \text{ のみ} \tag{2.229}$$

となって fractional brane は全て fixed point 上にある事が分かる。全て $x=0$ なので、以下ではラベル x を省いて flactional brane を $|I\rangle$ と書く。

この様に全ての fractional brane は同じ場所 $(x=0)$ にあるので、fractional brane $|I\rangle,|J\rangle$ 間の open string の 1-loop amplitude Z_{IJ} には open string 0 モードの寄与 (brane 間の距離によるエネルギーの効果) が無いことが分かる。つまり、式 (2.211) は open string 0 モードを含めて正しい。この場合の石橋 state 間の内積は

$$\begin{aligned}
\langle\!\langle B_X,R^k|\tilde{q}^{\frac{1}{2}(L_0+\tilde{L}_0-\frac{c}{12})}|B_X,R^k\rangle\!\rangle &= \chi^{(X)e}_{R^k}(\tilde{q}) \quad \text{for} \quad k\neq 0 \\
\langle\!\langle B_X,e,0|\tilde{q}^{\frac{1}{2}(L_0+\tilde{L}_0-\frac{c}{12})}|B_X,e,0\rangle\!\rangle &= \frac{t}{2\pi^2\alpha'}\hat{\chi}^{(X)e}_e(\tilde{q}) \equiv \frac{1}{2\pi^2\alpha'}\chi^{(X)e}_e(\tilde{q})
\end{aligned} \tag{2.230}$$

でその他は 0 となる。上の式では便宜的に $\chi^{(X)e}_e(\tilde{q})$ を定義したが、これを $\chi^{(X)e}_{R^0}(\tilde{q})$ とみなすと

$$|B_X,0\rangle\!\rangle \equiv \sqrt{2\pi^2\alpha'}|B_X,e,0\rangle\!\rangle \qquad , \quad |B_X,k\rangle\!\rangle \equiv |B_X,R^k\rangle\!\rangle \quad \text{for} \quad k\neq 0 \tag{2.231}$$

と定義して[60]内積を

$$\langle\!\langle B_X,k'|\tilde{q}^{\frac{1}{2}(L_0+\tilde{L}_0-\frac{c}{12})}|B_X,k\rangle\!\rangle = \delta_{k'k}\chi^{(X)e}_{R^k}(\tilde{q}) \tag{2.232}$$

とまとめて表現することが出来る。最後に S 変換は

$$\hat{\chi}^{(X)R^k}_e(q) = \sigma(e|R^k)\chi^{(X)e}_{R^k}(\tilde{q}) \tag{2.233}$$

の形をしているが、式 (B.103),(C.26) より

$$\sigma(e|R^k) = \begin{cases} 2\sin\pi\nu'_k & \text{for} \quad k\neq 0 \\ 1 & \text{for} \quad k=0 \end{cases} \tag{2.234}$$

となっている。$\sigma(e|R^k)>0$ である事に注意しよう。

[60] $|B_X,0\rangle\!\rangle$ の定義をこの様にした理由は、flat な場合の Dirichlet 条件でも open-closed 対応で決まる $|B_X,e,0\rangle\!\rangle$ の前の係数が $\sqrt{2\pi^2\alpha'}$ となるからである。つまり後で fractional brane の boundary state を求めた時に $|B_X,0\rangle\!\rangle$ の前の係数が β だった時、fractional brane の untwisted sector の項の係数は flat な空間の D-brane の係数の β 倍だとすぐに分かる。

Fractional brane の boundary state の導出

以上を踏まえて fractional brane の boundary state を求めよう。まず必要な式をまとめておくと

$$Z_{IJ}(q) = \frac{1}{|\Gamma|}\sum_{k=0}^{N-1} \rho_I^{k*}\rho_J^k \hat{\chi}_e^{(X)R^k}(q) \tag{2.235}$$

$$Z_{IJ}(q) = \sum_{K=0}^{N-1} n_{IJ}^K \chi_K(q) \quad , \quad \chi_I(q) = \frac{1}{|\Gamma|}\sum_{k=0}^{N-1} \rho_I^k \hat{\chi}_e^{(X)R^k}(q) \tag{2.236}$$

$$\langle\langle B_X, k'|\tilde{q}^{\frac{1}{2}(L_0+\tilde{L}_0-\frac{c}{12})}|B_X, k\rangle\rangle = \delta_{k'k}\chi_{R^k}^{(X)e}(\tilde{q}) \tag{2.237}$$

$$\hat{\chi}_e^{(X)R^k}(q) = \sigma(e|R^k)\chi_{R^k}^{(X)e}(\tilde{q}) \tag{2.238}$$

となっていたので、S-matrix S_I^k を

$$\chi_I(q) \equiv \sum_k S_I^k \chi_{R^k}^{(X)e}(\tilde{q}) \tag{2.239}$$

と定義すると式 (2.236),(2.238) より

$$S_I^k = \frac{\rho_I^k}{|\Gamma|}\sigma(e|R^k) \tag{2.240}$$

となっている事が分かる。$I = 0$ の時に $S_0^k > 0$ と分かるので予想通りこれが $|0\rangle$ に対応していて、Cardy の解の方法より fractional brane $|I\rangle$ は

$$|I\rangle = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{S_I^k}{\sqrt{S_0^k}}|B_X, k\rangle\rangle = \frac{1}{\sqrt{|\Gamma|}}\sum_{k=0}^{N-1} \rho_I^k\sqrt{\sigma(e|R^k)}|B_X, k\rangle\rangle \tag{2.241}$$

と求まる。確かに

$$\langle I|\tilde{q}^{\frac{1}{2}(L_0+\tilde{L}_0-\frac{c}{12})}|J\rangle = \frac{1}{|\Gamma|}\sum_{k=0}^{N-1} \rho_I^{k*}\rho_J^k \hat{\chi}_e^{(X)R^k}(q) = Z_{IJ}(q) \tag{2.242}$$

となっていて、正しく amplitude が再現されている。

D-brane との対応

Fractional brane の和状態 $|D\rangle$ を $|D\rangle \equiv \sum_I |I\rangle$ と定義した時に

$$|D\rangle \equiv \sum_{I=0}^{N-1}|I\rangle = \sum_{k=0}^{N-1}\sqrt{\sigma(e|R^k)}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{|\Gamma|}}\sum_{I=0}^{N-1}\rho_I^k}_{\sqrt{|\Gamma|}\delta_{k0}}|B_X, k\rangle\rangle = \sqrt{|\Gamma|}|B_X, 0\rangle\rangle \tag{2.243}$$

となって twisted sector の項が消える事に注目しよう。この時 $|D\rangle$ は $\hat{x}$ の固有値で 0 以外を取る事が出来るので、$|D\rangle$ は D-brane に対応している。$|B_X, 0\rangle\rangle$ の前の係数は $\sqrt{|\Gamma|}$ なので flat な空間の D-brane のそれと $\sqrt{|\Gamma|}$ 倍違う事に注意しよう。

Fusion rule

最後に fusion rule を調べよう。今までと同じように n_{IJ}^K を計算すると、

$$n_{IJ}^K = \sum_\ell \frac{S_I^{\ell *} S_J^\ell (S^{-1})_\ell^K}{S_0^\ell} = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_\ell \rho_I^{\ell *} \rho_J^\ell \rho_K^{\ell *} \tag{2.244}$$

となっている事が分かる[61]。具体的には $\rho_I^\ell = \omega^{I\ell}$ を代入すると

$$n_{IJ}^K = \frac{1}{N} \sum_\ell \omega^{(-I+J-K)\ell} = \delta_{J-I,K} \tag{2.247}$$

となっていて、確かに整数である。一方、$\bar{D}_I$ と D_J の fusion rule を実際に調べると

$$\omega^{-kI} \times \omega^{kJ} = \omega^{k(J-I)} \qquad \Leftrightarrow \qquad \bar{D}_I \otimes D_J = D_{J-I} \tag{2.248}$$

なので、確かに n_{IJ}^K は $\bar{D}_I$ と D_J の fusion 係数となっている。注意するべき点として、式 (2.244) は最終結果に $\sigma(e|R^k)$ を含まない事がある。つまり、石橋 state は今回たまたま式 (2.231) と定義したが、各項を適当に定数倍して $\chi_{R^k}^{(X)e}(\tilde{q})$ の定義を変えても正しく議論ができて、出てくる結果は同じという事である。特に $|B_X, 0\rangle\rangle$ の定義を好きに取って構わない事が保証されている事が今回重要である。

2.3.5 Super string の場合

Super string の場合は world sheet fermion の効果を取り入れるだけなので、本質的にはあまり変わらない。しかし今回は R セクターの存在から (light cone ゲージで)$d-2=8$ 次元分全て考慮に入れる必要がある事に注意しよう[62]。簡単のため今回は Type 0B の場合を考える事にすると、まず式 (2.209) の Z_{IJ} は $m = v, o, s, c$ として次の様に拡張できる。

$$Z_{IJ;m}(q) = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{k=0}^{N-1} \rho_I^{k*} \rho_J^k \hat{\chi}_e^{(X)R^k}(q) (\chi'_m)_e^{R^k}(q) \times Z_{FB}^{d-2-2}(q) \tag{2.249}$$

まず $Z_{FB}(q)$ は flat boson の分配関数の効果を意味していて、ここでは具体形は必要無い。Orbifold 方向以外は $d-2-2$ 次元分あるので、それらの方向の world sheet boson の寄与は $Z_{FB}^{d-2-2}(q)$ で表される。次に $(\chi'_m)_e^{R^k}(q)$ は統計性も考慮した world sheet fermion の効果だが、付録 B.1.2 を踏まえると以下の様になっていることがわかる。

---

[61] ρ_I^ℓ の直交性

$$\frac{1}{|\Gamma|} \sum_\ell \rho_I^{\ell *} \rho_J^\ell = \delta_{IJ} \tag{2.245}$$

を用いると

$$(S^{-1})_\ell^K = \frac{\rho_K^{\ell *}}{\sigma(e|R^\ell)} \tag{2.246}$$

であることが分かる。さらに $\sigma(e|R^\ell) \in \mathbb{R}$ を利用すれば n_{IJ}^K が計算できる。

[62] R セクターが $SO(8)$ 表現である事と、統計性による -1 をうまく取り扱うために必要。

$$NS(+): \quad (\chi'_v)^{R^k}_e(q) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\theta_3(\nu'_k|\tau)}{\eta(\tau)}\right)\left(\frac{\theta_3(0|\tau)}{\eta(\tau)}\right)^3 - \left(\frac{\theta_4(\nu'_k|\tau)}{\eta(\tau)}\right)\left(\frac{\theta_4(0|\tau)}{\eta(\tau)}\right)^3\right] \tag{2.250}$$

$$NS(-): \quad (\chi'_o)^{R^k}_e(q) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\theta_3(\nu'_k|\tau)}{\eta(\tau)}\right)\left(\frac{\theta_3(0|\tau)}{\eta(\tau)}\right)^3 + \left(\frac{\theta_4(\nu'_k|\tau)}{\eta(\tau)}\right)\left(\frac{\theta_4(0|\tau)}{\eta(\tau)}\right)^3\right] \tag{2.250b}$$

$$R(+): \quad (\chi'_s)^{R^k}_e(q) = -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\theta_2(\nu'_k|\tau)}{\eta(\tau)}\right)\left(\frac{\theta_2(0|\tau)}{\eta(\tau)}\right)^3 + \left(-i\frac{\theta_1(\nu'_k|\tau)}{\eta(\tau)}\right)\left(-i\frac{\theta_1(0|\tau)}{\eta(\tau)}\right)^3\right] \tag{2.250c}$$

$$R(-): \quad (\chi'_c)^{R^k}_e(q) = -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\theta_2(\nu'_k|\tau)}{\eta(\tau)}\right)\left(\frac{\theta_2(0|\tau)}{\eta(\tau)}\right)^3 - \left(-i\frac{\theta_1(\nu'_k|\tau)}{\eta(\tau)}\right)\left(-i\frac{\theta_1(0|\tau)}{\eta(\tau)}\right)^3\right] \tag{2.250d}$$

ここで注意するべき性質として式 (B.112)、つまり untwisted sector の S 変換の係数は insertion g に依らないという事がある。この性質から $(\chi'_m)^{R^k}_e(q)$ の S 変換は flat な場合と全く同じで

$$(\chi'_m)^{R^k}_e(q) = \sum_n S'^n_{(8)m}(\chi'_n)^e_{R^k}(\tilde{q}) \tag{2.251}$$

と書ける。ここで $S'^n_{(8)m}$ は式 (2.170) と同じもので

$$S'_{(8)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.252}$$

である。つまり world sheet fermion の部分は flat の場合とほとんど同様に扱える。

具体的には、world sheet fermion の石橋 state は $|k;\sigma;\eta\rangle\rangle$ でラベルされる。$8-9$ 方向の complex fermion を $\psi, \bar{\psi}$ と書いた時、これは貼り合わせの条件

$$(\psi_{r_{k;\sigma}} + i\eta\tilde{\bar{\psi}}_{-r_{k;\sigma}})|k;\sigma;\eta\rangle\rangle = (\bar{\psi}_{-r_{k;\sigma}} + i\eta\tilde{\bar{\psi}}_{r_{k;\sigma}})|k;\sigma;\eta\rangle\rangle = 0 \tag{2.253}$$

$$r_{k;R} \in \mathbf{Z} + \nu'_k \quad , \quad r_{k;NS} \in \mathbf{Z} + \frac{1}{2} + \nu'_k \tag{2.254}$$

の解であるが[63]、これを flat の場合と全く同様に

$$|k;v\rangle\rangle \equiv \frac{1}{2}\left(|k;NS;+\rangle\rangle - |k;NS;-\rangle\rangle\right) \tag{2.255}$$

$$|k;o\rangle\rangle \equiv \frac{1}{2}\left(|k;NS;+\rangle\rangle + |k;NS;-\rangle\rangle\right) \tag{2.256}$$

$$|k;s\rangle\rangle \equiv \frac{1}{2}\left(|k;R;+\rangle\rangle + |k;R;-\rangle\rangle\right) \tag{2.257}$$

$$|k;c\rangle\rangle \equiv \frac{1}{2}\left(|k;R;+\rangle\rangle - |k;R;-\rangle\rangle\right) \tag{2.258}$$

[63] $8-9$ 方向は Dirichlet 条件であることを考慮すると係数は $+i\eta$ と分かる。また、$2 \sim 7$ 方向の条件は flat の場合と同様なので省略した。

と組めば、これらの内積は R セクターの内積は -1 倍のルールで

$$\langle\langle k';m'|\tilde{q}^{\frac{1}{2}(L_0+\tilde{L}_0-\frac{c}{12})}|k;m\rangle\rangle = \delta_{k'k}\delta_{m'm}(\chi'_m)^e_{R^k}(\tilde{q}) \tag{2.259}$$

となっている。

以上を踏まえると、$Z_{FB}^{d-2-2}(q)$ の部分は重要でないので以下では無視することにして、以下の様に拡張してゆけば良い事が分かる。まず $\chi_{I,m}(q)$ を前回の拡張で

$$\chi_{I,m}(q) \equiv \frac{1}{|\Gamma|}\sum_{k=0}^{N-1}\rho_I^k\hat{\chi}_e^{(X)R^k}(q)(\chi'_m)_e^{R^k}(q) \tag{2.260}$$

と定義しよう。するとこれの S 変換は

$$\chi_{I,m}(q) = \sum_{k,n} S_I^k S'^n_{(8)m}\chi_{R^k}^{(X)e}(\tilde{q})(\chi'_n)^e_{R^k}(\tilde{q}) \tag{2.261}$$

となっている事が分かる。よって全体の石橋 state $|k;m\rangle\rangle_{tot}$ を

$$|k;m\rangle\rangle_{tot} \equiv |B_X;k\rangle\rangle \otimes |k;m\rangle\rangle \tag{2.262}$$

と定義すると Type 0B fractional brane $|I,m\rangle$ は

$$|I,m\rangle = \sum_{k,n}\frac{S_I^k S'^n_{(8)m}}{\sqrt{S_0^k S'^n_{(8)v}}}|k;n\rangle\rangle_{tot} \tag{2.263}$$

となっている事が分かる。最後に fusion rule は $n^{K;\ell}_{I;m,J;n}$ を

$$\bar{D}_{I,m}\otimes D_{J,n} \equiv \sum_{K,\ell} n^{K;\ell}_{I;m,J;n}D_{K,\ell} \tag{2.264}$$

と定義した時に、前で求めた n_{IJ}^K と n_{mn}^ℓ を用いて積の形

$$n^{K;\ell}_{I;m,J;n} = n_{IJ}^K n_{mn}^\ell \tag{2.265}$$

で書ける事に注意しよう。この事から $n^{K;\ell}_{I;m,J;n}$ は確かに整数係数となっている事が分かり、さらに足 I,m はそれぞれ別々に fusion を行えば良い事が分かる。

さて、$|I,m\rangle$ 間の内積は具体的には fusion rule より

$$\langle I,m|\tilde{q}^{\frac{1}{2}(L_0+\tilde{L}_0-\frac{c}{12})}|J,n\rangle = \frac{1}{|\Gamma|}\sum_{k,\ell} n_{mn}^\ell\rho_I^{k*}\rho_J^k\hat{\chi}_e^{(X)R^k}(q)(\chi'_\ell)_e^{R^k}(q) \tag{2.266}$$

と書けるわけだが、式 (2.177) を見ると n_{mn}^ℓ は適当な ℓ_0 を用いて

$$n_{mn}^\ell = \delta_{\ell,\ell_0} \tag{2.267}$$

の形をしている事が分かるので、

$$\langle I,m|\tilde{q}^{\frac{1}{2}(L_0+\tilde{L}_0-\frac{c}{12})}|J,n\rangle = Z_{IJ;\ell_0}(q) \tag{2.268}$$

となっている事が分かる。つまり式 (2.249) の分配関数 $Z_{IJ;m}(q)$ の足 m は fusion を取った後の足を書いている事に相当している。最後に今回も $|I,m\rangle \sim \sum_k \rho_I^k|k;m\rangle\rangle_{tot}$ なので

$$|D,m\rangle \equiv \sum_{I=0}^{N-1}|I,m\rangle \tag{2.269}$$

は twisted sector の効果が無い事が分かり、D-brane に対応している。今回も $|k;m\rangle\rangle_{tot}$ の前の係数を調べると、flat な空間の D-brane の係数の $\sqrt{|\Gamma|}$ 倍だと分かる。

2.4 $\mathbb{C}^n/\Gamma$ の場合の fractional brane

セクション 2.3 の話を踏まえて、これを一般の $\mathbb{C}^n/\Gamma$ に拡張しよう。

2.4.1 Orbifold 群の作用

まず orbifold 群 Γ は complex boson X^ℓ $(\ell = 1 \sim n)$ を組んだ n 次元複素 vector に対して作用する $U(n)$ の部分離散群である。今回も h, g を Γ の元として twist が h で insertion が g の場合を考えよう。まず付録 B.3 の話から h と g が交換しない場合は分配関数が 0 となるのでその場合は特に考える必要が無い。よって以下では h, g が交換する場合を考えると、適当な unitary 変換で X^ℓ のラベルを貼りなおす事で $^\forall\ell$ に対して

$$\begin{aligned} X^\ell \in \mathcal{H}_h : \quad & X^\ell(w+2\pi) = e^{2\pi i \nu_{h,\ell}} X^\ell(w) \quad , \quad \nu_{h,\ell} \in \mathbb{R} \\ \hat{g} : \quad & |X^\ell\rangle \ \stackrel{\hat{g}}{\to} \ e^{2\pi i \nu_{g,\ell}} |X^\ell\rangle \quad , \quad \nu_{g,\ell} \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{2.270}$$

と位相が掛かるだけになる事が分かる[64]。ただし、$\hat{g}$ は Chan-Paton factor への作用を含んでいない g という意味である。複素共役 $\bar{X}^\ell$ には反対の位相が掛かり、complex fermion $\psi^\ell, \bar{\psi}^\ell$ は $X^\ell, \bar{X}^\ell$ と同じ作用を受けるのは前と同様である[65]。

式 (2.270) より分配関数は各 ℓ の分配関数の積の形になっているので、$\nu'_k \to \nu_{g,\ell}$ とすればセクション 2.3 の話が流用できる事が分かる。最後に、以下では簡単のため $h \neq e$ の場合は $\nu_{h,\ell} \neq 0$ として話をする。$\nu_{h,\ell} = 0$ だとそれを untwisted sector の様に扱わなければならないため、話が煩雑になるためである。

Chan-Paton factor への作用

ここでは Chan-Paton factor に対する g の作用を調べる事が目的だが、その前に群 Γ に対する幾つかの指標を定義しておこう。基本的にはセクション 2.3 と同様であるが、まず群の要素の数を $|\Gamma|$ と書いて、D_I を Γ の既約表現 (d_I 次元) としよう。次に Γ の元を conjugacy class $\mathcal{C}^\alpha$ で分類して ($\mathcal{C}^0$ を単位元の conjugacy class とする)、$\mathcal{C}^\alpha$ の要素の数を n_α と書こう。また $\mathcal{C}^\alpha$ の中のその要素 1 つを適当に取ってきて、それを $g^{(\alpha)}$ と置こう。最後に ρ_I^α を表現 D_I での $g^{(\alpha)}$ の trace、つまり

$$\rho_I^\alpha \equiv tr_{D_I} g^{(\alpha)} \tag{2.272}$$

と定義しよう。具体例を挙げると、例えば $\Gamma = \mathbb{Z}_N$ の場合は $\alpha = 0, \cdots, N-1$ で

$$n^\alpha = 1 \quad , \quad d_I = 1 \quad , \quad D_I \ : \ g^{(\alpha)} = \omega^{\alpha I} \quad , \quad \rho_I^\alpha = \omega^{\alpha I} \quad , \quad \omega \equiv e^{\frac{2\pi i}{N}} \tag{2.273}$$

---

[64] g, h が unitary 行列で同時対角化出来るので。

[65] ここで、式 X^ℓ の取り方が (g,h) に依る事を心配する人もいるだろう。確かに (g,h) に依るが、(g,h) に対して X^ℓ, (g',h') に対して X'^ℓ とした時に、両者は適当な unitary 行列 $U_{\ell\ell'}$ で

$$X'^\ell = \sum_{\ell'} U_{\ell\ell'} X^{\ell'} \tag{2.271}$$

と unitary 変換で結びついているので重要ではない。つまり基底の unitary 変換で分配関数 (trace) は値を変えないので、各 (g,h) の組毎に違った式 (2.270) を満たす X^ℓ を取って話をすれば良いという事である。

となっている事がセクション 2.3 の話から分かる。ρ_I^α の持っている性質は付録 C.2 にまとめておいたので、参照して欲しい。

以上を踏まえて今回も D-brane 1 つを $\mathbb{C}^n$ 方向と垂直に置くと、図 2.5 となる。

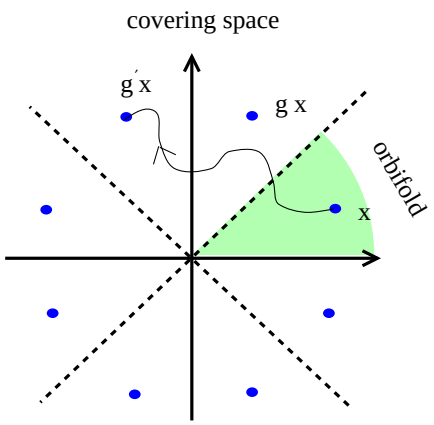

図 2.5: $\mathbb{C}^n/\Gamma$ 上の D-brane とその image

まず Chan-Paton factor に作用する Γ の表現 R は正則表現なので

$$R = \bigoplus_I d_I D_I \tag{2.274}$$

と既約分解される。つまり D_I 表現が d_I 個含まれているという事である。これは $\Gamma = \mathbb{Z}_N$ で

$$UR^{(\alpha)}U^{-1} = \mathrm{diag}(1, \omega^\alpha, \cdots, \omega^{(N-1)\alpha}) \qquad , \quad U \text{ は unitary 行列} \tag{2.275}$$

を意味しているので、セクション 2.3 で基底をうまく取って対角化した事に相当している。

2.4.2 Bosonic fractional brane

以上を踏まえて、まず bosonic string の場合の fractional brane を考えてみよう。まず式 (2.274) の下の話から、fractional brane の足は I である事が分かる。すると fractional brane I-J 間の open string の 1-loop amplitude $Z_{IJ}(q)$ は式 (2.209) の拡張で

$$Z_{IJ}(q) = \frac{1}{|\Gamma|}\sum_\alpha n^\alpha \ tr_{\bar{D}_I} g^{(\alpha)} \ tr_{D_J} g^{(\alpha)} \ \hat{\chi}_e^{(X)g^{(\alpha)}}(q) = \frac{1}{|\Gamma|}\sum_\alpha n^\alpha \rho_I^{\alpha *}\rho_J^\alpha \hat{\chi}_e^{(X)g^{(\alpha)}}(q) \tag{2.276}$$

と書けることが分かる[66]。これは ψ_I^α を

$$\psi_I^\alpha \equiv \sqrt{\frac{n_\alpha}{|\Gamma|}}\rho_I^\alpha \tag{2.277}$$

と定義すると

$$Z_{IJ}(q) = \sum_\alpha \psi_I^{\alpha *}\psi_J^\alpha \hat{\chi}_e^{(X)g^{(\alpha)}}(q) \tag{2.278}$$

[66] 同じ $\mathcal{C}^\alpha$ に入っている g は、同じ trace (ρ や χ) の値を返す事に注意しよう。そのため α で和をとって、n_α を重複度として掛けておけば良い事が分かる。

と書き直す事が出来る。また、$\hat{\chi}_e^{(X)g^{(\alpha)}}(q)$ は式 (2.207) を

$$\hat{\chi}_e^{(X)g^{(\alpha)}}(q) = \prod_{\ell=1}^{n}\left[2\sin\pi\nu_{\alpha,\ell}\frac{\eta(\tau)}{\theta_1(\nu_{\alpha,\ell}|\tau)}\right] \tag{2.279}$$

と拡張すれば良い。ただし $\nu_{g^{(\alpha)},\ell}$ を $\nu_{\alpha,\ell}$ と略記した。

一方、石橋 state は $|\alpha\rangle\!\rangle$ でラベルされ、内積は

$$\langle\!\langle\alpha|\tilde{q}^{\frac{1}{2}(L_0+\tilde{L}_0-\frac{c}{12})}|\beta\rangle\!\rangle = \delta_{\alpha\beta}\chi^{(X)e}_{g^{(\alpha)}}(\tilde{q}) \tag{2.280}$$

となっている。すると S 変換は

$$\hat{\chi}_e^{(X)g^{(\alpha)}}(q) = \sigma(e|g^{(\alpha)})\chi^{(X)e}_{g^{(\alpha)}}(\tilde{q}) \tag{2.281}$$

とした時に

$$\sigma(e|g^{(\alpha)}) = \begin{cases} \prod_{\ell=1}^{n}(2\sin\pi\nu_{\alpha,\ell}) & \text{for} \quad \alpha\neq 0 \\ 1 & \text{for} \quad \alpha = 0 \end{cases} \tag{2.282}$$

で与えられる事が分かる。最後に

$$Z_{IJ}(q) = \sum_K n_{IJ}^K\chi_I(q) \tag{2.283}$$

の形で書きたいので、$\chi_I(q)$ を式 (2.215) の拡張で

$$\chi_I(q) = \frac{1}{|\Gamma|}\sum_\alpha n_\alpha\rho_I^\alpha\hat{\chi}_e^{(X)g^{(\alpha)}}(q) \tag{2.284}$$

と定義すると[67]、S 変換が

$$\chi_I(q) = \sum_\alpha S_I^\alpha\chi^{(X)e}_{g^{(\alpha)}}(\tilde{q}) \qquad , \quad S_I^\alpha = \frac{n_\alpha\rho_I^\alpha}{|\Gamma|}\sigma(e|g^{(\alpha)}) \tag{2.285}$$

となっている事が分かる。

以上を踏まえると fractional brane $|I\rangle$ は

$$|I\rangle = \sum_\alpha\frac{S_I^\alpha}{\sqrt{S_0^\alpha}}|\alpha\rangle\!\rangle = \frac{1}{\sqrt{|\Gamma|}}\sum_\alpha\rho_I^\alpha\sqrt{n_\alpha\sigma(e|g^{(\alpha)})}|\alpha\rangle\!\rangle = \sum_\alpha\psi_I^\alpha\sqrt{\sigma(e|g^{(\alpha)})}|\alpha\rangle\!\rangle \tag{2.286}$$

と書けることが分かる。ここで、係数の I 依存性が ρ_I^α である事に注目しよう。付録 C.2 の話から $\rho_I^\alpha\cong D_I$ と同一視できるので、fractional brane $|I\rangle$ は

$$|I\rangle\cong D_I \tag{2.287}$$

と既約表現 D_I に対応している事が分かる。また、今回も確かに

$$\langle I|\tilde{q}^{\frac{1}{2}(L_0+\tilde{L}_0-\frac{c}{12})}|J\rangle = \sum_\alpha\psi_I^{\alpha*}\psi_J^\beta\hat{\chi}_e^{(X)g^{(\alpha)}}(q) = Z_{IJ}(q) \tag{2.288}$$

となって、正しく amplitude が再現される。

[67]

$$\chi_I = Z_{0I} = \frac{1}{|\Gamma|}\sum_\alpha n^\alpha\rho_0^{\alpha*}\rho_I^\alpha\hat{\chi}_e^{(X)g^{(\alpha)}}(q) = \frac{1}{|\Gamma|}\sum_\alpha n_\alpha\rho_I^\alpha\hat{\chi}_e^{(X)g^{(\alpha)}}(q)$$

より。ただし、$\rho_0^{\alpha*}=1$ (付録 C.2 参照) を用いた。

D-brane との対応

次に、D-brane に対応する状態を見つけよう。$d_I = \rho_I^{0*}$ と ρ の直交性を踏まえると、

$$|D\rangle = \sum_I d_I |I\rangle = \sqrt{|\Gamma|}|0\rangle\rangle \tag{2.289}$$

となっているので、$|D\rangle$ が D-brane に相当している事が分かる。つまり、

$$|D\rangle \cong R \tag{2.290}$$

で D-brane は正則表現 R に対応している。Untwisted sector の係数が flat な空間の D-brane の係数の $\sqrt{|\Gamma|}$ である事に注意しよう。

Fusion rule

さて、式 (2.283) の n_{IJ}^K は

$$n_{IJ}^K = \sum_\alpha \frac{S_I^{\alpha *} S_J^\alpha (S^{-1})_\alpha^K}{S_0^\alpha} = \frac{1}{|\Gamma|}\sum_\alpha n_\alpha \rho_I^{\alpha *}\rho_J^\alpha \rho_K^{\alpha *} \qquad , \quad (S^{-1})_\alpha^K = \frac{\rho_K^{\alpha *}}{\sigma(e|g^{(\alpha)})} \tag{2.291}$$

と計算できる。一方、$\bar{D}_I$ と D_J の fusion を

$$\bar{D}_I \otimes D_J = \sum_K n_{IJ;f}^K D_K \qquad , \quad n_{IJ;f}^K \in \mathbf{Z} \tag{2.292}$$

と書くと、付録 C.2 の話から

$$\begin{aligned} n_{IJ}^K &= \frac{1}{|\Gamma|}\sum_\alpha n_\alpha \rho^\alpha_{\bar{D}_I \otimes D_J} \rho_K^{\alpha *} \\ &= \sum_L n_{IJ;f}^L \underbrace{\frac{1}{|\Gamma|}\sum_\alpha n_\alpha \rho_L^\alpha \rho_K^{\alpha *}}_{\delta_{LK}} = n_{IJ;f}^K \in \mathbf{Z} \end{aligned} \tag{2.293}$$

と分かる。ただし ρ_A^α は Γ の表現 A での $g^{(\alpha)}$ の trace、つまり $\rho_A^\alpha \equiv tr_A g^{(\alpha)}$ である。この事から n_{IJ}^K が $\bar{D}_I \otimes D_J$ の fusion 係数と一致する事と、整数である事が確認できる。

2.4.3 Super string の場合

前に述べた様に、untwisted sector を考えている限り world sheet fermion の Virasoro character の S 変換は insertion g に依らないので、world sheet fermion の効果は flat な場合と殆ど変わらない。そのため super string の場合への拡張は簡単である。今回も Type 0B 理論を考えると、まず Z_{IJ} は

$$Z_{IJ;m}(q) = \frac{1}{|\Gamma|}\sum_\alpha n_\alpha \rho_I^{\alpha *}\rho_J^\alpha \hat{\chi}_e^{(X)g^{(\alpha)}}(q)(\chi'_m)_e^{g^{(\alpha)}}(q) \times Z_{FB}^{d-2-2n}(q) \tag{2.294}$$

と拡張すれば良い。ただし、$(\chi'_m)_e^{g^{(\alpha)}}(q)$ は

$$
\begin{aligned}
(\chi'_v)_e^{g^{(\alpha)}}(q) &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\theta_3(0|\tau)}{\eta(\tau)}\right)^{4-n}\prod_{\ell=1}^{n}\left(\frac{\theta_3(\nu_{\alpha,\ell}|\tau)}{\eta(\tau)}\right)-\left(\frac{\theta_4(0|\tau)}{\eta(\tau)}\right)^{4-n}\prod_{\ell=1}^{n}\left(\frac{\theta_4(\nu_{\alpha,\ell}|\tau)}{\eta(\tau)}\right)\right]\\
(\chi'_o)_e^{g^{(\alpha)}}(q) &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\theta_3(0|\tau)}{\eta(\tau)}\right)^{4-n}\prod_{\ell=1}^{n}\left(\frac{\theta_3(\nu_{\alpha,\ell}|\tau)}{\eta(\tau)}\right)+\left(\frac{\theta_4(0|\tau)}{\eta(\tau)}\right)^{4-n}\prod_{\ell=1}^{n}\left(\frac{\theta_4(\nu_{\alpha,\ell}|\tau)}{\eta(\tau)}\right)\right]\\
(\chi'_s)_e^{g^{(\alpha)}}(q) &= -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\theta_2(0|\tau)}{\eta(\tau)}\right)^{4-n}\prod_{\ell=1}^{n}\left(\frac{\theta_2(\nu_{\alpha,\ell}|\tau)}{\eta(\tau)}\right)+\left(-i\frac{\theta_1(0|\tau)}{\eta(\tau)}\right)^{4-n}\prod_{\ell=1}^{n}\left(-i\frac{\theta_1(\nu_{\alpha,\ell}|\tau)}{\eta(\tau)}\right)\right]\\
(\chi'_c)_e^{g^{(\alpha)}}(q) &= -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\theta_2(0|\tau)}{\eta(\tau)}\right)^{4-n}\prod_{\ell=1}^{n}\left(\frac{\theta_2(\nu_{\alpha,\ell}|\tau)}{\eta(\tau)}\right)-\left(-i\frac{\theta_1(0|\tau)}{\eta(\tau)}\right)^{4-n}\prod_{\ell=1}^{n}\left(-i\frac{\theta_1(\nu_{\alpha,\ell}|\tau)}{\eta(\tau)}\right)\right]
\end{aligned}
\tag{2.295}
$$

で与えられ、S 変換は flat な場合同様

$$
(\chi'_m)_e^{g^{(\alpha)}}(q) = \sum_{\tilde{m}} S'^{\tilde{m}}_{(8)m}(\chi'_{\tilde{m}})^e_{g^{(\alpha)}}(\tilde{q}) \tag{2.296}
$$

である。world sheet fermion の石橋 state は $|\alpha;m\rangle\!\rangle$ とラベルされ、内積は

$$
\langle\!\langle \alpha;m|\tilde{q}^{\frac{1}{2}(L_0+\tilde{L}_0-\frac{c}{12})}|\beta;m'\rangle\!\rangle = \delta_{\alpha\beta}\delta_{mm'}(\chi'_m)^e_{g^{(\alpha)}}(\tilde{q}) \tag{2.297}
$$

で与えられる。全体の石橋 state を

$$
|\alpha;m\rangle\!\rangle_{tot} \equiv |\alpha\rangle\!\rangle \otimes |\alpha;m\rangle\!\rangle \tag{2.298}
$$

と定義すると、Type 0B fractional brane $|I,m\rangle$ は

$$
\begin{aligned}
|I,m\rangle &= \frac{1}{\sqrt{|\Gamma|}}\sum_{\alpha,\tilde{m}}\rho_I^\alpha\sqrt{n_\alpha\sigma(e|g^{(\alpha)})}\frac{S'^{\tilde{m}}_{(8)m}}{\sqrt{S'^{\tilde{m}}_{(8)v}}}|\alpha;\tilde{m}\rangle\!\rangle\\
&= \sum_{\alpha\tilde{m}}\psi_I^\alpha\sqrt{\sigma(e|g^{(\alpha)})}\frac{S'^{\tilde{m}}_{(8)m}}{\sqrt{S'^{\tilde{m}}_{(8)v}}}|\alpha;\tilde{m}\rangle\!\rangle
\end{aligned}
\tag{2.299}
$$

