超弦理論における非BPS状態

高柳 匡

２０００年1月１１日

概 要

超弦理論における双対性や D-brane の発見以来、BPS 状態についての研究がここ 5 年間にめざましく進歩した。さらにごく最近になって、超弦理論における代表的な非 BPS 状態である brane-antibrane 系の解析も行われるようになり、安定な非 BPS 状態の議論が可能となった。そこでこの論文では、初めに超弦理論の摂動的、非摂動的性質を解説した後で、brane-antibrane 系や非 BPS D-brane から構成される安定な非 BPS 状態の解析における最近の進展をその基本的記述を与える boundary state についての説明とともに考察をまじえながらまとめる。さらに最後に、brane-antibrane 系のタキオン凝縮と K-theory による D-brane の電荷の分類との関係における最近の研究についてもまとめる。

目 次

第 1 章 Introduction **5**

第 2 章 超弦理論の CFT による摂動的記述 **8**

2.1 N=1 SCFT 8

2.2 mode 展開と R-sector,NS-sector 10

2.3 bosonization と vertex operator 11

2.4 (1,1)SCFT を持つ closed string theory-TypeII,Type0 13

2.5 Heterotic string 14

2.6 open string を含む String theory 15

2.7 T-duality 19

第 3 章 超弦理論の非摂動的性質 **21**

3.1 D-brane,Orientifold 21

3.1.1 RR-vertex 21

3.1.2 D-brane の記述 22

3.1.3 D-brane 上の effective field theory 26

3.1.4 TypeI 理論の T-dual と Orintifold 28

3.2 String duality 30

3.2.1 String duality の概要 30

3.2.2 TypeI-Heterotic duality 31

3.2.3 TypeII/K3 − Het/T^4 duality 33

第 4 章 Boundary state **37**

4.1 Noncompact で flat な空間における D-brane を記述する boundary state 37

4.1.1 boundary state の構成 37

4.1.2 Type0 string の場合 39

4.1.3 boundary state の normalization の決定 40

4.1.4 Antibrane 42

4.2 Orientifold palne 42

4.2.1 boundary state の構成 42

4.2.2 TypeI の D-brane への Ω の作用 43

4.2.3 Orientifold の tension と normalization の決定 44

4.2.4 Orientifold の分類 44

4.2.5 TypeI の vacuum amplitude の計算 45
4.3 Non-BPS D-brane の boundary state 45
4.4 Toroidal compact 化したときの boundary state 46
4.5 Orbifold T^4/Z_2 における boundary state 48
4.5.1 orbifold の untwisted sector と twisted sector 49
4.5.2 fractional D0-brane の boundary state 49
4.6 ALE 空間における D-brane を記述する boundary state とその応用 51
4.6.1 ALE 空間における D-brane 52
4.6.2 ALE 空間における D-brane を記述する boundary state 53
4.6.3 String creation と open string の Witten index 55
4.6.4 1-loop monodromy と string creation 57

第 5 章 brane-antibrane system **58**
5.1 brane-antibrane system の不安定性 58
5.2 brane-antibrane system の world volume theory 59
5.3 $D(p+2) - \bar{D}(p+2)$ system の tachyon condensation による $Dp - brane$ の生成 . 60
5.4 $D3 - \bar{D}3$ からの (p,q)-string の生成 62
5.5 複数の brane,antibrane から構成される場合 63
5.6 $D(p+4) - \bar{D}(p+4)$ system からの $Dp - brane$ の生成 64
5.7 String field theory と tachyon potential 65

第 6 章 Non-BPS D-brane **69**
6.1 Non-BPS D-brane の記述と基本的性質 69
6.2 Non-BPS D-brane の lowenergy effective action 70
6.3 Non-BPS D-brane での tachyon condensation 70
6.4 supersymmetric に拡張した Non-BPS D-brane の action 70

第 7 章 安定な Non-BPS 状態 **72**
7.1 TypeI SO(32) spinor soliton 72
7.1.1 brane-antibrane の対消滅と TypeI SO(32) spinor soliton 72
7.1.2 CFT による tachyon condensation の記述 73
7.1.3 critical radius からの deformation と tachyon potential 77
7.1.4 tachyon condense による non-BPS D0-brane の生成 79
7.1.5 Non-BPS D0-brane の性質 80
7.1.6 TypeIA 理論における non-BPS D1-brane 81
7.2 Op-Dp system における安定な non-BPS 状態 82
7.2.1 摂動論的解析 82
7.2.2 orientifold projection の定式化 83
7.2.3 O8-D8 system 84
7.2.4 O6-D6 system 85
7.2.5 O4-D4 system 86

7.2.6 O3-D3 system . . . 87
7.2.7 O7-D7 system . . . 87
7.2.8 F-theory における non-BPS state . . . 91
7.2.9 O5-D5 system . . . 95
7.3 Non-supersymmetric cycle に巻きつく D-brane の安定性 . . . 99
7.3.1 Non-BPS D-brane の tachyon condensation . . . 99
7.3.2 Orbifold における Non-BPS D1-brane の安定性と tachyon condense . . . 100
7.3.3 Orbifold における non-BPS D1 brane の幾何学的解釈と boundary state . 101
7.3.4 Heterotic dual での non-BPS state . . . 103
7.3.5 Tachyon potential と phase diagram . . . 105

第 8 章 D-brane の descent relation **107**
8.1 CFT による descent relation . . . 107
8.2 World volume effective field theory での descent relation . . . 107
8.3 $(-1)^{F_L^S}$ による twist について . . . 108

第 9 章 D-brane と K-theory **110**
9.1 Type I における D-brane の分類 . . . 110
9.2 K-theory の簡単な説明 . . . 112
9.2.1 K-theory の定義と物理的解釈 . . . 112
9.2.2 Chern 同型 . . . 115
9.2.3 Higher K-theory と Relative K-theory . . . 116
9.2.4 Equivariant K-theory など . . . 118
9.3 tachyon condense と K-theory . . . 119
9.3.1 flat な時空での tachyon condense . . . 119
9.3.2 曲がった時空での tachyon condense . . . 121
9.3.3 TypeIIA の場合 . . . 123
9.4 K-theory と T-duality . . . 125
9.5 D-brane の WZ-term と index 定理 . . . 128

第 10 章 Conclusion **133**

付 録 A f 関数の定義と性質 **136**

付 録 B string junction の簡単な Review **138**
B.1 F-theory と [p,q]7-brane の配置 . . . 138
B.2 Enhanced symmetry と string junction . . . 140
B.3 Affine Kac Moody algebra の実現 . . . 143

付 録 C IIB/$(-1)^{F_L^S} \cdot I_4$ における $D1 - \bar{D}1$ system の詳細 **145**
C.1 tachyon condense の CFT による記述 . . . 145
C.2 tachyon potential . . . 146

付 録 D Non-BPS D-brane の tachyon condense の詳細 **148**

付 録 E D-brane の world volume が *spin* 多様体ではない場合の取り扱い **151**
E.1 topological に非自明な B-field 151
E.2 world sheet global anomaly 152
E.3 $\mathbf{CP^2}$ の world volume をもつ D-brane の電荷の量子化 155

第1章　Introduction

場の理論による自然法則の定式化は重力がくりこみ不可能な相互作用をするためプランクスケールで破綻し、量子重力理論が必要となる。この量子重力理論の最も有力な候補として考えられている超弦理論には 5 種類 (TypeII A,TypeIIB,TypeI,Het SO(32),Het E8xE8) 存在することが共形場理論 (CFT) を用いた摂動論の議論から知られてきた。しかしながら最近になって超弦理論の双対性が発見されて、それらはみな同じ理論 (M-理論) のモジュライ (結合定数やコンパクト化の半径) が違った極限とみなせる [11][15][12][24][14] ことがわかり、超弦理論の非摂動的性質の理解が急速に深まった。それと同時に、摂動的には存在しなかった RR-charge を帯びた状態は、D-brane[5][6] という BPS ソリトンによって実現されることが指摘され、双対性の理解に欠かせないものとなった。このソリトン自体は非摂動的であるが、open string の端点として摂動的立場で記述できるという利点があり、またその力学は低エネルギーでゲージ理論とみなせて、それを用いてのゲージ理論の非摂動的性質についての研究も進んだ [17][16]。

これらの非摂動的議論に可能にしたのは時空にある超対称性が特定のコンパクト化をしたとき、もしくは BPS 状態のソリトンを考えるときにはいくらか破れずに残っている事実であり、非くりこみ定理によって量子補正が制限されるので扱いやすくなる為である。そのため今までの多くの研究は BPS 状態が対象とされてきた。

しかしながらごく最近になって非 BPS 状態 (non-BPS state) についての研究が盛んになり、まだ未解決の問題が多い状況ではあるが、より現実に近い状況を超弦理論の枠内で考察するアプローチが考案されている。この分野の研究は大きく 2 つに分かれる。

一つのアプローチは超弦理論の枠内で brane-antibrane 系や non-BPS D-brane 系のような non-BPS 状態の性質や安定性に関する研究するものである [47]。主に open string の CFT や closed string の立場で boundary state を用いて解析を行う。主な例では、TypeI-Heterotic の S-duality で存在が予想される TypeI SO(32) spinor soliton を brane-antibran 系のタキオン凝縮から構成するもの [43][44] や、TypeII 理論の K3 コンパクト化で non-supersymmetric な cycle に巻きついた D-brane の記述やその安定性について [45][48] 、そして D-brane と orientifold の系における non-BPS 状態とその強結合極限の解析 [40][41] などがある。

これらの系で特徴的なのは、超対称性がない状況なので BPS 状態とは違って常に安定な状態は存在せず、理論のパラメーターによって安定な状態が変わる点である。従って BPS 状態の研究に比べると超弦理論のダイナミクスにかかわる要素が大きいと言える。BPS 状態の議論は CFT を用いず、低エネルギーでの有効理論で十分な場合が多いが、non-BPS 状態の場合はその存在自体が非自明なので CFT を用いて string 理論として議論する必要がある。実際、non-BPS 状態を D-brane として構成する場合には、「対応する boundary state を構成できる」という条件が最も強力である。従って、non-BPS 状態の研究は boundary state の研究と密接な関係がある。

状態が安定かどうかは、その spectrum にタキオンがあるかどうかで判定できる。D-brane の場

合、それに付着する open string の spectrum を調べればよい。不安定な状態は、その tachyon を凝縮 (tachyon condense) することによって安定な状態に遷移できる。そのなかでとくに on shell つまり CFT の marginal deformation に相当する場合は実際にその様子を CFT で記述することができる。一般に brane-antibrane 系を考えると tachyon が存在し不安定であることが分かるが、何らかの projection があると安定化することがあり、安定な非 BPS 状態 (stable non-BPS state) を構成する主要な方法となっている。また、初めから非 BPS な D-brane(non-BPS D-brane) を構成する方法も最近知られるようになった [33]。

不安定な brane-antibrane 系に対していろいろな tachyon condense の方法が考えられるが、その方法によって生成される D-brane の電荷は異なる。すなわち、それより次元が低い BPS な Dp-brane もしくは non-BPS Dp-brane をすべて構成することができる。この考え方を systematic に行ったのが K-theory による D-brane の分類である [20][81]。実際 K-theory は 2 つのバンドルの差を分類する理論であるが、brane-antibrane 系が崩壊するとそれぞれのバンドルの差に相当する電荷が残るわけで、うまく対応する。

さてもう一つのアプローチは超対称性のない弦理論を考えてその性質を研究するというものである。超対称性のない弦理論には、closed string のみからなるものとして、Type0 理論, 7 つの Heterotic string ,Bosonic string がある [1]。また open string を含むものはこれらの理論を orientation projection して得られ、多くの例が知られている [32][35]。

特に Type0 理論については、AdS/CFT 対応 [96] の観点から超対称性のない large N ゲージ理論との関係が最近議論されるようになった [97]。またこれらの超対称性のない弦理論の強結合極限の議論もなされており、String-duality のようなものがこれらの間に成り立つかもしれないという可能性も指摘されている [35]。しかしながらこれらの理論にはタキオンが含まれる場合が多く、タキオンを安定化する機構 [97] も提案されているものもあるが依然問題点が多い。

また non-BPS 状態を扱うための一つの道具である boundary state それ自身についてもここ数年重要な研究がなされた。特に曲がった時空での boundary state について研究がなされ、例えば orbifold[69],Gepner model [70][71] などの boundary state が構成され、ALE 空間,K3,Calabi-Yau 多様体などの様々な cycle に巻きついた D-brane を記述することができるようになった。特に、brane creation や monodromy といった現象を理解するには boundary state を用いた CFT の議論が非常に有効である [31][67]。

それでは最後に、この論文の構成を述べる。 2 章では超弦理論の摂動論を用いた CFT による従来の記述法について簡単に説明する。 3 章では超弦理論の非摂動的性質を調べる際に重要な役割を担う D-brane について説明し、その後で String duality について非常に簡潔に述べる。 4 章では以後必要となる boundary state についての知識についてまとめ、その後で実際に著者が研究を行った ALE 空間における fractional D-brane の記述と brane creation の現象について解説する。 5 章では、brane-antibrane 系についてその性質と最近までに知られてきた事実 (tachyon condense による次元の低い D-brane の生成など) などをまとめる。 6 章では最近になって構成された non-BPS D-brane の性質について説明する。 7 章はこの論文の主要部の一つで、安定な non-BPS 状態について現在までに知られてきた具体例についてまとめる。 8 章では、 7 章で具体例を調べながら分かった現象を系統的に整理したものである D-brane の descent relation について解説する。 9 章はこの論文のもう一つの主要部である K-theory と D-brane の分類に関して説明する。必要な K-theory の数学的知識についても解説してある。 １０章で結論と今後の研究方向について述べる。

付録 A では、本文中に多々用いた modular 関数について定義と性質を整理する。付録 B では、7 章で F-theory における安定な non-BPS 状態を構成する際に用いた String junction の知識を簡潔に述べる。付録 C と付録 D では、7 章で non-BPS 状態を構成する際の tachyon condense を CFT を用いて記述する詳細について補足する。また付録 E では string world sheet の global anomaly と spin 多様体ではない world volume を持つ D-brane の関係について述べる。

第2章　超弦理論のCFTによる摂動的記述

弦理論 (string theory) とは、時空 (target space) に二次元の Riemann 面 (world sheet) を埋め込む写像 $X^\mu(z,\bar{z})$ を考えることによって時空内の弦の運動を表しその量子化を行って時空の物理現象をミクロな立場で記述するという理論である。超弦理論 (superstring theory) はさらに、world sheet が N=1 超共形場理論 (SCFT) であることを要請したものであり、低エネルギー極限で超重力理論となることが知られている。ここでは、N=1 SCFT を説明した後、摂動的な立場で 10D superstring の構成を行う。

2.1　N=1 SCFT

超弦理論の world sheet を記述する N=1 SCFT の free field は次のような作用で定義される。

$$S = \frac{1}{4\pi}\int dz^2 (\frac{2}{\alpha'}\partial X^\mu \bar{\partial} X_\mu + \psi^\mu \bar{\partial}\psi_\mu + \tilde{\psi}^\mu \partial \tilde{\psi}_\mu) \qquad (\mu = 0, \cdots, D-1) \tag{2.1}$$

この作用に対する運動方程式から分かるように $\psi^\mu(z), \tilde{\psi}^\mu(\bar{z})$ はそれぞれ left-moving,right-moving fermion である。この時 OPE は、

$$X^\mu(z,\bar{z})X^\mu(0,0) \sim -\frac{\alpha'}{2}\eta^{\mu\nu} ln|z|^2 \tag{2.2}$$

$$\psi^\mu(z)\psi^\mu(0) \sim \frac{\eta^{\mu\nu}}{z} \tag{2.3}$$

$$\tilde{\psi}^\mu(\bar{z})\tilde{\psi}^\mu(0) \sim \frac{\eta^{\mu\nu}}{\bar{z}} \tag{2.4}$$

さらに、ストレステンソルとその super partner を次のように定義する。

$$T(z) = -\frac{1}{\alpha'}\partial X^\mu \partial X_\mu - \frac{1}{2}\psi^\mu \partial \psi_\mu \tag{2.5}$$

$$G(z) = i\sqrt{\frac{2}{\alpha'}}\psi^\mu \partial X_\mu \tag{2.6}$$

とおくと、

$$T(z)T(0) \sim \frac{c}{2z^4} + \frac{2}{z^2}T(0) + \frac{1}{z}\partial T(0) \tag{2.7}$$

$$T(z)G(0) \sim \frac{3}{2z^2}G(0) + \frac{1}{z}\partial G(0) \tag{2.8}$$

$$G(z)G(0) \sim \frac{2c}{3z^3} + \frac{2}{z}T(0) \tag{2.9}$$

$$\text{但し、}\quad c = \frac{3}{2}D \tag{2.10}$$

と N=1 SCFT の OPE が得られる。また (2.1) 式で表されるボソンとフェルミオンの系は明らかに相互作用していないので、N=1SCFT の free field 表現を得たことになる。

超弦理論とはこれらの world sheet 上の場に 2 次元重力を結合させたもの、つまりすべての Riemann 面に対して world sheet reparametrization をゲージ化して 2 次元計量 (metric) で経路積分した理論として定義される[1] 。

次に、その world sheet reparametrization のゲージ固定に伴う b, c ghost(fermion) とその super patner である、β, γ ghost(boson) について述べる。これも自由場として記述される。作用と OPE は次のとおりである。(但し以下では、$\epsilon = 1$ が b, c fermion で $\epsilon = -1$ が β, γboson を表すとし、両者を b, c, ϵ で記述する)

$$S = \frac{1}{2\pi} \int dz^2 (b\bar{\partial} c) \tag{2.11}$$

$$b(z)c(w) \sim \frac{\epsilon}{z-w} \tag{2.12}$$

またストレステンソルは次式で与えられる。λ はパラメータである。

$$T(z) = -\lambda b \partial c + (1-\lambda) \partial b c \tag{2.13}$$

このとき b, c はそれぞれ次元が $\lambda, (1-\lambda)$ となり、全体の anomaly は $c = \epsilon(1 - 3(1-2\lambda)^2)$ となる。superstring では、world sheet の reparametrization の gauge fix に対応するように次のように選ぶ。

$$(b, c) : \epsilon = 1, \lambda = 2 \quad , \quad (\beta, \gamma) : \epsilon = -1, \lambda = \frac{3}{2} \tag{2.14}$$

このとき (b, c, β, γ) の系にも N=1SCFT の対称性がある。

最後に臨界次元 (critical dimension) について述べる。consistent な string theory を構成するために anomaly の和が 0 となることを要請するのは自然である。このような string theory を critical string と呼ぶ。以下この場合のみを考える。ghost 部分の寄与も入れると、その要請は

$$\begin{aligned} c_{tot} &= c_{matter} + c_{b,c} + c_{\beta,\gamma} \\ &= c_{matter} + 11 - 26 = 0 \end{aligned} \tag{2.15}$$

となり $c_{matter} = 15$ となる。matter 部分が free field (X^μ, ψ^μ) でかけるとすると $\mu = 0 \sim 9$ となり、１０次元の時空を記述していることになる。このとき臨界次元は 10 次元であるという。また、例えば Ricci flat な $K3$ や $Calabi - Yau$ 多様体を target space とする 2D σ-model の anomaly は $c = 6, 9$ であることが分かり、幾何学的次元と CFT の anomaly から導いた次元が一致するので１０次元の時空をそれぞれの多様体にコンパクト化したものと解釈できる。

またもし boson のみからなる N=0 の string を考えるならば、ghost は b, c のみであり臨界次元は２６次元となる。left,right とも N=0 とする string theory を bosonic string と呼ぶ。

---

[1] さらに高い対称性 (N=2,4) を課してしまうと、時間が 2 つある理論になったり、臨界次元がマイナスになったりするなどして直接には物理的興味ある理論ではなくなる (N=2 string,N=4 string と呼ばれる) のでここでは考えない。但しコンパクト化の仕方によって、非臨界的に N=4 (K3) N=2(Calabi-Yau) の SCFT が現れることはある。

2.2 mode 展開と R-sector,NS-sector

まず boson X^μ の mode 展開について考える。ユークリッド化した world sheet の座標 (τ, σ) を $Z = e^{\tau - i\sigma}$ と複素数で表すことにする。

境界条件 $X^\mu(\tau, \sigma + 2\pi) = X^\mu(\tau, \sigma)$ が課されるので

$$X^\mu(z, \bar{z}) = x^\mu - i\frac{\alpha'}{2} p^\mu ln|z|^2 + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{m \in \mathbf{Z} \neq 0} \frac{1}{m} (\alpha_m^\mu z^{-m} + \tilde{\alpha}_m^\mu \bar{z}^{-m}) \tag{2.16}$$

と mode 展開される。

このときの交換関係は、次の通りである。

$$[x^\mu, p^\nu] = i\eta^{\mu\nu} \ , \ [\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu] = [\tilde{\alpha}_m^\mu, \tilde{\alpha}_n^\nu] = m\delta_{m,-n}\eta^{\mu\nu} \tag{2.17}$$

次に、fermion 場 ψ^μ について考える。これには次のように 2 通りの周期性が可能である。left-moving ,right-moving それぞれ独立にとれるが、片方のみここでは記す。

$$\begin{aligned} \text{R-sector} : \psi^\mu(\tau, \sigma + 2\pi) &= \psi^\mu(\tau, \sigma) \\ \text{NS-sector} : \psi^\mu(\tau, \sigma + 2\pi) &= -\psi^\mu(\tau, \sigma) \end{aligned} \tag{2.18}$$

mode 展開は次のようになる。但し $\psi^\mu(z)$ は $\psi^\mu(\tau, \sigma)$ を conformal 変換したものであることに注意する。

$$\psi^\mu(z) = \sum_r \psi_r^\mu z^{-r-\frac{1}{2}} \ , \ \tilde{\psi}^\mu(\bar{z}) = \sum_r \tilde{\psi}_r^\mu \bar{z}^{-r-\frac{1}{2}} \tag{2.19}$$

ここで、NS-sector では $r \in \mathbf{Z} + \frac{1}{2}$、R-sector では $r \in \mathbf{Z}$。反交換関係は次の通り。

$$\{\psi_r^\mu, \psi_s^\nu\} = \{\tilde{\psi}_r^\mu, \tilde{\psi}_s^\nu\} = \eta^{\mu\nu}\delta_{r,-s} \tag{2.20}$$

注意すべきことは R-sector には fermion の zeromode があることであり、各レベルに spinor charge に相当する degeneracy がある。次節で示すように、この fermion の zeromode が理論に時空の超対称性をもたらすのである。以上のような超弦理論の定式化を (ghost 場を導入した)NS-R formalism という。

次に、以後しばしば用いる (NS-R の)old covariant method による physical state の求め方を簡単に説明する。この方法では world sheet 上の場は (X^μ, ψ^μ) として ghost 場は導入せず、spectrum を求めるには簡単であるが、時空の超対称性が explicit でない。また Green-Schwartz formalism という等価ではあるが全く別な formalism もあり、この場合は超対称性が explicit に分かるが、light cone のみで定式化できるという欠点がある。この論文では後者の formalism はほとんど用いないことにする。

まず、ストレステンソルを次のように展開する。

$$T(z) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} L_n z^{-n-2} \ , \ G(z) = \sum_r G_r z^{-r-\frac{3}{2}} \tag{2.21}$$

ここで r は ψ_r の moding と同じである[2] 。このとき L_n, G_r は具体的に次のように表される。

$$\begin{aligned} L_m &= \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbf{Z}} :\alpha^\mu_{m-n}\alpha^\mu_n: + \frac{1}{4}\sum_r (2r-m) :\psi^\mu_{m-r}\psi^\mu_r: \\ G_r &= \sum_{n\in\mathbf{Z}} \alpha^\mu_n \psi^\mu_{r-n} \end{aligned} \tag{2.22}$$

physical state は次のように定義される。

$$\begin{aligned} L_n|phys> &= 0 \quad (n>0) \\ (L_0-a)|phys> &= 0 \quad (a_{NS}=\frac{1}{2}, a_R=0) \\ G_r|phys> &= 0 \quad (r\geq 0) \end{aligned} \tag{2.23}$$

これらの条件は、world sheet の reparametrizaion に物理的状態がよらないという要請を意味し CFT の言葉でいうと次元 a の primary state と呼ばれる。この要請は ghost を導入する方法で BRST 不変性の要請するのと等価である。またこれらの状態には zero norm state が数多く存在し、それらは物理的にも null state と解釈され、それらを 0 とみなすことが理論に時空のゲージ不変性をもたらす。

第 2 式の条件から mass spestrum は次のように求まる。

$$\begin{aligned} m^2_{NS} &= -p^2 = \frac{1}{\alpha'}(N-\frac{1}{2}) \\ m^2_R &= -p^2 = \frac{1}{\alpha'}N \\ \text{但し} \qquad & N \equiv \sum_{n>0}\alpha^\mu_{-n}\alpha^\mu_n + \sum_{r>0} r\psi^\mu_{-r}\psi^\mu_r \end{aligned} \tag{2.24}$$

これから分かるように $m^2 = -\frac{1}{2\alpha'}$ という tachyon が存在する。TypeII string などの 5 つの超弦理論では、GSO-projection $(-1)^F = 1$ をさらに課すので tachyon は取り除かれる。詳しいことは次々節参照。

2.3 bosonization と vertex operator

具体的に string theory で amplitude のような物理量を計算する時には、対応する state から vertex operator と呼ばれる次元 1 の primary operator を構成する必要がある。その vertex operator の world sheet 上の相関関数を各 Riemann 面で moduli を含めて足し上げたものが string amplitude である。ここでは、fermion の bosonization によって vertex operator を構成し [2] 時空の超対称性がどのように実現されるか述べる。

まず、fermion $\psi^\mu(z)$ を SO(1,9) の signature を考慮して次のように bosonize する。

$$e^{\pm iH_0} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\pm\psi^0+\psi^1)\ ,\ e^{\pm iH_a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi^{2a}\pm i\psi^{2a+1})$$

[2] orbifold のような moding を shift する twist が作用している場合には ψ_r の moding と G_r の moding はずれることがある。その場合には G_r の moding で NS-sector,R-sector と区別する。

$$H_a(z)H_b(z) \quad \sim \quad -\delta_{a,b}\ ln(z) \quad (a=0,1,2,3,4) \tag{2.25}$$

また ghost を次のように bosonize する。

$$\begin{aligned} & b = e^{\rho}\ ,\ c = e^{-\rho}\ ,\ \beta = e^{-\phi}\partial\xi\ ,\ \gamma = e^{\phi}\eta \\ & \rho(z)\rho(0) \sim ln(z)\ ,\ \phi(z)\phi(0) \sim -ln(z)\ ,\ \eta(z)\xi(0) \sim \frac{1}{z} \end{aligned} \tag{2.26}$$

このとき、screening charge のため $e^{q\phi}$ の次元は $-\frac{1}{2}q(q+2)$ となることに注意。

さてそれでは、vertex operator を構成しよう。今までの通り chiral な CFT で記述するが closed string を考えるならば。left と right 独立に以下のように扱えばよい。特に massless state のみに着目する。

まず NS-sector であるが、momentum k^μ をもつ vertex operator は

$$V_{NS}^{(-1)} = e^{-\phi}\psi^\mu e^{ikX} \tag{2.27}$$

と容易に構成でき、次元 1 であることもすぐに確かめられる。この $V^{(-1)}$ の (-1) は ϕ の係数を意味し、(-1)picture[3] と呼ばれる。world sheet(Disk) での相関関数を計算するときは picture の和が-2 でないと 0 となってしまう。そこで picture change[2] を行って picture の和が-2 になるよう調節する。この $e^{-\phi}$ を取り除くと次元 $\frac{1}{2}$ となり old covariant method での vertex operator と一致する。

さて次に、R-sector について考える。この場合、world sheet の周期性を twist するので OPE に $\sim \frac{1}{\sqrt{z}}$ のモノドロミーが生じるはず[4]。従って、$e^{i\frac{H^a}{2}}$ のような field から構成されるはずである。次元 1 にするために ghost 場も加えて、

$$\begin{aligned} V_R^{(-\frac{1}{2})} &= e^{-\frac{1}{2}\phi}e^{i(\pm\frac{1}{2}H_0\pm\frac{1}{2}H_1\pm\frac{1}{2}H_2\pm\frac{1}{2}H_3\pm\frac{1}{2}H_4)}e^{ikX} \\ &\equiv e^{-\frac{1}{2}\phi}S^A e^{ikX} \end{aligned} \tag{2.28}$$

と構成できる。この S^A のような operator を spin field と呼ぶ。１０次元の時空の場合、$A = 1 \sim 32$ となる。さらに TypeII 理論では GSO-projection を課すので 16 に減り、10D N=1 SUSY の Weyl fermion を構成する。この Weyl projection の分解を $A = (\alpha, \tilde{\alpha})$ と書く。

ψ^μ, S^α の OPE を書くと、

$$\begin{aligned} \psi^\mu(z)S^\alpha(0) &\sim \frac{1}{\sqrt{2z}}S^\beta(0)\Gamma^\mu_{\alpha\tilde{\beta}} \\ S^\alpha(z)S^{\tilde{\beta}}(0) &\sim z^{-\frac{5}{4}}C^{\alpha\tilde{\beta}} + \frac{1}{4}z^{-\frac{1}{4}}(\Gamma_\mu\Gamma_\nu C)^{\alpha\tilde{\beta}}\psi^\mu\psi^\nu(0) \\ S^\alpha(z)S^\beta(0) &\sim \frac{1}{\sqrt{2}}z^{-\frac{3}{4}}(\Gamma_\mu C)^{\alpha\beta}\psi^\mu(0) \end{aligned} \tag{2.29}$$

ここで $C^{\alpha\tilde{\beta}}$ は charge conjugation 行列である。

---

[3] 正確には、$\eta = e^{-\chi}$ と bosonize して、$\#\phi + \#\chi$ を picture と定義するが、この論文では $\#\chi = 0$ の場合しか出てこない。

[4] このようなモノドロミーは vertex operator を nonlocal にするが、GSO-projection を課すと生じなくなる。

さて最後に、時空の超対称性について説明する[5] 。

spin field を用いると super charge Q_α は次のように world sheet の立場で構成できる。

$$Q_\alpha = \sqrt{2}\oint dz e^{-\frac{1}{2}\phi} S^\alpha \tag{2.30}$$

$$\tag{2.31}$$

実際上の OPE から、次のように超対称性代数が示される。

$$\begin{aligned} \{Q_\alpha, Q_\beta\} &= \frac{1}{2\pi i}\oint dz z^{-1} (\Gamma_\mu C)^{\alpha\beta} e^{-\phi}\psi^\mu(0) \\ &= (\Gamma_\mu C)^{\alpha\beta} e^{-\phi}\psi^\mu(0) = (\Gamma_\mu C)^{\alpha\beta} P^\mu \end{aligned} \tag{2.32}$$

2.4 (1,1)SCFT を持つ closed string theory-TypeII,Type0

今までに一般的に string theory の記述法を見てきたが、ここではとくに closed string のみからなる string theory で left,right-moving がともに N=1 SCFT となる場合すなわち、(1,1)SCFT を持つものを取り上げて [1] に従って分類してみる。

まず、world sheet fermion number operator を定義する。vertex operator $e^{q\phi}e^{\sum_a s_a H_a}$ に対応する state にたいして $F = q + \sum_a s_a$ と定義する。left,right それぞれに対して F_R, F_L と区別する。

また、space time fermion number operator も後で使うので定義しておく。これは NS-sector にたいして 0、R-sector にたいして 1 として定義する。left,right それぞれに対して F_R^S, F_L^S と表す。

さて、この節では、次の (1) から (4) の条件を満足する closed string theory を対象とする。

(1)left mover も right mover も N=1 SCFT の自由場表現で構成され、可能な sector は

$$(left, right) = (\text{NS or R}; (-1)^{F_L} = \pm 1, \text{NS or R}; (-1)^{F_R} = \pm 1) \tag{2.33}$$

と書かれる。このうちのいくつかを組み合わせて理論は構成される。

(2)vertex operator の OPE は local。

(3)OPE は閉じている。

(4)partition function に modular 不変性がある。

この条件を満たす理論は、具体的に調べ上げることで次のように表される [1]。

$$\begin{aligned}
\text{TypeIIB} &: (R+, NS+), (NS+, R+), (R+, R+), (NS+, NS+) \\
\text{TypeIIB'} &: (R-, NS+), (NS+, R-), (R-, R-), (NS+, NS+) \\
\text{TypeIIA} &: (R+, NS), (NS+, R-), (R+, R-), (NS+, NS+) \\
\text{TypeIIA'} &: (R-, NS+), (NS+, R+), (R-, R+), (NS+, NS+) \\
\text{Type0A} &: (R+, R-), (R-, R+), (NS-, NS-), (NS+, NS+) \\
\text{Type0B} &: (R+, R+), (R-, R-), (NS-, NS-), (NS+, NS+)
\end{aligned}$$

すぐに分かるように TypeIIA',TypeIIB' 理論は、TypeIIA,TypeIIB 理論と等価であるので以下では考えないことにする。

[5] 但し、TypeII string のように GSO-projection が正しく存在していて、tachyon はないとする

TypeII 理論では、特定の fermion number を持つように project されていることが分かるが、これを GSO-projection と呼ぶ。このおかげで、tachyon を含む $(NS-,NS-)$ は存在せず良い理論となる。また前節で見たように超対称性が left,right にあり、massless multiplet は 10D N=2 の SUGRA multiplet を構成する。

Type0 理論では、sector が project されていて tachyon T を含む超対称性のない理論である。これを diagonal GSO-projection と呼ぶ。最近では、D3-brane による RR flux の導入により tachyon が安定化する可能性が指摘され、AdS/CFT 対応の一例として研究が進められている [97]。また Type0 理論における D-brane を組み合わせて作ったゲージ理論についても興味深い研究がなされている [98]。しかしながら tachyon を真に信頼のおける方法で取扱うことはまだなされていない。また Type0 は boson しか含まず、RR 場も TypeII と比べると 2 倍あることも特徴である。

さて最後にこれらの理論の massless field について述べる。massless field は light cone gauge で求めるのが一番簡単である。つまり x^0, x^1 方向がないとして、もはや physical 条件を課さずにすべての可能な state を考えればよい。left-mover のみ考えると

$$\begin{aligned} |NS- > &= |0 > \in \mathbf{1} \quad , \quad |NS+ > = \psi^i_{-\frac{1}{2}}|0 > \in \mathbf{8_v} \\ |R+ > &= S_\alpha|0 > \in \mathbf{8_s} \quad , \quad |R- > = S_{\dot{\alpha}}|0 > \in \mathbf{8_c} \end{aligned} \tag{2.34}$$

但し、$i = 2 \sim 9$ とした。これらを用いて、例えば TypeIIA で $(NS+,NS+)$ の sector では

$$\begin{aligned} \mathbf{8_v} \otimes \mathbf{8_v} &= \mathbf{1} \oplus \mathbf{28} \oplus \mathbf{35_v} \\ \psi^i_{-\frac{1}{2}}|0 > \otimes \tilde{\psi}^j_{-\frac{1}{2}}|0 > &\to \{\phi, B_{\mu\nu}, G_{\mu\nu}\} \end{aligned}$$

のように dilaton,2-form field,graviton が得られる。他の sector についても同様に既約分解を行うとそれぞれの理論で massless boson field が次のように求まる。

$$\begin{aligned} \text{TypeIIB} &: \{\phi, B_{\mu\nu}, G_{\mu\nu}\}, \{\chi, B'_{\mu\nu}, A^+_{\mu\nu\rho\sigma}\} \\ \text{TypeIIA} &: \{\phi, B_{\mu\nu}, G_{\mu\nu}\}, \{A_\mu, A_{\mu\nu\rho}\} \\ \text{Type0B} &: \{\phi, B_{\mu\nu}, G_{\mu\nu}\}, \{\chi, A_{\mu\nu}, A^+_{\mu\nu\rho\sigma}\}, \{\chi', A'_{\mu\nu}, A^-_{\mu\nu\rho\sigma}\} \\ \text{Type0A} &: \{\phi, B_{\mu\nu}, G_{\mu\nu}\}, \{A_\mu, A_{\mu\nu\rho}\}, \{A'_\mu, A'_{\mu\nu\rho}\} \end{aligned}$$

2.5 Heterotic string

ここでは、closed string のみからなる string theory で world sheet 上の CFT が (0,1)SCFT である場合を考える。left-right が非対称なため heterotic string と呼ばれる。つまり right-mover は N=1 SCFT となっていて $\{X^\mu(\bar{z}), \tilde{\psi}^\mu(\bar{z})\}$ $\mu = 0 \sim 9$ で表され、left-mover は boson のみからなり臨界次元は 26 なので $\{X^\mu(z), X^k(z)\}$ $k = 10 \sim 25$ と表される。このとき $X^k(z)$ はコンパクトな CFT なので時空の次元は今まで通り１０次元である。

したがって string theory 構成するにはこれらの field に適当な projection をいれて modular 不変性を満たすようにすればよい。

現在でも調べ尽くされているとはいえないが、次の heterotic string が構成されている。

$$\begin{aligned}
\text{spacetime N=1 SUSY があるもの} &: \text{Het SO(32)}, \text{Het } E_8\times E_8 \\
\text{SUSY はないが tachyon は存在しないもの} &: \text{Het SO(16)}\times\text{SO(16)} \\
\text{SUSY はなく、tachyon も存在するもの} &: \text{Het SO(32)}, \text{Het SO(16)}\times E_8, \\
\text{Het SO(24)}\times\text{SO(8)}, \text{Het } E_7\times E_7\times\text{SO(4)} &, \text{Het SU(16)}\times\text{SO(2)}, \text{Het } E_8
\end{aligned}$$

これらを具体的に構成するには、free boson $X^k(z)$ を fermionize して $\lambda^A(z)$ $A=1\sim 32$ を導入すると便利である。

λ^A の境界条件には NS と R があり、この 32 個のすべての fermion(left-mover) が同じ境界条件となると仮定して GSO-projection $(-1)^{F_L}=1, (-1)^{F_R}=1$ をするとゲージ群が SO(32) の Het SO(32) という理論が得られる。時空の超対称性は right-mover fermion の GSO-projection から生じる。massless 場は、(left,right)=(NS,NS),(NS,R)sector から生じ、前者からは

$$\text{(NS,NS)sector}: \{\phi, B_{\mu\nu}, G_{\mu\nu}\}, A^a_\mu \tag{2.35}$$

のように graviton multiplet と SO(32) ゲージ場が、後者からは gravitino,dilatino,gaugino が生じる。

また、32 個の left-moving fermion を 16+16 に分けて、それぞれ独立に GSO-projection を課すと Het $E_8\times E_8$ の理論が得られる。

しかしながらこれ以上 fermion を組に分けて独立に GSO-projection を課すことを行うと modular 不変性が成立たないことが分かる。従って 10D N=1 SUSY のある Heterotic string はこれ以上つくれない。

そこで non-SUSY な構成を考える。Het SO(32) の GSO-projection を少し変えて、diagonal projection $(-1)^{F_L}\cdot(-1)^{F_R}=1$ を課すと modular 不変性は成立つ。このような理論を non-SUSY Het SO(32) と呼ぶ。今度の場合は fermion を組に分けて独立に GSO-projection を課して次々と modular 不変な理論 SO(16)×E_8 , SO(24)×SO(8) , $E_7\times E_7$×SO(4) , SU(16)×SO(2) , E_8 が作れる。

これら以外に non-SUSY だが tachyon のない Het SO(16)×SO(16) という理論も知られている。この理論は、32 個の fermion を 16+16 に分けて、それぞれの fermion number, sector を $(F^1,\alpha^1),(F^2,\alpha^2)$ としたとき[6] 、

$$(-1)^{F^1+\alpha^2+\alpha_R}=(-1)^{F^2+\alpha^1+\alpha_R}=(-1)^{F_R+\alpha^1+\alpha^2}=1 \tag{2.36}$$

という projection によって定められる。

2.6 open string を含む String theory

今までは、closed string のみからなる理論を考えたが、ここではさらに open string も含む理論を考えたい。この場合、今までのように fundermental な理論と考えるのではなく、closed string

[6] 但しここで α=1 は R-sector,$\alpha=0$ は NS-sector を意味する。

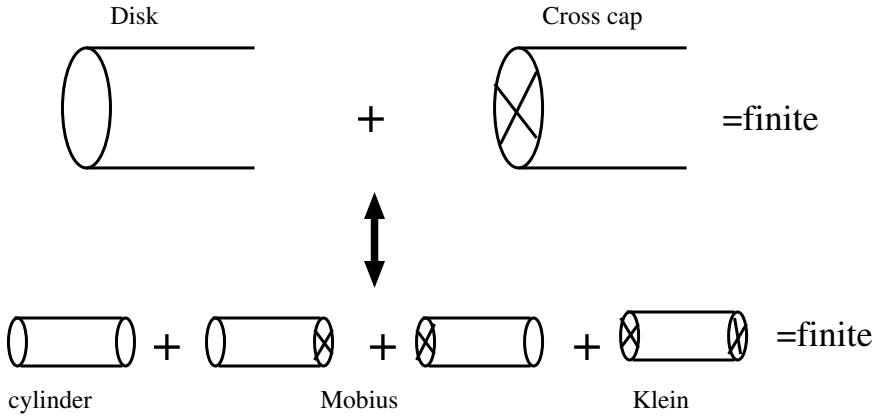

図 2.1: Disk と Cross cap の発散の相殺

のみからなる'fundermental な理論 (TypeIIB or Type0A,B)' にもともとあった orientation Ω の対称性でそれらを twist すると考えるのが見通しがよい。つまり unoriented な理論となる。またこのことは、超対称性があるときには次のように理解できる。TypeII 理論に open string をそのまま結合させようとすると closed string には 10D N=2 の SUSY があるが、open string では 10D N=1 の SUSY となり矛盾してしまう。従って unoriented な理論とすべきである[7] 。

また、もともとの理論にあった幾何学的対称性 (空間反転など) と Ω を一緒にして twist することも可能で、このような場合は fixed plane が生じ、orientifold と呼ばれる。

さてこのような twist した理論では、その'twisted sector' として open string が生じるのであるが、closed string での modular 不変性のように理論の consistency のために必要な条件はどのように与えられるのだろうか。現在でも完全には分かってはいないが、少なくとも tad-pole cancelling は必要と考えられている。この条件は、1-loop の vacuum amplitude が次の図 2.1 のように Disk と Cross cap の発散が相殺することを要請するもので、anomaly cancelling と同等の条件となっていることが多い。この amplitude を直接計算するには後述の boundary state の記述が必要となるが、ここではその amplitude の 2 乗に相当する cylinder+möbius+Klein の amplitude の和を求めて発散が相殺することを要請することにする (図 2.1 参照)。

また non-SUSY な理論の場合は tad-pole cancelling が NSNS と RR で同時には起こらない場合が多いがそのときは Fisher-Susskind 機構 [3] を用いて NSNS tad-pole は metric と dilaton の空間依存性をうまく調節して消すことができると考え、RR tad-pole cancelling のみ要請する。

以下では中でも最も重要な TypeI SO(32) 理論について説明する。10D N=1 の超対称性がある open string を含む理論はこの理論 (とその T-dual) のみである。より低次元や non-SUSY な理論を考えれば数多くの open string を含む理論を構成でき、現在でもその方面の研究は進行中である [35]。

さてその前に Chan-Paton factor について簡単に説明しておく。open string には $\sigma = 0, \pi$ に相

[7] 次章で述べる非摂動的 object である D-brane を考えるならば oriented な open string を導入できる。このときは D-brane の存在で SUSY が N=1 に減ると解釈できる。

当する boundary が (2 つ) 存在する。それぞれの boundary が電荷のようなものを帯びていると考えるのは large N gauge theory とのアナロジーから自然と思われ、具体的にはそれを

$$|boundary>=\sum_{i,j=1}^{N}\Lambda^{a}_{i,j}|i,j> \tag{2.37}$$

と表し、$\Lambda^{a}_{i,j}$ を Chan-Paton factor と呼ぶ。理論に Unitarity を要請すると $\Lambda^{a}_{i,j}$ は Hermite 行列であることが分かり、massless 場は U(N) ゲージ場となる。

また unoriented な理論では Ω で不変な state のみ考えるが、その時 Ω の作用は 2 つの boundary を入れ替えるので、Unitary 行列 $\gamma(\Omega)$ を用いて

$$\Omega:[\Lambda^{a}]\rightarrow\gamma(\Omega)[\Lambda^{a}]^{T}\gamma(\Omega)^{-1} \tag{2.38}$$

と記述される。$\Omega^{2}=1$ を要請すると、Schur の補題より $\gamma(\Omega)=\pm\gamma(\Omega)^{T}$ が従い、可能な $\gamma(\Omega)$ は (同型変換を同一視して) 次の 2 通りとなる。

$$\begin{aligned}\text{SO-projection}:\gamma(\Omega) &= \mathbf{1}_{N}\\ \text{Sp-projection}:\gamma(\Omega) &= \begin{pmatrix} 0 & i\mathbf{1}_{\frac{N}{2}} \\ -i\mathbf{1}_{\frac{N}{2}} & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

それぞれ、ゲージ群は SO(N),Sp(N) となる。

TypeI SO(32) 理論は TypeIIB 理論を Ω で twist した理論であるが、何故ゲージ群として SO(N),Sp(N) の中で SO(32) が選ばれるか tad-pole cancelling の立場で考えてみる。そこで cylinder,möbius,Klein の amplitude を求めることにする。

$$\begin{aligned}Z_{\text{cylinder}} &= V_{10}\int(\frac{dk}{2\pi})^{10}\int\frac{dt}{2t}Tr^{open}_{NS-R}[\frac{1}{2}\frac{1+(-1)^{F}}{2}e^{-2\pi tL_{0}}]\\ &= N^{2}\frac{V_{10}}{(2\pi)^{10}}\int_{0}^{\infty}\frac{dt}{8t}\frac{1}{(2t)^{5}}\frac{f_{3}(\tilde{q})^{8}-f_{2}(\tilde{q})^{8}-f_{4}(\tilde{q})^{8}}{f_{1}(\tilde{q})^{8}}\\ &= 2^{-7}N^{2}\frac{V_{10}}{(2\pi)^{10}}\int_{0}^{\infty}\frac{ds}{2\pi}\frac{f_{3}(q)^{8}-f_{4}(q)^{8}-f_{2}(q)^{8}}{f_{1}(q)^{8}}\end{aligned} \tag{2.39}$$

$$\begin{aligned}Z_{\text{möbius}} &= V_{10}\int(\frac{dk}{2\pi})^{10}\int\frac{dt}{2t}Tr^{open}_{NS-R}[\frac{\Omega}{2}\frac{1+(-1)^{F}}{2}e^{-2\pi tL_{0}}]\\ &= \mp N\frac{V_{10}}{(2\pi)^{10}}\int_{0}^{\infty}\frac{dt}{8t}\frac{1}{(2t)^{5}}\{\frac{f_{2}(\tilde{q})^{8}f_{4}(\tilde{q})^{8}}{f_{1}(\tilde{q})^{8}f_{3}(\tilde{q})^{8}}-\frac{f_{2}(\tilde{q})^{8}f_{4}(\tilde{q})^{8}}{f_{1}(\tilde{q})^{8}f_{3}(\tilde{q})^{8}}\}\\ &= \mp 2^{-1}N\frac{V_{10}}{(2\pi)^{10}}\int_{0}^{\infty}\frac{ds}{2\pi}\{\frac{f_{2}(q^{2})^{8}f_{4}(q^{2})^{8}}{f_{1}(q^{2})^{8}f_{3}(q^{2})^{8}}-\frac{f_{2}(q^{2})^{8}f_{4}(q^{2})^{8}}{f_{1}(q^{2})^{8}f_{3}(q^{2})^{8}}\}\end{aligned} \tag{2.40}$$

$$\begin{aligned}Z_{\text{Klein}} &= V_{10}\int(\frac{dk}{2\pi})^{10}\int\frac{dt}{2t}Tr^{closed}_{NS-R}[\frac{\Omega}{2}\frac{1+(-1)^{F_{L}}}{2}\frac{1+(-1)^{F_{R}}}{2}e^{-2\pi t(L_{0}+\tilde{L}_{0})}]\\ &= \frac{V_{10}}{(2\pi)^{10}}\int_{0}^{\infty}\frac{dt}{8t}\frac{1}{t^{5}}\frac{f_{3}(\tilde{q}^{2})^{8}-f_{2}(\tilde{q}^{2})^{8}-f_{4}(\tilde{q}^{2})^{8}}{f_{1}(\tilde{q}^{2})^{8}}\end{aligned}$$

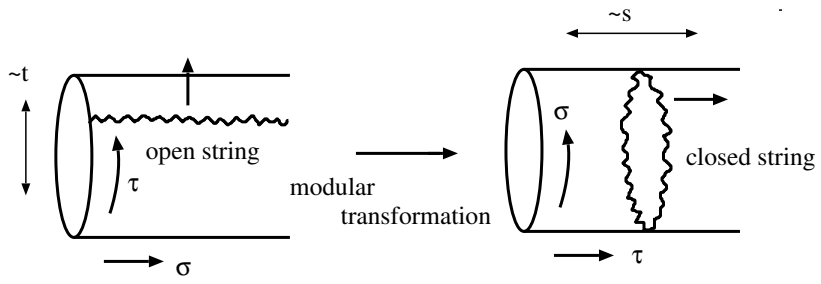

図 2.2: open string と closed string の対応 (modular 変換)

$$= \quad 2^3 \frac{V_{10}}{(2\pi)^{10}} \int_0^\infty \frac{ds}{2\pi} \frac{f_3(q)^8 - f_2(q)^8 - f_4(q)^8}{f_1(q)^8} \tag{2.41}$$

と計算される。ここで moduli 積分は $\tilde{q} = e^{-\pi t}$ をパラメーターとしていて、modular 変換 (付録 A 参照) した後のパラメーターを $q = e^{-s}$ としている (図 2.2 参照)。この積分の measure $\int \frac{dt}{2t}$ は、[1] で詳しく議論されているように、Coleman-Weinberg の公式(自由粒子の立場で vacuum amplitude を求めたもの) と比較して定まる。また cylinder,möbius,Klein それぞれに対して modular 変換を $s = \frac{\pi}{t}, s = \frac{\pi}{4t}, s = \frac{\pi}{2t}$ ととっている。$f_1(q)$ などの関数については付録 A 参照。(2.40) 式の符号 $\mp$ の $-$ は SO-projection、$+$ は Sp-projection に対応する。また L_0 は zero energy を引いたものを略記したものであることに注意。

注意すべき点は、超対称性によってこれらの amplitude はすべて 0 となっていることである。しかし tad-pole cancelling は closed string の NSNS-sector,RR-sector に対してそれぞれ成立たないといけない。そこで発散を生み出す q について最低次 (closed string massless state に対応) を取り出すと、

$$Z_{\text{cylinder}} + Z_{\text{möbius}} + Z_{\text{Klein}} \sim -\frac{V_{10}}{(2\pi)^{10}} 2^{-7} (N \mp 32)^2 \int_0^\infty \frac{ds}{2\pi} \times 16 \tag{2.42}$$

となり、確かにゲージ群が $\mathrm{SO}(32)$ のときのみ tad-pole cancelling が起こることが分かる。これは、Green-schwarz 機構による anomaly 相殺によって得られる条件と同じである。

以上のようにして TypeI $\mathrm{SO}(32)$ 理論は tad-pole cancelling の条件を満たす string theory であることが分かった。TypeI $\mathrm{SO}(32)$ 理論の massless spectrum は closed string sector での Ω の作用

$$\Omega : \alpha^\mu_{-n} \to \tilde{\alpha}^\mu_{-n} \ , \ \psi^\mu_{-r} \to \tilde{\psi}^\mu_{-r} \tag{2.43}$$

と open string sector での作用 (light cone gauge)

$$\Omega : \alpha^\mu_n \to (-1)^n \alpha^\mu_n \ , \ \psi^\mu_r \to (-1)^r \psi^\mu_r \ , \ |0>_{NS} \to -i|0>_{NS} \tag{2.44}$$

を考慮して、次のようになり Het $\mathrm{SO}(32)$ と同じである。

$$\text{TypeI } \mathrm{SO}(32) : \{\phi, B'_{\mu\nu}, G_{\mu\nu}\}, A^a_\mu \tag{2.45}$$

ここで TypeIIB の RR-field $\chi, A^+_{\mu\nu\rho\sigma}$ と NS-field $B_{\mu\nu}$ は project out されていることに注意。

2.7 T-duality

ここでは超弦理論の duality の中で CFT を用いた摂動論でも理解できる T-duality について説明する。次章で述べるようにこの T-duality は非摂動的にも正しいと考えられている超弦理論の対称性であり、様々なところで重要な役目を担う。

T-duality とは、半径 R に S^1 コンパクト化した TypeIIA 理論を、半径 $\frac{\alpha'}{R}$ に S^1 コンパクト化した TypeIIB 理論に結びつける duality であり、つまり S^1 コンパクト化すると TypeIIA と TypeIIB の区別がつかなくなることを意味する。さらに T^m にコンパクト化すると T-duality group $SO(m,m,\mathbf{Z})$ に duality が拡大されるが、ここでは S^1 コンパクト化した場合を具体的に見てみる。S^1 コンパクト化方向の boson 場を X^9 とすると、次のように mode 展開される。

$$\begin{aligned} X^9(z,\bar{z}) &= X^9_L(z) + X^9_R(\bar{z}) \\ X^9_L(z) &= \frac{x^9}{2} - i\frac{\alpha'}{2}p_L\ ln(z) + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{m\neq 0}\frac{1}{m}\alpha^9_m z^{-m} \\ X^9_R(\bar{z}) &= \frac{x^9}{2} - i\frac{\alpha'}{2}p_R\ ln(\bar{z}) + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{m\neq 0}\frac{1}{m}\tilde{\alpha}^9_m \bar{z}^{-m} \end{aligned} \tag{2.46}$$

境界条件 $X^9(\tau,0) = 2\pi wR + X^9(\tau,2\pi)$ を課し、コンパクト化による momentum の量子化 $p^9 = \frac{1}{2}(p_L + p_R) = \frac{n}{R}$ を考慮すると

$$p_L = \frac{n}{R} + \frac{wR}{\alpha'}\ ,\ p_R = \frac{n}{R} - \frac{wR}{\alpha'} \tag{2.47}$$

となり、w は winding 数と解釈される。

spectrum は old covariant method を用いると、

$$\begin{aligned} m^2 &= \frac{n^2}{R^2} + \frac{(wR)^2}{\alpha'^2} + \frac{2}{\alpha'}(N + \tilde{N} - 2) \\ 0 &= nw + N - \tilde{N} \end{aligned} \tag{2.48}$$

となる。これから spectrum が $R \to \frac{\alpha'}{R}, n \to w, w \to n$ の変換で不変となることが分かる。これが T-duality である。nonzero mode も含めて次のように T-duality を記述できる。

$$\text{T-dual}: X^9_L(z) \to X^9_L(z)\ ,\ X^9_R(\bar{z}) \to -X^9_R(\bar{z}) \tag{2.49}$$

以上は bosonic string で説明したが、超弦理論に対しての T-duality は N=1 SCFT を保つようにさらに次のように fermion 場の変換を加えればよい[8] 。

$$\text{T-dual}: \psi^9(z) \to \psi^9(z)\ ,\ \tilde{\psi}^9(\bar{z}) \to -\tilde{\psi}^9(\bar{z}) \tag{2.50}$$

[8] 次章で見るように、この fermion 場の変換の必要性は D-brane の存在を考えるとより自然に導かれる。

このように T-duality を定義するともはや S^1 コンパクト化しなくてもよいことに注意。さて、このとき right-mover の R-sector vertex はどのように変換されるだろうか。上式のように right-mover の $\tilde{\psi}^9(\bar{z})$ のみ符号が反転するが、bosonization すると $H_4(\bar{z}) \to -H_4(\bar{z})$ を意味し R-sector vertex の chirality は逆転する。つまり TypeIIA が TypeIIB に、TypeIIB が TypeIIA に変換されたことを意味する。以上のようにして TypeII 理論の T-duality は摂動論的に示された。

全く同様にして、T-duality は Type0A を Type0B に、Type0B を Type0A に変換することから Type0 理論の T-duality も示される。

第3章　超弦理論の非摂動的性質

前章では、超弦理論の摂動的定式化について見たが、ここ5年間で盛んに研究されてきた超弦理論の非摂動的性質についてここでは簡単に説明することにする。非摂動的性質の基礎として「D-brane」という超弦理論のソリトンと「string duality(超弦理論の双対性)」を取り上げる。これらのなかで後の議論で必要になる部分に重点を置き、そうでないところはごく簡単に触れる程度にする。

3.1　D-brane,Orientifold

この節では、TypeII理論のRR電荷を帯びたBPSソリトンであるD-brane[5][6]の存在をopen stringとその低エネルギー理論の立場で説明する。なおclosed stringの立場でのD-braneの記述(boundary state)については次章で述べる。

3.1.1　RR-vertex

TypeII理論のRRsectorのvertex operatorについてまず考える[4]。(2.28)のvertexをleftとrightで組み合わせて、TypeIIBの$(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$pictureのRR-vertexは次のように書ける。

$$V_{RR}^{(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}=e^{-\frac{\phi}{2}-\frac{\tilde{\phi}}{2}}S^{\alpha}\tilde{S}^{\beta}(\Gamma^{[\mu_1,\cdots,\mu_{p+2}]}C)_{\alpha\beta}F_{\mu_1,\cdots,\mu_{p+2}}(X) \tag{3.1}$$

TypeIIAにするには$S^{\alpha}\tilde{S}^{\beta}$を$S^{\alpha}\tilde{S}^{\tilde{\beta}}$のようにleft,rightのspin operatorがchiralityを異なるようにすればよい。またΓ行列の性質からTypeIIA,TypeIIBそれぞれで可能なpの値は$p=even,p=odd$であり、$F_{\mu_1,\cdots,\mu_{p+2}}(X)$と$F_{\mu_1,\cdots,\mu_{8-p}}(X)$はHodge dualの関係にあり、$p\to(6-p)$という変換は電場を磁場に変える変換を意味する。

BRST不変性もしくは$G_0|phys>=0$の条件により、(p+2)form field $F_{\mu_1,\cdots,\mu_{p+2}}(X)$は次の運動方程式を満たすことが分かる。

$$dF=0\ ,\ d*F=0 \tag{3.2}$$

従って、Fはfield strengthと解釈され、ゲージ場ではない。このことは、NSNS-vertexと対照的である。NSNS 2-form場を例にとるとvertexは、

$$V_{NSNS}^{(-1,-1)}=e^{-\phi-\tilde{\phi}}\psi^{\mu}\tilde{\psi}^{\nu}B_{\mu\nu}(X) \tag{3.3}$$

となり、この場合はゲージ場となっている。このNSNS-vertexは(F-)stringのworld sheetが2-formゲージ場に直接結合していることを意味し、つまりstring自体が2-formゲージ場の電荷を担っていることを意味する。

逆に言うとRR-vertexの場合はstring自体がRR場の電荷を持っていないことを意味する。それではRR電荷を帯びた状態というのはTypeII理論には存在しないのだろうか。

3.1.2 D-braneの記述

前節でみたようにRR電荷を帯びた状態は摂動的にTypeII理論を扱う限りでは存在しない。しかしながら、低エネルギーの超重力理論ではRR電荷を帯びた状態を古典解として記述することができる。RR-(p+1)formに結合する状態に対応する古典解は、(p+1)次元方向に広がったobjectでblack p-brane solutionと呼ばれそのなかで特別なもの(すなわち(Mass)=(charge)を満たすもの)はBPS状態となることが分かる[76][23]。

従って、TypeII理論にはソリトンとしてRR電荷を帯びた状態が存在するはずである。

そのような状態をstring理論として記述するものとしてPolchinsky[5][6]は「D-brane」と呼ばれるものを提唱した。通常open stringには、Neumann境界条件を採用する。それは、Dirichlet境界条件を混ぜると10次元Lorentz対称性を破るからであった。しかしながら、初めからソリトンを導入するならLorentz対称性を破るのは当然である。そこで、$x^0 \sim x^p$方向についてNeumann境界条件とし、$x^{p+1} \sim x^9$方向についてはDirichlet境界条件とするようなopen stringの端点をD-braneとして定義するのである。それでは、平坦な時空でのD-braneの記述について具体的に見てゆく。

境界条件$\partial_\sigma X^\mu(\tau,0) = \partial_\tau X^i(\tau,0) = 0$ $(\mu = 0 \sim p, i = p+1 \sim 9)$を解いて、boson場をmode展開すると

$$\begin{aligned} X^\mu(z,\bar{z}) &= x^\mu - i\frac{\alpha'}{2}p^\mu ln|z|^2 + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{m\neq 0}\frac{1}{m}\alpha_m^\mu(z^{-m}+\bar{z}^{-m}) \\ X^i(z,\bar{z}) &= a^i + \frac{i}{2\pi}(b^i-a^i)ln(\frac{z}{\bar{z}}) + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{m\neq 0}\frac{1}{m}\alpha_m^\mu(z^{-m}-\bar{z}^{-m}) \end{aligned} \tag{3.4}$$

となる。このopen stringは、Dirichlet方向にa^iからb^iまで伸びていると解釈される。

fermion場については、Neumann境界条件でもDirichlet境界条件でも同じなので略す。

このようにTypeII理論にDp-braneという非摂動的ソリトンを導入することができる。ここで、前節で見たようにDp-braneが正しくclosed stringを結合するためにはTypeIIA,Bそれぞれで$p = even, p = odd$となり[1]、またDp-braneとD(6-p)-braneは電荷と磁荷の関係(electric-magnetic dual)にある。

またTypeIについても全く同様にDp-braneを定義できるが、この場合には存在するRR場が$B'_{\mu\nu}$のみなので許されるpの値は$p = 1,5$であるが、後に述べる理由でD9-braneも存在する。Heterotic理論では、もともとRR場がないのでDp-braneは存在しないと考えられる。

次に、T-dualのDp-braneへの作用を考える。前に見たように、bulkのclosed string sectorはT-dualでTypeIIAからTypeIIBへ変換される。この変換は、

$$X_L^\mu(z) \to X_L^\mu(z)\ ,\ X_R^\mu(\bar{z}) \to -X_R^\mu(\bar{z}) \tag{3.5}$$

[1] このことは次章でboundary stateを使った議論でも確かめることができる。

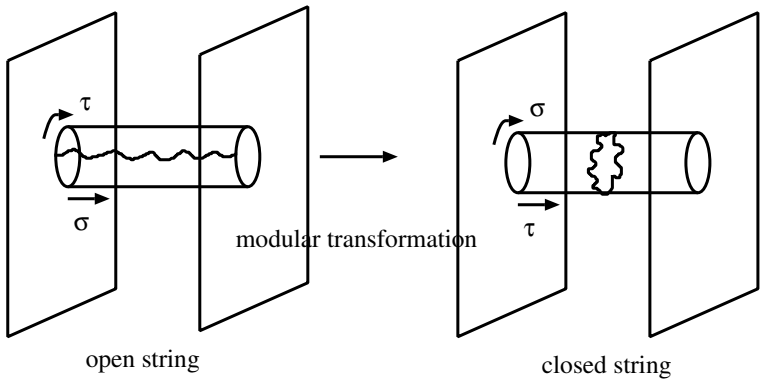

図 3.1: D-brane 間の cylinder amplitude

と書けたことを思い出そう。D-brane の open string に対しても次のように同様に作用すると考えられる。

$$\begin{aligned} X^\mu(z,\bar{z}) = X^\mu_L(z) + X^\mu_R(\bar{z}) \ &\rightarrow \ \hat{X}^\mu(z,\bar{z}) = X^\mu_L(z) - X^\mu_R(\bar{z}) \\ X^i(z,\bar{z}) = X^i_L(z) - X^i_R(\bar{z}) \ &\rightarrow \ \hat{X}^i(z,\bar{z}) = X^i_L(z) + X^i_R(\bar{z}) \end{aligned} \tag{3.6}$$

