

修士論文

トールラス上のDブレーンの
結合系と境界状態

東北大学大学院理学研究科
物理学専攻

手島芳朗

平成 21 年

目次

第 1 章	序章	5
第 2 章	トーラスコンパクト化	7
2.1	場の理論におけるトーラスコンパクト化	7
2.2	弦理論のトーラスコンパクト化	8
2.3	T-双対性	9
2.4	開弦の T-双対性と D ブレーン	10
第 3 章	低エネルギー有効理論	13
3.1	D ブレーンの低エネルギー有効作用	13
3.2	超弦理論と超対称 Yang-Mills 理論	14
3.3	非自明束としての D ブレーンと結合状態	15
第 4 章	Nahm 変換	19
4.1	Atiyah-Singer の family 指数定理	19
4.2	2 次元 Nahm 変換	20
4.3	4 次元 Nahm 変換	22
第 5 章	平坦な時空での境界状態	25
5.1	境界状態	25
5.2	ゴーストの境界状態	26
5.3	経路積分からの導出	27
5.4	定数背景場がある時の境界状態	30
5.5	D ブレーンに対応する境界状態	31
第 6 章	トーラス上の境界状態	33
6.1	Narain 格子	33
6.2	コサイクル因子	38
6.3	背景ゲージ場がある時の境界状態	40
6.4	トーラスに巻きついた D ブレーン	42
6.5	境界状態の計算	42
第 7 章	Nahm 変換と境界状態	47
7.1	2 方向の T-双対変換	47
7.2	1 方向の T-双対性	49
第 8 章	まとめと考察	51

付録 A 共形場理論	55
A.1 共形対称性	55
A.2 Virasoro 代数	57
A.3 モード展開	58
A.4 頂点演算子	59
A.5 bc CFT	59
A.6 弦の作用	61
付録 B 散乱振幅	63
B.1 S 行列	63
B.2 球面の 3 つの tachyon 振幅	63
B.3 円筒の分配関数	64
付録 C Atiyah-Singer の指数定理	67
付録 D 両方向に複数回巻きついた D ブレーン	69
付録 E 行列模型における T -双対性	71
E.1 円周上の 0 ブレーン	71
E.2 d 次元トーラス上の p ブレーン	73
E.3 束と D ブレーン	73
E.3.1 T^2 上の $D0$ ブレーン	74
E.4 低次元 D ブレーンの高次元ブレーン電荷	75
参考文献	77

第1章 序章

超弦理論は現在、重力まで含めた素粒子の統一理論の候補として広く研究されている。その最も大きな理由と言えるのが、超弦理論が重力の量子化に最も成功している理論であるということであろう。リーマン幾何学によって時空を記述する一般相対論はその理論的美しさや数々の観測的証拠から、古典的にはもはや疑いの余地が無いが、量子化をしようとしたときに繰り込みにより高エネルギーの発散が取り除けず、無矛盾な理論が作れないことが大きな問題である。弦理論では閉じた弦（閉弦）の伝搬が時空の揺らぎ、即ち重力の伝搬と一致し、低エネルギー極限では一般相対論と一致する。素粒子を”点”ではなく1次元の広がりを持った”弦”として扱うため、発散は回避されると信じられている。また、端点を持った開いた弦（開弦）が低エネルギー極限でゲージ場と一致し、超対称性によりフェルミオンも導入されているため、統一理論としての材料は揃っている。

しかし、超弦理論はその複雑さから、全容解明にはまだかなりの時間を要すると思われる。実際、現状では摂動的な定式化しか成功していない。弦理論の非摂動的な定式化のために重要だと思われることは、一般相対論におけるリーマン幾何学のような、弦理論の背景にある幾何学を発見することである。そのような幾何学があるとすれば、少なくとも弦理論の様々な性質が網羅されている必要がある。

そのような幾何学に網羅されるべき性質の一つに、T-双対性がある。T-双対性とは、ある方向を半径 R にトーラスコンパクト化した理論と、 α'/R にコンパクト化した理論の間の双対性である。この双対性は、閉弦のスペクトルが R の逆数に比例するコンパクト方向の運動量の二乗と、 R に比例する弦の巻きつきによる張力からくるエネルギーの二乗（と弦の振動）の和で表されていることにより、 R を α'/R にするとちょうど運動量と巻きつき数の役割が入れ替わった形で元の理論に戻るにより起こる。弦の長さが重要な役割を果たしているため、通常の場合の理論では起こり得ない、弦理論特有の性質である。

Dブレーンも T-双対性と深い関係にある。Dブレーンとは開弦の端点が固定された超曲面のことであるが、開弦に T-双対変換を施すと、弦の端点の Neumann 境界条件と Dirichlet 境界条件が入れ替わり、 $p+1$ 次元に広がった Dブレーン (Dp ブレーン) は T-双対空間で $D(p\pm 1)$ ブレーンに変わる。また、Dブレーン上の有効理論はゲージ理論であり、ゲージ場のフラックスは Dブレーンの結合状態として表すことができることが知られている。

弦理論のレベルで Dブレーンの T-双対性を議論できる方法として、境界状態を用いた方法がある [8][9]。円筒の分配関数を計算する際、通常は開弦の 1ループとして計算するが、時間と空間を入れ替えると、ある時間に閉弦が生成され、有限時間伝搬した後、消滅するように見える [3]。この弦の生成、消滅を弦の境界条件に対応した境界状態で表すことができる。トーラス上の境界状態を導入し、Narain の手法 [13] に従い、群 $O(d, d, \mathbb{R})$ による変換を使って T-双対性を解析することができる。

低エネルギー有効理論のレベルで T-双対性を扱う方法もある。開弦の低エネルギー有効理論である Dブレーン上のゲージ理論のレベルで T-双対性を扱うものとして、Nahm 変換等が

ある [14][19]. Nahm 変換は, Atiyah-Singer のファミリー指数定理を使い, プロジェクティブモジュールと呼ばれる方法で 4 次元トラス上の (反) 自己双対なゲージ場と双対 4 次元トラス上の (反) 自己双対なゲージ理論の関係を与える. 元々は 4 次元のインスタントンを議論するのに用いられる方法であるため, D4-D0 プレーンの結合系の解析にも使える. また, D プレーンの結合状態の解析に使う場合は $2d$ 次元に拡張することもできる.

また, 閉弦の低エネルギー有効理論のレベルで T-双対性を扱うものとして, Buscher 則もある.

この様に T-双対性には様々な記述法があるが, それぞれの相互関係は必ずしも明らかではない. 特に, Nahm 変換は 4 次元以外ではあまり研究されていない. しかし, 弦理論のより深い理解のためにはそれらを包括的に理解する必要がある.

本修士論文では, 特に 2 次元トラス上の D2-D0 プレーンの結合系を用いて, 境界状態を用いた T-双対性と Nahm 変換を二次元トラスに拡張したものの関係を議論する.

構成

本修士論文は以下のように構成する.

2 章ではトラスコンパクト化の基礎的な部分を扱う [1]. いくつかの座標を周期的にすることでトラスを作り, その時に現れる弦理論特有の性質である T-双対性を導出し, また, それに付随して現れる D プレーンとその物理的意味についても議論する.

3 章では弦理論の低エネルギー有効理論について考える [1][11]. 特に, 超弦理論の D プレーン上の有効理論が超対称 Yang-Mills 理論になっていることを示し, D プレーン上のフラックスが D プレーンの結合状態として考えられることを見る.

4 章では, 有効理論に置ける T-双対変換である Nahm 変換を扱う [5]. Nahm 変換を 2 次元の場合に拡張し, 具体的にゲージ場のランク N , 第一 Chern 数 k の 2 次元トラス上で Nahm 変換を行うと, 双対トラスで符号を除いて N と k が入れ替わることを見る.

5,6 章では, 開弦 (ゲージ場) と閉弦 (重力) の T-双対性を同時に見ることのできるものとして, 境界状態について議論する [3][6][7][8][10]. 5 章で平坦で開いた時空での境界状態を導入し, それが開弦の 1-ループの計算と一致すること, また, フラックスがある場合の境界状態から DBI 作用を導出できることを見る. 6 章ではトラス上の境界状態を作る.

7 章では 4 章の Nahm 変換と 6 章で境界状態を用いた T-双対変換を比べ, 無矛盾であることを確認する.