となって表現 D_I に対応している。最後に fusion は I,m 別々に取れば良く、D-brane は

$$
|D,m\rangle = \sum_I d_I|I,m\rangle \tag{2.300}
$$

と正則表現に対応していて、untwisted sector の前の係数は flat な場合の $\sqrt{|\Gamma|}$ 倍である。

Type II fractional brane と補足

式 (2.299) の係数が boson×fermion の形で分解されている事を見ると、Type II B′ 理論の fractional brane は flat な場合と全く同様に構築できる。つまり、式 (2.183) の係数を流用して

$$
\begin{aligned}
|I,0\rangle &= \sum_\alpha\psi_I^\alpha\sqrt{\sigma(e|g^{(\alpha)})}(|\alpha;v\rangle\!\rangle+|\alpha;s\rangle\!\rangle)\\
|I,1\rangle &= \sum_\alpha\psi_I^\alpha\sqrt{\sigma(e|g^{(\alpha)})}(|\alpha;v\rangle\!\rangle-|\alpha;s\rangle\!\rangle)
\end{aligned}
\tag{2.301}
$$

とすれば、これが Type IIB′ 理論の fractional brane である。つまり flat な場合と同様 brane と anti brane が 1 つずつある。このように world sheet fermion の効果は flat の場合と全く同様になるので、基本的に bosonic で考えて後で適宜 fermion の効果を加えれば良い。

2.5 SUSY ALE の fractional brane

最後に ALE [68]空間である $\mathbb{C}^2/\Gamma$ 上の Type II 理論を考えよう。特に今回考えたいのは space time SUSY がある場合で、その理由は fractional brane に物理的な解釈を与える事ができるからである。具体的には $\mathbb{C}^2/\Gamma$ の特異点を blow up した時に、$K3$ 空間上に 2-cycle [69]が幾つか出来た状態になるが、fractional Dp-brane はこの 2-cycle に巻きついた D$(p+2)$-brane がつぶれたものに対応している [35]。この事を理解する事がこのセクションの目的である。

2.5.1 Orbifold 群の作用と空間の性質

まず target space X^1, X^2 に対する Γ の元 $g^{(\alpha)}$ の作用は、X^1, X^2 の適当な unitary 変換で

$$\begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \end{pmatrix} \overset{g^{(\alpha)}}{\to} Q(g^{(\alpha)}) \begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2\pi i \nu_{\alpha,1}} & 0 \\ 0 & e^{2\pi i \nu_{\alpha,2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \end{pmatrix} \tag{2.302}$$

と書ける。ここで Q は Γ の 2 次元表現で、“自然表現” と呼ばれている。Type II 理論を考えた時、一般的な $Q(g^{(\alpha)})$ だと space time SUSY が残らないのだが、$Q(g^{(\alpha)}) \in SU(2)$ の場合は space time SUSY が半分生き残るので[70]重要である。その時 $\nu_{\alpha,1} = -\nu_{\alpha,2} \equiv \nu_\alpha$ であるが、考えられる orbifold 群 Γ は

$$\begin{aligned} \Gamma = \quad & \mathbb{Z}_N \quad \text{for} \quad N \geq 2 \\ & \mathbb{D}_N \quad \text{for} \quad N \geq 2 \quad \cdots \quad \text{dihedral groups} \\ & \mathbb{T} \quad \cdots \quad \text{tetrahedral groups} \\ & \mathbb{O} \quad \cdots \quad \text{octahedral groups} \\ & \mathbb{I} \quad \cdots \quad \text{icosahedral groups} \end{aligned} \tag{2.303}$$

と分類できて[71]、それぞれの場合に出来る orbifold は以下の代数方程式で表される。

$$\begin{aligned} \Gamma = \mathbb{Z}_{N+1} \quad &\to \quad \hat{A}_N \quad : \quad x^2 + y^2 + z^{N+1} = 0 \quad \text{for} \quad N \geq 1 \\ \mathbb{D}_{N-2} \quad &\to \quad \hat{D}_N \quad : \quad x^2 + y^2 z + z^{N-1} = 0 \quad \text{for} \quad N \geq 4 \\ \mathbb{T} \quad &\to \quad \hat{E}_6 \quad : \quad x^2 + y^3 + z^4 = 0 \\ \mathbb{O} \quad &\to \quad \hat{E}_7 \quad : \quad x^2 + y^3 + yz^3 = 0 \\ \mathbb{I} \quad &\to \quad \hat{E}_8 \quad : \quad x^2 + y^3 + z^5 = 0 \end{aligned} \tag{2.304}$$

ここでラベル $\hat{A}_N, \hat{D}_N, \hat{E}_6, \hat{E}_7, \hat{E}_8$ は orbifold の特異点を blow up した時に出来る 2-cycle の配置を表している。

---

[68] Asymptotically Locally Euclidean $\cdots$ 無限遠で局所的には $\mathbb{R}^4$ に見える空間の事。

[69] 金太郎飴の様なものを考えて、切断面が 2 次元閉曲面になっているものを指す。

[70] この時 $\nu_{\alpha,1} = -\nu_{\alpha,2} \equiv \nu_\alpha$ であるが、これはセクション 3.4 の twist で $k = -1$ の場合に相当するので確かに SUSY が半分生き残る事が分かる。とりあえず結果を認めて先に進み、後で戻ってこれば理解出来ると思う。

[71] $\mathbb{Z}_1$ は何もしていない事に相当しているので省いた。

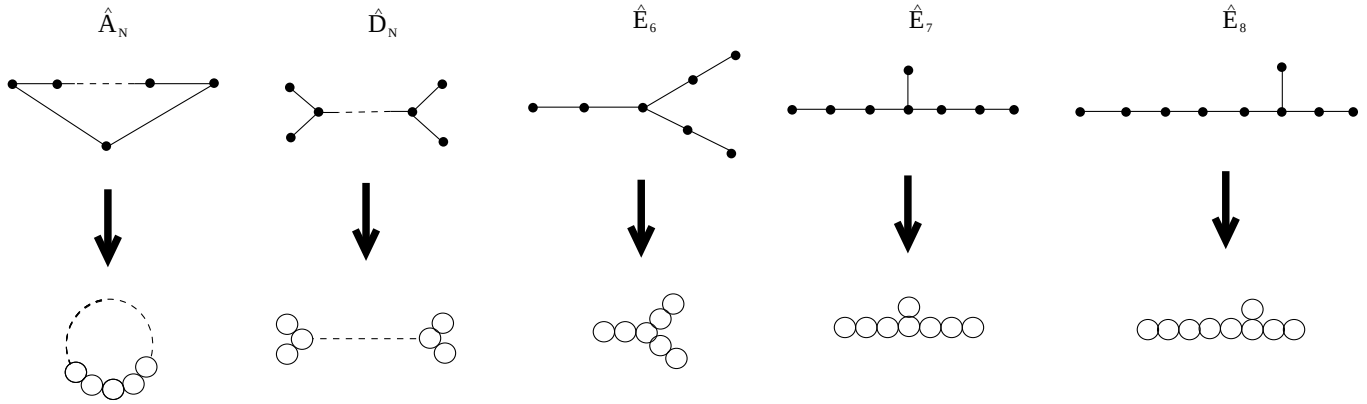

図 2.6: ADE 型の拡大 Dinkin 図と 2-cycle の配置

具体的には図 2.6 の対応となっているがこれを説明すると、まずラベルに対応する拡大 Dinkin 図を書いた時 (図 2.6 上)、対応する orbifold の特異点を brow up した時に 2-cycle が数珠繋ぎに配置されるが、その配置がその拡大 Dinkin 図と同じ形になっている (図 2.6 下)[72]。

McKay 対応

この様に自然表現が $SU(2)$ の場合、orbifold 群 Γ と拡大 Dinkin 図には対応が付いている訳だが、もっと具体的な対応がある事が知られている。その対応は "McKay 対応" [36] と呼ばれているが、ここではそれを紹介しよう。まず Γ の既約表現を今まで通り D_I と書くと、D_I の数 $r+1$ が対応する拡大 Dinkin 図の点の数と同じになっている。そこで Dinkin 図の各点に表現 $D_1 \sim D_r$ をうまく割り当てて、それを拡大する時に付ける 1 点に D_0 を割り当てる。例えば $\Gamma = \mathbb{Z}_{N+1}$ の場合は既約表現が $D_0 \sim D_N$ であるが、図 2.7 の様に対応させれば良い。

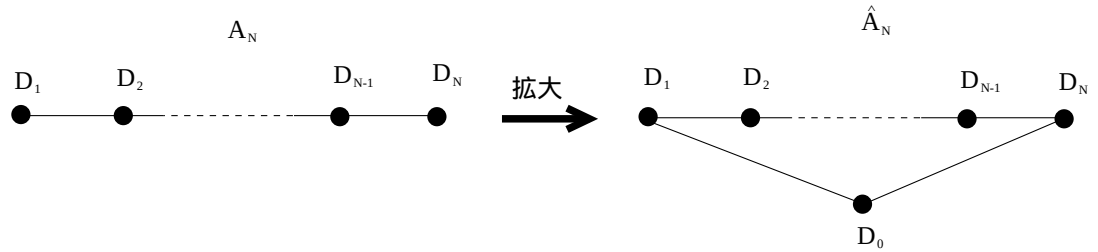

図 2.7: $\Gamma = \mathbb{Z}_{N+1}$ の既約表現 D_I と $\hat{A}_N$ の点の対応

以下では D_I に対応する拡大 Dinkin 図の点を I とラベルしよう。
さて、自然表現 Q と D_I の fusion rule が

$$Q \otimes D_I = \bigoplus_J \hat{A}_{IJ} D_J \tag{2.305}$$

[72] 拡大 Dinkin 図の点の数はラベルの数 $+1$ である事に注意しよう。例えば、$\hat{A}_N$ なら $N+1$ 個である。

であったとしよう。すると拡大 Dinkin 図の Cartan 行列 $\hat{C}_{IJ}$ との間に

$$\hat{C}_{IJ} = 2\delta_{IJ} - \hat{A}_{IJ} \tag{2.306}$$

の対応がある事が知られていて、式 (2.306) の対応は “McKay 対応” と呼ばれている。

一般的に、Cartan 行列 $\hat{C}_{IJ}$ は拡大 Dinkin 図の点 I に対応する根を α_I とした時に

$$\hat{C}_{IJ} \equiv \alpha_I \cdot \alpha_J \tag{2.307}$$

と根の間の内積で定義される。今回の場合は根の長さが $\sqrt{2}$ である事と、Dinkin 図の 1 本線の意味が根の間の角度が $120°$ である事、線でつながっていない事の意味が根の間の角度が $90°$ である事を踏まえると

$$\hat{C}_{IJ} = \begin{cases} \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2 & \cdots I = J \\ 2\cos\frac{2\pi}{3} = -1 & \cdots I \text{ と } J \text{ がつながっている時} \\ 2\cos\frac{\pi}{2} = 0 & \cdots I \text{ と } J \text{ がつながっていない時} \end{cases} \tag{2.308}$$

となる。式 (2.308) から、拡大 Dinkin 図の点 I と対応する 2-cycle を c_I と呼ぶと $-\hat{C}_{IJ}$ が

$$-\hat{C}_{IJ} = \begin{cases} -2 & \cdots I = J \\ 1 & \cdots c_I \text{ と } c_J \text{ がつながっている時} \quad \equiv c_I \cdot c_J \\ 0 & \cdots c_I \text{ と } c_J \text{ がつながっていない時} \end{cases} \tag{2.309}$$

となって、2-cycle c_I と c_J の交点数 $c_I \cdot c_J$ に対応している事が分かる。

これも $\mathbb{Z}_N$ の場合を見てみると、fusion rule が

$$\mathrm{diag}(\omega^{\alpha}, \omega^{-\alpha}) \times \omega^{\alpha I} = \mathrm{diag}(\omega^{\alpha(I+1)}, \omega^{\alpha(I-1)}) \qquad \Rightarrow \qquad Q \otimes D_I = D_{I+1} + D_{I-1} \tag{2.310}$$

なので、

$$\hat{A}_{IJ} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 1 \\ 1 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 & 0 \\ 1 & & & 1 & 0 \end{pmatrix} = \delta_{I+1,J} + \delta_{I-1,J} \tag{2.311}$$

となっているので、確かに McKay 対応通りになっている。

2.5.2 Witten index

次に Witten index $\mathcal{I}_{IJ}$ を I-J 間の open string の R セクターの分配関数

$$\mathcal{I}_{IJ} \equiv Z_{IJ}^{R(-1)^F} / Z_{FL}^{d-2-4} = -\frac{1}{|\Gamma|} \sum_{g \in \Gamma} Tr_{IJ;R}(g(-1)^F q^{L_0 - \frac{c}{24}}) / Z_{FL}^{d-2-4} \tag{2.312}$$

と定義しよう。ただし右辺の -1 倍は統計性から来ていて、Z_{FL} は flat な方向の効果

$$Z_{FL}(q) = Z_{FB}(q) \left(-i \frac{\theta_1(0|\tau)}{\eta(\tau)} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.313}$$

である。つまり $\mathcal{I}_{IJ}$ は orbifold 方向の効果だけを取り込んでいる[73]。$\mathcal{I}_{IJ}$ は具体的には

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{IJ} &= -\sum_{\alpha}\psi_I^{\alpha *}\psi_J^{\alpha}\hat{\chi}_e^{(X)g^\alpha}(q)\chi_{0,e}^{0,g^{(\alpha)}}(q) = \sum_{\alpha}\psi_I^{\alpha *}\psi_J^{\alpha}\prod_{\ell=1}^{2}(2\sin\pi\nu_{\alpha,\ell}) \\ \hat{\chi}_e^{(X)g^\alpha}(q)\chi_{0,e}^{0,g^{(\alpha)}}(q) &= \prod_{\ell=1}^{2}\left[2\sin\pi\nu_{\alpha,\ell}\frac{\eta(\tau)}{\theta_1(\nu_{\alpha,\ell}|\tau)}\left(-i\frac{\theta_1(\nu_{\alpha,\ell}|\tau)}{\eta(\tau)}\right)\right] = \prod_{\ell=1}^{2}(-2i\sin\pi\nu_{\alpha,\ell})\end{aligned} \tag{2.314}$$

と計算できて q に依らない (topological) 事が分かる[74]。

特に SUSY $\mathbb{C}^2/\Gamma$ の場合は $\mathcal{I}_{IJ}$ に物理的解釈がある。$\mathcal{I}_{IJ}$ の定義式 (2.312) を見ると

$$\text{chirality が } 1 \text{ の fermion の効果} \quad - \quad \text{chirality が } -1 \text{ の fermion の効果} \tag{2.315}$$

の形をしている事が分かるが、space time SUSY があるので ground state 以外は non-chiral で相殺する。R セクターの open string の ground state は massless なので[75]、massive モードの効果が相殺して massless のみ効くという事である。$q^0 = 1$ なので massless モードはその string の chirality を値として返す事を踏まえると、$\mathcal{I}_{IJ}$ は

$$\mathcal{I}_{IJ} = N_+ - N_- \ \in \ \mathbf{Z} \qquad , \quad N_\eta \text{は } (-1)^F = \eta \text{ の } I\text{-}J \text{ 間の massless fermion の数} \tag{2.316}$$

となって Witten index の様な役割を果たす事が分かる。今回は $\mathcal{I}_{IJ}$ が q に依らないだけでなく、値が整数である事に注目しよう。そのため blow up (連続変形) をしても $\mathcal{I}_{IJ}$ は値を変えることができない事がわかる。よって、blow up 前後の $\mathcal{I}_{IJ}$ を比較する事に意味がある事が分かる。最後に SUSY $\mathbb{C}^2/\Gamma$ の場合は式 (2.314) に $\nu_{\alpha,1} = -\nu_{\alpha,2} \equiv \nu_\alpha$ を代入すると

$$\mathcal{I}_{IJ} = -\sum_{\alpha}\psi_I^{\alpha *}\psi_J^{\alpha}4\sin^2\pi\nu_\alpha \tag{2.317}$$

となっている事が分かる。

McKay 対応との関係

SUSY ALE の場合の $\mathcal{I}_{IJ}$ の性質をもう少し詳しく調べてみよう [37],[38]。まず式 (2.317) は ψ_J^α の直交性から

$$\mathcal{I}_{IJ} = -\sum_{\alpha}\psi_I^{\alpha *}\psi_J^{\alpha}(2-2\cos 2\pi\nu_\alpha) = -2\delta_{IJ} + \sum_{\alpha}\psi_I^{\alpha *}\psi_J^{\alpha}\rho_Q^\alpha \tag{2.318}$$

と書き直せることが分かる。ただし、ρ_Q^α は

$$\rho_Q^\alpha \equiv tr_Q(g^{(\alpha)}) \equiv Tr\begin{pmatrix} e^{2\pi i\nu_\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-2\pi i\nu_\alpha}\end{pmatrix} \tag{2.319}$$

[73] $Z_{FL}(q) = 0$ である事に注意しよう。そのため、flat な方向の分を無視して $\mathcal{I}_{IJ}$ を定義しないと自動的に 0 となって有用なものにならない。

[74] この計算は特に $\nu_{\alpha,\ell}$ に制約を付けていないので、一般の $\mathbb{C}^2/\Gamma$ の場合で成り立っている。

[75] Open string は untwisted sector しかない事を思い出そう。

で定義され、自然表現 Q での $g^{(\alpha)}$ の trace を指している[76]。次に $Q \otimes D_I$ の fusion rule を

$$Q \otimes D_I = \bigoplus_J \hat{A}_{IJ} D_J \tag{2.320}$$

とすると、付録 C.2 の話から

$$\rho_Q^\alpha \psi_I^\alpha = \sqrt{\frac{n_\alpha}{|\Gamma|}} \rho_Q^\alpha \rho_I^\alpha = \sqrt{\frac{n_\alpha}{|\Gamma|}} \rho_{Q\otimes D_I}^\alpha = \sum_J \hat{A}_{IJ} \sqrt{\frac{n_\alpha}{|\Gamma|}} \rho_J^\alpha = \sum_J \hat{A}_{IJ} \psi_J^\alpha \tag{2.321}$$

を満たしている事が分かる。よって式 (2.318) は

$$\mathcal{I}_{IJ} = -2\delta_{IJ} + \sum_\alpha \psi_I^{\alpha *} \hat{A}_{JK} \psi_K^\alpha = -2\delta_{IJ} + \hat{A}_{JI} \tag{2.322}$$

と書ける。$\mathcal{I}_{IJ}$ が整数 (実数) なので、具体形 (2.317) の複素共役を取る事で $\mathcal{I}_{IJ}$ が実対称行列である事が分かるので、$\hat{A}_{IJ}$ も実対称行列だと分かる。よって式 (2.322) は

$$\mathcal{I}_{IJ} = -2\delta_{IJ} + \hat{A}_{IJ} \tag{2.323}$$

と書き直せる。この式を見ると、McKay 対応から

$$\mathcal{I}_{IJ} = -\hat{C}_{IJ} \tag{2.324}$$

と書ける事が分かる。

---

[76] 蛇足かも知れないが、R セクターの 0 モードへの $g^{(\alpha)}$ の作用 $\hat{g}^{(\alpha)}$ は付録 B.1.2 の脚注 8 より

$$\hat{g}^{(\alpha)} = \begin{pmatrix} e^{-\pi i \nu_{\alpha,1}} & 0 \\ 0 & e^{\pi i \nu_{\alpha,1}} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} e^{-\pi i \nu_{\alpha,2}} & 0 \\ 0 & e^{\pi i \nu_{\alpha,2}} \end{pmatrix}$$

とかけるので、ground state に関する trace は

$$\begin{aligned} tr(\hat{g}^{(\alpha)}) &= e^{-\pi i(\nu_{\alpha,1}+\nu_{\alpha,2})} + e^{-\pi i(\nu_{\alpha,1}-\nu_{\alpha,2})} + e^{\pi i(\nu_{\alpha,1}-\nu_{\alpha,2})} + e^{\pi i(\nu_{\alpha,1}+\nu_{\alpha,2})} \\ &= 2 + 2\cos 2\pi\nu_\alpha = 2 + \rho_Q^\alpha \end{aligned}$$

となる事がわかる。以上を用いて insertion g の R セクターの分配関数の 0 モードの寄与を計算すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{g\in\Gamma} Tr_{IJ;R}(g q^{L_0 - \frac{c}{24}})|_{q=0} &= \sum_\alpha \psi_I^{\alpha *} \psi_J^\alpha Tr(\hat{g}^\alpha) = \sum_\alpha \psi_I^{\alpha *} \psi_J^\alpha (2 + 2\cos 2\pi\nu_\alpha) \\ &= 2\delta_{IJ} + \sum_\alpha \psi_I^{\alpha *} \psi_J^\alpha \rho_Q^\alpha \end{aligned}$$

となっているので、

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{g\in\Gamma} Tr_{IJ;R} \left[g \left(\frac{1 + (-1)^F}{2} \right) q^{L_0 - \frac{c}{24}} \right] |_{q=0} &= 2\delta_{IJ} \\ \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{g\in\Gamma} Tr_{IJ;R} \left[g \left(\frac{1 - (-1)^F}{2} \right) q^{L_0 - \frac{c}{24}} \right] |_{q=0} &= \sum_\alpha \psi_I^{\alpha *} \psi_J^\alpha \rho_Q^\alpha = \hat{A}_{IJ} \end{aligned}$$

と対応している事が分かる。今回は $Q \in SU(2)$ なので chirality + の fermion が不変 (生き残る) なので、予想通りの結果となっている。

2.5.3 SUSY ALE orbifold 上の fractional brane の物理的解釈

以上を踏まえて、SUSY ALE orbifold 上の fractional brane に物理的解釈を与えよう。まず SUSY ALE orbifold の $\mathbb{C}^2/\Gamma$ を blow up した状態を考えると、これは前に述べたように $K3$ 空間上に 2-cycle が数珠繋ぎで並んでいる系となっている。次に 2-cycle c_I に D(p+2)-brane を巻きつけて、2 つの 2-cycle c_I, c_J を両端に持つ space time fermion を考えると、図 2.8 の様になっている。

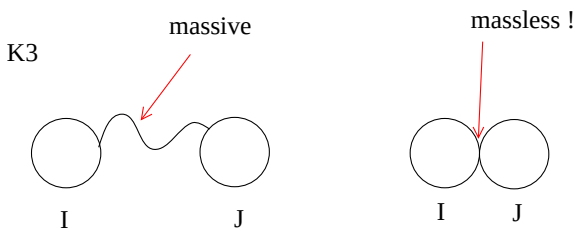

図 2.8: $K3$ 空間上の 2-cycle c_I, c_J を両端に持つ space time fermion

つまり、c_I と c_J が交わっている場合のみ massless モードが存在する事が分かる。さて、c_I と c_J が交わっている場合の massless fermion の数を chirality も合わせて調べてみると

$$\text{Type II} \quad \cdots \quad \text{chirality} + \text{が 2 個} \qquad \Rightarrow \qquad K3 \quad \cdots \quad \text{chirality} + \text{が 1 個}$$

となっているので[77]、今回も c_I, c_J 間の fermion に対する witten index $\mathcal{I}_{IJ;cycle}$ を計算すると

$$\mathcal{I}_{IJ;cycle} = c_I \cdot c_J \tag{2.325}$$

と分かる[78]。以上より、

$$\mathcal{I}_{IJ} = -\hat{C}_{IJ} = c_I \cdot c_J = \mathcal{I}_{IJ;cycle} \tag{2.326}$$

となって $\mathcal{I}_{IJ}$ と $\mathcal{I}_{IJ;cycle}$ が同じ値である事がわかる。前にも述べたように witten index は blow up で変化しないので、両者が一致するという事は

> “2-cycle c_I に巻きついた D(p+2)-brane の orbifold limit [79]を取ったものが
> fractional Dp-brane $|I\rangle$ である ”

という事が示唆される。以下ではこの示唆が正しい事を確認する事を目標としよう。具体的には 2-cycle に巻きついた D(p+2)-brane の幾何学的性質を調べて、それの orbifold limit を取る事で fractional brane の物理量 (tention や RR charge 等) が説明出来る事を確かめたいが、まだ brane の持つ charge について話していなかったのでまずそれらの値についてまとめておく。

---

[77] $\mathbb{C}^2$ 以外の方向 $\mathbb{R}^{1,d-1-4}$ の自由度は無視した。

[78] c_I と c_J が交わっている場合のみ chirality +の massless fermion が 1 つ存在するので。

[79] $K3$ 空間を blow down で orbifold に戻す操作の事。具体的には 2-cycle をつぶして特異点にする操作を表している。

D-brane の tention と RR charge

まず flat な空間の Type II Dp-brane の boundary state を考えよう。規格化定数 N_p は式 (2.146) より

$$N_p = \frac{\sqrt{\pi}}{2} 2^{\frac{10-d}{4}} (2\pi\sqrt{\alpha'})^{\frac{d}{2}-p-2} \tag{2.327}$$

であったわけだが、Dp-brane の tention τ_p との対応は

$$\tau_p \equiv \frac{T_p}{\kappa} \quad , \quad T_p = 2N_p = \sqrt{\pi} 2^{\frac{10-d}{4}} (2\pi\sqrt{\alpha'})^{\frac{d}{2}-p-2} \tag{2.328}$$

となっている。ただし、κ は d 次元の重力定数である。同様に RR charge μ_p は

$$\mu_p = \sqrt{2} T_p = 2\sqrt{2} N_p \tag{2.329}$$

となっている。

次に orbifold $\mathbb{C}^n/\Gamma$ の fractional brane を考えよう。式 (2.286) を参考にしながら fermion の足を無視して全ての方向を考えて、規格化定数 $N_p^{(\alpha)}$ を

$$|I\rangle = N_p^{(0)} \psi_I^0 |0\rangle\rangle' + \sum_{\alpha \neq 0} N_p^{(\alpha)} \psi_I^\alpha \sqrt{\sigma(e|g^{(\alpha)})} |\alpha\rangle\rangle \tag{2.330}$$

と定義しよう。ただし $|0\rangle\rangle'$ は flat な場合の式 (2.132) と同様に

$$|0\rangle\rangle' \equiv \delta^{d-p-1}(\hat{x}^i - y^i) \exp(-\sum_{r>0} \cdots) |0;0\rangle \tag{2.331}$$

と定義されたものである[80]。するとセクション 2.3 の脚注 60 の話より $N_p^{(0)} = N_p$ と分かるが、式 (2.231) より twisted sector の係数は複素 1 次元当たり untwisted sector のそれの $(2\pi^2\alpha')^{-\frac{1}{2}}$ 倍なので、これを式でまとめると

$$N_p^{(0)} = N_p \quad , \quad N_p^{(\alpha)} = (2\pi^2\alpha')^{-\frac{n}{2}} N_p \quad \text{for} \quad \alpha \neq 0 \tag{2.332}$$

となっている。今回も T_p, μ_p に対応する $T_p^{(\alpha)}, \mu_p^{(\alpha)}$ をまとめると、まず untwisted sector の場合は

$$T_p^{(0)} = \frac{T_p}{\sqrt{|\Gamma|}} \quad , \quad \mu_p^{(0)} = \frac{\mu_p}{\sqrt{|\Gamma|}} \tag{2.333}$$

となっている。Flat な場合の $\frac{1}{\sqrt{|\Gamma|}}$ 倍になっているのは以下の理由である。

まず、 $\mathbb{C}^n/\Gamma$ 方向のみを見た D-brane の effective action の内、興味のある部分を拾うと

$$L = \left(\int_{\mathbb{C}^n/\Gamma} \mathrm{d}x (\partial\phi)^2 \right) + \tau_p^{(0)} \phi \tag{2.334}$$

の形になっている。ただし、ϕ は dilaton で $\tau_p^{(0)} = \frac{T^{(0)p}}{\kappa}$ である。次に、これは

$$\begin{aligned} L &= \left(\frac{1}{|\Gamma|} \int_{\mathbb{C}^n} \mathrm{d}x (\partial\phi)^2 \right) + \tau_p^{(0)} \phi \\ &= \left(\int_{\mathbb{C}^n} \mathrm{d}x (\partial\phi')^n \right) + \tau_p'^{(0)} \phi' \end{aligned} \tag{2.335}$$

[80] つまり、式 (2.231) の $|B_X, e, 0\rangle\rangle$ の方に対応していると言いたい。

と covering space 上の effective action に書き直せる。ただし、

$$\phi' \equiv \frac{\phi}{\sqrt{|\Gamma|}} \quad , \quad \tau_p'^{(0)} \equiv \sqrt{|\Gamma|}\tau_p^{(0)} \tag{2.336}$$

とした。Flat な場合と同様に amplitude を計算するには covering space 上の理論で行わなければならないので、$N_p^{(0)}$ に対応しているのは $\tau_p'^{(0)}$ の方である事がわかる。よって、

$$T_p'^{(0)} \equiv \kappa\tau_p'^{(0)} \quad , \quad T_p'^{(0)} = 2N_p^{(0)} = T_p \quad \Rightarrow \quad T_p^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{|\Gamma|}}T_p'^{(0)} = \frac{T_p}{\sqrt{|\Gamma|}} \tag{2.337}$$

となって、flat な場合の $\frac{1}{\sqrt{|\Gamma|}}$ 倍になっている。$\mu_p^{(0)}$ の方も全く同様である。

式 (2.333) より、fractional brane $|I\rangle$ の untwisted sector の charge $T_{I,p}, Q_{I,p}$ は

$$T_{I,p} = \frac{T_p}{\sqrt{|\Gamma|}}\psi_I^0 \quad , \quad Q_{I,p} = \frac{\mu_p}{\sqrt{|\Gamma|}}\psi_I^0 \tag{2.338}$$

で与えられるが、

$$\psi_I^0 = \frac{1}{\sqrt{|\Gamma|}}\rho_I^0 = \frac{d_I}{\sqrt{|\Gamma|}} \tag{2.339}$$

であることを踏まえると

$$T_{I,p} = \frac{d_I}{|\Gamma|}T_p \quad , \quad Q_{I,p} = \frac{d_I}{|\Gamma|}\mu_p \tag{2.340}$$

となっている事が分かる。一方 D-brane は $\sum_I d_I|I\rangle$ に対応していたので

$$\text{tention} \ : \ \sum_I \frac{d_I^2}{|\Gamma|}T_p = T_p \quad , \quad \text{RR charge} \ : \ \sum_I \frac{d_I^2}{|\Gamma|}\mu_p = \mu_p \tag{2.341}$$

となっていて、flat な場合の D-brane と同じ charge を持っている事が分かる。式 (2.340),(2.341) を見比べると、確かに fractional brane の untwisted charge は D-brane のそれの分数になっている事が分かる。

最後に、Twisted sector の場合は

$$T_p^{(\alpha)} = 2^{-\frac{n}{2}}N_p^{(\alpha)} = T_{p+2} \quad , \quad \mu_p^{(\alpha)} = 2^{-\frac{n}{2}}2\sqrt{2}N_p^{(\alpha)} = \mu_{p+2} \tag{2.342}$$

となっている。Twisted sector の closed string は fixed point から動けないので、orbifold 方向の kinetic term が無い事に注意しよう。そのため、untwisted sector の様な $\frac{1}{\sqrt{|\Gamma|}}$ 倍が掛からない。

幾何的解釈

2-cycle c_I に巻きついた D(p+2)-brane の性質を調べよう。混乱しない様に今まで書かなかったが、実は 2-cycle c_I は全て独立ではない。独立な 2-cycle は $c_1 \sim c_r$ で、I から 0 を省いたラベルを以下では i とかくと、$c_0 = -\sum_i d_i c_i$ の対応がある[81]。

ということで本題に入ると、まず D(p+2)-brane に couple する RR (p+3)-form A_{p+3} を

$$A_{p+3} = \sum_i A^{(i)}_{p+1} \wedge \omega_i \tag{2.343}$$

と分解しよう。ただし、ω_i は 2-cycle c_i と Poincaré dual な 2 form で、$\mathcal{M}_\Gamma$ を orbifold (を blow up した) 方向とすると

$$\int_{\mathcal{M}_\Gamma} \omega_i \wedge \omega_j = \int_{c_i} \omega_j = c_i \cdot c_j = -C_{ij} \tag{2.344}$$

の性質をもっている。ここで Kaluza-Klein 的に $A^{(i)}_{p+1}$ が $\mathcal{M}_\Gamma$ 方向に依らない様に A_{p+3} を取っておくと、c_i に巻きついた D(p+2)-brane の Wess-Zumino coupling は

$$\mu_{p+2} \int_{D(p+2)} A_{p+3} = \mu_{p+2} \sum_j \int_{Dp} A^{(j)}_{p+1} \int_{c_i} \omega_j = -\mu_{p+2} \sum_j C_{ij} \int_{Dp} A^{(j)}_{p+1} \tag{2.345}$$

と分解できる事が分かる。よって、この $A^{(j)}_{p+1}$ が orbifold limit で twisted RR (p+1)-form $A^{(\alpha)}_{p+1}$ $(\alpha \neq 0)$ と対応している事が予想できる[82]。$\alpha \neq 0$ で $\mu_p^{(\alpha)} = \mu_{p+2}$ であった事を思い出すと、

$$A^{(i)}_{p+1} \equiv -\sum_j \sum_{\alpha \neq 0} (C^{-1})_{ij} \psi_j^\alpha \sqrt{\sigma^\alpha} A^{(\alpha)}_{p+1} \qquad , \quad \sigma^\alpha \equiv \sigma(e|g^{(\alpha)}) \tag{2.346}$$

$$-\mu_{p+2} \sum_j C_{ij} \int_{Dp} A^{(j)}_{p+1} = \sum_{\alpha \neq 0} \mu_p^{(\alpha)} \psi_i^\alpha \sqrt{\sigma^\alpha} \int_{Dp} A^{(\alpha)}_{p+1} \tag{2.347}$$

とすれば fractional brane $|i\rangle$ の twisted RR の charge が再現できる (式 (2.330) 参照のこと)。$A^{(i)}_{p+1}$ の kinetic term を調べてみると、同じ足 i, j で和を取る事にして

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^{1,5}} \bar{F}^{(i)}_{p+2} \wedge C^*_{ij} F^{(j)}_{p+2} &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^{1,5}} \sum_{\alpha,\beta \neq 0} (C^{-1} \psi^{*\alpha})^T C C^{-1} \psi^\beta \sqrt{\sigma^\alpha} \sqrt{\sigma^\beta} \bar{F}^{(\alpha)}_{p+2} \wedge^* F^{(\beta)}_{p+2} \\ &= \sum_{\alpha \neq 0} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^{1,5}} \bar{F}^{(\alpha)}_{p+2} \wedge^* F^{(\alpha)}_{p+2} \end{aligned} \tag{2.348}$$

となっている。足 α について対角化されている事と、係数が canonical $(\frac{1}{2})$ である事に注意しよう。この事から、式 (2.347) の対応で $A^{(\alpha)}_{p+1}$ を作る事が妥当である事が示された。式 (2.348) の計算では

$$(C^{-1} \psi^{*\alpha})^T \psi^\beta = \psi_i^{*\alpha} C^{-1}_{ij} \psi_j^\beta = \frac{\delta_{\alpha\beta}}{\sigma^\alpha} \qquad , \quad \text{for} \quad \alpha, \beta \neq 0 \tag{2.349}$$

[81] これは orbifold を実際に blow up して証明された事であるが、物理的には次のように理解出来る。まず $\sum_I d_I c_I$ に巻きついたものを orbifold 上の Dp-brane と解釈したいが、$\sum_I d_I c_I = 0$ でないとこれに巻きついた D-brane が動く事が出来ないのでまずい。そのため、$c_0 = -\sum_i d_i c_i$ が成り立っている事は納得できる。

[82] Untwisted RR は含まれない。Untwisted RR は orbifold 方向に伝播できるので、そちらの方向に依存性があっても構わない。つまり、$A^{(i)}_{p+1}$ とは性質が違うということである。一方 twisted RR は orbifold 方向に伝播出来ないので、$A^{(i)}$ と性質が同じで妥当である。

を用いた。同様に $c_0 = -\sum_i d_i c_i$ に巻きついた D(p+2)-brane の Wess-Zumino coupling は

$$\sum_i (-d_i) \sum_{\alpha \neq 0} \mu_p^{(\alpha)} \psi_i^\alpha \sqrt{\sigma^\alpha} \int_{Dp} A_{p+1}^{(\alpha)} = \sum_{\alpha \neq 0} \mu_p^{(\alpha)} \sqrt{\frac{n_\alpha}{|\Gamma|}} \sqrt{\sigma^\alpha} \int_{Dp} A_{p+1}^{(\alpha)} \tag{2.350}$$

と計算出来るので[83]、fractional brane $|0\rangle$ の twisted RR も再現出来る。

次に untwisted RR は D-brane の Chern-Simons 型の action の

$$\mu_{p+2} \int_{D(p+2)} \exp(2\pi\alpha' \mathcal{F} + \mathcal{B}) \wedge \sum_q A_q \tag{2.352}$$