つまり、Dirichlet 条件と Neumann 条件が入れ換わり、Dp-brane はそれと平行な方向に T-dual とると D(p-1)-brane となり、逆の方向に T-dual とると D(p+1)-brane となる。これは、TypeII 理論では存在する Dp-brane の p の値が 2 飛びであることと consistent である。

さてそれでは最後に、このように定義された D-brane が目的の性質、すなわち RR 電荷を帯びていることを確かめる。そのためには次の図 3.1 のような D-brane 間を結ぶ open string の cylinder amplitude を計算すればよい。D-brane が RR 電荷を帯びているならば互いに斥力が働くはずである。実際には以下にみるように graviton+dilaton の媒介する引力 (重力のようなもの) と相殺して、D-brane 間には力が働かないことが分かる。これは D-brane が BPS 状態であって、安定な存在であることを意味する。

$$\begin{aligned} Z_{\text{cylinder}} &= 2V_{p+1}\int\frac{(dk)^{p+1}}{(2\pi)^{p+1}}\int_0^\infty\frac{dt}{2t}Tr^{open}_{NS-R}[\frac{1+(-1)^F}{2}\ e^{-2\pi tL_0}] \\ &= 2V_{p+1}\int_0^\infty\frac{dt}{2t}(8\pi^2\alpha' t)^{-\frac{p+1}{2}}e^{-\frac{ty^2}{2\pi\alpha'}}\frac{f_3(\tilde{q})^8-f_2(\tilde{q})^8-f_4(\tilde{q})^8}{2f_1(\tilde{q})^8} \end{aligned} \tag{3.7}$$

ここで、V_{p+1} は D-brane の world volume の体積とし、また $y^i = b^i - a^i, \tilde{q} = e^{-\pi t}$ とした。

さてこの open string の cylinder amplitude の特別な moduli $t \rightarrow 0$ すなわち cylinder が伸びきった極限を考えると、cylinder を 90 度回転して closed string の tree amplitude とみなしたときに

massless 場のみ伝播する。RR 電荷や重力はその部分から読み取れるので、付録 A の公式を用いて cylinder amplitude を modular 変換 (=90 度回転) してから massless 場の寄与を読み取ると、

$$\begin{aligned} Z_{\text{cylinder}} &= Z_{NSNS} + Z_{RR} \\ Z_{RR} &= -Z_{NSNS} \sim -V_{p+1}(2\pi)(4\pi\alpha')^{3-p} G_{9-p}(y) \\ G_{9-p}(y) &\equiv \frac{1}{4}\pi^{\frac{p-9}{2}}\Gamma(\frac{7-p}{2})|y|^{p-7} \end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\tag{3.9}$$

となり、超重力理論の結果 $Z_{RR}^{SUGRA} = -2V_{p+1}\kappa_{10}^2\mu_p^2 G_{9-p}(y)$ と比較して

$$\mu_p^2 = \frac{\pi}{\kappa_{10}^2}(4\pi^2\alpha')^{3-p} \tag{3.10}$$

と RR 電荷を帯びていることが分かる[2] 。また同様に Dp-brane の tension τ_p は

$$\tau_p^2 = \frac{\pi}{\kappa^2}(4\pi^2\alpha')^{3-p} \tag{3.11}$$

となる。但し $\kappa = e^{\phi}\kappa_{10}$ は 10 次元の重力定数である。

またこれらから次の超重力理論の古典解の BPS 条件を満たすことも分かる。

$$\tau_p = e^{-\phi}\mu_p \tag{3.12}$$

一般に string 理論では、$\kappa_{10} \to e^{-\rho}\kappa_{10}$, $\phi \to \rho + \phi$ の scaling による不定性があるが、この自由度を次の条件 (' くりこみ条件') で fix する convention[1][4] が多くの文献で用いられている。

$$\tau_{Dstring} = \tau_{Fstring} \cdot e^{-\phi} \tag{3.13}$$

これを用いると次のように κ_{10}, τ_p が決まる。

$$\begin{aligned} \kappa_{10}^2 &= \frac{1}{2}(2\pi)^7\alpha'^4 \\ \tau_p &= \frac{1}{e^{\phi}(2\pi)^p\alpha'^{\frac{(p+1)}{2}}} \end{aligned} \tag{3.14}$$

さてこのようにして D-brane が期待されたように RR 電荷を帯びている BPS ソリトンであることが分かった。さらに D-brane は最小単位の RR 電荷を帯びていることも分かる。実際、Dirac の電荷の量子化条件 $q_p q_{6-p} \in 2\pi\mathbf{Z}$ を思い出すと、$q_p q_{6-p} = 2\pi$ ならば電荷、磁荷を帯びる最小単位であることを意味するが、この電荷の定義に用いたゲージ場の normalization を μ_p の定義と同じになるように補正すれば[3] 、この式が満たされることが分かる。

最後に次元の違う D-brane 間を結ぶ open string Dp-Dp'string について述べる。Dp-Dp'string は、それぞれの端点 (=D-brane) の境界条件の種類で NN, ND, DN, DD の 4 種類の sector が存

[2] 但しこの計算は、(p+1)form 場の kinetic term を $\mathcal{L} = -\frac{1}{4\kappa_{10}^2}|F_{(p+2)}|^2 + \cdots$ と normalize している。

[3] 電荷 q_p の定義では (p+1)form 場の kinetic term を $\mathcal{L} = -\frac{1}{2}|F_{(p+2)}|^2 + \cdots$ と normalize している。

在する。まず boson 場は、NN, DD 方向では今までどおり mode は整数で、ND, DN では半整数となることが実際に境界条件を満たすように mode 展開することで分かる。一方 fermion 場については NS-sector と R-sector があるが、NN, DD 方向では NS-sector は半整数、R-sector は整数 moding となり ND, ND 方向では、その逆になる。実際に spectrum を求めるにはそれらの moding から従う zero energy[4] が次のようになることと、また GSO-projection を通常どおり課すことに注意する。

$$\begin{aligned} & (L_0 - a_{sector})|phys>= 0 \\ -a_{NS} &= (8-q)(-\frac{1}{24}-\frac{1}{48})+q(\frac{1}{48}+\frac{1}{24}) = -\frac{1}{2}+\frac{q}{8} \\ -a_R &= (8-q)(-\frac{1}{24}+\frac{1}{24})++q(\frac{1}{48}-\frac{1}{48}) = 0 \end{aligned} \tag{3.15}$$

ここで $q = |p - p'|$ とした。

この結果から次のように Dp-Dp'system の性質が分かる。

- D(p+2)-Dp system :このときは、NS-sector に tachyon が生じるので不安定となる。実際、超対称性の代数の考察で $|p - p'|$ が 4 の倍数のときのみ $(\frac{1}{4})$ SUSY が保たれることが分かりこの場合は超対称性を破っている。結果として D(p+2) と Dp は束縛状態をつくり超対称性が回復する。このとき後述の D-brane の WZ-term $\int F \wedge C_{D0}$ を考慮すると D(p+2) 上に単位磁気 flux が貫入している状態ともみなせる。

- D(p+4)-Dp system :このときは orientation も考えると 4 つの boson,fermion が massless spectrum として存在し、超対称性を保つ。この 4 つの boson 場 (hyper multiplet) は、Dp を D(p+4)brane 上のゲージ理論の instanton とみなしたときの moduli と解釈される [13]。
  特に D5-D1 system については Black Hole のエントロピーとの関係で多くの研究がなされている。

- D(p+6)-Dp system :この場合は、NS-sector はすべて massive mode のみとなり R-sector からの massless fermion のみ存在し超対称性を破っている。また cylinder amplitude の計算から斥力が働くことが分かる。

- D(p+8)-Dp system :この場合は、massless spectrum は R-sector の fermion (それぞれの orientation に対して left-moving fermion が 1 つずつ) のみだが、代数の考察では超対称性を保つという奇妙なことが起こる。この問題は [31] で次のように解決された。すなわち D(p+8)-Dp system は特殊で、Dp-brane が D(p+8)-brane の壁を通り抜けると F-string が生成するという現象が boundary state を用いた議論で分かり、その効果をとり入れると massless spectrum は boson,fermion ともに存在しないことが分かるのである。

[4] boson では、整数と半整数 moding に対してそれぞれ $-\frac{1}{24}, \frac{1}{48}$、fermion ではそれぞれの moding に対して $\frac{1}{24}, -\frac{1}{48}$ となる。

3.1.3 D-brane 上の effective field theory

D-brane は、open string の端点として定義されることを前節で見たが、ここでは低エネルギー極限 ($E \ll (\alpha')^{-\frac{1}{2}}$ もしくは $\alpha' \to 0$) で D-brane 上の理論がどのように記述されるか見たい。

N 枚の D-brane が重なっている場合を考える。この時には、Chan-Paton factor Λ^a が導入される。massless な vertex operator は

$$V_{NS}^{(-1)} = \Lambda^a e^{-\phi}\psi^\mu e^{ikX} \ , \ V_R^{(-\frac{1}{2})} = \Lambda^a e^{-\frac{\phi}{2}} S_\alpha e^{ikX} \tag{3.16}$$

となる。D-brane に付着する open string には Dirichlet 方向の bosonic zeromode はないので、これらの vertex に対応する場は (p+1) 次元の D-brane 上の理論としての massless 場と思われる。$N \times N$ の Chan-Paton factor を考慮すると超対称性 U(N) ゲージ理論が D-brane 上に open string によって作り出されることになる。具体的には massless 場はゲージ場 A_μ^a と D-brane の位置の moduli に相当する adjoint scalar ϕ_i^a そして fermion λ_α^a から構成され、10 次元の N=1 SUYM の dimensional reduction となっている。

また T-dual の作用を考えると、ゲージ場と scalar 場を入れ替えることが分かる。つまり T-dual 変換は wilson line を D-brane に transverse な座標に変換するのである。

この D-brane 上の理論は低エネルギー極限で、closed string による相互作用 (重力) は irrelevant になるので bulk と切り離されることが分かる[5] 。従って D-brane 上の U(N) ゲージ理論のみを取り出して議論しても consistent な理論となっているはずで、その研究は string 理論で超対称性ゲージ理論を理解することにつながる。

また、D-brane 上の effective action は 2 次元 σ-model が conformal 不変になるすなわち β 関数が 0 となることを要請して求めることができる。この方法で求めると、α' について最低次[6] かつ $F_{\mu\nu}$ の微分について最低次の精度[7] で、次のような Dirac-Born-Infeld 型の作用 (DBI action) が得られる [7]。

$$\begin{aligned} S &= S_{DBI} + S_{WZ} \\ S_{DBI} &= -\mu_p \int (d\xi)^{p+1} e^{-\phi} \{ Tr\sqrt{-det(G_{\mu\nu} + B_{\mu\nu} + 2\pi\alpha' F_{\mu\nu})} + O([\phi_\mu, \phi_\nu]^2) \} \end{aligned} \tag{3.17}$$

ここで、$G_{\mu\nu}$ は 10 次元の metric を world volume に制限したものであり、$B_{\mu\nu}$ も同様。Wess-Zumino term S_{WZ} については後に述べる。この作用で、$\alpha' \to 0$ の極限をとると確かに U(N) ゲージ理論の作用となる。

また $O([\phi_\mu, \phi_\nu]^2)$ の項は、D-brane 間の距離が近い時には D-brane の座標が互いに非可換になることを意味する。D-brane 間の距離が離れているとこの potential を最小にするために $[\phi_\mu, \phi_\nu] = 0$ と可換になり同時対角化でき、その N 自由度の flat direction は N 枚の D-brane の座標を表す。この項の存在は、ゲージ理論の F^2 の項の T-dual 変換の操作によって理解できる。

---

[5] 場の理論の tree level で見積もると $\kappa_{p+1} \sim (\alpha')^{\frac{p-1}{4}}$, $g_{YM} \sim (\alpha')^{\frac{p-3}{4}}$ となり確かに $\alpha' \to 0$ の極限で $\kappa \ll g_{YM}$ となる。

[6] 但し $G = 1, B = 0$ つまり flat な back ground では α' については all order で成立する。

[7] この order を求める時に scalar 場は $[\phi_\mu, \phi_\nu] \sim F_{\mu\nu}$ と勘定する。

上の DBI action では $B_{\mu\nu}+2\pi\alpha' F_{\mu\nu}$ と B 場とゲージ場の field strength が同時に現われているが、このことは string world sheet の議論から次のように分かる。string world sheet 上の作用は、

$$S=\frac{1}{4\pi\alpha'}\int_{\Sigma}dz^2\sqrt{g}(g^{ab}G^{\mu\nu}(X)+i\epsilon^{ab}B^{\mu\nu}(X))\partial_a X^{\mu}\partial_b X^{\nu}+i\oint_{\partial\Sigma}dX^{\mu}A_{\mu} \tag{3.18}$$

となり、これは次のゲージ変換で不変である。

$$\delta A=-\frac{\epsilon}{2\pi\alpha'}\ ,\ \delta B=d\epsilon \tag{3.19}$$

従って、effective action には必ず $B_{\mu\nu}+2\pi\alpha' F_{\mu\nu}$ の形として現われるのである。

また、これらのような、Dirac-Born-Infeld 型の作用以外に、D-brane が RR 電荷を帯びていることを意味する項 Wess-Zumino term(WZ-term) が存在し、次式で与えられる [83][85]。

$$S_{WZ}=i\mu_p\int_{Dp}\sum_{q<p}C_{(q+1)}\wedge Tre^{B+2\pi\alpha' F}\wedge\sqrt{\frac{\hat{A}(4\pi^2\alpha' R_T)}{\hat{A}(4\pi^2\alpha' R_N)}} \tag{3.20}$$

但し、R_T, R_N は、tangent,normal bundle の曲率である。また $\hat{A}$ は A-roof genus と呼ばれるもので、展開すると

$$\begin{aligned}\hat{A}(R) &= 1-\frac{1}{24}p_1(R)+\frac{7p_1(R)^2-4p_2(R)}{5760}+\cdots \\ p_1(R) &= -\frac{1}{8\pi^2}TrR^2\ ,\ p_2(R)=\frac{1}{(2\pi)^4}[\frac{1}{8}(TrR^2)^2-\frac{1}{4}TrR^4]\end{aligned} \tag{3.21}$$

となる。また $Tre^{B+2\pi\alpha' F}$ の項は Chern character を用いて

$$ch(F)=Tre^{2\pi\alpha' F} \tag{3.22}$$

と書ける。但し、B 場と F 場はゲージ変換で混じるので簡単のため以下では $B=0$ とする。

この WZ-term の導出を簡単に説明すると次のようになる。flat な時空の重なった Dp-brane($p<9$) 上の fermion は non-chiral なのでゲージ対称性や重力の anomaly は生じない。しかし、(i)normal bundle が非自明な場合、もしくは (ii) 2 種の Dp-brane が一部で重なった状況 (I-brane という) を考える場合、には chiral fermion zeromode が存在して anomaly が生じる可能性がある。そのような anomaly の存在は理論に矛盾を引き起こすので、anomaly が 0 となるように要請して WZ-term を定めたい。

簡単のために normal bundle が自明な場合を考え、(ii) の場合の考察 [83] から WZ-term の導出する方法の概略を述べる。それぞれの Dp-brane が N_1, N_2 枚あるとする。この時、chiral fermion が存在するのは、up to T-duality で、(a)D5-brane どうしが 1-brane で交わる、(b)D7-brane どうしが 5-brane で交わる、 2 通りのみである。それぞれ (a')D1-D9,(b')D5-D9 と T-dual で同一視でき、fermion はそれぞれ (a)left-moving,(b)**2** 表現、に属し確かに chiral である。orientation を考

えると $(\bar{N}_1, N_2), (N_1, \bar{N}_2)$ のゲージ群の表現に属す chiral fermion[8] が得られたことになる。さてこのとき Dp-brane の交点 ($\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \Sigma$ と置く) におけるゲージ変換と一般座標変換による anomaly は次に通り (細かい係数等は略す)。

$$\delta S_{\text{fermion}} \sim \int_{\Sigma} [ch(F_{(\bar{N}_1,N_2)})ch(F_{(N_1,\bar{N}_2)})\hat{A}(R)]^{(1)} \tag{3.23}$$

ここで、$*^{(1)}$ は anomaly の標準的記述 (Wess-Zumino descent method) において

$$\omega = d\omega^{(0)} \ , \ \delta\omega^{(0)} = d\omega^{(1)} \tag{3.24}$$

のように今考えている変換で変分をとって微分形式の次数を下げる操作を表す。

一方 bulk の RR 場からくる D-brane 上の anomaly(Inflow) は次のように求まる (Σ_2 も同様)。まず、考えている対称性変換で RR 場 C は次のように anomalous(Green-Schwarz mechanism) に変換されるとする。但し field strength H はゲージ不変であることを用いる。

$$\delta C \sim Y^{(1)}\delta(\Sigma_1) \ \leftrightarrow \ H = dC - Y^{(0)}\delta(\Sigma_1) \tag{3.25}$$

また D-brane の WZ-term を次のように置くと (Σ_2 も同様) 、H の運動方程式が求まる。

$$S_{WZ} \sim \int_{\Sigma_1} C \wedge \tilde{Y} \ \leftrightarrow \ d * H = \delta(\Sigma_1)\tilde{Y}$$

さて、H と $*H$ を入れ換える対称性 (electro-magnetic symmetry) を課すと、$Y = \tilde{Y}$ が分かる [85]。従って、bulk の RR 場による WZ-term の anomalous 変換は

$$\begin{aligned} \delta S_{WZ} &\sim \int_{\Sigma} [Y^{(1)}(\Sigma_1)Y(\Sigma_2) + Y^{(1)}(\Sigma_2)Y(\Sigma_1)] \\ &= \int_{\Sigma} [Y(\Sigma_1)Y(\Sigma_2)]^{(1)} \end{aligned} \tag{3.26}$$

となる。そこで、$Y(\Sigma_1) \sim ch(F(\Sigma_1))\sqrt{\hat{A}(R(\Sigma_1))}$ のように選べば、anomaly の和：式 (3.23)+式 (3.26) が 0 となり矛盾がなくなる。このようにして式 (3.20) が理解できる。

3.1.4 TypeI 理論の T-dual と Orintifold

今までは TypeII 理論の D-brane について主に考えてきたので、ここでは TypeI 理論について目を向けてみる。

TypeI 理論には、$B'_{\mu\nu}$ の磁荷、電荷を帯びる D-brane として D1,D5 が存在する。また前章でみた TypeI 理論の tadpole canceling でゲージ群が SO(32) に決まったことを思い出すと、cylinder の boundary には NS-tadpole を相殺する RR-tadpole の源があると考えるのが自然で [1]、それは D9-brane とみなせる。つまり D9-brane が３２枚存在するので SO(32) のゲージ群をもつと解釈できる。この時、D9-brane と結合する RR 場 $F_{(10)} = dA_{(9)}$ は物理的自由度がない (propagate しない) ことに注意。

[8] ここで重要なのは、２次元、６次元の Weyl 表現は self dual なので互いに dual なゲージ群の表現に属す chiral fermion をあわせても依然として chiral なゲージ理論となっていることである。

さてそれでは、TypeI 理論の T-duality を考える。TypeI 理論は TypeIIB 理論を Ω で twist した理論であるが、半径 R にコンパクト化した x^9 方向に T-dual をとると Ω は次のような作用に変わる。

$$\Omega : [X_L^9(z) - X_R^9(\bar{z})] \ \rightarrow [X_R^9(\bar{z}) - X_L^9(z)] \tag{3.27}$$

つまり、x^9 と $-x^9$ が orientation を逆にする作用を伴って同一視され、$x^9 = 0, \pi R'$ に鏡のようなものができる。これを orientifold plane(O-plane) と呼ぶ。この時 $0 < x^9 < \pi R'$ では Ω は local な projection ではないので、TypeIIA 理論と同様になる。このような理論を TypeIA(or TypeI') と呼び、bulk には D0,D2,D4,D6,D8-brane が存在する。D8-brane は、もともとあった３２枚の D9-brane を T-dual し鏡像の半分を除いて全部で１６枚存在する。もっと一般に (9-p) 回 T-dual をとると Op-plane が 2^{9-p} 枚存在し、Dp-brane が１６枚存在するような TypeIIA もしくは TypeIIB 理論となる。

Op-plane の帯びる RR 電荷を μ_p' とすると、TypeI の tadpole cancellation の結果を用いて

$$\begin{aligned} \mu_p' \times 2^{9-p} + \mu_p \times 16 = 0 \\ \text{よって} \ \ \mu_p' = -2^{p-5}\mu_p \end{aligned} \tag{3.28}$$

となる。

このことから、Op-plane の電荷のみならず、tension も負であることが分かる。

また closed string と O-plane の結合 [1][26] は

$$\begin{aligned} S &= -\mu_p' \int (d\xi)^{p+1} e^{-\phi} \sqrt{-det(G_{\mu\nu})} + S_{WZ} \\ S_{WZ} &= i\mu_p' \int \sum_{q<p} C_q \wedge \sqrt{\frac{\hat{L}(\pi\alpha' R_T)}{\hat{L}(\pi\alpha' R_N)}} \end{aligned} \tag{3.29}$$

で与えられることが知られている。この WZ-term は、string amplitude の計算から文献 [26] で求められたものである。Op-plane には D-brane と違って open string が付着できないためゲージ場は存在せず、力学的 object ではないことに注意。ここで、$\hat{L}$ は L-roof genus と呼ばれ、展開すると

$$\hat{L}(R) = 1 + \frac{1}{3}p_1(R) + (-\frac{1}{45}p_1(R)^2 + \frac{7}{45}p_2(R)) + \cdots \tag{3.30}$$

となる。

最後に TypeI 理論の D5-brane について触れておく。D5-brane は D9-brane の作る SO(32) のゲージ理論の立場では small instaton とみなすことができる [13]。このことは、D-brane の WZ-term $\sim \int_{D9} F \wedge F \wedge C_{D5}$ から理解できる。従って、D5-D9 string による hyper multiplet は instanton の moduli を記述するはずで、数学で知られている instanton の moduli space の次元と一致するには D5-brane の Chan-Paton factor は Sp-projection でなくてはならないことが分かる。またそのことは、D5-D9 の vertex operator の考察からも示される [1]。

以上をまとめると、TypeI の N 枚の D5-brane 上には Sp(N) のゲージ理論が存在することが分かった。また D1-brane は D9-brane と同じ SO(N) のゲージ理論となる。これらの結果は T-dual をとっても同じで、(SO-projection の)Op-plane に N 枚の D(p-4)-brane が近づくと、Sp(N) のゲージ理論となる。

3.2 String duality

ここでは、超弦理論の非摂動的性質の中で最も重要な String duality について触れたい。String duality 自体はこの論文の趣旨ではないので、非常に簡潔に String duality の概要を述べた後、7 章で議論する安定な非 BPS 状態の解析において重要な役割を担う TypeI-Heterotic duality と IIA/K3-Heterotic duality を特に取り上げて説明する。

3.2.1 String duality の概要

String duality とは、摂動的には異なる 2 つの超弦理論を非摂動的な観点で同一視することを意味する。代表的例は、前章で既に見た S^1 コンパクト化した TypeIIA と TypeIIB 理論を同一視する T-duality と TypeIIB 理論の F-string と D-string を入れ換える対称性すなわち S-duality[23] である。後者は、TypeIIB の超重力理論の立場で次のように理解できる。超重力理論の作用は Einstein frame で、

$$\begin{aligned} S^E_{IIB} &= \frac{1}{2\kappa_{10}^2}\int (dx)^{10}\sqrt{-G_E}(R_E - \frac{\partial_\mu\bar{\tau}\partial^\mu\tau}{2(Im\tau)^2} - \frac{1}{2}M_{ij}H^i\cdot H^j - \frac{1}{2}|F_{(5)}|^2) \\ &\quad -\frac{\epsilon_{ij}}{4\kappa_{10}^2}\int C_4\wedge H^i\wedge H^j \end{aligned} \tag{3.31}$$

但し、ここで

$$\begin{aligned} \tau &= \chi + ie^{-\phi}\ ,\ H^1 = dB_{NS}\ ,\ H^2 = dB_{RR} \\ M_{ij} &= \frac{1}{Im\tau}\begin{pmatrix} |\tau|^2 & -Re\tau \\ -Re\tau & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.32}$$

とした。この作用は、次の $SL(2,\mathbf{R})$ 変換で不変になる。

$$\begin{aligned} G'_E = G_E\ ,\ \tau' = \frac{a\tau+b}{c\tau+d}\ ,\ F'_{(5)} = F_{(5)} \\ \begin{pmatrix} H'^1 \\ H'^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} H^1 \\ H^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.33}$$

さらに String 理論に戻って非摂動効果つまり D-brane の存在を考えると F-string,D-string の電荷は量子化されるはずで $SL(2,\mathbf{Z})$ が本当の TypeIIB 理論の対称性といえる。特に $\tau \to -\frac{1}{\tau}$ の変換を考えると強結合を弱結合に map するので S-duality と呼ばれる。このようにして TypeIIB 理論の強結合極限は自分自身といえる。

従って、超弦理論を d 次元トーラスにコンパクト化すると S-duality $SL(2,\mathbf{Z})$ と T-duality $SO(d,d;\mathbf{Z})$ の対称性があることになるが、実際にはさらに enhance して両者が混じり合うことが知られていて U-duality と呼ばれる [23]。

一方、TypeIIA 理論の強結合極限は、もはや string 理論ではなく、M-theory と呼ばれる 11 次元の非摂動的 (=結合定数を含まない) 理論となると考えられている [11]。その理由は、TypeIIA 理論の D0-brane が強結合極限で massless となり、新しい次元の K.K.momentum とみなせるからである。M-theory の低エネルギー極限と考えられている 11 次元超重力理論は詳しく調べられ

ていて、理論に M2-brane、M5-brane と呼ばれる soliton が存在することが分かっている。これらを用いると TypeIIA 理論の F1,D2,D4, NS5-brane はそれぞれ、M2-brane が S^1 に巻きついたもの,M2-brane そのもの,M5-brane が S^1 に巻きついたもの,M5-brane そのもの、と解釈できる。また D6-brane は M-theory の K.K.monopole と同一視される。

今まで説明した duality はすべて最大の超対称性 (32SUSY) を持つものどうしを結びつけるものであった。次にその半分の超対称性 (16SUSY) の場合を考える。そのような理論としては摂動的立場で考えると、TypeIIA,B を K3 にコンパクト化したもの、Het SO(32),$E_8 \times E_8$ 理論、TypeI SO(32) 理論が考えられる。

まず Het SO(32) と Het $E_8 \times E_8$ 理論は T-dual の関係にあるので、S^1 コンパクト化すると同一視できる。そこでまず、Het SO(32) を T^d にコンパクト化した理論の強結合極限を考えよう [11]。

- $d = 0$ の場合:Heterotic-TypeI duality によって TypeI 理論の弱結合と dual。詳しくは次節で説明する。
- $d = 1$ の場合:このときは、TypeIA 理論の弱結合領域と dual。これについても次節で説明する。
- $d = 2$ の場合:このときは F-theory を K3 コンパクト化したものと dual[24]。その特別な moduli が O7-D7 system で記述できる [38]。7 章で詳しく述べる。
- $d = 3$ の場合:このときからは、dual の TypeI 理論では強結合領域となってしまうが、この場合は M-theory の K3 コンパクト化の弱結合領域と dual である。
- $d > 3$ の場合:TypeIIA の K3$\times T^{d-4}$ コンパクト化の弱結合領域と dual。特に、d=6 では self-dual と考えられている。これは dual の TypeIIA,B の K3$\times T^2$ コンパクト化における T^2 に対する T-duality から従う。

このように見てくると、TypeIIB の K3 コンパクト化と Het $E_8 \times E_8$ 理論以外は duality でつながったことになる。ではこれらの理論の強結合極限はどうなるのだろうか。

まず、Het $E_8 \times E_8$ 理論は、文献 [15] で議論されているように M-theory を $S^1/\mathbf{Z_2}$ にコンパクト化した理論と dual である。この場合、M-theory に 2 枚の fixed plane(10D) が出来る orbifold のような理論でありその'twisted sector' としてそれぞれの fixed plane 上に E_8 の 10D N=1 ゲージ理論が存在する。このゲージ群は anomaly cancellation によって一意的に決まる。次に TypeIIB の K3 コンパクト化であるが、この理論は 6D(2,0)SUSY を持っていて chiral な理論であり、TypeIIA の K3 にコンパクト化の場合に 6D(1,1)SUSY となるのと対照的である。この場合の dual は [14] で議論されていて、M-theory を $T^5/\mathbf{Z_2}$ にコンパクト化したものと dual であると考えられている。この詳細については 7 章で触れる。

以上の結果を図 3.2 にまとめておく。

3.2.2 TypeI-Heterotic duality

まず始めに、低エネルギー有効理論すなわち超重力理論 (Supergravity) の立場で TypeI-Heterotic duality を見てみる。それぞれの理論に対応する Supergravity の作用は以下の通りである。

$$
\begin{aligned}
S_{TypeI} &= \frac{1}{2\kappa_{10}^2}\int dx^{10}\sqrt{-G}[e^{-2\phi}(R+4(\nabla\phi)^2)-\frac{1}{2}|dB_I|^2] \\
&\quad -\frac{1}{2g_{10}^2}\int dx^{10}\sqrt{-G}e^{-\phi}TrF_I^2 \\
S_{Het} &= \frac{1}{2\kappa_{10}^2}\int dx^{10}\sqrt{-G}e^{-2\phi}[R+4(\nabla\phi)^2)-\frac{1}{2}|dB_H|^2-\frac{\kappa_{10}^2}{g_{10}^2}TrF_H^2]
\end{aligned}
\tag{3.34}
$$

これらは次の変換で等価になる [20]。

$$
G_I = e^{-\phi_H}G_H\ ,\ \phi_H=-\phi_I\ ,\ dB_I=dB_H\ ,\ A_I=A_H \tag{3.35}
$$

つまり、TypeI SO(32) 理論の強結合を Het SO(32) 理論の弱結合に変換し、TypeI の D1,D5-brane 電荷は Het の F1-brane,NS5-brane に変わる。その意味でこれも S-duality と呼ばれることがある。また TypeI D1-brane の tension $\tau_{D1}=\frac{1}{2\pi\alpha' e^{\phi}}$ は、この変換で Het に直すと $\tau_{Het}=\frac{1}{2\pi\alpha'}$ となり確かに Het の F1-brane の tension になっている。

さてそれでは、toroidal コンパクト化した場合を考察しよう。この場合には T-dual をとって TypeI' 理論も一緒に考察すると便利である。この時、

$$
\begin{aligned}
&\text{Het}/T^d \quad\leftrightarrow\quad \text{TypeI}/T^d \quad\leftrightarrow\quad \text{TypeI'}/T^d \\
&e^{\phi_H}=e^{-\phi_I}\ ,\ R_I=e^{-\frac{1}{2}\phi_H}R_H\ ,\ e^{\phi_{I'}}=e^{(\frac{d}{2}-1)\phi_H}\cdot\frac{1}{R_H^d}\ ,\ R_{I'}=\frac{1}{R_I}=e^{\frac{1}{2}\phi_H}\cdot\frac{1}{R_H}
\end{aligned}
\tag{3.36}
$$

という関係が容易に分かる。但し以後この節では $\alpha'=1$ とする。

さて、Het 側の強結合領域を別な理論の弱結合領域に map することを考える。また Het 理論では半径が $R_H\sim 1$ の付近が enhanced symmetry$(E_8,E_7,\cdots)$ が生じ興味深いのでその半径で考える。この時、TypeI 側では半径が 0 となってしまい良い記述とはいえない。そこで TypeI' を考えると、半径は $R_{I'}\to\infty$ となりうまく行く。結合定数は $d<2$ で $e^{\phi}\to 0$、$d>2$ で $e^{\phi}\to\infty$ となり Het の S-dual といえるのは $d=1$ の時のみである。$d=2$ は微妙で、TypeI' を T^2 にコンパクト化した理論は F-theory の K3 コンパクト化という非摂動的定式化が可能となり、Het の S-dual が構成される。このことについては 7 章で述べる。逆に、$d>2$ の場合は duality にはなるが強結合を強結合に map する状況になっている。以上より、TypeI' を S^1 にコンパクト化した場合は enhanced symmetry が見えるはずであるが、普通に TypeI' の D-brane を考える限りでは SO(N) のゲージ群しか生じず矛盾しているように見える。この問題は半径の値によっては O8-plane の近傍で $e^{\phi}\to\infty$ となり、そこに stuck する D0-brane が massless になるという現象によって解決する [31]。すなわち、D8-brane、O8-plane を組み合わせた SO(N) のゲージ群が D0-D8 string による massless fermion によって enhance して E_8,E_7 などのようなゲージ群を生み出すのである。

さてそれでは最後に、TypeI 理論の D-string が Heterotic 理論の F-string と S-dual で同一視できる直接的理由を [12] に従って説明する。具体的には D-string の massless mode が Heterotic 理論の F-string の world sheet 上の string field と同じになることを確かめる。これらは結合定数によらないので、duality があるなら一致するはずである。

D1-brane の massless mode は、D1-D1 string と D1-D9 string から生じる。まず D1-D1 string については、$\Omega = 1$ の projection は boson 場について[9]

$$A_\mu : \lambda \otimes \psi^\mu_{-\frac{1}{2}} e^{-\phi}|0> \rightarrow \ (\lambda)^T = -\lambda$$
$$\phi_i : \lambda \otimes \psi^i_{-\frac{1}{2}} e^{-\phi}|0> \rightarrow \ (\lambda)^T = \lambda \tag{3.37}$$

となり、今は Chan-Paton factor λ が 1×1 の行列なのでゲージ場は存在せず、massless mode は $\phi_i(z, \bar{z})$ のみとなる。次に、D1-D1 string の fermion(RR-sector) については、

GSO-projection $(-1)^F = -ie^{\pi i(s_0+s_1+s_2+s_3+s_4)} = 1$ と、Ω-projection

$$\Omega\psi^\mu_r\Omega^{-1} = e^{i\pi r}\psi^\mu_r \ , \ \Omega\psi^i_r\Omega^{-1} = -e^{i\pi r}\psi^i_r$$
$$\rightarrow \ \Omega|s_0, s_1, s_2, s_3, s_4 >= -exp(\pi i(s_1 + s_2 + s_3 + s_4))|s_0, s_1, s_2, s_3, s_4 > \tag{3.38}$$

すなわち $-exp(\pi i(s_1+s_2+s_3+s_4)) = 1$ を考えて、$s_0 = -\frac{1}{2}$, $(s_1, s_2, s_3, s_4) \in \mathbf{8_c}rep$が許される。これは on-shell 条件を課すと right-moving fermion で chirality が $\mathbf{8_c}$ の fermion である。これを $S_\alpha(\bar{z})$ と書くことにする。次に D1-D9 string であるが、この場合は (3-1-2) で見たように NS-sector は massive mode しかないので RR-sector からの fermion を考える。その時、fermion zeromode は ψ^0_0, ψ^1_0 のみであり、GSO-projection は $(-1)^F = -ie^{\pi i s_0}$ となり、また Ω-projection は D1-D9 と D9-D1 を同一視することを意味する。従って、$s_0 = \frac{1}{2}$ すなわち left-moving でゲージ群 SO(32) の fundermental 表現に属す fermion が生じる。これを $\chi^a(z) \ \ (a = 1 \sim 32)$ と書く。

以上をまとめると、D1-brane 上の massless 場は $\phi^i(z, \bar{z}), S_\alpha(\bar{z}), \chi^a(z)$ となり確かに (Green Schwarz string において)Heterotic string を記述する world sheet field と一致する。もっと正確には $\chi^a(z)$ の GSO-projection も TypeI 側から説明したい。そのためには、D1-brane 上のゲージ場は project out されるが、S^1 コンパクト化した場合、次のような $\mathbf{Z_2}$-wilson line は許されることに着目する。

$$exp(i\oint dz A^\mu \partial X_\mu) = -1 \tag{3.39}$$

この $\mathbf{Z_2}$-gauge でさらに project すると考えるのが自然で、そのとき $\chi^a(z)$ 場には R-sector(=untwisted sector) と NS-sector(=twisted sector) が生じ、Heterotic string の場合と一致する。

ここで $\mathbf{Z_2}$-wilson line だけを単体と考えると、NS-sector を R-sector に変える働きを持ち、つまり SO(32) の spinor 電荷を意味することが分かる。実際 7 章で見るようにこの $\mathbf{Z_2}$-wilson line を spinor 電荷をもつ non-BPS D0-brane として取り出すことができる。

3.2.3 TypeII/K3 − Het/T^4 duality

ここでは K3 コンパクト化した TypeIIA 理論と T^4 にコンパクト化した Heterotic 理論の duality について述べる [11]。以下、K3,T^4 の体積を V_A, V_H とおく。

まず、低エネルギー有効理論 (超重力理論) の比較を行いたい。その前に両者の理論に存在する massless 場を求める。TypeIIA 理論を K3 コンパクト化した場合 U(1)vector 場はもともとある

[9] 以下で $\mu = 0, 1$、$i = 2, 3, \cdots, 9$ とする。

RR1-form 場と、RR3-form 場の 2 つの足を $H^2(K3,\mathbf{R})$ の方向にとったもの ($b^2(K3)=22$ 個ある)、そして 6 次元方向の足を持つ RR3-form 場の dual(1-form) から生じるので合わせて 24 個ある。このうち 4 つは 6D N=(1,1) の gravity multiplet に属し、残りが 20 個の vector multiplet を構成する。一方 T^4 にコンパクト化した Heterotic 理論では、もともとの 16 個の U(1)vector 場と $G_{i\mu}, B_{i\mu}$ から 8 つの U(1)vector 場が生じ、合わせて 24 個となり、TypeIIA の場合と同じ種類の場からなる 6D N=(1,1) の理論となる。

さてそれぞれの理論の作用は次のようになる。但し、$F=dA$ は 24 個ある 6DU(1)vector 場の field strength の一つである。

$$I_{Het}=\frac{V_H}{2\kappa_{10}^2}\int (dx)^6\sqrt{-G_H}e^{-2\phi_H}[R_H+4|\nabla\phi_H|^2-\frac{1}{2}|dB_H|+|F_H|^2] \tag{3.40}$$

$$I_{IIA}=\frac{V_A}{2\kappa_{10}^2}\int (dx)^6\sqrt{-G_A}[e^{-2\phi_A}(R_A+4|\nabla\phi_A|^2-\frac{1}{2}|dB_A|)+|F_A|^2] \tag{3.41}$$

そこで、$\lambda_{H6}^2,\lambda_{A6}^2$ を 6 次元の有効結合定数として次のように定義する。

$$\lambda_{H6}=\frac{e^{\phi_H}}{\sqrt{V_H}} \tag{3.42}$$

$$\lambda_{A6}=\frac{e^{\phi_A}}{\sqrt{V_A}} \tag{3.43}$$

のように関係する。ここで注意すべきことは Heterotic の作用には $e^{-2\phi}$ の dilaton 結合がすべての場に入っているが、TypeIIA の作用では RR 場については入っていない。このことは一見 string amplitude の計算に反するように見えるが、実際には TypeIIA の場合には string 理論に直接結びつく場を $e^{-\phi}$ だけ rescale したものとなっているので問題はない。

さて、duality が成立つ必要条件は上記の作用が変数変換で一致することである。実際、両者を一致させる唯一の変換が次のように与えられることが分かる。

$$\lambda_{H6}=\frac{1}{\lambda_{A6}} \tag{3.44}$$

$$G_H=\lambda_{6H}^2 G_{IIA} \tag{3.45}$$

$$dB_H={\lambda_{A6}}^{-2}*dB_A \tag{3.46}$$

$$F_A=F_H \tag{3.47}$$

この時、注意すべき点は運動方程式 $d({\lambda_{A6}}^{-2}*dB_A)=0$ より ${\lambda_{A6}}^{-2}*dB_A$ は閉形式となっていて local に全微分の形に直せる事実である。

次に、Heterotic string の world sheet が TypeIIA 側でどのように記述されるか考えてみる。

まず TypeIIA 理論の NS5-brane を考える。NS5-brane 上の massless 場は 6D N=(2,0) の multiplet をなし、D2-brane が NS5-brane に付着すると交点は string と見えることから 2-form 場を含む。すなわち tensor multiplet $(B_{\mu\nu}^-,\phi_1,\cdots,\phi_5)$ が NS5-brane 上に存在する。但し、B^- は anti-selfdual 場を表す。さてこの NS5-brane を K3 に巻きつけるとどうなるだろうか。有効的に 2 次元の理論と見なせるが、massless mode としてはもともとの 5 つの scalar 場と B^- の足を $H^2(K3,\mathbf{Z})$ の方向にとったものから生じる scalar 場がある。後者では B^- が anti-selfdual $dB=-*dB$ であるため

2D の scalar 場が chiral となり、$b^{2+}(K3) = 3,\ b^{2-}(K3) = 19$ より 3 つの right-moving scalar と 19 の left-moving scalar が生じる。全部あわせると 8 つの right-moving scalar と 24 の left-moving scalar が存在することになり、K3 に巻きつけた NS5-brane は Heterotic string の world sheet と見なせることが分かった。

最後に T^6 にコンパクト化した Heterotic 理論の S-duality について考える。もともとこの Heterotic 理論の T-duality は $SO(6,22;\mathbf{Z})$ であるが、対応する超重力理論の解析から U-duality は $SL(2,\mathbf{Z})_S \times SO(6,22;\mathbf{Z})$ と予想されることが知られている [23]。この $SL(2,\mathbf{Z})_S$ は Heterotic 理論としては非摂動的な対称性と期待されるが、逆に dual の TypeII 理論で見ると摂動的に説明できる。$T^2 \times K3$ にコンパクト化するともはや IIA と IIB の区別はなくなることに注意。このようにコンパクト化された TypeII 理論の摂動的な'T-duality'[10] は $SO(4,20;\mathbf{Z}) \times SO(2,2;\mathbf{Z})$ となる。ここで $SO(2,2;\mathbf{Z}) = SL(2,\mathbf{Z})_C \times SL(2,\mathbf{Z})_K$ は T^2 の T-duality であり、特に $SL(2,\mathbf{Z})_C$ は複素構造の変換、$SL(2,\mathbf{Z})_K$ は Kähler 構造の変換に相当する。TypeIIA 理論をまず K3 にコンパクト化したときの 24 個ある vector 場は、さらに T^2 にコンパクト化すると 4D ゲージ理論の有効結合定数は $\tau \sim (b + iV)$ のように T^2 上の B-field b と T^2 の体積 V に依存する。従って、Het の S-duality $SL(2,\mathbf{Z})_S$ は IIA の $SL(2,\mathbf{Z})_K$ と同一視される。同様に IIB の $SL(2,\mathbf{Z})_C$ とも同一視されることも示せる。

[10] もちろん、非摂動的な対称性まで考慮すると U-duality $SL(2,\mathbf{Z}) \times SO(6,22;\mathbf{Z})$ に enhance するはずである。

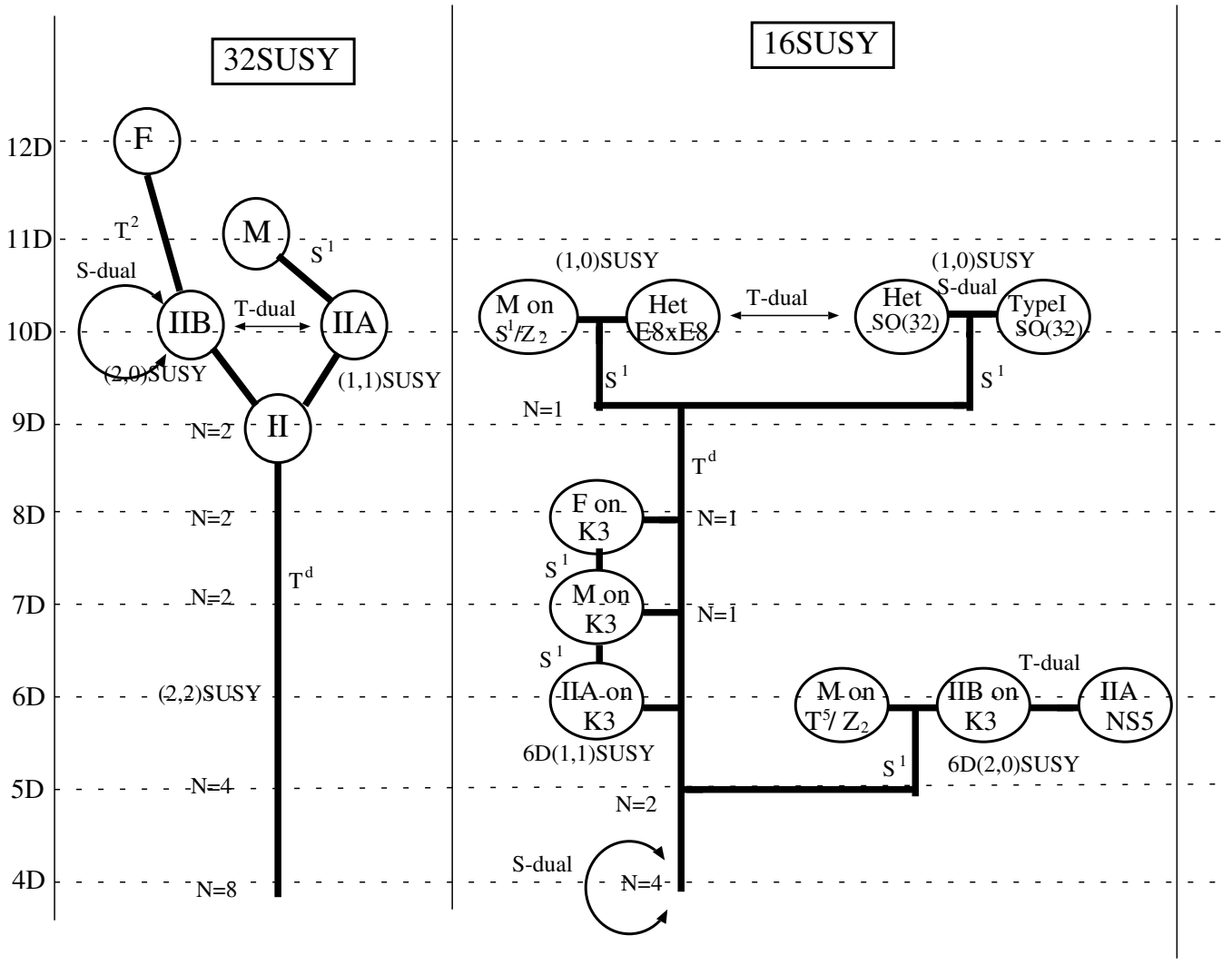

図 3.2: String duality(32,16SUSY) の概念図 (但し、太線が moduli 空間のつながりを意味する。)

第4章　Boundary state

boundary state とは、closed string の Hilbert space[1] の中に boundary の存在 (D-brane) を表す状態を構成したもので、disk や cylinder amplitude などを closed string の立場で計算することが可能となる。

boundary state の構成法は次の通りである。

- 先ず、bulk の closed string の立場で、D-brane を boundary にするという条件を解いて、boundary state の基底を作る。
- 次に、open-closed 対応 (open string を twisted sector とみなした場合の広義の modular 不変性のこと) を課して、基底の線形結合のなかで許される state を選ぶ。
- 最後に、normalization を含めて open-closed 対応を計算し、全体の normalization を決める。

以下では boundary state について具体例を挙げながら説明する。特に断りがない限り TypeII string の lightcone gauge での記述を用いる。

4.1　Noncompact で flat な空間における D-brane を記述する boundary state

4.1.1　boundary state の構成

ここでは Dp-brane が noncompact な１０次元時空の中に、無限に広がる平面として存在する状況を考える。ここでは [32] に従って double Wick rotation(つまり x^0 と x^2 を入れ替える) を行って、Neumann 方向を $x^\mu(\mu = 2 \sim p+2)$ と Dirichlet 方向を $x^i(i = 0, 1, p+3 \sim 9)$ とする。さらに (x^0, x^1) を lightcone 方向にとる。この方法だと形式上は instanton 的な Dp-brane を記述することになり、lightcone だが p=-1∼7 が記述できる利点があり、普通の Dp-brane と計算は同様である。

まず Dp-brane の openstring の端点としての境界条件を closed string の言葉に直すと (図 2.2 参照)、

$$Neumann : \partial_\tau X^\mu |B, \eta >= 0, (\psi^\mu + i\eta\tilde{\psi}^\mu)|B, \eta >= 0 \tag{4.1}$$

$$Dirichlet : \partial_\sigma X^i |B, \eta >= 0, (\psi^i - i\eta\tilde{\psi}^i)|B, \eta >= 0 \tag{4.2}$$

が boundary で成立する。この条件を満たす $|B>$ を boundary state と呼ぶ。fermion に生じている factor i は open string の座標から closed string の座標へ conformal mapping する際に生じる

[1] 正確には norm が発散するので正しくないが、通常 damping factor: q^{L_0} $(q < 1)$ をかけて収束させて考えるので問題ない。

ものである。η は ± 1 で D-brane の spin structure を表し、open string に NS-sector と R-sector があるのに対応していて、後に GSO projection を考えるときに重要な役目をする。以上を closed string の oscillator の言葉に直すと、

$$\begin{aligned}(\alpha^\mu_n + \tilde{\alpha}^\mu_{-n})|B,\eta> &= 0 \\ (\alpha^i_n - \tilde{\alpha}^i_{-n})|B,\eta> &= 0 \\ (\psi^\mu_r + i\eta\tilde{\psi}^\mu_{-r})|B,\eta> &= 0 \\ (\psi^i_r - i\eta\tilde{\psi}^i_{-r})|B,\eta> &= 0 \end{aligned} \tag{4.3}$$

但し r は NSNS-sector で半整数、RR-sector で整数を表す。これから、oscillator 部分の構造が次のように決まる。(特に bosonic oscillator については、式 (4.3) を微分方程式とみると容易に求まる)

$$|B,\eta> \sim exp[\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n}(\alpha^\mu_{-n}\tilde{\alpha}^\mu_{-n} - \alpha^i_{-n}\tilde{\alpha}^i_{-n}) - i\eta\sum_{r>0}^{\infty}(\psi^\mu_{-r}\tilde{\psi}^\mu_{-r} - \psi^i_{-r}\tilde{\psi}^i_{-r})]|B,\eta>^{(0)} \tag{4.4}$$

となる。zeromode 部分 $|B,\eta>^{(0)}$ は以下で決める。

それでは zeromode 部分 $|B,\eta>^{(0)}$ を GSO projection で不変になるように決める。bosonic zeromode は式 (4.3) からすぐに分かるように Neumann 方向には momentum を持てない。従って Dirichlet 方向の momentum(もしくはそのフーリエ変換による brane の位置)のみが bosonic zeromode である。次に fermionic zeromode と GSO projection を考える。NS-sector には存在しないので $|B,\eta>^{(0)}=|0>$ となる。このとき left-moving, right-moving fermion number $(-1)^{F_L}$,$(-1)^{F_R}$ は次のように NS-sector の boundary state 全体に作用する。

$$(-1)^{F_L}|B,\eta>_{NSNS} = -|B,-\eta>_{NSNS}, \quad (-1)^{F_R}|B,\eta>_{NSNS} = -|B,-\eta>_{NSNS} \tag{4.5}$$

よって GSO 不変な NS-sector の boundary state は

$$|B>_{NSNS} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|B,+>_{NSNS} - |B,->_{NSNS}) \tag{4.6}$$

と書ける。

R-sector では、fermion zeromode$(\psi^a_0, \tilde{\psi}^a_0)(a = 2 \sim 9)$ が存在する。そこで、

$$\psi^a_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi^a_0 \pm i\tilde{\psi}^a_0) \tag{4.7}$$

と定義すると

$$\{\psi^a_+, \psi^b_-\} = \delta^{ab}, \ \{\psi^a_+, \psi^b_+\} = \{\psi^a_-, \psi^b_-\} = 0 \tag{4.8}$$

を満たす。さらに zeromode の fermion number operator を次のように定める。

$$\Gamma^L_9 = 16\psi^2_0 \cdots \psi^9_0, \quad \Gamma^R_9 = 16\tilde{\psi}^2_0 \cdots \tilde{\psi}^9_0 \tag{4.9}$$

このとき次の性質があることに注意する。

$$\Gamma^L_9\psi^\mu_\pm = -\psi^\mu_\mp\Gamma^L_9, \quad (\Gamma^L_9)^2 = 1 \tag{4.10}$$

$$\Gamma^R_9\psi^\mu_\pm = \psi^\mu_\mp\Gamma^R_9, \quad (\Gamma^R_9)^2 = 1 \tag{4.11}$$

一方、式 (4.3) より

$$\psi_{\mp}^{\mu}|B,\pm>_{RR}^{(0)}=0, \quad \psi_{\pm}^{i}|B,\pm>_{RR}^{(0)}=0 \tag{4.12}$$

そこで D7-brane の場合を基準にして、

$$\psi_{\mp}^{a}|B7,\pm>_{RR}^{(0)}=0, \quad <B7,\pm|B7,\pm>=1 \tag{4.13}$$

$$|B7,->_{RR}^{(0)}=\Gamma_9^L|B7,+>_{RR}^{(0)} \tag{4.14}$$

と normalize しておく。さらにこれを基準として、Dp-brane に対しては

$$|Bp,\pm>_{RR}^{(0)}=\prod_{\mu=p+3}^{9}\psi_{\pm}^{\mu}|B7,\pm>_{RR}^{(0)} \tag{4.15}$$

と定義すればよい。このとき次の性質が分かる。

$$\Gamma_9^L|Bp,\pm>_{RR}^{(0)}=(-1)^{p+1}|Bp,\mp>_{RR}^{(0)} \tag{4.16}$$

$$\Gamma_9^R|Bp,\pm>_{RR}^{(0)}=|Bp,\mp>_{RR}^{(0)} \tag{4.17}$$

oscillator 部分も考慮すると、fermion number operator$(-1)^{F_L},(-1)^{F_R}$ の作用は、次のようになる。

$$(-1)^{F_L}|Bp,\eta>_{RR}=(-1)^{p+1}|Bp,-\eta>_{RR} \tag{4.18}$$

$$(-1)^{F_R}|Bp,\eta>_{RR}=|Bp,-\eta>_{RR} \tag{4.19}$$

あとはこれらを用いて GSO 不変な RR-sector boundary state を作ればよく、TypeIIA,B でそれぞれ次のような結果となる。

TypeIIA : $(-1)^{F_L}=-1,(-1)^{F_R}=1$ より p=0,2,4,6 のみ許される。

TypeIIB : $(-1)^{F_L}=1,(-1)^{F_R}=1$ より p=-1,1,3,5,7 のみ許される。

このようにして TypeIIA,B で存在する D-brane が再現できた。[2]

4.1.2 Type0 string の場合

ここで少し話がそれるが、Type0 string の場合に D-brane の boundary state がどうなるか調べる。Type0 は TypeII と GSO projection が異なり、次のようになっている。

[Type0A] NS-sector:$(-1)^{F_L}(-1)^{F_R}=1$

R-sector:$(-1)^{F_L}(-1)^{F_R}=-1$

[Type0B] NS-sector:$(-1)^{F_L}(-1)^{F_R}=1$

R-sector:$(-1)^{F_L}(-1)^{F_R}=1$

まず NS-sector では $|Bp,+>_{NSNS},|Bp,->_{NSNS}$ はどちらも許されることが分かる。これは TypeII の場合と大きく異なる点である。

また RR-sector の場合は、

$$(-1)^{F_L}(-1)^{F_R}|Bp,\eta>_{RR}=(-1)^{p+1}|Bp,\eta>_{RR} \tag{4.20}$$

[2] 但し p=8,9 についてはこのような lightcone gauge では扱えないので触れない。

となり、Type0A では p=0,2,4,6 そして Type0B では p=-1,1,3,5,7 が許されることが分かる。以上より Type0 では TypeII と同じ p の値の Dp-brane が存在するが、その種類が 2 倍あり electric,magnetic と区別される。もともと Type0 では RR field が TypeII の倍あるから、その電荷を帯びる Dp-brane も 2 倍の種類あるのは自然である。

4.1.3 boundary state の normalization の決定

今まで分かったことをまとめると、次のような Dp-brane の boundary state $|B, x^i>$ が得られたことになる。但し Dp-brane の位置を x^i とする。

$$|B, x^i >= \frac{T_p}{2}(|B, x^i >_{NSNS} + |B, x^i >_{RR}) \tag{4.21}$$

ここで

$$|B, x^i >_{NSNS} = \frac{1}{2i}\int (\frac{dk}{2\pi})^{9-p} e^{ikx}(|B, +, k^i >_{NSNS} - |B, -, k^i >_{NSNS}) \tag{4.22}$$

$$|B, x^i >_{RR} = \frac{4}{2}\int (\frac{dk}{2\pi})^{9-p} e^{ikx}(|B, +, k^i >_{RR} + |B, -, k^i >_{RR}) \tag{4.23}$$

さらにここで、

$$|B, \eta, k^i >_{sector} = exp[\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n}(\alpha^{\mu}_{-n}\tilde{\alpha}^{\mu}_{-n} - \alpha^{i}_{-n}\tilde{\alpha}^{i}_{-n}) - i\eta\sum_{r>0}^{\infty}(\psi^{\mu}_{-r}\tilde{\psi}^{\mu}_{-r} - \psi^{i}_{-r}\tilde{\psi}^{i}_{-r})]|B, \eta, k^i >^{(0)}_{sector} \tag{4.24}$$

$$|B, \eta, k^i >^{(0)}_{sector} = |B, \eta >^{(0)}_{sector} \otimes |k^i > \tag{4.25}$$

$$< k^i|k'^i > = V_{p+1}(2\pi)^{9-p}\delta^{9-p}(k - k') \tag{4.26}$$

とする。V_{p+1} は D-brane の world volume の体積である。また $|B, x^i >_{NSNS}$ と $|B, x^i >_{RR}$ の係数の相対的大きさを上のように決めたのは、このあとすぐ見るように open string の立場で計算した結果と一致させるためである。同様に T_p もその際に次のように決まる。

$$T_p = 2^{3-p}\pi^{\frac{7}{2}-p}\alpha'^{\frac{3-p}{2}} \tag{4.27}$$

となり、この convension では Dp-brane の tension を τ_p としたとき

$$\tau_p = \frac{T_p}{\kappa_{10}} \tag{4.28}$$

の関係がある [58]。だだし κ_{10} は１０次元での重力定数である。[3] それでは open-closed 対応を調べてみる。open string の立場で D-brane 間の amplitude は既に計算しているので、closed string の立場で計算する。求めるべきものは cylinder amplitude であり、２つの boundary state の間に

[3] tension は D-brane を boundary とする disk に graviton vertex が挿入された amplitude から求まるので T_p に比例するのは当然である。とくにこのような convention に対してその比例係数が $\frac{1}{\kappa_{10}}$ に比例するという意味である。

次に定義する propagator Δ を挿入すればよい。moduli parameter s (cylinder の相対的長さ) の積分は propagator の中に入っている。

$$propagator : \Delta = \frac{\alpha'}{2}\int_0^\infty ds\ e^{-s(L_0+\tilde{L_0})} \sim \frac{1}{k^2} + (massive\ corrections) \tag{4.29}$$

但し、$L_0 + \tilde{L_0}$ は各 sector に対する zero energy を差し引いたものとする。さて求める D-brane 間の amplitude は次のようになる。この時に重要な規則は、RR-sector boundary state どうしの計算にはマイナスを余分につけることである。[4]

$$\begin{aligned}
Z &= < B, x^i|\Delta|B, y^i > & (4.30)\\
&= \frac{\alpha'}{2}\int_0^\infty ds\frac{T_p^2}{4}\int(\frac{dk}{2\pi})^{9-p}\ e^{-ikx}\int(\frac{dk'}{2\pi})^{9-p}\ e^{ik'y} & (4.31)\\
&\quad \times\{\frac{1}{2} < B,+,k^i|e^{-s(L_0+\tilde{L_0})}|B,+,k'^i >_{NSNS}\\
&\quad -\frac{1}{2} < B,+,k^i|e^{-s(L_0+\tilde{L_0})}|B,-,k'^i >_{NSNS}\\
&\quad -8 < B,+,k^i|e^{-s(L_0+\tilde{L_0})}|B,+,k'^i >_{RR}\}\\
&= \frac{\alpha'}{2}\frac{T_p^2}{4}V_{p+1}\int ds(\frac{dk}{2\pi})^{9-p}\ e^{ik(y-x)-\frac{s}{2}\alpha' k^2}(\frac{f_3(q)^8 - f_4(q)^8 - f_2(q)^8}{2f_1(q)^8}) & (4.32)
\end{aligned}$$

ここで $q = e^{-s}$ とした。さらに modular 変換 $t = \frac{\pi}{s}, \tilde{q} = e^{-\pi t}$ を行い、k の積分を実行して、

$$\begin{aligned}
Z &= \frac{\alpha' T_p^2}{16}V_{p+1}\int\frac{\pi dt}{t^6}(\frac{t}{2\pi^2\alpha'})^{\frac{9-p}{2}}\ e^{-\frac{(x-y)^2}{2\pi\alpha'}t}\frac{f_3(\tilde{q})^8 - f_2(\tilde{q})^8 - f_4(\tilde{q})^8}{f_1(\tilde{q})^8}\\
&= 2\int\frac{dt}{2t}\{Tr_{(NS)}(\frac{1}{2}\tilde{q}^{2L_0}) - Tr_{(R)}(\frac{1}{2}\tilde{q}^{2L_0})\\
&\quad + Tr_{(NS)}(\frac{1}{2}(-1)^F\tilde{q}^{2L_0})\} \qquad (4.33)
\end{aligned}$$

となるが、最後の等号を得るために式 (3.7) と比較して、$T_p = 2^{3-p}\pi^{\frac{7}{2}-p}\alpha'^{\frac{3-p}{2}}$ と決まる。また Jacobi の式より $Z = 0$ となっていることに注意。これは系に超対称性があることを意味する。

このようにして open string の計算が boundary state で再現できるわけだが、一般に string 理論に存在する boundary state を調べる際に最も強力な constraint を与えるのがこの open-closed 対応の要請である。また boundary state の normalization を決めるにはこの方法を用いるのが最も簡単である。逆に open string の記述法ではどのような電荷を帯びた D-brane が何種類存在するかという分類がしにくく、boundary state を用いる方が見通しがよい。

[4] このような規則を用いないと、boundary state のブラとケットで RR-sector boundary state の係数の符号が違うものを使わないといけなく、convention が煩雑になる。