第2章 トーラスコンパクト化

2.1 場の理論におけるトーラスコンパクト化

弦理論のトーラスコンパクト化を見る前に、通常の場合の理論のコンパクト化を見る。全体の次元を添字 $M, N, \dots = 0, \dots, D-1$ 、コンパクト化しない方向を $\mu, \nu, \dots = 0, \dots, d-1$ 、コンパクト化する方向を $m, n, \dots = d \dots D-1$ と書く。

まず、簡単のために1つの方向のみを周期的にする。 $D = d+1$ として、座標 x^d に、周期的条件

$$x^d \cong x^d + 2\pi R_d \quad (2.1)$$

を課すことでコンパクト化する。 D 次元計量 G_{MN}^D を

$$ds^2 = G_{MN}^D dx^M dx^N = G_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + G_{dd} (dx^d + A_\mu dx^\mu)^2 \quad (2.2)$$

とにおいて、 d 次元計量 $G_{\mu\nu}$ 、ベクトル A_μ 、スカラー G_{dd} を定義する。この時、 $G_{\mu\nu}^D \neq G_{\mu\nu}$ であることに注意。また、 $G_{\mu\nu}, A_\mu, G_{dd}$ はコンパクト化されていない座標 x^μ にものみ依存するとする。すると、

$$x'^d = x^d + \lambda(x^\mu) \quad (2.3)$$

の座標変換のもと、

$$A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \lambda \quad (2.4)$$

と変換するため、これはまさにゲージ変換である。この様に、ある方向をコンパクト化することで高次元の座標変換の1部としてゲージ変換が現れることを Kaluza-Klein 機構と呼ぶ。

$G_{dd} = 1$ とにおいて、 D 次元の零質量スカラー粒子 ϕ を考える。 x^d 方向が半径 R_d の S^1 にコンパクト化されているため、運動量が量子化されて

$$\phi(x^M) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_n(x^\mu) \exp \left[in \frac{x^d}{R_d} \right] \quad (2.5)$$

と展開できる。すると、運動方程式 $\partial^M \partial_M \phi = 0$ は、 μ 方向と d 方向に分けて、

$$\partial^\mu \partial_\mu \phi_n(x^\mu) = -\partial_d^2 \phi_n(x^\mu) = \frac{n^2}{R_d^2} \phi_n(x^\mu), \quad n \in \mathbb{Z} \quad (2.6)$$

と表される。これはつまり、 $d+1$ 次元の零質量スカラー場 ϕ が d 次元での二乗質量

$$m^2 = \frac{n^2}{R_d^2}, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (2.7)$$

を持つ粒子に見えるということである。この様な、トーラスコンパクト化したときに現れる等間隔の質量を持った粒子群を Kaluza-Klein タワーと呼ぶ。また、(2.4) のゲージ場に対応する電荷は d 方向の運動量 $p^d = n/R_d$ である。

2.2 弦理論のトーラスコンパクト化

今度は、弦理論に置いて d 方向を S^1 コンパクト化する¹:

$$X^d \cong X^d + 2\pi R_d. \quad (2.8)$$

G_{dd} は 1 とする. 場の理論と同じように、 x^d 方向の重心運動量 k^d が量子化される:

$$k^d = \frac{n}{R_d}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (2.9)$$

また、弦理論特有の性質として、 X^d 方向に巻きついた閉弦も許される:

$$X^d(\sigma + 2\pi) = X^d(\sigma) + 2\pi R_d w, \quad w \in \mathbb{Z}: \text{巻きつき数}, \quad (2.10)$$

より具体的にコンパクト化による変更点を見る. 弦のモード展開² を、

$$\partial X^d(z) = -i \left(\frac{\alpha'}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_m}{z^{m+1}}, \quad \bar{\partial} X^d(\bar{z}) = -i \left(\frac{\alpha'}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_m}{\bar{z}^{m+1}} \quad (2.11)$$

とすると、巻きつき数や運動量は、

$$\begin{aligned} 2\pi R_d w &= \oint (dz \partial X + d\bar{z} \bar{\partial} X) = 2\pi \left(\frac{1}{\alpha'} \right)^{\frac{1}{2}} (\alpha_0 - \tilde{\alpha}_0), \\ p^d &= \left(\frac{1}{2\pi\alpha'} \right) \oint (dz \partial X - d\bar{z} \bar{\partial} X) = (2\alpha')^{-\frac{1}{2}} (\alpha_0 + \tilde{\alpha}_0) \end{aligned} \quad (2.12)$$

と表される. したがって、弦のゼロモードは

$$\begin{aligned} p_L &\equiv \left(\frac{2}{\alpha'} \right) \alpha_0 = \frac{n}{R_d} + \frac{w R_d}{\alpha'}, \\ p_R &\equiv \left(\frac{2}{\alpha'} \right) \tilde{\alpha}_0 = \frac{n}{R_d} - \frac{w R_d}{\alpha'} \end{aligned} \quad (2.13)$$

となり、Virasoro 演算子も

$$L_0 = \frac{\alpha' p_L^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \alpha_n, \quad \tilde{L}_0 = \frac{\alpha' p_R^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_{-n} \tilde{\alpha}_n \quad (2.14)$$

と書き換えられる. 非コンパクトな場合は $\alpha_0 = \tilde{\alpha}_0 = p(\alpha'/2)^{1/2}$ であったが、新たな自由度 w のために、 p_L, p_R に分けて書かなければならない.

頂点演算子

(2.13) のように、ゼロモードを p_L と p_R に分けて書けるので、それに対応して重心座標 x も

$$[x_L, p_L] = i, \quad [x_R, p_R] = i \quad (2.15)$$

¹ X^M は埋め込み座標、 (τ, σ) は世界面上の座標 (付録 A 参照).

² 付録 A 参照.

となるように分けて書く. そうすると,

$$\begin{aligned}
X^d(z, \bar{z}) &= X_L^d(z) + X_R^d(\bar{z}), \\
X_L^d(z) &= x_L^d - i\frac{\alpha'}{2}p_L^d \ln z + \left(\frac{\alpha'}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{m \neq 0} \frac{\alpha_m^d}{mz^m}, \\
X_R^d(\bar{z}) &= x_R^d - i\frac{\alpha'}{2}p_R^d \ln \bar{z} + \left(\frac{\alpha'}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{m \neq 0} \frac{\tilde{\alpha}_m^d}{m\bar{z}^m}
\end{aligned} \tag{2.16}$$

のように X を正則部分と反正則部分に完全に分けることができる. これらの OPE は

$$\begin{aligned}
X_L(z_1)X_L(z_2) &\sim -\frac{\alpha'}{2} \ln z_{12}, & X_R(\bar{z}_1)X_R(\bar{z}_2) &\sim -\frac{\alpha'}{2} \ln \bar{z}_{12}, \\
X_L(z_1)X_R(\bar{z}_2) &\sim 0
\end{aligned} \tag{2.17}$$

であるが, 一価性に関して注意が必要である. 例えば, $|0; k_L, k_R\rangle$ に対応する頂点演算子は,

$$\mathcal{V}_{k_L k_R}(z, \bar{z}) =: e^{ik_L X_L(z) + ik_R X_R(\bar{z})} : \tag{2.18}$$

で, この演算子の 2 つの OPE は,

$$\mathcal{V}_{k_L k_R}(z_1, \bar{z}_1) \mathcal{V}_{k'_L k'_R}(z_2, \bar{z}_2) \sim z_{12}^{\frac{\alpha'}{2} k_L k'_L} \bar{z}_{12}^{\frac{\alpha'}{2} k_R k'_R} \mathcal{V}_{(k+k')_L (k+k')_R}(z_2, \bar{z}_2) \tag{2.19}$$

であるが, この時頂点演算子の OPE が全体として一価でなければならない. 今の場合は z_1 が z_2 の周りを 1 周するときの位相の変化は

$$\exp[\pi i \alpha' (k_L k'_L - k_R k'_R)] = \exp(2\pi i (nw' + n'w)) = 1 \tag{2.20}$$

で, 一価性は保たれている. これが成り立たない場合はコサイクル因子を付け加えなければならない. 詳しくは 6.2 章で議論する.

2.3 T-双対性

$D = 26$ として, X^{25} を周期的とする. このとき弦のスペクトルは,

$$\begin{aligned}
m^2 &= -k^\mu k_\mu \\
&= \frac{n^2}{R_{25}^2} + \frac{w^2 R_{25}^2}{\alpha'^2} + \frac{2}{\alpha'} (N + \tilde{N} - 2).
\end{aligned} \tag{2.21}$$

ここで, $R_{25} \rightarrow \infty$ の極限を考える. すると, コンパクト方向の運動量は間隔が狭まり, 連続になる. 巻きつき状態は逆に間隔が広がり, $w \neq 0$ での質量は ∞ になり, 物理に効かなくなる. 逆に, $R_{25} \rightarrow 0$ の極限に置いては, 運動量が質量 ∞ になり, 巻きつき数が連続になる. この様に $R_{25} \rightarrow 0$ の極限と $R_{25} \rightarrow \infty$ の極限が運動量と巻きつき数の役割を入れ替えた形で一致しているように見える. 実際, (2.21) は

$$R_{25} \leftrightarrow \tilde{R}_{25} = \frac{\alpha'}{R_{25}}, \quad n \leftrightarrow w \tag{2.22}$$

の置き換えで不変であることがわかる。これが T-双対性である。T-双対性は、弦理論特有の性質である。この入れ替えは、(2.13) より、

$$p_L^{25} \leftrightarrow p_L^{25} \quad , \quad p_R^{25} \leftrightarrow -p_R^{25} \quad (2.23)$$