展開の 1 次に対応する Wess-Zumino coupling

$$\mu_{p+2} \int_{D(p+2)} A_{p+1} \wedge (2\pi\alpha' \mathcal{F} + \mathcal{B}) = \mu_{p+2} \int_{Dp} A_{p+1} \int_{c_i} (2\pi\alpha' \mathcal{F} + \mathcal{B}) \tag{2.353}$$

に対応させる事が出来る。ただし、$\mathcal{F}$ はゲージ場の field stress で、$\mathcal{B}$ は NS 2-form (B 場) である。$\mathcal{F}$,$\mathcal{B}$ の configuration として

$$\mathcal{F} = 0 \qquad , \quad \mathcal{B} = -\frac{\mu_p}{\mu_{p+2}} \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{i,j} d_i (C^{-1})_{ij} \omega_j \tag{2.354}$$

とすれば、

$$\mu_{p+2} \int_{Dp} A_{p+1} \int_{c_i} (2\pi\alpha' \mathcal{F} + \mathcal{B}) = \frac{d_i}{|\Gamma|} \mu_p \int_{Dp} A_{p+1} \tag{2.355}$$

となって $|i\rangle$ の untwisted RR charge が再現できる。しかし $|0\rangle$ の場合も同様にやると、

$$-\sum_i d_i \frac{d_i}{|\Gamma|} \mu_p \int_{Dp} A_{p+1} = \left(\frac{1}{|\Gamma|} - 1 \right) \mu_p \int_{Dp} A_{p+1} \tag{2.356}$$

となるため、このままやると charge が $|0\rangle$ のそれに比べて μ_p だけ少ない。よって、$\mathcal{F}$ の flux で μ_p だけ増やす必要があるので、c_0 の近傍にだけ局所的に $\mathcal{F}$ が $\neq 0$ である必要がある。具体的には

$$\mu_{p+2} \int_{c_0} 2\pi\alpha' \mathcal{F} = \mu_p \qquad \Rightarrow \int_{c_0} \mathcal{F} = 1 \tag{2.357}$$

の flux が必要である。Flux が整数なのでこれは実現できて、$|0\rangle$ の untwisted RR charge も再現できた。

以上より fractional brane $|i\rangle$ は 2-cycle に巻きついた D(p+2)-brane に B 場が貫いているものを、B 場が $\neq 0$ のままつぶしたものである事が分かった ($|0\rangle$ はゲージ場も貫いている)。

---

[83] $d_i = \rho_i^{*0}$ と書けるので、$\alpha \neq 0$ で

$$\sum_i d_i \rho_i^\alpha = \underbrace{\sum_I \rho_I^{*0} \rho_I^\alpha}_{0} - \rho_0^{*0} \rho_0^\alpha = -1 \tag{2.351}$$

となっている事を用いた。

第3章　D-brane probeを用いたclosed tachyon凝縮の考察

closed tachyon凝縮を取り扱う1つの方法として、D-brane probe[33]を使って考える方法[19]がある。ここでは、それについて説明する。

3.1　概略

具体的な話に入る前に、概略を説明する。具体的な話は後で行うので、ここではまず雰囲気だけをつかんでもらいたい。

3.1.1　結果

まず結果から。Introductionで述べたようにclosed tachyon凝縮後は空間の構造が変わると考えられるので、極力簡単な系を考えたい。そこで、図3.1の様なTypeII理論のorbifold $\mathbb{C}/\mathbb{Z}_{2\ell+1}$ を考える。図3.1の様にclosed tachyonはorbifoldのfixed pointに局在しているので、tachyon凝縮後もfixed point付近が少し変化するだけと考えられる。結果は下の図からも分かる様に、tachyon凝縮で特異点が解消されて行き、open string tachyon凝縮の場合と同様にnon-SUSYからSUSYへ流れるというものである。

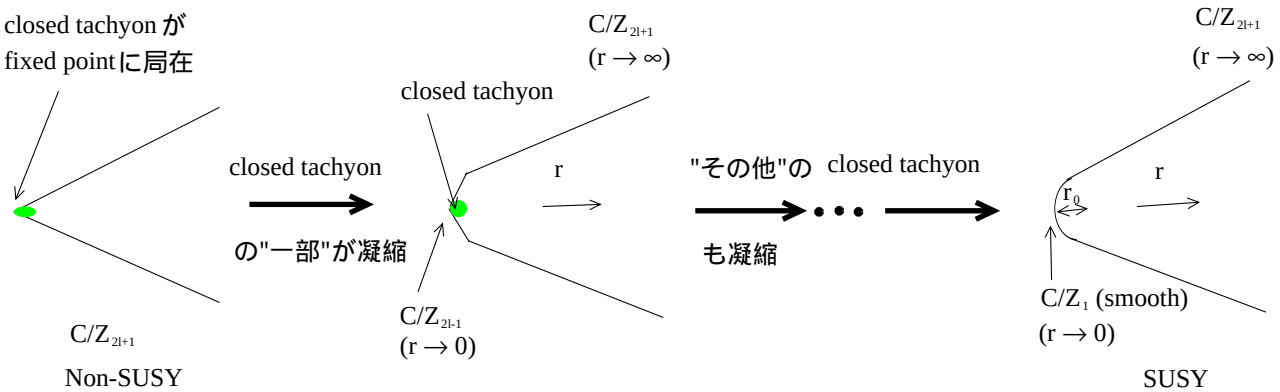

図 3.1: $\mathbb{C}/\mathbb{Z}_{2\ell+1} \to \mathbb{C}/\mathbb{Z}_1$ の流れ

3.1.2 基本的なアイデア

次に、基本的なアイデアを説明する。図 3.2 の様に、orbifold の 1 点 P に D-brane を probe として置く。本来 D-brane を置くと、前にも述べたようにその近傍で metric が変化するが、その効果を今回は考えないことにする (その意味で probe)。点 P の metric がどのようなものかで D-brane 上のゲージ理論がどのようになるかが決まる。逆に考えると、点 P を動かした時にそれぞれの点 P でゲージ理論がどう変化するかを調べれば metric が分かり、どの様な空間であるかが分かる。

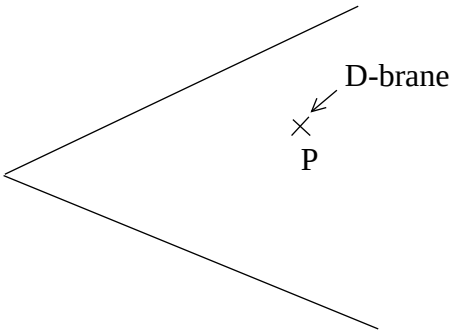

図 3.2: orbifold 上の D-brane

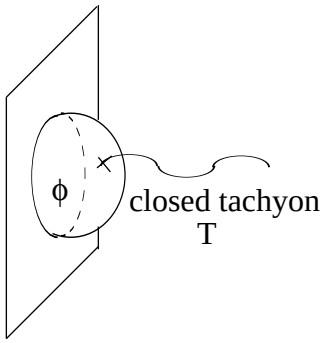

図 3.3: open-closed coupling

さて、図 3.3 の様な open string (probe 上の場 ϕ) と closed string(tachyon 場 T) を考えると、closed tachyon 凝縮によって ϕ の最低次で

$$T\phi\phi \Rightarrow T_0\phi\phi$$

といった mass term が probe 上のゲージ理論に加わって、ゲージ理論が変化するだろう。そのため、それに対応する metric も変化していて、closed tachyon 凝縮による空間の変化が理解出来るといった考え方である。

以上の概略を踏まえて、以下具体的な話に入る。

3.2 Tachyon 凝縮前の $\mathbb{C}/\mathbb{Z}_N$ orbifold

まず、tachyon 凝縮前の $\mathbb{C}/\mathbb{Z}_N$ orbifold の性質や、それを調べるための方法をここで説明する。

3.2.1 Twist の仕方と closed string spectrum

Type II 理論を考える。0~9 の内、8-9 方向を複素で組んで $\mathbb{Z}_N$ で twist (R $\cdots \frac{2\pi}{N}$ 回転) する。R の候補としては、以下の 2 つが考えられる。

$$R = \exp\left(\frac{2\pi i J_{89}}{N}\right) \qquad \text{or} \qquad R = \exp\left(2\pi i J_{89}\right) \times \exp\left(\frac{2\pi i J_{89}}{N}\right) \tag{3.1}$$

ここで、J_{89} は 8-9 方向の角運動量で、

$$J_{89} = \begin{cases} \text{整数} & \cdots \text{spacetime boson} \\ \text{半整数} & \cdots \text{spacetime fermion} \end{cases} \tag{3.2}$$

となっている[1]。ここで spacetime fermion number を F と置くと、それぞれの R で

$$R^N = \exp(2\pi i J_{89}) = (-1)^F \qquad \text{or} \qquad R^N = (-1)^{(N+1)F} \tag{3.3}$$

となり確かに時空 (spacetime boson) に対して $R^N = 1$ と振舞うので、これら R は $\mathbb{Z}_N$ となっている。今回は space time fermion に対しても $R^N = 1$ のケースを考えたい (理由は後述) ので、式 (3.3) より、右側の R で、N=奇数の場合を考えれば良い事がわかる。

なぜ $R^N = 1$ としたいか ($R^N = (-1)^F$ では駄目か) の理由は以下の通りである。

もし $R^N = (-1)^F$ ならばこれは 1 では無いので、R^N-invariant な状態を考えると spacetime fermion が project out される事が分かる。さらにこの時は、R^N twisted sector が存在する ($R^N \neq 1$ なので考えられる)。その時 world sheet boson X^μ に対して、

$$X^\mu(\sigma^1 + 2\pi) = R^N X^\mu(\sigma^1) = X^\mu(\sigma^1)$$

となっていることから、このモードに対応する spacetime boson [2]は fixed point に固定されずに、bulk 中を飛び回る事が分かる。これらの boson は tackyon を含むので[3]、tackyon が bulk 中を飛び回ってしまい取り扱いにくい系になってしまう。

ということで、

$$R = \exp\left(2\pi i \frac{N+1}{N} J_{89}\right) \qquad , \qquad N = 2\ell + 1 \quad , \quad \ell = 0, 1, \cdots \tag{3.4}$$

を以下では考える。その時、closed string の R^k sector $(0 \leq k \leq N-1)$ を考えると、ground state は

$$\frac{\alpha'}{4} m^2 = \begin{cases} -\frac{k}{2N} & \cdots \text{k=even} \\ \frac{k-N}{2N} & \cdots \text{k=odd} \end{cases} \tag{3.5}$$

となっている。式 (3.5) から、untwisted sector (k=0) には tackyon が無く、全ての twisted sector($\text{k} \neq 0$) に tackyon が存在している事が分かる。今までの話から、これら tackyon は fixed point に局在していて、確かに図 3.1 の初期状態となっている事が分かる。

---

[1]これは world sheet complex boson X に対して

$$RX(w + 2\pi) = \begin{cases} \exp\left(\frac{2\pi i}{N}\right) X(w) & \text{for} \quad R = \exp\left(\frac{2\pi i J_{89}}{N}\right) \\ \exp\left(\frac{2\pi i (N+1)}{N}\right) X(w) & \text{for} \quad R = \exp(2\pi i J_{89}) \times \exp\left(\frac{2\pi i J_{89}}{N}\right) \end{cases}$$

の twist をしている事に相当している。角運動量 J_{89} を 1 増やす事は $X^\dagger, \psi^\dagger$ を 1 つ Hilbert space に掛ける事に相当して、J_{89} を $\frac{1}{2}$ 増やす事は ψ を bosonize して作った $e^{iH/2}$ を掛けることに相当しているので納得できる。

[2]spacetime fermion は project out されている。

[3]mass spectrum を調べても分かるが、この sector に spacetime fermion が存在しないことから理解できる。

Closed string の mass spectrum の説明

ここでは式 (3.5) の導出を行う。簡単のため、とりあえず GSO projection を考えない事にする。まず必要な式をまとめる。今回 R^k twisted sector の twist ν_k は $\nu_k = \frac{N+1}{N}k$ で与えられるので、complex boson X 1 つの a_0^X は付録 B の式 (B.13) から

$$a_0^X = \frac{1}{2}\nu'_k(1-\nu'_k) \qquad , \quad \nu'_k = \left[\frac{N+1}{N}k\right] = \frac{k}{N} \tag{3.6}$$

で与えられる。次に、complex fermion ψ 1 つに対する a_0^ψ も付録 B の式 (B.20) より

$$a_0^\psi = \frac{1}{2}(\tilde{\nu}'_k + \zeta' - \frac{1}{2})^2 \tag{3.7}$$

で与えられる。ただしラベル ζ' は

$$\zeta' = \begin{cases} 0 & \cdots R \\ \frac{1}{2} & \cdots NS \end{cases} \tag{3.8}$$

と定義され、$\tilde{\nu}'_k$ は $0 \le \tilde{\nu}'_k + \zeta' < 1$ となるように ν_k を整数分ずらしたものである。以上を踏まえて結果を表にまとめると、以下の様になる。

(1) $0 \le k \le \ell$ の場合

セクター	a_0^X	a_0^ψ	flat 方向	ghost	total
NS	$\frac{1}{2}\frac{k}{N}\left(1-\frac{k}{N}\right)$	$\frac{1}{2}\left(\frac{k}{N}\right)^2$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\left(1-\frac{k}{N}\right)$
R	$\frac{1}{2}\frac{k}{N}\left(1-\frac{k}{N}\right)$	$\frac{1}{2}\left(\frac{k}{N}-\frac{1}{2}\right)^2$	$\frac{4}{8}$	$-\frac{5}{8}$	0

(2) $\ell+1 \le k \le 2\ell$ の場合

セクター	a_0^X	a_0^ψ	flat 方向	ghost	total
NS	$\frac{1}{2}\frac{k}{N}\left(1-\frac{k}{N}\right)$	$\frac{1}{2}\left(\frac{k}{N}-1\right)^2$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{k}{2N}$
R	$\frac{1}{2}\frac{k}{N}\left(1-\frac{k}{N}\right)$	$\frac{1}{2}\left(\frac{k}{N}-\frac{1}{2}\right)^2$	$\frac{4}{8}$	$-\frac{5}{8}$	0

これらの表からまず R セクターの ground state は twist によらず mass less だと分かる。NS セクターの方は図 3.4 を見ると分かりやすい。

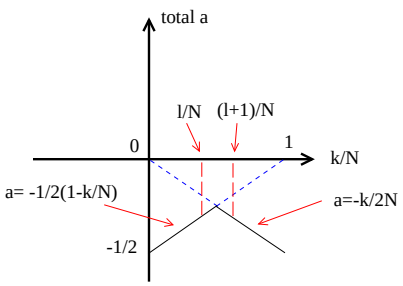

図 3.4: NS セクターの ground state

つまり、$a = -1/2(1-k/N), -k/2N$ の 2 つの state の内、小さいほうが ground state となっている。以上を踏まえて closed string の mass spectrum を考えよう。

Type 0 理論

まず Type 0 理論は spacetime boson を全て残して fermion を projected out する理論なので、RR セクターは massless からで NSNS セクターは

$$\frac{\alpha'}{4}m^2 = \begin{cases} \frac{k-N}{2N}, -\frac{k}{2N}, \cdots & \text{for} \quad 0 \leq k \leq \ell \\ -\frac{k}{2N}, \frac{k-N}{2N}, \cdots & \text{for} \quad \ell+1 \leq k \leq 2\ell \end{cases} \tag{3.9}$$

と mass spectrum が続く事が分かる。

Type □ 理論

Type □ 理論では GSO projection で spacetime fermion (NS-R) が残りうるが、一般的には twisted sector では NS の ground state の mass が変なずれ方をしてしまうため NS-R で level matching ができず、fermion が生き残らない。仮に生き残ったとしても tachyon では無いので今回は考慮しない。RR セクターも massless からなので tachyon は無く、tachyon は NSNS セクターからのみ出てくる事が分かる。

NSNS セクターの mass spectrum は式 (3.9) に GSO projection を掛けたものであるが、式 (3.5) と見比べると GSO projection が

	$NS+$	$NS-$
k=even	$-\frac{k}{2N}$	$\frac{k-N}{2N}$
k=odd	$\frac{k-N}{2N}$	$-\frac{k}{2N}$

となっている事が分かる。GSO projection は flat な場合は簡単なルールがあるが、そうでない場合は上の図の様に複雑になってどうなるかは分からない。そのため、実は式 (3.5) は NS-R formalism では計算できず、Green-Schwarz (GS) formalism [4] (GSO projection が存在しない) で計算しなければならない。

しかしそこから GSO projection のルールを読み取れば、後は NS-R formalism で計算出来る。GS formalism は world sheet spinor が出てくるので、一般的に NS-R より計算が複雑である。そのため極力 NS-R formalism で計算したいという事があるので、この様な話の流れにした。

[4] 詳しくは [39] のセクション 5 参照のこと。

3.2.2 D-brane probe 上の open string spectrum

2.3.2 と同じように $\mathbb{C}/\mathbb{Z}_N$ 上に Dp-brane を 1 枚、8-9 方向に垂直に置く (図 3.5)。式 (2.195) の基底 IJ を取り、式 (3.4) から

$$\hat{R}\psi = \omega^{(N+1)J_{89}}\psi \qquad \Rightarrow \qquad |\psi, J, K\rangle \overset{R}{\to} \omega^{J-K+(N+1)J_{89}}|\psi, J, K\rangle \tag{3.10}$$

となるので、

$$\text{R-inv} \qquad \Leftrightarrow \qquad J - K + (N+1)J_{89} \equiv 0 \pmod{\text{N}} \tag{3.11}$$

が R-inv の条件となる。

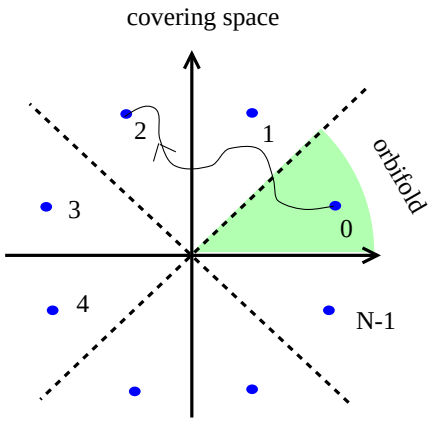

図 3.5: $\mathbb{C}/\mathbb{Z}_N$(8-9 方向)

Dp-brane 上の Open string として

$$\begin{cases} A^{\mu}_{JK} & \cdots \mu = 0 \sim p & \cdots \text{ゲージ場} & \cdots J_{89} = 0 \\ X^{m}_{JK} & \cdots m = p+1 \sim 7 & \cdots \text{brane の位置 (8-9 方向以外)} & \cdots J_{89} = 0 \\ Z_{JK} & \equiv (X^8 + iX^9)_{JK} & \cdots \text{8-9 方向の brane の位置} & \cdots J_{89} = 1 \\ \xi_{JK} & \in \mathbf{8} \subset \mathrm{SO}(1,9) \text{ の } \mathbf{16} & \cdots \mathbf{16} \text{ の内の、} J_{89} = \tfrac{1}{2} \text{の } \mathbf{8} & \cdots J_{89} = \tfrac{1}{2} \\ \bar{Z}_{JK} & & \cdots Z \text{ の conjugate} & \cdots J_{89} = -1 \\ \bar{\xi}_{JK} & & \cdots \xi \text{の conjugate} & \cdots J_{89} = -\tfrac{1}{2} \end{cases} \tag{3.12}$$

を考えると、式 (3.11) より生き残る spectrum は

$$A^{\mu}_{JJ} \quad , \quad X^{m}_{JJ} \quad , \quad Z_{J,J+1} \quad , \quad \xi_{J,J-\ell} \quad , \quad \bar{Z}_{J,J-1} \quad , \quad \bar{\xi}_{J,J+\ell} \qquad N \equiv 2\ell + 1 \tag{3.13}$$

と分かる。式 (3.13) から $U(1)^N$ ゲージ理論 (U(1) ゲージ場 A^{μ}_{JJ} が N 個なので) となっている事が分かる。場 ψ_{JK} は $U(1)_J$ 電荷+1, $U(1)_K$ 電荷-1 を持っている。

3.2.3 Quiver diagram

式 (3.13) を図で表す方法として、"quiver diagram"がある。以下では、それを具体例を用いて説明する。

N=5 ($\ell = 2$) の場合を考えると、quiver diagram は図 3.6 となる。図 3.6 には数字の振られた点と、その間を繋ぐ矢印が書かれている。この点を"quiver"(矢筒) と呼ぶ。その理由は、この点の間を矢が出入りしているように見えるからである。

では、この図の見方を説明しよう。まず (1) は、点 1 から点 2 に向かって矢印が 1 本飛んでいる。これは $U(1)_1$ 電荷+1, $U(1)_2$ 電荷-1 の Z が 1 つあることを意味している。つまり、Z_{12} が 1 つあるという意味である。同様に (2) は、点 0 から点 3 へ矢印が 1 本なので ξ_{03} が 1 つあると読める。$0 - 2 = -2 \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 5)$ を踏まえると、確かに式 (3.13) を再現している。

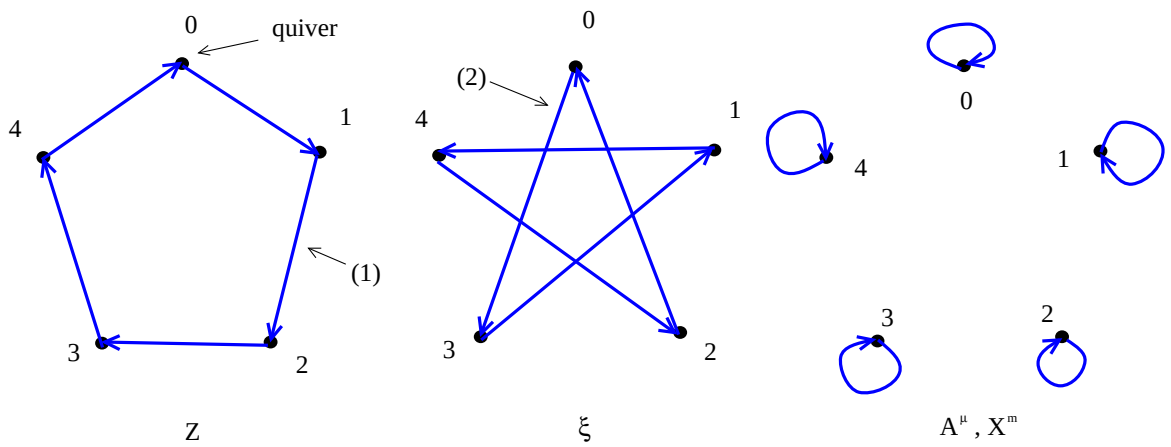

図 3.6: N=5 の quiver diagram

図 3.6 からも分かるように、quiver に対する cyclic 対称性 ($0 \to 1, 1 \to 2, \cdots$) がある。この対称性を orbifold 群の $\mathbb{Z}_N$ と区別するために"quantum $\mathbb{Z}_N$ symmetry" と呼ぶ事がある。この対称性のために、open string の lagrangian に例えば $F_{\mu\nu}$ は $F^2_{\mu\nu JJ}$ のみ現れる事は無く、$\sum_J F^2_{\mu\nu JJ}$ 等の形で出てくる。

3.2.4 Open string の action

式 (3.13) の場の lagrangian は次の式で与えられる。

Scalar potential

まず、scalar potential は以下の様になっている

$$V = \frac{1}{2} \sum_{J,m} \left(X^m_{JJ} - X^m_{J+1,J+1} \right)^2 |Z_{J,J+1}|^2 + \frac{1}{2} \sum_J \left(|Z_{J,J+1}|^2 - |Z_{J-1,J}|^2 \right)^2 \tag{3.14}$$

ただし、$|Z_{J,J+1}|^2 = Z_{J,J+1} \bar{Z}_{J+1,J}$ である。今回は D-brane を考えたいので、Higgs branch(X^m_{JJ} が J に依らない) 場合を考えると式 (3.14) は第 2 項のみが生き残る。ちなみに、X^m_{JJ} が J に依る場合は、2.3.4 の話からも分かるように fractional brane に対応している。

湯川 term

湯川相互作用項は

$$L_Y = \sum_J \xi_{J,J-\ell}\xi_{J-\ell,J+1}\bar{Z}_{J+1,J} \tag{3.15}$$

で与えられる。式 (3.14),(3.15) は共に $U(1)^N$ ゲージ対称性を持っている[5]と同時に、確かに quantum $\mathbb{Z}_N$ symmetry も持っている事が分かる。

3.2.5 D-brane probe の方法

以上を踏まえて D-brane probe の方法を説明する。

真空の moduli

式 (3.14) の Higgs branch を考えると、V 最小は $|Z_{J,J+1}| = r$ (J に依らない) と分かる。そのため flat direction は $Z_{J,J+1} = re^{i\theta_J}$ と分かる。しかし、これが真空の moduli (8-9 方向で D-brane が動ける空間に対応) というわけではない。理論が $U(1)^N$ ゲージ対称性を持っているので、ゲージ変換の下で等価な真空は取り除く必要がある。

まずゲージ変換で $Z_{J,J+1} = \mathrm{Z}$ (J に依らない) の形まで持ってゆける。さらに、$U(1)_J$ ゲージ電荷を Q_J として、$Q \equiv \exp\left(-\frac{2\pi i}{N}\sum_J JQ_J\right)$ と置くと、Q は以下の様に $\mathbb{Z}_N$ ゲージ対称性になっている。

$$QZ_{J,J+1} = \exp\left(-\frac{2\pi i}{N}J\right)\exp\left(\frac{2\pi i}{N}(J+1)\right)Z_{J,J+1} = e^{\frac{2\pi i}{N}}Z_{J,J+1} \tag{3.16}$$

つまり、$Z \cong e^{\frac{2\pi i}{N}}Z$ なので、真空の moduli は $\mathbb{C}/\mathbb{Z}_N$ となっていて、確かに $\mathbb{C}/\mathbb{Z}_N$ 上に D-brane が置かれている状況が再現されている。

Metric

D-brane probe の方法では空間の metric を調べる事も出来る。まず $Z_{J,J+1}$ の kinetic term は $Z_{J,J+1} = re^{i\theta_J}$ を代入すると

$$\begin{aligned} L_k &= \sum_{J=0}^{N=1}\left|\left(\partial^\mu - iA^\mu_{JJ} + iA^\mu_{J+1,J+1}\right)Z_{J,J+1}\right|^2 \\ &= \sum_{J=0}^{N=1}[(\partial_\mu r)^2 + r^2(\partial_\mu\theta_J - B_{\mu,J})^2] \end{aligned} \tag{3.17}$$

と書ける。ただし、B^μ_J は

$$B^\mu_J \equiv A^\mu_{J+1,J+1} - A^\mu_{JJ} \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{J=0}^{N-1} B^\mu_J = 0 \tag{3.18}$$

[5]端同士も含めて場の隣り合う添え字が等しいことから分かる。

と定義した。このように B_J^μ には束縛条件が付いているので、未定乗数を入れて式 (3.17) から B_J^μ を消去すると、

$$\begin{aligned} B_J^\mu &= \partial^\mu(\theta_J - \tilde{\theta}) \qquad , \quad \tilde{\theta} \equiv \frac{1}{N}\sum_{K=0}^{N-1}\theta_K \\ L_k &= N[(\partial_\mu r)^2 + r^2(\partial_\mu \tilde{\theta})] \end{aligned} \tag{3.19}$$

となっている事が分かる[6]。$Z_{J,J+1} \cong e^{\frac{2\pi i}{N}} Z_{J,J+1}$ だったので θ_J の変域は $0 \leq \theta_J < \frac{2\pi}{N}$ で、$\tilde{\theta}$ の変域も $0 \leq \tilde{\theta} < \frac{2\pi}{N}$ となる。変域を $0 \leq \theta < 2\pi$ としたいので

$$\theta \equiv N\tilde{\theta} \qquad , \quad 0 \leq \theta < 2\pi \tag{3.20}$$

と θ を定義すると、式 (3.19) は

$$L_k = N(\partial_\mu r)^2 + \frac{r^2}{N}(\partial_\mu \theta)^2 \tag{3.21}$$

と書けるので、この式から metric が

$$\mathrm{d}s^2 = N\,\mathrm{d}r^2 + \frac{r^2}{N}\,\mathrm{d}\theta^2 \tag{3.22}$$

であることが分かる。$0 \leq \theta < 2\pi$ なので、これは確かに $\mathbb{C}/\mathbb{Z}_N$ の metric である。

最後に注意点を幾つか付け加えておこう。まず θ は

$$\theta = \arg(Z_{01}Z_{12}\cdots Z_{N-1,0}) \tag{3.23}$$

と書けるのでゲージ不変量で、物理的に意味のある量である事が分かる。次にこの metric を調べる話はあくまで古典論であることに注意しなければならない[7]。最後に L_k は open string

[6] 未定乗数 λ_μ を入れて L_k を

$$L_k = \sum_{J=0}^{N-1}[(\partial_\mu r)^2 + r^2(\partial_\mu\theta_J - B_{\mu,J})^2 - 2\lambda_\mu B_J^\mu] \tag{A}$$

と書く。B_J^μ で変分を取ると、

$$0 = \frac{\delta L_k}{\delta B_J^\mu} = 2r^2(\partial_\mu\theta_J - B_{\mu,J}) - 2\lambda_\mu \quad \overset{\sum_J}{\Rightarrow} \quad \lambda_\mu = \frac{r^2}{N}\sum_{J=0}^{N-1}\partial_\mu\theta_J = r^2\partial_\mu\tilde{\theta}$$

と分かるので、

$$B_J^\mu = \partial^\mu(\theta_J - \tilde{\theta}) \quad , \quad (\partial_\mu\theta_J - B_{\mu,J}) = \partial_\mu\tilde{\theta}$$

となっている事がわかる。これらを式 (A) に代入すると

$$\begin{aligned} L_k &= \sum_{J=0}^{N-1}[(\partial_\mu r)^2 + r^2(\partial_\mu\tilde{\theta})^2 - 2r^2\partial_\mu\tilde{\theta}\partial^\mu \underbrace{(\theta_J - \tilde{\theta})}_{\sum_J \text{で } 0}] \\ &= N[(\partial_\mu r)^2 + r^2(\partial_\mu\tilde{\theta})^2] \end{aligned}$$

と分かる。

[7] 途中で未定乗数入りの action の変分を取ったことを思い出そう。

の massive mode を無視している。$|Z| = r$ の時にゲージ場 A^μ は式 (3.17) から mass $M_A \sim \frac{r}{\alpha'}$ を持つが[8]、これが無視した massive mode の mass $M_m \sim \alpha'^{-1/2}$ よりも十分小さくなければならない。つまり r が

$$\frac{r}{\alpha'} \ll \alpha'^{-1/2} \qquad \Leftrightarrow \qquad r \ll \alpha'^{1/2} \tag{3.24}$$

の領域 (substringy regime [40]) でないとこの話は使えない。

3.3 Substring 領域での $\mathbb{C}/\mathbb{Z}_{2\ell+1}$ の tachyon 凝縮

このセクションでは 3.2 でまとめた道具を使って、式 (3.4) の twist で作った $\mathbb{C}/\mathbb{Z}_{2\ell+1}$ の closed tachyon 凝縮を調べる。以下では特に必要が無い時には $N = 2\ell + 1$ として表記 N を使う事にする。

3.3.1 Open-closed 相互作用による scalar potential の変化

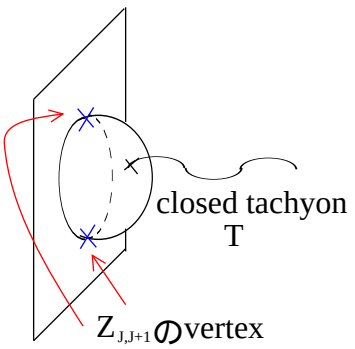

図 3.7: $Z_{J,J+1}$ と T の相互作用

まず 3.1 で述べた様に、図 3.7 の相互作用から probe 上の open string $Z_{J,J+1}$ と closed tachyon T は $Z_{J,J+1}$ の最低次で

$$V_J = T|Z_{J,J+1}|^2 \tag{3.25}$$

といったゲージ不変な相互作用項を持つと考えられる。セクション 3.1.2 では話が煩雑になるので書かなかったが、実は D-brane 上に open string の vertex operator が 2 個入った amplitude を考えている事に注意したい (良く見ると図 3.3 では D-brane 自体と closed tachyon との相互作用なので open string との相互作用 (3.25) にはならない)。Closed tachyon 凝縮が起こって T が VEV [9] T_0 を持つと、式 (3.25) の形の相互作用から probe 上の open string の scalar potential (3.14) は

$$\Delta V = \sum_{J=0}^{N-1} M_J^2 |Z_{J,J+1}|^2 \tag{3.26}$$

[8] 実は、式が煩雑になるため式 (3.17) に α' のべきを付ける事をあえてやめていた。M_A の係数 α'^{-1} は次元解析から分かる。

[9] Vacuum Expectation Value ··· 真空期待値の事。

だけずれると考えられる。

さて M_J^2 は open-closed の相互作用から来ているので、全ての J 毎に好き勝手な値を取れるわけではなく、何かしらの条件が付いているはずである。以下では M_J の満たすべき条件を調べよう。

M_J^2 の満たす条件

まず相互作用 $TZ_{J,J+1}\bar{Z}_{J+1,J}$ を詳しく見るために D-brane probe $|D\rangle_p$ を fractional brane $|J\rangle$ の bound state

$$|D\rangle_p = \sum_{J=0}^{N-1} |J\rangle \tag{3.27}$$

と解釈しよう。するとこの相互作用 $TZ_{J,J+1}\bar{Z}_{J+1,J}$ は図 3.8 の様に 2 つのタイプ A, B がある。

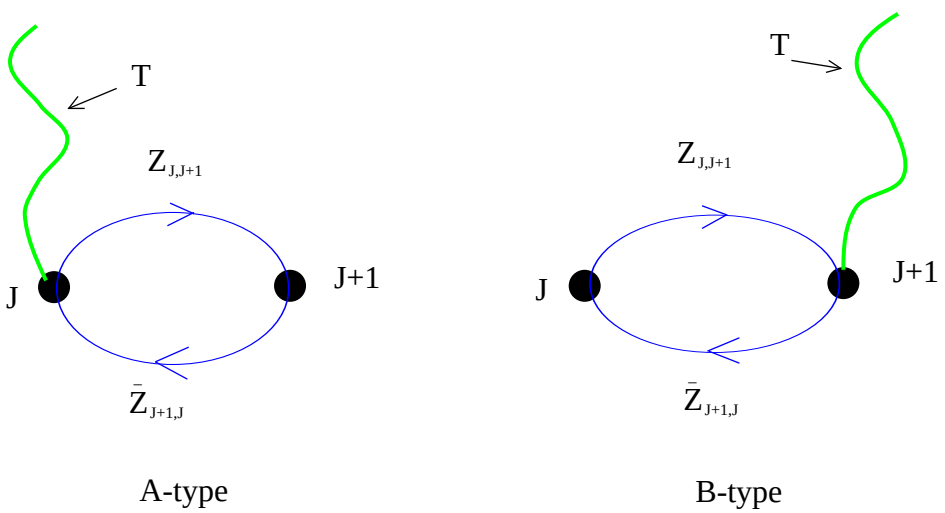

図 3.8: $TZ_{J,J+1}\bar{Z}_{J+1,J}$ 相互作用の分類

ただし図 3.8 で黒丸は fractional brane で、横の添え字 $J, J+1$ はそのラベルに相当した fractional brane であることを指す。次に tachyon 場の vertex operator に相当する状態 $|T\rangle$ は

$$|T\rangle = \alpha_k|k\rangle \qquad , \quad \alpha_0 = 0 \tag{3.28}$$

と書ける。ただし $|k\rangle$ は R^k twisted sector の closed string の状態を指す。$\alpha_0 = 0$ なのは 3.2.1 より untwisted sector には closed tachyon が存在しないからである。一方 $|J\rangle$ は式 (2.241) より

$$|J\rangle = \rho_J^k|k\rangle\rangle \qquad , \quad \rho_J^k = \omega^{kJ} \tag{3.29}$$

と書ける。ここでは $|k\rangle\rangle$ は石橋 state の意味ではなく R^k twisted sector の closed string と couple する state として解釈してほしい。最後に内積は

$$\langle\langle k|k'\rangle\rangle = C_k\delta_{kk'} \tag{3.30}$$

の形をしている事が分かる。C_k の具体形は今回重要ではない。以上を踏まえて、それぞれのタイプ毎に相互作用の値を調べよう。

まず A-type を考えると $Z_{J,J+1}$ の mass term は大雑把に言って

$$\begin{aligned} M^2_{A,J} Z_{J,J+1} \bar{Z}_{J+1,J} = \langle T|Z\bar{Z}|J\rangle = \langle T|J\rangle\langle Z\bar{Z}\rangle = \sum_k \underbrace{\alpha^*_k C_k}_{\equiv A_k} \omega^{kJ} \langle Z\bar{Z}\rangle \\ = \sum_k A_k \omega^{kJ} \langle Z\bar{Z}\rangle \end{aligned} \tag{3.31}$$