4.1.4 Antibrane

以上で求めた、式 (4.21) の表す D-brane が 2 枚ある系は open string 側の GSO projection からも分かるように Supersymmetric であった。それでは RR-sector の符号を変えて、

$$|\bar{B}, x^i >= \frac{T_p}{2}(|B, x^i >_{NSNS} - |B, x^i >_{RR}) \tag{4.34}$$

と定義するとどうなるだろうか。前と同様な計算で、この brane と D-brane の間の amplitude を open string の言葉に直すとすぐに分かるように GSO projection が逆転してしまう。従ってこの系には open string tachyon が project されずに残ってしまい不安定になる。式 (4.34) で定義される brane を antibrane と呼ぶ。この antibrane というものは、式 (4.21) の表す D-brane と逆の RR 電荷をもった D-brane であり、antibrane 間の amplitude はやはり 0 で antibrane のみの系は Supersymmetric である。しかし今見たように、brane-antibrane の系は Supersymmetric でなく不安定である。この系についてのさらなる解析は 5 章に譲ることにする。

4.2 Orientifold palne

ここでは noncompact,flat な orientifold palne の boundary state $|C>$ を求め、前に TypeI で tadpole cancel を調べたときの計算を boundary state の計算で再現することを見る。特に orientifold 9-palne(O9-plane) は cross cap を意味することに注意。

4.2.1 boundary state の構成

まず O9-plane の boundary state を求めて、それの T-dual をとることによって Op-plane を構成する。

O9-plane すなわち cross cap は、open string の立場で見ると $\Omega : z' \to -\bar{z}'$ を意味するが、これを closed string の立場に直すと $\Omega : z \to -\frac{1}{\bar{z}}$ となる。よって boundary でこの変換によって不変になる state を探せばよく、次の式が得られる。

$$\{(X^\mu(z,\bar{z}) - X^\mu(-\frac{1}{\bar{z}}, -\frac{1}{z})\}|C,\eta >= 0 \tag{4.35}$$

$$\{(\psi^\mu(z) - i\eta\tilde{\psi}^\mu(\bar{z})) - (\psi^\mu(-\frac{1}{\bar{z}}) - i\eta\tilde{\psi}^\mu(-\frac{1}{z}))\}|C,\eta >= 0 \tag{4.36}$$

これを oscillator に書き直して、(9-p) 回 T-dual をとると Op-plane の boundary state を定義する次式を得る。

$$(\alpha^\mu_n + (-1)^n\tilde{\alpha}^\mu_{-n})|C,\eta >= 0 \tag{4.37}$$

$$(\alpha^i_n - (-1)^n\tilde{\alpha}^i_{-n})|C,\eta >= 0 \tag{4.38}$$

$$(\psi^\mu_r - i\eta(-1)^r\tilde{\psi}^\mu_{-r})|C,\eta >= 0 \tag{4.39}$$

$$(\psi^i_r + i\eta(-1)^r\tilde{\psi}^i_{-r})|C,\eta >= 0 \tag{4.40}$$

ここで zeromode に着目すると D-brane の場合と全く同じであるから $|C>^{(0)} = |B>^{(0)}$ である。GSO projection も同様である。non-zeromode は異なるが、求め方は D-brane の場合と同じであ

る。まとめると次のようになる。

$$
\begin{aligned}
|C,x^i> &= \frac{C_p}{2}(|C,x^i>_{NSNS}+|C,x^i>_{RR}) && (4.41)\\
|C,x^i>_{NSNS} &= \frac{1}{2}\int(\frac{dk}{2\pi})^{9-p}\ e^{ikx}(|C,+,k^i>_{NSNS}-|C,-,k^i>_{NSNS}) && (4.42)\\
|C,x^i>_{RR} &= \frac{4}{2}\int(\frac{dk}{2\pi})^{9-p}\ e^{ikx}(|C,+,k^i>_{RR}+|C,-,k^i>_{RR}) && (4.43)\\
|C,\eta,k^i>_{sector} &= exp[\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{1}{n}(-1)^n(\alpha^{\mu}_{-n}\tilde{\alpha}^{\mu}_{-n}-\alpha^{i}_{-n}\tilde{\alpha}^{i}_{-n})\\
&\quad -i\eta\sum_{r>0}^{\infty}(-1)^r(\psi^{\mu}_{-r}\tilde{\psi}^{\mu}_{-r}-\psi^{i}_{-r}\tilde{\psi}^{i}_{-r})]|C,\eta,k^i>^{(0)}_{sector} && (4.44)
\end{aligned}
$$

但し、前述のとおり $|C,\eta,k^i>^{(0)}_{sector}=|B,\eta,k^i>^{(0)}_{sector}$ である。C_p は normarization factor で後に決める。

4.2.2 TypeI の D-brane への Ω の作用

少し話しがそれるが、TypeI の D-brane の boundary state を用いて Ω の作用について議論する。TypeI では、orientifold($p<9$) とは異なり、Ω の作用は local であるので D-brane など理論に出てくる state は Ω の作用で不変になっていないといけない。

そこでまず Ω の closed string への作用について次式を思い出す。

$$\Omega\alpha^{\mu}_{n}\Omega^{-1}=\tilde{\alpha^{\mu}_{n}},\ \ \Omega\psi^{\mu}_{r}\Omega^{-1}=\tilde{\psi^{\mu}_{r}},\ \ \Omega|0>=|0> \tag{4.45}$$

これから明らかなように、$|B>_{NSNS}$, $|C>_{NSNS}$ は Ω で不変。一方、RR-sector については、TypeI の RR 場が二階反対称場のみ存在することと boundary state の zeromode 部分が、RR vertex の線形結合とみなせることから

$$
\begin{aligned}
\Omega|Bp>_{RR} &= -|Bp>_{RR} \qquad (p=-1,3,7) && (4.46)\\
\Omega|Bp>_{RR} &= |Bp>_{RR} \qquad (p=1,5,9) && (4.47)\\
& && (4.48)
\end{aligned}
$$

となることが分かる。つまり Ω で不変に保たれるのは D1,D5,D9-brane のみであり、それらのみが typeI の BPS な D-brane として存在する。ここで BPS としたのは、後に 9 章で見るように typeI には安定な non-BPS D-brane がこれらとは別に存在するからである。一方 D(-1),D3,D7-brane の場合は RR 電荷のみが反転するので anti-brane に変わると考えられる。まとめると、

$$
\begin{aligned}
\Omega|Bp> &= |Bp> \quad (p=1,5,9) && (4.49)\\
\Omega|Bp> &= |\bar{B}p> \quad (p=-1,3,7) && (4.50)
\end{aligned}
$$

4.2.3 Orientifold の tension と normalization の決定

まだ決定していなかった、対応する boundary state の normalization と tension について、TypeII の Dp-brane の場合 $T_p = 2^{3-p}\pi^{\frac{7}{2}-p}\alpha'^{\frac{3-p}{2}}$ を基準にして考える。まず先に結果を書くと次のようになる。但し、τ_p, τ'_p を Dp-brane、Op-plane の tension とする。

< TypeI の場合の Dp-brane と O9(cross cap) >

$$|B> = \frac{T_p}{2\sqrt{2}}(|B>_{NSNS} + |B>_{RR}) \tag{4.51}$$

$$|C> = -32\frac{T_9}{2\sqrt{2}}(|C>_{NSNS} + |C>_{RR}) \tag{4.52}$$

$$\tau_p = \frac{T_p}{\kappa\sqrt{2}}, \quad \tau'_9 = -32\frac{T_9}{\kappa\sqrt{2}} \tag{4.53}$$

< TypeI' の場合の Dp-brane と Op-plane >

$$|B> = \frac{T_p}{2}(|B>_{NSNS} + |B>_{RR}) \tag{4.54}$$

$$|C> = -2^{p-5}\frac{T_p}{2}(|C>_{NSNS} + |C>_{RR}) \tag{4.55}$$

$$\tau_p = \frac{T_p}{\kappa}, \quad \tau'_p = -2^{p-5}\frac{T_p}{\kappa} \tag{4.56}$$

これらの normalization は、前節で見たように amplitude の open-closed 対応で求められるがここではもっと直感的に求めてみる。

TypeI の場合は、tadpole cancellation でゲージ群が SO(32) に決まったが、これを boundary state で見ると、$n|B> + |C>$ の massless 部分の和が 0 となるのが n=32 の時のみということになる。これから $|B>$ と $|C>$ の相対的 normalization が決まる。また TypeI では open string amplitude を計算する際、orientation の factor がないので TypeII と比べて amplitude が $\frac{1}{2}$ 倍となり、結果として tension は $\frac{T_p}{\sqrt{2}\kappa_{10}}$ となる。以上より normalization が上式のように決まる。

TypeI' の場合も、tadpole cancellation で Dp-brane が 16 枚あり、T-duality の考察から Op-plane が 2^{9-p} 枚あることから同様に決まる。

ここで注意したいのは、orientifold plane の tension が負になっていることである。D-brane の NSNS tadpole を cancell するためにはそうなっていないといけない。

4.2.4 Orientifold の分類

以上で orientifold の boundary sate は求まったので、orientifold の種類について考えることにする。

本来許される orientifold の boundary sate は $|C>_{NSNS}, |C>_{RR}$ の前の符号のとり方で 4 種あるはずであるが、(4.2.3) では TypeI とその T-dual で得られる orientifold のみを考えていたので SO projection の orientifold を見ていたことになる。では SP projection の orientifold はどうなるのだろうか。まえに TypeI の open string amplitude を計算した時にメービウスの amplitude の符号のみが SO と SP projection で異なっていた。これを bounndary sate の立場で見ると $<B|\Delta|C>$

の符号ということになり、D-brane の tension は必ず正であると仮定すると、SO と SP の違いは $|C>$ の符号の違いということになる。これらを区別するために、前者を O^-、後者を O^+ と呼ぶ。

一方、RR-sector の符号のみを変えたものを anti-orientifold と呼び、$\bar{O}^-$ と $\bar{O}^+$ と書く。

また特に SO 型で、fractional な Dp-brane が orientifold に張り付くことで SO(2k+1) というゲージ群を生じさせる場合これを $\tilde{O}_p$ と書いて区別することもある。

4.2.5 TypeI の vacuum amplitude の計算

最後に、前に open string の立場で求めた TypeI の vacuum amplitude を boundary state の計算で再現できるか確かめる。注意すべき点は、区別できる D-brane 間の amplitude と異なり vacuum amplitude の場合は両端が同一な D-brane となるので $\frac{1}{2}$ 倍する必要があるという点である。cylinder,möbius,Klein の順に計算する。

$$\begin{aligned}
Z_{cylinder} &= \frac{1}{2}n^2 < B|\Delta|B > \\
&= n^2\frac{T_9^2\alpha'}{32}V_{10}\int_0^\infty ds\ \frac{f_3(q)^8 - f_4(q)^8 - f_2(q)^8}{f_1(q)^8}) \\
&= \int\frac{dt}{2t}Tr_{open}(\frac{1}{2}\frac{1+(-1)^F}{2}e^{-2\pi tL_0}) \qquad (4.57) \\
Z_{m\ddot{o}bius} &= n < C|\Delta|B > \\
&= -2nT_9^2\alpha' V_{10}\int_0^\infty ds\ (\frac{f_2(q^2)^8 f_4(q^2)^8}{f_3(q^2)^8 f_1(q^2)^8} - \frac{f_2(q^2)^8 f_4(q^2)^8}{f_3(q^2)^8 f_1(q^2)^8}) \\
&= \int\frac{dt'}{2t'}Tr_{open}(\frac{\Omega}{2}\frac{1+(-1)^F}{2}e^{-2\pi t'L_0}) \qquad (4.58) \\
Z_{Klein} &= \frac{1}{2} < C|\Delta|C > \\
&= 2^5T_9^2\alpha' V_{10}\int_0^\infty ds\ \frac{f_3(q)^8 - f_4(q)^8 - f_2(q)^8}{f_1(q)^8}) \\
&= \int\frac{dt"}{2t"}Tr_{open}(\frac{\Omega}{2}\frac{1+(-1)^{F_R}}{2}\frac{1+(-1)^{F_L}}{2}e^{-2\pi t"(L_0+\tilde{L}_0)}) \\
& \qquad (4.59)
\end{aligned}$$

但し、上の計算では、modular 変換 $s = \frac{\pi}{t} = \frac{\pi}{4t'} = \frac{\pi}{2t"}$ を用いた。

このようにして、normalization を含めてこれらの boundary state の記述が open string の記述と無矛盾であることが確かめられた。

4.3 Non-BPS D-brane の boundary state

$|B>= \frac{T_p}{2}(|B>_{NSNS} + |B>_{RR})$ で表される D-brane は BPS object であり、open string 側で正しく GSO projection が入ることで特徴付けられた。しかしながら最近、open string 側で GSO projection が存在しないような D-brane が物理的な object であることが指摘され [33]、その

研究も進んでいる [34][45][48][49][51]。[5] それらの研究については 7 章でまとめることにして、ここでは、そのような D-brane について boundary state の立場で調べる。このような D-brane は supersymmetry を破るので non-BPS D-brane と呼ばれ、flat な空間では不安定であることが以下で述べるようにすぐ分かる。しかし、orbifold のような曲がった空間では安定になる場合があることが確かめられており [45]、もっと一般の smooth な多様体にコンパクト化したときにも同様の現象が起きる可能性がある。

それでは、non-BPS D-brane の boundary state の構成を行う [33]。BPS D-brane の時、$|B>_{RR}$ の寄与が open string の $Tr_{NS-R}\frac{(-1)^F}{2}\tilde{q}^{L_0}$ に相当するので GSO projection をなくすには、$|B>_{RR}$ を取り除けばよい。さらに amplitude が 2 倍になるため全体の normalization を $\sqrt{2}$ 倍すればよい。つまり、

$$|NB>=\frac{T_p}{\sqrt{2}}|B>_{NSNS} \tag{4.60}$$

とすればよい。実際に計算すると、

$$\begin{aligned} Z &= <NB,x|\Delta|NB,y> \\ &= \frac{T_p^2\alpha'}{8}V_{p+1}\int_0^\infty ds\ e^{-\frac{(x-y)^2}{2\alpha' s}}(\frac{1}{2\pi\alpha' s})^{\frac{9-p}{2}}\frac{f_3(q)^8-f_4(q)^8}{f_1(q)^8} \\ &= \frac{T_p^2\alpha'}{8}V_{p+1}\int_0^\infty dt\frac{\pi}{t^6}(\frac{t}{2\pi^2\alpha'})^{\frac{9-p}{2}}e^{-\frac{(x-y)^2}{2\pi\alpha'}}\frac{f_3(\tilde{q})^8-f_2(\tilde{q})^8}{f_1(\tilde{q})^8} \\ &= 2\int_0^\infty\frac{dt}{2t}[Tr_{NS}(\tilde{q}^{2L_0})-Tr_R(\tilde{q}^{2L_0})] \end{aligned} \tag{4.61}$$

となり確かに一致する。この boundary state から分かる non-BPS D-brane の性質は、まず tension が $\tau_p^{nonBPS}=\sqrt{2}\tau_p^{BPS}$ と普通の D-brane に比べて $\sqrt{2}$ 倍であり、また RR 電荷がなく、brane,anti-brane の区別はないということである。さらに、open string 側に GSO projection がないため、non-BPS D-brane の world volume には tachyon と fermion(8 つ)が BPS D-brane に比べて余分に存在する。従って tachyon のせいで不安定な系で、安定化するには何らかの projection(orbifold,orentifold etc) が必要であることが分かる。

最後に open string の立場で non-BPS D-brane を記述する方法について述べる。主に 2 つの方法があり、一つが前に述べたように GSO projection しない D-brane とするものである。もう一つは、Chan-Paton factor $\{1,\sigma_1\}$ を付与して、それぞれに fermion number $+,-$ を割り当て GSO projection する方法で、どちらの方法も全く等価である。

4.4 Toroidal compact 化したときの boundary state

最も簡単なコンパクト化が、Toroidal コンパクト化であり、この場合に D-brane を記述する boundary state がどのようなものか調べる [41]。まず簡単のため、すべての座標をコンパクト化する。以前同様、x^μ を brane に平行な方向、x^i を垂直な方向とする。それぞれの半径を R^μ、R^i とする。

[5] もちろん closed string のほうには GSO projection は普通に存在していて、closed tachyon は存在しないのでバルクの理論としての不安定性はない。

boundary state の定義式は non compact の時と同じで、式 (4.3) で与えられる。但し、zeromode のみ non compact の時と異なり、momentum と winding 両方の自由度がある。zeromode の条件は、

$$(P_R^\mu + P_L^\mu)|B>=0, \quad (P_R^i - P_L^i)|B>=0 \tag{4.62}$$

となるが、Toroidal コンパクト化しているので、

$$P_R^\mu = \frac{n^\mu}{R^\mu} + \frac{w^\mu R^\mu}{\alpha'}, \quad P_L^\mu = \frac{n^\mu}{R^\mu} - \frac{w^\mu R^\mu}{\alpha'} \tag{4.63}$$

であることを考えると、$n^\mu = 0, \quad w^i = 0$ となる。よって次のように、noncompact な時と同じ normalization にして boundary state を定義できる。

$$|B, x^i, \theta^\mu> = \frac{T_p}{2}(|B, x^i, \theta^\mu>_{NSNS} + |B, x^i, \theta^\mu>_{RR}) \tag{4.64}$$

$$\begin{aligned} |B, x^i, \theta^\mu>_{NSNS} &= \frac{1}{2i}\frac{1}{\prod_i (2\pi R_i)} \sum_{n,w} e^{i\frac{n^i}{R^i}x^i} e^{i\theta^\mu w^\mu} \\ &\quad (|B, +, n^i, w^\mu>_{NSNS} - |B, -, n^i, w^\mu>_{NSNS}) \end{aligned} \tag{4.65}$$

$$\begin{aligned} |B, x^i, \theta^\mu>_{RR} &= \frac{4}{2}\frac{1}{\prod_i (2\pi R_i)} \sum_{n,w} e^{i\frac{n^i}{R^i}x^i} e^{i\theta^\mu w^\mu} \\ &\quad (|B, +, n^i, w^\mu>_{RR} + |B, -, n^i, w^\mu>_{RR}) \end{aligned} \tag{4.66}$$

$$\tag{4.67}$$

但し $T_p = 2^{-p+3}\pi^{-p+\frac{7}{2}}\alpha'^{\frac{3-p}{2}}$ と boundary state の nonzero mode 部分は前と同じで、

$$<n, w|n', w'> = \delta_{n,n'}\delta_{w,w'}V_{10} \quad , (V_{10} = \prod_{i,\mu} 2\pi R_a) \tag{4.68}$$

と定義した。すぐ後に分かるが、実定数 θ^μ は D-brane 上のゲージ場の Wilson line である。また、x^i は D-brane の torus 上の位置を表す。

次に amplitude を計算して open string の計算との一致をみる。

$$\begin{aligned} Z &= <B, x^i, \theta^\mu|\Delta|B, y^i, \varphi^\mu> \\ &= \frac{T_p^2}{16}\alpha' V_{10}\frac{1}{\prod_i (2\pi R_i)^2}\int_0^\infty \sum_{n,w} e^{-[\frac{\alpha' n^2}{2R^2} + \frac{w^2 R^2}{2\alpha'}]s} \\ &\quad e^{i\frac{n_i}{R_i}(x^i - y^i)} e^{i(\theta^\mu - \varphi^\mu)w_\mu} \frac{f_3(q)^8 - f_4(q)^8 - f_2(q)^8}{f_1(q)^8} \end{aligned} \tag{4.69}$$

さらに、Poisson の公式

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi a n^2 + 2\pi i b n} = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi}{a}(m-b)^2} \tag{4.70}$$

を用いて、modular 変換 $s = \frac{\pi}{t}$ を実行すると次のようになる。

$$\begin{aligned}(R.H.S.) &= 2\int \frac{dt}{2t}\sum_{n,w}\frac{1}{2}e^{-\frac{2\alpha'\pi t}{R^2}(n^\mu - \frac{\theta^\mu - \varphi^\mu}{2\pi})^2} \\ &\quad e^{-\frac{2\pi R^2 t}{\alpha'}(w^i - \frac{x^i - y^i}{2\pi R})^2}\frac{f_3(\tilde{q})^8 - f_2(\tilde{q})^8 - f_4(\tilde{q})^8}{f_1(\tilde{q})^8} \\ &= 2\int \frac{dt}{2t} Tr^{open}_{(NS-R)}(\frac{1+(-1)^F}{2}\tilde{q}^{2L_0}) \end{aligned} \tag{4.71}$$

と Wilson line による mometum shift を考慮した open string の計算と一致する。よって前述した θ^μ の Wilson line としての解釈が得られた。[6]

最後に、一部をコンパクト化した場合によく用いられる normalization とその物理的意味について述べる。$\mu = (\alpha, a)\quad i = (\beta, b)$ と分けて、α, β を noncompact 方向で次元を (l, m) として、a, b を compact 方向とする。低エネルギーで、(l+m) 次元の超重力理論とみなせて、重力定数は、

$$\frac{1}{\kappa^2_{l+m}} = \frac{V_{10-l-m}}{\kappa^2_{10}} \tag{4.72}$$

となる。

このとき compact 方向の momentum はもはや内部量子数とみなすことにすると、boundary state は、次のように normalize されるべきである。

$$< n, w | n', w' >= V_{l+m}\delta_{n,n'}\delta_{w,w'} \tag{4.73}$$

$$|B, X^i, \theta >_{NSNS} = \frac{1}{2i}\frac{1}{\prod_\beta (2\pi R_\beta)}\sum_{n,w}(\cdots\quad) \tag{4.74}$$

などとするべきで、この時の T_p に代わる normalization を以下では N_p と書くことにする。このときすぐに次の関係が分かる。

$$N_p = T_p\ \frac{\sqrt{\prod_a (2\pi R_a)}}{\sqrt{\prod_b (2\pi R_b)}} \tag{4.75}$$

よって、

$$\frac{N_p}{\kappa_{l+m}} = \frac{T_p}{\kappa_{10}}\ \prod_a (2\pi R_a) \tag{4.76}$$

となり、この値が Dp-brane が T^{p+1-l} に巻きついてできた、(l+m) 次元時空の l-brane の tension であることが分かる。このように N_p は (l+m) 次元時空の立場で基本的な量である。

4.5 Orbifold T^4/Z_2 における boundary state

ここでは、TypeIIA/K3 の orbifold limit を考え、orbifold の fixed plane (全部で 1 6 ある) に stuck する D0-brane の boundary state について考える [34][41][45][57]。このような brane は、fractional brane と呼ばれ、K3 の 2-cycle に巻きつく D2-brane の orbifold limit とも見なせて、曲がった D-brane の最も簡単な例である。但し、orbifold limit で 2-cycle の体積は 0 になるが 2-cycle 上の B-field が 0 でないため tensionless とはならない [74]。

[6] 逆に言うと、例えば θ^μ を複素数としても bondary state としての定義式は満たすが、open- closed 対応を要求すると矛盾する。ここではこのような bondary state は認めないものとする。

4.5.1 orbifold の untwisted sector と twisted sector

先ず、K3 の orbifold T^4/Z_2 について簡単に説明する。まず $x^6 \sim x^9$ を compact 方向として、T^4 で compact 化した後、$I_4 : (x^6, x^7, x^8, x^9) \to (-x^6, -x^7, -x^8, -x^9)$ という T^4 の対称性で twist して orbifold を作る。また x^2 を D0-brane の worldvolume 方向とする。

さて、orbifold には untwisted sector と twisted sector があり、両者を組み合わせて理論を modular 不変にする。twisted sector とは T^4 の周期条件を I_4 で twist した sector のことで、例えば T^4 方向の boson は反周期的、NS-fermion は周期的、 R-fermion は反周期的となる。それぞれの sector からの massless boson は次のようになる。

$$untwisted(NSNS) \quad : \quad (g_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}, \phi) \oplus 16 scalars \tag{4.77}$$

$$untwisted(RR) \quad : \quad 8 vectors \tag{4.78}$$

$$twisted(NSNS) \quad : \quad 64 scalars \tag{4.79}$$

$$twisted(RR) \quad : \quad 16 vectors \tag{4.80}$$

これから、２４種の電荷が存在することが分かる。untwisted の RR 電荷は bulk の D-brane が担っているのは明らかである。では twisted の RR 電荷はどうなるのか。厳密にこれを見るにはこの後すぐに出てくる twisted sector boundary state を調べればよいが直感的には、これらの電荷は１６ある fixed plane に対応しているから、そこに stuck する D-brane が担っていると考えられる。

4.5.2 fractional D0-brane の boundary state

今までの議論から正しい boundary state には twisted sector の電荷も含まないといけないことが分かった。そのためには twisted sector boundary state という closed string の twisted sector に対応する boundary state を余分に付与する必要がある。このことは open-closed 対応の要請からも分かる。そこで以下ではまず fractional D0-brane の twisted sector boundary state の zeromode を NSNS-sector,RR-sector それぞれについて構成する。nonzero mode については、untwisted sector の結果を oscillator の moding について「整数を半整数に、半整数を整数に」と変えるだけで良い。

先ず、bosonic zeromode であるが、$x^6 \sim x^9$ 方向には存在しないとすれば良いだけである。

fermionic zeromode は、untwisted sector の場合について前に求めたのと同じやり方で、boundary state の定義式の zeromode 部分から次のように決まる。但し、twisted NSNS sector には $x^6 \sim x^9$ 方向に、twisted RR sector には $x^2 \sim x^5$ 方向にそれぞれ fermionic zeromode があることに注意する。

[twisted NSNS sector の場合]

$$\psi_+^i |T, - >_{NSNS}^{(0)} \quad = \quad 0 \quad (i = 6, 7, 8, 9) \tag{4.81}$$

$$|T, + >_{NSNS}^{(0)} \quad = \quad \prod_{i=6}^{9} (\psi_-^i) |T, - >_{NSNS}^{(0)} \tag{4.82}$$

[twisted RR sector の場合]

$$\psi_+^i |T, - >_{RR}^{(0)} \quad = \quad 0 \quad (i = 2, 3, 4, 5) \tag{4.83}$$

$$|T,+>^{(0)}_{RR} \quad = \quad \prod_{i=2}^{5}(\psi^i_{-})|T,->^{(0)}_{RR} \tag{4.84}$$

また GSO projection に用いる fermion number は次の通りである。[7]

$$twistedNSNS \quad : \quad (-1)^{F_L} = 4\prod_{i=6}^{9}(\psi^i_0),\ (-1)^{F_R} = 4\prod_{i=6}^{9}(\tilde{\psi}^i_0) \tag{4.85}$$

$$twistedRR \quad : \quad (-1)^{F_L} = 4\prod_{i=2}^{5}(\psi^i_0),\ (-1)^{F_R} = 4\prod_{i=2}^{5}(\tilde{\psi}^i_0) \tag{4.86}$$

これから分かるように、GSO projection で不変な組み合わせは、

$$|T>^{(0)}_{NSNS} \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(|T,->^{(0)}_{NSNS}+|T,+>^{(0)}_{NSNS}) \tag{4.87}$$

$$|T>^{(0)}_{RR} \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(|T,->^{(0)}_{RR}+|T,+>^{(0)}_{RR}) \tag{4.88}$$

となる。

以上は twisted sector についてであったが、もちろん untwisted sector については前節で調べた T^4compact 化した D-brane に対するものをそのまま用いればよい。すなわち、

$$|U>^{(0)}_{sector} = |B>^{(0)}_{sector} \tag{4.89}$$

である。

以上の結果より、さらに non zeromode も考慮して次のように fractional D0-brane の boundary state が構成される。但し簡単のため $x^\mu = x^i = 0$ に D0-brane が置かれているとする。以下で i=0,1,3,4,5 l=6,7,8,9 とする。また $\epsilon = \pm 1$ とする。

$$\begin{aligned}
|fracD0,\epsilon> \quad &= \quad \frac{N_0}{2}(|U>_{NSNS}+|U>_{RR}) + \epsilon\frac{\tilde{N}_0}{2}(|T>_{NSNS}+|T>_{RR}) \\
|U>_{NSNS} \quad &= \quad \frac{1}{2i}\int(\frac{dk}{2\pi})^5\sum_{n^l}(|U,+,k^i,n^l>_{NSNS}-|U,-,k^i,n^l>_{NSNS}) \\
|U>_{RR} \quad &= \quad \frac{4}{2}\int(\frac{dk}{2\pi})^5\sum_{n^l}(|U,+,k^i,n^l>_{RR}+|U,-,k^i,n^l>_{RR}) \\
|T>_{NSNS} \quad &= \quad \frac{1}{2}\int(\frac{dk}{2\pi})^5\sum_{n^l}(|T,+,k^i,n^l>_{NSNS}+|T,-,k^i,n^l>_{NSNS}) \\
|T>_{RR} \quad &= \quad \frac{1}{2}\int(\frac{dk}{2\pi})^5\sum_{n^l}(|T,+,k^i,n^l>_{RR}+|T,-,k^i,n^l>_{RR})
\end{aligned} \tag{4.90}$$

但し、$|U,\eta,k^i,n^l>$ は、$|B,\eta,k^i,n^l>$ と同じ。また、NSNS twisted sector は

$$|T,\eta>_{NSNS} \quad = \quad exp[\sum_{n>0}^{\infty} -\frac{1}{n}(\alpha^\mu_{-n}\tilde{\alpha}^\mu_{-n} - \alpha^i_{-n}\tilde{\alpha}^i_{-n})$$

[7] この場合は trivial であったが、一般に twisted sector の fermion number の決定は符号の曖昧さのせいで微妙である。その場合には望ましい spectrum を導くものを採用する。

$$-i\eta\sum_{r>0}^{\infty}(\psi^{\mu}_{-r}\tilde{\psi}^{\mu}_{-r}-\psi^{i}_{-r}\tilde{\psi}^{i}_{-r})]|T,\eta>^{(0)}_{NSNS} \tag{4.91}$$

となり、moding は、$\mu\ or\ i\in(6,7,8,9)$ の時 $n\in Z+\frac{1}{2}\quad r\in Z$ となり $\mu\ or\ i\in(2,3,4,5)$ の時 $n\in Z\quad r\in Z+\frac{1}{2}$ ととする。さらに RR twisted sector については r の moding を NSNS の時と逆にすれば他は同じである。

normalization factor は、N_0 と $\tilde{N_0}$ とで 2 つあり、それぞれは fractional D0-brane の tension と twisted NSNS charge を表し、この D0-brane が BPS state なので untwisted RRcharge と twisted RRcharge を表しているといってもよい。それぞれの値は、open-closed 対応すなわち

$$<fracD0,\epsilon|\Delta|fracD0,\epsilon'>=2\int_0^{\infty}\frac{dt}{2t}Tr^{open}_{NS-R}(\frac{1+(-1)^F}{2}\frac{1+\epsilon\epsilon' I_4}{2}\tilde{q}^{2L_0}) \tag{4.92}$$

より決まる。ここで twisted boundary state の寄与は、open string 側では $\epsilon\epsilon' I_4$ で twist された部分に対応することに注意。また ϵ,ϵ' は twisted NSNS (RR)charge を表すが、その値にかかわらず open string 側では正しい GSO projection が得られる。つまり ϵ の符号にかかわらず BPS D0-brane と見なせる。[8]

open-closed 対応の計算については前と同様であるのでここでは略し結果のみ書くことにする。R を T^4 の半径とすると、$Vol(K3)=\frac{1}{2}(2\pi R)^4$ となり、

$$N_0 = \frac{\sqrt{2}\pi^{\frac{3}{2}}\alpha'^{\frac{3}{2}}}{R^2}=\frac{1}{2}\frac{T_{p=0}}{\kappa_{10}}\kappa_4 \tag{4.93}$$

$$\tilde{N_0} = 2^{\frac{7}{2}}\pi^{\frac{3}{2}}\alpha'^{\frac{1}{2}} \tag{4.94}$$

と決まる。従って、この D0-brane の tension は bulk の D0-brane と比べると $\frac{1}{2}$ 倍となっている。それで fractional D0-brane と呼ばれるのである。また bulk の D0-brane は twistcharge を持たないので $\tilde{N_0}=0$ であり、fixed plane に束縛されず動ける。前にも述べた通りこの D0-brane は vanishing 2-cycle に巻きついた D2-brane とも見なせる。D2-brane 上に orbifold によって生じる B-field が貫入するため、D0-brane charge を帯びるのである。逆に言うと、twisted RR charge が"D2-brane charge"とも見なせる。

4.6 ALE 空間における D-brane を記述する boundary state とその応用

ここでは、boundary state のもう少し高級な例として、orbifold limit での ALE 空間における D-brane[63] の扱い [69][67] について取り上げる。この boundary state は 4 章 5 節の場合を拡張したものともいえる。さらにその boundary state を用いて、ALE 空間における string creation[67] という現象を説明する。

[8] (4.90) 式の符号のみ許されるのは次のように説明できる。まず untwisted RRsector に-をつけると antibrane になってしまう。また twisted RRsector に余分な-をつけたものとそうでないものとの amplitude は open string に直すと twisted 部分の GSO が逆転して non-BPS になることが分かる。よって supersymmetry を要請すると (4.90) 式のように決まる

4.6.1 ALE 空間における D-brane

ALE 空間とは Aymptotically Locally Euclidian の略であり、十分原点から遠いところで局所的に計量が flat に近づくような Einstein 方程式の解でかつ self-dual な曲率をもつものである。無限遠方で大域的にはねじれていて、重力インスタントンとも呼ばれる。またこの空間は、4 次元の orbifold $C^2/\mathbf{\Gamma}$ を blow up して smooth な hyper kähler 多様体 (self-dual) にしたものともみなせ、代数曲面の特異点の A, D, E 分類

$$A_N \quad : \quad x^2 + y^2 + z^{N+1} = 0 \tag{4.95}$$

$$D_N \quad : \quad x^2 + y^2 z + z^{N-1} = 0 \tag{4.96}$$

$$E_6 \quad : \quad x^2 + y^3 + z^4 = 0 \tag{4.97}$$

$$E_7 \quad : \quad x^2 + y^3 + yz^3 = 0 \tag{4.98}$$

$$E_8 \quad : \quad x^2 + y^3 + z^5 = 0 \tag{4.99}$$

に従って、ALE 空間には $A_N \quad (N \geq 1), D_N \quad (N \geq 4), E_6, E_7, E_8$ の種類がある。A_N 型の ALE 空間の計量は、(multi)Eguchi-Hanson metric [62][82] と呼ばれる。このような代数曲面に対応する orbifold $C^2/\mathbf{\Gamma}$ が特異的なのは、いくつかの 2-cycle が原点でつぶれているからである。ALE 空間ではこれらの 2-cycle は blow up され有限の大きさとなっていて非特異である。

orbifold $C^2/\mathbf{\Gamma}$ とは、$C^2 = R^4$ を離散群 $\mathbf{\Gamma}$ で同一視したもので、通常の string 理論の orbifold の方法で扱える。とくに A_1 型については既に前節でも見た。この $\mathbf{\Gamma}$ は前述の代数曲面の式の対称性に対応する。

例えば A_N の場合は、$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{Z}_{N+1}$ である。C^2 の座標を、(z_1, z_2) とするとこの $\mathbf{\Gamma}$ の generator g は次のように定義される。

$$g \quad : \quad (z_1, z_2) \ \rightarrow \ (e^{i\frac{2\pi}{N+1}} z_1, e^{-i\frac{2\pi}{N+1}} z_2), \qquad g^{N+1} = 1 \tag{4.100}$$

このとき、$\mathbf{\Gamma}$ で不変で正則な座標を新しく

$$x + iy = z_1^{N+1}, \quad -x + iy = z_2^{N+1}, \quad z = z_1 z_2 \tag{4.101}$$

と定義すると確かにこれは代数曲面 (4.95) を表す。他の D, E の場合については $\mathbf{\Gamma}$ は複雑になるので具体的に書くのは略すが、以下の議論は A, D, E すべてで成立つ。詳しくは、[64] など参照。

さて、ここで ALE 空間について数学で知られている有用な事実について述べておく。但し以下 $\mathbf{\Gamma}$ の既約表現を $\rho_\alpha \quad (1 \leq \alpha \leq r_\Gamma)$ と書き、$\mathbf{\Gamma}$ の既約表現の種類が全部で r_Γ だけあるとし、ρ_α の次元を $n_\alpha^{(0)}$ と置く。また A_N 型だと式 (4.100) に相当するような $\mathbf{\Gamma}$ の自然な 2 次元表現を ρ_{nat} と書く。

- すべての 2-cycle $[\alpha]$ は、$\mathbf{\Gamma}$ の既約表現 ρ_α と一対一対応する。この 2-cycle は、$\sum_{\alpha=1}^{r_\Gamma} n_\alpha^{(0)} [\alpha] \sim 0$ の関係を除いて独立であり、つまり独立な 2-cycle は $r_\Gamma - 1$ 個存在する。

- 既約分解: $\rho_\alpha \otimes \rho_{nat} = \oplus_{\beta=1}^{r_\Gamma} a_{\alpha\beta} \rho_\beta$ において、$C_{\alpha\beta} = -2\delta_{\alpha\beta} + a_{\alpha\beta}$ は affine Lie 代数: $\hat{\mathbf{\Gamma}} = \{\hat{A}_N, \hat{D}_N, \hat{E}_6, \hat{E}_7, \hat{E}_8\}$ の Cartan 行列と一致する。この非自明な事実は McKay 対応と呼ばれる。言い換えると、$\mathbf{\Gamma}$ の既約分解から拡大 Dynkin 図が再現できることを意味する。

物理的に、何故 Lie 代数が現われるか考えると次のようになる。TypeIIA 理論の K3 コンパクト化を考え、その K3 は局所的には ALE 空間とみなせる。2-cycle がつぶれる極限では、そこに D2-brane が巻きついても massless となり新しいゲージ粒子が生じる。その結果、A, D, E のゲージ群が生じ、Heterotic dual の場合と対応がつく [11]。

しかし実際に string の orbifold で考えると 2-cycle はつぶれているはずだが、このようなゲージ対称性の enhance は起こらないことが分かる。その原因は、つぶれた 2-cycle に B-field が貫入しているためである [74]。具体的には、

$$\int_{[\alpha]} B_{NS} = 2\pi \frac{n_\alpha^{(0)}}{|\Gamma|} \tag{4.102}$$

となる。またこの fractional な B-field のためにその 2-cycle に巻きついた Dp-brane は fractional な D(p-2)-brane の電荷を持つことが Dp-brane の WZ-term からすぐに分かる。

さて、それでは ALE 空間における D-brane の扱い方を [63] に沿って説明する。

D-brane に付着する open string は一般に Chan-Paton 因子 Λ を持つが、今の場合では $\mathbf{\Gamma}$ が Λ に作用する。従って D-brane 自体が $\mathbf{\Gamma}$ の表現となっていると考えられ、それを $\rho = \oplus_{\alpha=1}^{r_\Gamma} n_\alpha \rho_\alpha$ と既約分解で記述する。このとき、既約表現 ρ_α の表現に属す基本的な D-brane を α-type fractional D-brane と呼ぶ。α-type と β-type の fractional D-brane 間に伸びる open string は $g \in \mathbf{\Gamma}$ による作用 P_g

$$P_g \ : \ \Lambda \ \rightarrow \ \gamma^\alpha(g) \Lambda \gamma^\beta(g)^{-1} \cdot R(g) \tag{4.103}$$

で project されることになる。ここで $\gamma^\alpha(g)$ は ρ_α の表現における g の作用を意味し、$R(g)$ は oscillator 部分への g の作用を意味する。

特に $C^2/\mathbf{\Gamma}$ 上の D3-brane を考えると 4 次元 N=2 ゲージ理論が得られるが、具体的な massless 場は $P_g = 1$ の projection から次のように求まる。ゲージ群は $\prod_{\alpha=1}^{r_\Gamma} U(n_\alpha)$ で、$\oplus_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta}(\bar{\mathbf{n}_\alpha}, \mathbf{n}_\beta)$ の表現に属す hyper multiplet が存在する。これらは quiver diagram という拡大 Dynkin 図のようなもので書き表すことができる [63][64]。また、D-brane の DBI-action と WZ-term の解析でゲージ群 $U(n_\alpha)$ に対応する (複素化した) 結合定数 $\tau_\alpha = i\frac{4\pi}{g_\alpha^2} + \frac{\theta_\alpha}{2\pi}$ は、

$$\tau_\alpha = \frac{\tau}{2\pi} \int_{[\alpha]} B_{NS} + \frac{1}{2\pi} \int_{[\alpha]} B_R \ , \ \tau = ie^{-\phi} + \chi. \tag{4.104}$$

のように string 理論の dilaton 場 ϕ、axion 場 χ、NSNS,RR 2-form 場 B_{NS},B_R で表される。

また orbifold を blow up して ALE 空間にすると、その blow up mode は twisted NSNS-scalar に対応しゲージ理論の D 場と結合するので FI-term と見なせる。

4.6.2 ALE 空間における D-brane を記述する boundary state

さて、それではこの節の本題である boundary state の構成を行う。一般の orbifold についての boundary state は [69] で構成されている。ここでは $C^2/\mathbf{\Gamma}$ の場合を考え、その証明を与える。

以下、γ_α の指標 (character) を $\chi^\alpha(g) = Tr\ \gamma^\alpha(g)$ とする。

まず、orbifold 理論での D-brane を記述する boundary state を構成するには、各 twisted-sector に対して基底となる boundary state が存在することに注意する。そこで $g \in \mathbf{\Gamma}$ に対して、g-th twisted sector の boundary state $|T_g>$ を

$$2\int_0^\infty \frac{dt}{2t} Tr^{open}_{NS-R} \frac{g}{|\Gamma|} \frac{1+(-1)^F}{2} e^{-2\pi t L_o} =< T_g|\Delta|T_g > \tag{4.105}$$

のように定義する。ここで、$g \in \mathbf{\Gamma}$ は $|T_g >= |T_g >_{NSNS} + |T_g >_{RR}$ のように NSNS,RR-sector の両方を今まで通り含むことに注意。

さて、一般に D-brane の boundary state はこれらの線形結合となるがその係数を決めるには open-closed 対応 (Cardy の条件) を用いる。つまり open string の立場で $\mathbf{\Gamma}$ の projection が正しく入っていることが要求される。α-type の fractional Dp-brane の boundary state を $|Dp(\alpha)>$ と書くとその条件は、

$$2\int_0^\infty \frac{dt}{2t} \tilde{Tr}^{open}_{NS-R}[\frac{1+(-1)^F}{2}\mathcal{P}\ e^{-2\pi t L_o}] =< Dp(\alpha)|\Delta|Dp(\beta) > \tag{4.106}$$

$$\mathcal{P} = \sum_{g\in\Gamma} \frac{P_g}{|\Gamma|} = \sum_{g\in\Gamma} \frac{P_g^{CP}\cdot g}{|\Gamma|}$$
$$P_g^{CP} \ : \ \Lambda \ \rightarrow \ \gamma^\alpha(g)\Lambda\gamma^\beta(g)^{-1}$$

となり、ここで $\tilde{Tr}$ は Chan-Paton factor を含めた trace を意味する。さらに、左辺の Chan-Paton factor に関する和をとると

$$(L.H.S) = 2\int_0^\infty \frac{dt}{2t} Tr^{open}_{NS-R}[(\frac{1+(-1)^F}{2})(\sum_{g\in\Gamma} \frac{g\chi^{\alpha*}(g)\chi^\beta(g)}{|\Gamma|})e^{-2\pi t L_o}] \tag{4.107}$$

となる。

さてこれから $|Dp(\alpha)>$ が $|T_g>$ で次のように求められることが分かる [69] [67]。

$$|Dp(\alpha)>=\sum_{g\in\Gamma} \chi^\alpha(g)|T_g> \tag{4.108}$$

具体的な $|T_g>$ の形 (A_N の場合) については [67] を参照。

以上より、fractional Dp-brane の boundary state が求まったことになる。この Dp-brane の幾何学的意味は、2-cycle $[\alpha]$ に巻きついた D(p+2)-brane と考えられる [68]。前にも述べたがこの Dp-brane 電荷は、式 (4.102) で与えられる B-field によって生じる。

一般の $C^2/\mathbf{\Gamma}$ における Dp-brane については、その属す表現を $\rho = \oplus_{\alpha=1}^{r_\Gamma} n_\alpha \rho_\alpha$ とすると

$$|Dp(\rho)>=\sum_{g\in\Gamma} n_\alpha\chi^\alpha(g)|T_g> \tag{4.109}$$

と書ける。特に、$n_\alpha = n_\alpha^{(0)}$ とした表現 (regular 表現) に属す D-brane は bulk の D-brane に相当する。具体的には、公式

$$\sum_{\alpha\in irr.rep.} \chi^{\alpha*}(\mathcal{C}_i)\chi^\alpha(\mathcal{C}_j) = \frac{|\Gamma|}{h_i}\delta_{ij} \tag{4.110}$$

(ここで $\mathcal{C}_i \quad (i = 1 \sim r_\Gamma)$ は $\mathbf{\Gamma}$ の conjugacy classe であり、それに属す元の数を h_i とする。)
を用いて、

$$\begin{aligned} |Dp(reg)> &= \sum_{\alpha,g} n_\alpha^{(0)} \chi^\alpha(g) |T_g> \\ &= \sum_{\alpha} \chi^{\alpha *}(1) \chi^\alpha(g) |T_g> \\ &= |\Gamma||T_1> \end{aligned} \tag{4.111}$$

と regular 表現に属す D-brane は記述され、確かに twisted RR 電荷を持たず、2-cycle に巻きついていないことが分かる。

一方、式 (4.108) で表される fractional D-brane では tension は bulk の D-brane の $\frac{1}{|\Gamma|}$ 倍で、g-th twisted 電荷 $\frac{\chi^\alpha(g)}{|\Gamma|}$ を持つ。

以上のような boundary state は本論文のテーマである安定な非 BPS 状態の構成に現在のところ最も簡単な A_1 型以外は用いられてはいないが、今後さらに新しい非 BPS 状態を構成するために役に立つ可能性は大きいと思われる。

4.6.3 String creation と open string の Witten index

さてそれでは、以上のように構成された fractional D-brane の boundary state の一つの応用について述べる。

(3.1.2) で既に触れたように、flat な時空で D0-D8 system を考えると D8-brane を D0-brane が通過するとき fundamental string が生成される。この現象を説明するには主に 2 通りの方法があり、一つはこれから説明する boundary state を用いた amplitude の計算によるもの [31][65] で、もう一つは anomaly の議論によるもの [66] である。後者の議論については (9.3.5) で少し触れることにする。

具体的には $D0-D8$ と $\bar{D}0-D8$ の amplitude(=potential) の差を計算して、

$$\begin{aligned} V(\bar{D}0-D8) - V(D0-D8) &= -\frac{1}{V_1} < \bar{D}0|\Delta|D8> + \frac{1}{V_1} < D0|\Delta|D8> \\ &= 2\int_0^\infty \frac{dt}{2t} Tr_{NS-R}^{open}[(-1)^F e^{-2\pi L_0 t}] \\ &= 2\int_0^\infty \frac{dt}{2t} \int (\frac{dk}{2\pi}) e^{-\frac{y^2 t}{2\pi\alpha'} - 2\pi\alpha' t k^2} \frac{f_2^8(\tilde{q})}{f_2^8(\tilde{q})} \\ &= -\tau_{F1} y \end{aligned} \tag{4.112}$$

が得られる。ここで y は $D0, \bar{D}0$ と $D8$ との距離であり、また $\tau_{F1} = \frac{1}{2\pi\alpha'}$ は fundamental string の tension である。

このエネルギーの差は長さ y の fundamental string に相当するが、この理由は次のように理解できる。$D0-D8$ system を 180 度回転すると $\bar{D}0-D8$ となることから、$D0-D8$ system の D0-brane を動かして D8-brane を通過させたものが $\bar{D}0-D8$ system とみなせる。従って、D0-brane が D8-brane を通過させると $D0$-brane と $D8$-brane の間に fundamental string が生成されると解釈できる。もちろん T-duality より $Dp-D(8-p)$system でも同じ現象が起こる。

さてそれでは ALE 空間では、同様な現象が起こらないだろうか。そのためには以下に示すように $D0-D4$ system$(Dp-D(4-p)$ でも同じ) の amplitude を計算すればよい。但し、world volume はすべて ALE 空間に垂直な方向とする。

$$
\begin{aligned}
&< D0(\alpha)|\Delta|D4(\beta) > \\
&= 2\int_0^\infty \frac{dt}{2t}\sum_{g\in\Gamma}\ \chi^{\alpha *}(g)\chi^{\beta}(g)Tr[\frac{1\pm(-1)^F}{2}\frac{g}{|\Gamma|}\ e^{-2\pi H_o t}] \\
&= V_1\int_0^\infty \frac{dt}{2t}\sum_{g\in\Gamma}\ \chi^{\alpha *}(g)\chi^{\beta}(g)\int(\frac{dk}{2\pi})e^{-\frac{y^2 t}{2\pi\alpha'}-2\pi\alpha' t k^2}\hat{Tr}^{open}_{NS-R}[(1\pm(-1)^F)\frac{g}{|\Gamma|}e^{-2\hat{H}_o t}]
\end{aligned}
\tag{4.113}
$$

となる。ここで $\hat{Tr}, \hat{L_0}$ は bosonic zeromode の寄与を含まないことを意味する。また $D0, \bar{D}0$ の符号を $-,+$ にとることにする。

$$
\begin{aligned}
&V(\bar{D}0-D4)-V(D0-D4) \\
&= -\frac{1}{V_1} < D0(\alpha)|\Delta|D4(\beta) > +\frac{1}{V_1} < D0(\alpha)|\Delta|D4(\beta) > \\
&= \int_0^\infty \frac{dt}{t}\sum_{g\in\Gamma}\chi^{\alpha}(g)\chi^{\beta}(g)\frac{1}{\sqrt{8\pi^2\alpha' t}}e^{-\frac{y^2 t}{2\pi\alpha'}}\ \hat{Tr}_R(-1)^F\frac{g}{|\Gamma|}\ e^{-2\hat{H}_o t} \\
&= \int_0^\infty \frac{dt}{t}\frac{1}{\sqrt{8\pi^2\alpha' t}}\ e^{-\frac{y^2 t}{2\pi\alpha'}}tr_{\alpha\beta}(-1)^F \\
&= -\tau_{F1}C_{\alpha\beta}\ y \quad (\tau_{F1}=\frac{1}{2\pi\alpha'})
\end{aligned}
\tag{4.114}
$$

と求まる。但し、$\hat{Tr}_{NS}\ (-1)^F = 0$ と $tr_{\alpha\beta}(-1)^F = C_{\alpha\beta}$ を用いた。ここで、$tr_{\alpha\beta}(-1)^F$ は 4 次元 $(C^2/\mathbf{\Gamma})$ 部分の open string Witten index[71] であり次のように計算される。

$$
\begin{aligned}
tr_{\alpha\beta}\ (-1)^F &= Tr_R^{4Dopen}[(-1)^F\sum_{g\in\Gamma}\ \frac{g\chi^{\alpha *}(g)\chi^{\beta}(g)}{|\Gamma|}\ e^{-2\pi t L_0}] \\
&= -2\sum_{g\in\Gamma}\frac{\chi^{\alpha *}(g)\chi^{\beta}(g)}{|\Gamma|}+\sum_{g\in\Gamma}\frac{\chi^{\alpha *}(g)\chi^{\beta}(g)\chi^{nat}(g)}{|\Gamma|} \\
&= -2\delta_{\alpha\beta}+a_{\alpha\beta} \\
&= C_{\alpha\beta}
\end{aligned}
\tag{4.115}
$$

但し、既約分解 $\rho_\alpha\otimes\rho_{nat}=\oplus_{\beta=1}^{r_\Gamma}a_{\alpha\beta}\rho_\beta$ と指標の公式

$$
\sum_{g\in\Gamma}\chi^{\alpha *}(g)\chi^{\beta}(g)=|\Gamma|\delta_{\alpha\beta} \tag{4.116}
$$

$$
\chi^{\rho\otimes\rho'}(g)=\chi^{\rho}(g)\cdot\chi^{\rho'}(g) \tag{4.117}
$$

を用いた。

これから、次の結果が得られる。すなわち orbifold $C^2/\mathbf{\Gamma}$ の fixed plane 内の α-type の Dp-brane と β-type の D(4-p)-brane は互いに通過すると $C_{\alpha\beta}$ 本の fundamental string を生成 (消滅) する。

また Witten index は連続的変換で不変なのでさらに幾何学的に blow up しても変わらないはずで、ALE 空間や K3 曲面の様々な 2-cycle に巻きついた D-brane について次の主張が得られる [67]。すなわち、2-cycle $[\alpha]$ に巻きついた Dp-brane と 2-cycle $[\beta]$ に巻きついた D(8-p)-brane が互いにすれ違うと $C_{\alpha\beta}$ 本の fundamental string を生成 (消滅) する。ここで $C_{\alpha\beta}$ は交点数 $[\alpha]\cdot[\beta]$ である。

以上の議論は、コンパクト化する多様体を変えても同様である。例えば、Calabi-Yau 多様体を記述する CFT(Gepner model でも orbifold でも何でもよい) が与えられればその open string Witten index を計算することで D0-D2 system で生成する fundamental string の数が求まる。より一般的な議論は 9 章参照。

4.6.4 1-loop monodromy と string creation

さて最後に、前述の ALE 空間での string creation という現象がゲージ理論の立場で何を意味するのか見てみる [67]。

そのために、TypeIIB 理論の D3-brane と D1-brane の系に着目する。それぞれの world volume を (x^0,x^1,x^2,x^3) と (x^0,x^4) とする。ALE 空間は (x^6,x^7,x^8,x^9) にとる。この系には α-type の fractional D3-brane が n_α 枚ずつあるとする。このとき、D3-brane 上のゲージ理論はゲージ群が $\prod_{\alpha=1}^{r_\Gamma} U(n_\alpha)$ で与えられる quiver 理論となる。さてこのとき、α-type の fractional D1-brane がこの D3-brane を通過すると $\sum_{\beta=1}^{r_\Gamma} C_{\alpha\beta}n_\beta$ 本の fundamental string が生成される。このことは次の monodromy を意味する[9] 。

$$\begin{aligned}
\tau_\alpha &\rightarrow \tau_\alpha + \sum_{\beta=1}^{r_\Gamma} C_{\alpha\beta}n_\beta \\
\tau_\alpha &\sim \tau_\alpha^{(0)} + \frac{1}{2\pi i}\sum_{\beta=1}^{r_\Gamma} C_{\alpha\beta}n_\beta\, log(z_\alpha) \qquad (z_\alpha = x^4+ix^5)
\end{aligned} \tag{4.118}$$

この結果は、ゲージ理論の立場で β 関数を計算したもの

$$\frac{\partial\tau_\alpha(E)}{\partial(logE)} = \frac{1}{2\pi i}\sum_{\beta=1}^{r_\Gamma} C_{\alpha\beta}n_\beta. \tag{4.119}$$

と一致する。また同じ結果が、AdS/CFT 対応を用いた方法を用いて文献 [73] で得られている。さらに詳しい議論は [67] 参照。

[9] このことは、例えば p 本の α-type の fractional D1-brane と q 本の F-string の bound state の tension が $\frac{1}{2\pi\alpha'}|p\tau_\alpha+q|$ となることなどから分かる。

第5章　brane-antibrane system

ここでは flat な時空における TypeII string 理論の brane-antibrane system の力学について説明する。

5.1　brane-antibrane system の不安定性

前章で見たように antibrane とは、D-brane と逆の RR 電荷をもった brane のことであった。brane-antibrane 間の amplitude は brane 間のものと比べると、既に見たように RR-sector の符号を逆にしたもので、具体的には次のようになる。

$$\begin{aligned} Z &= \frac{\alpha'}{2}\frac{T_p^2}{4}V_{p+1}\int ds(\frac{1}{2\pi\alpha' s})^{\frac{9-p}{2}}e^{-\frac{(x-y)^2}{2\alpha' s}}\times(\frac{f_3(q)^8-f_4(q)^8+f_2(q)^8}{2f_1(q)^8}) \\ &= \frac{\alpha' T_p^2}{16}V_{p+1}\int\frac{\pi dt}{t^6}(\frac{t}{2\pi^2\alpha'})^{\frac{9-p}{2}}\ e^{-\frac{(x-y)^2}{2\pi\alpha'}t}\frac{f_3(\tilde{q})^8-f_2(\tilde{q})^8+f_4(\tilde{q})^8}{2f_1(\tilde{q})^8} \\ &= 2\int\frac{dt}{2t}\{Tr_{(NS)}(\frac{1}{2}\tilde{q}^{2L_0})-Tr_{(R)}(\frac{1}{2}\tilde{q}^{2L_0}) \\ &\quad -Tr_{(NS)}(\frac{1}{2}(-1)^F\tilde{q}^{2L_0})\} \end{aligned} \tag{5.1}$$

となり、今度は $Z=0$ とはならない。つまり、boson の数と fermion の数が釣合ってなく、supersymmetry が破れていることを表す。これは、open string でみると GSO projection が逆になっていることからも分かる。また上式中央の右辺の振る舞い

$$\sim\int dt\ e^{-\frac{(x-y)^2}{2\pi\alpha'}t}\ e^{\pi t}\qquad(\tilde{q}=e^{-\pi t}) \tag{5.2}$$

から分かるように brane と antibrane の距離が $R_c=\sqrt{2}\pi\sqrt{\alpha'}$ より小さくなると、その間に単独の brane もしくは antibrane 上には存在しなかった tachyon が生じることがわかる [8]。つまり brane-antibrane system は不安定なのである。これは、brane-antibrane system では RR 電荷が全体で 0 となっていて closed string の system と区別がつかず、system を安定にする電荷が存在しないことからも分かる。従って、brane と antibrane が近づくと tachyon condence を起こして崩壊するはずで可能性としては、(1)closed string を放出して消滅して真空となる、(2) 十分に brane と antibrane の数が大きいと nonextremal black hole を一度形成してから真空に崩壊する、等が考えられる。しかしながら現在でもこの崩壊の力学の詳細については特殊な場合 (次章で述べる) を除いてよく分かっていない。

また後述するように brane もしくは antibrane に別の電荷 (例えば次元の低い brane の RR 電荷など) を持たせておけば崩壊後に、次元の低い brane などの BPS object が生成されるはずであり興味深い [43][20]。

5.2 brane-antibrane system の world volume theory

ここでは十分に近づいた brane と antibrane を低エネルギー極限をとって一つの world volume theory として記述することについて述べる [25]。目的は world volume theory の action を書き下すことだが、string の tree level の計算から求めるので brane と antibrane の距離が R_c 程度で tachyon の期待値がほとんど 0 である時に限られる。つまり tachyon がほとんど massless となる on shell 領域 (記号の意味は以下参照)

$$T \sim 0, \quad |X_{(1)} - X_{(2)}| \sim \sqrt{2}\pi\sqrt{\alpha'} \tag{5.3}$$

を主に考えていることになる[1] 。また off shell での brane-antibrane system の扱いは string field theory を用いる必要があり、これについては最後の節で議論する。

まず、world volume 上の field は、brane と brane,antibrane と antibrane を結ぶ open string (以下 b-b,a-a string と略記) から $(A^{\mu}_{(1)}, X^{i}_{(1)}, \lambda^{\alpha}_{(1)})$ と $(A^{\mu}_{(2)}, X^{i}_{(2)}, \lambda^{\alpha}_{(2)})$ が生じ、brane と antibrane を結ぶ open string (以下 b-a string と略記) から $(T, \bar{T}, \chi^{\tilde{\alpha}}, \bar{\chi}^{\tilde{\alpha}})$ が生じる。ここで、A^{μ},X^{i} はそれぞれ brane 上のゲージ場、brane の位置の moduli をあらわす scalar 場、λ^{α} はその superpartner である spinor 場である。また T は tachyon 場 (複素 scalar), $\chi^{\tilde{\alpha}}$ は spinor 場であり、brane と antibrane を結ぶ open string は GSO が逆になるので λ^{α} とは chirality が逆になる[2] 。

これらの field に対する action は (WZ-term を除いて) treelevel の計算で次のように決まる。

$$\begin{aligned} L = &-\frac{1}{4g_{YM}^2}F^{\mu\nu}_{(1)}F^{\mu\nu}_{(1)} - \frac{1}{4g_{YM}^2}F^{\mu\nu}_{(2)}F^{\mu\nu}_{(2)} - \frac{1}{8\pi^2\alpha' g_{YM}^2}[(\partial X^{i}_{(1)})^2 + (\partial X^{i}_{(2)})^2] \\ &-|D^{i}T|^2 - V(T,X) \end{aligned} \tag{5.4}$$

$$V(T,X) = (-\frac{1}{2\alpha'} + \frac{(X_{(1)} - X_{(2)})^2}{(2\pi\alpha')^2})|T|^2 + g_{YM}^2|T|^4 + \cdots \tag{5.5}$$

但し、共変微分は $D_i = (\partial_i - iA^{(1)}_i + iA^{(2)}_i)T$ とする。また、$X^{i}_{(1)} - X^{i}_{(2)}$ は brane と antibrane の位置の差に相当することに注意しておく。$V(T,X)$ は tachyon potential を表すが、$T \to Te^{i\theta}$ という位相変換 (ゲージ変換) のもとで不変となっていて、T について奇数次の項は存在しないことに注意。また $V(T,X)$ を最小とする T の値は $|T| = T_0$ のように書け、円周状に広がる。

ここで求めた $V(T,X)$ は摂動論によるものであるが、定性的には T が大きくなってもこのような振る舞いをすると仮定すると、T を order parameter とみたとき 2 次相転移すると考えられる。すなわち統計力学系と見なすと、$X^{i}_{(1)} - X^{i}_{(2)}$ が温度に相当し、それが R_c に達すると相転移つまり tachyon condence が始まる。その後 $X^{i}_{(1)} - X^{i}_{(2)}$ は 0 となり、T は potential が最小となる値 T_0 に落ち着き真空と区別つかなくなる。そのように考えると、

「 tachyon condence による安定化エネルギー 」=「 brane と antibrane の tension 」

[1] brane と antibrane の距離が string scale 程度の状況を考えているので、低エネルギー極限をとるのは一見、問題があるように思われるが実際には考えている field はこの時すべて massless となるので妥当と考えられ、一つの world volume の理論として扱える。

[2] 但しここで、D9-brane つまり 10 次元場の理論の立場での chirality について考えている。

が成り立つはずである [42]。この非常に基本的な関係式は bosonic string の D-brane(1 枚) の tachyon potential については後述の通り string field theory を用いた具体的計算でほぼ確かめられている [53]。

さてこの時、tachyon condence による Higgs 現象で $A^{(1)} - A^{(2)}$ は massive となるが $A^{(1)} + A^{(2)}$ は tachyon と結合しないので massless のままである。しかしながら tachyon condence 後は真空となるからこのような massless 場は存在するのは矛盾しているように思われる。これは U(1) 問題と呼ばれ [9][20]、後述するように 2 通りの解決法が提唱されている [30],[51][52][53]。

また最後の節で説明するが、string field theory を用いた一般的な議論から brane-antibrane system の tachyon potential の形はどのような多様体にこれらの brane を巻きつけても同じであることが [52] で指摘された。

最後に、brane-antibrane system の WZ-term(or CS-term,topological-term) について述べる。brane 自体、antibrane 自体からの WZ-term (すなわち D-brane の WZ-term 式 (3.20)) に加えてさらに次のような term が $Dp - \bar{D}p$ system の action に生じることが treelevel の計算によって確かめられている [28]。但し比例係数は無視することにする。