も意味する。さらに、半径 R の理論では弦の座標 X^{25} が

$$X^{25} = X_L^{25}(z) + X_R^{25}(\bar{z}) \quad (2.24)$$

と書けていたので、これに対応させて

$$\tilde{X}^{25} = X_L^{25}(z) - X_R^{25}(\bar{z}) \quad (2.25)$$

と表す³。これは、(2.19) と同じ OPE を持つが、 $p_{L,R}$ の部分が (2.23) の入れ替えをしたものになる。したがって、 \tilde{X} で表される理論は、半径 \tilde{R}_{25} の理論になっている。

2.4 開弦の T-双対性と D ブレーン

開弦の T-双対変換を考える。閉弦の場合と同じように X^{25} を (2.25) のように変換すると、(2.16) より、

$$\begin{aligned} \partial_\sigma X^{25} &= \frac{\alpha'}{2} p_L - \frac{\alpha'}{2} p_R + i \left(\frac{\alpha'}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{m \neq 0} \frac{\alpha_m^d}{z^m} - i \left(\frac{\alpha'}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{m \neq 0} \frac{\tilde{\alpha}_m^d}{\bar{z}^m} \\ &= i \partial_\tau X_L^{25} - i \partial_\tau X_R^{25} \\ &= i \partial_\tau \tilde{X}^{25} \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$= i \partial_\tau \tilde{X}^{25} \quad (2.27)$$

が成り立つ。従って、元の円 S^1 上の Neumann 境界条件 ($\partial_\sigma X|_{\text{boundary}} = 0$) は T-双対円 \tilde{S}^1 上で Dirichlet 境界条件 ($\partial_\tau \tilde{X}|_{\text{boundary}} = 0$) に変わり、開弦の端点が \tilde{X}^{25} 方向に動けなくなる。さらに、弦の端点は全て同じ超平面に固定されていることを見る。まず、1本の弦について、弦の両端の X^{25} 方向の差 δX^{25} は

$$\begin{aligned} \delta X^{25} &= X^{25}(\pi) - X^{25}(0) \\ &= \int_0^\pi d\sigma \partial_\sigma X^{25} = -i \int_0^\pi d\sigma \partial_\tau X^{25} \\ &= -2\pi \alpha' p^{25} = -\frac{2\pi \alpha' l}{R_{25}} = -2\pi l \tilde{R}_{25} \end{aligned} \quad (2.28)$$

であるため、トーラス上では同じ超平面上である。また、2本の弦がある場合についても、その2本が重力の相互作用により連結した世界面 (図 2.1) を考え、任意の端点を結ぶ経路 c で (2.28) と同じ議論ができるため、全ての開弦の端点は同じ超平面上にある。この、端点が固定された超空間を D ブレーンと呼ぶ。

³このように、基本的に T-双対変換はチルダ ($\tilde{}$) をつけて表す。ただし、展開係数 $\alpha, \tilde{\alpha}$ の T-双対変換はプライム ($'$) を使う。

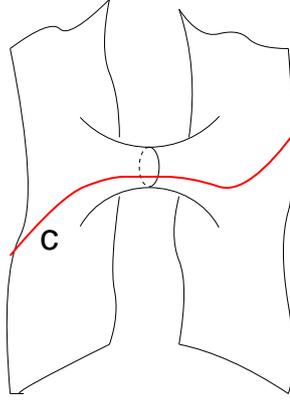


図 2.1: 2本の弦が重力により連結した世界面.

トーラス上の Wilson ライン

$U(1)$ ゲージ理論で, ゲージ場 A が定数の場合を考える:

$$A_{25}(x^M) = \frac{\theta}{R_{25}} = i\Lambda^{-1} \frac{\partial \Lambda}{\partial x^{25}} \quad \Lambda(x^{25}) = \exp\left(-\frac{i\theta x^{25}}{2\pi R_{25}}\right), \theta : \text{const} . \quad (2.29)$$

ゲージパラメータ Λ が時空の周期性を持たないため, トーラスコンパクト化のような非自明な Wilson ループが考えられる場合には物理的に意味を持つ.

これを見るために, Wilson ライン:

$$\text{Tr P exp}(S_A), \quad S_A = i \int_0^{2\pi} dx^{25} A_{25} = \exp(i\theta) \quad (2.30)$$

を考える. $U(N)$ の Chan-Paton 因子⁴ を持つ弦において, ゲージ場は

$$A_{25} = -\frac{1}{R_{25}} \text{diag}(\theta_1, \dots, \theta_n) \quad (2.31)$$

と対角化できる. ゲージ変換 Λ^{-1} により $A_{25} = 0$ とすることもできるが, このゲージ変換は周期的でなく, そのため電荷を持つ場は $x^{25} \rightarrow x^{25} + 2\pi R_{25}$ の下で位相 $\exp[i\theta]$ を持つ. しかし, 物理的な対象はゲージ不変でなければならないため, 正準運動量は θ だけシフトしていなければならない. ゲージ場は Chan-Paton 因子と $[A_M, \lambda]$ の形で結合しているため, Chan-Paton 状態 $|i, j\rangle$ の弦の正準運動量 p_{25} は

$$p_{25} = \frac{l - \theta_i + \theta_j}{R_{25}} \quad l \in \mathbb{Z} \quad (2.32)$$

となる.

⁴開弦の端点に新たな自由度 (ij) を加える. i, j はそれぞれ弦の右端, 左端の状態で, $1 \dots N$ の値をとる. この N^2 個の状態を $\text{Tr}(\lambda^a \lambda^b) = \delta^{ab}$ で規格化された N^2 個のエルミート行列 λ^a を使って表すことができる. この時 λ を Chan-Paton 因子といい, 開弦の零質量ベクトル粒子は $U(N)$ ゲージ場に対応する.

Wilson ラインと D プレーン

Wilson ラインを考慮に入れると, (2.28) において

$$\begin{aligned}\delta\tilde{X}^{25} &= \tilde{X}^{25}(\pi) - \tilde{X}^{25}(0) \\ &= -2\pi\alpha'p^{25} = -2\pi(l - \theta_i + \theta_j)\tilde{R}_{25}\end{aligned}\quad (2.33)$$

と変更され, D プレーンが

$$\tilde{X}_{25} = \theta_i\tilde{R}_{25} = 2\pi\alpha'A_{ii}\quad (2.34)$$

に位置することを意味する. i 番目と j 番目の D プレーンをつなぐ弦のモード展開は

$$\begin{aligned}\tilde{X}^{25}(z, \bar{z}) &= \theta_i\tilde{R}_{25} + i\tilde{R}_{25}(l - \theta_i + \theta_j)\ln\left(\frac{z}{\bar{z}}\right) - i\left(\frac{\alpha'}{2}\right)\sum_{m\neq 0}\frac{\alpha_m^{25}}{m}(z^m - \bar{z}^m) \\ &= \theta_i\tilde{R}_{25} + \frac{\sigma_1}{\pi}\delta X^{25} + (2\alpha')^{\frac{1}{2}}\sum_{m\neq 0}\exp(-m\tau)\sin m\sigma.\end{aligned}\quad (2.35)$$

スペクトルは

$$m^2 = \left(\frac{\delta X^{25}}{2\pi\alpha'}\right)^2 + \frac{1}{\alpha'}(N - 1)\quad (2.36)$$

となる. θ が全て違う値を取る場合, (i, j) 間のゲージ粒子に対応する弦が質量を持つため, $U(N)$ の対称性は $U(1)^N$ に破れる. 同じ値を持つものがあれば,

$$\prod_i U(r_i), \quad \sum_{i=1}^s r_i = N\quad (2.37)$$

となる.

複数次元をコンパクト化したときも同様で, T-双対空間では X^m の Neumann 境界条件が Dirichlet 境界条件に変わり, 開弦の端点は $(p+1)$ 次元の部分空間 (D p プレーン) に閉じ込められる. また, 一般に D p プレーンの接線方向に T-双対変換をすると, Neumann 条件が Dirichlet 条件になり, D $(p-1)$ プレーンに, 垂直な方向に T-双対変換をすると Dirichlet 条件が Neuman 条件になり, D $(p+1)$ プレーンになる.

また, D プレーン自身は力学的対象である. 全ての θ が異なっている場合の零質量開弦を考える. X^μ 方向の振動は, D プレーン上のゲージ場を記述する. X^{25} 方向の振動は, D プレーンの揺らぎを意味する. これは, (2.34) より $A_{25\,ii}$ が D プレーンの位置を表すため, その振動が D プレーンの振動を表すことから分かる. さらに, x に依存した背景は曲がった D プレーンを表す.