となっていると考えられる。式 (3.31) の等号は厳密では無く、J 依存性のみを再現している。重要な点は、相関関数の J 依存性は fractional brane $|J\rangle$ からのみ出てくるという事である。具体的には open string $Z_{J,J+1}$ のラベル $J, J+1$ はどの fractional brane に付いているかを表しているだけなので、相関関数の値の J 依存性に影響を与えない。

よって $M^2_{A,J}$ は J 依存性だけを見ると

$$M^2_{A,J} = \langle T|J\rangle = \sum_k A_k \omega^{kJ} \tag{3.32}$$

を満たしているので、

$$\sum_J M^2_{A,J} = \sum_k A_k \sum_J \omega^{kJ} \sim \sum_k A_k \delta_{k,0} = A_0 = 0 \tag{3.33}$$

の性質を持っていることが分かる。同様に B-type の $M^2_{B,J}$ も J 依存性のみを考えて

$$M^2_{B,J} = \langle T|J+1\rangle \qquad \Rightarrow \qquad \sum_J M^2_{B,J} = 0 \tag{3.34}$$

の性質を満たすことが分かる。$M^2_J = M^2_{A,J} + M^2_{B,J}$ なので、

$$\sum_{J=0}^{N-1} M^2_J = 0 \tag{3.35}$$

となっている事が分かる。M^2_J が条件 (3.35) を満たしていることがわかったので、式 (3.26) の ΔV を便宜的に

$$\Delta V = -\sum_{J=0}^{N-1} \lambda_J (|Z_{J,J+1}|^2 - |Z_{J-1,J}|^2) \qquad , \quad \sum_{J=0}^{N-1} \lambda_J = 0 \tag{3.36}$$

と書き直しておこう。こうする事で式 (3.36) は FI term [10]と解釈できる。以上より closed tachyon 凝縮後の scalar potential V_c は

$$V_c = V + \Delta V = \frac{1}{2} \sum_J \left(|Z_{J,J+1}|^2 - |Z_{J-1,J}|^2 \right)^2 - \sum_{J=0}^{N-1} \lambda_J (|Z_{J,J+1}|^2 - |Z_{J-1,J}|^2) \tag{3.37}$$

書ける。式 (3.37) の potential 最小の条件は

$$|Z_{J,J+1}|^2 - |Z_{J-1,J}|^2 = \lambda_J \tag{3.38}$$

と分かり、λ_J の分だけ tachyon 凝縮前の状態からずれている事が分かる。

[10] Fayet Iliopoulos term の略。

3.3.2 λ_J が一般の値を取る場合

まず λ_J が一般の値を取る場合を考えてみよう。式 (3.38) より $|Z_{J,J+1}|$ の値は全ての J で異なる。そのためある J で $|Z_{J,J+1}|$ は最小値を取るのだが、足 J を cyclic に回して $|Z_{01}|$ が最小値を取ると考えても一般性を失わない。この時 $|Z_{01}|$ を動かして 0 にすることは出来るが他の $|Z_{J,J+1}|$ は $\neq 0$ のままである。つまり $U(1)^N$ ゲージ対称性を持っていた $\mathbb{C}/\mathbb{Z}_N$ の特異点 $|Z_{01}| = \cdots = |Z_{N-1,0}| = 0$ は tachyon 凝縮で

$$|Z_{01}| = \cdots = |Z_{N-1,0}| = 0 \quad \overset{\text{凝縮}}{\Rightarrow} \quad |Z_{01}| = 0 \quad , \quad |Z_{J,J+1}| \neq 0 \quad \text{for} \quad J \neq 0 \tag{3.39}$$

と変化する。よってゲージ場 N 個のうち $N-1$ 個が massive になって[11]ゲージ対称性が $U(1)^N$ から $U(1)$ (diagonal) に破れるので、$\mathbb{Z}_N$ singularity が closed tachyon 凝縮で $\mathbb{Z}_1$ (smooth) に変化したと考えられる。予想通り tachyon 凝縮で特異点が解消されて super symmetric な空間へ変化している。

これでは話が大雑把過ぎるので、もう少し詳しく調べてみよう。まず

$$\rho_J^2 \equiv \rho_{J-1}^2 + \lambda_J \quad , \quad \rho_0 \equiv 0 \quad , \quad Z_{J,J+1} \equiv r_J e^{i\theta_J} \tag{3.40}$$

と定義する。λ_J を決めると ρ_J は一意的に決まってしまうことに注意しよう。すると式 (3.38) は

$$r_J^2 = r^2 + \rho_J^2 \quad , \quad r_0 \equiv r \tag{3.41}$$

書ける。式 (3.41) より、一旦 λ_J を決めてしまえば r を動かしても r_J は大小関係を保ちながら変化する。今回は $|Z_{01}|$ が最小と仮定しているので、他の $|Z_{J,J+1}|$ は常に $|Z_{01}|$ より大きい。

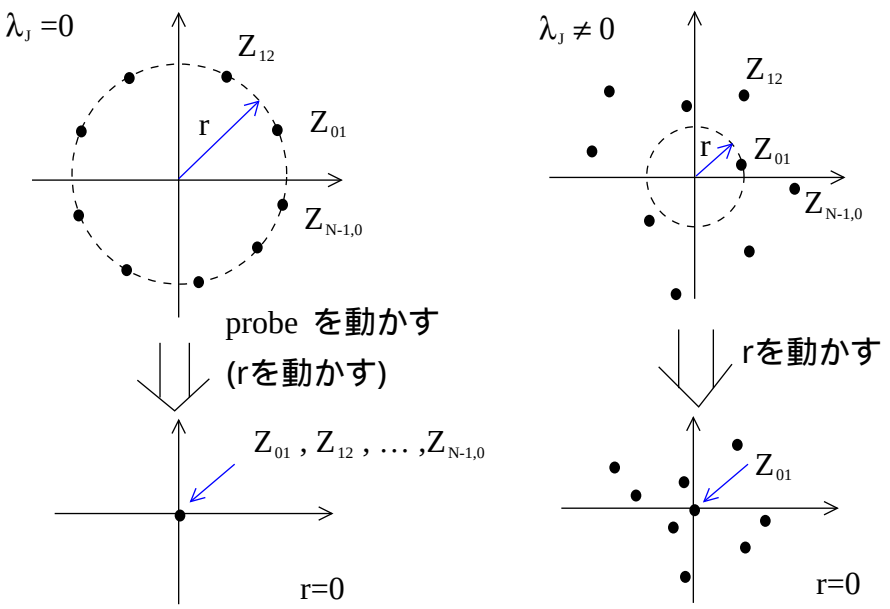

図 3.9: Closed tachyon 凝縮による $Z_{J,J+1}$ の VEV の変化

これを図にまとめると図 3.9 となる。まず tachyon 凝縮前 $\lambda_J = 0$ では図 3.9 の左側の様に $Z_{J,J+1}$ の VEV は半径 r の同心円上に並ぶ[12]。r を動かす事が probe の位置を動かす事に相

[11] Diagonal $U(1)$ つまり $\sum_{J=0}^{N-1} A_{J,J}^{\mu}$ のみ massless で残る。Z の kinetic term の式 (3.17) の Z に VEV を持たせると出てくる $A_{J,J}^{\mu}$ の mass matrix を対角化すれば分かるが、もっと簡単に分かる方法を後で説明する。

[12] 位相はゲージ変換で変化するので重要ではない。

当していて、$r \neq 0$ では全ての $Z_{J,J+1}$ が $\neq 0$ の VEV を持つ。このような VEV を不変にするゲージ変換は $\sum_{J=0}^{N-1} A^{\mu}_{J,J}$ によって生成されるものだけなので[13]、この点ではゲージ対称性は $U(1)$ (diagonal) となっている。つまりこの点は特異点ではない。一方 $r = 0$ では全ての $Z_{J,J+1}$ の VEV が 0 となるので、この点でのゲージ対称性は $U(1)^N$ で、$\mathbb{Z}_N$ singularity を持つ点である。確かに $\mathbb{C}/\mathbb{Z}_N$ 上を probe が動く様子が再現されている。

次に tachyon 凝縮後 $\lambda_J \neq 0$ では図 3.9 の右側の様になっている。まず $r \neq 0$ では全ての $Z_{J,J+1}$ が $\neq 0$ なのでゲージ対称性が $U(1)$ (diagonal) となっていてこれは前と同様である。一方 $r = 0$ では Z_{01} のみ VEV が 0 となっているが、このような VEV を不変にするゲージ変換もやはり diagonal $U(1)$ のみなので[14]、今回は $r = 0$ も特異点ではない。よって tachyon 凝縮で特異点が解消されている事が分かる。

Metric は?

最後に metric を調べてみよう。Kinetic term の式 (3.17) に式 (3.40),(3.41) を代入すると、

$$L_k = \sum_{J=0}^{N-1} [(\partial_\mu r_J)^2 + r_J^2(\partial_\mu \theta_J - B_{\mu,J})^2] \quad , \quad \sum_J B_{\mu,J} = 0 \tag{3.42}$$

と分かるので、未定乗数を入れて $B_{\mu,J}$ を消去すると

$$L_k = N(r)(\partial_\mu)^2 + \frac{r^2}{N(r)}(\partial_\mu \theta)^2 \quad , \quad \theta \equiv \sum_{J=0}^{N-1} \theta_J \quad , \quad N(r) \equiv \sum_{J=0}^{N-1} \frac{r^2}{r^2 + \rho_J^2} \tag{3.43}$$

とわかり[15]、metric は

$$\mathrm{d}s^2 = N(r)\,\mathrm{d}r^2 + \frac{r^2}{N(r)}\,\mathrm{d}\theta^2 \tag{3.44}$$

---

[13] Z_{J_0,J_0+1} は $A^{\mu}_{J_0,J_0}$ に対して $+1$,$A^{\mu}_{J_0+1,J_0+1}$ に対して -1 の charge を持っていたので、VEV $Z_{J_0,J_0+1} \neq 0$ を不変に保つゲージ変換は任意の定数 C_J を用いて

$$A^{\mu\prime} = A^{\mu}_{J_0,J_0} + A^{\mu}_{J_0+1,J_0+1} + \sum_{J \neq J_0,J_0+1} C_J A^{\mu}_{J,J}$$

で生成されたものだけである。今回は全ての J_0 で VEV Z_{J_0,J_0+1} が $\neq 0$ で、それらを全てゲージ不変に保たなければならないので

$$A^{\mu\prime} = \sum_{J=0}^{N-1} A^{\mu}_{J,J}$$

でなければならない事が分かる。

[14] 今回も VEV を不変に保つゲージ変換を生成するゲージ場を

$$A^{\mu\prime} = \sum_J C_J A^{\mu}_{J,J}$$

と書くと、脚注 13 より

$$C_1 = C_2 \quad , \quad C_2 = C_3 \quad , \cdots , \quad C_{N-1} = C_0$$

と分かるが、そうすると自動的に $C_0 = C_1$ も成り立ってしまうので。

[15] 未定乗数 λ_μ を入れて L_k を

$$L_k = \sum_{J=0}^{N-1} [(\partial_\mu r_J)^2 + r_J^2(\partial_\mu \theta_J - B_{\mu,J})^2 - 2\lambda_\mu B^{\mu}_J] \tag{A}$$

と求まる。さて今回は r_J の内 $r_0 = r$ が最小だったので、$\rho_0 = 0, \rho_J^2 > 0\ (J \neq 0)$ と分かるが、この時

$$N(r) = 1 + \sum_{J \neq 0} \frac{r^2}{r^2 + \rho_J^2} \tag{3.45}$$

と書けるため $N(0) = 1, N(\infty) = N$ と振舞うことが分かる。

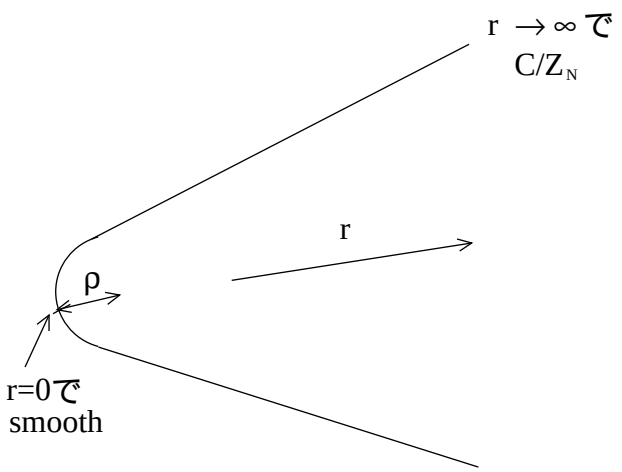

図 3.10: λ_J が一般の値を取った場合の $\mathbb{C}/\mathbb{Z}_N$ の tachyon 凝縮

以上より結果を図にすると図 3.10 の様になる。ただし図 3.10 の中の ρ は ρ_J の典型的な大きさを表していて、closed tachyon の凝縮後の VEV の大きさに相当している。この図から予想通り特異点 $r = 0$ の近傍だけ凝縮後に変化している事が分かる。前にも述べた様にこの話は substring 領域 $r \ll \alpha'^{\frac{1}{2}}$ のみ有効であることに注意しよう。つまりこの方法では tachyon の VEV が小さい時で、かつ特異点の近傍の振る舞いしか分からない。そのため、これだけだと closed tachyon 凝縮で空間全体がどう変化するか分からないが、[19] では dilaton pulse によって特異点の変化の様子が空間全体に伝わってゆく (図 3.11 参照) 事が提唱されている。以下でその概略を述べる事にする。まず world sheet の繰り込み群を考えると、tachyon の vertex operator は relevant である事に注意しよう。そのため RG flow で IR 領域へ流れる事が tachyon 凝縮する事に相当している。そこで実際に graviton と dilaton に対して繰り込み

と書く。B_J^μ で変分を取ると、

$$\lambda_\mu = r_J^2(\partial_\mu \theta_J - B_{\mu,J}) \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_\mu \sum_J \frac{r^2}{r_J^2} = \partial_\mu \theta \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_\mu = \frac{r^2}{N(r)} \partial_\mu \theta$$

と分かる。さらに $\partial r_J = \frac{r}{r_J} \partial r$ となっている事をふまえて、これらを式 (A) に代入すると

$$\begin{aligned} L_k &= \sum_{J=0}^{N-1} [\frac{r^2}{r_J^2}(\partial_\mu r)^2 + \underbrace{\frac{\lambda_\mu}{r_J^2}}_{\sum_J \text{で} \partial_\mu \theta} \lambda^\mu - 2\lambda_\mu \underbrace{B_{\mu,J}}_{\sum_J \text{で} 0}] \\ &= N(r)(\partial_\mu r)^2 + \frac{r^2}{N(r)}(\partial_\mu \theta)^2 \end{aligned}$$

と分かる。

群方程式を立てて[16]RG flow を考えると、図 3.11 となる。つまり、dilaton pulse によって平坦な空間が広がってゆく。

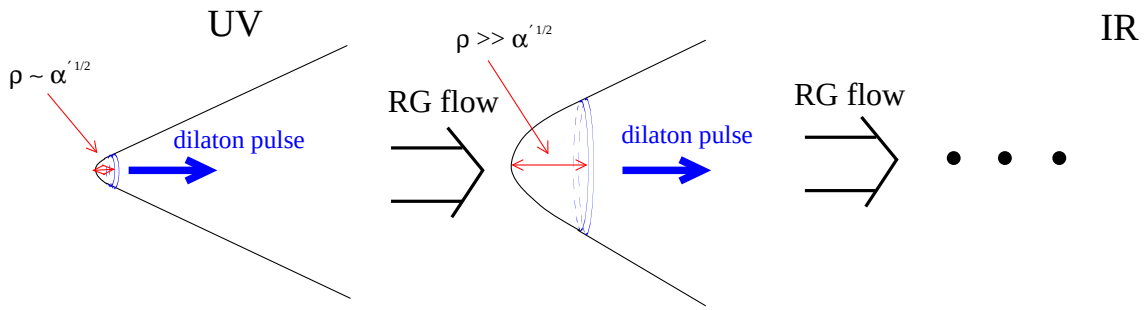

図 3.11: world sheet の繰り込み (Dilaton pulse による空間の変化)

ただし、open string tachyon 凝縮の話の様に tachyon potential がある訳ではないので、tachyon の VEV がどこで落ち着くか分からず、最終的にどのような空間になるか具体的には (ρ の大きさ等) 分からない。

3.3.3 λ_J が特殊な値を取る場合

今度は λ_J が特殊な値を取る場合を考えよう。以下では例として

$$\lambda_0 = -\lambda_1 > 0 \quad , \quad \lambda_2 = \cdots = \lambda_{N-1} = 0 \tag{3.46}$$

の場合を考えよう ($\sum_J \lambda_J = 0$ に注意)。これは closed tachyon の一部が凝縮していると考えることが出来るので、心としては前のセクションの tachyon 凝縮 "$\mathbb{C}/\mathbb{Z}_N \ \rightarrow \ $ smooth" の途中過程を考えているつもりである。

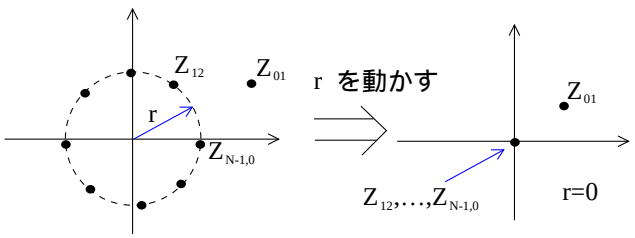

図 3.12: $Z_{J,J+1}$ の VEV

まず式 (3.38) より

$$|Z_{01}|^2 = |Z_{J,J+1}|^2 + \lambda_0 \qquad \text{for} \quad J \neq 0 \tag{3.47}$$

[16] [19] では繰り込み群の方程式中に tachyon が含まれていないが、tachyon が特異点に局在しているので特異点から十分離れれば tachyon は直接現れないはずなので構わないだろう。

となり、これを図で表すと図 3.12 となる。図 3.12 より、特異点 $(r=0)$ では $A^{\mu}_{00}-A^{\mu}_{11}$ のみ massive となっているのでゲージ対称性が $U(1)^N$ から $U(1)^{N-1}$ に破れた状態になっている。この事から $r=0$ で $\mathbb{Z}_{N-1}$singularity がある事が予想出来る。実際、今回は $\rho_0^2>0, \rho_1=\cdots=\rho_{N-1}=0$ として $r_1=\cdots=r_{N-1}=r$ とすれば良いので式 (3.44) の $N(r)$ は $N(0)=N-1$ となり、metric は図 3.13 の様になって $r=0$ で $\mathbb{Z}_{N-1}$singularity が残る。

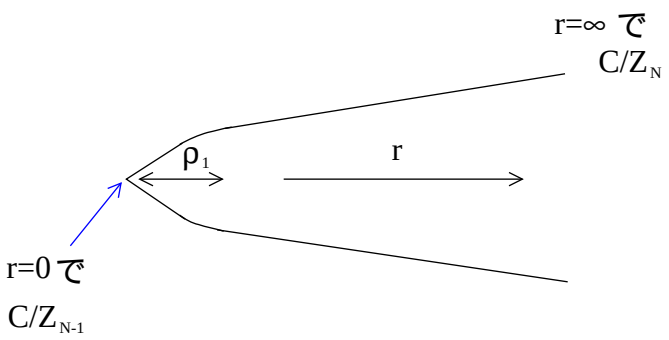

図 3.13: 特殊な λ_J の場合の metric

確かに 3.3.2 の結果の途中過程に見える。

特異点上の quiver diagram

次に特異点 $r=0$ に probe を置いて、quiver diagram が tachyon 凝縮でどのように変化するか調べてみよう。例として前の様に $N=5$ の場合を考えると、boson Z と fermion ξ の quiver diagram は図 3.14 の様に変化する。

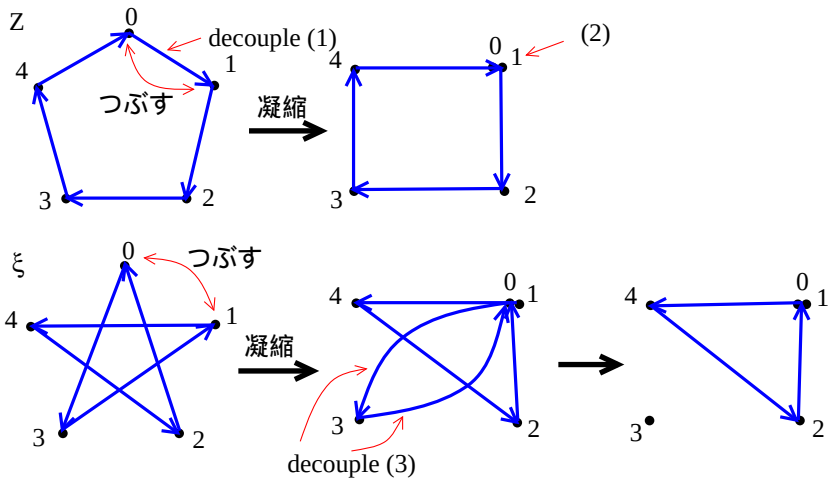

図 3.14: 特異点上の quiver diagram の変化

図 3.14 の説明をすると以下の様になる。

(1) まず $r=0$ では Z_{01} が VEV を持つため Z_{01} は massive となって[17] decouple する。

(2) 次に Z_{01} が VEV を持つことで A^μ_{00}, A^μ_{11} のうち $A^\mu_{00}+A^\mu_{11}$ が massless で残り $A^\mu_{00}-A^\mu_{11}$ が massive となって decouple する[18]。この事は quiver "$0,1$" がつぶれて 1 つになり、対応するゲージ場が 1 つ減る事に相当する。

(3) 同様に fermion ξ も quiver $0,1$ がつぶれるが、湯川相互作用項 (3.15) の Z_{01} に VEV を持たせると $\bar{Z}_{10}\xi_{03}\xi_{31}$ が mass term となり ξ_{03},ξ_{31} が massive となって[19]decouple する。

以上より、Z,ξ の内 massless なものだけで quiver diagram を書いたものが図 3.14 の右端 2 つとなっている。この右端の quiver diagram は通常の quiver diagram ではない。具体的に言うと ξ の quiver diagram が cyclic 対称でないと言うことである。そのためこの状態は通常の orbifold では無い事が分かり、このような状態は "quasi orbifold" と呼ばれている。つまり metric だけ見ると一見特異点では $\mathbb{C}/\mathbb{Z}_{N-1}$ と思えるのだが、そうではないという事である。

さらに Z_{23} が VEV を持つように λ を turn on させると図 3.15 の中央の 2 つとなる。

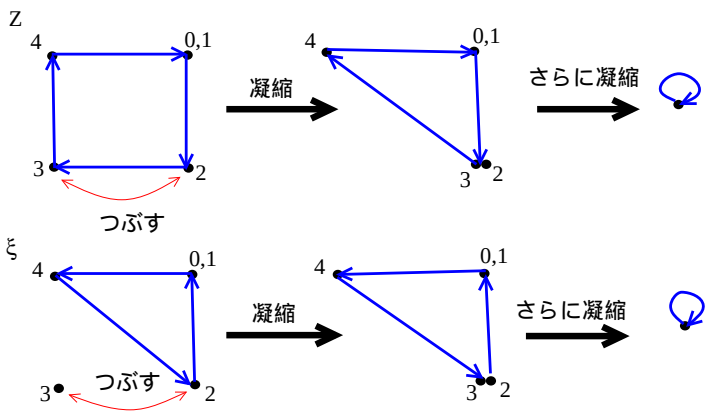

図 3.15: 特異点上の quiver diagram の変化 2

---

[17] Z の scalar potential の 2 回微分が

$$\frac{\partial^2 V_c}{\partial Z_{01}\partial Z_{01}}|_{Z_{01}=\sqrt{\lambda_0}} = 8\lambda_0 > 0$$

となるため。

[18] Z の kinetic term の式 (3.17) から出てくる $A^\mu_{J,J}$ の mass matrix を対角化すると分かる。つまり、

$$(A_{00}-A_{11})^2 = (A_{00},A_{11})\underbrace{\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}}_{\equiv M}\begin{pmatrix}A_{00}\\A_{11}\end{pmatrix}$$

$$M\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=0 \quad\Rightarrow\quad A_{00}+A_{11}\text{は massless} \qquad , \quad M\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad A_{00}-A_{11}\text{は massive}$$

ということ。

[19]

$$\bar{Z}_{10}\xi_{03}\xi_{31} = \bar{Z}_{10}(\xi_{03},\xi_{31})\underbrace{\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}}_{\equiv M}\begin{pmatrix}\xi_{03}\\\xi_{31}\end{pmatrix}$$

とした時 $\det M \neq 0$ より 0 固有値が無い事が分かる。つまり、ξ_{03},ξ_{31} 共に massive となる。

これは前の話と同じ操作をしているだけなので理解できるが、fermion の方が本当にそうなっているのか心配な人もいるだろうので一応脚注に計算を載せておく[20]。図 3.15 の中央の 2 つは $\mathbb{C}/\mathbb{Z}_3$ のそれと同じであることに注意すると、$\mathbb{C}/\mathbb{Z}_5 \ \to \ \mathbb{C}/\mathbb{Z}_3$ の tachyon 凝縮が起きている事が分かる。この時 Z の quiver diagram と ξ のそれは形が同じなので一見 supersymmetric であるように見えるが、矢印の向きが逆なのでそうではない事に注意しよう。実際 $\mathbb{C}/\mathbb{Z}_3$ は closed tachyon を含むので不安定で、さらに tachyon 凝縮を起こして $\mathbb{C}/\mathbb{Z}_1$ へ変化して (図 3.15 右側) 安定化するだろう[21]。以上の話は、

> $Z_{01}, Z_{\ell,\ell+1}$ が VEV を持つように λ_J を turn on すると $\mathbb{C}/\mathbb{Z}_{2\ell+1} \ \to \ \mathbb{C}/\mathbb{Z}_{2\ell-1}$ と tachyon 凝縮で変化する。

と一般化できるので、λ_J を少しずつ turn on させる (tachyon 凝縮が進んでゆくと解釈) ことにより

$$\mathbb{C}/\mathbb{Z}_{2\ell+1} \ \to \ \mathbb{C}/\mathbb{Z}_{2\ell-1} \ \to \ \cdots \ \to \ \mathbb{C}/\mathbb{Z}_1$$

という流れが分かる。これを図にまとめると図 3.16 となり、3.1.1 で述べた通りになっている。

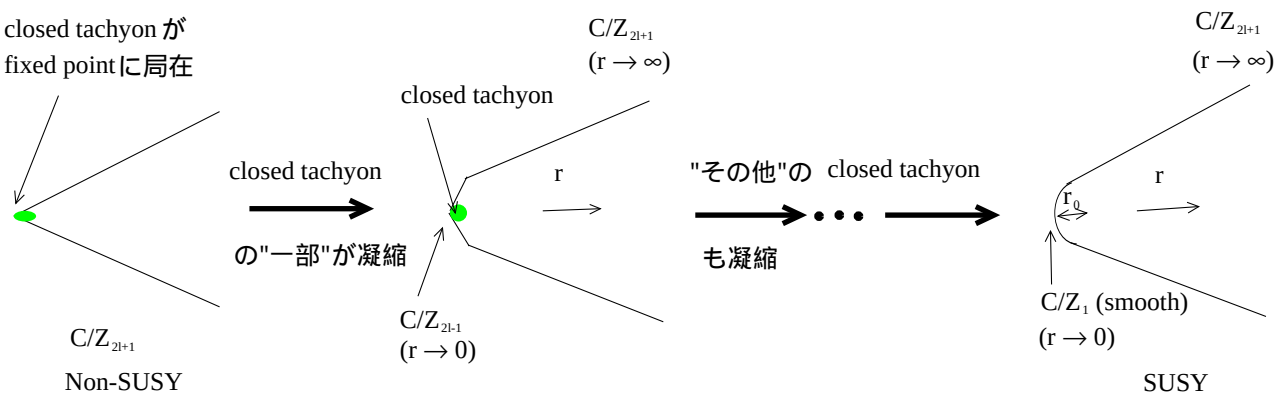

図 3.16: $\mathbb{C}/\mathbb{Z}_{2\ell+1} \to \mathbb{C}/\mathbb{Z}_1$ の流れ (再掲)

[20] 湯川 term から来る mass term は

$$\underbrace{\bar{Z}_{10}}_{\equiv 2\alpha}\xi_{03}\xi_{31} + \underbrace{\bar{Z}_{32}}_{\equiv 2\beta}\xi_{20}\xi_{03} = (\xi_{03},\xi_{31},\xi_{20}) \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ \alpha & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\equiv M} \begin{pmatrix} \xi_{03} \\ \xi_{31} \\ \xi_{20} \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda I - M) = \lambda[\lambda^2 - (\alpha^2+\beta^2)] = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda = 0, \pm\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$$

より、$\bar{Z}_{32}$ を turn on しても massive だったモードの mass が変わるだけである。

[21] 図 3.15 右側からもやはり $\mathbb{C}/\mathbb{Z}_1$ が super symmetric orbifold である事が分かる。この時 Z と ξ が chiral super multiplet (1 組) を組んでいることに注意しよう。

3.4 $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_N$ の解析

$\mathbb{C}/\mathbb{Z}_N$ は $N=1$ のみ super symmetric なので、tachyon 凝縮で最後に到達する状態がある意味分かりきっていたためバリエーションに乏しかった。一方 $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_N$ は super symmetric な orbifold が $N \neq 1$ でも無数にあるのでより有意義な結果が得られるだろうと考えられる。そこで、このセクションでは D-brane probe を使って $\mathbb{C}/\mathbb{Z}_N$ が変化してゆく様子を調べてみよう。

3.4.1 調べた系と結果

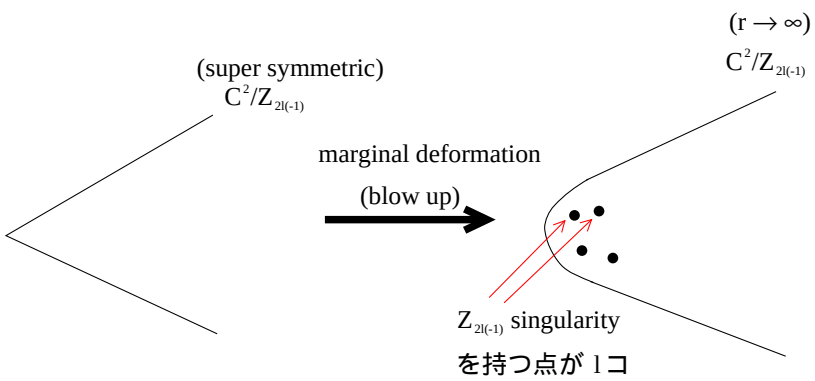

図 3.17: SUSY ALE の marginal deformation

まず $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_{2\ell(-1)}$ を考えてみると[22]これは SUSY ALE であるが、これは blow up (marginal deformation) をすることで $\mathbb{Z}_{2\ell(-1)}$ singularity が $\mathbb{Z}_{2(-1)}$ singularity ℓ コに分解される事が知られている (図 3.17)。同様の事が non-SUSY ALE の場合でも出来ないかを考えてみよう。

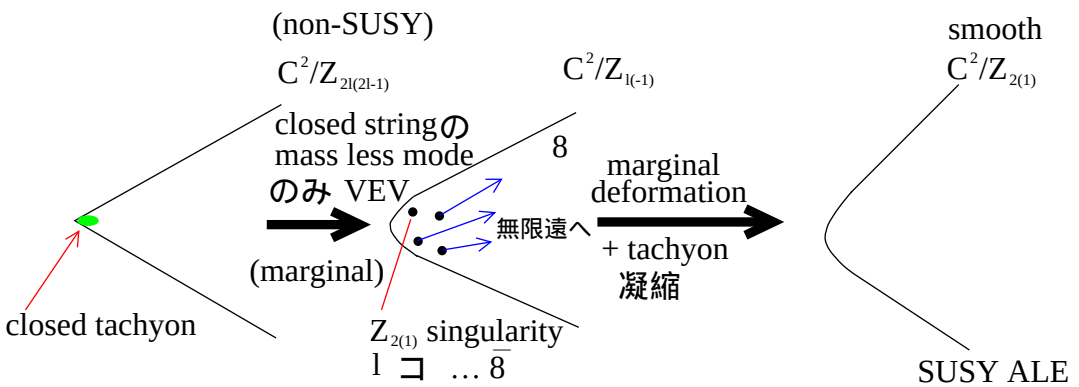

図 3.18: Non-SUSY ALE の marginal deformation

同様の事ができる事が結果として分かる。まず non-SUSY orbifold である $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_{2\ell(2\ell-1)}$ を考えると、closed string の massless モードのみに VEV を持たせるような "marginal defor-

[22]添え字 $2\ell(-1)$ の内 2ℓ の方は今までと同じ意味である (何回で元に戻るかを表す)。一方 (-1) は今回複素 2 次元を考えているので twist の仕方にもう一つ自由度があって、そのラベルを表している。ここでは括弧の中の数字が違うと種類の違う orbifold になる程度の認識で構わない。定義など具体的な話は後でする。

mation" [23]で $\mathbb{Z}_2$ 特異点 ℓ コに分解する事が分かるが、$\mathbb{Z}_2$ 特異点上とそれ以外の bulk で生き残る space time fermion が逆になっている (図 3.18 中央)。つまり local には SUSY があるが、global には SUSY が破れているような系になっている[24]。さらに ℓ コの特異点の内 $\ell-1$ コを無限遠に飛ばして (marginal)、残り 1 コを blow up (marginal + closed tachyon 凝縮) することで smooth な $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$ となって安定化すると考えられる。

3.4.2 セットアップ

これの説明を始める前に、考えている系のセットアップについて説明する。

Twist

まず $\mathbb{C}^2$ を $6-7, 8-9$ 方向をそれぞれ複素に組んだものと考えて、twist を

$$R = \exp\left[\frac{2\pi i}{N}(J_{67} + kJ_{89})\right] \qquad , \quad k \text{ は } \mathrm{mod}\ 2N \text{ で効く} \tag{3.48}$$

とする。N, k を決めると twist が決まり、これを明示的に $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_{N(k)}$ と書く。次に、今回もやはり closed tachyon を fixed point に固定したいので $R^N = 1$ としたい。J_{67}, J_{89} それぞれ $\pm\frac{1}{2}$ の場合のみ調べれば十分で

$$A: \qquad s_{67} = s_{89} = \pm\frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \quad R = \exp\left[\frac{2\pi i}{2N}(k+1)\right] \tag{3.49}$$

$$B: \quad -s_{67} = s_{89} = \pm\frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \quad R = \exp\left[\frac{2\pi i}{2N}(k-1)\right] \tag{3.50}$$

の両方同時に $R^N = 1$ であれば良いことが分かる。つまり k =odd が必要十分である事がわかるので以下 k =odd の場合のみを考える。

ここで注意するべき点が 2 つある。まず 1 つ目は $k = \pm 1$ の時の時を考えると、式 (3.50) の A, B の内どちらか一方で $R = 1$ となる。具体的には

$$k = 1 \ \cdots\ B \text{ の場合に } R = 1 \qquad , \qquad k = -1 \ \cdots\ A \text{ の場合に } R = 1 \tag{3.51}$$

となっているので、10 次元の spinor の内半分が生き残る事が分かる。同様に一般の J_{67}, J_{89} に対しても

$$k = 1 \ \cdots\ -J_{67} = J_{89} \text{の場合に } R = 1 \quad , \quad k = -1 \ \cdots\ J_{67} = J_{89} \text{の場合に } R = 1 \tag{3.52}$$

と分かるので半分が生き残ることが分かる。つまり $k = \pm 1$ の時は SUSY が半分生き残っていて、$k = 1$ と $k = -1$ で生き残る multiplet が逆になっている。よって図 3.17 で考えた $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_{2\ell(-1)}$ は確かに SUSY ALE である。2 つ目は $\frac{2N}{k+1} \in \mathbf{Z}$ か $\frac{2N}{k-1} \in \mathbf{Z}$ の場合を考えると、

$$\begin{aligned}
&\frac{2N}{k+1} \in \mathbf{Z} \quad \Rightarrow \quad R^{\frac{2N}{k+1}} \text{で A の spinor が不変} \quad \Rightarrow \quad (R^{\frac{2N}{k+1}})^\ell \text{ sector は massless モードから} \\
&\frac{2N}{k-1} \in \mathbf{Z} \quad \Rightarrow \quad R^{\frac{2N}{k-1}} \text{で B の spinor が不変} \quad \Rightarrow \quad (R^{\frac{2N}{k-1}})^\ell \text{ sector は massless モードから}
\end{aligned} \tag{3.53}$$