特に D(p-2) 電荷を含むものは、

$$S_{WZ} = \int_{\Sigma_{(p+1)}} C_{p-1} \wedge Tr[DT \wedge D\bar{T} - \frac{1}{2}\{F^{(1)}, T\bar{T}\} + \frac{1}{2}\{F^{(2)}, \bar{T}T\}] \tag{5.6}$$

となり、一般の場合は super-connection[3] $\mathcal{A}$ とその field-strength $\mathcal{F}$ を次のように定義して記述するのが便利である。

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A^{(1)} & T \\ \bar{T} & A^{(2)} \end{pmatrix} \quad \mathcal{F} = \begin{pmatrix} F^{(1)} - T\bar{T} & DT \\ D\bar{T} & F^{(2)} - \bar{T}T \end{pmatrix} \tag{5.7}$$

これを用いると $Dp - \bar{D}p$ system に特有の WZ-term は次のように与えられる。

$$S_{WZ} = \int_{\Sigma_{(p+1)}} C \wedge Str\ exp\mathcal{F} \tag{5.8}$$

ここで、Str は super-trace を意味することに注意。

このような WZ-term は次章で示すように、tachyon を kink 解のように condence する場合には non-BPS D-brane の WZ-term を自然に再現し妥当であることが確認される。しかしながら tachyon を magnetic flux の存在下で voltex line として condence させて 2 次元低い D-brane を作る場合 (すぐ後に述べる) には、$DT \sim 0$ より $dT \wedge d\bar{T}$ と $\{F, TT\}$ が相殺してしまいこのような WZ-term は影響しない。むしろ、D-brane と antiD-brane がもともと持っている WZ-term によって 2 次元低い D-brane の RR 電荷が生成されるのである。

5.3 $D(p+2) - \bar{D}(p+2)$ system の tachyon condensation による $Dp-brane$ の生成

brane-antibrane system はそのまま tachyon condence すると真空に崩壊すると思われるが、topological に非自明な方法で tachyon を condence すると次元の低い D-brane を構成できる [43][20]。

[3] 具体的には brane,antibrane がそれぞれ N, M 枚ある時には、super-Lie algebra $U(N|M)$ となる。しかしながら何故、super-Lie algebra が brane-antibrane system を考えるとこのように自然に出て来るのかよく分かっていない。

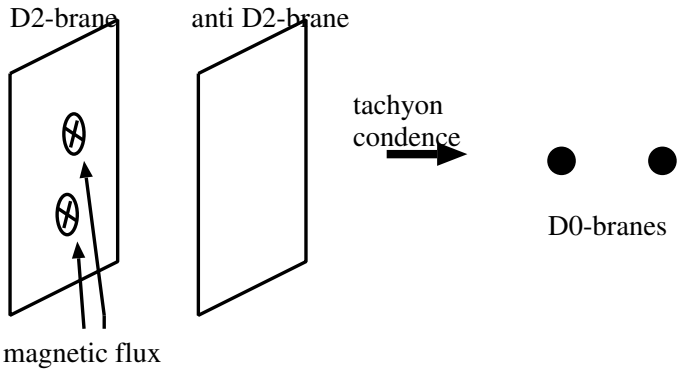

図 5.1: D2 と $\bar{D}2$ の対消滅

K-theory を用いた一般論は後の章に譲るとしてここでは [42][43] に従って $D(p+2) - \bar{D}(p+2)$ から $Dp - brane$ を構成する方法について述べる。本質的に (2 + 1) 次元の場の理論と見なせるので p=0 の場合に限る。一般の p への拡張は自明である。また tachyon potential は $\mathrm{U}(1)$symmetry を持っていて $|T| = T_0$ で最小になるとしておく。

tachyon condence が非自明になるよう、magnetic flux が次のように存在する場合を考える。

$$\int_{S^1} (A_{(1)} - A_{(2)}) = \int_{disk} (F_{(1)} - F_{(2)}) = 2n\pi \tag{5.9}$$

このとき Dirac 量子化により n は整数となっている。このような場合にはエネルギーを最小とするように tachyon 場の真空期待値は、十分遠方で $|T| = T_0$ かつ $DT = 0$ となるはずである。したがって、空間 2 次元の極座標 (r, θ) を用いると、$r \to \infty$ で、

$$T(r, \theta) \sim T_0 e^{in\theta}, \quad A_\theta^{(1)} - A_\theta^{(2)} \sim n \tag{5.10}$$

と振舞う。一方 WZ-term (普通の D-brane のもの) から、

$$2\pi\alpha'\mu_2 \int C_{D0} \wedge (F_{(1)} - F_{(2)}) = 4\pi^2 \mu_2 \alpha' n \int C_{D0} = \mu_0 n \int C_{D0} \tag{5.11}$$

の相互作用が生じ、n 個の D0-brane が生成されることが分かる (図 5.1 参照)。すなわち、tachyon 場の wind 数が n である voltex line 型の configration によって n 個の D0-brane が生成されるとも言える。このようにして brane-antibrane system から次元が 2 低い brane を構成することができることが分かった。

では今の状況を torus コンパクト化して T-dual をとるとどうなるだろうか。特に n=2 とすると、まず D2-brane が 2 つありそれぞれの D-brane 上に+1,-1 の magnetic charge が存在する状態となる。すなわち、ゲージ場が次のように入っている $\mathrm{U}(2)$ ゲージ理論と見なせる [42]。

$$A_1 = 0, \quad A_2 = \begin{pmatrix} Fx_1 & 0 \\ 0 & -Fx_1 \end{pmatrix} \tag{5.12}$$

このように考えると、brane-antibrane system に存在し、非摂動的な扱いが困難な tachyon 場の議論を避けて、純粋にゲージ理論の枠内で議論できる。その時このゲージ場は連続的な変形で field strength が 0 にすることができることが分かる[4] ので、安定化して magnetic field は消滅することがわかる。さらに T-dual をとってもとに戻すと、 2 つの D0-brane が得られ、前の直接的な推論と一致する。

この T-dual をとる議論の欠点は、純粋な brane-antibrane system の真空への崩壊については扱うことができない点である。

5.4 $D3-\bar{D3}$ からの (p,q)-string の生成

ここでは、brane-antibrane から次元の低い object を作り出す 2 つ目の例として P.Yi[30] の考え方を $D3-\bar{D3}$ system に応用して、F-string の生成について議論する。

原論文では、M-theory で $M5-\bar{M5}$ から tachyon condence によって M2brane を構成することを考え、それを S^1 コンパクト化することによって TypeIIA での F-string の生成とそれによる U(1) 問題の解決法を議論している。また $M5-\bar{M5}$ が S^1 に巻きつかない場合を考えて、TypeIIA で NS5-brane と antiNS5-brane から D2-brane が構成できることも指摘されている。しかしながらこれらの場合に tachyon を生み出すと考えられるのはのは 5-brane 間の membrane であってその量子的扱いは困難であり、より信頼性の薄い議論になってしまう。そこでここではそのような困難が生じない $D3-\bar{D3}$ system を取り上げる。

まず、前節でやったように $D3-\bar{D3}$ から magnetic flux によって D-string を構成することは可能である。従って、形式的には (p,q)string も TypeIIB の $SL(2,\mathbf{Z})$duality によって構成できると思われる。具体的には、D-brane の DBI action と WZ-term に含まれている brane 上の U(1)gauge field を含む次の項に注目する。

$$S_{DBI} \sim \int B_{NS} \wedge *(F_{(1)}+F_{(2)}), \quad S_{WZ} \sim \int B_{RR} \wedge (F_{(1)}-F_{(2)}) \tag{5.13}$$

既に見たように後者の項から、magnetic flux によって D-string が生じる。前者の項からは、$\int *(F_{(1)}+F_{(2)}) = 2\pi m$ のような electric flux によって F-string が生成されることが分かる。このとき condence する tachyon はもとの T ではなく、その S-dual をとったもの T_S であり、この tachyon は T とは違い $A_{(1)}+A_{(2)}$(の dual) に結合する。

さてこの事実を U(1) 問題に応用してみる。非自明な flux を全く持たない状態での $D3-\bar{D3}$ の tachyon condence を考えると、condence するのは T と T_S である。この時、Higgs 現象によって、U(1) ゲージ場はすべて massive となり、U(1) 問題は起こらないことになる。このように U(1) 問題は非摂動的効果を取り入れると解決される可能性がある。

また、(p,q)string の生成は同様に次のようにして考えられる。

$$S_{DBI}+S_{WZ} = \int B_{NS} \wedge *(F_{(1)}+F_{(2)}) + \int B_{RR} \wedge (F_{(1)}-F_{(2)})$$

[4] 具体的に言うと t'Hooft の tron configration[92][93] のようには torus の 2 つの方向に対してゲージ変換が非可換にはなっていないので、topological な障害がないということである。例えば、D0 が N、D2 が M 存在する場合だと、$\Omega_1\Omega_2 = \Omega_2\Omega_1 e^{\frac{2\pi i N}{M}}$ となり tron like な状況になる。但し Ω は torus のそれぞれの方向に一周したときのゲージ変換を表す。

$$
\begin{aligned}
&= \int (pB_{NS} + qB_{RR}) \wedge (-r(F_{(1)} - F_{(2)}) + s * (F_{(1)} + F_{(2)})) \\
&+ \int (rB_{NS} + sB_{RR}) \wedge (p(F_{(1)} - F_{(2)}) - q * (F_{(1)} + F_{(2)}))
\end{aligned} \tag{5.14}
$$

但し、$sp - rq = 1$ である。また簡単のため S_{DBI}, S_{WZ} の項の係数をそれぞれ適当に normalize して上式が成り立つようにしている。このことは次のような $SL(2, \mathbf{R})$ の変換で $D3 - \bar{D3}$ system の action が不変となることを示唆している。

$$
\begin{pmatrix} B_{NS} \\ B_{RR} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{NS} \\ B_{RR} \end{pmatrix} \tag{5.15}
$$

$$
\begin{pmatrix} F_{(1)} \\ *F_{(1)} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} p & -q \\ -r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{(1)} \\ *F_{(1)} \end{pmatrix} \tag{5.16}
$$

$$
\begin{pmatrix} F_{(2)} \\ *F_{(2)} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{(2)} \\ *F_{(2)} \end{pmatrix} \tag{5.17}
$$

D3-brane についてはここで考えた項以外の非線形な項も含めて $S_{DBI} + S_{WZ}$ が $SL(2, \mathbf{R})$ の変換で不変となることは [79] で示されている。実際には電荷の量子化によって、$SL(2, \mathbf{Z})$ の対称性が残りこれは、D3-brane 上で TypeIIB の $SL(2, \mathbf{Z})$duality を見ていることを意味する。ここで考えているのは、$D3 - \bar{D3}$ system にそれを拡張したものである。以上より (p,q)string を生成するには、$D3 - \bar{D3}$ system にもともと $\int [-r(F_{(1)} - F_{(2)}) + s * (F_{(1)} + F_{(2)})] = 2\pi n$ と flux を与えておけばよいことがわかった。このとき condence する tachyon $T_{(p,q)}$ は (p,q) が異なると nonlocal に異なる場であるはずで、非摂動的なので詳しい取り扱いは困難である。しかしながらその存在は TypeIIB の $SL(2, \mathbf{Z})$duality より明らかである。

5.5 複数の brane,antibrane から構成される場合

今までは brane,antibrane が一つずつの場合を主に考えてきたが、ここでは両者とも複数ある場合の取り扱い方について述べる。この場合には brane-antibrane system に Chan-Paton factor(CP factor) の概念を拡張して記述することになる。

具体的には brane が N 枚、antibrane が M 枚存在する場合、Chan-Paton factor は $(N + M) \times (N + M)$ 行列となる。重要なのは GSO projection であるが、次のように CP factor への fermion 数演算子：$(-1)^F$ の作用を定めればよい。

$$
(-1)^F \quad : \quad \Lambda \to \begin{bmatrix} 1_N & 0 \\ 0 & -1_M \end{bmatrix} \Lambda \begin{bmatrix} 1_N & 0 \\ 0 & -1_M \end{bmatrix} \tag{5.18}
$$

このように定義すると brane 間、antibrane 間を結ぶ string には正常な GSO projection となり antibrane と brane を結ぶ string には逆の GSO が生じることになりうまくゆく。

このようなやり方を用いると、world volume 上の field は次のようにエルミート行列でかける。(これは前にも述べたように、super Lie 代数 $U(N|M)$ の super-connection ともみなせる。)

$$
\begin{bmatrix} A^{(1)} & T \\ T^\dagger & A^{(2)} \end{bmatrix} \tag{5.19}
$$

従って、$U(N) \times U(M)$ のゲージ理論を意味し、複素スカラーの tachyon 場は $(N, \bar{M}), (\bar{N}, M)$ の表現に属す。

特に N=M の場合を考えると、tachyon condensation によって真空に崩壊すると考えられる。ではこのときの tachyon potential はどのようになるだろうか。$U(N) \times U(N)$ の対称性を持っているのは明らかであり、摂動論で求めると、

$$V(T, T^\dagger) = -m^2 TrTT^\dagger + \lambda^2 Tr(TT^\dagger)^2 + \cdots \tag{5.20}$$

となるので、摂動論の範囲では、$V(T, T^\dagger) = V(tr|T|^{2n})$ と書ける。ほかに $U(N) \times U(N)$ の対称性を持っているものとして、$|detT|$ もあり、このような potential が非摂動的に生じる可能性は否定できない。また、$U(N) \times U(N)$ のゲージ変換で任意の複素行列 T が対角化でき、その値を $diag(\alpha_1, \cdots, \alpha_N)$ とおくと、この tachyon potential が最小になるのは、$|\alpha_1| = \cdot\cdot = \cdot\cdot = |\alpha_N| = T_0$ の時 (T_0 はある実定数) となる。このことから重要な帰結として、

$$T(x) = T_0 U(x) \quad , \quad U(x) \in U(N) \tag{5.21}$$

という配位が potential の値を最小とする唯一の tachyon 場の配位となっていることがわかる。

さてそれでは、tachyon 場が condense している時にゲージ対称性 $U(N) \times U(N)$ はどのように破れるだろうか。前の対角化の議論より、まず一般に $U(1)^N$ に破れることが分かる。この事実は、U(1) 問題の一般化とも言える [9]。また最も破れが小さくなるのは固有値がすべて等しいときで、

$$U(N) \times U(N) \ \rightarrow \ U(N) \tag{5.22}$$

と破れる。この時 tachyon 場の vacuum manifold (potential を最小にする T の値の集合) は、$\frac{U(N) \times U(N)}{U(N)} \sim U(N)$ と見なせる。このことは後述する tachyon condensation と K-theory の関係で重要な役割を担う [20]。

また特に、$D9 - \bar{D}9$ system については [9] で次のような議論がなされている。b-b string や a-a string から生じる $(N^2 + M^2)$ 個の fermion と b-a string, a-b string から生じる $2NM$ 個の fermion は chirality が異なるので、gravitational anomaly は $(N^2 + M^2 - 2NM)$ に比例し N=M の時のみ相殺する。またその時、gauge anomaly については、

$$Tr_{adj} F^{2k} = 2n Tr_{fund} F^{2k} + \cdots \ (for \ SU(n) Yang - Mills) \tag{5.23}$$

が成り立つため、F について最高次の項は相殺し、他の項は Green-Schwarz mechanism によって相殺できる。つまり N=M のときは tachyon は存在しているが、anomaly は相殺しているのである。これは TypeI SO(32) 理論の時に、そうであったように、anomaly cancellation と tadpole cancelling が同じ条件を与える例の一つといえる。

5.6 $D(p+4) - \bar{D}(p+4)$ system からの $Dp - brane$ の生成

前に述べた、複数の brane,antibrane からなる場合の応用として、tachyon condence による次元が 4 低い D-brane を生成する方法を考えてみる [43][20]。まず TypeII 理論の中で考え、表現を簡単にするため $D5 - \bar{D}5$ system(p=1) に固定して述べる。

D5-brane が 2 枚、antiD5-brane が 2 枚ある場合を考えると brane 上では $U(2) \times U(2)$ ゲージ理論となり、tachyon $T, T^\dagger$ は $(\mathbf{2}, \bar{\mathbf{2}}), (\bar{\mathbf{2}}, \mathbf{2})$ 表現に属し、tachyon potential は $U(2) \times U(2)$ の対称性をもつ。

さて、2 枚の D5-brane 上に SU(2)instanton が n 個存在し、antiD5-brane のゲージ場は自明な場合を考える。この時、$U : R^4 - \{0\} \to SU(2) \sim S^3$ の写像を考えると、homotopy group $\pi_3(S^3) = \mathbf{Z}$ すなわち、winding number で分類される。特に winding number が n である U を用いて、n-instanton 解は無限遠方で次のように書ける。

$$A_\mu^{(1)} \sim i\partial_\mu U U^{-1} (r \to \infty), \quad A_\mu^{(2)} \sim 0 \tag{5.24}$$

このようにゲージ場が非自明になっている場合、運動エネルギーを最小にするために tachyon 場は無限遠方で、$DT = 0, V(T) = min$ となるはずで、$T \propto U$ となり、式 (5.21) を満たせるのでポテンシャルエネルギーも最少にすることが分かる。このとき tachyon 場も winding number n をもつ非自明な配位となっている。

すると、D-brane の WZ-term より $\int C_{D0} \wedge F \wedge F \sim n \int C_{D0}$ となり n 個の D1-brane が生成されていることが分かる。つまり winding number n をもつ tachyon 場から、n 個の D1-brane が生成されるのである。

以上のことは、TypeI の $D5 - \bar{D}5$ system にも応用できる [43]。TypeI では、Ω による projection があり、tachyon 場は $\sigma_2 T^* \sigma_2 = T$ を満たすことになる。これを解くと、ρ を実関数、U を SU(2) 行列関数として $T = \rho U$ と書ける。従って式 (5.21) の配位が許され、前と同じように U を winding number n の map とすると n 個の D1-brane を生成することになる。

5.7 String field theory と tachyon potential

最後に [52][53] に従って、string field theory による tachyon potential の記述について述べる。

そもそも tachyon potential という概念自体は off shell で定義されるものである。通常の on shell の string の扱いでは marginal な変形のみしか記述できず、tachyon condense という一般には marginal ではない現象を扱うことはできない。7 章ではその例外つまり marginal な変形となり通常の string 理論で扱える特別な場合を扱う。従って、一般の brane-antibrane の系での tachyon potential を扱うには string field theory が必要である。

まず、初めに bosonic string の場合について考える。このときには、1 枚の Dp-brane を考えるだけで既に tachyon が存在する。そこでこの tachyon の potential V について考えたい。扱いやすくするために、Dp-brane がコンパクトな p 次元多様体に巻きついていると仮定し、弱結合領域のみ考える。

bosonic open string の string field theory[54] の作用は次で与えられる。

$$S = -\frac{1}{g_o^2}\left(\frac{1}{2} < \Phi | Q_B | \Phi > + \frac{1}{3} < \Phi\Phi\Phi >\right) \tag{5.25}$$

ここで、Q_B は BRST 演算子であり、$< \cdots >$ は $|\Phi >$(string field) で表される状態の open string world sheet が貼り合わされることを意味する。つまり propagator と三点 vertex を組み合わせた

open string の Feynman rule を与えている。この三点 vertex は、Disk を三等分した各部分にそれぞれの open string の world sheet がつながるもので、Witten vertex と呼ばれる。この相互作用による Feynman rule によって、すべての open string の Riemann 面を過不足なく足し上げることができる。以下簡単のため $\alpha' = 1$ とする。

また、string field $|\Phi>$ は次のように ghost 数が 1 のすべての状態を粒子場を係数として zero mode と level について足し上げたものである。但し、b, c の ghost 数を $-1, 1$ とし、level は L_0 の固有値に 1 足したものとする。例えば、$c_1|0>$ は level 0 である。

$$|\Phi> = \int (dk^0)[t(k^0)c_1|k^0> + \phi^i(k^0)c_1\alpha^i_{-1}|k^0> + \cdots] \tag{5.26}$$

$$t(x^0) = \int (dk^0)\ e^{ik^0x^0}t(k^0), \quad \phi^i(x^0) = \int (dk^0)\ e^{ik^0x^0}\phi^i(k^0) \tag{5.27}$$

$$< k^0|c_{-1}c_0c_1|k'^0 >= 2\pi\delta(k^0 + k'^0) \tag{5.28}$$

ここで、Dp-brane の空間方向をコンパクト化しているので zero mode が k^0 のみであることに注意。また、$t(k^0)$ は tachyon 場を意味し、$\phi^i(k^0)$ は Dp-brane の transverse な方向の brane の動きを表すことに注意。

この時、理論の potential V はすべての場を定数とし、tree level (Disk amplitude) で

$$\begin{aligned} &t(k^0) = t\delta(k^0), \quad \phi^i(k^0) = \phi^i\delta(k^0) \\ &V(t, \phi^i, \cdots) = -\frac{1}{2\pi\delta(0)}S(t, \phi^i, \cdots)|_{Disk} \end{aligned} \tag{5.29}$$

と前述の作用から求まる。さらに量子補正 (loop 補正) を入れると effective potential を求めることができるが、結合定数 g_o について高次になり以下の議論では無視できる。以下ではこの V の最小値を求めたい。

さて、string field の Hilbert space を $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ と分けて $\mathcal{H}_1$ を真空に $b(z), c(z), T(z)^{matter}$ を作用させて得られるものとし、$\mathcal{H}_2$ はそれ以外の状態とする。それぞれの sector の operator を V_1, V_2 とすると、すぐに分かるように

$$< V_1|Q_B|V_2 >= 0, \quad < V_1|V_1|V_2 >= 0 \tag{5.30}$$

となるので、$\mathcal{H}_2$-sector の場は必ず 2 次式以上で potential V に含まれる。従って $\mathcal{H}_2$ の場の運動方程式を用いてすべて 0 と置くことが、V を最小にする可能性がある。以下実際に見るようにこれが V の最小値を与える必要条件なっていると思われる強い証拠がある。そのことを仮定すると実際に最も安定な配位を探す目的で tachyon potential を考える時には $\mathcal{H}_2$ の場をすべて 0 と置いてもよいことになり、それを $\tilde{V}(t_k)$ と書くことにする。ここで $\mathcal{H}_1$ の無限個あるすべての場を t_k で表した。一方、$\mathcal{H}_1$ は Dp-brane のコンパクト化によらない代数であるのは明らかであるから次の結論 (tachyon potential の普遍性) が得られる [52]。

Bosonic string Dp-brane の tachyon potential $\tilde{V}(t, \cdots)$ はどのような Dp-brane でも比例係数を除き、同一である。

ここで、比例係数を除きとしたのはもともとの normalization (5.28) がコンパクト化の仕方によって本当は変わるからである。ここではそれを略記して 1 としている。

さて次に、Dp-brane の質量 M を求めたい。このためには、作用 (5.25) から場 $\phi^i(x^0)$ についての運動項 S_{kin} を DBI-action S_{DBI} と比較して求めればよい。それぞれ、

$$\begin{aligned} S_{kin} &= -\frac{1}{2g_o^2}\int (dx^0)\ (\partial_0\phi^i(x^0))^2 \\ S_{DBI} &= -M\int\sqrt{-G} = -M\int (dx^0)[1+\frac{1}{2}(\partial_0 Y^i)^2+\cdots] \end{aligned} \tag{5.31}$$

となる。注意すべき点は ϕ^i と Y^i が次のように定数倍違うことである[5] 。

$$\phi^i = \frac{Y^i}{\sqrt{2}\pi} \tag{5.32}$$

となり、これらから Dp-brane の質量 M は

$$M = \frac{1}{2\pi^2 g_o^2} \tag{5.33}$$

と求まる。

そこで、tachyon potential を

$$\tilde{V}(t_k) = M\ f(t_k) \tag{5.34}$$

と書き直すと、基本的主張

「Bosonic string の D-brane は、tachyon condense によって真空に崩壊する。」

が正しいのならば、tachyon condense による安定化エネルギーは Dp-brane の質量を丁度打ち消すはずで、

$$min\ \{f(t_k)\} = -1 \tag{5.35}$$

が成立つことになる。

Dp-brane の質量は Bosonic string では当然量子補正をうけるが結合定数の高次の項となるので、tachyon potential を tree level で求めたことを考慮するとそれは無視してよいことに注意。

文献 [53] では level が 4 までの $\mathcal{H}_1$ に属す string field で実際に

$$\begin{aligned} |\phi> &= tc_1|0> + uc_{-1}|0> + \frac{v}{\sqrt{13}}L_{-2}c_1|0> + AL_{-4}c_1|0> + BL_{-2}L_{-2}c_1|0> \\ &\quad + Cc_{-3}|0> + Db_{-3}c_{-1}c_1|0> + Eb_{-2}c_{-2}c_1|0> + FL_{-2}c_{-1}|0> \end{aligned} \tag{5.36}$$

と展開して、tachyon potential の最小値をこれらのパラメーターを動かして最小値を求めている。但し、t は level 0, u, v は level 2, A, B, C, D, E, F は level 4 に属す。level が奇数のものは対称性

[5] このことを見るためには 2 枚 Dp-brane を用意して、標準的記述 [1][25] の vertex operator $e^{i\frac{Y^i}{2\pi\alpha'}X^i}\otimes\sigma_1$ をまず思い出す。この Y^i は DBI-action の定義に使ったものと同じである。それと今の vertex operator: $\phi^i c_1\alpha^i_{-1}|0>\otimes\sigma_1$ を比較すればよい。

より、potental に偶数次のみで寄与するので 0 と置いている。結果は次のように、考慮する level を上げるに従って飛躍的に式 (5.35) に収束する。すなわち、level 0 で $f(t_k)|_{min} = -0.684$, level 2 で $f(t_k)|_{min} = -0.959$, level 4 で $f(t_k)|_{min} = -0.986$ となる。この収束の異常な速さは、弱結合領域ならば tachyon potential の低い次数で十分に良い近似となっていることを示唆し、かつ $\mathcal{H}_2$ の場が 0 となる解を採用し、tachyon potential を V から $\tilde{V}$ に簡単化した仮説が正しかったことを強く裏付ける。

さてそれでは TypeII 理論の brane-antibrane system についてどうであろうか。open string field theory は超弦理論の場合にも picture change で多少複雑になるが同じように構成されている [55]。但し、brane-antibrane system の場合は Chan-Paton factor $\{1, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ を考慮しなければならない。そのなかで $\{\sigma_2, \sigma_3\}$ の sector は potential には 2 次以上の項で寄与するので前と同様に運動方程式より 0 とできる。また同様に R-sector の場は 0 にできるので NS-sector のみ考えればよい。

Bosonic の時と同様に、$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ と分解する。ここで $\mathcal{H}_1$ は $b(z), c(z), T(z)^{matter}, G(z)^{matter}$ を真空に作用させて得られるものとする。すると、brane と antibrane の距離が 0 のときに限って、potential を求める時にうまく $\mathcal{H}_2$ の場を 0 とすることが前と同じ議論で可能となる。

これから分かるように、TypeII 理論の重なった brane と antibrane の系についても tachyon potential がコンパクト化によらず比例係数以外は同一であることが分かる。

また $\{\sigma_2, \sigma_3\}$ の sector を 0 と置くことから分かるように、以上の議論は次章で説明する non-BPS D-brane における tachyon potential にも適用できる。つまり、non-BPS D-brane の tachyon potential もコンパクト化によらず比例係数以外は同じである。

最後に、[52][51] で提案されている U(1) 問題の解決法の一つについて説明する。以上の tachyon potential の議論から分かるように、potential が最小となる点ではエネルギーは場の値によらない。たとえば、brane 上のゲージ場の強さ $F_{\mu\nu}$ にもよらない。またこのことは T-dual をとると $F_{\mu\nu}$ は D-brane の傾きになることからも明らかである。従って tachyon condense 後は、U(1) ゲージ場は運動項が消えてしまいカレントとの相互作用のみの残ると考えられ、経路積分によってカレントが 0 となり、もはや D-brane に open string が付着できないことを意味する。このような考え方は既に説明した文献 [30] とかなり違うが、U(1) 問題の解決を与える可能性がある。

第6章　Non-BPS D-brane

6.1　Non-BPS D-brane の記述と基本的性質

boundary state での Non-BPS D-brane[33][44][45] の記述については既に 4 章で見たように NSNS-sector のみを含み、RR 電荷を帯びていないものとして定義される。また open string の立場で記述するには、GSO projection しない "D-brane" と扱えばよいことも見た通りである。もしくは CP factor$[1, \sigma_2]$ を加えて、σ_2 は fermion number が odd として GSO projection してもよい。

つまり分かりやすく言うと、Non-BPS D-brane には 2 つの sector$[1, \sigma_2]$ があって、1 の sector は普通の D-brane と全く同じで、tachyon はなく、massless 場は 8boson+8fermion $(A^\mu, X^i, \lambda^\alpha)$ からなる。一方 σ_2 の sector は普通の D-brane と比べて GSO が逆で、tachyon があり、massless 場は前のとは逆の chirality を持つ 8fermion のみ $(T, \chi^{\tilde{\alpha}})$ である。ここで brane-antibrane system とは違い tachyon 場は実関数であることに注意。

また non-BPS D-brane が N 枚ある場合も同様で、(low energy limit での)boson 場は、U(N) ゲージ場 $A^\mu(x)$ とその adjoint 表現に属す tachyon 場 $T(x)$ で構成される。ここで $T(x)$ は Hermite 行列であることに注意。

いずれにせよ tachyon を含むので不安定な存在であり、RR 電荷を帯びていないので真空と区別がつかず、tachyon condence で真空に崩壊すると思われる。但しここで注意しなければならないのは、今考えているのは flat な時空における Non-BPS D-brane であって、曲がった時空の場合には安定になる可能性がある [45] ことである。そのような例については次章で述べる。また tachyon を含む D-brane という意味では、形式的に bosonic string での D-brane[46] と似ているとも言える。

また Non-BPS D-brane は普通の D-brane の $\sqrt{2}$ 倍の tension $\sqrt{2}\tau_p$ を持っていることにも注意。

最後に、Non-BPS D-brane の open string の consistency について述べる。GSO-projection をしないので、相互作用を考えると様々な問題が生じる可能性がある。完全には consistency は証明されているとはいえないが、次の 2 点は問題が生じない。

まず closed string の GSO-projection と矛盾しないことは、boundary に挿入された Non-BPS D-brane の vertex operator から相関関数を求める時、CP-factor の trace をとることから分かる。つまり closed string の NSNS-sector と結合する場合は $(-1)^F = -1$ の vertex operator は必ず偶数個挿入されていてうまく行く。一方 RR-sector では cut から余分に σ_2 が挿入されると考えて [44]、奇数個挿入されて consistent となる。

また open string R-vertex operator どうしの locality もやはり CP-factor の trace をとることから成立つ。

6.2 Non-BPS D-brane の lowenergy effective action

tachyon 場、massless 場以外の励起を integrate out した lowenergy effective action を一つの Non-BPS D-brane についても考えたい。[51] で提唱されている DBI-like な action[1] は、

$$S_{DBI} = -\int d\sigma^{(p+1)} \sqrt{-det(G+\mathcal{F})} f(T, \partial_\mu T, \cdots) \tag{6.1}$$

$$\mathcal{F} = B + 2\pi\alpha' F \tag{6.2}$$

で与えられる。ここで B、F は Non-BPS D-brane 上の B-field、F は field strength dA である。また f は tachyon potential を拡張した未知の関数である。

また、Non-BPS D-brane の WZ-term についても string treelevel amplitude から求まっていて、次のようになる [27]。但し a は比例係数である。

$$S_{WZ} = a \int_{\Sigma_{P+1}} \Sigma_q C_{(q)} \wedge dTr\ Te^{2\pi\alpha' F+B} \wedge \sqrt{\frac{\hat{A}(R_T)}{\hat{A}(R_N)}} \tag{6.3}$$

6.3 Non-BPS D-brane での tachyon condensation

もともと不安定であった Non-BPS D-brane が、tachyon 場を一様に condense することによって安定化すなわち真空に崩壊する場合を考える。この時、$f(T, \cdots) \to V(T)$ と tachyon potential を用いて Non-BPS D-brane の action は記述される。T_0 を、tachyon potential を最小とする T の値とするとそのときは真空と同一視されるので、

$$V(T=0) = \sqrt{2}\tau_p \quad , \quad V(T=T_0) = 0 \tag{6.4}$$

となるはずである。従って、このように考えると tachyon condense が完全に終わると、action 自体が 0 となり、もともと Non-BPS D-brane 上に存在した場は何も残らないことになる。さらに正しくは strign field theory を用いて解析すべきで 5 章 7 節で触れたように Non-BPS D-brane の場合も tachyon potential の普遍性が成り立つ。

さて、後述の descent relation の考え方を用いると、$Dp - \bar{D}p$ system は一度、tachyon condense して Non-BPS D(p-1)-brane になり、さらに tachyon condense して真空、もしくは tachyon kink があるときは D(p-2)-brane に崩壊することが可能である。このように崩壊する場合は、2 つ目の tachyon condense で tachyon と結合しない U(1) ゲージ場は上に述べたように完全に消失してしまうので U(1) 問題は起こらないことになる。したがってこのような考え方も前章で述べたように U(1) 問題を解決する可能性がある [51]。

6.4 supersymmetric に拡張した Non-BPS D-brane の action

Green-Schwarz string の方法を (BPS)D-brane に適用すると、world volume の field$(X^M, A^\mu, \theta^\alpha_{(1)}, \theta^\alpha_{(2)})$ $(\alpha = 1 \sim 16, \mu = 0 \sim p, M = p-1 \sim 9)$ を用いて、sypersymmetric(global SUSY) で $\kappa-$symmetry

[1] このような tachyon potential のような off shell の作用を導出するには string field theory を用いる必要があると思われる。

をもつ DBI-action (WZ-term も含める) を構成できる。$\kappa-$symmetry の存在は、D-brane によって破れず残る supersymmetry を意味し、brane 上の物理的 fermion 場を半分に減らす役目がある。

さて Non-BPS D-brane の場合にはどうであろうか。１０次元時空には supersymmetry があるので、Non-BPS D-brane の world volume action には global SUSY は存在するはずである。しかし D-brane によって破れず残る supersymmetry はないので、$\kappa-$symmetry は存在しないと考えられる。このことは、brane 上の物理的 massless fermion 場が BPS D-brane と比べると 2 倍存在することを意味し、既に見た open string からの議論と一致する。そこで Sen は [51] において、tachyon 場以外についての Non-BPS D-brane の world volume action として BPS D-brane と (WZ-term を除いて) 全く同じものを提唱した。但し、κ-symmetry は world volume の次元に依存するためこの場合には存在しない。

具体的には、例えば TypeIIA を考えるならば、$(\theta^{\alpha}_{(1)}, \theta^{\tilde{\alpha}}_{(2)})$ をまとめて θ と書くと、(6.3) 式を次のように書き換えればよい。

$$\Pi^M_\mu = \partial_\mu X^M - \bar{\theta}\Gamma^M \partial_\mu \theta \tag{6.5}$$

$$G_{\mu\nu} = \eta_{MN}\Pi^M_\mu \Pi^N_\nu \tag{6.6}$$

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = 2\pi\alpha' F_{\mu\nu} + B_{\mu\nu} - [\bar{\theta}\Gamma_{11}\Gamma_M \partial_\mu\theta(\partial_\nu X^M - \frac{1}{2}\bar{\theta}\Gamma^M\partial_\nu\theta) - (\mu \leftrightarrow \nu)] \tag{6.7}$$

第7章　安定なNon-BPS状態

この章では今までの準備をもとに、安定な non-BPS 状態の具体例を見てゆく。またその強結合極限についても述べる。安定な non-BPS 状態の研究は string-duality を BPS 状態以外の対応で検証する意味でも、いままで考られてこなかった D-brane の特殊な状況を調べるという意味でも意義のあることである。

7.1　TypeI SO(32) spinor soliton

HetSO(32) 理論には、SO(32)spinor 電荷をもつ massive 状態 (SO(32)free fermion の R-sector から生じる) が存在する。そのなかで最も軽い状態に着目する。massless 状態は SO(32)adjoint 表現であり spinor 電荷を帯びないので、その最も軽い状態は安定であるが massive であり、left-mover,right-mover 両方が励起されていて BPS 状態ではない。つまり安定な non-BPS 状態の存在が分かったことになる。さて Het－TypeI duality を考えると、TypeI 側にもそのような安定な non-BPS 状態が存在するはずである。以下ではこのような non-BPS 状態を brane-antibrane system を用いて構成し [43]、non-BPS D-brane との同一視を行う [44]。

7.1.1　brane-antibrane の対消滅と TypeI SO(32) spinor soliton

まず、問題を扱いやすくするため x^9 方向を S^1 コンパクト化 (半径 R) して考える。また以下の議論は摂動論に基づき、open string の tree level に限る。例えば、D-brane 間の引力などは、「closed string の tree level = open string の one loop」とみなせるので無視することになる。

さて、(3.2.2) で説明した Het－TypeI duality を思い出すと TypeI の D1-brane が Het の F-string となり、この時に (D1-D9string と dual な)Het の SO(32)free fermion の GSO projection は、TypeI の D1-brane の Z_2wilson line のゲージ化 (=projection) と見なせた。また Het の SO(32)spinor 電荷はその GSO projection の twisted-sector から生じるのだから、TypeI 側では Z_2wilson line が非自明に存在する状況と思われる。つまり、Het の SO(32)spinor 電荷は adjoint 表現を spinor 表現に変えるが、TypeI 側ではもともと SO(32) の adjoint 表現を表す D1-D9string の状態が Z_2wilson line によって境界条件の twist を受け SO(32) の spinor 表現を表す D1-D9string の状態に変わる。

従って、具体的に「TypeI SO(32) spinor soliton」を作るには、Z_2wilson line が存在する D1-brane と wilson line が存在しない antiD1-brane を対消滅させれば良い [43] と思われる。この system の安定性を調べてみよう。

この system の CPfactor は $\Lambda = \{1, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ で表され、world sheet fermion number $(-1)^F$

の作用は、前に見たように

$$1 \to 1, \sigma_3 \to \sigma_3, \sigma_1 \to -\sigma_1, \sigma_2 \to -\sigma_2 \tag{7.1}$$

となり、$\{1, \sigma_3\}$ が $D1-D1, \bar{D}1-\bar{D}1$ に、$\{\sigma_1, \sigma_2\}$ が $D1-\bar{D}1, \bar{D}1-D1$ に相当する。この時、$\{\sigma_1, \sigma_2\}$ から生じる tachyon 場 T は Z_2wilson line の影響で次のように展開できる。但し m^2 は、non compact な world volume(今は 1+0 次元) から見た場合の $(mass)^2$ であり、この節では $\alpha' = 1$ とする。

$$T(x^9) = \sum_{n \in Z} T_n \ e^{i\frac{x^9}{R}(n+\frac{1}{2})} \ , \ m^2 = \frac{(n+\frac{1}{2})^2}{R^2} - \frac{1}{2} \tag{7.2}$$

従って、最も $(mass)^2$ が小さい n=0 に着目すると、$R < \frac{1}{\sqrt{2}}$ だと tachyon 場は安定[1] であり、$R > \frac{1}{\sqrt{2}}$ で不安定 (真の tachyon の存在) となる。したがって、半径の小さい所から始めて、徐々に大きくすると $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$ で不安定になり、別の状態に崩壊するはずである (図 7.1 参照)。目的の TypeI SO(32) spinor soliton は R が無限に大きくなった状況に相当するので、その崩壊の様子が分かれば良いことになる。そこで次節では、特に $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$ の時を考えて、tachyon condensation を open string の marginal deformation として記述する方法を述べる。この半径を R_c と書き、critical radius と呼ぶことにする。

7.1.2 CFT による tachyon condensation の記述

$R = \frac{1}{\sqrt{2}}$ では、n=0 に相当する tachyon vertex operator $V_T = \{\sigma_1, \sigma_2\} \otimes e^{-\Phi_B} e^{i\frac{x_9}{\sqrt{2}}}$ が marginal になる。ここで、Φ_B は superconformal ghost の bosonization から生じる場であり、添え字 B は string worldsheet の boundary に制限した場であることを表す。

従って、その vertex operator を用いて tachyon condensation するならば、marginal deformation として扱える。そこで openstring CFT による記述を用いて tachyon condensation を議論する [43]。但し簡単のため NS-sector のみ考える。以下では、X^9 の 9 は省略する。

さてその準備のために次のような fermionization,bosonization を用いて、同等な 3 つの N=1SCFT の自由場表現 $(X, \psi, \tilde{\psi}), (\phi, \eta, \tilde{\eta}), (\phi', \xi, \tilde{\xi})$ を定義する。これは、$R = \frac{1}{\sqrt{2}}$ でのみ可能である。

$$e^{i\sqrt{2}X_L} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + i\eta) \ , \ e^{i\sqrt{2}X_R} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{\xi} + i\tilde{\eta}) \tag{7.3}$$

$$e^{i\sqrt{2}\phi_L} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + i\psi) \ , \ e^{i\sqrt{2}\phi_R} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{\xi} + i\tilde{\psi}) \tag{7.4}$$

$$e^{i\sqrt{2}\phi'_L} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta + i\psi) \ , \ e^{i\sqrt{2}\phi'_R} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{\eta} + i\tilde{\psi}) \tag{7.5}$$

このとき次の式が成り立つ。

$$\psi\xi = \sqrt{2}\partial\phi_L \ , \ \eta\xi = \sqrt{2}\partial X_L \ , \ \psi\eta = \sqrt{2}\partial\phi'_L \tag{7.6}$$

[1] 以下ではここで用いたように、tachyon(場) という言葉を、真の意味で tachyon($m^2 < 0$) でないときにも brane-antibrane string の最低励起に対して用いることにする。

また、それぞれの OPE は次のように normalize する。

$$X_R(z)X_R(w) \sim \phi_R(z)\phi_R(w) \sim \phi'_R(z)\phi'_R(w) \sim -\frac{1}{2}ln(z-w) \tag{7.7}$$

$$\psi(z)\psi(w) \sim \xi(z)\xi(w) \sim \eta(z)\eta(w) \sim \frac{1}{z-w} \tag{7.8}$$

さらに、boundary に制限した場は例えば $X_B = X_L + X_R$ のように表すとすると、

$$X_B(x)X_B(y) \sim \phi_B(x)\phi_B(y) \sim \phi'_B(x)\phi'_B(y) \sim -2ln(x-y) \tag{7.9}$$

となり、e^{ikX_B} の次元は k^2 となる。

また、S^1 コンパクト化した TypeI 理論の projection $\Omega, (-1)^F, h$ の作用についてまとめておく [2] 。ここで、h は S^1 方向に一周分 shift する operator である。

$$\begin{aligned}
\Omega \quad &: \quad \Lambda \to \Lambda^T, \alpha_n \to (-1)^n \alpha_n, \psi_r \to e^{i\pi r}\psi_r \\
&\quad e^{-\Phi_B}|0> \to \begin{cases} -ie^{-\Phi_B}|0> & (for\ \Lambda \in \{1, \sigma_3\}) \\ -e^{-\Phi_B}|0> & (for\ \Lambda \in \{\sigma_1, \sigma_2\}) \end{cases}
\end{aligned} \tag{7.10}$$

$$\begin{aligned}
(-1)^F \quad &: \quad \Lambda \to \sigma_3 \Lambda \sigma_3, X \to X, \psi \to -\psi, \\
&\quad e^{-\Phi_B}|0> \to -e^{-\Phi_B}|0>
\end{aligned} \tag{7.11}$$

$$\begin{aligned}
h \quad &: \quad \Lambda \to \sigma_3 \Lambda \sigma_3, X \to X + \sqrt{2}\pi, \psi \to \psi, \\
&\quad e^{-\Phi_B}|0> \to e^{-\Phi_B}|0>
\end{aligned} \tag{7.12}$$

この $(-1)^F, h$ を $(\phi, \eta, \tilde{\eta}), (\phi', \xi, \tilde{\xi})$ に作用する形に直すと、 次のようになる。

$$(-1)^F \ : \ \xi \to \xi, \eta \to \eta, \phi \to -\phi, \phi' \to -\phi' \tag{7.13}$$

$$h \ : \ \xi \to -\xi, \eta \to -\eta, \phi \to \sqrt{2}\pi - \phi, \phi' \to \sqrt{2}\pi - \phi' \tag{7.14}$$

さてこの時 lowenergy spectrum を調べると D1-brane や antiD1-brane 上のゲージ場は Ω で project out され、確かに Z_2 wilson line のみ存在する。また brane の位置を意味する massless field(A^i) は存在することも分かる。tachyon(T) は σ_1 の CP のみ許され、前に述べたように wilson line のせいで massless になっている。

それでは、さらに tachyon condense を行うことにする。具体的には、次のような tachyon vertex で marginal deformation すればよい。

$$V_T^{(-1)} = \sigma_1 \otimes e^{-\Phi_B} e^{\pm \frac{i}{\sqrt{2}} X_B} \tag{7.15}$$

$$V_T^{(0)} = \sigma_1 \otimes \psi_B e^{\pm \frac{i}{\sqrt{2}} X_B} \tag{7.16}$$

ここで、(0),(-1) という添え字 vertex operator のは picture を表す。また前に述べたように CP が σ_2 の sector は Ω で project out されることに注意。

[2] この中で、Ω の Fock space への作用は奇異に思われるが実際にこのようになることは boundary state の計算より分かる [44]。

線形結合をとって特に $T(x^9) = T_0 cos\frac{x^9}{\sqrt{2}}$ に相当する tachyon condensation を考える。この時 vertex は次のように書きなおせる。

$$\begin{aligned} V_T^{(0)} &= \sigma_1 \otimes \frac{i}{\sqrt{2}} \psi_B (e^{i\frac{X_B}{\sqrt{2}}} + e^{-i\frac{X_B}{\sqrt{2}}}) \\ &= \sigma_1 \otimes i\psi_B \xi_B \\ &= \sigma_1 \otimes \frac{i}{\sqrt{2}} \partial\phi_B \end{aligned} \tag{7.17}$$

この vertex を用いて tachyon condensation は次のような wilson line を (amplitude を計算するときに) 挿入すればよい。但し α を condense の強度を示す parameter とする。

$$\text{wilson line: } W = exp(i\sigma_1 \otimes \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} \oint d\tau \partial\phi_B) \tag{7.18}$$

この形から明らかなように、$(\phi, \eta, \tilde{\eta})$ を基本的な場とみなすとよいことがわかる。

さて以上のように tachyon condense すると何が期待できるか考えてみる。もし tachyon 場を x^9 方向に一様に condense してしまうと 5 章で見たように真空になるはずである。しかし今は、$T(x^9) = T_0 cos\frac{x^9}{\sqrt{2}}$ のように condense すると節 (node) が S^1 方向に一つだけ存在する。node すなわち $T = 0$ な点では、真空とは別の状態と期待されるので、以上のように tachyon condense すると 1 次元下がった solitonic 0-brane が得られると期待される。このとき別の線形結合をとったすなわち $T(x^9) = T_0 sin\frac{x^9}{\sqrt{2}}$ に相当する vertex は、tachyon 場の node の位置を shift するので 0-brane の重心の自由度と思われる。実際、以下の解析で最後まで marginal のままである。

では、この tachyon condensation の様々な state への影響について調べる。

まず明らかに、CP が $\{1, \sigma_1\}$ の sector には影響しない。よって、$\sigma_2 \pm i\sigma_3$ の sector についてのみ考えればよい。これらに対しては、ϕ_B 方向 (半径 $\frac{1}{\sqrt{2}}$) に一周すると次のように wilson line W のために phase shift が生じる。

$$\begin{aligned} exp(i\sigma_1 \otimes \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} \oint d\tau \partial\phi_B)\ (\sigma_2 \pm i\sigma_3)\ exp(-i\sigma_1 \otimes \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} \oint d\tau \partial\phi_B) \\ = e^{\pm i\pi\alpha}(\sigma_2 \pm i\sigma_3) \end{aligned} \tag{7.19}$$

すなわち、momentum shift $\Delta P_\phi = \pm\frac{\alpha}{\sqrt{2}}$ を意味する。またこの時、$\alpha \to \alpha + 2$ の周期を持つことも分かる。

この時、$\chi_B = e^{i\frac{\phi_B}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_B + i\psi_B)$ を基本的場 (fermion) と見なすと便利である。今は $\sigma_2 \pm i\sigma_3$ の sector を考えているので、周期性は次のようになる。もちろん $\alpha = 0$ は condense していないことを表し、普通の NS-sector の周期性となっている。但し world sheet の boudary の座標を τ としていて、$\tau \to \tau + 2\pi$ で S^1 を 2 周したことになる[3] 。

$$\chi_B(\tau + 2\pi) = -e^{\pm 2i\pi\alpha}\chi_B(\tau) \tag{7.20}$$

[3] このことは、$\phi_B = x + 2p\tau + \cdots$ において χ_B が $p = \frac{1}{\sqrt{2}}$ の量子数をもっていて $\tau \to \tau + 2\pi$ のシフトで $\phi_B \to \phi_B + 2\sqrt{2}\pi$ となることから分かる。

従って次のように oscillator で展開できる。

$$\chi_B = \sum_{n\in Z} \chi_{n+\frac{1}{2}\pm\alpha} e^{-i(n+\frac{1}{2}\pm\alpha)\tau} \tag{7.21}$$

但し、反交換関係で非自明なのは次のものである。

$$\{\chi_{n+\frac{1}{2}\pm\alpha}, \chi^\dagger_{m-\frac{1}{2}\mp\alpha}\} = \delta_{m+n,0} \tag{7.22}$$

またこの時、真空は次のように定義される。

$$\chi_{n+\frac{1}{2}\pm\alpha}|0>_\alpha = 0 \ , \ \chi^\dagger_{n+\frac{1}{2}\mp\alpha}|0>_\alpha = 0 \ (n \geq 0) \tag{7.23}$$

この χ_B を用いて state を表現すると、その wilson line による影響は、α の値を変えることによって生じる spectral flow $|0>_\alpha = e^{i\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\phi_B}|0>_0$ として理解できる。この時に重要なのは projection であり、独立なものとして $(-1)^F, (-1)^F h, (-1)^F\Omega$ をとると $(-1)^F$ 以外は CP には自明に作用するので考えやすい。前の 2 つの作用は次のように表せる。

$$\begin{aligned}(-1)^F \quad &: \quad (\sigma_3 + i\sigma_2) \to (\sigma_3 - i\sigma_2), |0>_\alpha \to -|0>_{-\alpha}, \\ &\quad \chi \to \chi^\dagger, \eta \to \eta \end{aligned} \tag{7.24}$$

$$(-1)^F h \quad : \quad |0>_\alpha \to -|0>_\alpha, \chi \to -\chi, \eta \to -\eta \tag{7.25}$$

さて、以上で lowenergy spectrum が tachyon condense によってどのように変化するか調べるのに必要な準備が整った。lowenergy で興味がある spectrum は、それが massless となる α が存在するものである。$(mass)^2$ は、$m^2 = -\frac{1}{2} + \Delta$ と求まるので、それは confomal 次元 Δ を用いて、$\Delta = \frac{1}{2}$ となる α が存在することを意味する。また周期性 $\alpha \to \alpha + 2$ と、後に分かる対称性 $\alpha \to 2 - \alpha$ より、$0 \leq \alpha \leq 1$ のみ考えばよい。

例えば、χ の真空 $|0>_\alpha$ は conformal 次元が $\Delta = \frac{\alpha^2}{2}$ であり tachyon condense とともに mass が大きくなり、$\chi_{-\frac{1}{2}+\alpha}|0>_\alpha$ の $\Delta = \frac{\alpha^2}{2} + \frac{1}{2} - \alpha$ と比べると、真の真空は (もし prjection がなければ)、$0 < \alpha < \frac{1}{2}$ で前者、$\frac{1}{2} < \alpha < 1$ で後者となる。このようなことを考えながら、具体的に興味がある spectrum の変化について (a)Drichlet 方向の field を含まないもの、(b)Drichlet 方向の field を含むもの、に分けて調べると次のようになる。但し、引き続き CP が σ_2, σ_3 の sector のみ考える。

(a)Drichlet 方向の field を含まないもの

$|0>_\alpha$ → もともと $\alpha = 0$ で真の tachyon が無かったので project out されるはず。実際に $(-1)^F h$ で project out される。

$\chi_{-\frac{1}{2}+\alpha}|0>_\alpha \ , \ \chi_{-\frac{1}{2}-\alpha}|0>_\alpha$ → この状態は brane 上のゲージ場に相当するが、それは既述の通り Ω で project out される。

$\eta_{-\frac{1}{2}}|0>_\alpha$ → これも同様に Ω で project out される。

$\eta_{-\frac{1}{2}}\chi_{-\frac{1}{2}+\alpha}|0>_\alpha$, $\eta_{-\frac{1}{2}}\chi^\dagger_{-\frac{1}{2}-\alpha}|0>_\alpha$ → $(-1)^F h$ で project out される

(b)Drichlet 方向の field を含むもの

$\psi^i_{-\frac{1}{2}}|0>_\alpha$ → $\alpha=0$ で、brane と antibrane の相対位置を表す moduli であったので、存在する場である。$\alpha>0$ で massive となる。

$\psi^i_{-\frac{1}{2}}\chi_{-\frac{1}{2}+\alpha}|0>_\alpha$, $\psi^i_{-\frac{1}{2}}\chi^\dagger_{-\frac{1}{2}-\alpha}|0>_\alpha$ → $(-1)^F h$ で project out される

以上をまとめると、任意の α で tachyon は存在せず安定である。また brane と antibrane の相対位置を表す $\alpha=0$ で massless な scalar 場は、$\alpha>0$ で massive となり、特に $\alpha=1$ で最も mass が大きくなる。つまり、$\alpha=1$ で最も brane と antibrane が離れにくくなっていることが分かり、安定な bound state(solitonic 0-brane) の形成と考えられる。

一方、今まで無視してきた CP が $1,\sigma_1$ の sector での lowenergy spectrum は、brane と antibrane の重心を表す massless scalar 場 A^i と、tachyon 場 T(これには $\sim sin(\frac{x^9}{\sqrt{2}})$ と $\sim cos(\frac{x^9}{\sqrt{2}})$ の 2 種あって projection で massless mode のみ許される) であり、α によらない。

これらをまとめてすべての sector をあわせると、solitonic 0-brane($\alpha=1$) の lowenergy (bosonic)field は、$\{A^1,\cdots,A^8,T\}$ と書ける。

7.1.3 critical radius からの deformation と tachyon potential

以上の CFT での tachyon condensation の取り扱いは、critical radius R_C においてのみ成立つ。そこでここでは、半径を少しずらすことを考える。具体的には次のような graviton vertex を挿入して、摂動の leading order で調べることにする [43]。

$$V_g^{(-1,-1)} = e^{-\Phi_B-\tilde{\Phi}_B}\psi_B\tilde{\psi}_B \tag{7.26}$$

但し前と同様に、ψ^9 の 9 の添え字を省略している。

まず tachyon potential $V(\alpha)$ について考える。$V(R=R_C)=0$ ととると、

$$V(\alpha)=\frac{1}{g}(R-R_C)f(\alpha) \tag{7.27}$$

と書ける。さらに $\alpha=0$ が $D1+\bar{D}1$ であり、また後述するように $\alpha=1$ が non-BPS D0-brane に相当するのでそれらの tension を用いると、

$$V(0)-V(1)=2\cdot\frac{2\pi R}{2\pi g}-\frac{\sqrt{2}}{g}=\frac{2}{g}(R-R_C) \tag{7.28}$$

よって、$f(0)-f(1)=2$ となる。

さて tachyon potential を CFT の立場で $(R-R_C)$ の一次のオーダーで求めるには、Disk vacuum amplitude に graviton vertex を一つ挿入すればよい [48]。このとき left,right の picture の和が-2 となるように $V_g^{(-1,-1)}$ を用いればよい。その時、次のように tachyon potential が求まる。

$$f(\alpha) \ \propto < V_g^{(-1,-1)} \ Tr \ exp(i\sigma_1 \otimes \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} \oint d\tau \partial \phi_B) >_{disk} \tag{7.29}$$

ここで、一般に open string に非可換 wilson line を入れた場合に知られている [61] ように、この Tr は path order の順に並べたときの trace という意味であることに注意。しかし以下では非可換性は生じないので無視して構わない。

また、$V_g^{(-1,-1)}$ が (ghost part を除いて) 次のように書きなおせることに注意する。

$$\begin{aligned} V_g^{(-1,-1)} &\sim \psi\tilde{\psi} \\ &\sim \{e^{i\sqrt{2}(\phi_R+\phi_L)} + e^{-i\sqrt{2}(\phi_R+\phi_L)} - e^{-i\sqrt{2}(\phi_R-\phi_L)} - e^{i\sqrt{2}(\phi_R-\phi_L)}\} \end{aligned} \tag{7.30}$$

さてこのように $V_g^{(-1,-1)}$ を書き直すと初めの 2 項は momentum shift を表し、後ろの 2 項は winding shift を意味する。今は Neumann boundary condition に従う field の disk amplitude を考えているので、momentum は保存される[4] ので初めの 2 項は寄与しない。しかし winding は保存されないので、$-e^{-i\sqrt{2}(\phi_R-\phi_L)} - e^{i\sqrt{2}(\phi_R-\phi_L)}$ による winding shift $w_\phi = \pm 2$ のせいで次のように wilson line に作用して非自明な寄与をする。

$$exp(i\sigma_1 \otimes \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} \oint d\tau \partial \phi_B) = exp(i\frac{\pi}{2}\alpha w_\phi \sigma_1) \tag{7.31}$$

さらに、$w_\phi = \pm 2$ を代入し、Tr をとると、

$$Tr \ exp(i\sigma_1 \otimes \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} \oint d\tau \partial \phi_B) = cos(\pi\alpha) \tag{7.32}$$

と求まる。以上より、tachyon potential が次のように求まった。

$$V(\alpha) = \frac{1}{g}(R-R_C)cos(\pi\alpha) + O((R-R_C)^2) \tag{7.33}$$

もちろんこの式は、open string の tree level で $(R-R_C)$ の一次まで求めた potential を表す。

この式から明らかなように、$(R-R_C) > 0$ だと $\alpha = 1$ すなわち non BPS D0-brane が、そして $(R-R_C) < 0$ だと $\alpha = 0$ すなわち $D1-\bar{D}1$ が安定に存在するという既に述べた安定性を再現する。逆に言うと、中間の α の値をとる状態は安定には存在しないことが分かった。またこの式から、$\alpha \to 2-\alpha$ という対称性も分かる。

$\alpha = 1$ が non BPS D0-brane を意味することを何度か述べたが、簡単に分かるその証拠の一つとして両者の mass の一致を述べておく。もっと詳しい議論は次節に譲る。

[4] これを簡単にみる一つの方法は、4 章で説明した boundary state を用いることである。すなわち torus コンパクト化した時に、Neumann 方向の (closed string で見た)zeromode は winding のみであり、momentum は常に 0 であることから分かる。

まず、$\alpha = 1$ の状態は critical radius の時には $\alpha = 0$ の状態と同じエネルギーを持つはずであり、すなわち $D1 - \bar{D}1$ のエネルギーとして次のように求まる。

$$m_{\alpha=1} = 2 \cdot \frac{2\pi\frac{1}{\sqrt{2}}}{2\pi g} = \frac{\sqrt{2}}{g} \tag{7.34}$$

さて、４章で boudary state を用いて求めた non BPS D0-brane の tension(=mass) は普通の D0-brane の $\sqrt{2}$ 倍であったことを思い出すと、$\tau_{nonBPSD0} = \frac{\sqrt{2}}{g}$ となる。従って $\tau_{nonBPSD0} = m_{\alpha=1}$ が分かり、両者が同じ状態であるということの証拠が得られた。

7.1.4 tachyon condense による non-BPS D0-brane の生成

ここでは、前に述べた通り $\alpha = 1$ が non BPS D0-brane と同一視できる理由を考えたい。

まず、wilson line(tachyon condense) の影響で、

$$\begin{aligned} V_g^{(0,0)} &= \partial X_R \bar{\partial} X_L \\ &= \frac{1}{4}\eta_R\eta_L(e^{i\sqrt{2}(\phi_R+\phi_L)} + e^{-i\sqrt{2}(\phi_R+\phi_L)} + e^{-i\sqrt{2}(\phi_R-\phi_L)} + e^{i\sqrt{2}(\phi_R-\phi_L)} \end{aligned} \tag{7.35}$$

の各項は、$cos(\frac{\pi}{2}w_\phi)$ の factor がかかり、

$$\begin{aligned} (R.H.S) \quad &\rightarrow \quad \frac{1}{4}\eta_R\eta_L(e^{i\sqrt{2}(\phi_R+\phi_L)} + e^{-i\sqrt{2}(\phi_R+\phi_L)} - e^{-i\sqrt{2}(\phi_R-\phi_L)} - e^{i\sqrt{2}(\phi_R-\phi_L)} \\ &= \quad -\partial\phi'_R\bar{\partial}\phi'_L \end{aligned} \tag{7.36}$$

となるはずである。従って、$\alpha = 1$ では $(\phi', \xi, \tilde{\xi})$ が基本的な world sheet 上の場と見なせるのである。以上をもとに半径を critical radius からずらした時を考えると、$R_X \equiv R = \frac{L}{\sqrt{2}}$ は $R_{\phi'} = \frac{1}{\sqrt{2}L}$ を意味する。さらに T-dual をとって、ϕ'_D を考えると $R_{\phi'_D} = \sqrt{2}L$ となる。このとき、ϕ'_D 方向の wilson line をあらわす vertex $V \sim \sigma_1 \otimes \partial\phi'_B$ は、ϕ'_D 方向の non-BPS D0-brane の重心の moduli を表す vertex に T-dual でうつる。この vertex はもともと $\sim sin(\frac{x^9}{\sqrt{2}})$ の tachyon 場であったもので、これに対応する場を以下では A^9 と書くことにする。

さて、このとき projection はどのように影響するであろうか。

まず、$(-1)^F, h$ について考える。すべての CP factor を合わせて考えると $\alpha = 0$ で $(-1)^F = h = \pm 1$ の状態が 2 重に縮退している。それを、$\alpha = 1$ まで spectral flow すると σ_2, σ_3 の sector のみ $(-1)^F h$ が逆転して[5] 、$(-1)^F = \pm 1, h = \pm 1$ の状態になる。この時半径は、$R_{\phi'} = \frac{1}{\sqrt{2}L}$ であったが、$R_{\phi'} = \frac{\sqrt{2}}{L}$ と見なして $(-1)^F = \pm 1, h = 1$ と project したものとも見なせる。さらに T-dual をとると、$R_{\phi'_D} = \frac{L}{\sqrt{2}}$ となり、R_X と一致する。また $(-1)^F = \pm 1$ より GSO projection の無い状態に対応するので、non-BPS D0-brane と同一視される。但しこのとき Ω の projection があるので正確には、Ω の projection された non-BPS D0-brane というべきである。以上まとめると、tachyon condense によって、図 7.1 のように

[5] 何故ならば、$|0>_{\alpha=1} = \chi_{-\frac{1}{2}}|0>_{\alpha=0}$ と書けるので、$(-1)^F h : \chi \rightarrow -\chi$ の作用が $\alpha = 1$ と $\alpha = 0$ では (-1) 倍違うからである。