第3章 低エネルギー有効理論

3.1 Dブレーンの低エネルギー有効作用

背景場として、グラビトン G 、反対称テンソル場 B 、ディラトン場 Φ 、 $U(1)$ ゲージ場 A がある時の弦理論の世界面の作用は、

$$S = \frac{i}{4\pi\alpha'} \int_M d^2\sigma \left[\sqrt{g} g^{\alpha\beta} G_{MN} \partial_\alpha X^M \partial_\beta X^N + \varepsilon^{\alpha\beta} B_{MN} \partial_\alpha X^M \partial_\beta X^N - \frac{1}{2} \sqrt{g} \Phi R^{(2)} \right] + i \int_{\partial M} d\sigma \partial_\sigma X^\mu A_\mu \quad (3.1)$$

である。但し、 M は世界面、 ∂M は世界面の境界を表す。

Dブレーンの有効作用を考える。ブレーン上の座標を x^a ($a = 0, \dots, p-1$)、ブレーンと垂直方向の座標を x_i ($i = p, \dots, d-1$) とする。1枚の D_p ブレーン上では $U(1)$ ゲージ場 A_a とブレーンの埋め込みを表す $X^\mu(x)$ がある。Dブレーンの有効作用は、

$$S = -T_p \int d^{p+1}x e^{-\Phi} \sqrt{\det(G_{ab} + B_{ab} + 2\pi\alpha' F_{ab})},$$

$$G_{ab}(x) = \frac{\partial X^\mu}{\partial x^a} \frac{\partial X^\nu}{\partial x^b} G_{\mu\nu}(X(x)), \quad B_{ab}(x) = \frac{\partial X^\mu}{\partial x^a} \frac{\partial X^\nu}{\partial x^b} B_{\mu\nu}(X(x)) \quad (3.2)$$

と表される。 T_p は D_p ブレーンの張力である。この形の作用は Dirac-Born-Infeld (DBI) 作用とよばれる。

この作用が正しいこと定性的に見る。まず、時空の計量と埋め込みを考えると、座標不変な作用のもっとも簡単なものは $\sqrt{G_{ab}}$ の積分、即ち世界体積であることが分かる。 $e^\Phi \propto g_c^{-1}$ は、この作用が開弦場の tree レベルからきている事による。

F_{ab} に関しては、T-双対を使うことで導ける。 X^1, X^2 方向に $D2$ ブレーンがあり、定数ゲージ場 $A_2 = X^1 F_{12}$ がある場合を考える。これの X^2 に T-双対を取ると、(2.34) より、

$$\begin{aligned} \tilde{X}^2 &= -2\pi\alpha' A_2 \\ &= -2\pi\alpha' X^1 F_{12} \end{aligned} \quad (3.3)$$

となり、傾いた $D1$ ブレーンとなる。この時の Dブレーンの作用は \sqrt{G} より

$$\int dX^1 \sqrt{1 + (\partial_1 \tilde{X}^2)^2} = \int dX^1 \sqrt{1 + (2\pi\alpha' F_{12})^2} \quad (3.4)$$

となる。この操作は、回転やブーストにより F_{ab} をブロック対角化することにより、任意の Dブレーンで可能である。よって、 G と F は $G + 2\pi\alpha' F$ の形でなければならない。

最後に、 B 場について見る。世界面上の作用で、ゲージ場 A と B 場は (3.1) より、微分形式を用いて

$$\frac{i}{2\pi\alpha'} \int_M B + i \int_{\partial M} A \quad (3.5)$$

と書ける。ゲージ場 A と B に対して、それぞれ

$$\delta A = d\lambda \quad , \quad \delta B = d\zeta \quad (3.6)$$

のゲージ対称性があるが、 B の変分は境界がある場合に表面項を生じる。そのため、これを相殺するために同時に A を、

$$\delta A = -\frac{\zeta}{2\pi\alpha'} \quad (3.7)$$

だけ変化させなければならない。このため、 B と F が

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} \equiv B_{\mu\nu} + 2\pi\alpha' F_{\mu\nu} \quad (3.8)$$

の形の時のみゲージ対称性に対して不変である。まとめると、結局作用は (3.2) であることが分かる。また、(3.3) で見たように、ゲージ場がある D プレーン上で T-双対変換をすると傾いた低い次元の D プレーンになることも重要な事実である。DBI 作用は境界状態を用いて導出することもでき、具体的に 5 章で行う。

3.2 超弦理論と超対称 Yang-Mills 理論

世界面に超対称性を課した超弦理論についてはあまり深く立ち入らないが、IIA 型、IIB 型の超弦理論の低エネルギー有効理論について本論文で必要になる事項をまとめておく。

超弦理論の世界面の作用は、

$$S = \frac{1}{4\pi} \int dz^2 \left[\frac{2}{\alpha'} \partial X^\mu \bar{\partial} X_\mu + \psi_L^\mu \bar{\partial} \psi_{L\mu} + \psi_R^\mu \partial \psi_{R\mu} \right] \quad (3.9)$$

となっている。但し、ここでは世界面上の複素座標を用いた。閉弦の $\psi_{L,R}$ に関して、

$$\psi_L(w) = \pm \psi_L(w + 2\pi) \quad , \quad \psi_R(w) = \pm \psi_R(w + 2\pi) \quad (3.10)$$

のように、周期的 / 反周期的にすることが許される。周期的なものを Ramond(R)、反周期的なものを Neveu-Schwarz(NS) と呼ぶ。 ψ_L と ψ_R の周期性の組み合わせで、超弦は R-R, R-NS, NS-R, NS-NS の 4 つのセクターからなる。これらのセクターから現れる零質量粒子は以下の通りである。

- ・ NS-NS セクター → グラビトン $G_{\mu\nu}$, 反対称テンソル場 $B_{\mu\nu}$, ディラトン Φ
- ・ R-R セクター → R-R k -フォーム $A^{(k)}$
- ・ NS-R , R-NS セクター → フェルミオン

IIA 型超弦理論では k が奇数、IIB 型では k は偶数が許される。また、 $D(k-1)$ プレーンが R-R k -フォーム $A^{(k)}$ のソースになることが知られていて、 Dp プレーンは IIA 型超弦理論では p が偶数、IIB 型では p は奇数が許される。

このような背景での D ブレーンの低エネルギー有効作用は，

$$\begin{aligned}
S_{Dp} &= S_{\text{DBI}} + S_{\text{CS}} + (\text{フェルミオン項}) , \\
S_{\text{DBI}} &= -\mu_p \int d^{p+1}x \text{Tr} e^{-\Phi} \sqrt{\det(G + B + 2\pi\alpha'F)} , \\
S_{\text{CS}} &= \mu_p \int_{\Sigma_{p+1}} \mathcal{A} \wedge \text{Tr} e^{2\pi\alpha'F+B} , \quad \mathcal{A} \equiv \sum_k A^{(k)} , \\
\mu_p &= \frac{1}{(2\pi)^p \alpha'^{\frac{p+1}{2}}} \quad : \text{D ブレーン電荷}
\end{aligned} \tag{3.11}$$

で表されると考えられている。 S_{DBI} は，D ブレーンが 1 枚の時はこれで正しいことが知られているが， $N (> 1)$ 枚ある時に正しい有効理論の形は明らかではない。 S_{CS} (Chern-Simons 項) は N 枚でも正しい。また，D ブレーン電荷 μ_p と張力 T_p は等しいことが知られている。

S_{DBI} を F に関して展開すると，

$$S_{\text{DBI}} = -\mu_p \int d^{p+1}x e^{-\Phi} \text{Tr} \left[\sqrt{\det(G + B)} + \frac{1}{g_{YM}} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right] \tag{3.12}$$

となる。第一項は D ブレーンの質量と解釈できる。第二項はまさに Yang-Mills 理論の作用である。超対称性のため，フェルミオン項も入れるとこれは超対称 Yang-Mills 理論となる。 S_{DBI} は N 枚の D ブレーンでの正しい形は明らかではないが，(3.12) の形は摂動計算から正しいことが分かっている。

世界面の超対称性のため，ボゾン部分を計算すればほぼ自動的にフェルミオン部分も決まるため，時空の性質を議論するだけならボゾン部分のみを考えても本質的には何も変わらない。本修士論文では特にフェルミオンが重要になる場面には出くわさないため，以下ではボゾンのみで議論する。

3.3 非自明束としての D ブレーンと結合状態

D ブレーンの低エネルギー有効理論はゲージ理論であるため，D ブレーンは非自明束として表すことができる。非自明束は，底空間 M ，変換関数 Ω ，開被覆の集合 $\{U_i\}$ を選ぶことで選ばれる。 $M = T^2$ の場合を考える。開被覆 $\{U_i\}$ は全底空間を覆う 1 枚だけでよい。変換関数 Ω_1, Ω_2 は図 3.1 のように 対辺を結びつけるように定義する。 Ω はコサイクル条件