[23]Closed tachyon を含む系なのでこれを本当に marginal deformation と考えて良いかは怪しいが $\cdots$

[24]Marginal deformation をしただけなので、non-SUSY な物が SUSY に変化するはずがない。

という性質があるという事である。(3.53) の説明をすると、例えば $\frac{2N}{k+1} \in \mathbf{Z}$ の場合は $J_{67} = J_{89}$ の粒子に対して $R' \equiv R^{\frac{2N}{k+1}}$ は 1 として振舞う。よって $1, R', R'^2, \cdots$ と R'^ℓ twisted sector のみを考えると、これは $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_{\frac{k+1}{2}(-1)}$ の様に見える[25]。$\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_{\frac{k+1}{2}(-1)}$ は $k = -1$ なので SUSY ALE で、closed string は massless モードから始まる。よって R'^ℓ sector には closed tachyon が無く、massless モードから始まる事が分かる[26]。$\frac{2N}{k-1} \in \mathbf{Z}$ の場合も同様に考えれば分かるだろう。$k \neq \pm 1$ の場合はその他のセクターに closed tachyon を含み、全体としては non-SUSY となっている。

Probe 上の quiver ゲージ理論

今回 Dp-brane probe 上の open string は

$$\left\{\begin{array}{llll}
A^\mu_{JK} & \cdots \mu = 0 \sim p & \cdots \text{ゲージ場} & \cdots (J_{67}, J_{89}) = (0,0) \\
X^m_{JK} & \cdots m = p+1 \sim 5 & \cdots \text{brane の位置 (6}\sim\text{9 方向以外)} & \cdots (J_{67}, J_{89}) = (0,0) \\
Z^1_{JK} & \equiv (X^6 + iX^7)_{JK} & \cdots \text{6-7 方向の brane の位置} & \cdots (J_{67}, J_{89}) = (1,0) \\
Z^2_{JK} & \equiv (X^8 + iX^9)_{JK} & \cdots \text{8-9 方向の brane の位置} & \cdots (J_{67}, J_{89}) = (0,1) \\
\bar{Z}^1_{JK} & & \cdots Z^1\text{の conjugate} & \cdots (J_{67}, J_{89}) = (-1,0) \\
\bar{Z}^2_{JK} & & \cdots Z^2\text{の conjugate} & \cdots (J_{67}, J_{89}) = (0,-1) \\
\chi_{JK} & \in \mathbf{4} \subset \mathrm{SO}(1,9)\text{ の } \mathbf{16} & \cdots J_{67} = J_{89} = -\frac{1}{2}\text{の } \mathbf{4} & \cdots (J_{67}, J_{89}) = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \\
\eta_{JK} & \in \mathbf{4'} \subset \mathrm{SO}(1,9)\text{ の } \mathbf{16} & \cdots J_{67} = -J_{89} = -\frac{1}{2}\text{の } \mathbf{4'} & \cdots (J_{67}, J_{89}) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \\
\bar{\chi}_{JK} & & \cdots \chi\text{の conjugate} & \cdots (J_{67}, J_{89}) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \\
\bar{\eta}_{JK} & & \cdots \eta\text{の conjugate} & \cdots (J_{67}, J_{89}) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})
\end{array}\right. \tag{3.54}$$

を考えれば良い。前の R-inv の条件式 (3.11) は今回

$$J - K + (J_{67} + kJ_{89}) \equiv 0 \pmod{N} \tag{3.55}$$

と拡張できるので、生き残る spectrum は

$$A^\mu_{JJ} \quad , \quad X^m_{JJ} \quad , \quad Z^1_{J,J+1} \quad , \quad Z^2_{J,J+k} \quad , \quad \chi_{J,J-q-1} \quad , \quad \eta_{J,J+q} \qquad k \equiv 2q+1 \tag{3.56}$$

とその複素共役であることが分かる。

---

[25] $R'^{\frac{k+1}{2}} = 1$ より $\mathbb{Z}_{\frac{k+1}{2}}$ 型に見えて、R' の作用で $J_{67} = J_{89}$ の粒子が生き残り $-J_{67} = J_{89}$ の粒子が projected out されるので (-1) 型と分かる。

[26] R'^ℓ sector の粒子に対する R の作用を考慮に入れていないと考える人もいるだろうが、R の作用は R'^ℓ sector の粒子の 1 部を project out するだけなので、元々closed tachyon を含まない spectrum に tachyon が入ることは無い。

3.4.3 $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_{2\ell(2\ell-1)}$ の deform(大雑把な説明)

以上を踏まえて図 3.18 の左の様な orbifold $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_{2\ell(2\ell-1)}$ の deform を考えてみよう。ここではあまり式を使わずに直感的に理解できるようにして、より詳しい説明は後に譲る。

まず前のセクションの話から分かる様に $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_{2\ell(2\ell-1)}$ は non-SUSY ALE であるが、

$$\frac{2N}{k+1} = \frac{2(2\ell)}{2\ell-1+1} = 2 \in \mathbf{Z} \tag{3.57}$$

より (3.53) の話から $1, R^2, R^4, \cdots$ sector の closed string は massless モードからである事が分かる。これらの sector の closed string にだけ VEV を持たせる様な操作は "marginal deformation" であるが、その様な事をするためには具体的にどうしたら良いのだろうか?結果を言うと quantum $\mathbb{Z}_2$ symmetry を課したまま deform すれば良い。

その理由を説明すると、まず quiver の足 $|J\rangle$ と R^α twisted sector の closed string の状態 $|\alpha\rangle\rangle$ とは式 (3.29) の対応

$$|J\rangle = \sum_\alpha e^{2\pi i \frac{J\alpha}{2\ell}} |\alpha\rangle\rangle \qquad \Rightarrow \qquad |\alpha\rangle\rangle = C_0 \sum_J e^{-2\pi i \frac{J\alpha}{2\ell}} |J\rangle \tag{3.58}$$

があったわけだが (C_0 は適当な定数)、quantum $\mathbb{Z}_2$ symmetry $|J\rangle \ \to \ |J+\ell\rangle$ に対し $|\alpha\rangle\rangle$ は

$$|\alpha\rangle\rangle \ \to \ C_0 \sum_J e^{-2\pi i \frac{J\alpha}{2\ell}} |J+\ell\rangle = C_0 \sum_J e^{-2\pi i \frac{J+\ell\alpha}{2\ell}} |J+\ell\rangle \times e^{2\pi i \frac{\ell\alpha}{2\ell}} = (-1)^\alpha |\alpha\rangle\rangle \tag{3.59}$$

と振舞うので、これで不変となるのは α =even の時である。つまり、quantum $\mathbb{Z}_2$ symmetry が保たれている時は $1, R^2, R^4, \cdots$ sector のみ VEV を持てるという事が分かる。

さて 3.3 の話から一般に closed string が VEV を持つと quantum symmetry が壊れて $|Z^1_{J,J+1}|$ は J 毎に別々の VEV をとる様になる事が分かったが、今回は quantum $\mathbb{Z}_2$ symmetry が保たれているので $|Z^1_{J,J+1}| = |Z^1_{J+\ell,J+\ell+1}|$ を満たしながら VEV を取る。

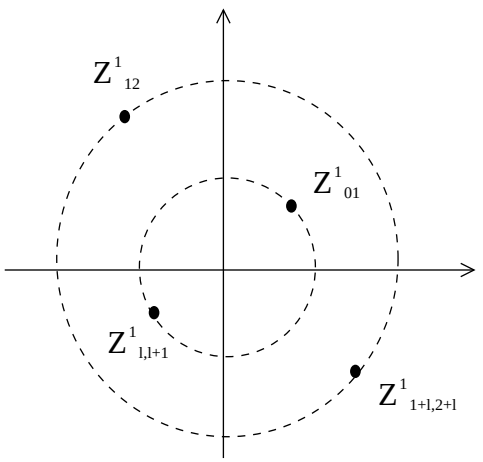

図 3.19: $Z^1_{J,J+1}$ の VEV

つまり一般的な λ (deform parameter) では図 3.19 の様に ℓ コの同心円があって、1 つの同心円上にそれぞれ 2 コずつ Z^1 が乗る。Probe を動かすと同心円の半径が変わるが、Z^1 の VEV

が 0 となる時は同時に 2 コの Z^1 が VEV 0 となる。つまりこれは $\mathbb{Z}_2$ 特異点である。このような特異点は合計 ℓ コある事が分かる[27]ので、確かに SUSY ALE の様に marginal deformation で $\mathbb{Z}_{2\ell}$ 特異点が $\mathbb{Z}_2$ 特異点 ℓ コに分解している (図 3.18 中央)。

次に 3.53 の下あたりの話から特異点以外の空間は $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_{\ell(-1)}$ として振舞う事が分かる。これも図 3.18 中央の通りである。

最後に特異点 $\mathbb{Z}_{2(k)}$ の k を調べよう。厳密な導出は後で行う事にしてここでは直感的な説明をする事にする。まず SUSY ALE の $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_{2\ell(-1)}$ の場合は図 3.17 の様に deformation が

$$R = \exp[2\pi i(J_{67} - J_{89})/2\ell] \qquad \overset{\ell\to 1}{\Rightarrow} \qquad R_d = \exp[2\pi i(J_{67} - J_{89})/2] \tag{3.60}$$

対応していて、R_d が $\mathbb{Z}_2$ 特異点での twist に相当しているために $\mathbb{Z}_{2(-1)}$ 特異点となる。よって $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_{2\ell(2\ell-1)}$ の場合も同様の性質が成り立っていると考えよう。すると twist の式 (3.48) は

$$R = \exp[2\pi i(J_{67} - J_{89})/2\ell](-1)^F \tag{3.61}$$

と書き直せるので、これも $\ell \to 1$ とすると

$$R_d = \exp[2\pi i(J_{67} - J_{89})/2](-1)^F = \exp[2\pi i(J_{67} + J_{89})/2] \tag{3.62}$$

となって $\mathbb{Z}_{2(1)}$ 型特異点である事が分かる。

以上より特異点 $\mathbb{Z}_{2(1)}$ とそれ以外 $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_{\ell(-1)}$ には共に SUSY が残っているが (括弧の中身が ± 1 なので)、特異点とそれ以外で生き残る multiplet が逆になっていて (括弧の中の値が逆)、全体では non-SUSY となっている事が分かる。

3.4.4 詳細の説明

この話をもう少し詳しく追ってみる事にしよう。まず deform を行う前の状態を考えて、その時の probe 上の open string の action についてまとめておく。

Scalar potential (Higgs branch)

まず Higgs branch の scalar potential V は Z^1_{JK} 等を行列とみなすと、

$$V = Tr\left(\frac{1}{2}[Z^1, \bar{Z}^1]^2 + \frac{1}{2}[Z^2, \bar{Z}^2]^2 + |[Z^1, Z^2]|^2 + |[Z^1, \bar{Z}^2]|^2\right) \tag{3.63}$$

と書ける。これは Jacobi identity で書き直すと

$$\begin{aligned} V &= Tr\left(\frac{1}{2}([Z^1, \bar{Z}^1] - [Z^2, \bar{Z}^2])^2 + 2|[Z^1, \bar{Z}^2]|^2\right) \\ &= Tr\left(\frac{1}{2}([Z^1, \bar{Z}^1] + [Z^2, \bar{Z}^2])^2 + 2|[Z^1, Z^2]|^2\right) \end{aligned} \tag{3.64}$$

とも書ける。今回考えたい系 $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_{2\ell(2\ell-1)}$ の場合は、式 (3.64) の下側は (3.56) より

$$V = \frac{1}{2}\sum_{J=0}^{2\ell-1} D_J^2 + 2\sum_{J=0}^{2\ell-1} |Z^1_{J,J+1}Z^2_{J+1,J} - Z^1_{J-1,J}Z^2_{J,J-1}|^2 \tag{3.65}$$

$$D_J = |Z^1_{J,J+1}|^2 - |Z^2_{J+1,J}|^2 - |Z^1_{J-1,J}|^2 + |Z^2_{J,J-1}|^2 \tag{3.66}$$

[27]どの同心円の半径が 0 となるかで ℓ コ。

と書ける[28]。D_J は D-term となっている事に注意しよう。この式より potential 最小の条件は

$$Z^1_{J,J+1} = Z^1 \quad , \quad Z^2_{J+1,J} = Z^2 \qquad (J \text{ に依らない}) \tag{3.67}$$

となっている。$\mathbb{C}/\mathbb{Z}_N$ の場合と同様にゲージ対称性より $Z^1 \cong e^{\frac{2\pi i}{2\ell}} Z^1, Z^2 \cong e^{\frac{2\pi i}{2\ell}} Z^2$ とも分かるので、確かに $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_{2\ell}$ となっている事が分かる。

湯川 term

次に湯川相互作用項は

$$L_Y = Tr\left([Z^1, \chi]\eta + [Z^2, \chi]\bar{\eta}\right) + \text{h.c.} \tag{3.68}$$

となっている。

Deform 後の話

さて closed string の massless モードに VEV を持たせて deform を行うと、$\mathbb{C}/\mathbb{Z}_N$ の場合と同様に scalar potential V に FI term が加わるだろう。つまり

$$\Delta V = -\sum_{J=0}^{2\ell-1} \lambda_J D_J \tag{3.69}$$

が加わるだろう。今回も λ_J に条件が付いていて、

$$\begin{array}{lcl} \text{Untwisted sector を操作しない} & \Rightarrow & \sum_{J=0}^{2\ell-1} \lambda_J = 0 \\ \text{Quantum } \mathbb{Z}_2 \text{ symmetry を課す} & \Rightarrow & \lambda_J = \lambda_{J+\ell} \end{array}$$

を課す事にしよう。つまり、twisted sector の massless モードのみ VEV を持たせて deform をしている。この時、potential 最小の条件は

$$D_J = \lambda_J \qquad \wedge \qquad |Z^1_{J,J+1} Z^2_{J+1,J} - Z^1_{J-1,J} Z^2_{J,J-1}| = 0 \tag{3.70}$$

と変化する。これを解くと

$$\begin{array}{rl} |Z^1_{J,J+1}|^2 - |Z^2_{J+1,J}|^2 &= \rho_J + x \qquad , \quad \rho_J \equiv \rho_{J-1} + \lambda_J \quad , \quad \rho_0 \equiv 0 \\ Z^1_{J,J+1} Z^2_{J+1,J} &= \alpha \qquad (J \text{ に依らない}) \end{array} \tag{3.71}$$

となる。よって真空の moduli は $x \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{C}$ となる。

さて、式 (3.71) を用いて特異点を探そう。まず、少なくても $\alpha = 0$ でないと $Z^1 \neq 0 \wedge Z^2 \neq 0$ なので特異点ではない。よって部分空間 $\alpha = 0$ を探せば良いことが分かる。この時 x を動かして、ある J_0 に対して $x = -\rho_{J_0}$ とすれば

$$|Z^1_{J_0,J_0+1}|^2 - |Z^2_{J_0+1,J_0}|^2 = 0 \ \wedge \ Z^1_{J_0,J_0+1} Z^2_{J_0+1,J_0} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Z^1_{J_0,J_0+1} = Z^2_{J_0+1,J_0} = 0 \tag{3.72}$$

[28] (3.56) より、行列 Z^1, Z^2 で 0 でない成分は $Z^1_{J,J+1}, Z^2_{J,J-1}$ であることを踏まえると

$$\begin{aligned} [Z^1, \bar{Z}^1]_{JK} &= (Z^1_{J,J+1}\bar{Z}^1_{J+1,J} - \bar{Z}^1_{J,J-1}Z^1_{J-1,J})\delta_{JK} = (|Z^1_{J,J+1}|^2 - |Z^1_{J,J-1}|^2)\delta_{JK} \\ [Z^2, \bar{Z}^2]_{JK} &= (Z^2_{J,J-1}\bar{Z}^2_{J-1,J} - \bar{Z}^2_{J,J+1}Z^1_{J+1,J})\delta_{JK} = (|Z^2_{J,J-1}|^2 - |Z^2_{J+1,J}|)\delta_{JK} \\ [Z^1, Z^2]_{JK} &= (Z^1_{J,J+1}Z^2_{J+1,J} - Z^2_{J,J-1}Z^1_{J-1,J})\delta_{JK} \end{aligned}$$

となっている事が分かるので。

となっている事が分かる。

今回は quantum $\mathbb{Z}_2$ symmetry があるので $Z^1_{J_0+\ell,J_0+\ell+1} = Z^2_{J_0+\ell+1,J_0+\ell} = 0$ も成り立っていることに注意しよう。つまり $(Z^1_{J,J+1}, Z^2_{J+1,J})$ の組 2 組が VEV $(0,0)$ となるので、これは $\mathbb{Z}_2$ 特異点である。実際に、ゲージ場

$$A^\mu_1 \equiv \sum_{J=J_0+1}^{J_0+\ell} A^\mu_{JJ} \quad , \quad A^\mu_2 \equiv \sum_{J=J_0+\ell+1}^{J_0} A^\mu_{JJ} \tag{3.73}$$

が生成するゲージ変換に対して真空が不変なので、$x = -\rho_{J_0}$ 上で $U(1)^2$ ゲージ対称性が残っている。このような x は一般的に[29] ℓ コあるので、$\mathbb{Z}_2$ 特異点は ℓ コある事が分かる。

特異点の詳細

最後に $\mathbb{Z}_{2(k)}$ の k の値を調べよう。まず $\mathbb{Z}_2$ 特異点上で

$$Z^1_{J_0,J_0+1} = Z^2_{J_0+1,J_0} = Z^1_{J_0+\ell,J_0+\ell+1} = Z^2_{J_0+\ell+1,J_0+\ell} = 0 \tag{3.74}$$

だったので、湯川 term (3.68) で mass term を持たない η は $\eta_{J_0+1,J_0+\ell}, \eta_{J_0+\ell+1,J_0}$ の 2 つである。この 2 つの fermion は A^μ_1, A^μ_2 が生成するゲージ変換に対して adjoint であることに注意しよう。(3.56) より η が adjoint になるのは $q = 0$ の場合、つまり $k = 1$ の場合である事が分かるので、$\mathbb{Z}_{2(1)}$ 型特異点である事が分かる。

[29] 具体的には $\mathrm{mod}\ \ell$ で ρ_J が全て異なる時の事を指している。Quantum $\mathbb{Z}_2$ symmetry があるので $\rho_J = \rho_{J+\ell}$ である事に注意しよう。

第4章　Conclusion

最後に、この修士論文で分かった事をまとめよう。

まず 2 章では石橋 state と Cardy 条件を用いて orbifold $\mathbb{R}^{1,d-1-2n} \times \mathbb{C}^n/\Gamma$ の orbifold 方向に垂直な方向を向いた brane を調べることで、orbifold 上を自由に動き回れる D-brane の他に、orbifold の fixed point 上に固定されていて Γ の既約表現 D_I に対応する I-type fractional brane が存在する事が分かった。Fractional brane の untwisted closed string の charge は D-brane のそれの分数であることも分かった。特に SUSY ALE の場合は 2-cycle に巻きついた D-brane に B 場の flux が貫いたものを考えて、それがつぶれたものが fractional brane であるという物理的解釈が与えられた。次に fixed point 上の D-brane は Γ の正則表現に対応しているので、fractional brane の和として解釈できる事が分かった。

次に 3 章では orbifold $\mathbb{C}/\mathbb{Z}_{2\ell+1}$ でうまい twist を取って tachyon が fixed point に局在させた系の closed tachyon 凝縮の様子を D-brane probe を用いて調べる方法を学んだ。一言で言えば probe 上の open string の作るゲージ理論の変化を調べて空間の変化の様子を見る方法で、open string から closed string の情報を得る上手い方法である。ここで重要な点は probe が fractional brane に分解できるので、probe 上の open string は fractional brane 間を繋ぐ open string と解釈できる点である。この性質のため closed tachyon と probe 上の open string との coupling の値の性質が分かり、空間の変化を具体的に調べる事が出来たわけである。結果は予想通り closed tachyon が存在する fixed point 付近の空間だけが変化して特異点が解消され、SUSY のある空間に移るというものだった。直接取り扱う事が困難である closed tachyon 凝縮を open string の力を借りて取り扱うというアイデアはセンスがあふれているし、closed tachyon が fixed point に局在しているという非常に限定的なケースではあるが closed tachyon 凝縮の様子を追うことが出来た事は今後の closed tachyon 凝縮の研究の発展に繋がると考えられる。

3 章の結果について幾つかコメントをしておく。まず 1 つ目は Zamolodchikov の c 定理 [41] との “矛盾”” である。c 定理は 2 次元 CFT(今回は world sheet の CFT) を考えた時に off shell の過程で central charge c が減るという定理であるが、closed tachyon 凝縮 $\mathbb{C}/\mathbb{Z}_{2\ell+1} \to \mathbb{C}/\mathbb{Z}_1$ ではどちらも critical dimension ($c = 15$) なので c が同じとなってしまうので c 定理と矛盾しているという事である。この問題の解決法として、[19] では次のように提案されている。まず closed tachyon が fixed point に局在していて、untwisted closed string が non-compact な空間 $\mathbb{C}/\mathbb{Z}_{2\ell+1}$ 全体を飛び回っている事に注目しよう。つまり tachyon が占める空間の体積は高々有限で、untwisted closed string の占める空間の体積は無限大なので、twisted sector の変化では c は変化しないというのである。この事は [24] で次のようにして実際に確かめられている。まず c 定理の話から、c の変化は off shell に変化させる場の 2 点相関関数に比例している。次に $\mathbb{C}$ 方向の target space の体積を V(後で ∞ とする) と置いて untwisted sector の場 U_j の相関関数を考えると、

$$\langle U_1 \cdots U_n \rangle = \frac{\int [\,\mathrm{d}X] \exp(-S) U_1 \cdots U_n}{\int [\,\mathrm{d}X] \exp(-S)} \sim \frac{V}{V} = 1 \tag{4.1}$$

となっている。式 (4.1) のポイントは

$$\int [\,\mathrm{d}X]\exp(-S)U_1\cdots U_n = \int \mathrm{d}x_0[\,\mathrm{d}\alpha]\exp(-S)U_1\cdots U_n \sim \int \mathrm{d}x_0 = V \tag{4.2}$$

となっている事である。つまり untwisted sector は空間全体に飛び回っているので、untwisted sector のゼロモード x_0 の積分から target の体積 V が出てくる。一方相関関数に twisted sector T_j が含まれている場合は

$$\langle U_1\cdots U_nT_1\cdots T_m\rangle \sim \frac{1}{V} \tag{4.3}$$

となり、$V\to\infty$ の極限で 0 となる。ただし、

$$\int [\,\mathrm{d}X]\exp(-S)U_1\cdots U_nT_1\cdots T_m = \langle T_1|U_1\cdots U_nT_2\cdots T_{m-1}|T_m\rangle \sim 1 \tag{4.4}$$

であることを用いた。まず式 (4.4) では暗黙の内に $m\geq 2$ を仮定しているが、これは twisted sector が含まれた相関関数を考える時に twisted sector は 2 つ以上含まれていないと相関関数は 0 となるからである。その理由を説明すると、まず orbifold の covering space で考えると T_j が h_j twisted sector とした時に、図 4.1 の形でのみ相互作用する事に注意しよう。

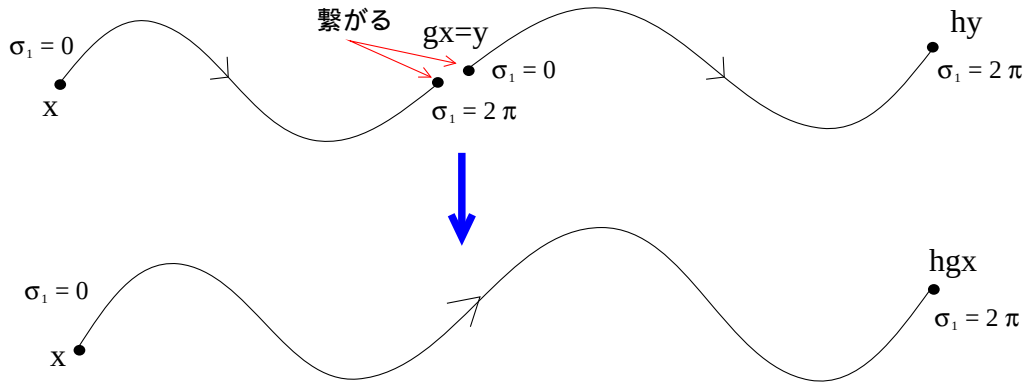

図 4.1: twisted sector 同士の相互作用

つまり、hg twisted sector の string として振舞う。この様にして相関関数中の全ての twisted sector を合成した時にそれが untwisted sector とならなければならないので[1]、

$$\prod_{j=1}^{m} h_j = e \tag{4.5}$$

の場合のみ相関関数が $\neq 0$ となる事が分かる [42](ただし orbifold 群が abelian であるとした)。式 (4.5) を満たすためには twisted sector は最低 2 つ無ければならない。

さて、式 (4.4) では twisted sector T_1, T_m を経路積分の始状態 $|T_m\rangle$ と終状態 $|T_1\rangle$ と解釈出来るが [42]、これは始状態と終状態が fixed point に固定されている事に相当しているので経

[1]式 (4.4) では始状態と終状態を untwisted sector として解釈することもできる。その時は $T_1\sim T_m$ は全て vertex operator と解釈されるので、twisted sector を全て合成して untwisted sector とならないと終状態が untwisted にならないため。

路積分の measure $[\mathrm{d}X]$ には $\mathrm{d}x_0$ は含まれない事に注意しよう。特に $V \to \infty$ で $\langle T_1 T_2 \rangle = 0$ となるので、$\mathbb{C}/\mathbb{Z}_{2\ell+1}$ の tachyon 凝縮では c が変化しない事が分かり、確かに c 定理と矛盾しない。また、[24] では $\mathbb{C}/\mathbb{Z}_{2\ell+1}$ の tachyon 凝縮で減る量が g_{cl} であることが提唱されている。g_{cl} は twisted sector の準位数の比例係数で、closed tachyon 凝縮でこれが減る (tachyon の効果が無くなって行くことに相当) 事は納得できる。

2 つ目は closed tachyon が空間全体を飛び回っている系がまだ扱われていない事である。このような系に対しては [24] の方法で c 定理を回避することができず[2]、直感的には closed tachyon 凝縮で non-critical な理論に移ると考えられるので、取り扱いが困難であると考えられるが、[25] ではそのような系での closed tachyon 凝縮が議論されている。

Acknowledgments

多くの貴重なアドバイスや指導をして下さった江口先生には深く感謝します。そして、私に勉強会での発表の機会を与えて下さった菅原さんに感謝の意を述べたいと思います。この勉強会で closed tachyon 凝縮に対する理解を深める事が出来て、私にとって非常に有用でした。色々と教えて下さったり議論をして下さった野崎さん、上杉さん、高柳さん、浜中さん、疋田さん、市川さん、代数幾何の事を色々と教えて下さった酒井さんに感謝の意を述べたいと思います。同期の岡君、植原君、山田君、渡辺君とは数多くのゼミや議論が出来てとても有意義でした。最後に私を励まして下さった研究室の方々や友人、そして家族に感謝したいと思います。

[2] 式 (4.1) より $\langle U_1 U_2 \rangle$ が有限になってしまうので。

付 録A　Rセクターのground state

A.1　SO(1,9) の Γ 行列

まず、後で使うので $SO(1,9)$ の Γ 行列について軽くまとめる。$SO(1,9)$ の Γ^μ $(\mu = 0 \sim 9)$ は 32×32 の正方行列で、Clifford 代数

$$\{\Gamma^\mu, \Gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \tag{A.1}$$

を満たすものである。行列の具体形が分かっていた方が理解しやすいと思うので、まず Γ 行列の具体形をまとめる。

A.1.1　Γ 行列の具体形と諸性質

$SO(1,9)$ の Γ 行列は、Pauli 行列 σ^k と $SO(8)$ の Γ 行列 γ^i を用いて次のように書ける。

$$\Gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} = i\sigma^2 \otimes \mathbf{1} \tag{A.2}$$

$$\Gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \gamma^i \\ \gamma^i & 0 \end{pmatrix} = \sigma^1 \otimes \gamma^i \qquad \text{for } i = 1, \cdots, 8 \tag{A.3}$$

$$\Gamma^9 = \begin{pmatrix} 0 & \gamma^1 \cdots \gamma^8 \\ \gamma^1 \cdots \gamma^8 & 0 \end{pmatrix} = \sigma^1 \otimes \gamma^1 \cdots \gamma^8 \tag{A.4}$$

ただし、Pauli 行列は

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{A.5}$$

で与えられて、γ^i は $SO(8)$ の Clifford 代数

$$\{\gamma^i, \gamma^j\} = 2\delta^{ij} \tag{A.6}$$

を満たす実対称行列である。

さて σ^k と γ^i が Hermite 行列であることを踏まえると、Γ^μ は Hermite 行列で無いことが分かる。具体的には、

$$\Gamma^{0\dagger} = -\Gamma^0 \quad , \quad \Gamma^{i\dagger} = \Gamma^i \quad \text{for } i = 1, \cdots, 9 \tag{A.7}$$

となっている[1]。最後に charge conjugation matrix C を

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -i\mathbf{1} \\ i\mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} = -i\Gamma^0 = \sigma^2 \otimes \mathbf{1} \tag{A.8}$$

と定義しよう。すると、まずこの式から

$$C^{-1} = C \quad , \quad C^T = -C \tag{A.9}$$

である事がすぐに分かる。さらに任意の μ に対して

$$(\Gamma^\mu)^T = -C\Gamma^\mu C^{-1} \tag{A.10}$$

を満たしている事が分かる[2]。

A.1.2 昇降演算子と状態ベクトル

まず、この Γ^μ を使って次のように昇降演算子を定義できる。

$$\Gamma^{0\pm} \equiv \frac{1}{2}(\pm\Gamma^0 + \Gamma^1) \tag{A.11}$$

$$\Gamma^{a\pm} \equiv \frac{1}{2}(\Gamma^{2a} \pm i\Gamma^{2a+1}) \quad , \quad a = 1, \cdots, 4 \tag{A.11'}$$

これらの反交換関係は以下の様に昇降演算子のそれである。

$$\begin{aligned} \{\Gamma^{a+}, \Gamma^{b-}\} &= \delta^{ab} \\ \{\Gamma^{a+}, \Gamma^{b+}\} &= \{\Gamma^{a-}, \Gamma^{b-}\} = 0 \end{aligned} \tag{A.12}$$

さらに、S_a を

$$S_a \equiv \Gamma^{a+}\Gamma^{a-} - \frac{1}{2} \tag{A.13}$$

と定義しよう。式(A.12),(A.13)を用いると、S_a の固有値 $s_a = \pm\frac{1}{2}$ を並べた $\mathbf{s} = (s_0, s_1, \cdots, s_4)$ をラベルとして、状態ベクトル $\zeta^{\mathbf{s}}$ を次の様に構成できる。

$$\zeta^{\mathbf{s}} \equiv (\Gamma^{4+})^{s_4+1/2}(\Gamma^{3+})^{s_3+1/2}\cdots(\Gamma^{0+})^{s_0+1/2}\zeta \tag{A.14}$$

$$\Gamma^{a-}\zeta = 0 \qquad , \quad {}^\forall a \tag{A.14'}$$

つまり、ζ は全ての a で $s_a = -\frac{1}{2}$ の状態ベクトルである。最後に、Γ_{11} を

$$\Gamma_{11} \equiv \Gamma^0 \ \cdots \ \Gamma^9 = 2^5 S_0 S_1 \cdots S_4 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix} = \sigma^2 \otimes \mathbf{1} \tag{A.15}$$

と定義する。つまり Γ_{11} は固有値が chirality となっている実対称行列である。

---

[1] ただし、

$$(\gamma^1 \cdots \gamma^8)^\dagger = \gamma^{8\dagger} \cdots \gamma^{1\dagger} = \gamma^8 \cdots \gamma^1 = (-1)^{(8+7+\cdots+1)}\gamma^1 \cdots \gamma^8 = \gamma^1 \cdots \gamma^8$$

を用いた。

[2] ただし、γ^i が実対称行列であることを用いた。

A.2 Rセクターのground state

Flatな空間を考えた時、Rセクターのworld sheet fermion ψ^μは0モード ψ_0^μを含む。ψ_0^μの反交換関係を考えると

$$\{\psi_0^\mu, \psi_0^\nu\} = \eta^{\mu\nu} \tag{A.16}$$

となっていてClifford代数に似ているがfactor 2だけずれている。そこで$SO(1,9)$のΓ行列と$\Gamma^\mu \cong \sqrt{2}\psi_0^\mu$のように同一視すれば良い。Right成分も$\tilde{\Gamma}^\mu \cong \sqrt{2}\tilde{\psi}_0^\mu$として同様に考えられる。

このセクションではA.1にまとめたΓ行列を使ってclosed stringのRRセクターのground stateの性質を調べる事が目標だが、最初からleftとrightを同時に取り扱うと話がややこしくなるので、まずleftだけを考えることにしよう。

A.2.1 RRセクターの基底

まず、$A = 1 \sim 32$としてRセクターのground stateの基底$|A\rangle$を次の様に定義する。

$$|A\rangle \cong \mathbf{e}_A \quad , \quad (\mathbf{e}_A)_B = \delta_{AB} \tag{A.17}$$

つまり、$\mathbf{e}_A$はA番目の成分が1で他の成分は0のベクトルである。$\mathbf{e}_A$に対するΓ^μの作用は

$$\Gamma^\mu \mathbf{e}_A = X_{AB}\mathbf{e}_B \quad \Rightarrow \quad X_{AB} = \mathbf{e}_B^T \Gamma^\mu \mathbf{e}_A = \delta_{BC}(\Gamma^\mu)_{CD}\delta_{DA} = (\Gamma^\mu)_{BA} \tag{A.18}$$

より、$|A\rangle$に対するψ_0^μの作用は

$$\Gamma^\mu \mathbf{e}_A = (\Gamma^\mu)_{BA}\mathbf{e}_B \quad \Rightarrow \quad \psi_0^\mu|A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Gamma^\mu)_{BA}|B\rangle \tag{A.19}$$

となる[3]。同様にrightのground stateの基底を$|\tilde{B}\rangle$として、closed stringのRRセクターの基底を

$$|A, \tilde{B}\rangle \equiv |A\rangle|\tilde{B}\rangle \tag{A.20}$$

と書こう。式(A.19)より、$|A, \tilde{B}\rangle$に対する$\psi_0^\mu, \tilde{\psi}_0^\mu$の作用は$\{\psi_0^\mu, \tilde{\psi}_0^\nu\} = 0$を踏まえると

$$\psi_0^\mu|A, \tilde{B}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Gamma^\mu)_{CA}(\mathbf{1})_{DB}|C, \tilde{D}\rangle \tag{A.21}$$

$$\tilde{\psi}_0^\mu|A, \tilde{B}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Gamma_{11})_{CA}(\Gamma^\mu)_{DB}|C, \tilde{D}\rangle \tag{A.21'}$$

と分かる[4]。

[3]このように、基底には右から変換行列が掛かる事に注意。

[4]ψ_0^μと$\tilde{\psi}_0^\nu$は反交換するので、その性質をうまく取り込まなければならない。例えば$(\Gamma^\mu)_{AB}$と$(\tilde{\Gamma}^\mu)_{AB}$を互いに反交換する数として($(\Gamma^\mu)_{AB}$同士は交換するのでGlassman数では無い)

$$\psi_0^\mu|A, \tilde{B}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Gamma^\mu)_{CA}(\mathbf{1})_{DB}|C, \tilde{D}\rangle$$

$$\tilde{\psi}_0^\mu|A, \tilde{B}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{1})_{CA}(\tilde{\Gamma}^\mu)_{DB}|C, \tilde{D}\rangle$$

とするのは最も自然な方法であるが、話が煩雑になるので採用しないことにする。代わりに式(A.21),(A.21')の様に$\Gamma^\mu, \tilde{\Gamma}^\mu$を同じ$(\Gamma^\mu)_{AB}$($c$数)として、反交換の性質を式(A.21')の$\Gamma_{11}$に押し付ける事にする。

応用例:Dp-brane の boundary state の構成

応用例として、Dp-brane の R セクターの ground state $|R;\eta\rangle\!\rangle^{(0)}$ を構成しよう [43]。まず、$|R;\eta\rangle\!\rangle^{(0)}$ を基底 $|A,\tilde{B}\rangle$ で次のように展開しよう。

$$|R;\eta\rangle\!\rangle^{(0)} = M_{\eta AB}|A,\tilde{B}\rangle \tag{A.22}$$

次に $|R;\eta\rangle\!\rangle^{(0)}$ は貼り合わせの条件

$$\left(\psi_0^\mu - i\eta S^\mu{}_\nu \tilde{\psi}_0^\nu\right)|R;\eta\rangle\!\rangle^{(0)} = 0 \tag{A.23}$$