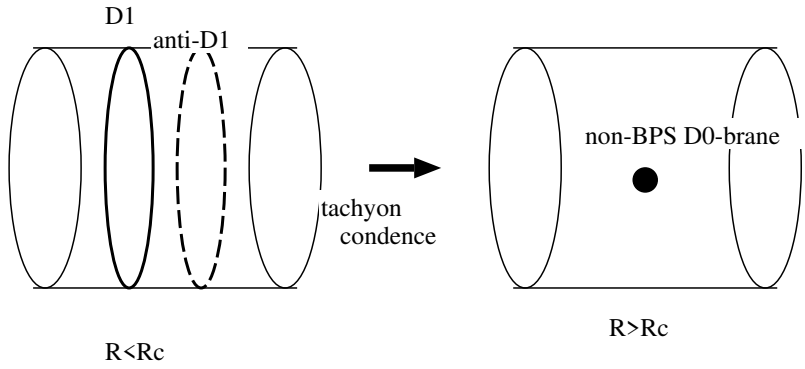

図 7.1: $D1-\bar{D}1$ system の non-BPS D0-brane への崩壊

半径 R の $D1-\bar{D}1$ system $\rightarrow$ 半径 R の non-BPS D0-brane

という現象が起こることが分かった。このとき non-BPS D0-brane を記述する、open string の world sheet の field は $(\phi', \xi, \tilde{\xi}) \oplus (X^i, \psi^i, \tilde{\psi}^i)$ $(i = 0 \sim 8)$ である。また半径が R_C より大きい時には tachyon potenial から non-BPS D0-brane は安定であることが分かり、world volume 上に tachyon は存在しない。また critical radius のとき massless であった T 場 $(\sim cos(\frac{x^9}{\sqrt{2}}))$ は、$\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha^2}|_{\alpha=1} > 0$ から分かるように半径が大きくなると massive となる。従って world volume 上の massless bosonic field は (7.1.2) の議論より A^i $(i = 1 \sim 9)$ のみとなる。

7.1.5 Non-BPS D0-brane の性質

前小節では、tachyon condense によって Non-BPS D0-brane が生成することを見たが、ここでは、初めから TypeI 理論での Non-BPS D0-brane を考えて、その性質を調べる [44]。すでに、TypeII 理論における (不安定な)Non-BPS D0-brane の open string での記述は述べたが、今の場合 Ω projection が存在することで以下で見るように安定化することが顕著な違いである。

CP は $1, \sigma_1$ とし、それぞれに $(-1)^F = 1, -1$ を付与する。さらに Ω projection を次のように定義する[6] 。

$$\begin{aligned} \Omega \quad : \quad & e^{-\Phi_B}|0> \otimes 1 \rightarrow -ie^{-\Phi_B}|0> \otimes 1 \\ & e^{-\Phi_B}|0> \otimes \sigma_1 \rightarrow -e^{-\Phi_B}|0> \otimes \sigma_1 \end{aligned} \tag{7.37}$$

この Ω projection は前の $D1-\bar{D}1$ system の tachyon condense の議論から導かれるものと同じである。

このとき確かに、tachyon vertex $V_T = \sigma_1 \otimes e^{-\Phi_B}|0>$ は project out される。massless spectrum は、D0-brane の位置を表す scalar 場と、R-sector から生じる fermion であり、まとめて

[6] この定義は [44] の σ_2 を σ_1 で置き換えたものを用いている。また真空への Ω の作用は boundary state を用いた計算で確かめられる [56]。

(A^i, χ_α) $(i = 1 \sim 9, \alpha = 1 \sim 16)$ となる[7] 。これも前の $D1 - \bar{D}1$ system の tachyon condense の議論と一致している。

さてこのとき、0-brane としての縮退度は $2^8 = 256$ であり、TypeI 理論の持つ 10D N=1 SUSY の long multiplet(massive multiplet) として振舞う。これは、この 0-brane が non-BPS であることを裏付ける。

実際には、TypeI には 3 2 枚の D9-brane が存在するので、それと D0-brane の相互作用を調べる必要がある。0-9 string の spectrum を考えると、NS-sector は massive なので massless 励起は R-sector のみに存在し、32 個の fermion が生じる。その量子化による zeromode は SO(32) の spinor + conjugate spinor 表現となり、さらに D0-brane 上の Z_2 gauge によって project されて spinor 表現のみ残ることになる。従ってこの spinor 電荷を D0-brane が帯びていることになり、TypeI-Het duality で期待される性質を持っていることが分かった。

このように non-BPS D0-brane は spinor 電荷を帯びた安定な object であることが分かったが、2 つの non-BPS D0-brane が近づくとどうなるだろうか。このときは、CP が $\Lambda \otimes \{1, \sigma_1\}$ となり明らかに tachyon が project されずに残る。従って不安定であり、対消滅してしまうと考えられる。つまり non-BPS D0-brane は $\mathbf{Z_2}$ charge を帯びているのである。このことは、後に述べる (generalized) orbifold projection によって安定化する non-BPS D-brane が $\mathbf{Z}$ charge を帯びていることと対照的である。

最後に、non-BPS D0-brane と D1-brane の相互作用について考える。この場合は、NS-sector に tachyon が生じるので両者は bound state を形成すると思われる。これによって生じるのものは Z_2 wilson line を持つ D1-brane であるはずで、Het-dual でみると SO(32) カレント代数に相当する free fermion が NS-sector から R-sector に移ったことを意味する。

7.1.6 TypeIA 理論における non-BPS D1-brane

今まで考えてきた TypeI の non-BPS D0-brane を T-dual をとるとどうなるだろうか。TypeI 理論の T-dual は TypeIA 理論で、orientifold 8-plane(O8-plane) が 2 枚存在する。non-BPS D0-brane は non-BPS D1-brane に移るはずで、O-plane 間に伸びる string となる。

一方、TypeI の $D1 - brane$ と $\bar{D}1 - brane$ は、TypeIA で D0-brane, $\bar{D}$0-brane に移る。今考えているように前者にのみ Z_2 wilson line が入っている時には、それぞれ別々の O-plane に stuck する。

さてこの時、O-plane の位置をそれぞれ $x^9 = 0, \pi\tilde{R}$ とすると、TypeI の半径との関係は $\tilde{R} = \frac{1}{R}$ である。従って今までの D1-brane,$\bar{D}$1-brane の安定性の解析より、TypeIA の D0-brane,$\bar{D}$0-brane system は $\tilde{R} > \sqrt{2}$ で不安定となるはずである。これは、TypeIA 側ではどのように考えられるだろうか。そのためには一般に、brane と anti-brane がある距離 (5 章で見たように $\Delta x = \sqrt{2}$) 以上近づくと、tachyon が生じ不安定になることを思い出せばよい。ちょうど数値もうまく合ってい

[7] もともと Non-BPS D-brane には通常の 2 倍の fermion が存在するが、今は Ω-projection があるので半分になっている。

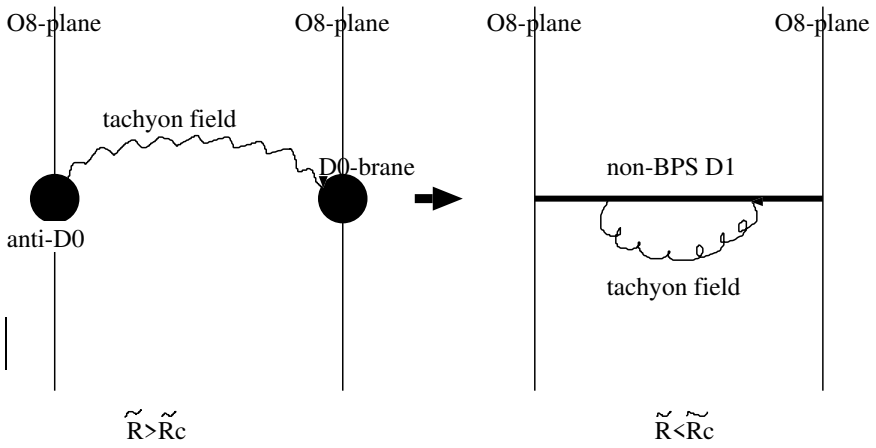

図 7.2: $D0-\bar{D}0$ system の non-BPS D1-brane への崩壊

る。従って図 7.2 のような変化が起きるはずである。同様の議論は、何回 T-dual をとっても成立つはずである。

7.2 Op-Dp system における安定な non-BPS 状態

ここでは、安定な non-BPS 状態の二つ目の例として orientfold p-plane と一枚の Dp-brane からなる system における non-BPS 状態とその強結合極限について議論する。弱結合は TypeII 理論の摂動的状態としてすべての p について統一的に理解できるが、その強結合極限は p によってバラエティに富み、興味深い [33][40][41][47]。

7.2.1 摂動論的解析

orientfold p-plane と N 枚の Dp-brane からなる system はゲージ対称性が U(N) から SO(2N) に enhance する。しかしながら、N=1 のときのみは例外で U(1) が SO(2) になるので enhance しない。従って何か特殊な状況が起こっていると予測される。実際このときのみ安定な non-BPS 状態が存在することが分かる。以下でまずこのことについて摂動的な立場で調べてみる。

摂動的 spectrum を調べる上で重要なのは orientfold の projection である[8] 。p=9 すなわち、TypeI の場合は CP factor λ に対して $\Omega : \lambda \to \lambda^T$ と作用した。今考えているように Dp-brane が 2 枚あった状態を orientfold の projection $\tilde{\Omega}$ で 1 枚と見なす場合は、$\tilde{\Omega} : \lambda \to \sigma_3 \lambda^T \sigma_3$ とするのが適当である[9] 。

さてこの projection を考慮した時の massless spectrum は、CP が σ_1 の sector からゲージ場 A^μ

[8] ここでは SO-projection に限ることにする。

[9] このことは、特に p=5 の時を考えて次のように決まる。p=5 の時は、geometric な作用は C^2/Z_2 の orbifold とみなせ [63] の議論が使える。全体で、$\tilde{\Omega} = \Omega \cdot I_4$ であるから $\Omega : \lambda \to \lambda^T$ と [63] によって決められた作用を組み合わせてこの式が得られる。

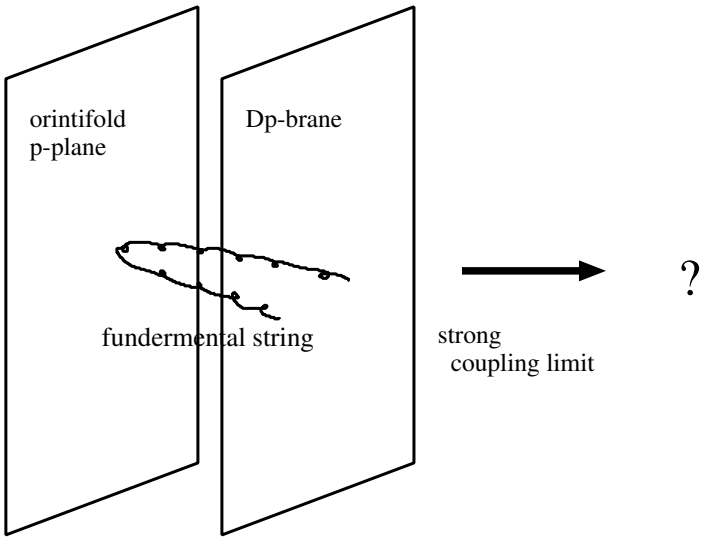

図 7.3: Op-Dp system の安定な non-BPS state

と scalar 場 A^i が生じる。よって、位置の moduli は p=9 の時に 2 自由度 (2 枚の D-brane) あったのと違い、1 自由度となっていて orientfold projection の解釈と一致する。またゲージ対称性は確かに U(1) である。ではその U(1) の電荷を帯びた状態は存在するだろうか。ゲージ場の CPfactor が σ_1 なので、それと非可換な CP をもつ状態は U(1) の電荷を帯びているはずである。その中で最も軽いものは、明らかに massive state である。この状態は BPS ではないが、それより軽く同じ電荷を帯びている状態がないため安定である。このようにして Op-Dp system において、安定な non-BPS state の存在が示された [40]。

しかしながら、D7-brane が 2 枚以上あると、今考えている non-BPS state は BPS-state 2 つに崩壊する。これは SO(2n) の全ての表現は、root vector(の dual) の線形結合として表せることから生じていて、考えているゲージ群が simple もしくは semi-simple ならば常にそうなる。逆に言うと U(1) のように semi-simple ではない場合には安定な non-BPS state が存在する可能性がある。

この状態の具体的描像は、図 7.3 のように「Dp-brane から出発した F-string が O-plane を一周してまた戻り Dp-brane に再び付着する」というもので、O-plane の存在で向きが逆になるので Dp-brane からは 2 つの F-string が出て行くという向き付けになっている。従ってこの状態が帯びる電荷を + 2 と数えることにする。

7.2.2 orientifold projection の定式化

ここでは、具体的な Op-Dp system を調べる前の準備として、orientifold projection $\tilde{\Omega}$ の意味を正確に定式化したい [40][47]。

まず、I_{9-p} を、x^i $(p+1 \sim 9)$ 方向の反転:$x^i \to -x^i$ として定義する。また $(-1)^{F_L^S}$ を spacetime fermion number の偶奇を表す operator とする。

素朴に考えると、$\tilde{\Omega} = \Omega \cdot I_{9-p}$ と思われるが、こうすると次のような問題が生じる。簡単のため

表 7.1: Op-Dp system とその強結合極限

p	projection	strong coupling limit での振る舞い
8	$IIA/\Omega \cdot I_1$	HetSO(32) の non-BPS state
7	$IIB/\Omega \cdot (-1)^{F_L^S} \cdot I_2$	F-theory における non-BPS string junction
6	$IIA/\Omega \cdot (-1)^{F_L^S} \cdot I_3$	M-theory/$\bar{\mathcal{N}}$ の non-susy cycle に巻きつく M2-brane
5	$IIB/\Omega \cdot I_4$	TypeIIB の NS5-brane 上にある non-BPS D0-brane
4	$IIA/\Omega \cdot I_5$	M-theory で、fixed5-plane と M5-brane をつなぐ M2-brane
3	$IIB/\Omega \cdot (-1)^{F_L^S} \cdot I_6$	self-duality で magnetic charged particle と dual

TypeIIB を考え、特に p=-1,3,7 の時には式 (4.50) などから、

$$\Omega|Dp> = |\bar{D}p> (for\ p=-1,3,7) \tag{7.38}$$

$$I_{9-p}|Dp> = |Dp> \tag{7.39}$$

が成立ち、O-plane は Dp-brane と共存できないことになってしまう。そこで常に、

$$(-1)^{F_L^S}|Dp>=|\bar{D}p> \tag{7.40}$$

となる $(-1)^{F_L^S}$ を用いて、p=-1,3,7 の時は $\tilde{\Omega} = \Omega \cdot I_{9-p}(-1)^{F_L^S}$ と補正することにする。TypeIIA はその T-dual として $\tilde{\Omega}$ を定義すればよく、まとめると表 7.1 のようになる。

最後に、S-duality に関して触れておく。まず S-duality は B_{NS} と B_{RR} を入れ換えるので、

$$\begin{aligned} (-1)^{F_L^S} &: B_{NS} \to B_{NS}, B_{RR} \to -B_{RR} \\ \Omega &: B_{NS} \to -B_{NS}, B_{RR} \to B_{RR} \end{aligned}$$

を考慮すると、$(-1)^{F_L^S}$ と Ω は S-duality で入れ換わることになる。従って、orientifold の場合も TypeIIB で S-dual をとるには $(-1)^{F_L^S}$ と Ω を入れ換えればよい。但しこの議論はその projection に geometric に非自明な作用が付随していない場合は正しくない [37]。従って p=7,5,3,1 に適用できるが、p=7 は dilaton が空間的に変動するため解釈が微妙である。

それでは以下で、p=8,6,4,3,7,5 の順でそれぞれの強結合における振る舞いを調べてゆく。これらの結果は簡単に表 7.1 にまとめてある。但し p が 2 以下のときは、world volume(p+1 次元) において non-BPS state の電荷によるクーロンエネルギーが発散するので考えないことにする。

7.2.3 O8-D8 system

この system の強結合極限は、codimesion が 1 で dilaton gradient が大きくなり定義するのが困難と思われるが、平均の結合定数で考えることにする。もともと、TypeI の T-dual であったので、HetSO(32) の S^1 コンパクト化に dual であるはずである。一般に、TypeI' を T^d コンパクト化し

たときの HetSO(32) との duality は $d \geq 3$ では弱結合が弱結合に map される状況になって S-dual とは言えないが、今の場合はうまく S-dual となっている[10] 。

さてそれでは、non-BPS state はどのように map されるだろうか。そのためには HetSO(32) で同じ電荷を帯びた、最も軽い state を探せばよい。まず O8-D8 system は、HetSO(32) でみると wilson line$(0, \frac{1}{2}^{15})$ に相当する。つまりゲージ対称性が SO(32) から SO(2)×SO(30) に破れた状態である。また、HetSO(32) での winding, K.K.mometum は TypeI' で D0-charge,F-string の winding を表すから今の場合ともに 0 である。non-BPS state の帯びる電荷は、charge vector $q^I \in \Gamma_{16}\ \ (I = 1 \sim 16)$ を用いて、$q = (2, 0^{15})$ のように表せる。ここで 2 が D8 に 2 つの同じ方向の端点を持つ F-string による電荷 + 2 を表す。以上をまとめると、non-BPS state は HetSO(32) の dual では、

$$\vec{P_L} = (2, 0^{15}; 0), \vec{P_R} = (0), N_L = 0, N_R = \frac{3}{2}, mass^2 = \frac{4}{\alpha'} \tag{7.41}$$

と表される状態であり、$N_R = \frac{3}{2}$ より確かに non-BPS である。この HetSO(32) の non-BPS state は、3 節で議論する non-SUSY cycle に巻きつく D2-brane の HetSO(32)dual とみなされる状態とほとんど同じである。

7.2.4 O6-D6 system

この場合は、TypeI' の $T^3/\mathbf{Z_2}$ コンパクト化に相当し、[16] で 3 次元 N=4 超対称ゲージ理論との関係などが詳しく議論されている。強結合極限は、M-theory を K3 コンパクト化したものである。つまり、$S^1 \times T^3/\mathbf{Z_2} \to K3$ と量子補正によって古典的には orbifold であったものが smooth な多様体に変化する。特に今考えている、O6-D6 system の場合は、local にその geometry は $\bar{\mathcal{N}}$:Atiyah-Hitchin manifold[11] と呼ばれる hyper-Kähler manifold となることが知られている [16]。具体的な metric ds^2_{AH} も知られているが、ここでは略す。この結果は、3 次元 N=4 超対称 SU(2) ゲージ理論と密接な関係を持っている。何故ならば、D2-brane probe を入れるとその底空間 R^3/Z_2 と M-theory に lift する時の S^1 が D2-brane 上の SU(2) ゲージ理論の古典的 moduli space を記述するが[12] 、量子補正 (1-loop+instanton) を入れると $\bar{\mathcal{N}}$ になるからである。

さてそれでは、non-BPS state は強結合でどのようになるのだろうか。M-theory の立場で D6-brane 上の U(1) ゲージ場は、$A_{\mu\nu\rho} = A_\mu \wedge \omega_{\nu\rho} + \cdots$ のように三階反対称テンソルから生じる。ここで ω は $\bar{\mathcal{N}}$ の self-dual harmonic 2-form であり、それと dual な 2-cycle(bolt) を C_0 と書くことにしその面積を $\pi^3 R^2$ とおく。このように考えると、C_0 に巻き付いた D2-brane が U(1) 電荷を帯びているのは明らかで、それが求めている non-BPS state と考えられる [39][40]。以下ではこの state の mass を求める。

M-theory の立場でこの state の mass を求めると、M2-brane tension $\tau_{M2} = \frac{1}{(2\pi)^2 l_{11}^3}$ を用いて、

$$M_6 = \tau_{M2} \pi^3 R^2 = \frac{\pi^3 R^2}{(2\pi)^2 l_{11}^3} \tag{7.42}$$

[10] Sen の論文では O8-D8 system は議論されていないが、ここに示すように強結合極限に相当するものを解析するのは意味あることと思われる。

[11] 正しくはその 2 重被覆

[12] ゲージ理論の moduli は、6D N=1 vector-multiplet を 3 次元下げてできる 3 つの scalar と、1 つの dual photon の合わせて 4 つである。

となる。R が M-theory に lift する時の S^1 の半径であることに注意すると、$R^3 = l_{11}^3 g_s^2$ となる。さらに IIA と M-theory の metric の関係 $G_M = \frac{R}{g_s\sqrt{\alpha'}} G_{IIA}$ を用いると、IIA での mass は、

$$M_6^{IIA} = \frac{\pi}{4}\frac{g_s}{\sqrt{\alpha'}} \tag{7.43}$$

と求まる。以上の計算は M2-brane の量子的揺らぎや曲率の効果を無視しているので R が十分大きい (= 強結合) 時のみ正しい。

以上のように U(1) 電荷を持つ non-BPS state が強結合でも理解できたが、U(1) 磁荷をもつ状態、すなわちこの non-BPS state の electric-magnetic dual となる non-BPS state についても考えたい。D6-brane 上では 3-brane のような object であり、M5-brane を C_0 に巻き付けたものと考えるのが自然である。これは勿論 IIA の弱結合では D6-brane に端点をもつ D4-brane とみなされる。この 3-brane の強結合での tension は同様な方法で、M5-brane の tenson $\tau_{M5} = \frac{1}{(2\pi)^5 l_{11}^6}$ を用いると、

$$\tilde{M}_6^{IIA} = \frac{1}{32\pi^2\alpha'^2} \tag{7.44}$$

と求まる。

7.2.5 O4-D4 system

この場合の強結合極限は、M-theory を T^5/Z_2 にコンパクト化したもので、[14] で議論されているように IIB を K3 にコンパクト化したものと dual である。

この T^5/Z_2 を定義する Z_2 projection は、$X^i \to -X^i$ $(i = 6,7,8,9,10)$ と座標を反転し、同時に三階反対称テンソル $A_{\mu\nu\rho} \to -A_{\mu\nu\rho}$ と符号を変えるものである。ここで三階反対称テンソルの符号を変えるのは 11D SUGRA の $\int A \wedge A \wedge F$ が Z_2 作用で不変になるために必要である。

また 6D(2,0)SUGRA のアノマリー相殺の要請から、11D SUGRA を T^5/Z_2 にそのまま reduction して得られる場 (untwisted-sector) に加えて、twisted-sector のようなものとして tensor-multiplet が１６個必要である。後者の場は１６枚の M5-brane を T^5/Z_2 に垂直に挿入することによって供給される。T^5/Z_2 の fixed point が３２あるのですべての fixed point に一枚ずつあるわけではないことに注意する。実際には、１６枚の M5-brane は自由に T^5/Z_2 のなかを動けるのであって、それが IIB/K3 の dual picture で見ると、K3 の moduli などに対応する。例えば、K3 の 2-cycle に巻きついた D3-brane は 6D で string に見えるが、M-theory では M5-brane の間に伸びる M2-brane に対応する。

さて、今考えている $IIA/\Omega \cdot I_5$ は強結合領域で M-theory/(T^5/Z_2) をさらに S^1 コンパクト化したものとみなせ、３２個の fixed point は、３２枚ある O4-plane に対応し、１６枚の M5-brane は S^1 に巻きついて D4-brane となる。

目的の non-BPS state は、M-theory/$(T^5/Z_2 \times S^1)$ の立場、すなわち $IIA/\Omega \cdot I_5$ の強結合領域でみると fixed 5-plane と M5-brane の system における (S^1 に巻きつく)M2-brane の non-BPS configration とみなせる [40]。この状態を調べるには、M2-brane の量子化が不可欠であるが、そのオーダーは 11D Planck-length l_{11} を用いて次のように見積もることができる。すなわち M-theory

での mass は、$M_4 \sim \frac{R}{(l_{11})^2}$ 程度となる。従って IIA でみると、$M_4^{IIA} \sim \frac{(g_s)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{\alpha'}}$ となる。

さらにこの non-BPS state の electric-magnetic dual な non-BPS state についても考えてみる。4-brane 上のゲージ理論の立場で、0-brane の dual は 1-brane である。これは、M2-brane が S^1 に巻きつかないで D2-brane として fixed 5-plane と M5-brane をつないでいる状態と言える。従って、tension を前と同様に見積もると、$\tilde{M_4^{IIA}} \sim \frac{g_s^{-\frac{2}{3}}}{\alpha'}$ と求まる[13] 。

最後に、$IIB/K3 \times S^1$ の立場で考えてみるとこれらの状態は non susy-cycle(自己交点数$=-4$)に巻きついた D3-brane とみなせる。

7.2.6 O3-D3 system

この IIB/$\Omega \cdot (-1)^{F_L^S} \cdot I_6$ の場合、強結合極限では、S-duality によって $(-1)^{F_L^S}$ と Ω が入れ変えればよく、self-dual であることが分かる。これは D3-brane が n 枚あるならば、3-brane 上の 4D,N=4 ゲージ理論の立場で言うとゲージ群 SO(2n) は simply laced なので Montone-Olive duality が成立つことを意味する。しかしながら今考えているのは、n=1 の場合でありゲージ群は U(1) となり、O3-plane が無い場合と低エネルギーでは区別がつかないことに注意。

まず、magnetic な電荷を帯びた non-BPS state の強結合極限について考える。S-duality によって強結合では、弱結合の electric な電荷を帯びた non-BPS state と dual なことからその mass は、$\tilde{M_3} \sim \alpha'^{-\frac{1}{2}} g_s^{-\frac{1}{2}}$ と見積もることができ、D-string の massive state とも解釈できる。しかしながら、Non-BPS state なのでこの結果は強結合のみで正しい。

さて、electric な電荷を帯びた non-BPS state の強結合極限は、弱結合の magnetic な non-BPS state と dual であるが、後者の mass を直接求めるのは非摂動的効果のため難しい。そこで mass の lower bound をその magnetic な電荷のつくるクーロンエネルギーと考えて見積もることにする。すなわち、

$$M_3^{dual} = \frac{1}{g_D} \int F^2 dx^3 \sim \frac{1}{g_D} \int \frac{dr^3}{r^4} \sim \frac{1}{g_D \sqrt{\alpha'_D}} \tag{7.45}$$

よって、electric な電荷を帯びた non-BPS state の mass は、

$$M_3 \geq \frac{\sqrt{g_s}}{\alpha'} \tag{7.46}$$

を満たす。

7.2.7 O7-D7 system

O7-D7 system の強結合での振る舞いを調べるには、もとから非摂動的効果も取り入れている F-theory [24] を用いるのが適当である [38]。

F-theory の K3 コンパクト化とは elliptic fibration された K3 を導入して base の P^1 と別の 8 次元空間の直積を TypeIIB 理論の時空と思い、fiber の torus の複素構造 τ を、

$$\tau = \chi + ie^{-\phi} \tag{7.47}$$

[13] 但し、$l_{11} = \sqrt{\alpha'} g_s^{\frac{1}{3}}$ とおく convention を用いている。

のように dilaton 場 ϕ,axion 場 χ と同一視した理論である。すなわち、TypeIIB 理論の真空の中で 16SUSY を持つ場合に相当する。このとき torus を含めると形式的に１２次元の理論を K3 コンパクト化したようにも見え、その１２次元の仮想的な理論を F-theory と呼ぶ。しかし torus の計量自体は非物理的とみなすので、２次元は他の１０次元とは性質が異なる。base の座標を z とすると、$\tau(z)$ は正則であり B-field は 0 とおくので、超対称性を半分保つ真空となっている。具体的に超対称性を半分に破るものは 7-brane であって、elliptic fibration された K3 の特異ファイバーに相当し、その数は２４である。特異ファイバーを特徴付ける重要な量は $\mathrm{SL}(2,\mathrm{Z})$ のモノドロミーであり、すなわちそのファイバーを base 方向に一周した時に複素構造 τ が次のように $\mathrm{SL}(2,\mathrm{Z})$ 変換される。

$$\tau \to \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \quad (ad - bc = 1, \{a, b, c, d\} \in \mathbf{Z}) \tag{7.48}$$

これは、TypeIIB 理論で考えると dilaton 場と axion 場のモノドロミーであり、そのようなものを生じさせるのは、それと electric-magnetic dual な電荷を帯びる object すなわち (p,q)7-brane[14] である。

例えば、D7-brane (= (1,0)7-brane) が $z = 0$ に一つ存在すると、その近くでは

$$\tau(z) \sim \frac{1}{2\pi i} log z \tag{7.49}$$

のように振る舞い、$z \to e^{2\pi i} z$ と一周すると $\tau \to \tau + 1$ のモノドロミーを受ける。

[38] の主張を簡単に述べると、TypeI/T^2 を 2 回 T-dual とった理論 (TypeI') には O7-plane が４枚存在し、tadpole cancellation より D7-brane が１６枚存在する必要がある。この理論の結合定数を大きくしてゆくと、非摂動的効果を取り入れる必要があるが、それをすべて取り入れた理論が F-theory の K3 コンパクト化である。base の P^1 は TypeI' の base T^2/Z_2 と同一視される。TypeI' の D7-brane は、$\tau \to \tau + 1$ のモノドロミーの K3 の特異ファイバーを意味する。そして O7-plane は、非摂動的効果を取り入れると (0,1)7-brane と (2,1)7-brane に分裂する。これは、数学で知られている (一点につぶせる) 特異ファイバーは D_n 型だと n が 4 以上のみであり、O7-D7 system は n = 1 でありこれに入らない、すなわち分裂を意味することと無矛盾である。物理的に言うと、D3-brane probe をいれて O7-plane 近傍で N=2SU(2) ゲージ理論とみなせて[15] 、その低エネルギーでの振る舞いは、[10] で求められているように moduli space(u-plane) の古典的特異点は、2 つに分裂しそれぞれの点で monopole,dion が massless になるが、これが丁度 (0,1)7-brane や (2,1)7-brane と D3-brane を結ぶ string から生じると解釈でき F-theory の見方とうまく合う [38]。

さて今考えている O7-D7 system では、モノドロミー行列は、

$$\begin{aligned} M_{07-D7} = M_{(1,0)} M_{(0,1)} M_{(2,1)} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{7.50}$$

と求まり、$\tau(z)$ の振る舞いは、O7 と D7 が重なって見えるほど十分に z が大きければ、

$$\tau(z) = -\frac{3}{2\pi i} log z \tag{7.51}$$

[14] ここで (p,q)7-brane や (p,q)5-brane とは、(p,q)string が付着できる brane として定義する。

[15] ここで、O7-plane は SO-projection と考えているため、D3-brane に対して Sp-projection となり、Sp(1)=SU(2) のゲージ群を持つことに注意。

となる。このような状況だと asymptoic coupling $g_s(z \to \infty)$ を定義できないが、ゲージ理論の立場では、asymptoic freedom (4D N=2 $N_c = 2, N_f = 1$) のため coupling が flow するからである。そこで、SCFT となる N_f=4 の理論に埋め込むことを考える。具体的には、3 枚の D7-brane を $z = z_0$ に配置して local にも tadpole が cance するようにすればよい。その時には、

$$\tau(z) = -\frac{3}{2\pi i} log \frac{z - z_0}{z} + \frac{i}{g_s} \tag{7.52}$$

となり、asymptoic coupling は g_s となる。

さてここで F-theory の一般論に戻り、TypeIIB 理論としての metric を考える。まえに述べた 16SUSY を保つという条件と運動方程式より Einstein metric は次のように求まる。

$$\begin{aligned} (ds)^2_E &= \sum_{\mu=0}^{7} dx^\mu dx_\mu + Im\tau da d\bar{a} \\ &= \sum_{\mu=0}^{7} dx^\mu dx_\mu + \frac{1}{4} Im\tau \frac{dz d\bar{z}}{|z|} \end{aligned} \tag{7.53}$$

ここで、$z = a^2$ として a を導入したが、これは D3-brane 上のゲージ理論の立場だと SU(2) が U(1) に破れたときに massless のままである vector multiplet の scalar 場である。また prepotential$\mathcal{F}$ とは

$$\tau(a) = \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial a^2} \tag{7.54}$$

の関係がある。このとき、$(ds)^2_E$ の P^1 部分は u-plane を記述する special kähler metric となっている。

以上のように、 IIB/$\Omega \cdot (-1)^{F^S_L} \cdot I_2$ の強結合の扱いは分かったが、目的の non-BPS state はどのように記述されるのだろうか。

F-theory を K3 コンパクト化したときの BPS state の記述として string junction を用いる方法が最も強力である。 string junction については [付録 B] で簡単に説明してある。注意すべき点は [付録 B] で用いている convention はここで用いている「O7-plane=(0,1)+(2,1)7-brane」という convention ではなく、 それを SL(2,Z) 変換した「O7-plane=(1,1)+(1,-1)7-brane」という convention であり、これは string junction の文献には良く見られるものである。

さて今考えている Non-BPS state は、string junction を用いると次のように記述できる。古典的には、D7 から発して、O7 を一周してまた D7 に戻るというものであるが、F-theory では下の図 7.4 のように (1,0)7-brane から発して、(0,1)7-brane と (2,1)7-brane を一周して (1,0)7-brane に戻るというものである。それでは何故この string junction は non-BPS なのだろうか。string junction が BPS であるかどうかを調べるには、$F/K3 \sim Het/T^2$ の duality[24] を用いて、Het 側の charge vector $\vec{q}$ を調べればよい。すなわち、

$$\text{BPS conditon} : \vec{q} \cdot \vec{q} \geq -2 \tag{7.55}$$

が成立つか調べればよい。string junction において $\vec{q} \cdot \vec{q}$ は自己交点数と呼ばれ、$\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}$ と書かれる。F/K3 をさらに S^1 コンパクト化したときに、M/K3 と dual であり (p,q)string は、K3 の elliptic

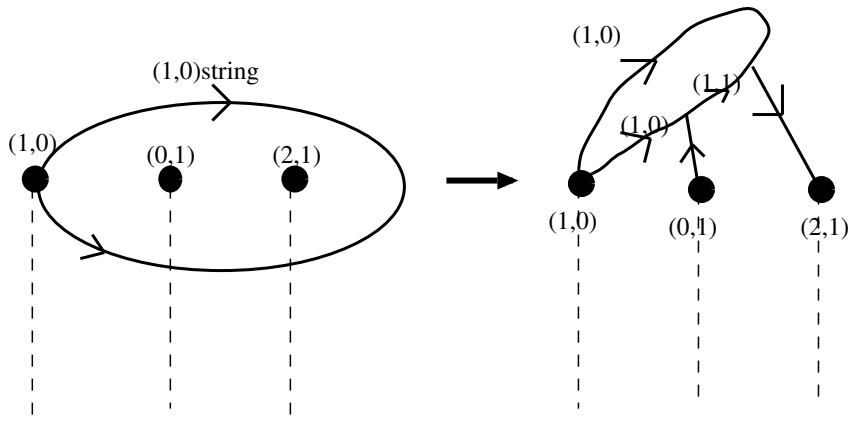

図 7.4: String junction を用いた O7-D7 system の記述

fiber の (p,q)cycle に巻きついた M2-brane となり、string junction 全体は一枚の M2-brane と見なせる。その M2-brane を K3 に埋め込まれた 2 次元多様体とみなした時の自己交点数に $\mathbf{J}\cdot\mathbf{J}$ は相当している。従ってそれが正則曲線 (genus g) ならば $\mathbf{J}\cdot\mathbf{J}=2(g-1)$ となり、-2 より小さくなることはない。

それでは、この Non-BPS state に対応すると思われる string junction の自己交点数を求めてみよう。[付録 B] で説明したように求めると、

$$\mathbf{J}\cdot\mathbf{J}=-6+\left|\begin{array}{cc}1&0\\0&1\end{array}\right|+\left|\begin{array}{cc}1&-2\\1&-1\end{array}\right|=-4<-2 \tag{7.56}$$

となり、確かに non-BPS state であることが分かる。

それではこの non-BPS state の mass を見積もってみる。そのためには非摂動的効果を入れた時の O7-D7 system を特徴づける長さのスケール L を求めればよい。そのとき non-BPS state の (Einstein metric で)mass は $M_7^E\sim L\cdot\frac{1}{2\pi\alpha'}$ となる。

さて、$z\ll z_0, a\ll a_0$ の時 (N_f=1 に見える) を考えて、

$$\begin{aligned}\tau(z) &\sim \frac{3}{2\pi i}log\frac{-a_0^2}{a^2}+\frac{i}{g_s}\\ &\sim \frac{3}{2\pi i}log(\frac{-a_0^2e^{-\frac{2\pi}{3g_s}}}{a^2})\end{aligned} \tag{7.57}$$

となり、一方 metric が $Im\tau dad\bar{a}$ で与えられるので、

$$L\sim|a_0|e^{\frac{-\pi}{3g_s}} \tag{7.58}$$

これから M_7^E を求め、さらに string metric に直すと、

$$M_7 \sim \frac{|a_0|}{\alpha'} g_s^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{\pi}{3g_s}} \tag{7.59}$$

と求まった [40]。このとき 3 枚の D7-brane の位置 a_0 が、それよりもずっと低エネルギーで実現される asymptoic free なゲージ理論 ($N_f = 1$) のカットオフの役割をしていることが分かる。

最後に world volume 上で magnetic な電荷を帯びる non-BPS 状態について考える。これは今までと同様に考えて、D7-brane に 2 つの端点を持つ D5-brane と同定できる。(p,q)7-brane があるとき、(p,q)5-brane の受けるモノドロミーは (p,q)string が受けるモノドロミーと同じである。従って junction 的取り扱いは今までと全く同じである。M-theory の dual をもちいて幾何学的に見ると (p,q)5-brane は (p,q)cycle に巻きつく M5-brane となるが、その構造は $M5-\text{brane}=\Sigma \times R^4$ となるので、正則かどうかは本質的に 2 次元多様体 Σ が決めていて前と同様な議論になる。

7.2.8 F-theory における non-BPS state

前に見たように O7-D7 system の non-BPS state は、string junction を用いて F-theory における安定な non-BPS state として解釈できた。そこでここでは [50] に従って、ほかにこのような安定な non-BPS state が F-theory に存在しないか見てみる。[50] で述べられている詳しい代数曲線を用いた解析はここでは省略し結果のみ述べることにする。またここでは [付録 B] の convention に従うことに注意。

もともと F-theory には 2 4 枚の 7-brane が存在するが、すべてが近づくと安定な non-BPS state は存在できない。そこでその中の r 枚が近づく場合に着目し、他の (2 4 − r) 枚の 7-brane はそれから遠くに離れていると考える。このとき、両者をつなぐ string junction は BPS であっても mass が非常に大きくなり、その状態に崩壊することはありえない。そこでこの時には r 枚の 7-brane からなる system のみを考察すればよい。

さてまず、string junction $\mathbf{J}$ が安定な non-BPS state となる十分条件として次の 3 つを満たせばよいことに着目する。

(a) r 枚の 7-brane からなる孤立した system と見なせる。

(b)$\mathbf{J}^2 < -2$ が成立つ。(つまり non-BPS state である。)

(c)$\mathbf{J} = \mathbf{J_1} + \mathbf{J_2} + \cdots$ のように BPS juncition $\mathbf{J_1}, \mathbf{J_2}, \cdots$ の和にかけない。(つまり安定であり崩壊しない。)

初めに (a) の条件を検討する。すなわちこのためには孤立させることのできる 7-brane の配置を探せばよい。具体的に K3 の elliptic fibration をあらわす代数曲線を用いた議論で、次のような 7-brane の配置が孤立できることが分かる[16] 。

$$\text{properly isolate} \quad : \quad D_n (n \leq 4), E_6, E_7, E_8, H_0, H_1, H_2, \hat{E}_N,$$

[16] 正確にいうと [50] に詳しく述べられているように、代数曲線の座標が距離を表すわけではなく metric の効果も孤立できるかどうか判定するには検討する必要がある。それを調べると、r が 1 2 より小さいなどの条件が得られるが、以下で重要な影響を持っていないので略す。

$$\hat{\tilde{E}}_1, \hat{\tilde{E}}_0$$

$$\text{asymptoically isolate} \quad : \quad D_n(n>4), A_n \tag{7.60}$$

ここで注意すべき点は、数学で特異ファイバーと呼ばれるものは、

$$\text{singular fiber}: \ A_n, D_n(n \geq 4), E_6, E_7, E_8, H_0, H_1, H_2 \tag{7.61}$$

のみであり、これらは「一点につぶす」(一つの特異ファイバーとみなす) ことができ「孤立できる」という性質よりも強い性質を持っている。例えばこの特異ファイバーに含まれない、$\hat{E}_N, \hat{\tilde{E}}_1, \hat{\tilde{E}}_0$ は affine 型と呼ばれ、affine Lie algebra の grade に相当する system 全体を回る loop が存在するが、一つの特異ファイバーではなく一点につぶすことが出来ないが、十分 system を孤立させることができる。また、$D_n(n \leq 4)$ 型は O7-D7 system(n=1) を含むが、その場合と同様に O7-plane が非摂動効果によって 2 つの 7-brane に分かれるので一点につぶすことが出来ない。しかしその system を前小節で考えたように孤立させることはできるのである。

また、上で properly isolate と asymptoically isolate に二分したがその意味は次の通りである。properly isolate 出来るとは、ｒ枚の 7-brane と他の (２４－ｒ) 枚の 7-brane を無限の距離だけ引き離すことが出来るという意味で、asymptoically isolate ではそれは出来ないが、十分に引き離すことができるという意味である。

上で述べた条件のイメージをつかむために TrK(モノドロミー行列[17] のトレース) による分類を考える。TrK は、SL(2,Z) で不変でありモノドロミーを特徴づけるうえで重要な量である。

- まず、$|TrK| < 2$ のとき (elliptic) は、すべて properly isolate 出来る。
- 次に、$|TrK| = 2$ の場合 (prabolic) のときは微妙であり、properly isolate もしくは asymptoically isorate 可能である。$|TrK| = 2$ のモノドロミーは up to SL(2,Z) conjugate で、すべて T^k $(k \in \mathbf{Z})$ とかける事が知られている。ここで T^{-1} は D7-brane のモノドロミーを意味する。この時、$k \geq 0$(asymptoic free or SCFT) ならば properly isolate で、そうでないと asymptoically isolate となる。これは、後者 $k < 0$(QED like) の場合には、$\tau \sim -\frac{k}{2\pi i} log z$ の振る舞いが $z \to 0$ (= 無限に引き離した極限) で、$e^{\phi} \to 0$ となり、今考えているｒ枚の 7-brane のある領域では至る所で結合定数が 0 となり特異的になる。そこで無限の極限はとれず、asymptoically isolate となる。一方、$k \geq 0$ では、一点につぶすことはできないので、$\tau \sim -\frac{k}{2\pi i} log z$ の振る舞いは十分 z が大きいところでのみ成り立ち、z が小さいとそれぞれの 7-brane の寄与の重ね合わせとなり、無限の極限でも非特異であるので properly isolate できる。
- 最後に $|TrK| > 2$ のとき (hyperbolic) は孤立させることは不可能である。

以上の結果を D3-brane probe でのゲージ理論の言葉に直すと、

- properly isorate $\leftrightarrow$ asymptoic free or (super)conformal
- asymptoically isorate $\leftrightarrow$ β-function > 0 (QED like)

[17] この小節で用いているモノドロミー：K は、[付録Ｂ] で述べているように junction の文献によくある convention を用いている。すなわち、τ の受けるモノドロミーの逆行列となっていることに注意。

となる。

それでは、次に (C) の条件を考える。O7-D7 system の時に既に述べたように、7-brane のなす代数 (ゲージ対称性のこと) が semisimple もしくは simple の場合には、独立な U(1)factor が存在せず、電荷を帯びた状態はすべてその代数の weight-lattice に値をとり、root vector の dual を基底としてその整数係数の線形結合で表される。この時、root vector の dual に対応する BPS state すなわち enhanced ゲージ対称性を担うゲージボソンが存在するから、電荷を帯びた non-BPS state はすべて BPS state に崩壊できることが分かる。従って、安定な non-BPS state を含む 7-brane の配置は、その system のなす代数が semi-simple ではないことが必要である[18] 。

そのような 7-brane の配置を孤立できる場合の中から選ぶと、

$$(1)D_1(=U(1))\ ,\ (2)\hat{\tilde{E}}_1(=\hat{U(1)})\ ,\ (3)\ \hat{E}_2(=\hat{SU(2)\times U(1)})$$

がその候補となる。

この中で、(1) は既に見た O7-D7 system を意味するので安定な non-BPS state を確かに含んでいる。

さてそれでは、(2),(3) についてはどうであろうか。

そこで最後の条件 (b) を (2),(3) について調べることにする。

まず $(2)\hat{\tilde{E}}_1(=\hat{U(1)})$ について考える。

この場合の 7-brane の配置は、[付録 B] で説明しているように、

$$\hat{\tilde{E}}_1 = AX_{[2,-1]}CX_{[4,1]} = BACX_{[4,1]}$$

となっている (図 7.5 参照)。これは、U(1) 代数を持つ $\tilde{E}_1$ に $X_{[4,1]}$ を加えて affine 化したもので、全体を一周する (1,0)string を意味する junction $\boldsymbol{\delta} = \mathbf{x_{[2,-1]}} + 2\mathbf{c} - \mathbf{x_{[4,1]}}$ と、それを独立な junction $\mathbf{J_1} = 3\mathbf{a} - \mathbf{x_{[2,-1]}} - \mathbf{c}$ から代数が生成されて、$\hat{U(1)}$ が生じる。つまり、任意の junction $\mathbf{J}$ は、

$$\mathbf{J_1^2} = -8, \boldsymbol{\delta^2} = 0 \tag{7.62}$$

$$\mathbf{J} = Q\mathbf{J_1} + l\boldsymbol{\delta} \quad (Q \in \mathbf{Z}, l \in \mathbf{Z}) \tag{7.63}$$

と表され、Q が U(1) 電荷を、l が affine 代数の grade を意味する。この時、

$$\mathbf{J^2} = -8Q^2 \tag{7.64}$$

となり、$|Q| \geq 1$ ならばすべて non-BPS state である。このなかでどれが安定なのかという問題は、system の詳細な配置に依存すると思われるが、(c) の条件を満たしてるので必ず一つは安定な non-BPS state が存在するはずである。このようにして F-theory における安定な non-BPS state を見つけることができた。

[18] もちろん崩壊先の BPS state が non-BPS state よりエネルギーが大きく、実際には崩壊しない場合もあるがその判定は難しいので、ここでは確実に安定な non-BPS state を含む 7-brane の配置を探すことを考えている。

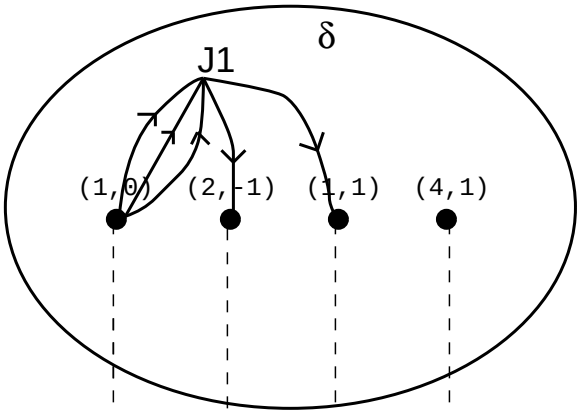

図 7.5: $\hat{\tilde{E}}_1$ の 7-brane の配置と string junction

最後に、(3) $\hat{E}_2 (= S\hat{U}(2) \times \hat{U(1)})$ の場合を調べてみる。この場合の 7-brane の配置は、図 7.6 のように

$$\hat{E}_2 = ABCCX_{[3,1]} \sim ABCBC$$

となっている。$ABCC$ が E_2 の配置であり、CC から SU(2) が生じ、さらに U(1) も別のところから生じる。E_2 の $X_{[3,1]}$ は affine 化をする 7-brane であり、全体を一周する junction $\boldsymbol{\delta}$ を構成する。上式の最後に示したように、SL(2,Z) 変換で 7-brane の配置が $ABCBC$ と同等になり、摂動論的に無理に解釈すると O7-plane が 2 枚、D7-brane が 1 枚からなる奇妙な状況とも言える。

$$\mathbf{J_1} = 2\mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c_1} \tag{7.65}$$

$$\mathbf{J_2} = \mathbf{c_1} - \mathbf{c_2} \tag{7.66}$$

$$\boldsymbol{\delta} = \mathbf{b} + \mathbf{c_1} + \mathbf{c_2} - \mathbf{x_{[3,1]}} \tag{7.67}$$

で定義される 3 つの junction を用いて任意の junction $\mathbf{J}$ は、

$$\mathbf{J} = n\mathbf{J_1} + m\mathbf{J_2} + l\boldsymbol{\delta} \quad (l, m, n \in \mathbf{Z}) \tag{7.68}$$

と表される。この時、n, m, l はそれぞれ、U(1) 電荷、SU(2) 電荷、grade を表す。さて自己交点数は、

$$\mathbf{J_1}^2 = -4, \mathbf{J_2^2} = -2, \boldsymbol{\delta^2} = 0 \tag{7.69}$$

$$\mathbf{J^2} = -(m-n)^2 - 3n^2 - m^2 \tag{7.70}$$

となり、明らかに non-BPS state が存在する。前と同様な議論で、この中に安定な non-BPS state が少なくとも 1 つは存在するので、F-theory における別の安定な non-BPS state を見つけたことになる。

以上のように F-theory における別の安定な non-BPS state がさらに 2 種類存在することが分かった。これらすべてに共通するのは自己交点数が -2 より小さいので、SU(2) に enhance できない non-BPS junction が存在しているという点である。

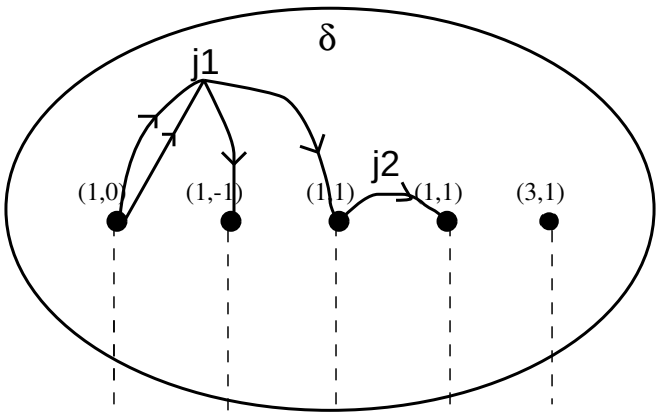

図 7.6: $\hat{E}_2$ の 7-brane の配置と string junction

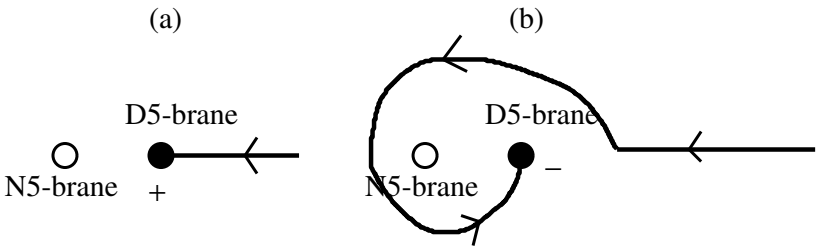

図 7.7: NS5-brane に付着する D-string

7.2.9 O5-D5 system

Op-Dp system における non-BPS state の例の最後として、O5-D5 system を [41] に従って boundary state を用いた立場で述べることにする。

考えたいのは IIB/$\Omega \cdot I_4$ の強結合の様子であるが、TypeIIB の S-duality より IIB/$(-1)^{F_L^S} \cdot I_4$ の弱結合として議論できる。ここで、$I_4 : (x^6, \cdots, x^9) \to (-x^6, \cdots . - x^9)$ であった。

この orbifold については [29] で調べられているように twisted sector は 16 存在して、それぞれが 6D(1,1)SUSY の vector-multiplet(vector+4scalar) をなし、fixed 5-plane と NS5-brane が重なっている状態と同一視でき、確かに O5-D5 system の S-dual となっている。

今考えている non-BPS state は S-dual をとると NS5-brane に 2 つの端点を持ち fixed 5-plane を一周する D-string と見なせ、NS5-brane の U(1) ゲージ対称性に対して電荷 $+2$ を持つはずである。それに対して NS5-brane に一つの端点を持ち遠方まで伸びる D-string は電荷 ± 1 を持つ。この時、電荷の符号は下の図 7.7 のように、fixed 5-plane を一周して NS5-brane に付着するかそれとも一周せずに付着するかどうかで逆になる。 そこで、図 7.8 のように $+1$ の電荷をもつ D-string と $+1$ の電荷をもつ antiD-string が同時にある場合を考え、両者を対消滅すると NS5-brane 上の電荷 $+2$ だけ残るはずである。この電荷を担う状態は明らかに non-BPS な 0-brane である。この

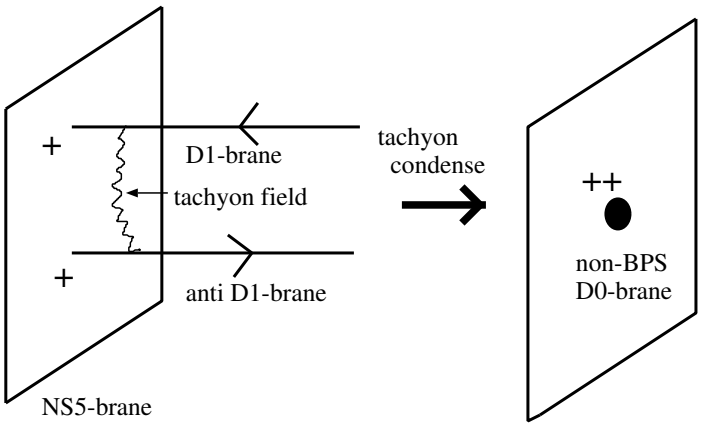

図 7.8: NS5-brane 上の安定な non-BPS 状態の生成

ようにして得られた non-BPS state は、今考えている non-BPS state と S-dual の関係にあると考えられる。そこで以下ではこのような non-BPS state の安定性を boundary state を用いて摂動的に解析し、最終的に non-BPS D0-brane と同一視できることを確かめる。

さて、特に x^9 方向を S^1 コンパクト化 (半径 R) して、$x^9 = 0, \pi R$ の NS5-brane 間に伸びる D-string と antiD-string を考える (図 7.9 参照)。この場合の D-string,antiD-string の boundary state は 4 章で説明した、fractional D-brane の場合と似た方法で求めることができる。注意すべき点は、今の場合 fixed point が $x^9 = 0, \pi R$ と 2 つあるので、twisted sector は $|T_1>, |T_2>$ と二つあり、それぞれが別の fixed 5-plane に D-string が付着した影響を表す。また、twisted sector の GSO-projection を $(-1)^{F_L} = -1, (-1)^{F_R} = 1$ としていることにも注意が必要である。それぞれの sector の boundary state のどのような線形結合をとるかは、open-closed 対応を用いて決定すればよい。結果を書くと、D-string,antiD-string の boundary state は次のように書ける。

$$\begin{aligned} |\theta, \epsilon_1, \epsilon_2> &= \frac{N_1}{2}[|U, \theta>_{(NSNS)} + \epsilon_1 |U, \theta>_{(RR)}] \\ &+ \frac{\tilde{N_1}}{2}\epsilon_2[|T_1>_{(NSNS)} + \epsilon_1 |T_1>_{(RR)}] \\ &+ \frac{\tilde{N_1}}{2}e^{i\theta}\epsilon_2[|T_2>_{(NSNS)} + \epsilon_1 |T_2>_{(RR)}] \end{aligned} \tag{7.71}$$

ここで、$\theta = 0, \pi$, $\epsilon_1 = \pm 1$, $\epsilon_2 = \pm 1$ である。θ は、x^9 方向の $\mathbf{Z_2}$ wilson line を意味し、$\epsilon_1 = 1$ は D-string に、$\epsilon_1 = -1$ は antiD-string に対応する。ϵ_2 は twisted RR charge に関係していて、この boundary state で表される状態はそれぞれの NS5-brane 上の U(1) 電荷を $\epsilon_1\epsilon_2, \epsilon_1\epsilon_2 e^{i\theta}$ だけ持っている。

open-closed 対応は具体的に、

$$\begin{aligned} &< \theta, \epsilon_1, \epsilon_2 | \Delta | \theta', \epsilon_1', \epsilon_2' > \\ &= 2\int_0^\infty \frac{dt}{2t} Tr_{(NS-R)}[\frac{1+\epsilon_1\epsilon_1'(-1)^F}{2}\frac{1+\epsilon_2\epsilon_2' I_4}{2}\frac{1+\epsilon_2\epsilon_2' e^{i(\theta-\theta')} I_4'}{2}\ q^{2L_0}] \end{aligned}$$

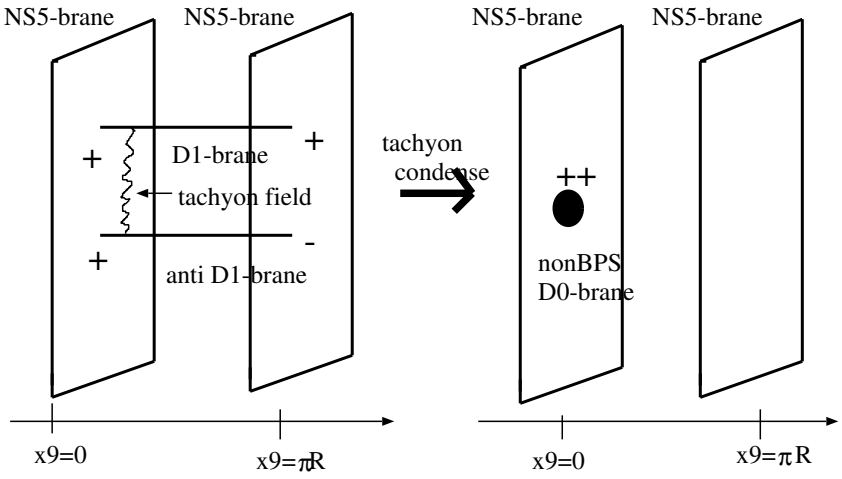

図 7.9: NS5-brane 間に存在する $D1-\bar{D}1$ system

(7.72)

と記述される。ここで、I_4' は $(x^6,x^7,x^8,x^9)\to(-x^6,-x^7,-x^8,2\pi R-x^9)$ を意味する。この時、$h=I_4\cdot I_4'$ は x^9 方向の一周 shift することを表す。

この open-closed 対応から normalization が次のように決定される。但しこの計算はさらに (x^6,x^7,x^8) 方向も半径 R_6,R_7,R_8 にコンパクト化して求めた。

$$N_1=\sqrt{2}\pi^{\frac{5}{2}}\alpha'\sqrt{\frac{R_6}{R_7R_8R_9}}\ ,\ \tilde{N_1}=8\pi^{\frac{3}{2}}\alpha'^{\frac{1}{2}} \tag{7.73}$$

さてそれでは、$\mathrm{IIB}/(-1)^{F_L^S}\cdot I_4$ における non-BPS state について調べてゆく。NS5-brane 間に $D1,\bar{D}1$ が存在している状態から、non-BPS state を対消滅によって作りたい。

そのためには、図 7.9 のように特に $(\theta,\epsilon_1,\epsilon_2)=(+,+,+),(-,-,-)$ で表せる $D1,\bar{D}1$ を考える。この場合は片方の NS5-brane の $\mathrm{U}(1)$ 電荷 $+2$ をもつが、もう片方の NS5-brane の $\mathrm{U}(1)$ 電荷は持たない。したがって片方の NS5-brane 上に non-BPS state が 1 つできるはずである。このとき、式 (7.72) から分かるように open string の立場では $h=I_4\cdot I_4'=-1$, $I_4=-1$ の projection があるので、最低のエネルギーをもつ mode は、次のような vertex operator で表される。

$$V=\{\sigma_1,\sigma_2\}\otimes e^{-\Phi_B}(e^{i\frac{x^9}{2R}}-e^{-i\frac{x^9}{2R}}) \tag{7.74}$$

この状態のエネルギーは、

$$m^2=\frac{1}{4R^2}-\frac{1}{2\alpha'} \tag{7.75}$$

と求まる。従って、$R > R_c = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}$ で不安定になる。逆に考えると、$R = R_c$ の時から、non-BPS state の方が安定になると考えられ、その質量 m_{++} は,

$$m_{++} = 2\pi R_c \tau_{D1} = \frac{1}{\sqrt{2\alpha' g}} \tag{7.76}$$

と求まる。

同様に、$(\theta, \epsilon_1, \epsilon_2) = (+,+,+), (+,-,-)$ として両方の NS5-brane に一つずつ non-BPS state が生成される場合について考えると $h = I_4 \cdot I_4' = 1$, $I_4 = -1$ の projection となり、$R > 2R_c = 2\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}$ で不安定になる。従って、一つの non-BPS state の質量は同じ結果：m_{++} となる。従って半径 R に non-BPS state の質量がよらないことが分かった。

さてこのようにして IIB$/(-1)^{F_L^S} \cdot I_4$ における non-BPS state の存在とその性質が分かったが、この non-BPS state をもっと直接的に記述することはできないのだろうか。この章の始めに述べた TypeI SO(32)spinor soliton の場合には $D1, \bar{D}1$ が崩壊して non-BPS D0-brane が生成された。そこでこの場合にも non-BPS D0-brane として記述できるか調べてみたい。TypeI SO(32)spinor soliton の時と同様に、具体的に tachyon condense を CFT の marginal deformation として記述して解析するのは [付録 C] に譲るとしてここでは [33] に従って non-BPS D0-brane の boudary state を構成してその質量と電荷を比較する。

この non-BPS D0-brane は fixed 5-plane に stuck している fractional D-brane と考えられ次のように boudary state が構成される。

$$|nonBPSD0, \epsilon, i> = \frac{N_0}{2}|U>_{(NSNS)} + \epsilon \frac{\tilde{N_0}}{2}|T_i>_{(RR)} \tag{7.77}$$

ここで、$\epsilon = \pm 1$ は NS5brane の U(1) 電荷(twisted RR charge) を意味し、$i = 1, 2$ は non-BPS D0-brane の stuck している fixed 5-plane をラベルするものである。この boudary state は untwisted RR charge を帯びてないので、non-BPS であることが分かる。

さて、この時 open-closed 対応は次のようになる。

$$< \epsilon, 1|\Delta|\epsilon', 1> = 2\int_0^\infty \frac{dt}{2t} Tr^{open}_{(NS-R)}[\frac{1 + \epsilon\epsilon'(-1)^F I_4}{2}\ \tilde{q}^{2L_0}] \tag{7.78}$$

これから、次のように normalization が決まる。

$$N_0 = 2\pi^{\frac{3}{2}} \alpha'^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{R_6 R_7 R_8 R_9}} \tag{7.79}$$

$$\tilde{N_0} = 2\tilde{N_1} \tag{7.80}$$

まず NS5brane の U(1) 電荷は $\tilde{N_0} = 2\tilde{N_1}$ で表されるので、D-string の持つ U(1) 電荷の 2 倍となっていて期待される電荷と一致する。

次に質量は 4 章で述べた方法に従って求めると、

$$m_{fracD0} = \frac{N_0}{\kappa_4} = \frac{1}{\sqrt{2\alpha' g}} \tag{7.81}$$

となり、前の m_{++} と一致する。

以上のことから O5-D5 system における安定な non-BPS state は、NS5brane 上の non-BPS D0-brane と S-dual な関係にあることが理解できる。