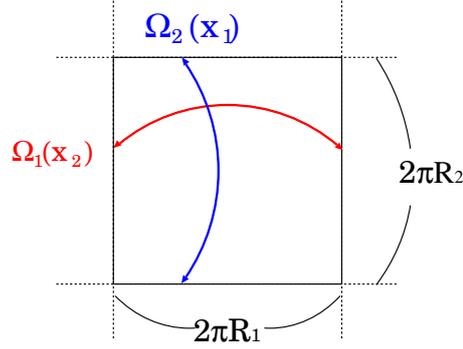
$$\Omega_1(2\pi R_2)\Omega_2(0)\Omega_1^{-1}(0)\Omega_2^{-1}(2\pi R_1) = 1 \tag{3.13}$$

も満たさなければならない。 $U(N)$ ゲージ場 A_μ は変換関数 Ω のもと，

$$\begin{aligned}
(\partial_\mu - iA_\mu)(x_1 + 2\pi R_1, x_2) &= \Omega_1(x_2)(\partial_\mu - iA_\mu)(x_1, x_2)\Omega_1^{-1}(x_2) , \\
(\partial_\mu - iA_\mu)(x_1, x_2 + 2\pi R_2) &= \Omega_2(x_1)(\partial_\mu - iA_\mu)(x_1, x_2)\Omega_2^{-1}(x_1)
\end{aligned} \tag{3.14}$$

と変換する。基本表現に属する物質場 ψ は

$$\begin{aligned}
\psi(x_1 + 2\pi R_1, x_2) &= \Omega_1(x_2)\psi(x_1, x_2) , \\
\psi(x_1, x_2 + 2\pi R_2) &= \Omega_2(x_1)\psi(x_1, x_2)
\end{aligned} \tag{3.15}$$

図 3.1: T^2 上の変換関数.

のように変換する.

ここで, D ブレーンの作用の Chern-Simons 項:

$$\int_{\Sigma_{p+1}} \mathcal{A} \wedge \text{Tr} e^{2\pi\alpha' F}, \quad \mathcal{A} \equiv \sum_k A^{(k)} \quad (3.16)$$

を考える. 例えば D4 ブレーン上で (3.16) を展開すると,

$$\int_{D4} \left[A^{(5)} + A^{(3)} \wedge \text{Tr}(2\pi\alpha' F) + A^{(1)} \wedge \text{Tr}(2\pi\alpha' F) \wedge (2\pi\alpha' F) \right] \quad (3.17)$$

であり, F の部分の積分を実行すると,

$$\begin{aligned} \mu_p \left[\int_{D4} A^{(5)} + C_1 \times \int A^{(3)} + C_2 \times \int A^{(1)} \right], \\ \text{Tr}(2\pi\alpha' F) \equiv Q^{(2)}, \quad \text{Tr}(2\pi\alpha' F) \wedge (2\pi\alpha' F) \equiv Q^{(0)} \end{aligned} \quad (3.18)$$

と表すことができる. $D(k-1)$ ブレーンが R-R k -フォーム $A^{(k)}$ のソースとなっていることから, C_1, C_2 はそれぞれ D2, D0 ブレーン電荷であるといえる¹. さらに, C_1, C_2 はそれぞれゲージ理論の言葉で vortex 数, instanton 数であるため, これらは D ブレーンの枚数と解釈できる.

この様に, D_p ブレーン上にフラックス F がある場合, F の k 個の Widge 積が $D(p-2k)$ ブレーン電荷を表す:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int \text{Tr}(2\pi\alpha' F) &\leftrightarrow D(p-2) \text{ ブレーン電荷} \\ \frac{1}{8\pi^2} \int \text{Tr}(2\pi\alpha' F) \wedge (2\pi\alpha' F) &\leftrightarrow D(p-4) \text{ ブレーン電荷} \\ \frac{1}{48\pi^3} \int \text{Tr}(2\pi\alpha' F) \wedge (2\pi\alpha' F) \wedge (2\pi\alpha' F) &\leftrightarrow D(p-6) \text{ ブレーン電荷} \\ &\vdots \end{aligned} \quad (3.19)$$

¹これは, 古典電磁気学に置いて電荷 Q が

$$Q = \int d^3x \text{div} \mathbf{A} = \int ds \cdot \text{rot} \mathbf{A}$$

で表されることと同じである.

D_p プレーンの中で $D(p-2)$ プレーンが $(p-2)$ 次元のホモロジーサイクル h_{p-2} に巻きついているとする。これに対し, 任意の 2 次元のホモロジーサイクル h_2 を選ぶと, このサイクルは h_{p-2} と決まった数だけ交差する。こうして, $(p-2)$ サイクルは 2-サイクルと整数を結びつけるようなコホモロジー類を定義する。この様なコホモロジー類は元のホモロジーの Poincaré 双対とよばれる。同様にして F^k に対応するコホモロジー類は, $(p-2k)$ 次元のホモロジー類に巻きついた $D(p-2)$ プレーンに相当する。

第4章 Nahm変換

Nahm変換はトーラス T^4 上の (反) 自己双対なゲージ場の配位から双対トーラス \tilde{T}^4 上の (反) 自己双対な配位への写像を与えるものであり, 元々モノポールやインスタントンを解析するために使われるものである. 通常は4次元で考えるが, 弦理論のDブレーンの結合状態として見たときには Nahm 変換と同じ手法を $2d$ 次元に応用することができる. この章では, 主に2次元の Nahm 変換を扱う.

4.1 Atiyar-Singer の family 指数定理

Nahm 変換では, Atiyar-Singer family 指数定理:

$$\text{ch}(\text{ind}\mathcal{D}_{\tilde{x}}) = \int_{T^{2d}} \text{ch}(\mathcal{P}) \text{ch}(E) \quad (4.1)$$

を使う [4].

各記号の定義は以下の通りである.

双対トーラス \tilde{T}^{2d} は $(\text{vol } T^{2d}) \cdot (\text{vol } \tilde{T}^{2d}) = (2\pi)^{2d}$ が成り立つようなトーラスとである¹. さらに簡単のため, トーラスの各辺の長さを 2π , 双対トーラスの各辺の長さを 1 とする. トーラス T^{2d} の座標を x_μ , 双対トーラス \tilde{T}^{2d} の座標を \tilde{x}_μ と表す. \mathcal{P} は Poincaré 束である. Poincaré 束とは, トーラス T^{2d} と双対トーラス \tilde{T}^{2d} の直積 $T^{2d} \times \tilde{T}^{2d}$ 上の複素線束で, その曲率が $idx \wedge d\tilde{x}$ となるようなものである. そのため, 接続は $-i\tilde{x}_\mu$ と書ける. また, $D_{\tilde{x}_\mu}$ を $T^{2d} \times \tilde{T}^{2d}$ 上の束 $E \otimes \mathcal{P}$ 上の共変微分とする. Poincaré 束の接続は $-i\tilde{x}_\mu$ であるので, この束上の共変微分は $D_{\tilde{x}_\mu}(\tilde{x}) = \partial_\mu - iA_\mu - i\tilde{x}_\mu$ となる. $D_{\tilde{x}}, \bar{D}_{\tilde{x}}$ は,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\tilde{x}} &= \gamma^\mu D_{\tilde{x}_\mu} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & D_{\tilde{x}} \\ \bar{D}_{\tilde{x}} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.2)$$

¹弦理論の双対トーラスは $(\text{vol } T^{2d}) \cdot (\text{vol } \tilde{T}^{2d}) = (\alpha')^{2d}$ だが, この章では数学的表記に合わせて $(\text{vol } T^{2d}) \cdot (\text{vol } \tilde{T}^{2d}) = (2\pi)^{2d}$ とする. $x' = Rx, \tilde{x}' = \frac{\alpha'}{2\pi R}\tilde{x}$ と置けば弦理論の表記に戻る.

で定義する². すると,

$$\begin{aligned} \text{ind} \mathcal{D}_{\tilde{x}} &= \ker \bar{\mathcal{D}}_{\tilde{x}} - \ker \mathcal{D}_{\tilde{x}}, \\ \text{ch}(E) &= \text{Tr} \exp \left(\frac{F}{2\pi} \right), \quad (F: \text{束 } E \text{ の曲率}) \quad : \text{Chern 指標} \\ &= \text{ch}_1 + \text{ch}_2 + \cdots \\ &\begin{cases} \text{ch}_1(E) = \frac{1}{2\pi} \text{Tr } F \\ \text{ch}_2(E) = \frac{1}{8\pi^2} \text{Tr } F \wedge F \\ \vdots \end{cases} \end{aligned}$$

である. $\tilde{E} \equiv \text{ind} \mathcal{D}_{\tilde{x}}$ は \tilde{T}^{2d} 上の束を定義することを次節で見る. これが Nahm 変換である.

例: 2次元トーラス T^2

ゲージ群 $U(N)$, 第一 Chern 数 k となる 2次元トーラス T^2 上の束 E を考える. $\tilde{E} = \text{ind} \mathcal{D}_{\tilde{x}}$ と置いて, family 指数定理 (4.1) の両辺を展開すると,

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= \text{rank}(\tilde{E}) + C_1(\tilde{E}) d\tilde{x} \wedge d\tilde{x}, \\ (\text{右辺}) &= Nd\tilde{x} \wedge d\tilde{x} - C_1(E) \end{aligned} \quad (4.3)$$

従って,

$$\begin{aligned} \text{rank}(\tilde{E}) &= C_1(E), \\ C_1(\tilde{E}) &= -\text{rank}(E) \end{aligned} \quad (4.4)$$

となるが, これは符号を除けば Nahm 変換によりゲージ群と第一 Chern 数が入れ替わることを意味する. 弦理論で T-双対変換により D0 プレーンと D2 プレーンが入れ替わるという性質と同じである.