の解であったが、式 (A.21),(A.21'),(A.22) を使うと次のように書き換えられる。

$$\frac{1}{\sqrt{2}}M_{\eta AB}\left[(\Gamma^\mu)_{CA}(\mathbf{1})_{DB} - i\eta S^\mu{}_\nu(\Gamma_{11})_{CA}(\Gamma^\nu)_{DB}\right]|C,\tilde{D}\rangle = 0 \tag{A.24}$$

つまり、$M_{\eta AB}$ は行列方程式

$$\Gamma^\mu M_\eta - i\eta S^\mu{}_\nu \Gamma_{11} M_\eta \Gamma^{\nu T} = 0 \tag{A.25}$$

の解である。この方程式を解くと、

$$M_{\eta AB} = \left[\Gamma^0\cdots\Gamma^p C\frac{1+i\eta\Gamma_{11}}{1+i\eta}\right]_{AB} \tag{A.26}$$

と分かる。係数 $(1+i\eta)^{-1}$ は後で open-closed 対応を付けるときの便宜上のものである。

後で light cone ゲージで考えたいので、s_0 や $\tilde{s}_0$ に対する projector の作用を考えよう。$s_0 = \pm\frac{1}{2}$ や $\tilde{s}_0 = \pm\frac{1}{2}$ への projection は $P \equiv 2S_0, \tilde{P} \equiv 2\tilde{S}_0$ とすると

$$\left(\frac{1\pm P}{2}\right)|A,\tilde{B}\rangle = \left(\frac{1\pm P}{2}\right)_{CA}(\mathbf{1})_{DB}|C,\tilde{D}\rangle \tag{A.27}$$

$$\left(\frac{1\pm \tilde{P}}{2}\right)|A,\tilde{B}\rangle = (\mathbf{1})_{CA}\left(\frac{1\pm P}{2}\right)_{DB}|C,\tilde{D}\rangle \tag{A.28}$$

とわかる。ここで、

$$\left(\frac{1\pm P}{2}\right)_{AB} = \left[\frac{1}{2}(1\pm\Gamma^0\Gamma^1)\right]_{AB} \tag{A.29}$$

となっていて、$\left(\frac{1\pm P}{2}\right)_{AB}$ は対称行列である事に注意しよう。以上より $s_0 = \frac{\alpha}{2}, \tilde{s}_0 = \frac{\tilde{\alpha}}{2}$ への projection は

$$\left(\frac{1+\alpha P}{2}\right)\left(\frac{1+\tilde{\alpha}\tilde{P}}{2}\right)|A,\tilde{B}\rangle = \left(\frac{1+\alpha P}{2}\right)_{CA}\left(\frac{1+\tilde{\alpha}P}{2}\right)_{DB}|C,\tilde{D}\rangle \tag{A.30}$$

と分かる。以上を踏まえて light cone ゲージでの解を $|R;\eta\rangle\!\rangle^{(0)}_{lc}$ とすると、適切な $\alpha,\tilde{\alpha}$ で

$$\begin{aligned}
|R;\eta\rangle\!\rangle^{(0)}_{lc} &= \left(\frac{1+\alpha P}{2}\right)\left(\frac{1+\tilde{\alpha}\tilde{P}}{2}\right)|R;\eta\rangle\!\rangle^{(0)} \\
&= M_{\eta AB}\left(\frac{1+\alpha P}{2}\right)\left(\frac{1+\tilde{\alpha}\tilde{P}}{2}\right)|A,\tilde{B}\rangle \\
&\equiv M'_{\eta AB}|A,\tilde{B}\rangle
\end{aligned} \tag{A.31}$$

とかける事がわかる。ただし、$M'_{\eta AB}$ は

$$M'_{\eta AB} = \left(\frac{1+\alpha P}{2}\right)_{AC} \left(\frac{1+\tilde{\alpha} P}{2}\right)_{BD} M_{\eta CD} = \left[\left(\frac{1+\alpha P}{2}\right) M_\eta \left(\frac{1+\tilde{\alpha} P}{2}\right)\right]_{AB} \tag{A.32}$$

となっている。式 (A.26) を代入して M'_{AB} を計算してみると $\alpha = -\tilde{\alpha}$ の時だけ $M'_{AB} \neq 0$ である事が分かるので[5]、$\alpha = -\tilde{\alpha} = 1$ と取る[6]。まとめると、

$$|R;\eta\rangle\!\rangle^{(0)}_{lc} = M'_{\eta AB}|A,\tilde{B}\rangle \quad , \quad M'_{\eta AB} \equiv \left[\left(\frac{1+P}{2}\right) M_\eta \left(\frac{1-P}{2}\right)\right]_{AB} \tag{A.33}$$

となっている。

A.2.2 $|A\rangle$ の意味と内積の値

Open-closed 対応をつける時に boundary state の内積を取る必要があるので、$\langle A|$ も定義する必要がある。単純に $\langle A|B\rangle = \delta_{AB}$ として定義したい所だが、$|A\rangle$ の物理的意味を考えてそれの自然な dual として $\langle A|$ を定義すると、後で分かるように $\langle A|B\rangle \neq \delta_{AB}$ となっている。ここではその様子を調べてみよう。

$|A\rangle$ の意味

$\psi^\mu(z)$ を bosonize した field を $H^a(z)$ として[7]、$\Theta_{\mathbf{s}}(z)$ を

$$\Theta_{\mathbf{s}}(z) \equiv C_{\mathbf{s}} \exp\left[i\sum_{a=0}^{4} s_a H^a(z)\right] \tag{A.34}$$

と定義する。ただし、$s_a = \pm\frac{1}{2}$ で $\mathbf{s}$ は s_a を並べたものである。また $C_{\mathbf{s}}$ は "cocycle" と呼ばれているもので、$\Theta_{\mathbf{s}}$ がちゃんと spacetime fermion として振舞うようにするため[8]の operator

[5]ただしこれが言えるのは $p \geq 1$ の場合で、D-instanton や D-particle では適用できない。

[6]Left と right で 0-1 方向の projection が逆なのでこれは一見 physical で無いように見える。しかし [26] によると covariant に考えた時、left と right で picture number がそれぞれ $-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$ となっていて 1 ずれているので、left と right で projection が逆のものがむしろ physical である事が分かる。

[7]$\psi^\mu(z)$ の OPE が

$$\psi^\mu(z)\psi^\nu(0) \sim \frac{\eta^{\mu\nu}}{z}$$

であることから、$\Psi^a(z)$ $(a = 0, 1, \cdots, 4)$ を

$$\begin{array}{lll} \Psi^0(z) \equiv 2^{-1/2}(\psi^0(z) + \psi^1(z)) & , & \bar{\Psi}^0(z) \equiv 2^{-1/2}(-\psi^0(z) + \psi^1(z)) \\ \Psi^a(z) \equiv 2^{-1/2}(\psi^{2a}(z) + i\psi^{2a+1}(z)) & , & \bar{\Psi}^0(z) \equiv 2^{-1/2}(\psi^{2a}(z) - i\psi^{2a+1}(z)) \quad , \quad \text{for } a = 1, 2, \cdots, 4 \end{array}$$

と定義すると、これは

$$H^a(z)H^b(0) \sim -\delta^{ab} \ln z$$

を満たす conformal weight 1 の bosonic field $H^a(z)$ を用いて

$$\Psi^a(z) \cong e^{iH^a(z)} \quad , \quad \bar{\Psi}^a(z) \cong e^{-iH^a(z)}$$

と同一視できる事が分かる。詳しくは [27] の Vol 2,sec 10.3 を参照して欲しい。

[8]right moving で同様に定義された $\tilde{\Theta}_{\mathbf{s}}$ と反交換するという意味。

で、具体形はここでは重要でないので省略する。この $\Theta_{\rm s}$ を使って $\zeta^{\rm s}$ (式 (A.14) 参照) と同一視できる状態 $|{\rm s}\rangle$ を次のように作る事が出来る。

$$|{\rm s}\rangle \equiv \lim_{z\to 0}\Theta_{\rm s}(z)|0\rangle \cong \zeta^{\rm s} \tag{A.35}$$

ただし、$|0\rangle$ は NS vacuum である。よって行列 K を

$$\mathbf{e}_A \equiv K_{A{\rm s}}\zeta^{\rm s} \tag{A.36}$$

と定義すれば、$|A\rangle$ は次の様に構成できる事が分かる。

$$|A\rangle \equiv \lim_{z\to 0} S_A(z)|0\rangle \qquad , \qquad S_A(z) \equiv K_{A{\rm s}}\Theta_{\rm s}(z) \tag{A.37}$$

最後に、$\Theta_{\rm s}(z), S_A(z)$ 共に conformal weight が $\frac{5}{8}$ である[9]ことが重要なので、覚えておこう。

$\langle A|$ の定義と内積の値

以上を踏まえて $\langle A|$ を次のように定義しよう。

$$\langle A| \equiv \lim_{z\to 0}\langle 0|S_A^\dagger(z) \tag{A.38}$$

すると $S(z)$ の comformal weight は $h=\frac{5}{8}$ なので式 (A.38) は次の様に書き直せる[10]。

$$\langle A| = \lim_{z\to\infty}\langle 0|i^{-2h}z^{2h}S_A(z) = \lim_{z\to\infty} i^{-\frac{5}{4}}z^{\frac{5}{4}}\langle 0|S_A(z) \tag{A.39}$$

さて $S_A(z)$ の OPE のうち operator を含まない項を拾ってゆくと

$$S_A(z)S_B(0) = z^{-\frac{5}{4}}C_{AB} + \cdots \tag{A.40}$$

となるので、内積が

$$\langle A|B\rangle = \lim_{z\to\infty} i^{-\frac{5}{4}}z^{\frac{5}{4}}\langle 0|S_A(z)S_B(0)|0\rangle = i^{-\frac{5}{4}}\lim_{z\to\infty} z^{\frac{5}{4}}z^{-\frac{5}{4}}C_{AB} = i^{-\frac{5}{4}}C_{AB} \tag{A.41}$$

---

[9] 直接計算しても分かるが、NS vacuum から R の ground state に移す operator であることから理解出来る。つまり L_0 の定数 a_0 の差が $\frac{5}{8}$ だということだが、式 (2.71) より $10\times\frac{1}{16}=\frac{5}{8}$ なので OK。

[10] Conformal weight が h の場 $\Psi(z)$ を考えると、モード展開は次のようになっている。

$$\Psi(z) = i^h\sum_r \frac{\psi_r}{z^{r+h}} \quad , \quad \Psi^\dagger(z) = i^{-h}\sum_r \frac{\psi_r^\dagger}{\bar z^{r+h}}$$

ここで $\psi_r^\dagger = \psi_{-r}$ を満たしているので、$z'=1/\bar z$ として

$$\Psi^\dagger(z) = i^{-h}\sum_r \frac{\psi_{-r}}{\bar z^{r+h}} = i^{-2h}i^h\sum_r \frac{\psi_r}{\bar z^{-r+h}} = i^{-2h}i^h\sum_r (z')^{2h}\frac{\psi_r}{z'^{r+h}} = i^{-2h}(z')^{2h}\Psi(z')$$

と書ける。よって、

$$\langle\Psi| \equiv \lim_{z\to 0}\langle 0|\Psi^\dagger(z) = \lim_{z'\to\infty}\langle 0|i^{-2h}(z')^{2h}\Psi(z') \tag{A}$$

と分かる。

であることが分かる。同様に closed string の場合を考えて

$$|A,\tilde{B}\rangle \equiv \lim_{z,\bar{z}\to 0} S_A(z)\tilde{S}_B(\bar{z})|0\rangle \qquad , \qquad \langle A,\tilde{B}| \equiv \lim_{z,\bar{z}\to 0}\langle 0|\tilde{S}^{\dagger}_B(\bar{z})S^{\dagger}_A(z) \tag{A.42}$$

と定義すると、内積が

$$\langle A,\tilde{B}|C,\tilde{D}\rangle = i^{-\frac{5}{2}}C_{AC}C_{BD} \tag{A.43}$$

と分かる。これに super ghost の効果を取り入れると 10 次元中の 2 次元分が消されて $\frac{5}{2}\to\frac{4}{2}$ となるはずなので、式 (A.43) を

$$\langle A,\tilde{B}|C,\tilde{D}\rangle = -C_{AC}C_{BD} \tag{A.44}$$

と書き直してこれを内積としよう。

最後に $\langle A,\tilde{B}|\psi^0|C,\tilde{D}\rangle, \langle A,\tilde{B}|\tilde{\psi}^0|C,\tilde{D}\rangle$ を式 (A.21),(A.21'),(A.44) を使って計算する事で、

$$\langle A,\tilde{B}|\psi^{\mu}_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\langle C,\tilde{D}|(\Gamma^{\mu T})_{AC}(\mathbf{1})_{BD} \tag{A.45}$$

$$\langle A,\tilde{B}|\tilde{\psi}^{\mu}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle C,\tilde{D}|(\Gamma_{11})_{AC}(\Gamma^{\mu T})_{BD} \tag{A.45'}$$

となっている事が分かる。ただし、Γ_{11} が実対称行列であることを用いた。

応用例:${}^{(0)}\langle\!\langle R;\eta|$ の定義と内積の値

最後に以上の話の使って ${}^{(0)}\langle\!\langle R;\eta|$ を定義し、内積の値を計算しよう [44]。まず $\langle\!\langle R;\eta|$ を前の話に倣って $|R;\eta\rangle\!\rangle$ の複素共役として定義しよう。つまり $\langle\!\langle R;\eta|$ は

$$\langle\!\langle R;\eta|\left(\psi^{\mu}_{-r} + i\eta S^{\mu}{}_{\nu}\tilde{\psi}^{\nu}_{r}\right) = 0 \tag{A.46}$$

の解である。するとこの解は

$$\langle\!\langle R;\eta| =^{(0)} \langle\!\langle R;\eta|\prod_{m=1}^{\infty} e^{i\eta\psi^{\mu}_m S_{\mu}{}^{\nu}\tilde{\psi}_{\nu,m}} \tag{A.47}$$

と書ける。${}^{(0)}\langle\!\langle R;\eta|$ は

$${}^{(0)}\langle\!\langle R;\eta|\left(\psi^{\mu}_0 + i\eta S^{\mu}{}_{\nu}\tilde{\psi}^{\nu}_0\right) = 0 \tag{A.48}$$

の解なので、

$${}^{(0)}\langle\!\langle R;\eta| \equiv N_{\eta AB}\langle A,\tilde{B}| \tag{A.49}$$

と定義して $N_{\eta AB}$ を求めれば良い。これは式 (A.45),(A.45') を用いると

$$N_{\eta AB}\frac{1}{\sqrt{2}}\left[-(\Gamma^{\mu T})_{AC}(\mathbf{1})_{BD} + i\eta S^{\mu}{}_{\nu}(\Gamma_{11})_{AC}(\Gamma^{\mu T})_{BD}\right]\langle C,\tilde{D}| = 0 \tag{A.50}$$

と書き直せるので、$N_{\eta AB}$ に対する方程式は

$$-\Gamma^{\mu}N_{\eta} + i\eta S^{\mu}{}_{\nu}\Gamma_{11}N_{\eta}\Gamma^{\nu T} = 0 \tag{A.51}$$

と分かる。これは式 (A.25) で $M\to N$ としたものと同じ形なので、$N_{\eta AB}\propto M_{\eta AB}$ と分かる。ここで注意するべき点は $N_{\eta AB}\neq M^{*}_{\eta AB}$ であることである[11]。これは $\langle A,\tilde{B}|$ が $|A,\tilde{B}\rangle$ の単純な複素共役になっていないからで、以下では $\langle A,\tilde{B}|$ と $|A,\tilde{B}\rangle$ の具体的な対応を調べる事で $N_{\eta AB}$ を決める事にする。

[11] M^{*}_{η} が式 (A.51) の解でない事から分かる。

$N_{\eta AB}$ の係数の決定

まず、$\langle\!\langle A, \tilde{B}|$ を

$$\langle\!\langle A, \tilde{B}|C, \tilde{D}\rangle \equiv \delta_{AC}\delta_{BD} \tag{A.52}$$

と定義しよう。つまり、$\langle\!\langle A, \tilde{B}|$ は $|A, \tilde{B}\rangle$ の単純な複素共役である。すると式 (A.44) より

$$\langle A, \tilde{B}| = -C_{AC}C_{BD}\langle\!\langle C, \tilde{D}| \tag{A.53}$$

と対応がある事が分かる。さて状態 $|\Psi\rangle = \psi_{AB}|A, B\rangle$ を考えた時、これの複素共役 $\langle\Psi|$ は

$$\langle\Psi| = \psi^*_{AB}\langle\!\langle A, \tilde{B}| \equiv \phi_{AB}\langle A, \tilde{B}| = -\phi_{AB}C_{AC}C_{BD}\langle\!\langle C, \tilde{D}| \tag{A.54}$$

と書ける。よって、

$$\psi^* = -C^T\phi C \quad \Leftrightarrow \quad \phi = -C^T\psi^* C = \Gamma^{0T}\psi^*\Gamma^0 \tag{A.55}$$

の対応があることが分かる。以上より $N_{\eta AB}$ は

$$N_{\eta AB} = \left[\Gamma^{0T}M^*_\eta\Gamma^0\right]_{AB} = (-1)^{p+1}\left[\Gamma^0\cdots\Gamma^p C\frac{1+i\eta\Gamma_{11}}{1-i\eta}\right]_{AB} \tag{A.56}$$

とわかる。式 (A.56) では確かに $N_\eta \propto M_\eta$ となっている事が分かる。

最後に ${}^{(0)}_{lc}\langle\!\langle R;\eta|$ を求めよう。

$${}^{(0)}_{lc}\langle\!\langle R;\eta| \equiv N'_{AB}\langle A, \tilde{B}| \tag{A.57}$$

と N'_{AB} 定義すると、式 (A.55) より

$$N'_{AB} = \left[\Gamma^{0T}M'^*_\eta\Gamma^0\right]_{AB} = \left[\left(\frac{1-P}{2}\right)\Gamma^{0T}M^*_\eta\Gamma^0\left(\frac{1+P}{2}\right)\right]_{AB} \tag{A.58}$$

となっている事が分かる。ただし、P と Γ^0 が反交換することを用いた。

Dp-brane の R セクターの内積の計算

最後に Dp-brane の R セクターの 0 モード同士の内積

$${}^{(0)}_{lc}\langle\!\langle R;\eta_1|R;\eta_2\rangle\!\rangle^{(0)}_{lc} \tag{A.59}$$

を計算しよう [45]。前の結果を代入すると、

$$\begin{aligned}
{}^{(0)}_{lc}\langle\!\langle R;\eta_1|R;\eta_2\rangle\!\rangle^{(0)}_{lc} &= N'_{\eta_1 AB}M'_{\eta_2 CD}\langle A, \tilde{B}|C, \tilde{D}\rangle \\
&= -N'_{\eta_1 AB}C_{BD}(M'^T_{\eta_2})_{DC}(C^T)_{CA} \\
&= Tr\left[\left(\frac{1-P}{2}\right)\Gamma^{0T}M^*_{\eta_1}\Gamma^0\left(\frac{1+P}{2}\right)C\left(\frac{1-P}{2}\right)M^T_{\eta_2}\left(\frac{1+P}{2}\right)C\right] \\
&= Tr\left[\left(\frac{1+P}{2}\right)M^*_{\eta_1}M^T_{\eta_2}\right] \\
&= Tr\left[\left(\frac{1-P}{2}\right)M^T_{\eta_2}M^*_{\eta_1}\right]
\end{aligned} \tag{A.60}$$

ときれいな形に書きなおせる事が分かる。ただし、P が M や C とも反交換する事を用いた。

$$M^*_{\eta_1} = -\Gamma^0\cdots\Gamma^p C\frac{1-i\eta_1\Gamma_{11}}{1-i\eta_1} \tag{A.61}$$

$$M^T_{\eta_2} = -\frac{1+i\eta_2\Gamma_{11}}{1+i\eta_2}C\Gamma^{pT}\cdots\Gamma^{0T} \tag{A.62}$$

$$\begin{aligned} M^T_{\eta_2}M^*_{\eta_1} &= \frac{1+i\eta_2\Gamma_{11}}{1+i\eta_2}\overbrace{C\Gamma^{pT}\cdots\Gamma^{0T}\Gamma^0\cdots\Gamma^p C}^{=1}\frac{1-i\eta_1\Gamma_{11}}{1-i\eta_1} \\ &= \frac{(1+i\eta_2\Gamma_{11})(1-i\eta_1\Gamma_{11})}{(1+i\eta_2)(1-i\eta_1)} = \frac{(1+\eta_1\eta_2)+i(\eta_2-\eta_1)\Gamma_{11}}{(1+i\eta_2)(1-i\eta_1)} \end{aligned} \tag{A.63}$$

とまとめられるので、式 (A.60) に代入すると

$$\begin{aligned} {}^{(0)}_{lc}\langle\!\langle R;\eta_1|R;\eta_2\rangle\!\rangle^{(0)}_{lc} &= \frac{1}{(1+i\eta_2)(1-i\eta_1)}Tr\left[\left(\frac{1-P}{2}\right)[(1+\eta_1\eta_2)+i(\eta_2-\eta_1)\Gamma_{11}]\right] \\ &= \frac{1}{(1+i\eta_2)(1-i\eta_1)}16(1+\eta_1\eta_2) \\ &= 16\delta_{\eta_1\eta_2} \end{aligned} \tag{A.64}$$

となっている事が分かる。この Tr の計算は基底 $\zeta^{\rm s}$ (式 (A.14) 参照) で行うとやりやすい。項 $\left(\frac{1-P}{2}\right)$ より $s_0=-\frac{1}{2}$ の状態のみ (16 個) 生き残るので、Tr の中の "1" は値 16 を返す。一方生き残った 16 個の内 $\Gamma_{11}=\pm1$ のものが 8 個ずつあるので、Tr の中の Γ_{11} は値 0 を返す。

全く同様にして Dp-brane と Dp'-brane の間の内積も計算できる。[45] では covariant な方法で $|p-p'|=0 \mod 8$ のみ内積が $\neq 0$ である事が計算されているので、ここでは $p=1,p'=9$ のセットアップで内積を計算してみよう。

$$\begin{aligned} M^T_{\eta_2,p'=9}M^*_{\eta_1,p=1} &= \frac{1}{(1+i\eta_2)(1-i\eta_1)}(1+i\eta_2\Gamma_{11})C\overbrace{\Gamma^{9T}\cdots\Gamma^{0T}}^{=\Gamma^T_{11}=\Gamma_{11}}\overbrace{\Gamma^0\Gamma^1}^{P}C(1-i\eta_1\Gamma_{11}) \\ &= \frac{1}{(1+i\eta_2)(1-i\eta_1)}(1+i\eta_2\Gamma_{11})\Gamma_{11}(1-i\eta_1\Gamma_{11})P \\ &= \frac{1}{(1+i\eta_2)(1-i\eta_1)}[(1+\eta_1\eta_2)\Gamma_{11}+i(\eta_2-\eta_1)]P \end{aligned} \tag{A.65}$$

$$\begin{aligned} {}^{(0)}_{lc}\langle\!\langle R;\eta_1,p=1|R;\eta_2,p'=9\rangle\!\rangle^{(0)}_{lc} &= \frac{1}{(1+i\eta_2)(1-i\eta_1)}Tr\left[[(1+\eta_1\eta_2)\Gamma_{11}+i(\eta_2-\eta_1)]P\left(\frac{1-P}{2}\right)\right] \\ &= -\frac{1}{(1+i\eta_2)(1-i\eta_1)}Tr\left[[(1+\eta_1\eta_2)\Gamma_{11}+i(\eta_2-\eta_1)]\left(\frac{1-P}{2}\right)\right] \\ &= -\frac{1}{(1+i\eta_2)(1-i\eta_1)}16i(\eta_2-\eta_1)] \\ &= -16\delta_{\eta_1,-\eta_2} \end{aligned} \tag{A.66}$$

と分かる。ここで注意したいのは、Tr の中に projector $\left(\frac{1-P}{2}\right)$ が入っていないと内積が 0 になる点である。[45] によると 10 次元分を考えると値が 0 となるが、super ghost の内積 ∞ と相殺して有限になるメカニズムなので、その話と合っている。

付 録B　Characterの値と性質

この章ではVirasoro characterと石橋characterの値を求めて、両者の対応(S-matrix)を調べる。まずVirasoro characterの値をbosonの場合で調べてみよう。

B.1　Virasoro characterの値と性質

B.1.1　Bosonic character

空間方向のboson 2つX^8, X^9を考えて、complex boson $X, \bar{X}$ (c=2)を

$$X \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(X^8 + iX^9) \qquad , \quad \bar{X} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(X^8 - iX^9) \tag{B.1}$$

と定義しよう。まず、twist hを

$$\begin{aligned} X \ &\in \ \mathcal{H}_h : \quad X(w+2\pi) = h \cdot X(w) = e^{2\pi i\nu'} X(w) \qquad , \quad \nu' \ \in \ \mathbb{R} \\ \bar{X} \ &\in \ \mathcal{H}_h : \quad \bar{X}(w+2\pi) = h \cdot \bar{X}(w) = e^{-2\pi i\nu'} \bar{X}(w) \end{aligned} \tag{B.2}$$

と定義する[1]。式(B.2)よりh twisted sectorの$X, \bar{X}$は

$$X(w) = i\left(\frac{\alpha'}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{r \in \mathbf{Z}+\nu'} \frac{1}{r} \alpha_r e^{irw} \qquad , \quad \bar{X}(w) = i\left(\frac{\alpha'}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{r \in \mathbf{Z}-\nu'} \frac{1}{r} \bar{\alpha}_r e^{irw} \tag{B.3}$$

と$\alpha_{n+\nu'}, \bar{\alpha}_{n-\nu'}$ $(n \in \mathbf{Z})$を使ってモード展開できる。これらの交換関係は

$$[\alpha_{n+\nu'}, \bar{\alpha}_{m-\nu'}] = (n+\nu')\delta_{n,-m} \qquad , \quad [\alpha_r, \alpha_s] = [\bar{\alpha}_r, \bar{\alpha}_s] = 0 \tag{B.4}$$

となっているので、

$$(\alpha_{n+\nu'})^\dagger \equiv \bar{\alpha}_{-n-\nu'} \qquad , \quad (\bar{\alpha}_{n-\nu'})^\dagger = \alpha_{-n+\nu'} \tag{B.5}$$

と対応がつけられる。次にHilbert空間$|X\rangle, |\bar{X}\rangle$を

$$|X\rangle \sim (\alpha_{n+\nu'})^\dagger |0\rangle \qquad , \quad |\bar{X}\rangle \sim (\bar{\alpha}_{n-\nu'})^\dagger |0\rangle \tag{B.6}$$

とした時、gは$|X\rangle, |\bar{X}\rangle$に対して

$$g : \quad |X\rangle \ \stackrel{g}{\to} \ e^{2\pi i\nu}|X\rangle \qquad , \quad |\bar{X}\rangle \stackrel{g}{\to} \ e^{-2\pi i\nu}|\bar{X}\rangle \qquad , \quad \nu \ \in \ \mathbb{R} \tag{B.7}$$

と作用するものと定義しよう。これは

$$g(\alpha_{n+\nu'})^\dagger g^{-1} = e^{2\pi i\nu}(\alpha_{n+\nu'})^\dagger \qquad , \quad g(\bar{\alpha}_{n-\nu'})^\dagger g^{-1} = e^{-2\pi i\nu}(\bar{\alpha}_{n-\nu'})^\dagger \tag{B.8}$$

[1]Closed stringならそのまま使えて、open stringならdouble trickで周期2πにする。

という事なので、$X(w), \bar{X}(w)$ に対する g の作用は

$$gX(w)g^{-1} = e^{-2\pi i\nu}X(w) \qquad , \qquad g\bar{X}(w)g^{-1} = e^{2\pi i\nu}\bar{X}(w) \tag{B.9}$$

となる。掛かる factor が式 (B.7) と逆になる事に注意しよう。

この g, h を用いると、Virasoro character $\chi_h^{(X)g}(q)$ は

$$\chi_h^{(X)g}(q) = Tr_{\mathcal{H}_h} g q^{L_0 - \frac{c}{24}} \qquad , \quad c = 2 \tag{B.10}$$

と定義できる。式 (B.10) は他の場の場合にも流用できる (対応した c を代入して h, g をその都度定義すれば)。以下で $\chi_h^{(X)g}(q)$ の値を求める。

Twisted sector の場合

まず twisted sector $(h \neq e)$ の場合を考えよう。ただし e は単位元である。まず n を整数として X のモード展開係数が $\alpha_{n+\nu'}$ であり、$\bar{X}$ のそれが $\bar{\alpha}_{n-\nu'}$ である事を踏まえると L_m^X は

$$L_m^X = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \alpha_{n+\nu'} \bar{\alpha}_{-n-\nu'+m} \qquad , \quad \text{for} \quad m \neq 0 \tag{B.11}$$

と書ける。L_0^X は

$$\begin{aligned} L_0^X &= \sum_{n=0}^{\infty} \overbrace{\bar{\alpha}_{-n-\nu'} \alpha_{n+\nu'}}^{(n+\nu')N_{n+\nu'}} + \sum_{n=1}^{\infty} \overbrace{\alpha_{-n+\nu'} \bar{\alpha}_{n-\nu'}}^{(n-\nu')\bar{N}_{n-\nu'}} + a_0^X \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+\nu') N_{n+\nu'} + \sum_{n=1}^{\infty} (n-\nu') \bar{N}_{n-\nu'} + a_0^X \end{aligned} \tag{B.12}$$

と書ける。ただし $N_{n+\nu'}$ は $(\alpha_{n+\nu'})^\dagger$ の励起数で $\bar{N}_{n-\nu'}$ は $(\bar{\alpha}_{n-\nu'})^\dagger$ の励起数である。定数 a_0^X は

$$a_0^X = \frac{1}{2}\nu'(1-\nu') \tag{B.13}$$

と書ける事から[2]、$\chi_h^{(X)g}(q)$ は

$$\chi_h^{(X)g}(q) = q^{-\frac{1}{12}+\frac{1}{2}\nu'(1-\nu')} \prod_{n=0}^{\infty} (1 - e^{2\pi i\nu} q^{n+\nu'})^{-1} (1 - e^{-2\pi i\nu} q^{n+(1-\nu')})^{-1} \tag{B.14}$$

と書ける。式 (B.14) は 0 モードの項 $\cdot X$ の項 $\cdot \bar{X}$ の項という順になっている。これは式 (C.12) を用いて

$$\chi_h^{(X)g}(q) = i e^{-\pi i\nu} q^{-\frac{\nu'^2}{2}} \frac{\eta(\tau)}{\theta_1(\nu + \tau\nu'|\tau)} \tag{B.15}$$

と書き直せる[3]。ただし無限積表示を使ったので、ν も整数部分を引いて $0 \leq \nu < 1$ としておく必要がある。

---

[2] $\left[L_m^X, L_{-m}^X\right]$ を計算すると分かる。詳しくは [27]Vol 1 , sec 2.7 , p59 参照のこと。ただし、ここでは ν' から整数部分を引いて $0 \leq \nu' < 1$ とした。

[3] 一応計算をしたのでメモ代わりに載せておく。まず $\nu \to \nu + \tau\nu'$ で $z \to z q^{\nu'}$ となる事を踏まえると、

$$\theta_1(\nu + \tau\nu'|\tau) = i q^{\frac{1}{8}} (e^{-i\pi\nu} e^{-i\pi\tau\nu'} - e^{i\pi\nu} e^{i\pi\tau\nu'}) \prod_{m=1}^{\infty} (1-q^m)(1 - z q^{m+\nu'})(1 - z^{-1} q^{m-\nu'})$$

$$\eta(\tau) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{m=1}^{\infty} (1-q^m)$$

Untwisted sector の場合

Untwisted sector $(h=e)$ の場合は α や $\bar{\alpha}$ に 0 モードがあるので注意が必要がある。0 モードの効果は別に考えた方が都合が良いので、0 モード以外の寄与の Virasoro character $\hat{\chi}_e^{(X)g}(q)$ を考えると

$$\hat{\chi}_e^{(X)g}(q) = q^{-\frac{1}{12}} \prod_{n=1}^{\infty} (1-e^{2\pi i\nu} q^n)^{-1} (1-e^{-2\pi i\nu} q^n)^{-1} = 2\sin\pi\nu \frac{\eta(\tau)}{\theta_1(\nu|\tau)} \tag{B.16}$$

となっている。式 (B.16) で $\nu=0$ とすると、

$$\hat{\chi}_e^{(X)e}(q) = q^{-\frac{1}{12}} \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n)^{-2} = \eta(\tau)^{-2} \tag{B.17}$$

が得られる。ここで X は complex boson なので、real boson 2 個分の $\hat{\chi}$ である事に注意したい。つまり、real boson 1 個分の $\hat{\chi}$ は $\eta(\tau)^{-1}$ ということである。

最後に、単純に式 (B.14) に $\nu=\nu'=0$ を代入すると発散するが、これは 0 モード $(n=0)$ の項のために起きている事が分かる。このようなトラブルを避けるため、untwisted sector では 0 モードを別に考えている。

B.1.2 Fermionic character

今度は complex fermion ψ(c=1)1 個を考えよう。まず B.1.1 の g,h を $\psi, |\psi\rangle$ に作用させた時、

$$\begin{array}{rcl} \psi \in \mathcal{H}_h & : & \psi(w+2\pi) = h\cdot\psi(w) = e^{2\pi i\nu'}\psi(w) \\ g & : & |\psi\rangle \xrightarrow{g} e^{2\pi i\nu}|\psi\rangle \end{array} \tag{B.18}$$

となっている[4]。すると h,g は $\bar{\psi}, |\bar{\psi}\rangle$ (ψ の複素共役) に対してそれぞれ $e^{-2\pi i\nu'}, e^{-2\pi i\nu}$ と振舞う。次に world sheet fermion number を F として

$$\zeta' = \begin{cases} 0 & \cdots R \\ \frac{1}{2} & \cdots NS \end{cases} \quad , \qquad \zeta = \begin{cases} 0 & \cdots (-1)^F \text{を Tr にはさむ} \\ \frac{1}{2} & \cdots (-1)^F \text{を Tr にはさまない} \end{cases} \tag{B.19}$$

とラベルを決めると、Virasoro character は $\chi^{\zeta,g}_{\zeta',h}$ [5] と表現できる。例えば $NS(-1)^F$ セクターは $\chi^{0,g}_{\frac{1}{2},h}$ といった具合である。L_0^{ψ} の定数項 a_0 は今回

$$a_0^{(\zeta',\nu')} = \frac{1}{2}(\tilde{\nu}' + \zeta' - \frac{1}{2})^2 \tag{B.20}$$

となっている。ただし $\tilde{\nu}'$ は $0 \le \tilde{\nu}' + \zeta' < 1$ となるように ν' を整数分ずらしたものである。

より、

$$\begin{aligned} \frac{\theta_1(\nu+\tau\nu'|\tau)}{\eta(\tau)} &= iq^{\frac{1}{12}} z^{-\frac{1}{2}} q^{-\frac{\nu'}{2}} (1-zq^{\nu'}) \prod_{m=1}^{\infty} (1-zq^{m+\nu'})(1-z^{-1}q^{m-\nu'}) \\ &= iq^{\frac{1}{12}} e^{-\pi i\nu} q^{-\frac{\nu'}{2}} \prod_{n=0}^{\infty} (1-e^{2\pi i\nu} q^{n+\nu'})(1-e^{-2\pi i\nu} q^{n+(1-\nu')}) \end{aligned}$$

となるので OK。

[4] つまり X と同じ factor がかかるという事である。

[5] 添え字が多いのでラベル (ψ) は省略する。

0 モードが無い場合

以上を踏まえると、まず 0 モードが無い場合は boson の話と同様にして

$$\chi^{\zeta,g}_{\zeta',h} = q^{\frac{\tilde{\nu}'^2}{2}} e^{-2\pi i(\zeta'-\frac{1}{2})(\nu+\zeta-\frac{1}{2})} \frac{\theta\begin{bmatrix}1-2\zeta'\\1-2\zeta\end{bmatrix}(\nu+\tilde{\nu}'\tau|\tau)}{\eta(\tau)} \tag{B.21}$$