7.3 Non-supersymmetric cycleに巻きつくD-braneの安定性

この最後の節では、TypeIIAをK3コンパクト化した場合をorbifold limitで扱い、Non-supersymmetric cycleに巻きつくD-braneをnon-BPS D-braneとして実現しその安定性を調べる[45][48][34]。簡単のためα'=1とする。

7.3.1 Non-BPS D-braneのtachyon condensation

特に、TypeIIAのnon-BPS D-braneをここでは取り上げるが、他のnon-BPS D-braneについても同様である。

まずx^9方向をS^1コンパクト化した場合のTypeIIA理論において、S^1に巻きついたnon-BPS D-braneを考える[45]。このようなnon-BPS D-braneは常に真のtachyonを含んでいるので不安定であるが、その事実はここでは無視することにする。後に考えるNon-supersymmetric cycleに巻きつくD-braneをnon-BPS D-braneとみなす場合にはorbifold projectionによって真のtachyonはproject outされるので問題ないからである。

このとき、tachyon場は次のように展開され、$(mass)^2$も求まる。

$$T(x^9) = \sum_n T_n e^{i\frac{n}{R}x^9} \ , \ m_n^2 = \frac{n^2}{R^2} - \frac{1}{2} \tag{7.82}$$

これから分かるように、半径が$R=\sqrt{2}$の時に$T_{\pm 1}$のモードがmarginalになる。そこでT_1+T_{-1}のモードでdeformationするとどうなるだろうか。これは、$T(x^9)=cos(\frac{x^9}{R})$のtachyon場をcondenseすることを意味する。

このmarginal deformationは、Type I $SO(32)$ spinor solitonについて説明した$D1-\bar{D}1$からtachyon condenseしてnon-BPS D0-braneを得るのと逆になっている。詳しくは[付録D]で説明しているが、結果としてnon-BPS D1-braneにtachyon condenseして$D0-\bar{D}0$を得ることになる。特に、tachyon condenseして最終的に得られるsystemにはtachyonは存在しないことに注意。このことはspectral flowとして理解できる。

この結果自体は、condenseする$T(x^9)=cos(\frac{x^9}{R})$のtachyon場から予想することができる。すなわち、この場合にはnodeが$x^9=\frac{\pi R}{2}, \frac{3\pi R}{2}$と2つあるので、condenseした後にこの2つの点は真空と異なるobjectになっているはずである。またこのobjectはnon-BPS D1-brane同様、supersymmetryが破れているはずなので$D0-\bar{D}0$となるのは自然である。逆に、$D0-\bar{D}0$からみると$R=\sqrt{2}$のとき2つのbrane間の距離は$\pi R=\sqrt{2}\pi$となり、ちょうどbrane-antibrane systemが不安定になり始める距離と一致する。

open string CFTのmarginal deformationの記述はType I $SO(32)$ spinor solitonのときとほとんど同じである。注意すべき点はcocycle factorのせいでnon-BPS D1-braneのCP factor$\{1,\sigma_2\}$は実質上$\{1,\Sigma_1,\Sigma_2,\Sigma_3\}$とみなせて、$D1-\bar{D}1$のときのCP factor$\{1,\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\}$と同じになることである。この記述の詳細は[付録D]で述べることにする。

得られた結論をまとめると次のようになる。

$$\text{Non-BPS } D(p+1)\text{-brane} \overset{tachyon\ condense}{\longrightarrow} Dp-\bar{D}p$$

7.3.2 Orbifold における Non-BPS D1-brane の安定性と tachyon condense

前の節で考えた tachyon condense を今度は orbifold projection $I_4 : x^i \to -x^i \ (i = 6, 7, 8, 9)$ がある時について考える。$x^6 \sim x^9$ はそれぞれ半径 $R_6 \sim R_9$ にコンパクト化されている。ここで $R_9 = R$ である。non-BPS D1-brane は orbifold の 2 つの fixed plane$(x^6 = x^7 = x^8 = 0, x^9 = 0, \pi R)$ の間に伸びている。簡単のため $R_9 = R$ が他の半径に比べて十分小さいとする。

[付録 D] で説明したように non-BPS D-brane を open string の立場で扱うには cocycle factor $\Lambda \in \{1, \Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3\}$ を付与する必要がある。これは CP factor を含んでいるので、以下では CP factor と呼ぶことにする。$((-1)^F, (-1)^n) = \{(+,+), (+,-), (-,+), (-,-)\}$ の各 sector が $\{1, \Sigma_3, \Sigma_2, \Sigma_1\}$ に対応していたことを思い出しておく。ここで n は KK mometum を表す量子数であった。

さて重要なのは I_4 の作用であるが、次のようになることが分かる。

$$I_4 \ : \ \Lambda \to \Sigma_3 \Lambda \Sigma_3 \ , \ n \to -n \tag{7.83}$$

この CP factor への作用を理解するには 2 通りの方法がある。一つは、non-BPS D-brane における相互作用には 6 章でみたように、

$$\int C^{RR}_{(1)} \wedge dT \quad , \quad \int B^{NS}_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \tag{7.84}$$

という項があり、orbifold projection でこれらの項が不変になるという条件から示せる。もう一つの方法は、boundary state を用いて決定する方法がある。これについては後に説明する。どのやり方も上記の通り同じ結果を与える。

それではまず non-BPS D1-brane の安定性を調べる。この時、T_0 のモードに相当する $m^2 = -\frac{1}{2}$ の tachyon は Σ_2 の sector に属すので、明らかに project out される。その次にエネルギーが低い $(T_1 - T_{-1})$ のモードは Σ_1 の sector に属し、許容されるモードである。この質量は、$m^2 = \frac{1}{R^2} - \frac{1}{2}$ となるので、non-BPS D1-brane は半径が $R < \sqrt{2}$ だと安定だが、$R > \sqrt{2}$ になると不安定になることが分かる。安定になる時 non-BPS D1-brane 上の lowenergy spectrum は、bosonic field のみ考えると massless field は $(A^0, A^1, \cdots, A^5)$ と書ける。

さてそれでは $R = \sqrt{2}$ において tachyon condense を今までと同様に行うと $\alpha = 1$ で得られる状態は片方の fixed plane に $D0$-brane が stuck し、もう片方の fixed plane に $\bar{D}0$-brane が stuck している状態である。以上を図示すると図 7.10 のようになる。

確認のために両者の質量を比較しておく。この時 D0-brane は正しくは fractional D0-brane と言うべきで質量は bulk の D0-brane に比べると半分になることに注意。

non-BPS $D1$-brane の質量を m_{D1}、$D0 + \bar{D}0$ の質量を $m_{D0+\bar{D}0}$ とすると、

$$m_{D1} = \frac{\sqrt{2}}{2\pi g} \cdot \pi R = \frac{R}{\sqrt{2} g} \ , \ m_{D0+\bar{D}0} = 2 \cdot \frac{1}{2g} = \frac{1}{g} \tag{7.85}$$

となり、確かに $R < \sqrt{2}$ では non-BPS $D1$-brane が安定で、$R > \sqrt{2}$ になると $D0 + \bar{D}0$ の方が安定になることが分かる。

今までは、$R_9 = R$ が他の半径 R_6, R_7, R_8 よりも十分小さいと考えて、$x^6 = x^7 = x^8 = 0$ 以外の fixed plane の存在を無視してきた。そこで今度は R_6 を徐々に小さくしてゆくと何が起こる

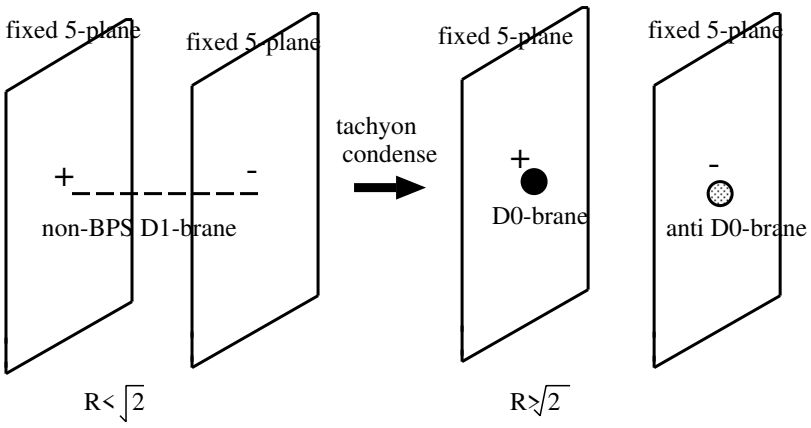

図 7.10: non-BPS D1-brane の $D0 - \bar{D}0$ system への崩壊

か考える。x^6 方向の winding を w_6 とすると、tachyon 場である $|w_6 = 1 > -|w_6 = -1 >$ という状態は projection で生き残り、質量は $m^2 = (R_6)^2 - \frac{1}{2}$ となる。従って、$R_6 < \frac{1}{\sqrt{2}}$ では不安定となることが分かる。つまり今まで考えてきた non-BPS $D1$-brane が安定なのは正確に言うと、$R_6 > \frac{1}{\sqrt{2}}$, $R_7 > \frac{1}{\sqrt{2}}$, $R_8 > \frac{1}{\sqrt{2}}$, $R_9 < \sqrt{2}$ ということになる。

さてでは、$R_6 < \frac{1}{\sqrt{2}}$ の時は何に崩壊するのだろうか。これは、既に見た $D0 - \bar{D}0 \rightarrow$ non-BPS$D1$ を 2 回 T-dual とって $D2 - \bar{D}2 \rightarrow$ non-BPS$D1$ とすることで理解できる。すなわち $R_6 < \frac{1}{\sqrt{2}}$ の時は $D2 - \bar{D}2$ に崩壊するのである。

7.3.3 Orbifold における non-BPS D1 brane の幾何学的解釈と boundary state

ここでは、今まで考えてきた Orbifold における non-BPS D1 brane についてその幾何学的意味について boundary state の記述を援用しながら説明する。

まず 4 章で見たように fixed plane に stuck する fractional D0-brane は、Type IIA の K3 コンパクト化という立場では D2-brane が vanishing 2-cycle に巻きついた状態ともみなせる。このように $\mathbf{T^4/Z_2}$ の orbifold を blow up して K3 とみなした立場で、non-BPS D1 brane はどのような幾何学的解釈ができるだろうか。

そのためにまずそれぞれの brane に対する boundary state の記述を説明する。boundary state の構成 [45] は fractional $D0$-brane($\bar{D}0$-brane) については既に 4 章で見たように、

$$|fracD0, \epsilon, i> = \frac{N_0}{2}(|U>_{NSNS} + |U>_{RR}) + \epsilon\frac{\tilde{N_0}}{2}(|T_i>_{NSNS} + |T_i>_{RR}) \tag{7.86}$$

$$|frac\bar{D}0, \epsilon, i> = \frac{N_0}{2}(|U>_{NSNS} - |U>_{RR}) + \epsilon\frac{\tilde{N_0}}{2}(-|T_i>_{NSNS} + |T_i>_{RR}) \tag{7.87}$$

$$N_0 \;=\; \pi^{\frac{3}{2}}\alpha'^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{2}{R_6R_7R_8R_9}}\ ,\ \tilde{N_0}=2^{\frac{7}{2}}\pi^{\frac{3}{2}}\alpha'^{\frac{1}{2}} \tag{7.88}$$

ここで $\epsilon=\pm1$ は twisted RR charge を意味し、$i=1,2$ はそれぞれ $x^6=x^7=x^8=0$, $x^9=0,\pi R$ の fixed plane に対応する twisted sector をラベルするものである。

そこで $i=1,2$ の fractional D0-brane は $\epsilon=\pm1$ の時にそれぞれ、$\pm[\alpha_1],\pm[\alpha_2]$ で表される K3 の 2-cycle に巻きつく D2-brane と見なすことができる。すなわち幾何学的情報は twisted RR sector が担っていると考えられる。このことは 4 章 6 節の一般論からも分かる。ここで、$[\alpha_1],[\alpha_2]$ は orbifold limit で vanishing 2-cycle に相当していて $x^6=x^7=x^8=0$, $x^9=0,\pi R$ にそれぞれ局在している。この 2-cycle の交点数は以下の通りである。

$$[\alpha_1]\cdot[\alpha_1]=[\alpha_2]\cdot[\alpha_2]=-2\ ,\ [\alpha_1]\cdot[\alpha_2]=0 \tag{7.89}$$

一方、untwisted charge は bulk の D0-brane charge を意味し、brane か anti-brane かを識別する。では、もともと D2-brane と解釈した場合には何故 D0-brane が生じるのであろうか。これを理解するには、CFT の意味での orbifold limit において 2-cycle は幾何学的には vanishing しているが、CFT が特異的にならないように twisted B-field が貫入している [74] ことを思い出せばよい。つまり、D2-brane の WZ-term $\sim\int B_{NS}\wedge C_{D0}$ の項において B-field flux は D0-brane charge を意味するのである。

それでは次に non-BPS D1 brane の boundary state の記述を考える。boundary state の求め方は fractional D0-brane と同様に、可能な sector をすべて線形結合とって係数を open-closed 対応で決定すればよい。結果をかくと次のようになる。

$$|\text{non-BPS D1},\epsilon,\theta> \;=\; \frac{N_1}{2}|U,\theta>_{NSNS}+\epsilon\frac{\tilde{N_1}}{2}(|T_1>_{RR}+e^{i\theta}|T_2>_{RR}) \tag{7.90}$$

$$N_1 \;=\; 2\pi^{\frac{3}{2}}\alpha'\sqrt{\frac{R_9}{R_6R_7R_8}},\tilde{N_1}=\tilde{N_0} \tag{7.91}$$

ここで、$\epsilon=\pm1$ は twisted RR charge に関係する量子数、$\theta=0,\pi$ は D1 brane 上の $\mathbf{Z_2}$wilson line を表す。

open-closed 対応は具体的に次のように書ける。

$$<D1,\epsilon,\theta|\Delta|D1,\epsilon',\theta'>=2\int_0^\infty\frac{dt}{2t}Tr^{open}_{(NS-R)}[\frac{1+\epsilon\epsilon'(-1)^FI_4}{2}\frac{1+\epsilon\epsilon'e^{i(\theta-\theta')}(-1)^FI_4'}{2}] \tag{7.92}$$

但し、$I_4':(x^6,x^7,x^8,x^9)\to(-x^6,-x^7,-x^8,2\pi R-x^9)$ とした。

さてこのように non-BPS D1 brane の boundary state は求まったが、それが持つ電荷の意味と幾何学的解釈の関係について考えてみる。まず non-BPS D1 brane が帯びる twisted RR charge の大きさは $\tilde{N_1}=\tilde{N_0}$ より fractional D0-brane と同じであり、2 つの fixed plane に対応する twisted

RR charge をそれぞれ $\epsilon, e^{i\theta}\epsilon$ だけ持っている。幾何学的情報は twisted RR sector が担っているはずなので、前と同様に non-BPS D1 brane を 2-cycle $[\beta]$ に巻きつく D2-brane と解釈すると、

$$[\beta] = \epsilon[\alpha_1] + \epsilon e^{i\theta}[\alpha_2] \tag{7.93}$$

と $[\beta]$ は与えられる。この時 $[\beta]$ の自己交点数は、

$$[\beta] \cdot [\beta] = -4 < -2 \tag{7.94}$$

となり、holomorphic cycle でない。従ってそれに巻きつく D2-brane は BPS ではなくなり [75]、このような cycle を non-supersymmetric cycle(non-SUSY cycle) と呼ぶ。

以上をまとめると次の結果が得られたことになる。

TypeIIA の K3 コンパクト化において、

non-SUSY cycle に巻きつく D2-brane $\overset{tachyon\ condense}{\longrightarrow}$
SUSY cycle に巻きつく D2-brane と anti-D2-brane

もちろん、このような結果は TypeIIA,B の他の Dp-brane についても同様に成立つはずである。

7.3.4 Heterotic dual での non-BPS state

ここでは、$IIA/K3 \sim Het/T^4$ の duality を用いて今まで考えてきた IIA/K3 における non-BPS D1 brane や fractional D0-brane がどのように Heterotic dual で記述されるか見てみる [34]。

まず、具体的に K3 が $\mathbf{T^4/Z_2}$ の orbifold で与えられる場合の Heterotic dual を構成したい。そのためには次のような duality chain を用いる。

$$\begin{aligned}&\text{TypeIIA}/[\mathbf{T^4/Z_2}] \overset{T-dual(x^9)}{\longrightarrow} \text{TypeIIB}/[\mathbf{NS5}] \overset{\mathbf{S-dual}}{\longrightarrow} \text{TypeIIB}/[\mathbf{D5, O5}] \\ &\overset{T-dual(x^6 \sim x^9)}{\longrightarrow} \text{TypeI}/[\mathbf{T^4}] \overset{\mathbf{S-dual}}{\longrightarrow} \text{HetSO}(32)/[\mathbf{T^4}]\end{aligned}$$

但し TypeIIB/[**NS5**] は、O5-D5 system の S-dual として前に述べた orbifold：IIB/$[(-\mathbf{1})^{\mathbf{F_L^S}}\mathbf{I_4}]$ を意味する。

さて K3 が orbifold $\mathbf{T^4/Z_2}$ である場合に上の duality chain で対応する TypeIIB/[**D5, O5**] を見ると、すぐ分かるように O5-plane と D5-brane が一枚ずつ重なっていてゲージ対称性は $SO(32) \to U(1)^{16}$ と破れている状態になっている。従って Heterotic dual では次のような wilson line になっていると考えられる。

$$\begin{aligned}A^6 &= (\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},0,0,0,0,0,0,0,0) \\ A^7 &= (\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},0,0,0,0,\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},0,0,0,0) \\ A^8 &= (\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},0,0,\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},0,0,\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},0,0,\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},0,0)\end{aligned}$$

$$A^9 = (\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},0) \tag{7.95}$$

縦方向に読むと、この wilson line の値は１６個の fixed point の座標そのものであることに注意。

一般に、$\mathbf{T^4}$ にコンパクト化したときの Het SO(32) 理論の spectrum は次のようになることを示すことができる。但し $I = 1 \sim 16$, $i = 6 \sim 9$, $q^I \in \Gamma^{16}$, $n^i, w^i \in \mathbf{Z}$ とおく。この時 q^I が charge vector $\vec{q}$ の SO(32) 部分である。また半径 R^i $(i = 6 \sim 9)$ は Het 側での metric を用いた場合の値である。

$$P_L^I = \sqrt{\frac{2}{\alpha'}}(q^I + w_i \cdot A_i^I) \tag{7.96}$$

$$P_L^i = \frac{n^i}{R^i} + \frac{w^i R_i}{\alpha'} - \frac{q^I \cdot A_i^I}{R_i} - \frac{w^j A_j^I A_i^I}{2R_i} \tag{7.97}$$

$$P_R^i = \frac{n^i}{R^i} - \frac{w^i R_i}{\alpha'} - \frac{q^I \cdot A_i^I}{R_i} - \frac{w^j A_j^I A_i^I}{2R_i} \tag{7.98}$$

と量子化される momentum を用いて NS-sector の mass spectrum は次のようになる。

$$M^2 = (P_L)^2 + \frac{4}{\alpha'}(N_L - 1) = (P_R)^2 + \frac{4}{\alpha'}(N_R - \frac{1}{2}) \tag{7.99}$$

また量子数の対応も記述の duality chain を追って求めることができる。例えば、IIA 側で D0-brane number に相当するのは $\frac{1}{2}(P_L^9 + P_R^9)$ であり、特に fractional D0-brane の場合は stuck している fixed plane(=D2-brane が巻きつく K3 の 2-cycle) を表すのは Het 側で q^I である。また $P_{L,R}^i (i = 6 \sim 8)$ は D2,D4-brane number に関係しているのでここでは 0 とおくことにする。

また TypeIIA と Heterotic の metric は次のように関係している。

$$G_{\mu\nu}^A = \frac{g_A^2 \alpha'}{R_9^2} G_{\mu\nu}^{Het} \tag{7.100}$$

さてそれでは、以上の知識をもとに non-BPS D1 brane などの Heterotic dual を調べてゆくことにする。

(a)bulk D0-brane

この場合の Heterotic dual は、

$$\vec{P_L} = (0^{16}; 0^3, \pm\frac{1}{R_9}) \ , \ \vec{P_R} = (0^3, \pm\frac{1}{R_9}) \ , \ N_L = 1 \ , \ N_R = \frac{1}{2} \tag{7.101}$$

である。符号は brane と anti-brane の違いを表す。また $N_R = \frac{1}{2}$ より確かに BPS state になっている。質量は $M_{D0}^{Het} = \frac{1}{R_9}$ となり IIA に直すと $M_{D0}^A = \frac{1}{\sqrt{\alpha' g^A}}$ となり確かに IIA 理論での D0-brane の質量と一致する。

(b)fractional D0-brane

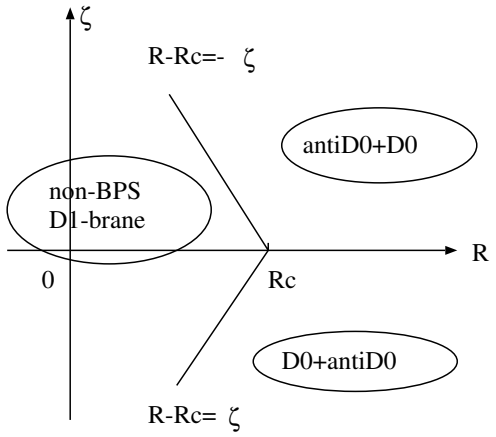

図 7.11: $D0 + \bar{D0} \leftrightarrow$non-BPS $D1$ の相図

この場合の Heterotic dual は、例えば

$$\vec{P_L} = (\sqrt{\frac{2}{\alpha'}}, \pm\sqrt{\frac{2}{\alpha'}}, 0^{14}; 0^3, \pm\frac{1}{R_9}) \ , \ \vec{P_R} = (0^3, \pm\frac{1}{R_9}) \ , \ N_L = 0 \ , \ N_R = \frac{1}{2} \tag{7.102}$$

となる。この時、$q^2 = 2$ となっていて twisted RR charge を IIA 側で帯びることが分かる。Hetero 側で求めた質量も fractional D0-brane のもの ($=\frac{1}{2}M_{D0}$) と一致する。

(c)non-BPS D1-brane

この場合の Heterotic dual の電荷は fractional D0-brane と fractional antiD0-brane の持つ電荷を足したものであるはずで、そのなかで最もエネルギーの低いものをとって、例えば

$$\vec{P_L} = (2\sqrt{\frac{2}{\alpha'}}, 0^{15}; 0^4) \ , \ \vec{P_R} = (0^4) \ , \ N_L = 0 \ , \ N_R = \frac{3}{2} \tag{7.103}$$

となる。この時、Hetero 側で $N_R = \frac{3}{2}$ なので確かに non-BPS state である。質量を求めると、$M_{D1}^{Het} = \frac{2}{\sqrt{\alpha'}}$ なので IIA 側では $M_{D1}^{IIA} = \frac{2R_9}{g^A\alpha'}$ となるがこれは IIA で摂動論で求めた値と異なる。しかし non-BPS state なので弱結合と強結合で質量が同じはずはないので自然である。逆に言うと IIA/K3 の強結合は Hetero 側で解析するのが良く、この時には $2\times$(b) と (c) の質量を比較して non-BPS D1-brane は $R_9 > \frac{\sqrt{\alpha'}}{2}$ の時は不安定になり D0+antiD0 に崩壊すると考えられる。この安定性は定性的には既に議論した IIA/K3 の弱結合で得られたものと同じである。

このようにして、強結合での non-BPS state の振る舞いが理解できたが、逆に見ると、$IIA/K3 \sim Het/T^4$ の duality を安定な non-BPS state の対応の立場で確かめたことを意味する。

7.3.5 Tachyon potential と phase diagram

最後に orbifold limit での K3 の non-SUSY cycle に巻きついた D2-brane の安定性を non-BPS D1-brane の tachyon potential を用いて議論したい。今考えている TypeII/I_4 の T-dual をとると

TypeIIB/$(-1)^{F_L^S} I_4$ すなわち fixed 5-plane と NS5-brane が一枚ずつ１６組存在する状況になる。これは既に O5-D5 system の S-dual をとった場合として前に (7.2.9) で既に解析した理論である。特に $D1-\bar{D}1$ system に対して、摂動論で tachyon potential を [付録 C] で式 (C.12) と求めてあるから、この TypeII/I_4 の場合に T-dual 変換してやればよい。

[付録 C] では twisted NSNS field の効果も perturbation 取り入れたが、TypeII/I_4 では、fixed plane 上の 4 つの scalar field すなわち vanishing 2-cycle の Kähler moduli を変えることを意味する。具体的には、hyper Kähler form を $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ とおくとその 4 つの scalar field は $\int_{2-cycle} \vec{\omega}$, $\int_{2-cycle} B_{NS}$ を表すと考えられる。一般に、ある 2-cycle に巻きつく D2-brane の質量は、Kähler form を $\vec{\omega}$ の中から J に選んだ時、$M_{D2} = |\int_{2-cycle}(B + iJ)|$ と与えられる。今考えている orbifold limit では $J = 0, B \neq 0$ であるから、４つの scalar field の中で一次摂動が brane-antibrane system のエネルギーに影響を与えるのは $\int_{2-cycle} B_{NS}$ のみである。従って、$\zeta \propto \int_{2-cycle} B_{NS}$ と解釈される。

一方、$(R - R_c), \zeta$ について一次までの近似で tachyon potential を求めるには式 (C.12) を T-dual 変換 $R \to \frac{1}{R}$ してやればよく、結果は、

$$V(\alpha) = \frac{R}{g}[\frac{1}{4}(R_c - R)cos(\pi\alpha) + \zeta cos(\frac{1}{2}\pi\alpha)] + \cdots \tag{7.104}$$

となる。但し、$R_c = \sqrt{2}$ であり、$\alpha = 0, 1, 2$ それぞれが、$D0 + \bar{D}0$, non-BPS $D1$-brane , $\bar{D}0 + D0$ に相当していた。

この tachyon potential を最小とする order parameter α の値を調べることによって図 7.11 のような phase diagram が得られる。その変化の連続性の解析によって、$D0 + \bar{D}0 \leftrightarrow$non-BPS $D1$-brane の変化は二次相転移であるが、$D0 + \bar{D}0 \leftrightarrow \bar{D}0 + D0$ の場合は一次相転移となることが分かる。

第8章　D-braneのdescent relation

次元の高い不安定なD-braneの系から1次元低いD-braneをtachyon condenseによって生成する具体例は既に前の章で見た通りであるが、このような機構に$(-1)^{F_L^S}$によるtwistを加えて一般化したものがSenによって提唱されているdescent relation[45]である。ここではflatな時空でのdescent relationについて説明する。曲がった時空でのtachyon condenseについては次章で述べるK-theoryによる記述が有効である。

8.1　CFTによるdescent relation

tachyon condenseによる$Dp-\bar{D}p \to$ non-BPS$D(p-1) \to D(p-2)$というdescent relationのCFTによる記述は特別な半径にコンパクト化した時にはすでに見たように可能である。具体的には、tachyon vertexがmarginalになるように、特別な半径にコンパクト化した$Dp-\bar{D}p$ systemにwilson lineを入れた場合を考え、tachyon kinkのcondenceをmarginal deformationとして記述する。その結果、tachyon kinkのnodeにnon-BPS D(p-1)が生成するというものであった。またnon-BPS D(p-1)から$D(p-2)$を生成するのもほとんど同様であり、この場合はwilson lineは必要がない。この方法では系は常にnon-supersymmetricなのでBPS D(p-2)-braneはanti-braneと対で生成される。しかし局所的に見れば一つのtachyon kinkのnodeから一つのBPS D(p-2)-braneが生じていることは明らかである。

tachyon vertexがmarginalでなく真の意味でtachyonicな場合はstring理論としてのtachyon condenseの記述は困難である。わずかにmarginalからずれている場合については摂動的に扱えることは既に見た通りである。

8.2　World volume effective field theoryでのdescent relation

ここではworld volume effective theoryの立場でWZ-termに着目してdescent relationを考える。

まず$Dp-\bar{D}p$ systemを考える。tachyonを$T^{(1)}, T^{(2)}$で表し、ある一次元方向xに関して

$$\frac{d}{dx}T^{(1)}(x) \propto \delta(x)\ ,\ T^{(2)}(x) = 0 \tag{8.1}$$

のように$T^{(1)}$にのみkinkを与えてcondenseさせる。すると$Dp-\bar{D}p$ systemのWZ-term(5.6)は次のように変化する。

$$S_{WZ} \propto \int_{\Sigma(p+1)} C_{(p-1)} \wedge dT^{(1)} \wedge dT^{(2)}$$

$$\rightarrow \int_{\Sigma(p)} C_{(p-1)} \wedge dT^{(2)} \tag{8.2}$$

$$\tag{8.3}$$

となり non-BPS D-brane の WZ-term(6.3) を得る。

さらに $T^{(2)}$ も kink を与えて condense させると BPS D(p-2)-brane が生成されることが分かる。

また WZ-term 以外の部分については文献 [78] で議論されている。

8.3 $(-1)^{F_L^S}$ による twist について

ここでは $(-1)^{F_L^S}$ すなわち left-moving spacetime fermion number による twist について考える。$(-1)^{F_L^S}$ による twist は次に説明するように bulk にたいして T-dual のように働くが D-brane については次元を変えない性質を持つ。また T^4/Z_2 orbifold に対してはその fixed point を NS5-brane に置き換える働きをもつことは既に見た。

まず closed string に対する $(-1)^{F_L^S}$ の作用を考える。そのためには Green-schwarz formalism で記述するのが分かりやすい。TypeIIB string を記述する field は light cone gauge で

$$X^i \ , \ S^a_{(L)} \ , \ S^a_{(R)} \quad (i = 2 \sim 9 \ , \ a = 1 \sim 8) \tag{8.4}$$

と書ける。これを $(-1)^{F_L^S}$ で twist すると理論で現われる sector は次のようになる。

$$\begin{aligned} \text{untwisted-sector} \ &: \ S^a_{(L)}|_0 = S^a_{(L)}|_\pi \\ &\quad\ S^a_{(R)}|_0 = S^a_{(R)}|_\pi \\ \text{twisted-sector} \ &: \ S^a_{(L)}|_0 = -S^a_{(L)}|_\pi \\ &\quad\ S^a_{(R)}|_0 = S^a_{(R)}|_\pi \end{aligned} \tag{8.5}$$

従って、それぞれの sector で $(-1)^{F_L^S}$ の正しい projection をもつ状態は次のようになる。但し、twisted-sector は $(-1)^{F_L^S} = -1$ のように untwisted-sector とは逆に projection する。

$$\begin{aligned} \text{untwisted-sector} \ &: \ |i> \otimes (|j> \oplus |\dot{a}>) \\ \text{twisted-sector} \ &: \ S^a_{(L)-\frac{1}{2}}|0> \otimes (|j> \oplus |\dot{a}>) \end{aligned} \tag{8.6}$$

従って TypeIIA と同じ spectrum となる。このように closed string sector については T-duality を意味することが分かった。

次に (BPS)Dp-brane に対する作用を考える。

boundary state への作用を考えると

$$(-1)^{F_L^S}[|NSNS> + |RR>] = [|NSNS> - |RR>] \text{ となるから}$$
$$(-1)^{F_L^S}|Dp> = |\bar{D}p>$$

と brane を anti-brane に変える。従って brane-antibrane system を考えた時に CP factor への作用は

$$(-1)^{F_L^S} \ : \ \Lambda \ \rightarrow \ \sigma_2 \Lambda \sigma_2 \tag{8.7}$$

とするのが自然である[1] 。

また non-BPS D-brane に対する CP factor への作用は次のようになる。

$$(-1)^{F_L^S} \ : \ 1 \ \rightarrow 1 \ , \ \sigma_2 \ \rightarrow \ -\sigma_2 \tag{8.8}$$

何故なら non-BPS D-brane の effective action には

$$\int dT \wedge C_{RR} \ , \ \int *dA \wedge B_{NS} \tag{8.9}$$

という結合があり、これらが $(-1)^{F_L^S}$ の作用で不変になるはずだからである。

以上をもとに TypeIIB の $Dp - \bar{D}p$ system から出発して $(-1)^{F_L^S}$ の twist を 2 回繰り返し作用させた場合を考える。

まず、$Dp-\bar{D}p$ の CP-factor $\{1, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ を $(-1)^{F_L^S}$ で project すると $\{1, \sigma_2\}$ のみ残り、TypeIIA 理論における non-BPS Dp-brane が得られる。さらに project すると $\{1\}$ のみとなり、TypeIIB 理論における (BPS)Dp-brane となる。

以上をまとめると次のような図となる。

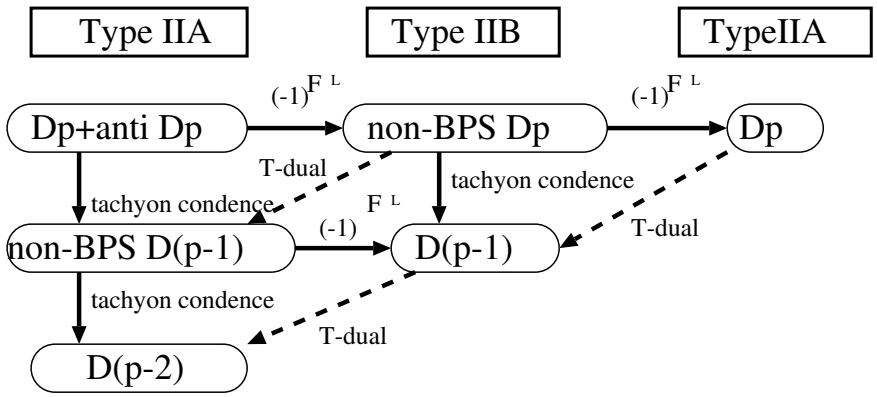

図 8.1: D-brane の descent relation

[1] ここで σ_2 を σ_1 に変えても良く convention の違いと言える。

第9章　D-braneとK-theory

この章では、複数のbraneとantibraneの対消滅のtopologicalな側面をK-theoryを用いて記述し、その結果生じるD-braneそのものをK-theoryで分類する考え方[20]を主に説明する。またK-theoryがD-braneの電荷を分類する理由についてD-braneのWZ-termの観点からも説明する。D-braneのK-theoryによる分類は、BPSでもnon-BPSでも可能なので、安定なnon-BPS stateを構成する際にも重要な役割を果たすと期待される。

9.1　Type IにおけるD-braneの分類

D-braneのK-theoryによる分類を説明する前に、そのprototypeとも言えるType Iにおけるhomotopy groupによるD-braneの分類[20]について述べる。

まず、Type IのRR-fieldは2階反対称場B_{RR}のみ存在するのでBPSなD-braneとしてはD1-braneとD5-braneが存在する。またtadpole cancellationによってBPSなD9-braneも３２枚存在することが分かる。しかしながら、non-BPS D-braneも考えるならば7章でみた通り、non-BPS D0-braneも存在し、同様の構成法でnon-BPS D8-braneも作れるだろう。これらを一度にすべて扱う方法はないのだろうか。

そこで、[13]で議論されているようにType IのD5-braneがD9-braneによるSO(32)ゲージ理論のsmall instantonとみなせ、D1-braneはD5-brane上のSP(n)ゲージ理論のsmall instantonとみなせることを思い出す。また後者はD9-braneによるSO(32)ゲージ理論において$\int F^4 \neq 0$という(高次元)small instantonともみなせる。このことは、D9-braneのWZ-term$\int B_{RR} \wedge F^4$から理解できる。

これらの事実をSO(32)gauge bundleに着目して、homotopy groupの立場で説明するなら

$$D5-brane : \pi_3(O(32)) = \mathbf{Z} \ \leftrightarrow \ \int F^2 \neq 0$$
$$D1-brane : \pi_7(O(32)) = \mathbf{Z} \ \leftrightarrow \ \int F^4 \neq 0$$

となる。すなわち、それぞれのsmall instantonで定義されるゲージ場をconnectionとするprincipal SO(32)-bundleの無限遠の振る舞いをhomotopy groupで分類したことになる。これを一般の、Type IのDp-braneに拡張すると$\pi_{8-p}(O(32))$で分類されると予想される。これらのhomotopy groupは下表にまとめてある。Bottの周期性より$U(n), O(n), Sp(n)$にはそれぞれ$2, 8, 8$の周期性があることに注意。

さてこのように考えると、$\mathbf{Z}_2$電荷をもつD-braneとしてTypeI SO(32)理論には$D(-1), D0, D7, D8$が存在すると思われる。これらはBPS D-braneとして構成できないことはすでに４章のboundary stateの議論でみたとおりでnon-BPS stateと思われる。同様の議論を$U(n)$で行うとTypeIIBの

表 9.1: $U(n), O(n), Sp(n)$ の homotopy group

π_k (stability)	U(n) $n > \frac{k}{2}$	O(n) $n > k+1$	SP(n) $n > \frac{1}{4}(k-2)$	p-brane (p=8-k)
π_0	0	$\mathbf{Z_2}$	0	0,8-brane
π_1	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z_2}$	0	-1,7-brane
π_2	0	0	0	6-brane
π_3	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}$	5-brane
π_4	0	0	$\mathbf{Z_2}$	4-brane
π_5	$\mathbf{Z}$	0	$\mathbf{Z_2}$	3-brane
π_6	0	0	0	2-brane
π_7	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}$	1,9-brane

BPS D-brane の分類が得られるが、詳しいことは後の節に譲る。ここで SO(32) ではなく O(32) の homotopy group を用いた理由についてはすぐ後に述べる。

そこで以下では $D(-1), D0, D7, D8$ のそれぞれの存在意味について説明する。

(i)D0-brane

これは、7 章で議論した spinor charge を持つ安定な non-BPS state と同定するのが自然である。そのためには D0-brane の spinor charge を確かめる必要がある。

まず $\pi_8(SO(32)) = \mathbf{Z_2}$ の generator に相当する (高次元)instanton background を SO(n) にとる。つまりゲージ群は $SO(32) \to SO(32-n)$ と破れる。このときにゲージ-ノ $\eta_{a,A}$ の zero mode を考える。$a = 1 \sim n,\ A = n+1 \sim 32$ にとると Index 定理より各 A について一つの zero mode が存在する。そこで、small instanton limit を考えると n=0 とみなすことができる。その時の fermionic zero mode は $\{\eta_A, \eta_B\} = \delta_{A,B}$ と量子化される。従ってこの small instanton すなわち D0-brane は SO(32)spinor charge を帯びている。また spinor charge は $\mathbf{Z_2}$ であり consistent である。

(ii)D(-1)-brane

この場合は、１０次元理論における SO(32) ゲージの small instanton と思われる。(i) と同様に fermionic zero mode は量子化されるが、経路積分の立場で書くと $\int \prod_{A=1}^{32} [D\eta_A]$ と書ける。さて、$w \in O(32), w \notin SO(32)$ という'parity 変換' w に注目するとこの経路積分の測度を (-1) 倍にするので、D(-1)-brane が存在すると破れる対称性である。つまり D(-1)-brane の存在によってゲージ群は O(32) から SO(32) に破れるのである。またこの事実はもともとのゲージ群を O(32) ととるべきことを示唆していて、前の SO(32) ではなく O(32) の homotopy group を用いた議論を裏付けている。

この D(-1)-brane の影響を Het-TypeI duality の立場で考えてみる。free fermion による Heterotic string の構成では、３２個の left-moving fermion にも GSO projection を要求するがその影響で

spinor の chirality が片方に制限されて' parity 変換' w は対称性でなくなりゲージ群は O(32) から SO(32) に破れる。このことを TypeI 側で見ると D(-1)-brane による効果と言えるのである。

さて、この D(-1)-brane の CFT 的構成法について考える。この場合も non-BPS D-brane として構成できる。つまり boundary state は NS-sector のみからなる D(-1)-brane の boundary state そのものである [56]。但し Ω-projection があるので tachyon が存在しない。もちろん 2 つの D(-1)-brane がある時には tachyon が存在し真空に崩壊する。それは $\mathbf{Z_2}$charge を持つことと consistent である。また TypeIIB における D(-1)-brane と antiD(-1)-brane の系を始めに考え、それを Ω-projection するという操作でも得られる [20]。

(iii)D7-brane

この non-BPS object は１０次元理論における SO(32) ゲージ理論の voltex line と見なすことができる。CFT における構成法は D(-1)-brane と全く同じであるが、背後に D9-brane があるので D7-D9 string に tachyon が生じ不安定と思われる [56]。しかし電荷を帯びているので真空に崩壊するとは思えないという問題が生じる。

(iV)D8-brane

この non-BPS object は１０次元理論における SO(32) ゲージ理論の domain wall と見なせる。また CFT における構成法は D0-brane と全く同じであるが、D7-brane と同様に D8-D9 string に tachyon が生じ不安定と思われ [56] 問題が生じる。

9.2 K-theory の簡単な説明

ここでは、以後必要となる K-theory の数学的知識 [80] について物理的解釈を交えながら簡単にまとめる。物理の研究者のために書かれた K-theory の説明については [82][90] を参照。

9.2.1 K-theory の定義と物理的解釈

簡単に言うと K-theory とは 2 つの vector bundle E, F を考えた時の両者の差 '$E - F$' のようなものを扱う数学の理論体系である。これは物理的には brane-antibrane system の gauge bundle を考えることに相当する。何故なら 5 章で述べた brane-antibrane system の low energy field

$$\begin{bmatrix} A^{(1)} & T \\ T^{\dagger} & A^{(2)} \end{bmatrix} \tag{9.1}$$

を思い出し、E, F をゲージ場 $A^{(1)}, A^{(2)}$ に付随する (complex)vector bundle と考える。このとき tachyon 場は、

$$T : E \otimes F^{*} \ , \ T^{\dagger} : E^{*} \otimes F \tag{9.2}$$

のように vector bundle の直積で定義される bundle の section とみなせる。このように考えると brane-antibrane system における tachyon condense の topological な分類は 2 つの vector bundle E, F を考えた時の両者の差で決まると思われる [20]。ここで差 '$E - F$' といったのは、E, F の両者に同じ bundle H を直和してずらしても、同種の brane と antibrane を何枚か加えることを意味するのでそれらは自明に対消滅してしまい、物理的には等価な状態と考えられるからである。このように K-theory は brane-antibrane system において重要な役割を担う。

それと同時に、後に説明する Chern 同型により cohomology を torsion element まで入れて拡張した概念ともみなせて、'D-brane の電荷' の分類理論という概念と K-theory は同値である [84] ことが分かる。

この両者の一致は brane-antibrane の対消滅によってそれより低次元のすべての D-brane が構成できるという (flat な時空の場合は既に 7 章、 8 章で見た) 主張を一般的に裏付けている。

さてそれでは K-theory の定義について説明してゆく。

まず vector bundle に足し算と掛け算として直和 $\oplus$、直積 $\otimes$ が定義でき、また vector bundle の同値関係 $E = F$ も定義されることを思い出す。しかしながらこのままでは vector bundle に直和を加法とする群構造を定義することはできない。このことは次の例から分かる。$T(S^2), N(S^2)$ をそれぞれ 2 次元球面上の tangent,normal bundle とする。また I^k を k 次元の自明な real vector bundle とする。このとき次の同値関係が分かる。

$$\begin{aligned} T(S^2) \oplus N(S^2) &= T(S^2) \oplus I^1 = I^3 \\ I^2 \oplus N(S^2) &= I^2 \oplus I^1 = I^3 \end{aligned} \tag{9.3}$$

従って引き算 '$-N(S^2)$' を定義することができないので群とはならない。

そこでこの考え方を修正して以下のように、多様体 X における K-group と呼ばれる群を定義する。この時考えている vector bundle の係数が complex,real,symplectic に応じてこの K-group は $K(X), KO(X), KSP(X)$ と記されるが、以下の定義では特に complex vector bundle で考える。他の場合の定義も全く同様である。

そのために K-theory における同値関係 $(E, F) \sim (E', F')$ を次のように定義する。ある vector bundle H が存在して

$$E' = E \oplus H \ , \ F' = F \oplus H \tag{9.4}$$

が成立つ時、$(E, F) \sim (E', F')$ とする。

さてこの同値関係を用いて K-group は、

$$K(X) \equiv \{(E, F) : \text{X 上での complex vector bundle の対 }\} / \{(E, F) \sim (E', F')\} \tag{9.5}$$

と定義される。ここで E と F の rank は一般に異なることに注意。

また $K(X), KO(X)$ についてはさらに次のように積構造も定義され可換環となる。

$$(E, F) \otimes (E', F') = (E \otimes E' \oplus F \otimes F', F \otimes E' \oplus E \otimes F') \tag{9.6}$$

さてそれでは次に reduced K-theory の定義について説明する。
多様体 X が一点 (もしくは一点に可縮) の時は、

$$K(pt) = \mathbf{Z} \tag{9.7}$$

となる。この値は trivial vector bundle E, F の rank の差と同定され、自明な自由度とも言える。一般の多様体 X でもこのように rank の差に相当する部分を分離できて

$$K(X) = \mathbf{Z} \oplus \tilde{K}(X) \tag{9.8}$$

と書ける。この $\tilde{K}(X)$ を reduced K-group と呼ぶ。同様に $\tilde{K}O(X), \tilde{K}SP(X)$ も定義できる。

この reduced K-group は以下のように explicit に定義することができる。まず、安定同値 (stable equivalence) $\sim\sim$ という概念を次のよう定義する。

$$E \sim\sim F \ \leftrightarrow \ E \oplus I^k = F \oplus I^l \tag{9.9}$$

ここで k, l はある負でない整数である。これを用いると $\tilde{K}(X)$ は vector bundle の集合を安定同値 $\sim\sim$ で割ったものとしても定義することができる。既に例で見たように、一般にこの安定同値 $E \sim\sim F$ は vector bundle の同値 $E = F$ とは異なるが、rank$E$=rank$F = k$ で k が十分に大きいと等価になることが知られている。このとき stability 条件を満たすという。例えば、complex vector bundle では stability 条件は、$k > dim(X)$ となる。物理的には十分に brane の枚数を大きくとれば stability 条件を満たすことになる。

さて再び brane-antibrane における解釈を考えてみる。ここで問題になった rank の差の自由度はその上のゲージ場が自明な brane もしくは anti-brane を何枚か加えることを意味する。この操作は系全体が brane-antibrane の対消滅を起こしてエネルギーを下げる現象とは切り離されており物理的には関心のない自由度と思われる。つまり brane-antibrane system の topological charge は $\tilde{K}(X)$ で分類できる [20] と考えられる[1] 。但し多様体 X は brane-antibrane の world volume を表し、一般には non compact である。従って non compact な場合には対消滅で得たい D-brane に応じて適当な compact 化したもの $\tilde{X}$ を X の代わりに用いることになる。

同様に $\tilde{K}O(X), \tilde{K}SP(X)$ は brane-antibrane のゲージ場が SO,SP 群になっている場合の topological charge と考えられ、具体的には TypeI SO(32) 理論での $D9 - \bar{D}9, D1 - \bar{D}1$ system は $\tilde{K}O(X)$ で、$D5 - \bar{D}5$ system は $\tilde{K}SP(X)$ でそれぞれ分類される [20] と思われる。

最後に、$X = S^k$(k 次元球面) 場合についての $\tilde{K}(X), \tilde{K}O(X), \tilde{K}SP(X)$ の具体的な値と物理的意味について述べる。これらは、k 次元球面上の vector bundle を分類するので、北半球、南半球で定義されたゲージ場を S^{k-1} において張り合わせる方法 (変換関数) が問題となる。従って次のように求めることができる。但し N は stability 条件を満たすように大きくとる。

$$\begin{aligned} \tilde{K}(S^k) = \pi_{k-1}(U(N)) &= \mathbf{Z} \ (if \ k \in 2\mathbf{Z}) \\ &= 0 \ (if \ k \in 2\mathbf{Z}+1) \end{aligned}$$

[1] このことは、初めから compact support をもつ bundle に制限した K-theory を考えることと同じである。この場合は $\tilde{K}(X)$ と $K(X)$ は等しくなる。

$$\begin{aligned} \tilde{K}O(S^k) = \pi_{k-1}(O(N)) \quad &\rightarrow \quad \text{表 9.1 参照} \\ \tilde{K}SP(S^k) = \pi_{k-1}(SP(N)) \quad &\rightarrow \quad \text{表 9.1 参照} \end{aligned} \tag{9.10}$$

さて、具体的に flat な時空での TypeII 理論の $Dp - \bar{D}p$ system から $D(p-d) - brane$ を tachyon condense で作ることを考えると今までの議論から、その分類に対応する K-theory は $K(S^d)$ と考えられる。従って、d=even のみ電荷が存在する。これは TypeII 理論に存在する Dp-brane の p が 2 飛びであることに対応する。一方 TypeI 理論では D9-brane から Dp-brane のを作る場合は $KO(S^{9-p}) = \pi_{8-p}(O(N))$ となり、前節で行った SO(32) の homotopy group を用いた議論と等価になる。さらに D5-brane から Dp-brane のを作る場合は $KSP(S^{5-p}) = \pi_{4-p}(Sp(N)) = \pi_{8-p}(O(N))$ となり同じ結果となる。

9.2.2 Chern 同型

ここでは K-theory のもう一つの側面、すなわち even cohomology の拡張としての意味について説明する。

まず K-theory の Chern character を定義したい。vector bundle E の Chern character はそのゲージ場の field strength F を用いて、$ch(E) = Tr\ exp(\frac{i}{2\pi}F)$ と定義され、次の性質を持つことを思い出す。

$$ch(E \oplus F) = ch(E) + ch(F)\ ,\ ch(E \otimes F) = ch(E)ch(F)\ ,\ ch_0(E) = rankE \tag{9.11}$$

そこで、K-theory の Chern character を $ch(E) - ch(F)$ として定義する。明らかにこの値は K-theory の同値関係と矛盾しない。

さてこの $ch(E) - ch(F)$ は偶数次の cohomology であることを考慮すると

$$ch:\ K(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}\ \rightarrow \oplus_{i \geq 0} H^{2i}(X, \mathbf{Q}) \tag{9.12}$$

という写像が得られる。このように $\mathbf{Q}$ 係数にしておくとこの写像が同型になることが知られている。これを Chern 同型と呼ぶ。$\mathbf{Q}$ 係数であることは torsion を除いていることを意味していて、Chern 同型は $K(X)$ が torsion を除いて even cohomology に等価であることを示している。

同様に $\tilde{K}(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ は $\oplus_{i>0} H^{2i}(X, \mathbf{Q})$ に同型であることも分かる。このとき 0 次 cohomology は $rankE - rankF$ に相当するので抜け落ちていることに注意。

torsion のない多様体の重要な例を挙げると $\mathbf{P}^n$ やそれらを blow up したものなどがある。もっと一般に toric 多様体を blow up したものは torsion がないことが知られている [86]。例えば del Pezzo 面 $\mathcal{B}$ を考え、これらを部分多様体として含む Calabi-Yau 多様体にコンパクト化したときに、何枚かの D4-brane,antiD4-brane をその del Pezzo 面に wrapp して対消滅させると、$b_2(\mathcal{B})$ 種類の D2-brane と $b_4(\mathcal{B}) = 1$ 種類の D0-brane ができる。この D2-brane は $b_2(\mathcal{B})$ 種類の 2-cycle に wrapp しているものと同定できる。

逆に torsion のある多様体にコンパクト化するときには、D-brane の電荷はもはやどの even-cycle に wrapp しているか調べるだけでは不十分なことを意味する。例えば TypeI 理論の non-BPS D0-

brane などは complex vector bundle によるものではないが $\mathbf{Z_2}$ 電荷をもつのでそのような場合に近い。このような場合は、D-brane の電荷は本質的に K-theory で分類される。

9.2.3 Higher K-theory と Relative K-theory

ここでは、既に定義した K-theory の拡張である Higher K-theory と Relative K-theory について説明する。Higher K-theory は Type IIA の D-brane を Non-BPS D9-brane の tachyon condense によって構成するときに用いる。また Relative K-theory は D-brane が多様体に巻きついている場合の議論に必要である。詳細は後節参照。

まず、いくつか記号の定義をする。以下 A, B, X, Y は多様体を意味する。

$$\begin{aligned} X/Y &\equiv X \text{ において、} X \supset Y \text{ の } Y \text{ を一点につぶしたもの} \\ A \vee B &\equiv (A \times \{pt\}) \cup (\{pt\} \times B) \\ A \wedge B &\equiv (A \times B)/(A \vee B) \\ SA &\equiv A \wedge S^1 \quad (\text{これを suspension という}) \\ S^n A &\equiv A \text{ の n 回 suspension したもの} \end{aligned} \tag{9.13}$$

簡単な例を挙げると、一点 $\{pt\}$ の suspension をとると円周 S^1 になる。さらに suspension をとってゆくと二次元球面、三次元球面となってゆく。つまり

$$S^n\{pt\} = S^n$$

である。

まず Higher K-theory を定義する。次の定義をみればわかるように Higher K-theory とは suspension をとった多様体上での K-theory である。また簡単のため complex vector bundle の場合で記述する。他も同様である。

$$K^{-n}(X) \equiv K(S^n X) \quad (n \geq 0) \tag{9.14}$$

一方 Relative K-theory は多様体の一部をつぶした K-theory を意味するが Higher K-theory と両者を混合して次のような定義を得る。

$$K(X, Y) \equiv \tilde{K}(X/Y) \tag{9.15}$$

$$K^{-n}(X, Y) \equiv \tilde{K}(S^n(X/Y)) \quad (n \geq 0) \tag{9.16}$$

さてこれらの K-theory には積の構造が次のように入る。

$$K^{-n}(X_1, Y_1) \otimes K^{-m}(X_2, Y_2) \to K^{-n-m}(X_1 \times X_2, (X_2 \times Y_2) \cup (Y_1 \times X_1)) \tag{9.17}$$

これと $X \times X \to X$ の写像を用いて、

$$\begin{aligned} \tilde{K}^{-n}(X) \otimes \tilde{K}^{-m}(X) &\to \tilde{K}^{-n-m}(X) \\ \tilde{K}^{-n}(X) \otimes K^{-m}(X, A) &\to K^{-n-m}(X, A) \end{aligned} \tag{9.18}$$

のようにカップ積と呼ばれる積が定義される。
以上の定義を用いると Bott の周期性は次のように書ける。

$$\begin{aligned} K^{-n}(X,A) &= K^{-n-2}(X,A) \\ KO^{-n}(X,A) &= KO^{-n-8}(X,A) \\ KSP^{-n}(X,A) &= KO^{-n-4}(X,A) \end{aligned} \tag{9.19}$$

この Bott の周期性は次のように示される。すなわち、それぞれ次のような K-group の generator に対応する vector bundle

$$\begin{aligned} \sigma^2 \in \tilde{K}^{-2}(pt) = \tilde{K}(S^2) \ &\leftrightarrow \ \int_{S^2} F \neq 0 \\ \sigma^8 \in \tilde{KO}^{-8}(pt) = \tilde{K}(S^8) \ &\leftrightarrow \ \int_{S^8} F^4 \neq 0 \\ \sigma^4 \in \tilde{KSP}^{-4}(pt) = \tilde{K}(S^4) \ &\leftrightarrow \ \int_{S^4} F^2 \neq 0 \end{aligned} \tag{9.20}$$

を考えて、カップ積 (9.18) として (9.19) 式の左辺に作用させる。その作用による写像が同型なので (9.19) 式の左辺と右辺が等しいことが分かるのである。

さて、$K(X)$ は torsion を除いて even cohomology に同値 (chern 同値) であったが、それでは $K^{-1}(X)$ についてはどうであろうか。Bott の周期性より complex vector bundle についてはこの 2 つの K-group のみ独立である。定義より $K^{-1}(X)$ は X を一回 suspension したものの K-group なので X の odd cohomology は、suspension によって S^1X の even cohomology に相当する。従って torsion を除いて

$$K^{-1}(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} \to \oplus_{i \geq 0} H^{2i+1}(X, \mathbf{Q}) \tag{9.21}$$

という一般化された chern 同値が成立つ。
最後に $K^{-1}(X)$ のもう一つの定義について述べる。詳しくは [90] などを参照。この定義を用いると後の節で説明するように non-BPS D9-brane の tachyon condense との関係が明確になる。
まず多様体 X 上の vector bundle:E を考え、その自己同型写像を $\alpha : E \to E$ とする。その対 (E, α) を考えたい。(E, α) が elementary pair とは、α が連続変形で自明な写像 1 に等価な場合をいう。
この対が同値 $(E_1, \alpha_1) \cong (E_2, \alpha_2)$ とは、

$$E_1 \oplus F_1 = E_2 \oplus F_2 \ , \ \alpha_1 \oplus \beta_1 = \alpha_2 \oplus \beta_2 \tag{9.22}$$

となる、elementary pair (F_1, α_1) , (F_2, α_2) が存在する場合を言う。

9.2.4 Equivariant K-theory など

ここでは、多様体 X とそれ上の vector bundle に orbifold action G が作用する場合を考える。物理的には orbifold における D-brane の分類 [63] を考えていることになる。

そのような場合の K-theory は equivariant K-theory と呼ばれ、次のように K-group $K_G(X)$ が定義される。

まず多様体 $X \ni x$ とそれ上の vector bundle $V \ni \xi$ に orbifold action $G \ni g$ の作用が $g : x \to gx$, $\xi|_x \to \rho(g)\xi|_{gx}$ のように定義されていて、G で不変な vector bundle $E, F, H, \cdots$ のみ考えるとする。ここで $\rho(g)$ は $G \ni g$ の線形表現を意味し、有限個の既約表現:$\{\rho_1 \sim \rho_r\}$ の直和でかける。。

このとき (E, F) の同値関係を、$(E, F) \sim (E \oplus H, F \oplus H)$ として定義する。この同値関係で G 不変な vector bundle の対:(E, F) を割ったものを equivariant K-theory と定義する。もちろんこのときの H は両者とも同じ G の表現に属していて、物理的には同じ表現に属す fractional brane と antibrane を対消滅させることを意味する。

この定義から明らかなように、G が X に自明に作用する場合は

$$K_G(X) = K(X) \otimes R(G) \tag{9.23}$$

となる。但し $R(G)$ は G の表現環である。

さて以上のことを例でみてみる。orbifold $\mathbf{C}^2/\mathbf{\Gamma}$ という ALE 空間の singular limit に相当する場合を考える。4 章 6 節で見たように、$\mathbf{\Gamma}$ は A,D,E 型に分類される。そのような離散群の既約表現の種類を r とすれば、$R(G) = r\mathbf{Z}$ である。さてそれでは TypeIIB の fractional D1-brane についての equivariant K-theory を考えてみる。fractional D1-brane が D9-brane と antiD9-brane の対消滅から生成されると考えると $K_G(S^8)$ で電荷が分類されるはずである。Bott の周期性は equivariant K-theory でも成立つので、

$$K_G(S^8) = K_G(pt) = r\mathbf{Z} \tag{9.24}$$

を得る。この結果は、それぞれの既約表現に属す fractional brane の電荷を意味していて、4 章 6 節で構成した boundary state の結果と一致する。さらにこの orbifold を blow up すると 2-cycle が r 個出現し[2] 、その fractional brane は 2-cycle に巻きつく D3-brane とも解釈できるようになる。このときの K-group による分類は、chern 同型により even cohomology とみなせ orbifold limit と同じ結果となる。

さて次に、orientifold のように別の projection も混合した場合の K-theory での扱いについて述べる。簡単のため $G \in \tau$ は involution すなわち $\mathbf{Z_2}$ 群であるとする。

このときに equivariant K-theory を少し変更した次の 4 つの K-group を定義することができる。右に書いてあるのが τ の (E, F) への作用であり、前と同様この作用で不変な vector bundle(の対)のみ考えた場合の K-group である。

$$\begin{aligned} KR(X) &\leftrightarrow \tau : (E, F)|_x \to (\rho(\tau)E^*, \rho(\tau)F^*)|_{\tau(x)} \\ KH(X) &\leftrightarrow \tau : (E, F)|_x \to (\rho(\tau)E^{sp}, \rho(\tau)F^{sp})|_{\tau(x)} \end{aligned}$$

[2] このなかで独立な 2-cycle は $r-1$ 個である。このことは丁度 D-brane の電荷を $K(X)$ ではなく $\tilde{K}(X)$ で分類するのと対応している。

$$
\begin{aligned}
K_{\pm}(X) &\leftrightarrow \tau : (E,F)|_x \to (\rho(\tau)F, \rho(\tau)E)|_{\tau(x)} \\
KR_{\pm}(X) &\leftrightarrow \tau : (E,F)|_x \to (\rho(\tau)F^*, \rho(\tau)E^*)|_{\tau(x)}
\end{aligned}
\tag{9.25}
$$

但しこの中で、数学において定義されているのは $KR(X), K_{\pm}$ のみである。他については文献 [87][20],[86],[90] で仮想的に用いられているものである。また E^{sp} は symplectic conjugation を意味する。

それぞれの物理的解釈は次の通りである。

まず $KR(X)$ はその involution は Chan Paton factor(もともと Hermitian) に対して複素共役 = 転置として働いていて、SO 型すなわち $\Omega^2 = 1$ の orientifold O^-(の一部) を表す。一方 $KH(X)$[3] は symplectic conjugation の involution により、Sp 型すなわち $\Omega^2 = -1$ の orientifold O^+ の D-brane を分類する。また $K_{\pm}(X)$ の involution は brane と anti-brane を入れ換えていて、これは丁度 8 章で定義した $(-1)^{F_L^S}$ の作用を意味し、$(-1)^{F_L^S}$ を伴う $\mathbf{Z_2}$ orbifold を意味する。

最後に $KR_{\pm}(X)$ は $\Omega \cdot (-1)^{F_L^S}$ と $\mathbf{Z_2}$ を伴う $\mathbf{Z_2}$ orbifold となるが、これは 7 章 2 節で定義した orientifold O^- の一部に相当する。

これらのように $\mathbf{Z_2}$projection が作用する'K-theory' の具体的計算は、文献 [86],[36],[90] などで行われていて、超弦理論の結果と一致している。なおこの他にも O^- と O^+ の混在した理論に対応する $KSC(X)$ と呼ばれる K-group についても議論されている [88] がここでは割愛する。

以上から分かるように、それぞれの超弦理論に対してそれぞれ異なる'K-theory' が対応し RR 電荷を分類していて、その'K-theory' の大部分が既に数学的に厳密に定義されているものである。このことは、超弦理論は D-brane という非摂動的な soliton を含むという従来の考え方を強く裏付けていると言える。

9.3 tachyon condense と K-theory

K-theory についての説明と物理的解釈の概要については既に前節で述べた。ここでは tachyon condense に重点をおいて高次元の D-brane から低次元の D-brane が生成される現象を調べる。

9.3.1 flat な時空での tachyon condense

まず簡単のため flat な時空で考える。D(p+2)-brane と anti-D(p+2)-brane がそれぞれ一つずつ存在する系の tachyon condense で Dp-brane が voltex line の数だけ生成される [43] ことは既に 7 章で見た通りである。そこで一般に D(p+2k)-brane と anti-D(p+2k)-brane から Dp-brane を生成する場合を考えたい。もし 7 章で見た tachyon condense を k 回繰り返すなら D(p+2k)-brane と anti-D(p+2k)-brane はそれぞれ 2^{k-1} 枚必要である。ここで考えたいのはそれを一度の tachyon condense で行うことである。その時、式 (5.21) で見たように tachyon condense は $x \in \mathbf{R^{2k}}$ とすると $T(x) \in U(2^{k-1}) \quad (x \to \infty)$ となるように起こるのが最小のエネルギーとなる。つまり、