4.2 2次元 Nahm 変換

これを使って, 2次元 Nahm 変換を導出する. 2次元では $\gamma_\mu = -i\sigma_\mu$ (σ_μ : Pauli 行列, $\mu = 1, 2$) なので,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\tilde{x}} &= -i(\partial_1 - iA_1 - i\tilde{x}_1) - (\partial_2 - iA_2 - i\tilde{x}_2), \\ \bar{\mathcal{D}}_{\tilde{x}} &= -i(\partial_1 - iA_1 - i\tilde{x}_1) + (\partial_2 - iA_2 - i\tilde{x}_2) \end{aligned} \quad (4.5)$$

である.

Dirac 方程式 $\mathcal{D}_{\tilde{x}}\psi = 0$ のうち $\mathcal{D}_{\tilde{x}}\psi = 0$ が規格化された解を持たないと仮定する. そうすると, family 指数定理より,

$$\bar{\mathcal{D}}_{\tilde{x}}\psi = 0 \quad (4.6)$$

²付録 C 参照.

は独立した k 個の規格化された解 $\psi^p (p = 1 \cdots k)$ を持つ. この k 個の解を横に並べて $\psi(x, \tilde{x})$ を $N \times k$ 行列とする. 列ベクトル ψ^p は独立した解で, Dirac ゼロモードと呼ばれる. 双対トーラス上のゲージ場は, ゼロモード束への射影で得られる. 双対トーラス上の共変微分を \tilde{D}_μ , 切断を $\tilde{\Psi}$ とすると, $\tilde{D}_\mu = (\psi\psi^\dagger)\tilde{\partial}$ であり,

$$\begin{aligned} \tilde{D}_\mu \tilde{\Psi} &= \int_{T^2} d^2x \psi \psi^\dagger \tilde{\partial}_\mu \psi \psi^\dagger \tilde{\Psi} \\ &= \int_{T^2} d^2x \psi \left[\tilde{\partial}_\mu (\psi^\dagger \tilde{\Psi}) + (\psi^\dagger \tilde{\partial}_\mu \psi) (\psi^\dagger \tilde{\Psi}) \right]. \end{aligned} \quad (4.7)$$

よって,

$$\tilde{A}_\mu(\tilde{x}) = i \int_{T^2} d^2x \psi^\dagger \tilde{\partial}_\mu \psi \quad (4.8)$$

となる. これが 2次元トーラスの Nahm 変換である.

具体的に 2次元 Nahm 変換を計算する. 3.3 で導入したの変換関数 $\Omega_{1,2}$ を

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= e^{ikx_2/N} U^k, \quad \Omega_2 = V, \quad U^k V = e^{-2\pi ik/N} V U^k, \\ U_{N \times N} &= \begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi i}{N}} & & & \\ & e^{\frac{4\pi i}{N}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{2\pi i} \end{pmatrix}, \quad V_{N \times N} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.9)$$

と定義する. 変換関数はコサイクル条件 (3.13) を満たす.

このとき, 変換則 (3.14) を満たすようなゲージ場 A_μ は

$$A_1 = 0, \quad A_2 = \frac{k}{2\pi N} x, \quad F_{12} = \frac{k}{2\pi N}, \quad C_1 = k. \quad (4.10)$$

物質場の変換則 (3.15) を満たすような一般的な ψ の形は,

$$\psi(x_1, x_2) = \sum_{s \in \mathbb{Z}} \sum_{p=1}^k \exp \left[ix_1 \left\{ \frac{k}{N} \left(\frac{x_2}{2\pi} + u + Ns \right) + p \right\} \right] \phi^p \left(\frac{x_2}{2\pi} + u + Ns + \frac{N}{k} p \right). \quad (4.11)$$

これを, Dirac 方程式 (4.6) に代入すると,

$$\left(\frac{k}{N} Y - \tilde{x}_1 - i\tilde{x}_2 + \frac{1}{2\pi} \partial_Y \right) \phi^p(Y) = 0, \quad (4.12)$$

ここで, $Y \equiv \frac{x_2}{2\pi} + u + Ns + \frac{N}{k} p$ と置いた. これを解くと, 一般解は

$$\phi^p(Y) = f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \exp \left[-\frac{\pi k}{N} Y^2 + 2\pi (\tilde{x}_1 + i\tilde{x}_2) Y \right]. \quad (4.13)$$

さらに規格化条件を課すと

$$\begin{aligned} \psi_u^p(x, \tilde{x}) &= \left(\frac{k}{8\pi^4 N} \right)^{\frac{1}{4}} \sum_{s \in \mathbb{Z}} \exp \left[ix_1 \left\{ \frac{k}{N} \left(\frac{x_2}{2\pi} + u + Ns \right) + p \right\} \right] \\ &\quad \times \exp \left[2\pi i \tilde{x}_2 \left\{ \frac{x_2}{2\pi} + u + Ns + \frac{N}{k} p \right\} + ig(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \right] \\ &\quad \times \exp \left[-\pi \frac{k}{N} \left\{ \frac{x_2}{2\pi} + u + Ns - \frac{N}{k} (\tilde{x}_1 - p) \right\}^2 \right]. \end{aligned} \quad (4.14)$$

p は Dirac ゼロモードの添字であり, 1 から k まで走る. これは Dirac ゼロモードが k 個あるという指数定理の結果と一致する. $g(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ は任意の実関数である. さらに, 第一 Chern 数の符号を代えたとき, (4.16) の 3 行目の Gauss 積分が発散し, 規格化された Dirac ゼロモードを持たない. この場合は $\tilde{\mathcal{D}}_{\tilde{x}}$ の代わりに $\mathcal{D}_{\tilde{x}}$ を使って同じ計算ができ, 物理的にこれは反 D プレーンを意味する. ここから (4.8) より双対空間のゲージ場 \tilde{A} は,

$$\begin{aligned}\tilde{A}_1 &= -\tilde{\partial}_1 g(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2), \\ \tilde{A}_2 &= -\frac{2\pi N}{k} \tilde{x}_1 - \tilde{\partial}_2 g(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)\end{aligned}\quad (4.15)$$

つまり, $g(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ はゲージ変換関数である. $g(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = 0$ というゲージを選ぶと³,

$$\begin{aligned}\psi_u^p(x, \tilde{x}) &= \left(\frac{k}{8\pi^4 N}\right)^{\frac{1}{4}} \sum_{s \in \mathbb{Z}} \exp \left[ix_1 \left\{ \frac{k}{N} \left(\frac{x_2}{2\pi} + u + Ns \right) + p \right\} \right] \\ &\quad \times \exp \left[2\pi i \tilde{x}_2 \left\{ \frac{x_2}{2\pi} + u + Ns + \frac{N}{k} p \right\} \right] \\ &\quad \times \exp \left[-\pi \frac{k}{N} \left\{ \frac{x_2}{2\pi} + u + Ns - \frac{N}{k} (\tilde{x}_1 - p) \right\}^2 \right].\end{aligned}\quad (4.16)$$

結局, 双対ゲージ場 \tilde{A} は,

$$\tilde{A}_1 = 0, \quad \tilde{A}_2 = -\frac{2\pi N}{k} \tilde{x}_2, \quad \tilde{F}_{12} = -\frac{2\pi N}{k}, \quad \tilde{C}_1 = -N \quad (4.17)$$

となる. 4 次元の Nahm はトーラス上の (反) 自己双対ゲージ場から双対トーラス上の (反) 自己双対ゲージ場への写像であった. 2 次元の場合は自己双対性のようなものがないが, その代わり, 定数 F から定数 \tilde{F} への写像となっている.

ランク N , 第一 Chern 数 k の系を Nahm 変換するとランク k , 第一 Chern 数 $(-N)$ の系になる. これを D プレーンで解釈すると, N 枚の D2 プレーンと k 枚の D0 プレーンの T-双対変換が k 枚の D2 プレーンと N 枚の反 D プレーンになるように思えるが, そう単純に考えることはできないことを後で見る.

また, 変換関数は,

$$\tilde{\Omega}_1 = \tilde{V}, \quad \tilde{\Omega}_2 = e^{-2\pi i N \tilde{x}_1 / k} \tilde{U}^k \quad (4.18)$$

\tilde{U}, \tilde{V} は (4.9) と同じ形の $k \times k$ 行列である.