と求まる[6]。つまり、

$$NS: \quad \chi^{1/2,g}_{1/2,h} = q^{\frac{\tilde{\nu}'^2}{2}} \frac{\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(\nu+\tilde{\nu}'\tau|\tau)}{\eta(\tau)} = q^{\frac{\tilde{\nu}'^2}{2}} \frac{\theta_3(\nu+\tilde{\nu}'\tau|\tau)}{\eta(\tau)} \tag{B.22}$$

$$NS(-1)^F: \quad \chi^{0,g}_{1/2,h} = q^{\frac{\tilde{\nu}'^2}{2}} \frac{\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(\nu+\tilde{\nu}'\tau|\tau)}{\eta(\tau)} = q^{\frac{\tilde{\nu}'^2}{2}} \frac{\theta_4(\nu+\tilde{\nu}'\tau|\tau)}{\eta(\tau)} \tag{B.22b}$$

$$R: \quad \chi^{1/2,g}_{0,h} = q^{\frac{\tilde{\nu}'^2}{2}} e^{i\pi\nu} \frac{\theta\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}(\nu+\tilde{\nu}'\tau|\tau)}{\eta(\tau)} = q^{\frac{\tilde{\nu}'^2}{2}} e^{i\pi\nu} \frac{\theta_2(\nu+\tilde{\nu}'\tau|\tau)}{\eta(\tau)} \tag{B.22c}$$

$$R(-1)^F: \quad \chi^{0,g}_{0,h} = -iq^{\frac{\tilde{\nu}'^2}{2}} e^{i\pi\nu} \frac{\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(\nu+\tilde{\nu}'\tau|\tau)}{\eta(\tau)} = -iq^{\frac{\tilde{\nu}'^2}{2}} e^{i\pi\nu} \frac{\theta_1(\nu+\tilde{\nu}'\tau|\tau)}{\eta(\tau)} \tag{B.22d}$$

ということである。よって、それぞれの GSO projection に対する Virasoro character は

$$NS(+): \quad (\chi_v)^g_h = q^{\frac{\tilde{\nu}'^2}{2}} \frac{\theta_3(\nu+\tilde{\nu}'\tau|\tau) - \theta_4(\nu+\tilde{\nu}'\tau|\tau)}{2\eta(\tau)} \tag{B.23}$$

$$NS(-): \quad (\chi_o)^g_h = q^{\frac{\tilde{\nu}'^2}{2}} \frac{\theta_3(\nu+\tilde{\nu}'\tau|\tau) + \theta_4(\nu+\tilde{\nu}'\tau|\tau)}{2\eta(\tau)} \tag{B.23b}$$

$$R(+): \quad (\chi_s)^g_h = q^{\frac{\tilde{\nu}'^2}{2}} e^{i\pi\nu} \frac{\theta_2(\nu+\tilde{\nu}'\tau|\tau) - i\theta_1(\nu+\tilde{\nu}'\tau|\tau)}{2\eta(\tau)} \tag{B.23c}$$

$$R(-): \quad (\chi_c)^g_h = q^{\frac{\tilde{\nu}'^2}{2}} e^{i\pi\nu} \frac{\theta_2(\nu+\tilde{\nu}'\tau|\tau) + i\theta_1(\nu+\tilde{\nu}'\tau|\tau)}{2\eta(\tau)} \tag{B.23d}$$

と求まる。ラベルは $SO(2)$ の表現を意味している。θ_4 の前の符号が逆になるのは NS vacuum が $(-1)^F$ の固有値 -1 をもっているためである[7]。

0 モードがある場合

0 モードがある場合 (R で $\tilde{\nu}'=0$ の時と、NS で $\tilde{\nu}'=\frac{1}{2}$ の時) は ground state が 2 個有るが、それらに対する $(-1)^F, g$ の作用が特殊なので注意が必要である。以下で具体的に説明する。

まず ψ を real fermion ψ^1, ψ^2 で $\psi = \psi^1 + i\psi^2$ と表記すると、昇降演算子を

$$\Gamma^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi^1_0 + i\psi^2_0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_0 \qquad , \qquad \Gamma^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi^1_0 - i\psi^2_0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\psi}_0 \tag{B.24}$$

と定義できて、反交換関係は

$$\left\{\psi^i, \psi^j\right\} = \delta^{ij} \quad \Rightarrow \quad \left\{\Gamma^+, \Gamma^-\right\} = 1 \quad , \quad \left\{\Gamma^+, \Gamma^+\right\} = \left\{\Gamma^-, \Gamma^-\right\} = 0 \tag{B.25}$$

となっている。$\Gamma^\pm$ を用いると ground state は

$$\Gamma^+|\uparrow\rangle = 0 \quad , \quad |\uparrow\rangle = \Gamma^+|\downarrow\rangle \tag{B.26}$$

[6] 整数部分をずらして $0 \le \nu < 1$ としたことに注意。
[7] super ghost の効果。

と 2 個求まる。さて、平面 1-2 の ψ^i の角運動量 J_{12} は基底 $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$ で考えた時

$$J_{12} = \frac{1}{2}\left[\Gamma^+, \Gamma^-\right] = \frac{1}{2}\sigma^3 \qquad , \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{B.27}$$

で与えられるが、ground state に対する g(角度 $2\pi\nu$ 回転) の作用は

$$\hat{g} = \exp(-2\pi i\nu J_{12}) = \exp(-\pi i\nu\sigma^3) = \cos\pi\nu\mathbf{1} - i\sin\pi\nu\sigma^3 \tag{B.28}$$

と書ける。ここで式 (B.9) と同じ理由で反対方向に回転されている事に注意しよう[8]。同様に、$(-1)^F$ は

$$(-1)^F = -i\exp(\pi i J_{12}) = \sigma^3 \tag{B.29}$$

と分かる[9]。以上を踏まえて、特に R で $\tilde{\nu}' = 0$ の時 $(h = e)$ が重要なのでその場合の Virasoro character を計算すると、

$$\begin{aligned} R: \quad \chi_{0,e}^{1/2,g} &= q^{\frac{1}{12}} Tr(\hat{g}) \prod_{n=1}^{\infty}(1 + e^{2\pi i\nu}q^n)(1 + e^{-2\pi i\nu}q^n) \\ &= q^{\frac{1}{12}} 2cos\pi\nu \prod_{n=1}^{\infty}(1 + e^{2\pi i\nu}q^n)(1 + e^{-2\pi i\nu}q^n) \\ &= \frac{\theta_2(\nu|\tau)}{\eta(\tau)} \end{aligned} \tag{B.30}$$

$$\begin{aligned} R(-1)^F: \quad \chi_{0,e}^{0,g} &= q^{\frac{1}{12}} Tr(\hat{g}(-1)^F) \prod_{n=1}^{\infty}(1 - e^{2\pi i\nu}q^n)(1 - e^{-2\pi i\nu}q^n) \\ &= q^{\frac{1}{12}}(-2i)\sin\pi\nu \prod_{n=1}^{\infty}(1 - e^{2\pi i\nu}q^n)(1 - e^{-2\pi i\nu}q^n) \\ &= -i\frac{\theta_1(\nu|\tau)}{\eta(\tau)} \end{aligned} \tag{B.31}$$

となる。ただし Tr は ground state に関する trace である。式 (B.22) で単純に $\tilde{\nu}' = 0$ を代入した結果に比べて、$e^{i\pi\nu}$ だけ値がずれている。

---

[8] $\Gamma^+ \sim \psi_0$ より、式 (B.9) から

$$\hat{g}\Gamma^+\hat{g}^{-1} = e^{-2\pi i\nu}\Gamma^+$$

となっている。よって、

$$\hat{g}|\downarrow\rangle \equiv x|\downarrow\rangle \quad \Rightarrow \quad \hat{g}|\uparrow\rangle = \hat{g}\Gamma^+\hat{g}^{-1}\hat{g}|\downarrow\rangle = xe^{-2\pi i\nu}|\uparrow\rangle$$

と振舞う事が分かる。今回は $x = e^{\pi i\nu}$ とすると、基底 $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$ では

$$\hat{g} = \begin{pmatrix} e^{-\pi i\nu} & 0 \\ 0 & e^{\pi i\nu} \end{pmatrix} = \cos\pi\nu\mathbf{1} - i\sin\pi\nu\sigma^3$$

と書ける事が分かる

[9] Factor $-i$ は ground state に対する super ghost の効果。詳しくは [27] Vol 2 , sec 10 参照のこと。

B.2　石橋 character の値の計算

石橋 character $\chi_i(\tilde{q})$ は石橋 state $|i\rangle\!\rangle$ 間の内積

$$\langle\!\langle i|\tilde{q}^{\frac{1}{2}(L_0+\tilde{L}_0-\frac{c}{12})}|j\rangle\!\rangle = \delta_{ij}\chi_i(\tilde{q}) \tag{B.32}$$

で与えられる。このセクションでは幾つかのケースで $\chi_i(\tilde{q})$ の値を具体的に計算する。

B.2.1　Boson の場合

まず半径 R でコンパクト化した flat な空間上の world sheet boson X^μ を考えよう。石橋 state は式 (2.117),(2.125),(2.133) より

$$|(\mathbf{n},\mathbf{w})\rangle\!\rangle = \prod_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{m}\alpha_{-m}^{\mu} S_{\mu}{}^{\nu}\tilde{\alpha}_{\nu,-m}}|(\mathbf{n},\mathbf{w})\rangle \tag{B.33}$$

と書けるので、これを式 (B.32) に代入すると

$$\langle\!\langle(\mathbf{n}',\mathbf{w}')|\tilde{q}^{\frac{1}{2}(L_0+\tilde{L}_0-\frac{c}{12})}|(\mathbf{n},\mathbf{w})\rangle\!\rangle = \langle 0|\prod_{\ell=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{\ell}\alpha_{\ell}^{\sigma} S'_{\sigma}{}^{\rho}\tilde{\alpha}_{\rho,\ell}}\tilde{q}^{\frac{1}{2}(L'_0+\tilde{L}'_0-\frac{c}{12})}\prod_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{m}\alpha_{-m}^{\mu} S_{\mu}{}^{\nu}\tilde{\alpha}_{\nu,-m}}|0\rangle\ A_{n',w';n,w}(\tilde{q}) \tag{B.34}$$

と書ける事が分かる。ただし L'_0 は L_0 から 0 モードの効果を省いたもので、$A_{n',w';n,w}(\tilde{q})$ は 0 モードの効果

$$A_{n',w';n,w}(\tilde{q}) \equiv \langle(\mathbf{n}',\mathbf{w}')|\tilde{q}^{\frac{1}{2}(L_0+\tilde{L}_0-2a_0)}|(\mathbf{n},\mathbf{w})\rangle = \tilde{q}^{\frac{\alpha'\mathbf{n}^2}{4R^2}+\frac{R^2\mathbf{w}^2}{4\alpha'}}\delta_{n',n}\delta_{w',w} \tag{B.35}$$

である。ここで a_0 は L_0 の中の定数項である。この様な 0 モードの効果に対しては一般論が無いのでその都度計算するしかない。

さて式 (B.35) より、異なる石橋 state が直交する事が分かったので、後は

$$\langle\!\langle(\mathbf{n},\mathbf{w})|\tilde{q}^{\frac{1}{2}(L_0+\tilde{L}_0-\frac{c}{12})}|(\mathbf{n},\mathbf{w})\rangle\!\rangle = \underbrace{\langle 0|\prod_{\ell=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{\ell}\alpha_{\ell}^{\sigma} S_{\sigma}{}^{\rho}\tilde{\alpha}_{\rho,\ell}}\tilde{q}^{\frac{1}{2}(L'_0+\tilde{L}'_0-\frac{c}{12})}\prod_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{m}\alpha_{-m}^{\mu} S_{\mu}{}^{\nu}\tilde{\alpha}_{\nu,-m}}|0\rangle}_{\equiv\chi_s(\tilde{q})}\ A_{n,w;n,w}(\tilde{q}) \tag{B.36}$$

として $\chi_s(\tilde{q})$ [10]を求めれば良い。これは L'_0 が式 (2.82) より

$$L'_0 = \overbrace{\sum_{m=1}^{\infty} mN_m}^{\equiv N} + a_0 \tag{B.37}$$

と書ける事と、上で定義した N には z を適当な数として

$$z^N e^{\alpha_{-m}^{\mu}} z^{-N} = e^{\alpha_{-m}^{\mu} z^m} \qquad , \quad N|0\rangle = 0 \tag{B.38}$$

の性質がある事を利用すると (right 成分も同じ式が成立する)、

$$\chi_s(\tilde{q}) = \tilde{q}^{a_0-\frac{c}{24}}\langle 0|\prod_{\ell=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{\ell}\alpha_{\ell}^{\sigma} S_{\sigma}{}^{\rho}\tilde{\alpha}_{\rho,\ell}}\prod_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{m}\alpha_{-m}^{\mu} S_{\mu}{}^{\nu}\tilde{\alpha}_{\nu,-m}\tilde{q}^m}|0\rangle \tag{B.39}$$

と書けることが分かる。

[10]添え字の s は $S_{\mu}{}^{\nu}$ のつもりである。

Bosonic coherent state 間の内積

Bosonic な生成消滅演算子の組を 2 つ持ってきて、交換関係

$$\begin{aligned}\left[a, a^\dagger\right] &= \left[\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger\right] = 1 \\ \left[a, \tilde{a}\right] &= \left[a^\dagger, \tilde{a}^\dagger\right] = \cdots = 0\end{aligned} \tag{B.40}$$

をつけておく。その下で

$$f(x, y) \equiv \langle 0 | e^{x a \tilde{a}} e^{y a^\dagger \tilde{a}^\dagger} | 0 \rangle \tag{B.41}$$

を計算したい。まず $a\tilde{a}$ と $a^\dagger\tilde{a}^\dagger$ の交換関係は

$$\begin{aligned}\left[a\tilde{a}, a^\dagger\tilde{a}^\dagger\right] =& a\left[\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger\right] a^\dagger + a\tilde{a}^\dagger\tilde{a}a^\dagger - \tilde{a}^\dagger\left[a^\dagger, a\right]\tilde{a} - \tilde{a}^\dagger a a^\dagger \tilde{a} \\ =& aa^\dagger + \tilde{a}^\dagger\tilde{a} = 1 + n + \tilde{n} \equiv N'\end{aligned} \tag{B.42}$$

と計算できる。ただし $n, \tilde{n}$ は number operator で、n は

$$n \equiv a^\dagger a \quad , \quad \left[n, a^\dagger\right] = a^\dagger \quad , \quad [n, a] = -a \tag{B.43}$$

の性質を持つ。$\tilde{n}$ も全く同様でこれらに tilde をつければ良い。以上を踏まえると、

$$\begin{aligned}& a\tilde{a} \equiv A \quad , \quad a^\dagger\tilde{a}^\dagger \equiv A^\dagger \\ & \left[A, A^\dagger\right] = N' \\ & \left[N', A^\dagger\right] = 2A^\dagger \\ & [N', A] = -2A \quad \Rightarrow \quad AN' = (N' + 2)A \\ & N'|0\rangle = |0\rangle \quad , \quad \langle 0|N' = \langle 0| \\ & A|0\rangle = 0 \quad , \quad \langle 0|A^\dagger = 0\end{aligned} \tag{B.44}$$

の下で

$$f(x, y) = \langle 0 | e^{xA} e^{yA^\dagger} | 0 \rangle \tag{B.45}$$

を計算すれば良い事が分かる。まずこれを x で Taylor 展開すると

$$f(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} \langle 0 | A^m e^{yA^\dagger} | 0 \rangle \equiv \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} f_m(y) \quad , \quad f_m(y) \equiv \langle 0 | A^m e^{yA^\dagger} | 0 \rangle \tag{B.46}$$

と書けるわけだが、式 (B.44) を眺めると $\langle 0|A^m A^{\dagger m}|0\rangle$ の形の項のみが $\neq 0$ となる事が分かるので、$f_m(y) \propto y^m$ と分かる。そこで c_m を定数として $f_m(y) = c_m y^m$ と置こう。次に式 (B.46) の左の形を y で微分すると

$$\partial_y f(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} \langle 0 | A^m A^\dagger e^{yA^\dagger} | 0 \rangle \tag{B.47}$$

と書けるが、帰納的に

$$\begin{aligned}\left[A, A^\dagger\right] &= N' \\ \left[A^2, A^\dagger\right] &= A\left[A, A^\dagger\right] + \left[A, A^\dagger\right] A \\ &= AN' + N'A = 2(N' + 1)A \\ \left[A^3, A^\dagger\right] &= A\left[A^2, A^\dagger\right] + \left[A, A^\dagger\right] A^2 \\ &= 2A(N' + 1)A + N'A^2 = 3(N + 2)A^2 \\ &\vdots \\ \left[A^m, A^\dagger\right] &= m(N' + m - 1)A^{m-1}\end{aligned} \tag{B.48}$$

と計算できる事から[11]($m=0$ の場合もこれを満たしていることが分かる)

$$\begin{aligned}\langle 0|A^m A^\dagger e^{yA^\dagger}|0\rangle &= \langle 0|\left[A^m, A^\dagger\right] e^{yA^\dagger}|0\rangle \\ &= m\langle 0|(N'+m-1)A^{m-1}e^{yA^\dagger}|0\rangle \\ &= m^2\langle 0|A^{m-1}e^{yA^\dagger}|0\rangle \\ &= m^2 f_{m-1}(y)\end{aligned} \tag{B.49}$$

と計算できて、これを式 (B.47) に代入すると

$$\partial_y f(x,y) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{m+1}}{m!}(m+1)f_m(y) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{m+1}}{m!}(m+1)c_m y^m \tag{B.50}$$

となる。一方、式 (B.46) の右の形を y で微分すると

$$\partial_y f(x,y) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^m}{m!}f'_m(y) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^m}{m!}mc_m y^{m-1} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{m+1}}{m!}c_{m+1}y^m \tag{B.51}$$

と書けるので、両者を比較すると

$$c_{m+1} = (m+1)c_m \tag{B.52}$$

の漸化式が成り立っている事がわかり、後は c_0 の値が分かれば良い。さて、$x=0$ の場合は

$$f(0,y) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{0^m}{m!}f_m(y) = f_0(y) = c_0 \tag{B.53}$$

となっているが、$f(x,y)$ の定義式から

$$f(0,y) = \langle 0|e^{yA^\dagger}|0\rangle = \langle 0|0\rangle = 1 \tag{B.54}$$

とすぐに値が分かり、$c_0 = 1$ と分かる。よって式 (B.52) と合わせると

$$c_m = m! \tag{B.55}$$

と分かる。以上より

$$f(x,y) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{c_m}{m!}(xy)^m = \sum_{m=0}^{\infty}(xy)^m = \frac{1}{1-xy} \tag{B.56}$$

と分かる。この形より収束半径が $|xy|<1$ であることも分かる。

結果をまとめると、

$$\langle 0|e^{xa\tilde{a}}e^{ya^\dagger\tilde{a}^\dagger}|0\rangle = \frac{1}{1-xy} \quad , \quad \left[a,a^\dagger\right] = \left[\tilde{a},\tilde{a}^\dagger\right] = 1 \tag{B.57}$$

となっている。

---

[11] ただし、

$$[AB,C] = ABC - CAB = A[B,C] + ACB - CAB = A[B,C] + [A,C]B$$

を用いた。

式 (B.57) を用いると式 (B.39) の $\chi_s(\tilde{q})$ を計算する事が出来る。1 方向の 1 つのモードの組 $\alpha^\mu_m, \alpha^\mu_{-m}$ を考えると

$$[\alpha^\mu_m, \alpha^\mu_{-m}] = m \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{m}}\alpha^\mu_m \equiv a \ , \ \frac{1}{\sqrt{m}}\alpha^\mu_{-m} \equiv a^\dagger \tag{B.58}$$

とすれば良いので[12]、$x = -S_\mu{}^\mu, y = -S_\mu{}^\mu \tilde{q}^m$ を代入すれば良い (μ で和を取らない)。$S_\mu{}^\mu S_\mu{}^\mu = 1$ を踏まえると、このモードから

$$\frac{1}{1-\tilde{q}^m} \tag{B.59}$$

が現れて、total では d を次元として $a_0 = 0$ を踏まえると light cone ゲージでは

$$\chi_s(\tilde{q}) = \left[\tilde{q}^{-\frac{1}{24}} \prod_{m=1}^{\infty}(1-\tilde{q}^m)^{-1}\right]^{d-2} = \frac{1}{\eta(\tilde{q})^{d-2}} \tag{B.60}$$

となる事が分かる。

Orbifold の場合

同様の計算を orbifold $\mathbb{C}/\Gamma$ の場合で行おう。Complex boson X 1 個を考えて twist h を

$$\begin{aligned} X \ &\in \ \mathcal{H}_h : \quad X(w+2\pi) = e^{2\pi i\nu'} X(w) \\ \bar{X} \ &\in \ \mathcal{H}_h : \quad \bar{X}(w+2\pi) = e^{-2\pi i\nu'} \bar{X}(w) \end{aligned} \tag{B.61}$$

とした時の h twisted sector ($\nu' \neq 0$) の closed string の始状態に対応する Dirichlet 条件の石橋 state $|B_X, \nu'\rangle\!\rangle$ は式 (2.221) より

$$|B_X, \nu'\rangle\!\rangle = \exp\left(\sum_{r>0}\frac{1}{r}\alpha^\dagger_r\tilde{\bar{\alpha}}^\dagger_r + \sum_{s>0}\frac{1}{s}\bar{\alpha}^\dagger_s\tilde{\alpha}^\dagger_s\right)|0\rangle \qquad r \in \mathbf{Z}+\nu', s \in \mathbf{Z}-\nu' \tag{B.62}$$

と書ける。今回も N 等が式 (B.38) の性質を満たし、$c = 2$ として

$$\langle\!\langle B_X, \nu'|\tilde{q}^{\frac{1}{2}(L_0+\tilde{L}_0-\frac{c}{12})}|B_X, \nu'\rangle\!\rangle = \tilde{q}^{\frac{1}{2}\nu'(1-\nu')-\frac{c}{24}}\langle 0| \prod_{r',s'>0} e^{\frac{1}{r'}\alpha_{r'}\tilde{\bar{\alpha}}_{r'}} e^{\frac{1}{s'}\bar{\alpha}_{s'}\tilde{\alpha}_{s'}} \prod_{r,s>0} e^{\frac{1}{r}\alpha^\dagger_r\tilde{\bar{\alpha}}^\dagger_r\tilde{q}^r} e^{\frac{1}{s}\bar{\alpha}^\dagger_s\tilde{\alpha}^\dagger_s\tilde{q}^s}|0\rangle \tag{B.63}$$

と書ける。一方交換関係は

$$[\alpha'_r, \alpha^\dagger_r] = r\delta_{r'r} \quad , \cdots \tag{B.64}$$

であったので、flat な boson の場合の m を r, s に書き直すだけで良い ($\alpha, \bar{\alpha}$ で 2 組現れる事に注意)。よって

$$\begin{aligned} \langle\!\langle B_X, \nu'|\tilde{q}^{\frac{1}{2}(L_0+\tilde{L}_0-\frac{c}{12})}|B_X, \nu'\rangle\!\rangle &= \tilde{q}^{\frac{1}{2}\nu'(1-\nu')-\frac{c}{24}} \prod_{r>0}\frac{1}{1-\tilde{q}^r}\prod_{s>0}\frac{1}{1-\tilde{q}^s} \\ &= \tilde{q}^{\frac{1}{2}\nu'(1-\nu')-\frac{c}{24}} \prod_{n=0}^{\infty}(1-\tilde{q}^{n+\nu'})^{-1}(1-\tilde{q}^{n+(1-\nu')})^{-1} \\ &= \chi_h^{(X)e}(\tilde{q}) \end{aligned} \tag{B.65}$$

となって Virasoro character で書ける事が分かる。

[12] Light cone ゲージで考えているので $\mu \neq 0$ よりこれで良い。

B.2.2 Fermion の場合

同様に fermion の場合も調べてみよう。まず flat な空間の world sheet fermion を考えると、Dp-brane の石橋 state は light cone ゲージで考えて

$$|\sigma;\eta,p\rangle\!\rangle_{lc} = \prod_{r>0}\exp\left(i\eta\sum_{\mu,\nu=2}^{9}\psi^{\mu}_{-r}S_{\mu}{}^{\nu}\tilde{\psi}_{\nu,-r}\right)|\sigma;\eta,p\rangle\!\rangle^{(0)}_{lc} \quad , \quad \sigma = NS,R \quad \eta=\pm 1 \tag{B.66}$$

となっていて 0 モード間の内積は

$$\begin{aligned} {}^{(0)}_{lc}\langle\!\langle NS;\eta_1,p|NS;\eta_2,p\rangle\!\rangle^{(0)}_{lc} &= 1 \\ {}^{(0)}_{lc}\langle\!\langle R;\eta_1,p|R;\eta_2,p\rangle\!\rangle^{(0)}_{lc} &= 16\delta_{\eta_1\eta_2} \\ {}^{(0)}_{lc}\langle\!\langle NS;\eta_1,p|R;\eta_2,p\rangle\!\rangle^{(0)}_{lc} &= 0 \end{aligned} \tag{B.67}$$

となっているのは前に述べた通りである[13]。よって、これも 0 モード以外の部分

$$\begin{aligned} \chi_{s,\eta_1,\eta_2} &\equiv \langle 0|\prod_{t>0}e^{-i\eta_1\tilde{\psi}^{\sigma}_{t}S_{\sigma}{}^{\rho}\psi_{\rho,t}}\tilde{q}^{\frac{1}{2}(L'_0+L'_0-\frac{c}{12})}\prod_{r>0}e^{i\eta\psi^{\mu}_{-r}S_{\mu}{}^{\nu}\tilde{\psi}_{\nu,-r}}|0\rangle \\ &= \tilde{q}^{a_0-\frac{c}{24}}\langle 0|\prod_{t>0}e^{-i\eta\tilde{\psi}^{\sigma}_{t}S_{\sigma}{}^{\rho}\psi_{\rho,t}}\prod_{r>0}e^{i\eta_2\psi^{\mu}_{-r}S_{\mu}{}^{\nu}\tilde{\psi}_{\nu,-r}\tilde{q}^{r}}|0\rangle \end{aligned} \tag{B.68}$$

を計算すれば良い事が分かる。ただし、fermion の場合も式 (B.38) で $\alpha \to \psi$ とした関係式が成り立っている事を用いた。

Fermionic coherent state 間の内積

これも今までと同様に fermionic な生成消滅演算子 2 組を持ってきて、反交換関係

$$\begin{aligned} \{b,b^{\dagger}\} &= \{\tilde{b},\tilde{b}^{\dagger}\} = 1 \\ \{b,\tilde{b}\} &= \{b^{\dagger},\tilde{b}^{\dagger}\} = \cdots = 0 \end{aligned} \tag{B.69}$$

をつけて、その下で

$$g(x,y) \equiv \langle 0|e^{x\tilde{b}b}e^{yb^{\dagger}\tilde{b}^{\dagger}}|0\rangle \tag{B.70}$$

を計算すればよい。$\tilde{b}b$ と $b^{\dagger}\tilde{b}^{\dagger}$ の交換関係が

$$\begin{aligned} \left[\tilde{b}b,b^{\dagger}\tilde{b}^{\dagger}\right] &= \tilde{b}\{b,b^{\dagger}\}\tilde{b}^{\dagger} - \tilde{b}b^{\dagger}b\tilde{b}^{\dagger} - b^{\dagger}\{\tilde{b}^{\dagger},\tilde{b}\}b + b^{\dagger}\tilde{b}\tilde{b}^{\dagger}b \\ &= 1 - \tilde{b}^{\dagger}\tilde{b} - b^{\dagger}b = 1 - \tilde{n} - n \equiv N' \end{aligned} \tag{B.71}$$

である事と、n の性質が

$$n \equiv b^{\dagger}b \quad , \quad \left[n,b^{\dagger}\right] = b^{\dagger} \quad , \quad [n,b] = -b \tag{B.72}$$

となっている事を踏まえると、

$$\begin{aligned} &B \equiv \tilde{b}b \quad , \quad B^{\dagger} \equiv b^{\dagger}\tilde{b}^{\dagger} \\ &\{B,B^{\dagger}\} = N' \quad , \quad B^2 = B^{\dagger 2} = 0 \\ &\left[N',B^{\dagger}\right] = -2B^{\dagger} \quad , \quad [N',B] = 2B \\ &N'|0\rangle = |0\rangle \quad , \quad \langle 0|N' = \langle 0| \\ &B|0\rangle = 0 \quad , \quad \langle 0|B^{\dagger} = 0 \end{aligned} \tag{B.73}$$

[13] world sheet fermion の場合は L_0 中に 0 モードの効果が入っていないので、ただ内積を取ればよい。

の条件下で

$$g(x,y) = \langle 0|e^{xB}e^{yB^\dagger}|0\rangle \tag{B.74}$$

を計算すればよい。今回は x, y の展開が 1 次で止まるので boson の場合より遥かに簡単である。具体的には

$$g(x,y) = \langle 0|0\rangle + xy\langle 0|BB^\dagger|0\rangle = 1 + xy\langle 0|N'|0\rangle = 1 + xy \tag{B.75}$$

と計算すればよい。これもまとめると、

$$\langle 0|e^{x\tilde{b}b}e^{yb^\dagger\tilde{b}^\dagger}|0\rangle = 1 + xy \quad , \quad \{b, b^\dagger\} = \{\tilde{b}, \tilde{b}^\dagger\} = 1 \tag{B.76}$$

となる。式 (B.68) 中の 1 方向の 1 つのモードの組 ψ^μ_r, ψ^μ_r にこの式を適用するには、

$$\{\psi^\mu_r, \psi^\mu_{-r}\} = 1 \quad \Rightarrow \quad \psi^\mu_r \equiv b \ , \ \psi^\mu_{-r} \equiv b^\dagger \tag{B.77}$$

とすれば良いので $x = -i\eta_1 S_\mu{}^\mu, y = i\eta_2 S_\mu{}^\mu \tilde{q}^r$ となり、寄与は

$$1 + \eta_1\eta_2 q^r \tag{B.78}$$

となる。以上より、

$$\chi_{s,\eta_1,\eta_2} = \tilde{q}^{a_0 - \frac{c}{24}} \prod_{r>0}(1 + \eta_1\eta_2\tilde{q}^r)^8 \tag{B.79}$$

と計算できる。0 モードの内積の部分も合わせると

$$\begin{aligned}
{}_{lc}\langle\langle NS;\eta_1,p|NS;\eta_2,p\rangle\rangle_{lc} &= \tilde{q}^{a_0 - \frac{c}{24}} \textstyle\prod_{r=\frac{1}{2}}^{\infty}(1 + \eta_1\eta_2\tilde{q}^r)^8 \quad &= Tr_{NS}\left[(-1)^{(\frac{\eta_1-\eta_2}{2})F}\tilde{q}^{L_0 - \frac{c}{24}}\right] \\
{}_{lc}\langle\langle R;\eta_1,p|R;\eta_2,p\rangle\rangle_{lc} &= 16\delta_{\eta_1\eta_2}\tilde{q}^{a_0 - \frac{c}{24}} \textstyle\prod_{r=1}^{\infty}(1 + \eta_1\eta_2\tilde{q}^r)^8 \quad &= Tr_{R}\left[(-1)^{(\frac{\eta_1-\eta_2}{2})F}\tilde{q}^{L_0 - \frac{c}{24}}\right]
\end{aligned} \tag{B.80}$$

とまとめられる[14]。式 (B.80) より、

$$|v,p\rangle\rangle \equiv \frac{1}{2}\left(|NS;+,p\rangle\rangle - |NS;-,p\rangle\rangle\right) \tag{B.81}$$

$$|o,p\rangle\rangle \equiv \frac{1}{2}\left(|NS;+,p\rangle\rangle + |NS;-,p\rangle\rangle\right) \tag{B.82}$$

$$|s,p\rangle\rangle \equiv \frac{1}{2}\left(|R;+,p\rangle\rangle + |R;-,p\rangle\rangle\right) \tag{B.83}$$

$$|c,p\rangle\rangle \equiv \frac{1}{2}\left(|R;+,p\rangle\rangle - |R;-,p\rangle\rangle\right) \tag{B.84}$$

と定義すれば石橋 state 間の内積は

$$\langle\langle v,p|\tilde{q}^{\frac{1}{2}(L_0+\tilde{L}_0-\frac{c}{12})}|v,p\rangle\rangle = \frac{1}{2}Tr_{NS}\left[(1-(-1)^F)\tilde{q}^{L_0-\frac{c}{24}}\right] \equiv \chi_v(\tilde{q}) \qquad : NS(+) \tag{B.85}$$

$$\langle\langle o,p|\tilde{q}^{\frac{1}{2}(L_0+\tilde{L}_0-\frac{c}{12})}|o,p\rangle\rangle = \frac{1}{2}Tr_{NS}\left[(1+(-1)^F)\tilde{q}^{L_0-\frac{c}{24}}\right] \equiv \chi_o(\tilde{q}) \qquad : NS(-) \tag{B.86}$$

$$\langle\langle s,p|\tilde{q}^{\frac{1}{2}(L_0+\tilde{L}_0-\frac{c}{12})}|s,p\rangle\rangle = \frac{1}{2}Tr_{R}\left[(1+(-1)^F)\tilde{q}^{L_0-\frac{c}{24}}\right] \equiv \chi_s(\tilde{q}) \qquad : R(+) \tag{B.87}$$

$$\langle\langle c,p|\tilde{q}^{\frac{1}{2}(L_0+\tilde{L}_0-\frac{c}{12})}|c,p\rangle\rangle = \frac{1}{2}Tr_{R}\left[(1-(-1)^F)\tilde{q}^{L_0-\frac{c}{24}}\right] \equiv \chi_c(\tilde{q}) \qquad : R(-) \tag{B.88}$$

[14]式 (B.80) の最後の等式は NS の場合はそのままの形だが、R セクターの方は $\eta_1 = -\eta_2$ の時に両辺共に 0 となる事を利用した。

と Virasoro character $\chi_v \sim \chi_c$ で書ける事がわかる。その他は 0 と分かるので、まとめると

$$\langle\langle m,p|\tilde{q}^{\frac{1}{2}(L_0+\tilde{L}_0-\frac{c}{12})}|n,p\rangle\rangle = \delta_{mn}\chi_m(\tilde{q}) \qquad m,n = v,o,s,c \tag{B.89}$$

となっている事が分かる。

B.3 Modular 変換と S-matrix

Rational CFT の場合の公式

一般的に rational CFT [15]の Virasoro character は $S:\tau\to -1/\tau$, $T:\tau\to\tau+1$ の 2 つの modular 変換に対して

$$\chi_h^g \ \stackrel{S}{\to}\ \sigma(h|g)\ \chi_g^{h^{-1}} \tag{B.90}$$

$$\chi_h^g \ \stackrel{T}{\to}\ e^{-\pi i\frac{c}{12}}\ \tau_h\ \chi_h^{hg} \tag{B.91}$$

と振舞う事が知られている。ただし、$\sigma(h|g),\tau_h$ はそのラベルに依る定数である。これらの定数間には

$$e^{\pi i\frac{c}{4}}\ \sigma(h|h)^{-1} = \tau_e(\tau_h)^2 = e^{2\pi i\Delta_e}e^{4\pi i\Delta_h} \qquad , \quad \tau_h = e^{2\pi i\Delta_h} \tag{B.92}$$

の関係式がある。ただし Δ_h は、h セクターの L_0 の定数項 a_0 の事で、“conformal dimension” と呼ばれている。

直感的な説明

公式 (B.90) $\sim$ (B.92) の証明は [46] , sec 14.B に譲る事にして、ここではなぜそうなるかの直感的な説明をする。

使う知識は場 A に対する $\chi_h^g(q)$ は

$$\begin{aligned} A(w+2\pi) &= h\cdot A(w) \\ A(w+2\pi\tau) &= g\cdot A(w) \end{aligned} \tag{B.93}$$

の周期条件の下での経路積分で得られることである。詳しくは [27] Vol 1 , Sec 8.5 参照のこと。まず S 変換の場合、式 (B.93) を

$$\begin{aligned} A(\tfrac{w+2\pi}{\tau}) &= h\cdot A(\tfrac{w}{\tau}) \\ A(\tfrac{w+2\pi\tau}{\tau}) &= g\cdot A(\tfrac{w}{\tau}) \end{aligned} \tag{B.94}$$

と書き直すと[16] $w'\equiv w/\tau$ として

$$\begin{aligned} A(w'+2\pi) &= g\cdot A(w') \\ A(w'+\tfrac{2\pi}{\tau}) &= h\cdot A(w') \quad \Rightarrow \quad A(w'-\tfrac{2\pi}{\tau}) = h^{-1}\cdot A(w') \end{aligned} \tag{B.95}$$

[15] Primary field の数が有限個の CFT の事。

[16] 座標変換をしているので A の conformal weight を考える必要があるが、両辺で同じ factor がかかるだけなので割れば良い (g,h が線型演算子であることに注意)。

となる。つまり、$\chi_g^{h^{-1}}(\tilde{q})$ と定数倍を無視して一致するという事である。Cylinder の場合 $\tau = it$ とするが、この時は w' は w の実部と虚部を入れ替えたようなもので、open-closed の対応をつけていることに相当している。

T 変換の場合は

$$\begin{aligned} A(w+2\pi) &= h \cdot A(w) \\ A(w+2\pi(\tau+1)) &= g \cdot A(w+2\pi) = hg \cdot A(w) \end{aligned} \tag{B.96}$$