[3] 文献 [87] では KH を KpR と呼んでいる。

$\pi_{2k-1}(U(2^{k-1})) = \mathbf{Z}$ の generator に相当する。具体的には次のように $T(x)$ は与えられる [20]。

$$T(x) \to T_0 \frac{\sum_{i=1}^{2k} \Gamma_i x^i}{|x|} \quad (|x| \to \infty) \tag{9.26}$$

このとき式 (5.21) を確かに満たす. ここで、Γ_i は 2k 次元の Γ 行列 (Weyl 表現になっていることに注意) である。この式は voltex line を高次元化したもので、遠方では真空と区別つかないため $x = 0$ に Dp-brane が生成されていると考えられる。tachyon condense の影響で破れる U(N) ゲージ場 $A^{(1)} - A^{(2)}$ の配位を知りたければ、$DT = 0$ を解いて、

$$A_\mu^{(1)} - A_\mu^{(2)} \to \ i\partial_\mu T(x) T(x)^{-1} \tag{9.27}$$

となる。例えば、$k = 2$ では、$T(x) \to \ (\frac{x_4 + i\vec{\mathbf{x}}\cdot\vec{\sigma}}{|x|})$ となり、よく知られた 4D instanton 解を再現する。このようにして Dp-brane の RR 電荷を確かめることができる。

では 2 次元下げる tachyon condense を k 回くり返す方法と今の方法は何か違いがあるのだろうか。これに答えるには K-theory での表現を考えればよい。今の方法で用いた $(E, F) \leftrightarrow A^{(1)} - A^{(2)}$ は $K(\tilde{S}^{2k}) = \mathbf{Z}$ の generator であり、これについて Bott の周期性とカップ積を思い出すと、

$$\tilde{K}(S^{2k}) = \underbrace{\tilde{K}(S^2) \otimes \tilde{K}(S^2) \cdots \otimes \tilde{K}(S^2)}_{k} \tag{9.28}$$

が成立つので k 回くり返す方法と等価なのは明らかである。

以上のような議論は real or symplectic vector bundle の場合、つまり TypeI SO(32) 理論の D9-brane or D5-brane の場合についても可能である。これらの場合、tachyon 場は real or symplectic の条件をそれぞれ受けるので (9.26) の配位はすべてが許されるわけではない。もともと Weyl 表現を課しているので、それが real(Majorana) or symplectic(pseudo Majorana) の条件と compatible である必要がある。それを満たすのはそれぞれ、$k = 0(mod 8)$, $k = 4(mod 8)$ の時である。これらはそれぞれ

$$\tilde{K}O(S^8) = \mathbf{Z} \ , \ \tilde{K}SP(S^4) = \mathbf{Z} \tag{9.29}$$

の generator で、(9.20) で与えられるように Bott の周期性を生み出す generator となっている。

さて Dp-brane の電荷を包括的に分類するには $D9 - \bar{D}9$ system から Dp-brane を生成する時の tachyon condense に相当する K-group を調べればよい。それを TypeIIB,TypeI においてまとめると次のようになる。

[TypeIIB] $\tilde{K}(S^{9-p})$ よって p=odd のみ存在する。

[TypeI] $\tilde{K}O(S^{9-p})$ この結果は既に 9-1 で homotopy を用いて説明したものと同じ。すなわち $\mathbf{Z}$ 電荷をもつのが p=1,5,9 で $\mathbf{Z_2}$ 電荷をもつのは p=-1,0,7,8 である。

これらのなかで TypeI の $\mathbf{Z_2}$ 電荷をもつ Dp-brane(p=-1,0,7,8) についてはまだ触れていない。そこでこれらの tachyon condense について考える。

まず D0-brane を考える。$D1-\bar{D}1$ から $D0$ を得る方法は 7 章で既に見た。今は $D9-\bar{D}9$ から生成したい。関係するのは SO(9) の spinor 表現であるが、これには 16 次元の Majorana 表現が存在する。それを用いると無限遠で $T(x)\in SO(16)$ となる望ましい配位が

$$\begin{aligned} T(x) &\sim \sum_{i=1}^{9}\Gamma_i x^i \\ &\sim \begin{pmatrix} \vec{\gamma}\cdot\vec{x} & x^9 \\ -x^9 & \vec{\gamma}^T\cdot\vec{x} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{9.30}$$

と (基底変換することによって) とれる。但し、$\vec{\gamma}$ は 8 次元の Γ 行列である。

これは次のように理解できる。まず $x^9\neq 0$ を考えて非対角要素を無視すると 8 つの $D9-\bar{D}9$ system から 1 つの $D1-\bar{D}1$ system を構成していることを意味する。さらに $x^9\sim 0$ の付近に着目すると、tachyon kink を意味していて、7 章で既に見た構成法と同じである。言い換えると Bott の周期性

$$KO(S^9)=KO(S^1)\otimes KO(S^8) \tag{9.31}$$

を意味する。

さて次に D(-1)-brane の生成を見てみる。この時は Spin(10) に Majorana-Weyl 表現が存在しないので注意が必要。そこで 32 次元 Majorana 表現を用いて、

$$\begin{aligned} T(x) &\sim \sum_{i=1}^{10}\Gamma_i x^i \end{aligned} \tag{9.32}$$

とすれば D(-1)-brane を構成できる。このことは TypeIIB に埋め込むと次のように解釈できる。Ω の projection を最後に考えることにすると、SO(10) の 32 次元 Majorana 表現を複素化して 2 種の 16 次元 Weyl 表現に分かれる。そこで tachyon condense させると TypeIIB の $D(-1)+\bar{D}(-1)$ が得られる。さらに Ω の projection で割って TypeI の D(-1)-brane が得られることになる。この構成法は (9-1) で述べたように CFT の立場で TypeI の D(-1)-brane を実現する場合と同じである。

D7-brane,D8-brane についてはそれぞれ Bott の周期性より D(-1)-brane,D0-brane と等価なので略す。

9.3.2 曲がった時空での tachyon condense

次に曲がった時空での tachyon condense による低い次元の D-brane の生成について議論する [20]。

まず 2 次元下がった D-brane を生成する場合 $D(p+2)+\bar{D}(p+2)\to\ Dp$ を考える。$Y\supset Z$ とし、Y に $D(p+2)+\bar{D}(p+2)$ が巻きついていて、その対消滅で Z に巻きついた Dp-brane を得たいとする。このとき、Z の近傍 Z' で

$$\tilde{K}(Z')\ni(E,F)\ ,\ T\in E\otimes F^*\ ,\ T(Z)=0 \tag{9.33}$$

となる tachyon 場がとれるが、これが global に Y へ拡張するとは限らない。Z 以外では tachyon 場は非特異で、E と F は同型となるので、$F \oplus H$ が自明になるような H を加えてやると $E \oplus H$ も Z 以外で自明となり Y に拡張できる。ここで H を加えることは $D(p+2), \bar{D}(p+2)$ の数を増やしてやることを意味する。このようにすれば望みどおり Dp-brane を得ることができる。この Dp-brane の電荷は $K(Y)$ の元となる。

では、一般化して $D(p+2k) + \bar{D}(p+2k) \to\ Dp$ の場合はどうだろうか。flat な場合の (9.26) を曲がった時空に拡張した tachyon 場 $T \in \mathcal{S}^+ \otimes \mathcal{S}^{-*}$ を global に構成できればよい。但し $\mathcal{S}^+, \mathcal{S}^-$ は Y 上のそれぞれ SO(2k) の chirality=+, – の表現に属す (normal 方向の)spin bundle である。Z の近傍:Z' でこのような bundle を構成できれば、$k=1$ と同様に H を加えて Y に拡張できるはず。

さて Z の normal bundle を N とすると、$w_2(N) = 0$ すなわち N が spin bundle ならば $\mathcal{S}^+, \mathcal{S}^-$ は存在する。このときは Dp-brane を得ることができる。ここで $w_2(N) \in H^2(Z, \mathbf{Z_2})$ は Stieffel-Whitney class である。

それでは、少し条件を緩めて N が (向き付けされた)$Spin^C$ bundle のときはどうだろうか。そのような場合は、普通の意味の bundle として $\mathcal{S}^+, \mathcal{S}^-$ は存在しないが $\mathcal{L}^{\frac{1}{2}} \otimes \mathcal{S}^+, \mathcal{L}^{\frac{1}{2}} \otimes \mathcal{S}^-$ が well defined な bundle となるような line bundle $\mathcal{L}$ が存在する。従ってこの修正された bundle を用いて tachyon 場を構成でき、Dp-brane を得ることができる。また時空 X は向き付けされた spin 多様体と考えるのが自然であるが、このときに $w_2(N) = w_2(TZ)$ となり Z が $Spin^C$ 多様体とも表現できる。すなわち、brane-antibrane の対消滅で world volume が任意の $Spin^C$ 多様体で表される D-brane を構成することが常に可能である。

逆に N が $Spin_C$ bundle でない場合はどうなるであろうか。K-theory の観点では D-brane を構成することが困難と思われる[4] 。また付録 E で詳しく述べるように N が $Spin^C$ bundle でない場合は string の world sheet の global anomaly が生じる [22] ことが分かり、以上をまとめると world volume が $Spin^C$ 多様体でない D-brane は構成することは不可能である。

しかしながら、B 場が topological に非自明な場合にはその影響も考慮しなければならない。簡単のため'field strength' $H = dB$ は torsion $[H] \in H^3(X, \mathbf{Z})$ を除いて 0 であるとすると付録 E で説明するように次の条件を満たせば [19] [22]world sheet の global anomaly は相殺し、world volume が Z の D-brane が構成できる。

$$\frac{1}{2\pi}[H]|_Z = W_3(Z) \tag{9.34}$$

但し、$W_3(Z) = \beta w_2(Z)$ で $\beta : H^2(X, \mathbf{Z_2}) \to H^3(X, \mathbf{Z})$ は Bockstein map と呼ばれるものである。すなわち $W_3(Z) \neq 0$ は Z が $Spin^C$ 多様体ではないことを意味していて、それによる anomaly を B 場の anomaly $\frac{1}{2\pi}[H]$ で相殺しているのである。

このように B 場の torsion $[H]$ が非自明な場合には対応する'twisted'K-theory は数学的にも定義されているが [20]、field strength が 0 でない場合については扱いが非常に困難である。

[4] しかしながら文献 [20] では枚数を多くすればそのような D-brane を構成できる可能性が指摘されているがここでは触れないことにする。

9.3.3 TypeIIA の場合

ここでは TypeIIA の D-brane の tachyon condense による生成と K-theory の関係について考えたい [20][81]。TypeIIB,TypeI では D9-brane,antiD9-brane が存在したが、TypeIIA の D9-brane は non-BPS であり antiD9-brane は存在しないという大きな違いがある。そこで non-BPS D-brane における tachyon condense を考えたい。

6 章で述べたように N 枚の non-BPS D-brane 上の (low energy limit での)boson 場は、U(N) ゲージ場 $A^\mu(x)$ とその adjoint 表現に属す tachyon 場 $T(x)$ で構成されることを思い出す。ここで $T(x)$ は Hermite 行列であることに注意。

tachyon potential を最小にするように tachyon condense は起こるはずだが、各点でそれぞれ tachyon 場をゲージ変換によって対角化し、$T(x)$ が Hermite 行列であることを考慮すると $T = T_0\ diag(1,\cdots,-1,\cdots)$ とエネルギーを最小にする tachyon condense を記述できる。もちろん、すべての点で同時に対角化されるわけではない。

さて、7 章で見たように non-BPS $D1$-brane から $D0$-brane を tachyon condense で生成できることを思い出すと、同様に non-BPS $D(p+1)$-brane から Dp-brane を生成できるはずである。このときの $T(x)$ の配位は tachyon kink の形 $T(x) \sim x$ をしていた。

従って、N 枚の non-BPS $D(p+1)$-brane を $T(x) \sim diag(x\cdot[1]_k\ ,\ x\cdot[-1]_{N-k})$ のように tachyon condense すると、k 枚の Dp-brane と $N-k$ 枚の antiDp-brane を得る。

さて、それではこれを一般化し non-BPS $D(p+2k+1)$-brane から Dp-brane を生成する方法を考えたい。まず D(p+2k) の電荷を持たないようにするためには、$T(x) \sim diag(x\cdot[1]_k, x\cdot[-1]_{N-k})$ という local に成立つ配位において $k = N-k$ であればよい。Γ 行列 $\Gamma_i\ (i = 1 \sim 2k+1)$ はそれぞれ別々に対角化するとこの条件を満たす。よって無限遠方で

$$T(x) \sim \frac{1}{|x|}\sum_{i=1}^{2k+1}\Gamma_i x^i \tag{9.35}$$

となる tachyon condense を TypeIIB の時と同様に考えることができる。従って $N = 2^k$ となる。

ではこの tachyon condense に対応する K-group はどうなるだろうか。brane-antibrane system の時と違いもともと vector bundle が一つしかないので $K(X)$ を用いることはできない。そこで $K^{-1}(X)$ の 2 つ目の定義 $(E,\alpha)/\ \cong$ を思い出す。このとき E を U(N) ゲージ場とみなし、$\alpha = -e^{\pi i T(x)}$ と解釈すればうまく当てはまる。したがって non-BPS D-brane の tachyon condense は $K^{-1}(X)$ で分類できることが分かった [20][81]。

実際にこの tachyon condense で non-BPS $D(p+2k+1)$-brane から Dp-brane が得られることを示すには 2 つの方法がある [81]。

まず一つは、$D(p+2k) - \bar{D}(p+2k)$ system を経由して Dp-brane を構成する方法である。式 (9.35) は、SO(2k) の Γ 行列 γ_i を用いて

$$T(x) = \begin{pmatrix} x^9 & \vec{\gamma}\cdot\vec{x} \\ \vec{\gamma}^*\cdot\vec{x} & -x^9 \end{pmatrix} \tag{9.36}$$

と書ける。これを見れば分かるように 2^{k-1} の $D(p+2k) - \bar{D}(p+2k)$ system を対角部分の tachyon condense で生成し、さらに非対角部分は brane-antibrane system の tachyon condense を意味する。

もう一つの方法は、monopole のような配位に結びつける方法である。これを見るには、各点:x で、式 (9.35) の tachyon condense によってゲージ群が $U(2^k)$ から $U(2^{k-1}) \times U(2^{k-1})$ に破れることに着目する。このとき $x = 0$ 近傍での tachyon の配位を topological に分類すると

$$\pi_{2k}(\frac{U(2^k)}{U(2^{k-1}) \times U(2^{k-1})}) = \pi_{2k-1}(U(2^{k-1})) = \mathbf{Z} \tag{9.37}$$

となり、この群の generator は式 (9.35) で与えられる。例えば、$k = 1$ としてみると無限遠での場の値は

$$T(x) \sim \frac{1}{|x|} \sum_{i=1}^{3} \sigma_i x^i \tag{9.38}$$

$$A_i(x) \sim \frac{1}{|x|^2} \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij} x^j \tag{9.39}$$

となり、場の理論のおける't Hooft-Polyakov magnetic monopole($\pi_2(G/H)$) の解に相当することが分かる。これらの例で $0 \leq |x| \leq 1$ に着目すると $\alpha = -e^{\pi i T(x)}$ は S^{2k+1} 上で定義でき、K-group との対応

$$K^{-1}(S^{2k+1}) = \pi_{2k}(\frac{U(2^k)}{U(2^{k-1}) \times U(2^{k-1})}) = \mathbf{Z} \tag{9.40}$$

が成立つことも分かる。

以上を non-BPS D9-brane に適用すればすべての TypeIIA 理論の D-brane を得ることができるはずである。flat な時空の場合は、Dp-brane charge は $K^{-1}(S^{9-p})$ に相当するので確かに $p = 0, 2, 4, 6, 8$ が存在する。

さてそれではもう一つの $K^{-1}(X)$ の定義 $K^{-1}(X) \equiv K(S^1 X)$ の物理的解釈を考えてみる。この定義からすぐ次の式が従う。

$$\tilde{K}(S^1 \times X) = K^{-1}(X) \oplus \tilde{K}(X) \tag{9.41}$$

この分解で、$K^{-1}(X)$ は $\tilde{K}(S^1 \times X)$ のなかで S^1 方向について自明な bundle を取り出したものである。

左辺は M-theory のような 11 次元の理論に TypeIIA を拡張することを意味すると解釈すると、右辺のうち $K^{-1}(X)$ を取り出すのは 11 次元の仮想的 brane のうち S^1 に巻きついたもののみ考えていることを表す [20]。しかし M-theory に M2,M5 以外の brane があることは知られていないのでこの議論はどこまで正しいか不明である。

もう一つの解釈の仕方は TypeIIB を S^1 コンパクト化して T-duality で IIA の D-brane を得ることである。S^1 コンパクト化した TypeII 理論の Dp-brane charge は上式の左辺で表される。このとき S^1 の半径を大きくすると TypeIIB が、小さくすると TypeIIA が実現される。X をコンパクトとしてエネルギーが有限な D-brane のみを考える。前者の場合は D-brane が S^1 に巻き付くとエネルギーが無限になるので $\tilde{K}(X)$ のみ実現され、後者では T-dual をとるので逆に $K^{-1}(X)$ になる。このように考えると、さらに $K^{-2}(X), K^{-3}(X), \cdots$ で別な'TypeII 理論' をつくれそうだが、実際には Bott の周期性 $K^{-n}(X) = K^{-n-2}(X)$ のため TypeIIA か TypeIIB に帰着される。

9.4 K-theory と T-duality

ここでは、TypeIIA と TypeIIB を関係づける T-duality について K-theory の立場で考えたい。

まず部分多様体 Y に巻きついた D-brane の電荷は $K^{-n}(X \times Y)$ で分類される。もしくは、次の公式に着目してみる [88]。

$$K^{-n}(X \times Y) = K^{-n}(X \times Y, Y) \oplus K^{-n}(Y) \tag{9.42}$$

これを D-brane の言葉でいうと、$K^{-n}(Y)$ は X 全体に広がり、Y の部分多様体 $(pt, 2-cycle, \cdots)$ のどれかに巻きついている TypeII 理論の D-brane を意味し、$K^{-n}(X \times Y, Y)$ は X の一部に広がり Y の部分多様体のどれかに巻きついている D-brane を表す。このことから $K^{-n}(X \times Y, Y)$ のみを D-brane 電荷とみなしてもよいが [88]、ここでは両者を合わせたものを考える。

さて $K^{-n}(X \times Y)$ は次のような K-theory における Kunneth の公式を用いて計算できる (但し K-group は基底を持つとする)。

$$K^{\#}(X \times Y) = K^{\#}(X) \otimes K^{\#}(Y) \quad (\# = 0, -1) \tag{9.43}$$

例えば、$Y = \mathbf{T}^m$(m 次元 torus) の場合は左辺は

$$\begin{aligned} K^0(X \times \mathbf{T}^m) &= (K^0(X) \otimes K^0(\mathbf{T}^m)) \oplus (K^{-1}(X) \otimes K^{-1}(\mathbf{T}^m)) \\ K^{-1}(X \times \mathbf{T}^m) &= (K^0(X) \otimes K^{-1}(\mathbf{T}^m)) \oplus (K^{-1}(X) \otimes K^0(\mathbf{T}^m)) \end{aligned} \tag{9.44}$$

となる。また chern 同型より K^0 は even cohomology に、K^{-1} は odd cohomology に等しく、特に $\mathbf{T}^m$ では

$$K(\mathbf{T}^m) = K^{-1}(\mathbf{T}^m) = \mathbf{Z}^{\oplus 2^{m-1}} \tag{9.45}$$

$$\tag{9.46}$$

となる。従って、

$$K(X \times \mathbf{T}^m) = K^{-1}(X \times \mathbf{T}^m) \tag{9.47}$$

となる。よって TypeIIA の D-brane の電荷と TypeIIB での D-brane の電荷は m 次元 torus にコンパクト化すると等価であることが分かり、K-theory による T-duality の証明と言える。

それでは、もう少し高級な例として複素 3 次元 Calabi-Yau 多様体の Mirror 対称性については K-theory でどのように記述されるであろうか。簡単のため torsion はないとする。Calabi-Yau 多様体とその Mirror を $CY, \widehat{CY}$ とすると、cohomology において $H^{p,q}(CY) = H^{p,3-q}(\widehat{CY})$ が成立つことから、

$$\begin{aligned} K(CY) &= K^{-1}(\widehat{CY}) \\ K(X \times CY) &= K^{-1}(X \times \widehat{CY}) \end{aligned} \tag{9.48}$$

が容易に分かる。従って TypeIIA を CY にコンパクト化した 4 次元理論と TypeIIB を $\widehat{CY}$ にコンパクト化した 4 次元理論は同じ D-brane 電荷をもち、Mirror 対称性を意味する。

次にもう一つの T-duality の例として、m 次元 torus にコンパクト化した TypeI 理論とその m 回 T-dual をとった TypeI' 理論について考えたい [88][87]。前者には SO-projection Ω があり、後者には SO-projection の $O^-(9-m)$-plane が存在する。(9-2) で見たように TypeIA 理論の D-brane は $KR^{-m}(X)$ もしくは $KR^{-m}_{\pm}(X)$ で分類される。ここでは、$KR^{-m}(X)$ の場合すなわち $m = 8, 5, 4, 1, 0$ について考える [88]。この場合の T-duality を K-theory の言葉にすると次の等式になる。

$$KR^{-m}(X \times \mathbf{T^m}) = KO(X \times \mathbf{T^m}) \tag{9.49}$$

このことは、KR^{-m} の involution は $\mathbf{T^m}$ に作用し、X には作用しないので、$KR^{-m}(X)$ と $KO^{-m}(X)$ は等しくなることなどから示される。一方、Sp-projection の場合は、

$$KH^{-m}(X \times \mathbf{T^m}) = KSP(X \times \mathbf{T^m}) \tag{9.50}$$

となる。

例として SO-projection の $m = 1$ の場合を考えてみよう。この場合 T-dual をとった理論は TypeIA と呼ばれる。特に、non compact な 9 次元時空において粒子的電荷 (0-brane) をもつものは、

$$\begin{aligned} KR^{-1}(S^8 \times S^1, S^1) &= KO(S^8 \times S^1, S^1) \\ &= \tilde{K}O(S^8) \oplus \tilde{K}O(S^9) \\ &= \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z_2} \end{aligned} \tag{9.51}$$

となり、TypeI で解釈するとそれぞれ S^1 に巻きついた D1-brane と non-BPS D0-brane の電荷である。但しここで次の公式

$$\begin{aligned} \tilde{KO}(X \times Y) &= \tilde{KO}(X \wedge Y) \oplus \tilde{K}(X) \oplus \tilde{K}(Y) \\ KO(X \times Y) &= KO(X \times Y, Y) \oplus KO(Y) \end{aligned} \tag{9.52}$$

で特に $Y = S^1$ とおいたものを用いた。

また TypeIA 側で見るには、

$$\tilde{K}O(S^8) = \tilde{K}R^{-1}(S^9) = \mathbf{Z}\ ,\ \tilde{K}O(S^9) = \tilde{K}R^{-1}(S^8) = \mathbf{Z_2} \tag{9.53}$$

の対応関係 (=T-duality) に着目して、それぞれ O8-plane に付着した fractional D0-brane と二枚の O8-plane の間に伸びる non-BPS D1-brane である。ここで O8-plane は 2 枚あるのに fractional D0-brane の電荷は一種類しかないのは、片方の O8-plane に付着した D0-brane に non-BPS D1-brane を近づけるともう片方の O8-plane に付着する D0-brane に崩壊できるからである [88]。この現象は (7-1) で既にみているように、non-BPS D1-brane は $\mathbf{Z_2}$wilson line の電荷と同一視できる TypeI の non-BPS D0-brane を T-dual とったものなので当然と言える。

最後に [87] に従って、$\mathbf{T^4}$ の T-duality で特に Nahm 変換[5] と呼ばれるものについて具体的な K-group の写像を考えてみることにする。

まず $\mathbf{T^4}$ には、SU(n) ゲージ場と可換になるような U(1)wilson line が入ることに注意する。そのとき $\mathbf{T^4}$ 上の flat connection の moduli space は、dual torus $\widehat{\mathbf{T^4}}$ となる。つまり wilson line a^i の 4 つの自由度をゲージ変換 $g(x) = e^{i\frac{\hat{n}}{R}x}$ で同一視[6] したものである。$\mathbf{T^4}$ と $\widehat{\mathbf{T^4}}$ のそれぞれの座標を x^i, a^i と書くことにする。

このとき Nahm 変換とは $\mathbf{T^4}$ と $\widehat{\mathbf{T^4}}$ を入れ替える T-duality すなわち D(p+4)-Dp system を 4 回 T-dual とって Dp-D(p+4) にする変換である。この変換で $\mathbf{T^4}$ 上のゲージ bundle E が、$\widehat{\mathbf{T^4}}$ 上のゲージ bundle $\hat{E}$ に変換されるとする。この具体的写像は次のように与えられる。

$$Index(\not{D}, E \otimes \mathcal{P}) = \int_{\mathbf{T^4}} ch(E \otimes \mathcal{P}) \hat{A}(\mathbf{T^4}) \tag{9.54}$$

ここで $\mathcal{P}$ とは Poincaré bundle と呼ばれるもので、$\mathbf{T^4} \otimes \mathbf{R^4} \times \mathbf{C^2}$ を $(x, a, c) \sim (x, a + \frac{\hat{n}}{R}, e^{i\frac{\hat{n}}{R}x}c)$ で同一視したものである。つまり、$E \otimes \mathcal{P}$ は、ゲージ bundle E にいろいろな wilson line を入れたものである。$\mathcal{P}$ に対する field strength は、

$$c_1(\mathcal{P}) = \frac{1}{2\pi} F(\mathcal{P}) = \sum_{\mu=1}^{4} \frac{da^\mu \wedge dx_\mu}{2\pi} \tag{9.55}$$

となる。

またこの $Index$ は、Family index というもので、parameter(=wilson line) の付いた Dirac 演算子の left-moving,right-moving の'zeromode の差' を parameter 空間を底空間とするゲージ bundle とみなしている。この場合は、$\hat{A}(\mathbf{T^4}) = 1$ なので、この写像によって

$$\begin{aligned} H^0(\mathbf{T^4}) &\to H^4(\widehat{\mathbf{T^4}}) \\ H^2(\mathbf{T^4}) &\to H^2(\widehat{\mathbf{T^4}}) \\ H^4(\mathbf{T^4}) &\to H^0(\widehat{\mathbf{T^4}}) \end{aligned} \tag{9.56}$$

と'Hodge dual' をとるような操作になり、instanton 数とゲージ群の rank を入れ替える。Chern 同型を思い出すと、これは次のような具体的な K-group の写像となっている。もちろん同様に逆写像も定義できる。

$$K(\mathbf{T^4}) \cong K(\widehat{\mathbf{T^4}}) \tag{9.57}$$

この場合は U(N) 理論であったが、SO(N),Sp(N) についても同様に議論できる [87]。具体的には、TypeI 理論を $\mathbf{T^4}$ にコンパクト化して、D9-D5,D5-D1 system を考えればよい。T-dual で orientifold 5-plane が生じ、SO と Sp のゲージ群が入れ替わるので K-group の写像は次のようになる。

$$\begin{aligned} KO(\mathbf{T^4}) &\cong KH(\widehat{\mathbf{T^4}}) \\ KSp(\mathbf{T^4}) &\cong KR(\widehat{\mathbf{T^4}}) \end{aligned} \tag{9.58}$$

[5] 例えば rank=0 のような場合は、もはやゲージ理論が定義されないのでこのような vector bundle での記述は許されない。その場合は sheaf(層) の集合で T-dual を行うすなわち Fourier-Mukai 変換と呼ばれるより広い概念を用いることになる [91][87]。

[6] つまり $a_i \sim a_i + \frac{\hat{n}_i}{R_i}$ と書ける。ここで $\hat{n}_i \in \mathbf{Z}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ であり、R_i は torus の各半径である。

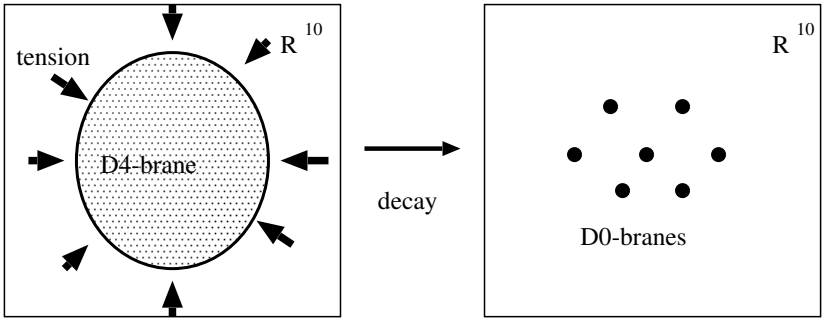

図 9.1: flat な時空における閉じた D-brane の崩壊

この左辺と右辺が実際に等しいことは、Bott の周期性 $KH^{-n} = KR^{-n\pm 4}$ と (9.49),(9.50) から従う。

9.5 D-brane の WZ-term と index 定理

D-brane と K-theory の関係についての少し別な視点として D-brane の WZ-term と index 定理の関係について取り上げる。もともと文献 [20] の前に、D-brane の電荷と K-theory の関係は WZ-term

$$S_{WZ} = \sum_p \int_X C_{(p+1)} \wedge ch(E) \sqrt{\frac{\hat{A}(TX)}{\hat{A}(NX)}} \tag{9.59}$$

を通して議論されている [84]。ここで、TX は多様体 X の tangent bundle で NX は normal bundle である。また $C_{(p+1)}$ は RR-field であり E は D-brane 上のゲージ bundle である。

まず始めに、flat な時空にある world volume が閉多様体 X で表される D-brane を考える [22]。このような D-brane は SUSY-cycle に巻きついているものではないので不安定で徐々に縮小してゆき、図 9.1 のように崩壊すると思われる[7] 。

十分半径が大きいときは、D-brane の tension による力として古典的に記述できるはずだが、半径が α' 程度になると stringy な状況で扱いは難しい。しかしながらそのような状況でも、WZ-term は topological な量なので world volume の場の理論として扱えると思われる。このとき、$TX \oplus NX$ は自明な bundle となるので

$$S_{WZ} = \sum_p \int_X C_{(p+1)} \wedge ch(E) \hat{A}(TX) \tag{9.60}$$

と書き直される。flat な時空を考えているので SUSY-cycle はなく、TypeIIA で Dp-brane(すなわ

[7] 但し、RR-flux があるような場合は tension と RR-flux からの力が相殺して有限の体積の D-brane が安定 (=BPS) になることがある。代表例は D3-brane が背景に無限に存在することによって生じる $AdS^5 \times S^5$ での TypeIIB 理論 [96] などがある。

ち X は p 次元多様体) の崩壊先は D0-brane のみで、その数を $\#D0$ とすると、

$$\#D0 = -\int_X ch(E)\hat{A}(TX) = -index(\not{D}, E) \tag{9.61}$$

のように Dirac 演算子の index そのものとなっている。従って X が spin 多様体ならば index 定理によって $\#D0$ が整数であることが保証され、電荷の量子化を保証する。しかしながら spin 多様体ではない場合は素朴に計算すると一般に分数になってしまい、一見電荷の量子化に矛盾するようにみえる。これは次のように解決することができる [22]。前に議論したように D-brane の world volume は (B-field がないなら)$Spin^C$ 多様体でなくてはならず、spin 'bundle' $S(X)$ に対して $S(X)\otimes\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}$ となる line bundle $\mathcal{L}$ が存在し $c_1(\mathcal{L}) = w_2(TX) = w_2(NX)$ が成立つ。付録 E で説明するように string world sheet の global anomaly を相殺するには brane 上の U(1) ゲージ bundle E を $\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}\otimes E$ と修正するべきで、このように考えるとゲージ場と world volume の spin connection 両者の寄与の和は spin bundle と見なせて index 定理によって $\#D0$ が整数となる。別の表現をするなら、このことは、すぐ後に述べる定理 (9.69) の左辺が時空 (当然 *spin* 多様体) の bundle の立場で記述されていることからも理解できる。

さて X を 4 次元 spin 多様体として、E の instanton 数を k とおき、$c_1(E) = 0$ とすると D4-brane が崩壊してできるのは D0-brane のみでその数は、

$$\#D0 = \frac{1}{8}\sigma(X) + k \tag{9.62}$$

となる。但し $\sigma(X)$ は X の signature である。$\mathbf{S^4}, \mathbf{T^4}, K3$ で具体的に計算すると

$$\#D0(\mathbf{S^4}) = \#D0(\mathbf{T^4}) = k\ ,\ \#D0(K3) = k-2 \tag{9.63}$$

となる。またこれらの flat な時空における non-SUSY な Dp-brane は決まった方向に平面状につぶしてゆくと brane-antibrane system と同じ状況になることに注意しておく。

さて次に、曲がった時空で SUSY-cycle がある場合を考える。例として、時空が $\mathbf{R^6}\times K3$ で与えられる場合を考える [91]。$X = K3\times\mathbf{R}$ とすると、NX は自明であり、D4-brane の WZ-term は、

$$S_{WZ} = \sum_{p=0,2,4}\int_X C_{(p+1)}\wedge ch(E)\sqrt{\hat{A}(TX)} \tag{9.64}$$

となる。

しかし、$\#D4 = 0, \#D2 \neq 0, \#D0 \neq 0$ のような場合はそのままではもはや E は $X = K3\times\mathbf{R}$ 上の bundle ではない。そのような場合の扱い方には以下で述べるように 2 通りあり、両者は非常に似ている。

一つは層 (sheaf)[8] $\mathcal{E}$ として扱う方法 [91] で[9] 、この時

$$\begin{aligned} v(\mathcal{E}) &= ch(\mathcal{E})\sqrt{\hat{A}(TX)} \\ &= (rk(\mathcal{E}), c_1(\mathcal{E}), rk(\mathcal{E}) + ch_2(\mathcal{E})) \\ &\equiv (r, c_1, r-k) \leftrightarrow (\#D4, \#D2, \#D0) \end{aligned} \tag{9.65}$$

[8] 正しくは、層の中で性質の良い coherent simple semistable sheaf と呼ばれるものを用いる。

[9] 例えば D2-brane charge に相当する層は torsion sheaf と呼ばれ、ほとんどの点で rank=0 である。また D0-brane に相当する δ 関数的な層は skyscraper sheaf と呼ばれる。

を向井ベクトル (Mukai vector) と呼ぶ。向井ベクトルには自己交点数が次のように定義される。

$$\begin{aligned} v \cdot v &= -\int_{K3} ch(\mathcal{E}^* \otimes \mathcal{E}) \hat{A}(TX) \\ &= \int_{K3} (v^2 \wedge v^2 - 2v^0 \wedge v^4) \\ &= c_1^2 - 2r(r-k) \end{aligned} \tag{9.66}$$

またこのとき対応する層の moduli space の次元は、

$$dim(\mathcal{M}(\mathcal{E})) = 4(\frac{1}{2} v \cdot v + 1) \tag{9.67}$$

で与えられることが知られていて、BPS 条件 $v \cdot v \geq -2$ と対応する。この方法は正則性を要求するので、BPS 状態のみ議論できる。

もう一つの方法は、K-theory を $f_! : K(W) \to K(X)$ と拡張する方法である [84]。ここで W は X の部分多様体で、SUSY-cycle とし、$dim(X) - dim(W) = 2l$ とする。この方法で W に巻きついた D-brane の記述を実現したい。数学で、$f : W \to X$ のとしたとき $f_! : K(W) \to K(X)$ の写像を構成することができ、K-theory の Gysin map と呼ばれている。cohomology の言葉で簡単にいうと

$$f_! \ : \ \alpha \in H^{2i}(W) \ \to \ \alpha \wedge \delta(N) \in H^{2i+2l}(X) \tag{9.68}$$

となる。ここで $\delta(N)$ は、normal 方向 ($2l$ 次元) に対する δ 関数で、$2l$-form として定義されるもの[10] 。このとき次の定理 (Atiyah)[11] が示される。すなわち

$$ch(f_! E) \hat{A}(TX) = f_!(ch(E) \hat{A}(TW) e^{\frac{c_1}{2}}) \qquad (E \in K(W)) \tag{9.69}$$

が成立つような $f_! E \in K(X)$ が存在する。但しここで $c_1 = w_2(W) - f^* w_2(X)$ と置いた。また $w_1(W) = f^* w_1(X)$ と仮定している[12] 。[付録 E] で説明する例外を除き、通常の場合に物理で考える多様体は「向き付け可能で、spin 多様体」なので仮定を満たし、$c_1 = 0$ として良い。これらを用いると次の式が容易に示される。

$$f_!(ch(E) \sqrt{\frac{\hat{A}(TW)}{\hat{A}(NW)}}) = ch(f_! E) \sqrt{\hat{A}(TX)} \tag{9.70}$$

左辺は W 上の WZ-term から自然に導かれ、右辺は X 上の vector bundle としてそれが拡張されて表されていることを意味し、W に巻きついた D-brane の電荷を X から見た立場で表現している。つまり式 (9.64) を再現している。従って、以下 $\#D4 = 0$ のような場合でも $K(X)$ の立場で考えることにして $f_!$ は略記する。

また、flat な時空に置かれた閉じた (不安定な)D-brane については、W を一点とみなせば上述の定理がそのまま適用できて、崩壊後残る D0-brane 電荷が時空全体の K-group の元とみなせる。

[10] 正しくは数学の言葉で currents と呼ばれるものである。
[11] 微分可能多様体における Riemann-Roch の定理と呼ばれる。
[12] ここで $w_i(W) \in H^i(W, \mathbf{Z_2})$ は Stiefel-Whitney 類である。

もっと一般に、不安定な D-brane を X としてそれが崩壊して様々な SUSY-cycle に巻き付いて最終的に world volume が W の D-brane が得られる現象を定理 (9.69) は表していると言える。

さらに $K(X)$ に内積が次のように定義できる [84]。

$$< [E], [F] >= \int_X ch(E^* \otimes F)\hat{A}(TX) = index(\not{D}, E^* \otimes F) \tag{9.71}$$

この物理的意味は次の通りである。 2 つの D-brane が X で交わっている場合を考える。つまりそれぞれの world volume を Y_1, Y_2 とすると $Y_1 \cap Y_2 = X$ である。X が偶数次元の時には一般に chiral fermion が存在し、vector bundle $E^* \otimes F$ の section と思える。そのとき、この chiral fermion の zeromode の変化[13] が $< [E], [F] >$ である。そのような zeromode の変化は既に (4.6.3) で見た fundamental string の生成という現象を引き起こすので興味深い [66]。それについて簡単に説明すると次のようになる。

$D0 - D8$ system の string の生成を調べるには、まず一回 T-dual をとって $D1 - D9$ にする。このとき $D1$-brane 上の 2 次元理論における chiral fermion の zero mode の変化を調べる。それには上式の右辺を計算すればよく、$\int F = \int d(A_{D9} - A_{D1})$ つまり時間変化 $\Delta(A_{D9} - A_{D1})$ によって zero mode の変化が生じる。これを T-dual をとってもとの $D0 - D8$ system に戻してやると、$\Delta(X_{D8} - X_{D0})$ すなわち D0 と D8 の相対位置の変化が zero mode の変化を引き起こすことが分かる。つまり、S^1 コンパクト化すると D0 が D8 を一回通過するごとに zero mode が外界から入ってくる (anomaly inflow) と考えないと理論に anomaly が生じて矛盾が生じる。D0-D8 string の基底状態は Ramond sector(1 つの zero mode をもつ) であることから、fundamental string の生成がその必要な zero mode を供給すると考えられる。このようにして理解できる。

さて、特に $E = F$ すなわち一つの D-brane 上の chiral fermion を考える場合は、前の (9.66) の向井ベクトルの内積と一致する。これは自己交点数とも呼ばれる。

これらの量は、open string を CFT を用いて記述した場合には次のように計算することができる [71]。但し bundle E_α, E_β が存在する D-brane をそれぞれ α, β で表し、それぞれの boundary state を $|D(\alpha), \pm >, |D(\beta), \pm >$ と記すことにする。つまり、

$$[E_\alpha] \in K(X) \quad \leftrightarrow \quad |D(\alpha), \pm > \tag{9.72}$$

と対応するはずで、その内積を考えると次のようになる。

$$< [E], [F] >= tr_R^{\alpha\beta}(-1)^F =< D(\alpha), + |\Delta| D(\beta), - >_{RR} \tag{9.73}$$

この式が成立するのは R-sector の open string は (space time)fermion を表し、$(-1)^F$ はその chirality を意味することから明らかである。左辺は Witten index であり massive mode は影響しないので massless mode のみ考える今までの議論とうまく対応するのである。

(4.6.3) の計算を思い出すと、string creation はこの Witten index に相当していた。これは前述の anomaly inflow による string creation という考え方による結果と一致している。

[13] ここで X が時間軸も含むことを考慮した。X がユークリッド計量と思うなら zeromode そのものと言える。

さて、これを用いると次のように内積を保つ K-group から H^{even} への写像が得られる。

$$\begin{aligned} [E] = (E, 0) \in K(X) \quad &\rightarrow \quad ch(E)\sqrt{\hat{A}(TX)} \in H^{even}(X) \\ < [E], [F] >= index(\not{D}, E^* \otimes F) \quad &\rightarrow \quad < E, F >= \int_X ch(E^* \otimes F)\hat{A}(TX) \end{aligned} \tag{9.74}$$

以上まとめると K-theory と D-brane charge($=H^{even}$) の対応を再び確認したことになる [84]。すなわち物理的な'chern 同型' の拡張とみなせる。

最後にこの写像を brane-antibrane system に拡張してみる。つまり、多様体 X 全体に巻きつく Dp-brane と antiDp-brane が複数あるとする。tachyon condense でより次元の低い D-brane(SUSY-cycle に巻きついていれば安定) が得られるはずである。Dp-brane と antiDp-brane それぞれのゲージ場の bundle を E, F とおく。エネルギーを最小とする条件「無限遠で $DT = 0$」より tachyon 場は $T = E^* \otimes F$ の bundle とみなせる。このとき

$$[E - F] = (E, F) \in K(X) \ \rightarrow \{ch(E) - ch(F)\}\sqrt{\hat{A}(TX)} \in H^{even}(X) \tag{9.75}$$

の写像を考えると内積を保ち、Dp-brane と antiDp-brane の対消滅で上式の右辺で表される D-brane charge が生じることを意味する。ここで $ch(E) - ch(F)$ は、K-theory の chern character であることに注意。

第10章　Conclusion

この最後の章では今まで見てきたことを総括し、分かるようになったことや問題点について述べながら今後の課題について自分の考えを述べる。

本論文では、超弦理論における安定な非 BPS 状態に関する最近の研究の進展を様々な角度から見てきた。大きく分けて次のような 2 通りの流れがあることが分かった。すなわち、CFT による記述を用いる方法と、K-theory による幾何学的記述を用いる方法である。

前者の方法では、具体的に brane-antibrane 系や non-BPS D-brane といった超弦理論における非 BPS 状態を boundary state もしくは open string CFT を用いて記述し、タキオン凝縮が特定の半径で marginal deformation とみなせることを用いて議論するものであった。この方法は様々な系に対して強力な議論を与えるが、欠点もある。

まず、通常の超弦理論の CFT を用いた方法では on shell のみ扱うので、brane-antibrane 系の tachyon potential といった off shell な量は扱えないことである。従って、タキオン凝縮は on shell(=marginal) という特殊な状況のみで扱われてきた。この点を解決するには String field theory を用いることが必要である [47]。5 章で述べたように、ごく最近になって String field theory を用いた議論も行われるようになり、タキオンポテンシャルの普遍性という重要な性質も理解された [52]。また Bosonic string の D-brane につてはタキオンポテンシャルの具体的計算も行われ、タキオン場について低い次数の展開でタキオン凝縮を定量的に記述することが可能であることが指摘された [53] ことは特筆すべき進展である。この計算を超弦理論の場合についても行うことができれば、brane-antibrane 系や non-BPS D-brane の理解に大きな進歩をもたらすことは明らかである。

もう一つの欠点は摂動論を用いているために弱結合領域に議論が限られる点である。この問題は、string duality を用いることによって定性的には解決される。実際、本論文でも見たように TypeIIA 理論の K3 コンパクト化 (orbifold) における安定な非 BPS 状態は強結合では Heterotic 理論の T^4 コンパクト化における安定な非 BPS 状態とみなせ、また O-plane と D-brane の系の安定な非 BPS 状態は強結合で様々な理論の安定な非 BPS 状態とみなせることも見てきた通りである。

この方法で注意すべき点は、超弦理論自体が実際に計算できる CFT によって記述されていることが必要である。従って K3 や Calabi-Yau 多様体の orbifold が最も有効ということになるが、これらの場合には cycle に B-field が貫入していて、通常の幾何学的コンパクト化と多少異なる。従って、non-SUSY cycle に巻きつく安定な非 BPS 状態の存在の本質を知るには、B-field の存在がどう影響するか調べる必要がある。このためには、現在知られているもの以外にさらに多くの非 BPS 状態の例を構成する必要があり今後の課題といえる。4 章でみた $\mathbf{C^2/\Gamma}$ の boundary state の構成はそのための第一段階といえる。また、Calabi-Yau 多様体の 3-cycle に巻きつく D-brane が特別な moduli を境に BPS から非 BPS になるという興味深い例も知られていて [72]、Calabi-Yau 多様体の場合には B-field の存在を mirror 変換で複素構造と見なせるので安定な非 BPS 状態の本質を理解するのに良いセットアップを与えるかもしれない。Calabi-Yau 多様体の D-brane については

本論文では触れられなかったが、最近では $\mathbf{C^3/Z_3}$ や $\mathbf{C^3/Z_N \times Z_N}$ の orbifold や Gepner-model を用いた解析が盛んに行われており [69][71][70]、これらの理論において安定な非 BPS 状態を構成することは重要な課題と思われる。

また本論文では述べなかったが、このように CFT を用いた方法で知られている奇妙な現象として非 BPS 状態における Bose-Fermi degeneracy という現象 [49] がある。これは非 BPS 状態 (brane-antibrane or non-BPS D-brane) を orbifold で扱い、boundary state を用いて (1-loop)vacuum amplitude を計算すると特定の moduli(半径) で 0 となり、非 BPS 状態なのに Bose-Fermi degeneracy を起していることが分かる。この現象の原因については現在でも理解されていないが、all order でも正しいのならば非 BPS な brane configration を無限に重ねることができるはずで、AdS/CFT 対応のような現象が起こる可能性が指摘されている。

さて、もう一つの方法すなわち K-theory を用いた数学的方法についても本論文で見てきた。この方法は brane-antibrane 系における tachyon のトポロジー的側面を抽出して扱うもので、tachyon potential の対称性のみに依存し、詳細によらないという利点があった。

もともと D-brane の電荷が K-theory で分類されることは Chern 同型と D-brane の WZ-term の形の比較から指摘されていたが、brane-antibrane 系のタキオン凝縮から D-brane を構成することを考えると直接 K-theory の定義そのものと対応することが分かった。従って、一般に不安定な存在である brane-antibrane 系が実は超弦理論において本質的存在であることも示唆している。また、D-brane を含む 3 つの超弦理論 (IIA,IIB,I) のそれぞれに対して数学ですでに知られていた 3 種の K-theory ($K^{-1}(X), K(X), KO(X)$) が対応していて、さらに orbifold,orientifold の理論のついても同様なことが言えるので、(摂動的な) 超弦理論と K-theory の各理論は一対一対応していることが分かる。また T-duality も K-theory と対応することもすでに見た通りである。

K-theory による D-brane の電荷の記述を用いると TypeI 理論の non-BPS D-brane 電荷のような torsion element についても考慮することができるので、安定な非 BPS 状態の分類にも適用することが出来る。

この K-theory を用いた方法の短所は、String duality のなかで S-duality のように結合定数の違う領域をつなぐ対称性については議論することが出来ない点である。また、非 BPS 状態がある領域で不安定だが、別の領域では安定であるといったような D-brane の力学的要素については何ら情報を与えない点も短所といえる。

さて以上のような超弦理論における非 BPS 状態が不安定になる場合には open string にタキオンが生じ、closed string にはタキオンは存在しなかった。従って局所的に不安定な系となるのでその扱いに本質的問題は生じない。Type0 理論など時空に超対称性のない弦理論の多くは closed string にタキオンを含み、そのような理論の D-brane を考察する場合には問題が生じる。つまり時空自体の安定性が問題となる。このような問題を扱うのは非常に困難であり、現在でも closed string のタキオンの扱いについてははっきりとした解答が与えられていない。但し tree level の解析で、Type0B 理論の場合は RR flux を D-brane を重ねて生じさせることによってタキオンが安定化する可能性が指摘されている。いずれにせよ bosonic string が tachyon kink を凝縮して 2 次元以下の noncritical string(Liouville 理論) を構成するように、これらの理論でも非常に大きな background の変化が起きて安定化すると思われる。この方向の研究は非常に困難とは思われるが、Type0 理論が何故存在するのかという疑問に答えるためにも重要な課題と言える。

最後に今後の課題を整理しておくと、「超弦理論におけるタキオン凝縮の機構の String field theory

による off shell での扱いと非摂動効果の影響」、「さらに多くの安定な非 BPS 状態を構成すること」、「Type0 理論の時空の安定化の機構」となる。非 BPS 状態の研究はかなり進展したとはいえまだまだ本質が完全に理解されたとは言えない。BPS 状態に比べて非 BPS 状態は力学的要素が本質的であり、超弦理論の力学を研究する上でも重要な対象と思われ今後より一層の研究が長期的な観点で進められるべきだと考えられる。

Acknowledgments

修士課程の間に数多くの貴重な助言や研究指導をして下さった江口先生には深く感謝します。松尾先生には、ゼミを開いて頂いたり、議論をして頂いたりしてお世話になりとても感謝しています。そして、ゼミ等でお世話になった菅原さんと、普段いろいろと教えて頂いたり議論をして頂いた寺嶋さん、細道さん、羽柴さん、渋佐さん、那珂さん、野崎さんに感謝の意を述べたいと思います。また同期の吉田君には string junction についてしばしば議論して頂き非常に有益でした。最後にこの修士論文を書くにあたり、様々な助言をして頂いたり、私を激励して下さった研究室の方々にお礼を申し上げます。

付 録A　f関数の定義と性質

ここでは、本文中にしばしば現われるf関数 [4] の性質とΘ関数 [1] との関係をまとめておく。
τを複素数とし、

$$q = e^{2\pi i\tau}, \tilde{q} = e^{\pi i\tau}, \tau = it \tag{A.1}$$

とおく時、f関数は

$$f_1(\tilde{q}) = \tilde{q}^{\frac{1}{12}} \prod_{n=1}^{\infty}(1-\tilde{q}^{2n}) = \eta(\tau) \tag{A.2}$$

$$f_2(\tilde{q}) = \sqrt{2}\tilde{q}^{\frac{1}{12}} \prod_{n=1}^{\infty}(1+\tilde{q}^{2n}) = \sqrt{Z_1^0} \tag{A.3}$$

$$f_3(\tilde{q}) = \tilde{q}^{-\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty}(1+\tilde{q}^{2n-1}) = \sqrt{Z_0^0} \tag{A.4}$$

$$f_4(\tilde{q}) = \tilde{q}^{-\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty}(1-\tilde{q}^{2n-1}) = \sqrt{Z_0^1} \tag{A.5}$$

で定義される。この関数は次の性質を持っている。

$$f_3(\tilde{q})^8 - f_2(\tilde{q})^8 - f_4(\tilde{q})^8 = 0 \quad (\text{Jacobi's "abstruse identity"}) \tag{A.6}$$

$$f_2(\tilde{q})f_3(\tilde{q})f_4(\tilde{q}) = \sqrt{2} \tag{A.7}$$

また modular 変換性は次の通りである。

$$f_1(e^{-\frac{\pi}{t}}) = \sqrt{t}f_1(e^{-\pi t}) \tag{A.8}$$

$$f_2(e^{-\frac{\pi}{t}}) = f_4(e^{-\pi t}) \tag{A.9}$$

$$f_3(e^{-\frac{\pi}{t}}) = f_3(e^{-\pi t}) \tag{A.10}$$

$$f_4(e^{-\frac{\pi}{t}}) = f_2(e^{-\pi t}) \tag{A.11}$$

この関数とΘ関数 [1] との関係は、次のとおりである。

$$\Theta_{00}(0,\tau) = \Theta_3(0|\tau) = \sum_n \tilde{q}^{n^2} = f_1(\tilde{q})f_3^2(\tilde{q}) = \sqrt{2}\frac{f_1(\tilde{q})f_3(\tilde{q})}{f_2(\tilde{q})f_4(\tilde{q})} \tag{A.12}$$

$$\Theta_{01}(0,\tau) = \Theta_4(0|\tau) = \sum_n (-1)^n \tilde{q}^{n^2} = f_1(\tilde{q}) f_4^2(\tilde{q}) \tag{A.13}$$

$$\Theta_{10}(0,\tau) = \Theta_2(0|\tau) = \sum_n \tilde{q}^{(n-\frac{1}{2})^2} = f_1(\tilde{q}) f_2^2(\tilde{q}) \tag{A.14}$$

$$-\Theta_{11}(0,\tau) = \Theta_1(0|\tau) = i \sum_n (-1)^n \tilde{q}^{(n-\frac{1}{2})^2} = 0 \tag{A.15}$$

付 録B　string junctionの簡単なReview

ここでは、7章でF-theoryにおけるnon-BPS stateを構成するときに用いたstring junctionの考え方についてごく簡単にまとめる。主に文献[94]に従って説明する。

B.1　F-theoryと[p,q]7-braneの配置

ここで考えるのはF-theoryのK3コンパクト化[24][38]である。この理論はType IIBの真空の一つでSUSYは16存在する。具体的には代数曲線

$$y^2 = x^3 + f(z)x + g(z)\ ,\ deg(f) = 8\ ,\ deg(g) = 12 \tag{B.1}$$

を考える。ここで、zが$\mathbf{P^1}$の座標でそれを固定した時、上の方程式を満たす(y,x)は$\mathbf{T^2}$を表しすなわち、baseを$\mathbf{P^1}$とするK3のelliptic fibrationとなっている。このときに、トーラス：$\mathbf{T^2}$の周期τをType IIBのscalar場を用いて

$$\tau(z) = \chi(z) + ie^{-\phi}(z) \tag{B.2}$$

と同一視することによって16SUSYをもつ8次元のType IIB理論の真空を一つ定義したことになる。すなわち$\mathbf{P^1}$にコンパクト化されたType IIB理論とも言える。

さてこの理論にはK3のsingular fiberすなわち判別式$\Delta = 4f^3 + 27g^2$が0となる$\mathbf{P^1}$上の点が２４存在する。これは$deg(\Delta) = 24$より従う。このような点ではトーラスは退化していて、τに対する$SL(2,\mathbf{Z})$モノドロミーが生じる。この現象を物理的に解釈するとType IIBのRR-scalar場((-1)-brane)に対するsouceがあることを意味しすなわち7-braneの存在を意味する。K3に２４本のsingular fiberがあることから２４枚の7-braneがこの理論に存在することが分かる。図B.1のように[p,q]7-braneのモノドロミー行列$K_{[p,q]}$を定義すると、

$$K_{[p,q]} = \begin{pmatrix} 1+pq & -p^2 \\ q^2 & 1-pq \end{pmatrix} \tag{B.3}$$

となる。一般に$SL(2,\mathbf{Z})$モノドロミーはup to conjucation $K \to gKg^{-1}$で定義されていて、次のS,Tで生成される。

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ ,\ T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{B.4}$$

またTrKはconjucationで不変であるので7-brane configrationを特徴づける重要な量である。例えば同種の7-braneが何枚か集まったconfigrationは$TrK = 2$です。

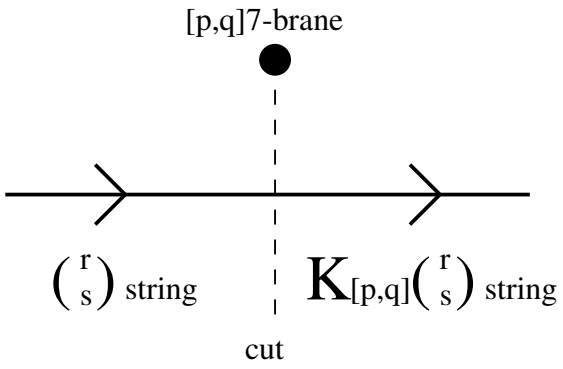

図 B.1: [p,q]7-brane のモノドロミー

さてそれでは特別な 3 つの 7-brane を次のように定義して、可能な 7-brane configration について考えてゆく。この 3 種以外の [p,q]7-brane は $X_{[p,q]}$ と表すことにする。

$$\text{A-brane} : (1,0)\ ,\ \text{B-brane} : (1,-1)\ ,\ \text{C-brane} : (1,1) \tag{B.5}$$

これらを用いて左から A, B, C の順で並べた表示を canonical presentation と呼び、2 つの 7-brane configration が等しいことは canonical presentation が等しいとも表現できる。7-brane の枚数と全体のモノドロミーが等しいというだけでは不十分であることに注意。このときモノドロミーは $K_C \cdots K_B \cdots K_A$ となる。注意すべき点は 7-brane の入れ換えは自明に行えないことである。例えば A, B を入れ換えるとモノドロミーが等しくなるようにするには

$$BA = AX_{[2,-1]} \leftrightarrow K_A K_B = K_{[2,-1]} K_A \tag{B.6}$$

となってしまうのである。

それでは知られている 7-brane の configration とその canonical presentation を述べる。まず楕円曲面において elliptic fiber が退化する方法は小平の分類として数学で知られていて次のように singularity type と対応する。

$$\begin{aligned} &I_n \leftrightarrow A_{n-1} (n \geq 1)\ ,\ I_n^* \leftrightarrow D_{n+4} (n \geq 0)\ ,\ II \leftrightarrow H_0\ ,\ III \leftrightarrow H_1\ ,\ IV \leftrightarrow H_2 \\ &,\ II^* \leftrightarrow E_8\ ,\ III^* \leftrightarrow E_7\ ,\ IV^* \leftrightarrow E_6 \end{aligned} \tag{B.7}$$

そこでこれらを少し拡張して次のように 7-brane configration を canonical presentation で定義する。

$$\begin{aligned} A_N (N \geq 0) : A^{N+1} \quad ,\quad D_N (N \geq 0) : A^N BC \\ ,\ H_N (N \geq 0) : A^{N+1} C \quad ,\quad E_N (N \geq 1) : A^{N-1} BCC \end{aligned} \tag{B.8}$$

これらは小平の分類に入らないものを含むがそのような configration では全部の 7-brane を一点につぶせない、すなわち enhanced sym は起きないことに注意。その代表例は D_0 型である。これは

D3-brane probe を入れると 4D N=2 SU(2) ゲージ理論となり、Seiberg-Witten solution から分かるように非摂動効果で 7-brane が分裂してしまうのである。

さらに

$$\tilde{E}_N(N \geq 0) : A^N X_{[2,-1]} C \tag{B.9}$$

を定義すると便利である。この configration は次の同値関係

$$A^{N-1}BCC = A^N X_{[2,-1]} C \quad (N \geq 2) \tag{B.10}$$

より $\tilde{E}_N = E_N$ が $N \geq 2$ が成立つが、$\tilde{E}_0, \tilde{E}_1$ は全く新しい configration である。$\tilde{E}_0, \tilde{E}_1$ も一点につぶすことはできない。

さて一般に知られている事実として $|TrK|$ の値で次のような分類ができる。まず $|TrK| < 2$ は elliptic と呼ばれ必ず一点につぶすことができる。$|TrK| = 2$ は parabolic と呼ばれつぶすことができる場合とそうでない場合とがある。またこの時 up to conjugation でモノドロミーは T^k $(k \in \mathbf{Z})$ と必ず書ける。$|TrK| > 2$ の場合は hyperbolic と呼ばれ一点につぶすことができない。

最後に 7-brane configration における重要な同値関係をまとめておく。$\hat{E}_N, \hat{\tilde{E}}_N$ については後述。

$$\begin{aligned} & D_5 = E_5 \ , \ D_3 = H_3 \ , \ H_4 = E_4 \ , \ E_N = \tilde{E}_N (N \geq 2) \\ & , \ \hat{E}_N = \hat{\tilde{E}}_N (N \geq 2) \ , \ \hat{E}_8 = E_9 \end{aligned} \tag{B.11}$$

B.2 Enhanced symmetry と string junction

前節で 7-brane configration について述べたが、ここではそのような configration でどのような対称性 (7-brane のゲージ対称性) が実現するか string junction を用いて考える。F-theory の K3 コンパクト化は $\mathbf{T^2}$ コンパクト化した Heterotic 理論と dual であると考えられている [24] が、Hetero 側の enhanced symmetry を F-theory 側で説明するにはそのような対称性の実現が必要なのである。

String junction とは (p,q)string が 3 本以上同一点で交わる現象である。このとき電荷 (p,q) は保存し、tension による力の釣合いで BPS configration が決まる。このような string junction を用いて、様々な [p,q]7-brane から発する (p,q)string を結合させて全体で一つの string configration を作りたい。以下では 3 叉結合のみ扱い、構成された全体の string configration を $\mathbf{J}$ で表し junction と呼ぶ。

その configration が BPS ならば configration の大きさを 0 とする極限で massless な励起と見なせるはずである。例えば A_N 型の場合はよく知られているように brane 間の (1,0)string=F-string によって U(N+1) のな対称性が実現する。他の場合については非自明で以下で述べるように扱える。

まず準備として各 string junction $\mathbf{J}$ に対して自己交点数 $\mathbf{J^2}$ を次のように定義する。(図 B.2 参照)

(i)[p,q]7-brane から発する (p,q)string が n 本あるときには $\mathbf{J^2} = -n^2$ の寄与。

(ii) 反時計回りに (p,q),(r,s),(l,m)string が一点に向かって交わるそれぞれの string junction に対して $\mathbf{J^2} = ps - qr$ の寄与。

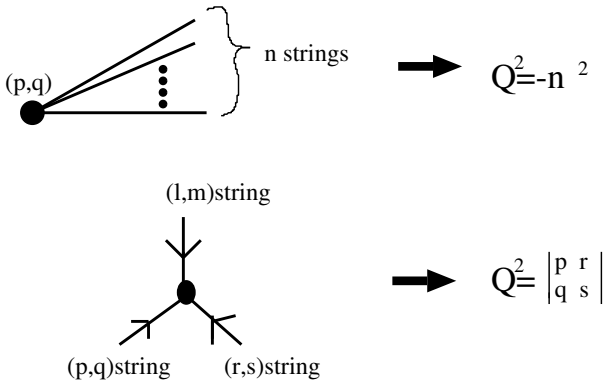

図 B.2: 自己交点数:$\mathbf{J^2}$ の求め方

この 2 つの寄与をすべて足し上げたものを自己交点数 $\mathbf{J^2}$ と定義する。この時、重要な主張は $\mathbf{J^2} \geq -2$ ならば $\mathbf{J}$ は BPS configration であることである。