以上の議論は, ゲージ群のランク N , 第 1 Chern 類 k を持つ T^2 上の束を $E_{(N,k)}$ として, $E_{(N_1, k_1)} \oplus \cdots \oplus E_{(N_n, k_n)}$ の束に拡張できる. ある i, j に対して $k_i > 0, k_j < 0$ の時, それに対応して k_i 枚の D0 プレーンと k_j 枚の $\bar{D}0$ プレーンを含む系と解釈できる. このとき $E_{(N_i, k_i)}, E_{(N_j, k_j)}$ の解の周りの揺らぎを考えると, 負の二乗質量が現れ不安定になり, タキオン凝縮が起こることが知られている.

4.3 4次元 Nahm 変換

Nahm 変換は通常 4 次元トーラスで考えられるため, 参考に 4 次元トーラス上の反自己双対なゲージ場の Nahm 変換も記載しておく.

³この様なゲージを選んだのは, 後に境界状態を用いた T-双対変換と比較するためである.

ゲージ群が $U(N)$, 第1Chern 数 C_1 が 0 , インスタントン数 (= 第2Chern 数) C_2 が k の系を考える. family 指数定理 (4.1) より ,

$$\bar{D}_{\tilde{x}}\psi = 0 \quad (4.19)$$

は k 個の独立な規格化された解を持ち, 従って ψ は $2N \times k$ 行列で表すことができる. 4.1 章と同じように, 双対トーラス T^4 上のゲージ場は

$$\tilde{A}_\mu = \int_{T^4} dx^4 \psi^\dagger \tilde{\partial}_\mu \psi \quad (4.20)$$

で表される. ここで双対ゲージ場 \hat{A} の第2Chern 数は N である.

反自己双対なゲージ場:

$$A_1 = 0, \quad A_2 = \frac{k}{2\pi N} x_1 \otimes \mathbf{1}_{N \times N}, \quad A_3 = 0, \quad A_4 = \mathbf{1}_{N \times N} \otimes \left(-\frac{k}{2\pi N} x_1 \right) \quad (4.21)$$

を考える. 曲率は,

$$F_{12} = -F_{34} = -\frac{k}{2\pi N} \mathbf{1}_{N \times N} \otimes \mathbf{1}_{N \times N} \quad (4.22)$$

で, 第2Chern 数 C_2 は k^2 . この束は 2次元の束のテンソル積 $E_{(N,k)} \otimes E_{(N,-k)}$ で構成されており, 逆向きのツイストにより自己双対性が実現している. ゲージ群は $U(N^2)$.

Dirac ゼロモードも, 2次元の場合の積,

$$\begin{aligned} \psi_{uu'}^{pp'}(x, \tilde{x}) &= \left(\frac{k}{8\pi^4 N} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{s,t \in \mathbb{Z}} e^{ix_1 \left\{ \frac{k}{N} \left(\frac{x_2}{2\pi} + u + Ns \right) + p \right\}} e^{2\pi i \tilde{x}_2 \left\{ \frac{x_2}{2\pi} + u + Ns - \frac{N}{k} (\tilde{x}_1 - p) \right\}} \\ &\quad \times e^{-\pi \frac{k}{N} \left\{ \frac{x_2}{2\pi} + u + Ns - \frac{N}{k} (\tilde{x}_1 - p) \right\}^2} e^{-ix_3 \left\{ \frac{k}{N} \left(\frac{x_4}{2\pi} + u' + Nt \right) + p' \right\}} \\ &\quad \times e^{-2\pi i \tilde{x}_4 \left\{ \frac{x_4}{2\pi} + u' + Nt - \frac{N}{k} (\tilde{x}_3 - p') \right\}} e^{-\pi \frac{k}{N} \left\{ \frac{x_4}{2\pi} + u' + Nt - \frac{N}{k} (\tilde{x}_3 - p') \right\}^2} \end{aligned} \quad (4.23)$$

これから, 双対トーラス上のゲージ場を計算すると,

$$\tilde{A}_1 = 0, \quad \tilde{A}_2 = \frac{2\pi N}{k} \tilde{x}_2 \otimes \mathbf{1}, \quad \tilde{A}_3 = 0, \quad \tilde{A}_4 = \mathbf{1} \otimes \left(-\frac{2\pi N}{k} \tilde{x}_4 \right) \quad (4.24)$$

と, 反自己双対なゲージ場になっている. 第2Chern 数は N^2 , ゲージ群は $U(k^2)$ となり, D0 プレーンと D4 プレーンが入れ替わった形となっている. 2つの T^2 の直積なので, 2次元で見たとような負符号は現れない.

第5章 平坦な時空での境界状態

5.1 境界状態

円筒の分配関数は図 5.1 のように開弦の 1 ループとして計算できるが¹, 図 5.2 のように, ある時間に閉弦が現れ, 有限時間伝搬した後消えると見て計算することもできる.

その際, 開弦の境界条件に対応した境界状態 $|B\rangle$ が必要になる. 全て Neumann 境界条件をとると, $\partial X^\mu / \partial \sigma|_{\text{boundary}} = 0$ なので, 時間と空間を入れ替えて, 閉弦の境界条件は,

$$\left. \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} = 0 \quad (5.1)$$

である. 閉弦の振動子展開は, (A.30) より,

$$X^\mu(z) = x^\mu - i \frac{\alpha'}{2} \ln |z|^2 p^\mu + i \left(\frac{\alpha'}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{m \neq 0} \left(\frac{\alpha_m^\mu}{m z^m} + \frac{\tilde{\alpha}_m^\mu}{m \bar{z}^m} \right) \quad (5.2)$$

だが, この章では

$$z = e^{\tau+i\sigma}, \quad \bar{z} = e^{\tau-i\sigma}, \\ i\alpha_n^\mu = \sqrt{n} a_n^\mu, \quad i\alpha_{-n}^\mu = -\sqrt{n} a_n^{\mu\dagger}, \quad i\tilde{\alpha}_n^\mu = \sqrt{n} \tilde{a}_n^\mu, \quad i\tilde{\alpha}_{-n}^\mu = -\sqrt{n} \tilde{a}_n^{\mu\dagger} \quad (5.3)$$

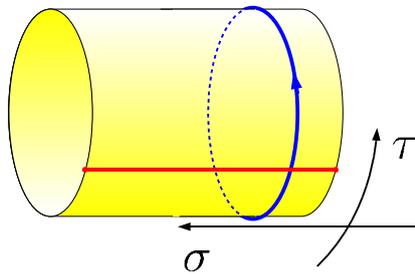


図 5.1: 開弦の 1 ループとして見る円筒

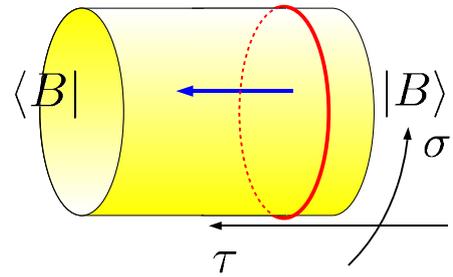


図 5.2: 閉弦の伝搬としてみる円筒

¹付録 B 参照

と置き換えて

$$X(\sigma, \tau) = q - i\alpha' p\tau + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{m}} \left[a_m^\dagger e^{m\tau + im\sigma} + \tilde{a}_m^\dagger e^{m\tau - im\sigma} + a_m e^{-m\tau - im\sigma} + \tilde{a}_m e^{-m\tau + im\sigma} \right]. \quad (5.4)$$

と表す. $a, a^\dagger, \tilde{a}, \tilde{a}^\dagger$ は生成消滅の交換関係 $[a_m^\mu, a_n^{\nu\dagger}] = [\tilde{a}_m^\mu, \tilde{a}_n^{\nu\dagger}] = \eta^{\mu\nu} \delta_{mn}$ を満たす. これを (5.1) に代入して $e^{im\sigma}$ の係数を比較すると,

$$\begin{cases} p = 0, \\ a_m^\dagger = \tilde{a}_m \\ \tilde{a}_m^\dagger = a_m \end{cases} \quad m \geq 1. \quad (5.5)$$

これらの演算子の固有状態を考えると,

$$|B\rangle_\alpha = \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m^\dagger \tilde{a}_m^\dagger\right) |0\rangle \quad (5.6)$$

となる.

この意味を見るため, これに閉弦の頂点演算子: $e^{ik \cdot X}$: を作用させる. (5.4) を生成部分 $X^{(+)}(z)$ と消滅部分 $X^{(-)}(z)$ に分けて, 消滅部分を見ると,

$$\begin{aligned} e^{ik \cdot X^{(-)}(z)} |B\rangle_\alpha &= \exp\left\{ ik \cdot \sum_m \frac{1}{\sqrt{m}} \left(\frac{a_m^m}{z^m} + \frac{\tilde{a}_m^m}{\bar{z}} \right) \right\} |B\rangle_\alpha \\ &= \exp\left\{ ik \cdot \sum_m \frac{1}{\sqrt{m}} \left(\frac{a_m^\dagger}{z^m} + \frac{\tilde{a}_m^\dagger}{\bar{z}^m} \right) \right\} |B\rangle_\alpha \\ &= e^{ik \cdot X^{(+)}(1/\bar{z})} |B\rangle_\alpha \end{aligned} \quad (5.7)$$

即ち, この状態は, z にある消滅部分と $1/\bar{z}$ にある生成部分を同一視する. z と $1/\bar{z}$ はちょうど単位円に対する鏡映反転の位置にある.