より $\chi_h^g(\tau+1) \sim \chi_h^{gh}(\tau)$ と分かる[17]。式 (B.91) で係数 $e^{-\pi i \frac{c}{12}}$ をわざわざ外に出したのは、

$$\chi_h^g(\tau+1) = Tr_h g e^{2\pi i(\tau+1)(L_0 - \frac{c}{24})} = e^{-\pi i \frac{c}{12}} Tr_h g e^{2\pi i \tau (L_0 - \frac{c}{24})} e^{2\pi i L_0} \tag{B.97}$$

なので factor $e^{-\pi i \frac{c}{12}}$ は自明に出て来るからである。

最後に、式 (B.92) の最初の等号は一応計算したのでメモ代わりに脚注に載せておく[18]。

Complex boson , fermion の場合

これも具体例を見ると理解が深まるだろう。ここでは後の計算で使う complex boson と fermion の場合を調べてみよう。

Complex boson の場合

まず complex boson X は、0 モードがある場合は rational CFT では無いのでそのまま公式 (B.90) $\sim$ (B.92) が適用できるか分からないが、χ の具体形を θ 関数の性質を用いて書き

[17] ただし g と h が可換であると仮定した。もし非可換の場合は consistent な経路積分が定義出来ないことからも分かるように、$\chi_h^g = 0$ となるので考える必要が無い。

[18]

$$\begin{aligned} \chi_h^e(\tau_1) &\overset{T}{=} e^{-\pi i \frac{c}{12}\tau_h}\ \chi_h^h(\tau_2) \\ &\overset{S}{=} e^{-\pi i \frac{c}{12}\tau_h}\sigma(h|h)\ \chi_h^{h^{-1}}(\tau_3) \\ &\overset{T}{=} \left(e^{-\pi i \frac{c}{12}}\right)^2 (\tau_h)^2 \sigma(h|h)\ \chi_h^e(\tau_4) \end{aligned} \tag{A}$$

と変換してゆく。τ_1 と τ_4 の対応は

$$\tau_1 = \tau_2 + 1 = -\frac{1}{\tau_3} + 1 = -\frac{1}{\tau_4 + 1} + 1 = \frac{\tau_4}{\tau_4 + 1} \tag{B}$$

より、式 (A) は

$$\chi_h^e\left(\frac{\tau_4}{\tau_4+1}\right) = \left(e^{-\pi i \frac{c}{12}}\right)^2 (\tau_h)^2 \sigma(h|h)\ \chi_h^e(\tau_4) \tag{C}$$

と書ける。式 (C) の両辺を S 変換すると、

左辺 $\overset{S}{=} \sigma(h|e)\ \chi_e^{h^{-1}}\left(-\frac{\tau_4+1}{\tau_4}\right)$

右辺 $\overset{S}{=} \left(e^{-\pi i \frac{c}{12}}\right)^2 (\tau_h)^2 \sigma(h|h)\sigma(h|e)\ \chi_e^{h^{-1}}\left(-\frac{\tau_4+1}{\tau_4}+1\right) \overset{T}{=} \left(e^{-\pi i \frac{c}{12}}\right)^3 (\tau_h)^2 \tau_e \sigma(h|h)\sigma(h|e)\ \chi_e^{h^{-1}}\left(-\frac{\tau_4+1}{\tau_4}\right)$

より、左辺 = 右辺の条件から

$$\left(e^{-\pi i \frac{c}{12}}\right)^3 (\tau_h)^2 \tau_e \sigma(h|h) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad e^{\pi i \frac{c}{4}} \sigma(h|h)^{-1} = \tau_e (\tau_h)^2 \tag{D}$$

と求まる。

直すと結果的に公式通りになっている事が後で分かる。

Twisted sector

Twisted sector $(h \neq e)$ の場合でまず S 変換を考えると、$\tilde{q} = e^{2\pi i \tilde{\tau}} = e^{-2\pi i/\tau}$ として式 (B.15) より

$$\begin{aligned}
\chi_h^{(X)g}(\tilde{q}) &= ie^{-\pi i\nu} e^{\frac{\pi i\nu'^2}{\tau}} \frac{\eta(-1/\tau)}{\theta_1(\frac{\tau\nu-\nu'}{\tau}|-1/\tau)} \\
&= ie^{-\pi i\nu} e^{\frac{\pi i\nu'^2}{\tau}} \frac{(-i\tau)^{1/2}\eta(\tau)}{-i(-i\tau)^{1/2}\exp(\pi i(\tau\nu-\nu')^2/\tau)\theta_1(-\nu'+\tau\nu|\tau)} \\
&= ie^{2\pi i\left(\nu\nu'-\frac{\nu+\nu'}{2}\right)} \times ie^{-\pi i(-\nu')} e^{-\pi i\tau(-\nu')^2} \frac{\eta(\tau)}{\theta_1(-\nu'+\tau\nu|\tau)} \\
&= ie^{2\pi i\left(\nu\nu'-\frac{\nu+\nu'}{2}\right)} \ \chi_g^{(X)h^{-1}}(q)
\end{aligned} \tag{B.98}$$

と書ける。ただし、式 (C.20),(C.26) を用いた。式 (B.98) より $\sigma(h|g)$ が読み取れて、

$$\sigma(h|g) = ie^{2\pi i\left(\nu\nu'-\frac{\nu+\nu'}{2}\right)} = e^{2\pi i(\nu'-\frac{1}{2})(\nu-\frac{1}{2})} \tag{B.99}$$

と分かる。次に、T 変換を考えると、$\tau' = \tau+1, q' = e^{2\pi i\tau'}$ として

$$\begin{aligned}
\chi_h^{(X)g}(q') &= ie^{-\pi i\nu} e^{-\pi i(\tau+1)\nu'^2} \frac{\eta(\tau+1)}{\theta_1(\nu+\nu'+\tau\nu'|\tau+1)} \\
&= ie^{-\pi i\nu} e^{-\pi i(\tau+1)\nu'^2} \frac{\exp(i\pi/12)\eta(\tau)}{\exp(i\pi/4)\theta_1(\nu+\nu'+\tau\nu'|\tau)} \\
&= e^{-\pi i\frac{1}{6}} e^{\pi i\nu'(1-\nu')} \times ie^{-\pi i(\nu+\nu')} e^{-\pi i\tau\nu'^2} \frac{\eta(\tau)}{\theta_1(\nu+\nu'+\tau\nu'|\tau)} \\
&= e^{-\pi i\frac{1}{6}} e^{\pi i\nu'(1-\nu')} \ \chi_h^{(X)hg}(q)
\end{aligned} \tag{B.100}$$

と書ける。ただし、式 (C.16),(C.26) を用いた。Complex boson は $c=2$ であることを踏まえると、式 (B.100) から τ_h が読み取れて、式 (B.92) も踏まえると

$$\tau_h = e^{\pi i\nu'(1-\nu')} \quad \Rightarrow \quad \Delta_h = \frac{1}{2}\nu'(1-\nu') \tag{B.101}$$

と分かる。確かに式 (B.13) と一致している事が分かる。

Unwisted sector

Untwisted sector $(h=e)$ の場合は S 変換が

$$\begin{aligned}
\hat{\chi}_e^{(X)g}(\tilde{q}) &= 2\sin\pi\nu \frac{\eta(-1/\tau)}{\theta_1(\nu|-1/\tau)} \\
&= 2\sin\pi\nu \frac{(-i\tau)^{\frac{1}{2}}\eta(\tau)}{-i(-i\tau)^{\frac{1}{2}}\exp(\pi i\nu^2\tau)\theta_1(\nu\tau|\tau)} \\
&= 2\sin\pi\nu \times ie^{-\pi i\tau\nu^2} \frac{\eta(\tau)}{\theta_1(\nu\tau|\tau)} \\
&= 2\sin\pi\nu \ \chi_g^{(X)e}(q)
\end{aligned} \tag{B.102}$$

より

$$\hat{\sigma}(e|g) = 2\sin\pi\nu \tag{B.103}$$

とわかる。T 変換は

$$\hat{\chi}_e^{(X)g}(q') = 2\sin\pi\nu\frac{\eta(\tau+1)}{\theta_1(\nu|\tau+1)} = e^{-\pi i\frac{1}{6}}\hat{\chi}_e^{(X)g}(q) \tag{B.104}$$

より、

$$\tau_e = 1 \quad \Rightarrow \quad \Delta_e = 0 \tag{B.105}$$

と分かる。これも式 (B.13) と一致している。最後に、式 (B.92) の最初の等号を確かめよう。

$$\begin{array}{ll} \text{左辺} & = e^{\frac{i\pi}{2}}e^{-2\pi i(\nu'-\frac{1}{2})^2} = e^{2\pi i\nu'(1-\nu')} \\ \text{右辺} & = e^{2\pi i\Delta_e}e^{4\pi i\Delta_h} = e^{2\pi i\nu'(1-\nu')} \end{array} \tag{B.106}$$

より左辺 = 右辺で、これも確かに成り立っている。

Complex fermion の場合

次に complex fermion の場合を考えてみよう。

0 モードが無い場合

式 (C.6) を用いると、S 変換は

$$\chi^{\zeta,g}_{\zeta',h}(\tilde{q}) = e^{-2\pi i(\tilde{\nu}'+\zeta'-\frac{1}{2})(\tilde{\nu}+\zeta-\frac{1}{2})}\ \chi^{\zeta',h^{-1}}_{\zeta,g}(q) \tag{B.107}$$

となる。ただし、$\tilde{\nu}$ は $\tilde{\nu}'$ の様に $0 \le \tilde{\nu}+\zeta < 1$ となるように ν を整数分ずらしたものである。よって、

$$\sigma(\zeta',h|\zeta,g) = e^{-2\pi i(\tilde{\nu}'+\zeta'-\frac{1}{2})(\tilde{\nu}+\zeta-\frac{1}{2})} \tag{B.108}$$

と読み取れる。次に T 変換は式 (C.7) より

$$\chi^{\zeta,g}_{\zeta',h}(q') = e^{-\frac{i\pi}{12}}e^{i\pi(\tilde{\nu}'+\zeta'-\frac{1}{2})^2}\ \chi^{\zeta+\zeta'\ \bmod 1,hg}_{\zeta',h}(q) \tag{B.109}$$

と分かる。よって、

$$\tau_{\zeta',h} = e^{i\pi(\tilde{\nu}'+\zeta'-\frac{1}{2})^2} \quad \Rightarrow \quad \Delta_{\zeta',h} = \frac{1}{2}(\tilde{\nu}'+\zeta'-\frac{1}{2})^2 \tag{B.110}$$

と分かる。確かに式 (B.20) と一致している。最後に式 (B.92),(B.108),(B.110) より

$$\tau_{0,e} = e^{\frac{i\pi}{4}}\sigma(\zeta',h|\zeta',h)^{-1}(\tau_{\zeta',h})^{-2} = e^{\frac{i\pi}{4}} \quad \Rightarrow \quad \Delta_{0,e} = \frac{1}{8} \tag{B.111}$$

と計算できて、これも式 (B.20) と一致している事が分かる[19]。

[19] $(\zeta',h) = (0,e)$ は untwisted R セクターの事なので、0 モードが存在し、その場合は Virasoro character の値が一般形 (B.21) と違うので式 (B.110) をそのまま流用できない事に注意。

0 モードが有る場合

特に untwisted $(h=e)$ の場合が重要なので、その場合を考えよう。R セクターに 0 モードが有るので、R セクターの Virasoro character の値が前に述べたように異なり、S 変換,T 変換を別に調べる必要がある。S 変換を調べて結果をまとめると、

$$\sigma(\zeta', e|\zeta, g) = e^{-\pi i(\zeta'-\frac{1}{2})(\zeta-\frac{1}{2})} \tag{B.112}$$

と書ける[20]。つまり $R(-1)^F$ セクターのみ値が $-i$ で、それ以外は 1 だという事である。

Complex fermion の S-matrix

最後に、以上の結果を用いて complex fermion の S-matrix を計算しよう。$a, b = v, o, s, c$ として $S(h|g)$ を

$$(\chi_a)_h^g(\tilde{q}) = \left[S(h|g)\right]_a^{\ b} (\chi_b)_g^{h^{-1}}(q) \tag{B.113}$$

と定義すると[21]、$S(h|g)$ は次の様になる。

$$S(h|g) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sigma(\frac{1}{2},h|\frac{1}{2},g) & \sigma(\frac{1}{2},h|\frac{1}{2},g) & -\sigma(\frac{1}{2},h|0,g) & -\sigma(\frac{1}{2},h|0,g) \\ \sigma(\frac{1}{2},h|\frac{1}{2},g) & \sigma(\frac{1}{2},h|\frac{1}{2},g) & \sigma(\frac{1}{2},h|0,g) & \sigma(\frac{1}{2},h|0,g) \\ -\sigma(0,h|\frac{1}{2},g) & \sigma(0,h|\frac{1}{2},g) & \sigma(0,h|0,g) & -\sigma(0,h|0,g) \\ -\sigma(0,h|\frac{1}{2},g) & \sigma(0,h|\frac{1}{2},g) & -\sigma(0,h|0,g) & \sigma(0,h|0,g) \end{pmatrix} \tag{B.114}$$

もし space time の統計性も考慮に入れたいときは space time fermion を -1 倍するべきなので

$$\begin{aligned} (\chi'_v)_h^g(q) \equiv (\chi_v)_h^g(q) \quad , \quad (\chi'_o)_h^g(q) \equiv (\chi_o)_h^g(q) \\ (\chi'_s)_h^g(q) \equiv -(\chi_s)_h^g(q) \quad , \quad (\chi'_c)_h^g(q) \equiv -(\chi_c)_h^g(q) \end{aligned} \tag{B.115}$$

と定義した $(\chi'_a)_h^g$ を考えるべきである[22]。その時は $S'(h|g)$ を

$$(\chi'_a)_h^g(\tilde{q}) = \left[S'(h|g)\right]_a^{\ b} (\chi'_b)_g^{h^{-1}}(q) \tag{B.116}$$

---

[20] 例えば $R(-1)^F$ セクターの場合、

$$\chi_{0,e}^{0,g}(\tilde{q}) = -i\frac{\theta_1(\nu|-1/\tau)}{\eta(-1/\tau)} = -i\times(-i)\exp(\pi i\nu^2\tau)\frac{\theta_1(\nu\tau|\tau)}{\eta(\tau)} = -i\ \chi_{0,g}^{0,e}(q)$$

より、$\sigma(0,e|0,g) = -i$ と分かる。R も同様に調べて、NS は式 (B.108) を流用すればよい。

[21]

$$\tilde{\tau} = -1/\tau \quad \Leftrightarrow \quad \tau = -1/\tilde{\tau}$$

より q と $\tilde{q}$ の入れ替えに対して対称なので、式 (2.103) の様に

$$(\chi_a)_h^g(q) = \left[S(h|g)\right]_a^{\ b} (\chi_b)_g^{h^{-1}}(\tilde{q})$$

と定義しても $\left[S(h|g)\right]_a^{\ b}$ は同じ行列になる。

[22] 本来この -1 倍は全方向分の Virasoro character を求めた後でするべきものなので、複素 1 次元毎に -1 倍をしてはいけない。そのため厳密には複素 1 次元で $S'(h|g)$ を考えてはいけないのだが、S と S' の係数の違いを理解しやすいのであえて考えた。正しくは light cone ゲージで実 8 次元分を考えて S' の話をするべきである。

と定義すると、$S'(h|g)$ は

$$S'(h|g) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sigma(\frac{1}{2},h|\frac{1}{2},g) & \sigma(\frac{1}{2},h|\frac{1}{2},g) & \sigma(\frac{1}{2},h|0,g) & \sigma(\frac{1}{2},h|0,g) \\ \sigma(\frac{1}{2},h|\frac{1}{2},g) & \sigma(\frac{1}{2},h|\frac{1}{2},g) & -\sigma(\frac{1}{2},h|0,g) & -\sigma(\frac{1}{2},h|0,g) \\ \sigma(0,h|\frac{1}{2},g) & -\sigma(0,h|\frac{1}{2},g) & \sigma(0,h|0,g) & -\sigma(0,h|0,g) \\ \sigma(0,h|\frac{1}{2},g) & -\sigma(0,h|\frac{1}{2},g) & -\sigma(0,h|0,g) & \sigma(0,h|0,g) \end{pmatrix} \tag{B.117}$$

と書けるので、適宜使い分けると良い。両者を比較すると、S で v と o の順番を入れ替えたものが S' となっている事が分かる。

最後に具体例を 2 つ挙げよう。まず複素 1 次元分考えた時に、$h = e$ の場合は式 $(\mathrm{B}.114)$ に具体値を代入して

$$S_{(2)}(e|g) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & (-i) & -(-i) \\ -1 & 1 & -(-i) & (-i) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -i & i \\ -1 & 1 & i & -i \end{pmatrix} \tag{B.118}$$

と書ける事が分かる。次に flat な空間を考えて、$\mathrm{light\ cone}$ ゲージで $SO(8)$ を考えた時に $\mathrm{spacetime}$ の統計性も考慮に入れると

$$S'_{(8)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & (-i)^4 & -(-i)^4 \\ 1 & -1 & -(-i)^4 & (-i)^4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{B.119}$$

と書ける事が分かる。

付 録C　有用な公式

C.1　θ関数

まず、q, zを

$$q \equiv \exp(2\pi i\tau) \qquad , \qquad z \equiv (2\pi i\nu) \tag{C.1}$$

と定義する。次に、

$$\theta\left[\begin{smallmatrix}a\\b\end{smallmatrix}\right](\nu|\tau) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left[\pi i\left(n-\frac{a}{2}\right)^2\tau + 2\pi i\left(n-\frac{a}{2}\right)\left(\nu-\frac{b}{2}\right)\right] \tag{C.2}$$

と定義する[1]。すると、式(C.2)の定義から次のような周期性がすぐに分かる。

$$\theta\left[\begin{smallmatrix}a+2m\\b\end{smallmatrix}\right](\nu|\tau) = \theta\left[\begin{smallmatrix}a\\b\end{smallmatrix}\right](\nu|\tau) \quad , \quad \theta\left[\begin{smallmatrix}a\\b-2m\end{smallmatrix}\right](\nu|\tau) = e^{-\pi i a m}\theta\left[\begin{smallmatrix}a\\b\end{smallmatrix}\right](\nu|\tau) \qquad , \quad \text{for} \quad m \in \mathbf{Z} \tag{C.3}$$

次に、引数νは次のようにfactorとして外に出せる。

$$\theta\left[\begin{smallmatrix}a\\b\end{smallmatrix}\right](\nu+\tau\nu'|\tau) = q^{-\frac{\nu'^2}{2}}e^{\pi i\nu'^2(b-2\nu)}\theta\left[\begin{smallmatrix}a-2\nu'\\b-2\nu\end{smallmatrix}\right](0|\tau) \tag{C.4}$$

以上を踏まえて式(C.4)のS変換$(\tau \to -1/\tau)$を知りたいが、$\theta\left[\begin{smallmatrix}a\\b\end{smallmatrix}\right](0|\tau)$はS変換で

$$\theta\left[\begin{smallmatrix}a\\b\end{smallmatrix}\right](0|-1/\tau) = (-i\tau)^{\frac{1}{2}}e^{i\pi\frac{ab}{2}}\theta\left[\begin{smallmatrix}b\\-a\end{smallmatrix}\right](0|\tau) \tag{C.5}$$

と振る舞うので、式(C.4)より

$$\theta\left[\begin{smallmatrix}a\\b\end{smallmatrix}\right](\nu-\frac{\nu'}{\tau}|-1/\tau) = (-i\tau)^{\frac{1}{2}}e^{i\pi\frac{ab}{2}}\exp\left[i\pi\left(\frac{\nu'^2}{\tau}+\nu^2\tau-2\nu\nu'\right)\right]\ \theta\left[\begin{smallmatrix}b\\-a\end{smallmatrix}\right](-\nu'+\nu\tau|\tau) \tag{C.6}$$

と書ける。さらにT変換$(\tau \to \tau+1)$で

$$\theta\left[\begin{smallmatrix}a\\b\end{smallmatrix}\right](\nu+\nu'(\tau+1)|\tau+1) = e^{-i\pi\frac{a(a-2)}{4}}\theta\left[\begin{smallmatrix}a\\b+a-1\end{smallmatrix}\right](\nu+\nu'+\nu'\tau|\tau) \tag{C.7}$$

と振舞うことも分かる。

さて、この$\theta\left[\begin{smallmatrix}a\\b\end{smallmatrix}\right]$を用いて以下の様に様々な$\theta$関数を作る事ができる。

$$\theta_1(\nu|\tau) \equiv \theta_{11}(\nu,\tau) \equiv \theta\left[\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right](\nu|\tau) = i\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{(n-1/2)^2/2}z^{n-1/2} \tag{C.8}$$

$$\theta_2(\nu|\tau) \equiv \theta_{10}(\nu,\tau) \equiv \theta\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right](\nu|\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{(n-1/2)^2/2}z^{n-1/2} \tag{C.9}$$

$$\theta_3(\nu|\tau) \equiv \theta_{00}(\nu,\tau) \equiv \theta\left[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right](\nu|\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2/2}z^n \tag{C.10}$$

$$\theta_4(\nu|\tau) \equiv \theta_{01}(\nu,\tau) \equiv \theta\left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right](\nu|\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{n^2/2}z^n \tag{C.11}$$

[1] [27]と定義が違うことに注意。

$\theta_1 \sim \theta_4$ は “Jacobi triple product identity” (C.46) を使って次の様に無限積で書くことも出来る。

$$\theta_1(\nu|\tau) = 2\exp(\pi i\tau/4)\sin\pi\nu \prod_{m=1}^{\infty}(1-q^m)(1-zq^m)(1-z^{-1}q^m) \tag{C.12}$$

$$\theta_2(\nu|\tau) = 2\exp(\pi i\tau/4)\cos\pi\nu \prod_{m=1}^{\infty}(1-q^m)(1+zq^m)(1+z^{-1}q^m) \tag{C.13}$$

$$\theta_3(\nu|\tau) = \prod_{m=1}^{\infty}(1-q^m)(1+zq^{m-1/2})(1+z^{-1}q^{m-1/2}) \tag{C.14}$$

$$\theta_4(\nu|\tau) = \prod_{m=1}^{\infty}(1-q^m)(1-zq^{m-1/2})(1-z^{-1}q^{m-1/2}) \tag{C.15}$$

これらの modular 変換は T 変換で

$$\theta_1(\nu|\tau+1) = \exp(\pi i/4)\theta_1(\nu|\tau) \tag{C.16}$$
$$\theta_2(\nu|\tau+1) = \exp(\pi i/4)\theta_2(\nu|\tau) \tag{C.17}$$
$$\theta_3(\nu|\tau+1) = \theta_4(\nu|\tau) \tag{C.18}$$
$$\theta_4(\nu|\tau+1) = \theta_3(\nu|\tau) \tag{C.19}$$

となり、S 変換で

$$\theta_1(\nu/\tau|-1/\tau) = -i(-i\tau)^{1/2}\exp(\pi i\nu^2/\tau)\theta_1(\nu|\tau) \tag{C.20}$$
$$\theta_2(\nu/\tau|-1/\tau) = (-i\tau)^{1/2}\exp(\pi i\nu^2/\tau)\theta_4(\nu|\tau) \tag{C.21}$$
$$\theta_3(\nu/\tau|-1/\tau) = (-i\tau)^{1/2}\exp(\pi i\nu^2/\tau)\theta_3(\nu|\tau) \tag{C.22}$$
$$\theta_4(\nu/\tau|-1/\tau) = (-i\tau)^{1/2}\exp(\pi i\nu^2/\tau)\theta_2(\nu|\tau) \tag{C.23}$$

となる。

さて $\nu = 0$ の時、$\theta_1 \sim \theta_4$ は次のような関係がある。

$$\theta_3(0|\tau)^4 - \theta_4(0|\tau)^4 - \theta_2(0|\tau)^4 = 0 \qquad , \qquad \theta_1(0|\tau) = 0 \tag{C.24}$$

左の式は “Jacobi's abstruse identity” と呼ばれている[2]。

最後に Dedekind の η 関数を

$$\eta(\tau) \equiv q^{\frac{1}{24}}\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^m) \tag{C.25}$$

と定義する。これは modular 変換で

$$\begin{aligned}\eta(\tau+1) &= \exp(i\pi/12)\eta(\tau)\\ \eta(-1/\tau) &= (-i\tau)^{1/2}\eta(\tau)\end{aligned} \tag{C.26}$$

と変化する。特に混乱が無い場合 $\eta(\tau)$ を $\eta(q)$ と書き、$\eta(-1/\tau)$ を $\eta(\tilde{q})$ と書く事がある。

[2]abstruse ** 難解な，難しい; 深遠な。

C.2 離散群の性質

離散群 Γ を考える。まず、群の要素の数を $|\Gamma|$ と書いて、D_I を Γ の既約表現 (d_I 次元) としよう。次に Γ の元を conjugacy class $\mathcal{C}^\alpha$ で分類して、$\mathcal{C}^\alpha$ の要素の数を n_α と書こう。最後に $\mathcal{C}^\alpha$ の中のその要素 1 つを適当に取ってきて、それを $g^{(\alpha)}$ と置こう。

以上をふまえて ρ_I^α を表現 D_I での $g^{(\alpha)}$ の trace、つまり

$$\rho_I^\alpha \equiv tr_{D_I} g^{(\alpha)} \tag{C.27}$$

と定義しよう。すると ρ_I^α は以下の直交性を持っている。

$$\frac{1}{|\Gamma|}\sum_\alpha n_\alpha \rho_I^{\alpha *}\rho_J^\alpha = \delta_{IJ} \tag{C.28}$$

$$\frac{1}{|\Gamma|}\sum_I \rho_I^{\alpha *}\rho_I^\beta = \frac{\delta_{\alpha\beta}}{n_\alpha} \tag{C.29}$$

特に ψ_I^α を

$$\psi_I^\alpha \equiv \sqrt{\frac{n_\alpha}{|\Gamma|}}\rho_I^\alpha \tag{C.30}$$

と定義すると、これらの直交関係は

$$\sum_\alpha \psi_I^{\alpha *}\psi_J^\alpha = \delta_{IJ} \tag{C.31}$$

$$\sum_I \psi_I^{\alpha *}\psi_I^\beta = \delta_{\alpha\beta} \tag{C.32}$$

と書けることに注意しよう。

これらの式からすぐに分かる性質が幾つかあるのでここで紹介しよう。まず D_0 を trivial な表現 ($g^{(\alpha)} = 1$) とすると

$$\rho_0^\alpha = tr_{D_0} g^{(\alpha)} = 1 \tag{C.33}$$

を満たしていることが分かる。次に単位元の conjugacy class を C^0 とすると要素が 1 個と分かり、その要素は $g^{(0)} = \mathbf{1}$ なので

$$\rho_I^0 = tr_{D_I}\mathbf{1} = d_I \qquad , \quad n_0 = 1 \tag{C.34}$$

と分かる。よって式 (C.29) に $\alpha = \beta = 0$ を代入すると、

$$\sum_I d_I^2 = |\Gamma| \tag{C.35}$$

が成り立っている事が分かる。

さて、Γ の一般の表現 R が適当な 0 以上の整数 a_I で

$$R = \bigoplus_I a_I D_I \tag{C.36}$$

と既約分解できたとすると、上の話と同様に定義した ρ_R^α は

$$\rho_R^\alpha \equiv tr_R g^{(\alpha)} = \sum_I a_I \ tr_{D_I} g^{(\alpha)} = \sum_I a_I \ \rho_I^\alpha \tag{C.37}$$

を満たしている事が分かる。次に、trace の一般的な性質として

$$A = a \otimes b \qquad \Rightarrow \qquad tr_A X = tr_a X \ tr_b X \tag{C.38}$$

があるので、

$$tr_{D_I \otimes D_J} g^{(\alpha)} = tr_{D_I} g^{(\alpha)} \ tr_{D_J} g^{(\alpha)} \qquad \Leftrightarrow \qquad \rho^\alpha_{D_I \otimes D_J} = \rho_I^\alpha \rho_J^\alpha \tag{C.39}$$

が成り立っている事が分かる。よって $D_I \otimes D_J$ の fusion rule が

$$D_I \otimes D_J = \sum_K n_{IJ}^{\prime K} D_K \qquad , \quad n_{IJ}^{\prime K} \text{ は整数} \tag{C.40}$$

であるとすると、

$$\rho_I^\alpha \rho_J^\alpha = \rho^\alpha_{D_I \otimes D_J} = \sum_K n_{IJ}^{\prime K} \rho_K^\alpha \tag{C.41}$$

が成り立っている事が分かる。以上を踏まえると、まず既約表現に対して

$$\rho_I^\alpha \cong D_I \qquad , \quad \rho_I^\alpha \ \rho_J^\alpha \cong D_I \otimes D_J \tag{C.42}$$

の同一視が成り立っている事が分かり、式 (C.37) よりこの同一視は

$$\rho_R^\alpha \cong R \qquad , \quad \rho_R^\alpha \ \rho_{R'}^\alpha \cong R \otimes R' \tag{C.43}$$

と一般の表現同士に拡張できる事が分かる。

C.3 有用な公式

Gaussian の積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \ e^{-ax^2+ixb} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{b^2}{4a}} \tag{C.44}$$

ただし $a, b \in \mathbb{R}$ で、$a > 0$ の場合を考えている。

Poisson resummation formula

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(-\pi a n^2 + 2\pi i b n) = a^{-\frac{1}{2}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{\pi(m-b)^2}{a}\right] \tag{C.45}$$

Jacobi triple product identity

$$\prod_{n=0}^{\infty}(1-q^{n+1})(1-wq^{n+1/2})(1-w^{-1}q^{n+1/2}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{\frac{n^2}{2}} w^n \tag{C.46}$$

Campbell-Baker-Hausdorff formula

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]} \tag{C.47}$$

ただし、$[A, B]$ が A, B と交換する時のみ使える。

参考文献

[1] A. Giveon, M. Porrati and E. Rabinovici, "Target space duality in string theory," Phys. Rept. **244** (1994) 77 [arXiv:hep-th/9401139] (review).

[2] C. M. Hull and P. K. Townsend, "Unity of superstring dualities," Nucl. Phys. B **438** (1995) 109 [arXiv:hep-th/9410167].

[3] E. Witten, "String theory dynamics in various dimensions," Nucl. Phys. B **443** (1995) 85 [arXiv:hep-th/9503124].

[4] P. Horava and E. Witten, "Heterotic and type I string dynamics from eleven dimensions," Nucl. Phys. B **460** (1996) 506 [arXiv:hep-th/9510209].

[5] J. Polchinski and E. Witten, "Evidence for Heterotic - Type I String Duality," Nucl. Phys. B **460** (1996) 525 [arXiv:hep-th/9510169].

[6] C. Vafa, "Evidence for F-Theory," Nucl. Phys. B **469** (1996) 403 [arXiv:hep-th/9602022].

[7] E. Witten, "Five-branes and M-theory on an orbifold," Nucl. Phys. B **463** (1996) 383 [arXiv:hep-th/9512219]; K. Dasgupta and S. Mukhi, "Orbifolds of M-theory," Nucl. Phys. B **465** (1996) 399 [arXiv:hep-th/9512196].

[8] J. Polchinski, "Dirichlet-Branes and Ramond-Ramond Charges," Phys. Rev. Lett. **75** (1995) 4724 [arXiv:hep-th/9510017].

[9] A. Sen, "Stable non-BPS states in string theory," JHEP **9806** (1998) 007 [arXiv:hep-th/9803194].

[10] A. Sen, "Non-BPS states and branes in string theory," arXiv:hep-th/9904207 (review).

[11] A. Sen, "Tachyon condensation on the brane antibrane system," JHEP **9808** (1998) 012 [arXiv:hep-th/9805170].

[12] E. Witten, "Non-commutative Geometry and String Field Theory," Nucl. Phys. B **268** (1986) 253.

[13] A. Sen, "Universality of the tachyon potential," JHEP **9912** (1999) 027 [arXiv:hep-th/9911116].

[14] A. Sen and B. Zwiebach, "Tachyon condensation in string field theory," JHEP **0003** (2000) 002 [arXiv:hep-th/9912249].

[15] K. Ohmori, "A review on tachyon condensation in open string field theories," arXiv:hep-th/0102085.

[16] E. Witten, "On background independent open string field theory," Phys. Rev. D **46** (1992) 5467 [arXiv:hep-th/9208027]; "Some computations in background independent off-shell string theory," Phys. Rev. D **47** (1993) 3405 [arXiv:hep-th/9210065].

[17] A. A. Gerasimov and S. L. Shatashvili, "On exact tachyon potential in open string field theory," JHEP **0010** (2000) 034 [arXiv:hep-th/0009103].

[18] T. Takayanagi, S. Terashima and T. Uesugi, "Brane-antibrane action from boundary string field theory," JHEP **0103** (2001) 019 [arXiv:hep-th/0012210].

[19] A. Adams, J. Polchinski and E. Silverstein, "Don't panic! Closed string tachyons in ALE space-times," arXiv:hep-th/0108075.

[20] A. Dabholkar, "On condensation of closed-string tachyons," arXiv:hep-th/0109019.

[21] A. Dabholkar, "Tachyon condensation and black hole entropy," arXiv:hep-th/0111004.

[22] C. Vafa, "Mirror symmetry and closed string tachyon condensation," arXiv:hep-th/0111051.

[23] A. Dabholkar and C. Vafa, "tt* geometry and closed string tachyon potential," arXiv:hep-th/0111155.

[24] J. A. Harvey, D. Kutasov, E. J. Martinec and G. Moore, "Localized tachyons and RG flows," arXiv:hep-th/0111154.

[25] J. R. David, M. Gutperle, M. Headrick and S. Minwalla, "Closed string tachyon condensation on twisted circles," arXiv:hep-th/0111212.

[26] P. Di Vecchia and A. Liccardo, "D branes in string theory. I," arXiv:hep-th/9912161.

[27] J. Polchinski, "String Theory Vol 1,2 ,".

[28] N. Ishibashi, "The Boundary And Crosscap States In Conformal Field Theories," Mod. Phys. Lett. A **4** (1989) 251.

[29] J. L. Cardy, "Boundary Conditions, Fusion Rules And The Verlinde Formula," Nucl. Phys. B **324** (1989) 581.

[30] M. Billo, B. Craps and F. Roose, "Orbifold boundary states from Cardy's condition," JHEP **0101** (2001) 038 [arXiv:hep-th/0011060] (review).

[31] S. Weinberg , "THE QUANTUM THEORY OF FIELDS,".

[32] D. E. Diaconescu and J. Gomis, "Fractional branes and boundary states in orbifold theories," JHEP **0010** (2000) 001 [arXiv:hep-th/9906242].

[33] M. R. Douglas and G. W. Moore, "D-branes, Quivers, and ALE Instantons," arXiv:hep-th/9603167.

[34] M. Billo, B. Craps and F. Roose, "On D-branes in type 0 string theory," Phys. Lett. B **457** (1999) 61 [arXiv:hep-th/9902196].

[35] D. E. Diaconescu, M. R. Douglas and J. Gomis, "Fractional branes and wrapped branes," JHEP **9802** (1998) 013 [arXiv:hep-th/9712230].

[36] J. McKay, "Graphs, Singularities and Finite Groups," Proc. Symp. Pure. Math. **37** (1980) 183.

[37] F. Roose, "Boundary states and non-abelian orbifolds," arXiv:hep-th/0002129.

[38] T. Takayanagi, "String creation and monodromy from fractional D-branes on ALE spaces," JHEP **0002** (2000) 040 [arXiv:hep-th/9912157].

[39] M. B. Green , J. H. Shcwarz and E. Witten , "Superstring theory ," Vol.1

[40] M. R. Douglas, D. Kabat, P. Pouliot and S. H. Shenker, "D-branes and short distances in string theory," Nucl. Phys. B **485** (1997) 85 [arXiv:hep-th/9608024].

[41] A. B. Zamolodchikov, "'Irreversibility' Of The Flux Of The Renormalization Group In A 2-D Field Theory," JETP Lett. **43** (1986) 730 [Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **43** (1986) 565].

[42] S. Hamidi and C. Vafa, "Interactions On Orbifolds," Nucl. Phys. B **279** (1987) 465.

[43] P. Di Vecchia, M. Frau, I. Pesando, S. Sciuto, A. Lerda and R. Russo, "Classical p-branes from boundary state," Nucl. Phys. B **507** (1997) 259 [arXiv:hep-th/9707068].

[44] P. Di Vecchia and A. Liccardo, "D-branes in string theory. II," arXiv:hep-th/9912275.

[45] M. Billo, P. Di Vecchia, M. Frau, A. Lerda, I. Pesando, R. Russo and S. Sciuto, "Microscopic string analysis of the D0-D8 brane system and dual R-R states," Nucl. Phys. B **526** (1998) 199 [arXiv:hep-th/9802088].

[46] P. Di Francesco , P. Mathieu and D. Sénéchal , "Conformal Field Theory ,".