これは次のように理解できる。Type IIB/$\mathbf{P^1}$ を $\mathbf{S^1}$ コンパクト化して TypeIIA とみなし、それを M-theory へ lift する [95] と K3 コンパクト化した M-theory となる。このとき (p,q)string は、K3 を elliptic fibration したときの torus における (p,q)cycle に巻きついて $\mathbf{P^1}$ 方向に伸びた M2-brane となる。この状況に翻訳すると上で定義した $\mathbf{J^2}$ は M2-brane の (幾何学的) 自己交点数となっている。よって、M2-brane が正則な genus g の Riemann 面で表されるならば、$\mathbf{J^2} = 2(g-1) \geq -2$ となるのである。このように M2-brane の立場では 2 種の junction $\mathbf{J_1}, \mathbf{J_2}$ の交点数 $\mathbf{J_1} \cdot \mathbf{J_2}$ の定義も自明である。

またこのことは Heterotic dual でも理解できる。$\mathbf{T^2}$ コンパクト化した Heterotic string で K.K.mometum vector を $(\vec{P_R}, \vec{P_L})$ と書いた時に $\mathbf{J^2} = \vec{P_R}^2 - \vec{P_L}^2$ と対応する。Heterotic string での BPS 条件は、right-moving sector を励起しない $(N_R = \frac{1}{2})$ ことであり、$\mathbf{J^2} = 2(N_L - 1) \geq -2$ と同じ結果が得られる。

逆に言うと enhanced symmetry に寄与する massless なゲージ粒子を探すには、Heterotic dual の考察から、$\mathbf{J^2} = -2$ となる BPS junction $\mathbf{J}$ を見つければよい。なお $\mathbf{J^2} = 0$ は U(1) ゲージ粒子に、$\mathbf{J^2} > 0$ は massive な BPS 状態 (torus に巻きついた D-brane など) に対応する。

例えば D_4 の場合は次のようになる。D_4 は摂動的には O7-plane と D7-brane が 4 つある system で SO(8) のゲージ対称性が実現すると予想される。さて $D_4 = AAAABC$ の configration において、それぞれの 7-brane から string が発している状態を

$$\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3}, \mathbf{a_4}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \tag{B.12}$$

と表す。この時に次のように 4 つの独立な junciton を定義する。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha_i} &= \mathbf{a_i} - \mathbf{a_{i+1}} \quad (i = 1, 2, 3) \\ \boldsymbol{\alpha_4} &= \mathbf{a_3} + \mathbf{a_4} - \mathbf{b} - \mathbf{c} \end{aligned} \tag{B.13}$$

これらに対し自己交点数を前の規則で求めると (図 B.3 参照)

$$\boldsymbol{\alpha_i} \cdot \boldsymbol{\alpha_i} = -1 - 1 = -2$$

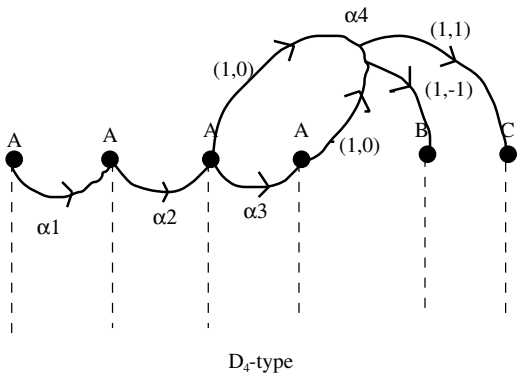

図 B.3: D_4 の配位での string junction

$$\boldsymbol{\alpha_4 \cdot \alpha_4} \quad = \quad -1-1-1-1+\{2\cdot 1-(-1)\cdot 0\} = -2 \tag{B.14}$$

従って確かに SO(8) の root vector に対応するゲージ粒子が得られる。またこの場合は一点につぶせるので、enhanced sym として SO(8) が実現することが分かった。

他の configration についても同様に考えると、次のようにゲージ群が求まる。但し、一点につぶせない場合でも便宜上、ゲージ群と呼ぶことにする。

$$\begin{aligned}
&\{A_N, H_N\} : SU(N+1)\ ,\ D_N(N\geq 1) : SO(2N)\ ,\ D_0 : \text{ゲージ群なし} \\
&,\ E_1 : SU(2)\ ,\ E_2 : SU(2)\times U(1)\ ,\ E_3 : SU(3)\times SU(2)\ ,\ E_4 : SU(5) \\
&,\ E_5 : SO(10)\ ,\ E_6 : E_6\ ,\ E_7 : E_7\ ,\ E_8 : E_8\ ,\ E_N(N\geq 9) : \text{affine 化する (後述)} \\
&,\ \tilde{E_0} : \text{ゲージ群なし}\ ,\ \tilde{E_1} : U(1)
\end{aligned} \tag{B.15}$$

最後に以上で分かったことを式を用いて整理しておく。D_4 の場合で既に見たように $k+2$ 枚の 7-brane から rank$=k$ の対称性が生じている。これは、もともと junction $\mathbf{J}$ の基底が $k+2$ 個あって、全体で閉じているつまり系の外にでる string がないという条件で 2 つの条件がつき、残った k 個の基底がすべて BPS であったためこのようになったと考えられる。そこでもともとの junction を

$$\mathbf{J} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \boldsymbol{\omega_i} + \boldsymbol{p\omega_p} + \boldsymbol{q\omega_q} \tag{B.16}$$

と書く。junction はもともとその対称性 (Lie algebra) の weight lattice に値をとり、そのとき $\boldsymbol{\omega_i}$ は root vector $\boldsymbol{\alpha_i}$ の dual に相当する。$\boldsymbol{\omega_{p,q}}$ はそとに出る (1,0)string,(0,1)string を意味し、上式最後の項は (p,q)string が外に出ることを表す。この (p,q) を asymptotic charge と呼ぶ。このような基底で書くと λ_i はその junction が表す状態の weight vector に相当する。また $\boldsymbol{\alpha_i \cdot \alpha_j} = -A_{ij}$, $\boldsymbol{\omega_i \cdot \omega_j} = -A^{ij}$ がそれぞれ Cartan 行列とその逆行列に相当する。

さてこの junction の自己交点数は次のように書ける。(K:全体のモノドロミー)

$$\mathbf{J^2} = -\lambda\cdot\lambda + f_K(p,q) \tag{B.17}$$

但し $f_K(p,q)$ は asymptotic charge による項で (p,q) と K のみに依存し次のように求まる。
(a)TrK=2 の時
asymptotic charge として q=0 のみ許される。$K = T^k$ のとき $f_K(p,q) = -\frac{1}{k^2}p^2$ と求まる。
(b)$TrK \neq 2$ の時

$$K = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{に対して次のように与えられる} \tag{B.18}$$

$$\begin{aligned} f_K(p,q) &= \frac{bq^2 - cp^2 + (a-d)pq}{2-a-d} \\ &= 1 + \frac{1}{2-(a+d)}\{TrK_{[p,q]}K - 2\} \end{aligned} \tag{B.19}$$

B.3 Affine Kac Moody algebra の実現

Lie algebra が string junction によって実現されることはすでに見た通りである。しかし massive な BPS 状態まで考えればさらに対称性が Heteroric dual で予想されるように拡大する可能性がある。

具体的には、ある Lie algebra g を実現する 7-brane configration X (K:全体のモノドロミー) にさらに新しい [p,q]7-brane(これを $Z_{[p,q]}$ と書く) を加えて対称性が拡大するか考える。X と $Z_{[p,q]}$ を結ぶ (p,q)string は n 本あるとする。junction は、

$$\mathbf{J} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \boldsymbol{\omega_i} + n(\boldsymbol{p\omega_p} + \boldsymbol{q\omega_q}) - n\mathbf{z} \tag{B.20}$$

とかけて、自己交点数は

$$\mathbf{J^2} = -\lambda \cdot \lambda + n^2(f_K(p,q) - 1) \tag{B.21}$$

となる。このときに $f_K(p,q)$ で分類すると次の 5 通りの場合に分かれる。

- $f_K(p,q) < -1$ の時：n=0 のみ BPS。よって対称性は $g \oplus u(1)$ になる。
- $f_K(p,q) = -1$ の時：n=1,$\lambda = 0$ も BPS。対称性は $g \oplus su(2)$ になる。
- $-1 < f_K(p,q) < 1$ の時：rank が 1 増えたある Lie algebra に enhance する。
- $f_K(p,q) = 1$ の時：n を変えても $\mathbf{J^2}$ は不変。よって root は無限個存在する。imaginary root $\boldsymbol{\delta}$ が存在して、level=0 の affine Kac Moody algebra になる。さらにこの系 $X + Z_{[p,q]}$ に asymptotic charge (r,s) があれば level=$-s$ の affine Kac Moody algebra になる。
- $f_K(p,q) > 1$ の時：indefinte algebra と呼ばれる代数になる。

以下 $f_K(p,q) = 1$ の時の場合のみ考える。このようなやり方で、構成できる affine Kac Moody algebra は $\hat{E}_N (N \leq 8), \hat{\tilde{E}}_0, \hat{\tilde{E}}_1$ のみである。代数としては存在する $\hat{A}_N, \hat{D}_N$ はこの方法で作れない、もしくは $\hat{E}_N$ 型に enhance してしまうことが分かる。また $\hat{E}_N (N \geq 9)$ はさらに拡大された loop 代数になることも知られている。

さてこの appendix の最後として、$\hat{E}_N(N \leq 8)$ についての詳細を見てみる。

$\hat{E}_N(N \leq 8)$ の場合に $f_K(l,m) = 1$ となるのは $(l,m) = (3,1)$ の時である。そこで図 B.4 のように X から (p,q)charge をもつ string が出ていてその一部が [3,1]7-brane に入る n 本の string となり、残りが系全体の asymptotic charge (r,s) となるとする。このとき当然、$(r,s) = -n(3,1) + (p,q)$ が成立つ。

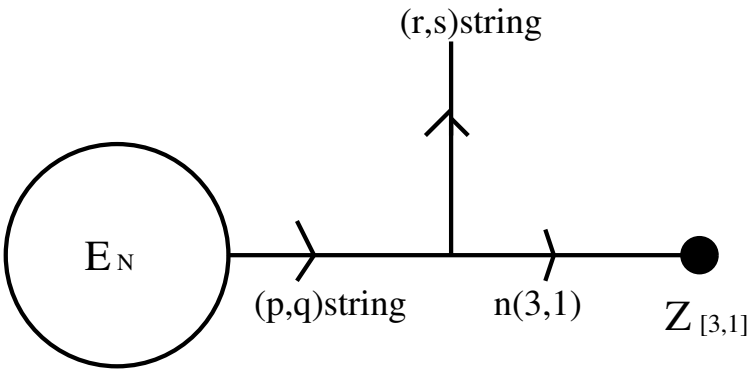

図 B.4: $\hat{E}_N$ の構成

さて、自己交点数は

$$\begin{aligned} \mathbf{J^2} &= -\lambda \cdot \lambda - n^2 + f_{E_N}(p,q) - n(p-3q) \\ &= -\lambda \cdot \lambda + 2sn + f_{E_N}(r,s) \end{aligned} \tag{B.22}$$

となる。この内積は、asymptotic charge (r,s) を固定すると Affine Lie 代数の内積

$$(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 + k_1 \cdot n_2' + k_2 \cdot n_1' \tag{B.23}$$

と $k = -s, n = n' + const$ の同一視で確かに対応している。ここで、k は level で、n' は grade である。

また Affine Lie 代数の特徴である imaginary root $\boldsymbol{\delta}$ は、系全体のモノドロミー

$$K_{tot} = \begin{pmatrix} 1 & -N+9 \\ 0 & N-5 \end{pmatrix} \tag{B.24}$$

を考慮すると次のように構成される。すなわち、junction $\boldsymbol{\delta}$ を系全体を時計回りに一周する (1,0)string とするとモノドロミーを受けず、また $\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\delta} = -s = k$ が成り立つので imaginary root と同一視できる。さらに、Affine Lie 代数を構成する root vector は、$\alpha + n\boldsymbol{\delta}$ で与えられ、実際に BPS 条件 $\mathbf{J^2} = -2$ を満たす。

付 録C　IIB/$(-1)^{F_L^S}\cdot I_4$ における $D1-\bar{D}1$ systemの詳細

この付録では、IIB/$(-1)^{F_L^S}\cdot I_4$ における $D1-\bar{D}1$ system を open string CFT を用いた tree level の解析で詳しく調べる。

C.1　tachyon condense の CFT による記述

ここでは、7－2で調べたIIB/$(-1)^{F_L^S}\cdot I_4$ における non-BPS state を $D1-\bar{D}1$ system から出発して、tachyon condense することで構成する方法を述べる。簡単のため $\alpha'=1$ としている。

具体的に考えるのは、$(\theta,\epsilon_1,\epsilon_2)=(+,+,+),(-,-,-)$ の場合である。つまり、$\mathbf{Z_2}$ wilson line の入ってないD-string と入ったantiD-string からなるsystem である。CP factor は $\Lambda\in\{1,\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\}$ で表される。projection は、$\{1,\sigma_3\}$ の sector で $h=I_4\cdot I_4'=1$, $I_4=1$, $(-1)^F=1$ となり、$\{\sigma_1,\sigma_2\}$ の sector で $h=I_4\cdot I_4'=-1$, $I_4=-1$, $(-1)^F=-1$ であった。これを次のようにまとめて書くことができる。

$$
\begin{aligned}
(-1)^{F_L^S}I_4 \;&:\; \Lambda\to\sigma_3\Lambda\sigma_3\ ,\ |0>\to|0> \\
&,\quad X^i\to -X^i\ ,\ \psi^i\to-\psi^i\ (i=6,7,8,9) && \text{(C.1)}\\
h \;&:\; \Lambda\to\sigma_3\Lambda\sigma_3\ ,\ |0>\to|0>\ ,\ X^9\to X^9+2\pi R && \text{(C.2)}\\
(-1)^F \;&:\; \Lambda\to\sigma_3\Lambda\sigma_3\ ,\ |0>\to-|0>\ ,\ \psi\to-\psi && \text{(C.3)}
\end{aligned}
$$

この時、正しい open string の spectrum を得るには、$(-1)^{F_L^S}I_4=1$, $h=1$, $(-1)^F=1$ を課せばよい。tachyon 場に相当する mode は、

$$
V=\{\sigma_1,\sigma_2\}\otimes e^{-\Phi_B}\big(e^{i\frac{(n+\frac{1}{2})x^9}{R}}-e^{-i\frac{(n+\frac{1}{2})x^9}{R}}\big) \qquad \text{(C.4)}
$$

と表され、質量は $m^2=\frac{(n+\frac{1}{2})^2}{R^2}-\frac{1}{2}$ となる。よって n=0 に着目すると、$R>R_c=\frac{1}{\sqrt{2}}$ で tachyonic となり $D1-\bar{D}1$ system は不安定になる。そこで、$R=\frac{1}{\sqrt{2}}$ で marginal になる tachyon vertex を用いて tachyon condense することを考える。bosonization, fermionization は TypeI SO(32) spinor soliton の時と同様に行うことにする。具体的には、

$$
\begin{aligned}
V_T &= \sigma_1\otimes\psi_B\big(e^{i\frac{x^9}{\sqrt{2}}}-e^{-i\frac{x^9}{\sqrt{2}}}\big) \\
&\propto \sigma_1\otimes\partial\phi_B && \text{(C.5)}
\end{aligned}
$$

の tachyon vertex を用いて、tachyon condense は次のような wilson line で記述される。

$$\text{wilson line} : exp(i\sigma_1 \otimes \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} \oint dt \partial \phi_B) \tag{C.6}$$

この wilson line による deformation は TypeI SO(32) spinor soliton の時と全く同じであることに注意。従って、spectral flow も同じになって $\alpha = 1$ のときは non-BPS D0-brane と見なせるはずである。このようにして、CFT による IIB/$(-1)^{F_L^S} \cdot I_4$ における $D1 - \bar{D}1$ system の tachyon condensation を記述することで non-BPS D0-brane が得られることが分かる。

C.2 tachyon potential

このような open string の CFT を用いる記述法で、tachyon potential を critical radius 近傍で求めてみる。この結果は 7－3 での tachyon potential を求める際にも利用している。

7－3 で orbifold limit IIA/I_4 を考えるが、その vanishing 2-cycle の B-field の値を変える効果も取り入れたい。これは T-dual をとって今考えている IIB/$(-1)^{F_L^S} \cdot I_4$ に直すと、NS5-brane を fixed 5-plane からずらすことを意味するので、そのような状況における tachyon potential $V(\alpha)$ を求めたい。ζ を NS5-brane の fixed 5-plane からのずれを表すパラメーターすなわち twisted NSNS-sector の scalar 場とすると、tachyon potential は

$$V(\alpha) = \frac{1}{g}(R - R_c) f(\alpha) + \frac{\zeta}{g} g(\alpha) + \cdots \tag{C.7}$$

と書けるはずである。すぐ分かるように $\zeta = 0$ の時は $V(1) - V(0) = \frac{R - R_c}{g}$ であり、また non-BPS D0-brane はその boundary state から分かるように twisted NSNS-sector と結合しないので $g(1) = 0$ となる。そこで ζ を適当に normalize して $g(0) = 1, f(0) - f(1) = 1$ となる。

さてそれでは、前節と同じ $(\theta, \epsilon_1, \epsilon_2) = (+,+,+), (-,-,-)$ の場合について $f(\alpha), g(\alpha)$ を求めてみる。

この場合 $D1 - \bar{D}1$system の boundary state は、$|D1,+,+> + |\bar{D}1,-,->$ として求めると、

$$|D1, \bar{D}1> = \frac{N_1}{2}\{|U,+>_{NSNS} + |U,->_{NSNS}\} + \tilde{N}_1 |T_1>_{RR} + \tilde{N}_1 |T_2>_{NSNS} \tag{C.8}$$

となる。この式に $|T_1>_{NSNS}$ が含まれていないことから、図 C.1 のように、$x^9 = 0$ 付近にある NS5brane の位置は system 全体のエネルギーに影響を与えないことが分かる。また $x^9 = \pi R$ 付近の NS5brane の位置は影響するので、ζ は具体的にこの NS5brane 上の scalar 場の一つである。

$f(\alpha), g(\alpha)$ を $(R - R_c), \zeta$ について一次まで求めるには、対応する closed string の vertex operator を挿入した Disk amplitude を求めればよい。gravtion vertex は 7－1 で見たように winding $w_{\phi} = \pm 2$ を持つ。$x^9 = \pi R$ での twisted NSNS vertex を具体的に作るのは難しいが、その周りのモノドロミーが

$$X^9 \to 2\pi R - X^9, \psi \to -\psi, \phi \to \phi \pm \sqrt{2}\pi \tag{C.9}$$

となるため、$w_{\phi} = \pm 1$ であることが分かる。以上より比例係数を除いて次のように $f(\alpha), g(\alpha)$ が求まる。

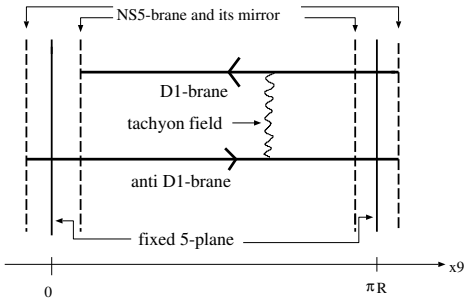

図 C.1: NS5-brane を fixed 5-plane からずらした場合の $D1-\bar{D}1$ system

$$\begin{aligned} f(\alpha) &\propto < V_{gravi} Tr\ exp(i\sigma_1 \otimes \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} \oint dt \partial \phi_B) >_{disk} \\ &\propto cos(\pi\alpha) \qquad \text{(C.10)} \\ g(\alpha) &\propto < V_{twistNS} Tr\ exp(i\sigma_1 \otimes \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} \oint dt \partial \phi_B) >_{disk} \\ &\propto cos(\frac{\pi\alpha}{2}) \qquad \text{(C.11)} \end{aligned}$$

となる。よって以上より、次のように tachyon potential が求まった。

$$V(\alpha) = \frac{1}{g}[\frac{1}{2}(R - R_c)cos(\pi\alpha) + \zeta cos(\frac{1}{2}\pi\alpha)] \qquad \text{(C.12)}$$

付 録D　Non-BPS D-braneのtachyon condenseの詳細

ここでは、7－3で扱ったNon-BPS D-braneのtachyon condenseについてCFTによる記述法を説明する。

まずflat時空におけるTypeIIAのNon-BPS D1-braneを考える。$R=\sqrt{2}$で可能なbosonization, fermionizationはcocycle factorΣ_3を用いて次のように書ける。cocycle factor以外のnotationはType I SO(32) spinor solitonの時と同じである。$F\in\mathbf{Z}$,$n\in\mathbf{Z}$をそれぞれfermion number,KK mometumを表す量子数とする。

$$e^{i\sqrt{2}X_R}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi+i\eta)\otimes\Sigma_3\ ,\ e^{i\sqrt{2}X_L}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{\xi}+i\tilde{\eta})\otimes\Sigma_3 \tag{D.1}$$

$$e^{i\sqrt{2}\phi_R}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi+i\psi)\otimes\Sigma_3\ ,\ e^{i\sqrt{2}\phi_L}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{\xi}+i\tilde{\psi})\otimes\Sigma_3 \tag{D.2}$$

$$e^{i\sqrt{2}\phi'_R}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\eta+i\psi)\otimes\Sigma_3\ ,\ e^{i\sqrt{2}\phi'_L}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{\eta}+i\tilde{\psi})\otimes\Sigma_3 \tag{D.3}$$

ここでcocycle factorとは上記の両辺を見比べると左辺がboson、右辺がfermionとなっているため、別のfermionicなoperatorと順序を入れ換える時に両者で交換するか反交換するか異なり矛盾するので、上記のようにΣ_3を右辺に付け、かつ$(-1)^F=-1$のoperatorにはあらかじめΣ_2を付与しておくことにしてその問題を解消する技法のことである。従って以下では$e^{in\sqrt{2}X_R}$のようなzeromode shift vertexをfermionizaitonしてξ,η,Σ_3で表すことにするならば、$((-1)^F,(-1)^n)=\{(+,+),(+,-),(-,+),(-,-)\}$に対してcocycle factor$\{1,\Sigma_3,\Sigma_2,\Sigma_1\}$を付与すればよい。この時、non-BPS D1-braneのCP factor$\{1,\sigma_2\}$はすでにこの中に取りこまれており以下で無視してよい。

では何故Type I SO(32) spinor solitonの時には[1] このようなcocycle factorを考えなくて良かったのだろうか。それは簡単で、この場合wilson lineのせいで$(-1)^F=1$のsectorでは周期的つまり$(-1)^n=1$となり、$(-1)^F=-1$のsectorでは反周期的$(-1)^n=1$となるので常に$(-1)^F(-1)^n=1$が成立ち、cocycle factorは可換となるからである。

さてtachyon condenseは、

$$\begin{aligned} V_T^{(0)} &= \frac{i}{\sqrt{2}}\psi_B(e^{i\frac{X_B}{\sqrt{2}}}-e^{-i\frac{X_B}{\sqrt{2}}})\otimes\Sigma_3 \\ &\propto \frac{i}{\sqrt{2}}\partial\phi_B\otimes\Sigma_1 \end{aligned} \tag{D.4}$$

[1] ここでTypeI SO(32)のbrane-antibrane systemにおけるcritical radiusは$R=\frac{1}{\sqrt{2}}$だが、今考えているnon-BPS D-braneの場合は$R=\sqrt{2}$であることに注意。

の marginal な vertex を用いて、次の wilson line で記述される。

$$\text{wilson line}: \ exp(i\Sigma_1 \otimes \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} \int dt \partial \phi_B) \tag{D.5}$$

後は、Type I $SO(32)$ spinor soliton の時と同様に spectral flow を見ればよい。$\alpha = 1$ まで tachyon condense した場合を考える。

まず、$\{1, \Sigma_1\}$ の sector は tachyon condense の影響を受けず、$(-1)^F(-1)^n = 1$ はそのままである。

一方、$\{\Sigma_2, \Sigma_3\}$ の sector は tachyon condense の影響で $(-1)^F(-1)^n = -1$ から、$(-1)^F(-1)^n = 1$ に変わる。

このことは、作用 $(-1)^F(-1)^n : \xi \to -\xi, \eta \to -\eta, \phi \to \phi + \sqrt{2}\pi, \phi' \to \phi' + \sqrt{2}\pi$ と spectral flow $|0>_{\alpha=1} = e^{\frac{i}{\sqrt{2}}\phi}|0>_{\alpha=0}$ からすぐ分かる。この時、Σ_2 sector にあった tachyon$(m^2 = -\frac{1}{2})$ は、spectral flow で次元が $\frac{1}{2}$ 上がり massless となることに注意。

以上をまとめると、$\alpha = 1$ まで tachyon condense した時には真の tachyon は存在せず、得られる spectrum は $(-1)^F(-1)^n = 1$ が 2 重に縮退している。

さて、次に (ϕ', ξ) の場を基本的とみる立場でこの spectrum の意味を考える。(ϕ', ξ) に対しても $(-1)^{F_{\phi'}}, (-1)^{n_{\phi'}}$ を定義すると、

$$(-1)^{F_{\phi'}}(-1)^{n_{\phi'}} : \xi \to -\xi, \eta \to -\eta, \phi \to \phi + \pi\sqrt{2}, \phi' \to \phi' + \pi\sqrt{2} \tag{D.6}$$

となり、$(-1)^{F'_\phi}(-1)^{n'_\phi} = (-1)^F(-1)^n$ が分かる。

さらに T-dual をとって ϕ'_D を定義し、その fermion number , winding number を F', w' とすると、$F_{\phi'} = F', n_{\phi'} = w'$ となる。従って spectrum は $(-1)^{F'}(-1)^{w'} = 1$ が 2 重に縮退している状況である。

また半径は、Type I $SO(32)$ spinor soliton の時と同様の議論で、

$$R = R_\phi = \frac{2}{R_{\phi'}} = 2R_{\phi'_D} \tag{D.7}$$

となる。

従って得られた状態は (ϕ', ξ) の立場で、半径が $\frac{R}{2}$ であって、spectrum は $(-1)^{F'}(-1)^{w'} = 1$ を満たすものが 2 重に縮退している状況である。これを半径が R として解釈するならば半周する場合には GSO projection が逆転することを意味し、つまり半径 R の円周に D0-brane,antiD0-brane が半周ずれて存在する状態であると分かる。

このようにして S^1 コンパクト化したときに、non-BPS D1-brane は tachyon condense によって D0-brane,antiD0-brane に変化することが分かった。

最後に orbifold projection I_4 が存在する場合を考える。orbifold における non-BPS D-brane では式 (7.92) にあるように $(-1)^F I_4 = 1$ という projection が存在していた。これを半径 $\sqrt{2}$ において tachyon condense して ϕ' の場に直せば brane-antibrane system の projection が得られるはずである。

まず、$(-1)^F I_4$ は次のように作用する。

$$\begin{aligned}(-1)^F I_4 \ : \ & e^{i\frac{1}{\sqrt{2}}X_B} \to e^{-i\frac{1}{\sqrt{2}}X_B} \ , \ \psi_B \to \psi_B \ , \ \xi_B \to \xi_B \\ & , \ \eta_B \to -\eta_B \ , \ \phi_B \to \phi_B \ , \ \phi'_B \to -\phi'_B + \sqrt{2}\pi\end{aligned} \tag{D.8}$$

また tachyon condense 後の真空 $e^{\frac{i\phi}{\sqrt{2}}}|0>_{\alpha=0}$ には $(-1)^F I_4$ は自明に作用するので次の関係式が分かる。

$$(-1)^F I_4 = (-1)^{F_{\phi'}} I_4^{\phi'} \tag{D.9}$$

従って brane-antibrane system では $(-1)^{F_{\phi'}} I_4^{\phi'} = 1$ の projection が存在し、式 (4.92) と比較すると twisted RR 電荷が異なる D0-brane と anti D0-brane が半周離れて 1 つずつ並んでいる状態と解釈すればよいことが分かる。このようにして orbifold の場合にも non-BPS D1-brane の tachyon condense で $D0 - \bar{D}0$ system が生成されることが分かった。

付 録E　D-braneのworld volumeが$spin$多様体ではない場合の取り扱い

ここでは、D-braneのworld volume Zが$spin$多様体ではない場合についてB-fieldの影響も考えながら説明する。但し、時空Xは$spin$多様体とし、またすべてここで扱う多様体は向き付け可能と仮定する。

E.1　topologicalに非自明なB-field

まず準備としてtopologicalに非自明なB-fieldの記述について扱う。物理的量はむしろその'field strength' $H \sim dB$である。$dH = 0$より、

$$H \in H^3(Z, \mathbf{Z}) \ \rightarrow \ H = dB + [H] \qquad (dB \in H^3(Z, \mathbf{R})) \tag{E.1}$$

と分解できる。$[H] \in H^3(Z, \mathbf{Z})$がtorsion部分であり、物理的エネルギーを担っていない。従って以下では最小のエネルギー(真空)を考えるので$dB = 0$としてよく、$[H]$のみ考慮すればよい。ここで次の完全系列(exact sequence)

$$0 \ \rightarrow \ \mathbf{Z} \ \rightarrow \ \mathbf{R} \ \rightarrow U(1) \ \rightarrow 0 \tag{E.2}$$

から得られるlong exact sequence

$$\rightarrow \ H^2(Z, \mathbf{R}) \ \rightarrow \ H^2(Z, \mathbf{U(1)}) \ \stackrel{\beta'}{\longrightarrow} \ H^3(Z, \mathbf{Z}) \ \rightarrow \ H^3(Z, \mathbf{R}) \ \rightarrow \tag{E.3}$$

に着目すると、$[H]$は$H^3(Z, \mathbf{R})$としては自明なので必ず$[H] = \beta'[B]$を満たす$[B] \in H^2(Z, \mathbf{U(1)})$が存在する[19][20][22]。これは物理的には、world sheet Σが

$$exp(i \int_{\Sigma} [B]) \in U(1) \tag{E.4}$$

という非自明なphaseをB場から受けることを意味する。

例えば、A_{N-1}型のALE空間$C^2/\mathbf{Z_N}$をorbifoldで記述する場合は、

$$exp(i \int_{2-cycle} [B]) = e^{\frac{2\pi i}{N}} \in U(1) \tag{E.5}$$

となるが、これは

$$H^3(C^2/\mathbf{Z_N}, \mathbf{R}) = 0 \tag{E.6}$$

$$H^3(C^2/\mathbf{Z_N}, \mathbf{Z}) = H_1(C^2/\mathbf{Z_N}, \mathbf{Z}) \sim \pi_1(C^2/\mathbf{Z_N}) = \mathbf{Z_N} \tag{E.7}$$

$$\tag{E.8}$$

から理解できる。

もう一つ例を挙げると、T^2 コンパクト化された TypeI 理論の分類がある。TypeIIB を Ω で twist して TypeI は構成されるが、このとき $\Omega : B \to -B$ と作用するので許されるのは

$$exp(i\int_{2-cycle}[B]) = \pm 1, \quad [B] \in H^2(X, \mathbf{Z_2}) \tag{E.9}$$

という自由度のみである。これは上の一般論で $U(1)$ を $\mathbf{Z_2}$ に代えたものであり、やはり torsion $[H] \in H^3(X, \mathbf{Z})$ の選び方の自由度と言える。さて 2 通り可能であるが、自明な場合には普通の TypeI $SO(32)$ 理論を与える。一方、非自明な B 場が入っている場合は without vector structure [18] と呼ばれる T^2 コンパクト化に相当し $Sp(n)$ のゲージ群が生じる。実際にこのような理論を作るには、[18] で議論されているようにもともとのゲージ群 $SO(32)/\mathbf{Z_2}$ から見ると自明な非可換 $\mathbf{Z_2}$-wilson line を与えてやればよい。当然、超対称性は普通の TypeI $SO(32)$ 理論と同じである。

もう一つ重要な例を挙げると、文献 [19] で議論されている D3-O3 system がある。これは TypeIIB 理論で非常に多くの D3-brane を orientifold 3-plane に重ねたものであり、時空は $AdS_5 \times RP^5$ となり、large N ゲージ理論に AdS/CFT 対応 [96] によって dual である。この場合には、O-plane の monodromy があるので

$$H^3(RP^5, \tilde{\mathbf{Z}}) = \mathbf{Z_2} \tag{E.10}$$

という twist された cohomology で B-field の torsion が分類される。TypeIIB 理論では NS,R の 2 種の B-field があり、それぞれに $\mathbf{Z_2}$ の torsion(discrete torsion) を導入できる。それらの入れ方により、ゲージ群が $(+,+) : SO(2N), (-,+) : Sp(N), (+,-) : SO(2N+1), (-,-) : Sp(N)$ となることが large N ゲージ理論との対応と S-duality の観点から [19] で主張されている。

E.2 world sheet global anomaly

次に、本題である fundamental string の global anomaly[22] について述べる。

一般に、D-brane Z を boundary とする string world sheet Σ を考えるとその amplitude は次のように計算される。

$$\mathcal{A} \sim \int [DX][D\psi] e^{-S_0(X,\psi)} e^{i\int_\Sigma B(X)} e^{i\oint_{\partial\Sigma} A(X)} \tag{E.11}$$

このとき、boundary $\partial\Sigma$ を Z のなかで一周させて (その経路を S^1 と書く) もとに戻すことを考える。world sheet の Majorana fermion による $\mathbf{Z_2}$-global anomaly は、次のように tangent bundle の Chern-Simons form のように振舞うと考えるのが自然であり、実際にそうなることは数学的に証明される。但し、以下 Majorana fermion の経路積分を $Pfaff(\not{D})$(Pfaffian) と書くことにする。

$$Pfaff(\not{D}) \quad \sim \quad TrPexp(\oint_{\partial\Sigma} \omega) \tag{E.12}$$

ここで ω は spin connection である。

つまり、$Paff(\not{D})$ は spin 'bundle' $S(Z)$ と見なすことができて、次のような monodromy を受ける。

$$Pfaff(\not{D}) \quad \to \quad Paff(\not{D})\ exp(i\pi \int_{\partial\Sigma\times S^1} w_2(Z)) \tag{E.13}$$

このように $Pfaff(\not{D})$ が $S(Z)$ と同一視される直感的理由は次の通りである。理論の背景に D9-brane を仮定し、その D9-brane と今考えている D-brane の間に伸びる open string の RR-sector の基底状態を考えると $S(Z)\otimes E$ の bundle と見なせる。但し E は D-brane 上のゲージ場であり、今はその効果を考えていない。D9-brane に付着している効果は自明になので結局、D-brane を端点とすることで $S(Z)$ の bundle が生じていることが分かるのである。

さてこの $S(Z)$ は見方を考えると Z の loop 空間 LZ 上の line bundle $\mathcal{L}_p$ と見なせて、その接続と曲率は、

$$A_p=\pi\int_{\partial\Sigma}w_2(Z),\quad c_1(\mathcal{L}_p)=\int_{\partial\Sigma}W_3(Z) \tag{E.14}$$

となる。例えば式 (E.13) の monodromy は LZ 上の 1-cycle S^1 に沿って、上記の接続 A_p によるホロノミー $exp(i\oint_{S^1}A_p)$ によって生じる。但し、$W_3(Z)=\beta w_2(Z)$ は次の完全系列から定義される。

$$0\ \to\ \mathbf{Z}\ \to\ \mathbf{Z}\ \to\mathbf{Z_2}\ \to 0 \tag{E.15}$$

より、

$$\to\ H^2(Z,\mathbf{Z})\ \xrightarrow{i}\ H^2(Z,\mathbf{Z_2})\ \xrightarrow{\beta}\ H^3(Z,\mathbf{Z})\ \to \tag{E.16}$$

大体のイメージとしては β は torsion に対する外微分のようなものである。

もし Z が $spin$ 多様体でないならば $S(Z)$ は bundle として振舞わず、$w_2(Z)\neq 0$ なので monodromy が生じてしまい物理量である string amplitude がよく定義されなくなる。

具体的にいうと、spin 'bundle' $S(Z)$ の変換関数を $g_{ij}:U_i\cup U_j\to U(1)$ とおき、2-cocycle $\phi_{ijk}\in H^2(Z,\mathbf{Z_2})$ を用いて

$$g_{ij}g_{jk}g_{ki}=\phi_{ijk} \tag{E.17}$$

と書いた時、Z が $spin$ 多様体である場合には $\phi_{ijk}=1$ が常に成立ち $S(Z)$ は bundle として振舞う。しかし、ϕ_{ijk} が非自明な場合は $w_2(Z)\in H^2(Z,\mathbf{Z_2})$ と書き Stieffel-Whitney class と呼び、もはや $S(Z)$ は bundle ではなくなる。このような理論では重力以外に相互作用がないならば fermion はうまく定義できない。

しかしながら string 理論ではさらに B 場や D-brane 上のゲージ場との結合があり、これらの影響でうまく anomaly を相殺できるかもしれない。そのことについて以下で見てゆく。

さてまず初めに、$spin^C$ 多様体について簡単に説明する。4 次元以下の多様体はすべてこの $spin^C$ 多様体であることが知られている。また 3 次元以下の多様体はすべて $spin$ 多様体であることが知られている。

$spin^C$ 多様体とは、$S(Z)$ は bundle ではないが $S(Z)\otimes\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}$ となる Z 上の line bundle $\mathcal{L}$ が存在する多様体のことである。$spin^C$ 多様体である必要十分条件は $W_3(Z)=0$ である。$W_3(Z)=\beta w_2(Z)=0\in H^3(Z,\mathbf{Z})$ とすると、完全系列 (E.16) から分かるように

$$\exists\sigma\in H^2(Z,\mathbf{Z}),\quad w_2(Z)=i(\sigma)\in H^2(Z,\mathbf{Z_2}) \tag{E.18}$$

となる。このとき $c_1(\mathcal{L})=\sigma$ で定義される $\mathcal{L}$ を用いて、$S(Z)\otimes\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}$ を構成できるのである。

そこでまず、このような性質をもつ $spin^C$ 多様体を world volume とする D-brane について考えたい。B 場を自明とするとゲージ bundle E のみ考えればよいが、そのとき D-brane に付着する open string は $E \otimes S(Z)$ の'bundle' の section と思われる。もし E が真の bundle のときは、$E \times S(Z)$ は bundle ではないが、E を $E \otimes \mathcal{L}^{\frac{1}{2}}$ に修正すればすべてあわせると bundle となり string amplitude にも global anomaly は生じない。またこのようにゲージ bindle E を $E \otimes \mathcal{L}^{\frac{1}{2}}$ に修正する方がよいことは、9 章でのべた定理 (9.69) の右辺に $e^{\frac{c_1}{2}} = e^{\frac{w_2(Z)}{2}}$ という項が存在することからも理解できる。以上より次の結論が得られた。

D-brane の world volume Z が $spin^C$ 多様体のときは、ゲージ場を U(1)bundle から $\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}$ だけ twist したものと考えるのが自然で、このとき D-brane は矛盾なく定義できる。

さてそれでは、Z が $spin^C$ 多様体でもない場合を考えよう。この場合は、B 場の効果 $[H]$ も考えることにする。$W_3(Z) \neq 0$ である。

string の world sheet の立場で D-brane が矛盾なく定義されるためには global anomaly が存在しないことが必要だが、それは前に少し触れた Z の loop 空間 LZ 上の line bundle としての見方を用いると次のように表現できる。すなわち string amplitude 式 (E.11) を LZ 上の line bundle $\mathcal{L}_S$ とすると、その global section がとれるすなわち first Chern class $c_1(\mathcal{L}_S)$ が 0 である。

$\mathcal{L}_S$ は $\mathcal{L}_S = \mathcal{L}_p \otimes \mathcal{L}_B \otimes \mathcal{L}_A$ と分解できる。但し、それぞれ Pfaffian,B-field,U(1)gauge-field の寄与を表す。$\mathcal{F} = B + F$ として B-field,U(1)gauge-field はゲージ不変性より一緒に扱うことにし、$H = d\mathcal{F}$ を定義する。このとき $\mathcal{L}_p$ と $\mathcal{L}_F = \mathcal{L}_B \otimes \mathcal{L}_A$ の接続と曲率は次のようになる。

$$\begin{aligned} A_p = \pi \int_{\partial\Sigma} w_2(Z), \quad c_1(\mathcal{L}_p) = \int_{\partial\Sigma} W_3(Z) \\ A_F = \int_{\partial\Sigma} \mathcal{F}, \quad c_1(\mathcal{L}_F) = \int_{\partial\Sigma} \frac{[H]}{2\pi} \end{aligned} \tag{E.19}$$

従って、global anomaly が存在しない条件は次のようになる。

$$\begin{aligned} c_1(\mathcal{L}_S) &= c_1(\mathcal{L}_p) + c_1(\mathcal{L}_F) \\ &= \int_{\partial\Sigma} (W_3(Z) + \frac{[H]}{2\pi}) = 0 \\ \rightarrow \qquad & W_3(Z) + \frac{[H]}{2\pi} = 0 \end{aligned} \tag{E.20}$$

また、$W_3(Z)$ が $\mathbf{Z_2}$ の torsion であることからこの条件は

$$W_3(Z) = \frac{[H]}{2\pi} \tag{E.21}$$

ともかける [22][19][20]。

逆にこの場合には、D-brane 上に world sheet Σ をとると次のような B-field が生じていることが分かる。

$$exp(i \int_{\Sigma} B) = (-1)^{\int_{\Sigma} w_2(Z)} \tag{E.22}$$

確かに、この Σ を Z の中で一周させると式 (E.13) と同じ monodromy が生じることが分かる。

以上をすべてまとめると結果は次のようになる。
(1) B-field$=0$ の時:world volume が $spin^C$ 多様体の D-brane のみ許される。
(2) B-field$\neq 0$ の時:式 (E.21) の条件を満たすような $spin^C$ 多様体ではない world volume を持つ D-brane のみ許される。

それでは、文献 [19] の例を見てみる。$AdS_5 \times RP^5$ の string 理論における RP^5 の cycle に巻きつく D-brane について考える。

まず、D3-brane について考える。非自明な k-cycle は $H_k(RP^5, \mathbf{Z}) \neq 0$ より、$k = 1, 3$ が存在する。まず、$k = 3$ のときは $w_2(RP^3) = 0$ より式 (E.21) の条件は $[H] = 0$ つまり B-field (NS or R) は自明である必要がある。従って、$SO(2N)$ 理論のみ D3-brane を RP^3 に巻きつけて、粒子ソリトンを作ることができる。これは $SO(2N)$ 理論に特有な $Pfaffian$ 粒子と呼ばれ $\mathbf{Z_2}$ 電荷を持つ。次に $k = 1$ の時は $w_2(RP^1) = 0$ であり、B-field は torsion があってもなくても D3-brane が巻きつく RP^1 では自明であるので常に存在できる。

さて次に D5-brane を考える。この場合は O-plane の monodromy を受けるので、$H_k(RP^5, \tilde{\mathbf{Z}}) \neq 0$ で分類され、$k = 2, 4$ のみ可能。まず $k = 4$ のときは $w_2(RP^4) = 0$ より、NS の B-field は自明ならば存在する。一般化して (p,q)5-brane は (p,q) B-field が自明ならば存在する。また $k = 2$ のときは特殊で 4D ゲージ理論の立場からみると domain wall となり、5-brane が B-field の電荷を担っているので discrete torsion がその domain wall を通過するとシフトされ、ゲージ群が変わる。

E.3 $\mathbf{CP^2}$ の world volume をもつ D-brane の電荷の量子化

最後に、world volume が $spin$ 多様体ではない例として $\mathbf{CP^2}$ の場合を考えてみる。$\mathbf{CP^2}$ は Ricci flat でないため string 理論のコンパクト化に用いると超対称性を破るのでそのように使うことが出来ないが、D-brane の world volume が $\mathbf{CP^2}$ となる場合は考えられる。例えば (i)Calabi-Yau 多様体の 4-cycle としての $\mathbf{CP^2}$ に巻きつく D-brane、(ii)flat な時空での不安定な D-brane として存在し、いずれ D0-brane に崩壊する状況、などが考えられる。

さて CP^2 は $spin$ 多様体ではないが $spin^C$ 多様体であり、$S(\mathbf{CP^2}) \otimes \mathcal{L}^{\frac{1}{2}}$ が bundle となるように $c_1(\mathcal{L}) = w_2(\mathbf{CP^2})$ を満たす $\mathcal{L}$ を選べる。このとき D-brane のゲージ場も $\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}$ だけシフトするので、電荷 (flux) の Dirac 量子化条件が次のように半整数だけずれる [22]。

$$\int_{[\sigma]} \frac{F}{2\pi} = \mathbf{Z} + \frac{1}{2} \tag{E.23}$$

但し、σ は $H_2(\mathbf{CP^2}, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$ の generator である。

この結果は、次に簡単に説明するように全く別の考察からも理解できる [21]。world volume が $\mathbf{CP^2}$ の D4-brane は TypeIIA の強結合で M-theory の M5-brane ともみなせる。M5-brane の上には self-dual な field strength を持つ 2-form field B^+ が存在することが知られている。従って $M5 = \Sigma \times \mathbf{CP^2}$ と 2 次元リーマン面 Σ にコンパクト化すると、

$$B^+ = \omega \wedge \phi, \qquad (*\omega = \omega, \ \int_{[\sigma]} \omega = 1, \ \int_{\mathbf{CP^2}} \omega \wedge \omega = 1)$$

$$\to *d\phi = d\phi \tag{E.24}$$

と chiral な scalar ϕ の理論となる。但し、$\omega \in H^2(\mathbf{CP^2}, \mathbf{Z})$ は $\mathbf{CP^2}$ の self-dual 2-form である。上記の ω の intersection の値から、chiral scalar の半径は $R = 1$ である[1] ことが分かり、free fermion で記述できる。この fermion $\psi, \bar{\psi}$ も chiral(Weyl) であり

$$\begin{aligned} \psi = e^{i\phi}, \quad \bar{\psi} = e^{-i\phi}, \quad &: \psi\bar{\psi} := i\partial\phi \\ \to \ q = \frac{1}{2\pi}\int_{[\sigma]\times S^1} \omega \wedge d\phi = i\oint \partial\phi &= \oint \psi\bar{\psi} \end{aligned} \tag{E.25}$$

のように電荷 q が定義できる。この電荷は M-theory の場 B^+ に対するものであるが、TypeIIA で見ると D4-brane 上のゲージ場に対するものと見なせる。従って、式 (E.23) から $q \in \mathbf{Z} + \frac{1}{2}$ が期待されるが、実際に fermion zeromode によって基底状態は $q = \pm\frac{1}{2}$ となり、massive mode を入れると $q \in \mathbf{Z} + \frac{1}{2}$ となって一致する。

[1] ここで、ϕ の kinetic term の normalization は $S = \frac{1}{8\pi}\int_\Sigma (dx)^2(\partial\phi)^2$ とした。chiral scalar の半径は $\int_\Sigma B^+ \ \to \ \int_\Sigma B^+ + 2\pi$ の周期から読み取れる。

関連図書

[1] J. Polchinsky, "String TheoryI II, "Cambridge University Press (1998).

[2] D. Friedan, E. Martinec, and S. Shenker, "Conformal Invariance,Supersymmetry and String theory, "Nucl. Phys. **B271** (1986) 93.

[3] W. Fishler and L. Susskind, "Dilaton Tadpoles, String Condensates and Scaler Invariance I,II, "Phys. Lett. **B171** (1986) 383, Phys. Lett. **B173** (1986) 262.

[4] J. Polchinsky, "TASI Lectures on D-branes" , hep-th/9611050.

[5] J. Dai, R. Leigh, and J. Polchinsky, "New Connection between String Theories, "Mod. Phys. Lett **A4** (1989) 2073.

[6] J. Polchinsky, "Dirichlet branes and Ramond-Ramond charges, " Phys.Rev.Lett. 75 (1995) 4724-4727, hep-th/9510017.

[7] R. G. Leigh, "Dirac-Born-Infeld action from Dirichlet sigma model, " Mod. Phys. Lett **A4** (1989) 2767; C. G. Callan, C. Lovelace, C. R. Nappi and S. A. Yost, "String Loop Corrections to Beta Functions, "Nucl. Phys. **B288** (1987) 525.

[8] T. Banks and L. Susskind, "Brane-Antibrane Forces, " hep-th/9511194

[9] M. Srednicki, "IIB or not IIB , " JHEP 9808 (1998) 005, hep-th/9807138.

[10] N. Seiberg and E. Witten, "Electric-Magnetic Duality, Monopole Condensation, And Confinement In N=2 Supersymmetric Yang-Mills Theory, " Nucl.Phys. **B426** (1994) 19, hep-th/9407087; N. Seiberg and E. Witten, "Monopoles, Duality, And Chiral Symmetry Breaking In N=2 Supersymmetric QCD, " Nucl.Phys. **B431** (1994) 484, hep-th/9408099.

[11] E. Witten, "String theory dynamics in various dimensions, " Nucl. Phys. **B443**(1995)85.

[12] J. Polchinsky and E. Witten, "Evidence for Heterotic-TypeI String Duality, " Nucl.Phys. **B460** (1996) 525, hep-th/9510169.

[13] E. Witten, "Small instantons in string theory, " Nucl.Phys. **B460** (1996) 541, hep-th/9511030; M. R. Douglas, "Branes within Branes," hep-th/9512077.

[14] E. Witten, "Five-branes and M-theory On An Orbifold, " Nucl.Phys. **B463** (1996) 383, hep-th/9512219; K. Dasgupta and S. Mukhi, "Orbifolds of M-thory, " Nucl.Phys. **B465** (1996) 399, hep-th/9512196.

[15] P. Hořava and E. Witten, "Heterotic and Type I string dynamics from eleven dimensions, " Nucl.Phys. **B460** (1996) 506, hep-th/9510209.

[16] N. Seiberg and E. Witten, "Gauge Dynamics and Compactification to Three Dimensions" hep-th/9607163.

[17] E. Witten, "Solutions of Four-dimensional Field Theories via M theory, " Nucl.Phys. **B500** (1997) 3, hep-th/9703166.

[18] E. Witten, "Toroidal Compactification Without Vector Structure, " JHEP 9802 (1998) 006, hep-th/9712028.

[19] E. Witten, "Baryons and Branes In Anti-de Sitter Space, " JHEP 9807 (1998) 006, hep-th/9805112.

[20] E. Witten, "D-branes and K-theory, " JHEP 9812 (1998) 019, hep-th/9810188.

[21] E. Witten, "On Flux Quantization in M-theory and The Effective Action, " J.Geom.Phys. **22** (1997) 1, hep-th/9609122; E. Witten, "Duality Relations Among Topological Effects In String Theory, " hep-th/9912086.

[22] D. S. Freed and E. Witten, "Anomalies in String Theory with D-branes, " hep-th/9907189.

[23] C. M. Hull and P. K. Townsend, "Unity of superstring dualities," Nucl. Phys. **B438** (1995) 109; J. H. Schwartz, "An SL(2,Z) Multiplet of Type IIB Superstrings, " Phys. Lett. **B360** (1995) 13, hep-th/9508143.

[24] C. Vafa, "Evidence for F-theory, " Nucl.Phys. **B469** (1996) 403, hep-th/9602022.

[25] I. Pesando, "On the Effective Potential of the Dp-$\bar{D}p$ system in type II theories, " Mod.Phys.Lett. **A14** (1999) 1545, hep-th/9902181.

[26] J. Morales, C. Scrucca and M. Serone, "Anomalous couplings for D-branes and O-planes, " Nucl. Phys. **B552** (1999) 291, hep-th/9812071.

[27] M. Billo, B. Craps and F. Roose, "Ramond-Ramond couplings of non-BPS D-branes, " JHEP 9906 (1999) 033, hep-th/9905157.

[28] C. Kennedy and A. Wilkins, "Ramond-Ramond couplings on Brane-Antibrane Systems, " Phys.Lett. **B464** (1999) 206, hep-th/9905195.

[29] D. Kutasov, "Orbifolds and Solitons, " Phys.Lett. B383 (1996) 48, hep-th/9512145.

[30] P. Yi, "Membranes from Five-Branes and Fundarmental Strings from Dp Branes, " Nucl. Phys. **B550** (1999) 214, hep-th/9901159.

[31] O. Bergman, M. R. Gaberdiel and G. Lifschytz, "Branes,Orientifolds and Creation of Elementary Strings, " Nucl.Phys.**B509** (1998) 194, hep-th/9705130; O. Bergman, M. R. Gaberdiel and G. Lifschytz, "String Creation and Heterotic-TypeI' Duality, " Nucl.Phys. **B524** (1998) 524, hep-th/9711098.

[32] O. Bergman and M. R. Gaberdiel, "A Non-Supersymmetric Open String Theory and S-duality, " Nucl.Phys. **B499** (1997) 183, hep-th/9701137.

[33] O. Bergman and M. R. Gaberdiel, "Stable non-BPS D-particles, " Phys. Lett. **B441** (1998) 133, hep-th/9806155.

[34] O. Bergman and M. R. Gaberdiel, "Non-BPS States in Heterotic-TypeIIA Duality, " JHEP 9903 (1999) 013, hep-th/9901014.

[35] O. Bergman and M. R. Gaberdiel, "Dualities of Type 0 Strings," JHEP 9907 (1999) 022, hep-th/9906055.

[36] M. R. Gaberdiel and B. Stefański,jr, "Dirichlet Branes on Orbifolds, " hep-th/9910109.

[37] A. Sen, "Duality and Orbifolds, " Nucl.Phys. **B474** (1996) 361, hep-th/9604070.

[38] A. Sen, "F-theory and Orientifolds, " Nucl.Phys. **B475** (1996) 562, hep-th/9605150.

[39] A. Sen, "Strong Coupling Dynamics of Branes from M-theory, " JHEP 9710 (1997) 002, hep-th/9708002.

[40] A. Sen, "Stable Non-BPS States in String Theory , " JHEP 9806 (1998) 007, hep-th/9803194.

[41] A. Sen, "Stable Non-BPS Bound States of BPS D-branes, " JHEP 9808 (1998) 010, hep-th/9805019.

[42] A. Sen, "Tachyon Condensation on the Brane Antibrane System, " JHEP 9808 (1998) 012, hep-th/9805170.

[43] A. Sen, "SO(32) Spinors of TypeI and Other Solitons on Brane-Antibrane Pair, " JHEP 9809 (1998) 023, hep-th/9808141.

[44] A. Sen, "TypeI D-particle and its Interactions, " JHEP 9810 (1998) 021, hep-th/9809111.

[45] A. Sen, "BPS D-branes on Non-supersymmetric Cycles, " JHEP 9812 (1998) 021, hep-th/9812031.

[46] A. Sen, "Descent Relations Among Bosonic D-branes," Int.J.Mod.Phys. **A14** (1999) 4061, hep-th/9902105.

[47] A. Sen, "Non-BPS States and Branes in String Theory, " hep-th/9904207.

[48] J. Majumder and A. Sen, "'Blowing up'D-branes on Non-supersymmetric Cycles, " JHEP 9909 (1999) 004, hep-th/9906109.

[49] M. R. Gaberdiel and A. Sen, "Non-supersymmetric D-Brane Configurations with Bose-Fermi Degenerate Open String Spectrum," JHEP 9911 (1999) 00, hep-th/9908060.

[50] A. Sen and B. Zwiebach, "Stable Non-BPS States in F-theory, " hep-th/9907164.

[51] A. Sen, "Supersymmetric World-volume Action for Non-BPS D-branes , " JHEP 9910 (1999) 008, hep-th/9909062.

[52] A. Sen, "Universality of the Tachyon Potential, " hep-th/9911116.

[53] A. Sen and B.Zwiebach, "Tachyon Condensation in String Field Theory, " hep-th/9912249.

[54] E. Witten, "Noncommutative Geometry And String Field Theory , " Nucl. Phys. **B268** (1986) 253.

[55] E. Witten, "Interacting Field Theory Of Open Superstrings, " Nucl. Phys. **B276** (1986) 291.

[56] M. Frau, L. Gallot, A. Lerda and P. Strigazzi, "Stable Non-BPS D-branes in Type I String Theory, " hep-th/9903123.

[57] B. Körs, "D-brane Spectra of Nonsupersymmetric,Asymmeric Orbifolds and Nonperturbative Contributions to the Cosmological Constant, " JHEP 9911 (1999) 028, hep-th/9907007.

[58] P. Di Vecchia, M. Frau, A. Lerda, I. Pesando, R. Russo and S. Sciuto, "Classical p-branes from Boundary State, " Nucl. Phys. **B507** (1997) 259, het-th/9707068.

[59] M. B. Green, "Point-like states for typeIIB superstrings, "Phys. Lett **B329** (1994) 435.

[60] M. B. Green and M. Gutperle, "Light-cone Supersymmetry and D-branes," Nucl.Phys. **B476** (1996) 484, hep-th/9604091.

[61] C. G. Callan, C. Lovelace, C. R. Nappi and S. A. Yost, "Loop Corrections to Superstring Equations of Motion, " Nucl. Phys. **B308** (1988) 221.

[62] T. Eguchi and A. J. Hanson, "Asymptotically Flat Self-Dual Solutions to Euclidean Gravity, " Phys. Lett. **B74** (1978) 249

[63] M. R. Douglas and G. Moore, "D-branes,Quivers,and ALE Instantons, " hep-th/9603167.

[64] C. V. Johnson and R. C. Myers, "Aspects of Type IIB Theory on ALE Spaces, " Phys. Rev. **D55** (1997) 6382, hep-th/9610140.

[65] U. H. Danielsson, G. Ferreti and I. R. Klebanov, "Creation of fundermental strings by crossing D-branes, " Phys. Rev .Lett. 79 (1997) 1984, hep-th/9705084.

[66] C. P. Bachas,M. R. Douglas and M. B. Green, "Anomalous Creation of Branes, " JHEP 9707 (1997) 002, hep-th/9705074.

[67] T. Takayanagi, "String Creation and Monodromy from Fractional D-branes on ALE spaces, " hep-th/9912157.

[68] D. -E. Diaconescu, M. R.Douglas and J. Gomis, "Fractional Branes and Wrapped Branes, " JHEP 9802 (1998) 013, hep-th/9712230.

[69] D. -E. Diaconescu and J. Gomis, "Fractional Branes and Boundary States in Orbifold Theories, " hep-th/9906242.

[70] A. Recknagel and V. Schomerus, "D-branes in Gepner models," Nucl.Phys. **B531** (1998) 185, hep-th/9712186; M. Gutperle and Y. Satoh, "D0-brane in Gepner models and Supersymmetry, " Nucl.Phys. **B543** (1999) 73, hep-th/9808080.

[71] I. Brunner and M. R. Douglas, "D-branes on the Quintic, " hep-th/9906200; M. R. Douglas and B. Fiol, "D-branes and Discrete Torsion II, " hep-th/9903031.

[72] S. Kachru and J. McGreevy, "Supersymmetric Three-cycles and (Super)symmetry Breaking, " hep-th/9908135.

[73] I. R. Klebanov and N. A. Nekrasov, "Gravity Duals of Fractional Branes and Logarithmic RG Flow, " hep-th/9911096.

[74] P. S. Aspinwall, "Resolution of Orbifold Singularities in String Theory, " hep-th/9403123; P. S. Aspinwall, "Enhanced gauge symmetries and K3 surfaces, " Phys. Lett. **B357** (1995) 329, hep-th/9507012.

[75] K. Becker, M. Becker and A. Strominger, "Fivebranes,Membranes and Non-pertubative String Theory, " Nucl. Phys. **B456** (1995) 130, hep-th/9507158.

[76] G. T. Horowitz and A. Strominger, "Black String and p-branes, " Nucl. Phys. **B360** (1991) 197.

[77] S. Sugimoto, "Anomaly Cancellations in Type I $D9 - \bar{D}9$ System and the Usp(32) String Theory, " Prog. Theor. Phys. **102** (1999) 685, hep-th/9905159.

[78] J. Kluson, "Remark about non-BPS brane in IIA theory, " hep-th/9909194.

[79] M. B. Green and M. Gutperle, "Comments on three-branes, " Phys.Lett. **B377** (1996) 28, hep-th/9602077; A. A Tseytlin, "Self-duality of Born-Infeld action and Dirichlet 3-brane of type □ B superstring theory, " Nucl. Phys. **B469** (1996) 51, hep-th/9602064.

[80] M. Atiyah, "Michael Atiyah Collected Works, " Oxford Science Publications.

[81] P. Horava, "Type IIA D-branes,K-theory,and Matrix Theory, " Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1999) 1373, hep-th/9812135.

[82] T. Eguchi, P. B. Gilkey and A. J. Hanson , "Gravitation, Gauge theories and Differential geometry, "Phys. Rep. **66** (1980) 213.

[83] M. Green, J. A. Harvey and G. Moore, "I-Brane Inflow and Anomalous Couplings on D-Branes, " Class. Quant. Grav. **14** (1997) 47, hep-th/9605033.

[84] R. Minasian and G. Moore, "K-theory and Ramond-Ramond charge, " JHEP 9711 (1997) 002, hep-th/9710230.

[85] Y-K. E. Cheung and Z. Yin, "Anomalies, Branes,and Currents," Nucl. Phys. **B517** (1998) 69, hep-th/9710206.

[86] S. Gukov, "K-theory, Reality, and Orientifolds," hep-th/9901042.

[87] K. Hori, "D-Branes, T-Duality, and Index Theory, " hep-th/9902102.

[88] O. Bergman, E. G. Gimon and P. Hořava, "Brane Transfer Operations and T-duality of Non-BPS States, " JHEP 9904 (1999) 010, hep-th/9902160

[89] K. Olsen and R. J. Szabo, "Brane Decent Relations in K-theory, " hep-th/9904153.

[90] K. Olsen and R. J. Szabo, "Constructing D-branes from K-theory, " hep-th/9907140.

[91] J. A. Harvey and G. Moore, "On the algebras of BPS states, " hep-th/9609017.

[92] Z. Guralnik and S. Ramgoolam, "Trons and D-brane bound states," Nucl. Phys. **B499** (1997) 241 hep-th/9702099.

[93] E. Gava, K. S. Narain and M. H. Sarmadi, "On the Bound States of p- and (p+2)-Branes, " Nucl. Phys. **B504** (1997) 214, hep-th/9704006.

[94] O. DeWolfe, T. Hauer, A. Iqbal and B. Zwiebach, "Uncovering the Symmetries on [p,q]7-branes: Beyond the Kodaira Classification, " hep-th/9812028;O. DeWolfe, T. Hauer, A. Iqbal and B. Zwiebach, "Uncovering Infinite Symmetries on [p,q]7-branes: Kac-Moody Algebras and Beyond, " hep-th/9812209

[95] Y. Matsuo and K. Okuyama, "BPS Condition of String Junction from M-theory, " Phys. Lett. **B426** (1998) 294, hep-th/9712070; M. Krogh and S. Lee, "String Network from M-theory, " Nucl. Phys. **B516** (1998) 241, hep-th/9712050.

[96] J. M. Maldacena, "The Large N Limit of Superconformal Field Theories and Supergravity, " hep-th/9711200, Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1998)231

[97] I. R. Klebanov and A. A. Tseytlin, "D-branes and Dual Gauge Theories in Type0 Strings, " Nucl. Phys. **B546** (1999) 155, hep-th/9811035; I. R. Klebanov and A. A. Tseytlin, "A Non-supersymmetric Large N CFT from Type0 String Theory, " JHEP 9903 (1999) 015, hep-th/9901101.

[98] A. Armoni and B. Kol, "Non-Supersymmetric Large N Gauge Theories from Type 0 Brane Configurations, " JHEP 9907 (1999) 011, hep-th/9906081.