境界状態で閉弦の伝搬ではさむことにより, 分配関数を計算すると,

$$\begin{aligned} \langle 0 | \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m \tilde{a}_m\right) \int_0^\infty d\tau e^{2\tau} \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m^\dagger \tilde{a}_m^\dagger\right) |0\rangle \\ = \int_0^\infty d\tau e^{-2\tau} \prod_{m=1}^{\infty} (1 - e^{2m\tau})^{-D} \end{aligned} \quad (5.8)$$

となる. これは, 開弦の 1-ループとして計算した分配関数と一致する². また, 境界条件から規格化は決まらないが, この比較により決めることができる.

5.2 ゴーストの境界状態

Virasoro 演算子は (5.5) より,

$$L_m = \tilde{L}_{-m} \quad (5.9)$$

²付録 B 参照

が成り立つ。ここで，BRSTゴースト $b_n, c_n, \tilde{b}_n, \tilde{c}_n$ を加える。BRST チャージは

$$\begin{aligned} Q &= \sum_n : L_{-n} c_n : - \frac{1}{2} \sum_{n,m} (n-m) : c_{-m} c_{-n} b_{n+m} - c_0 , \\ \tilde{Q} &= \sum_n : \tilde{L}_{-n} \tilde{c}_n : - \frac{1}{2} \sum_{n,m} (n-m) : \tilde{c}_{-m} \tilde{c}_{-n} \tilde{b}_{n+m} - \tilde{c}_0 \end{aligned} \quad (5.10)$$

で表されるので，境界状態に物理的であるための条件:

$$(Q + \tilde{Q}) |B\rangle_{\text{gh}} \quad (5.11)$$

を課す。これを満たすようなゴーストの境界状態は，

$$|B\rangle_{\text{gh}} = \exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} e^{2n\tau_0} [\tilde{c}_n b_{-n} + c_{-n} \tilde{b}_{-n}] \right\} |Z\rangle \quad (5.12)$$

である。これに Q を作用させると確かに $Q |B\rangle = -\tilde{Q} |B\rangle$ ，即ち，

$$c_n = -\tilde{c}_{-n}, \quad b_n = +\tilde{b}_{-n} \quad (5.13)$$

が成り立つ。ここで，

$$\begin{aligned} |Z\rangle &\equiv (c_0 + \tilde{c}_0) |\downarrow\downarrow\rangle \\ &\equiv (c_0 + \tilde{c}_0) c_1 \tilde{c}_1 |0\rangle \end{aligned} \quad (5.14)$$

はゴーストの真空である。結局，ゴーストを含めた境界状態は

$$|B\rangle = |B\rangle_{\alpha} |B\rangle_{\text{gh}} \quad (5.15)$$

となる。

5.3 経路積分からの導出

前章では境界条件から境界状態を作ったが，規格化を決めるためには円筒の分配関数を境界状態，開弦の 1-ループの 2 つの方法で計算し，それらを比較する必要がある。しかし，特に背景場がある場合にはこの方法は非常に長い計算を要し，能率的でない。そこで，別の方法として経路積分を用いた境界状態の導出を考える。この方法を用いると背景場がある時にも比較的簡単に規格化まで決めることができる [8]。

経路積分を用いた方法を導く前に背景がない場合の境界状態についての特徴をいくつか掲げておく。まず，演算子の境界条件は，いずれも

$$O_d = (-1)^d \tilde{O}_d \quad (5.16)$$

の形をしている。ここで， O, \tilde{O} は共形ウェイト d の左向き，右向きの演算子である。さらに，モード展開の生成・消滅演算子の線形な境界条件から複合演算子にも似たような条件を課すことができる。特に，Virasoro 生成子，BRST 電荷に対して，

$$\begin{aligned} (L_n - \tilde{L}_n) |B\rangle &= 0 , \\ (Q + \tilde{Q}) |B\rangle &= 0 \end{aligned} \quad (5.17)$$

という条件が課せられる. 第1の条件は境界上で座標 σ の $Diff(S_1)$ によるパラメーターの付け替えで不変という条件に対応している. 第2の条件は, $|B\rangle$ が閉弦の物理的状態であるという条件でもあり, より一般的である.

実際に経路積分を用いて境界状態を導く. まず, 以下のような単純な調和振動子のユークリッドな経路積分を考える:

$$\langle \Psi | e^{-Ht} | \Psi \rangle = \int \mathcal{D}x(t) \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^T dt (x^2 + \dot{x}^2)\right) e^{-S(x(T))} e^{-S(x(0))}. \quad (5.18)$$

即ち, 境界に作用 $S(x)$ を挿入して, 波動関数が

$$\langle x | \Psi \rangle = e^{-S(x)} \quad (5.19)$$

となるような状態 $|\Psi\rangle$ に $t=0$ で振動子が生成される状況を考える. 振動子に対して, 規格化された座標固有状態は,

$$|x\rangle = (2\pi)^{-\frac{1}{4}} e^{\frac{x^2}{4}} e^{-\frac{1}{2}(a^\dagger)^2 + xa^\dagger} |0\rangle \quad (5.20)$$

これは, 固有値条件と完全性関係:

$$(a^\dagger + a - x) |x\rangle = 0, \quad (5.21)$$

$$\int dx |x\rangle \langle x| = 1 \quad (5.22)$$

を満たす. よって,

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= \int dx |x\rangle \langle x | \Psi \rangle \\ &= \int dx e^{-S(x)} |x\rangle \\ &= \int dx (2\pi)^{-\frac{1}{4}} e^{\frac{x^2}{4} - S(x)} e^{-\frac{1}{2}(a^\dagger)^2 + xa^\dagger} |0\rangle. \end{aligned} \quad (5.23)$$

これは一般的な調和振動子の境界状態を表す.

特に, $S=0$ の時には, 積分を実行して,

$$|\Psi\rangle = (8\pi)^{\frac{1}{4}} e^{\frac{(a^\dagger)^2}{2}} |0\rangle \quad (5.24)$$

のように表され,

$$\begin{aligned} i\dot{x} |\Psi\rangle &= (a - a^\dagger) |\Psi\rangle \\ &= 0 \end{aligned} \quad (5.25)$$

となるので, 通常 of 自由境界条件を満たすような状態になる.

これを弦理論に適用する. (5.4) で展開し, $\tau=0$ とおくと, 境界では微分が $\partial/\partial\sigma$ の形でしか現れないため, 振動モードは

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \bar{x}_m^\mu &= a_m^{\mu\dagger} + \tilde{a}_m^\mu \\ \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} x_m^\mu &= a_m^\mu + \tilde{a}_m^{\mu\dagger} \end{aligned} \quad (5.26)$$

の形でのみ現れる. \bar{x}_m^μ, x_m^μ を c-数と見て, 状態 $|x, \bar{x}\rangle$ に対して固有値方程式:

$$\begin{aligned} \left[a_m^{\mu\dagger} + \tilde{a}_m^\mu - \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} x_m^\mu \right] |x, \bar{x}\rangle &= 0, \\ \left[a_m^\mu + \tilde{a}_m^{\mu\dagger} - \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \bar{x}_m^\mu \right] |x, \bar{x}\rangle &= 0 \end{aligned} \quad (5.27)$$

と完全性条件:

$$\int \mathcal{D} \left[\sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \bar{x} \right] \mathcal{D} \left[\sqrt{\frac{2}{\alpha'}} x \right] |x, \bar{x}\rangle \langle x, \bar{x}| = 1 \quad (5.28)$$

を満たすような $|x, \bar{x}\rangle$ は,

$$\begin{aligned} |x, \bar{x}\rangle &= \exp \left\{ -\frac{1}{\alpha'} (\bar{x}|x) - (a^\dagger|\tilde{a}^\dagger) + \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} (a^\dagger|x) + \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} (\bar{x}|\tilde{a}^\dagger) \right\} |0\rangle \\ (\bar{x}|x) &\equiv \sum_{m=1}^{\infty} \bar{x}_m^\mu x_{m\mu} \end{aligned} \quad (5.29)$$

である. ゼロモードに関しては, (5.20) と同じ形の固有状態をとる.

一般的な背景ゲージ場 A^μ がある場合は, (5.19) に対応させて, 境界に Wilson ライン因子:

$$\text{Tr P } e^{S_A}, \quad S_A[X] = i \int_0^{2\pi} d\sigma [A_\mu(X) \partial_\sigma X^\mu]_{\tau=0} \quad (5.30)$$

を作用させることで得られる. S_A はゲージ場の頂点演算子の凝縮を表し, $A_\mu = A_\mu^a \lambda_a$ で, λ_a ゲージ群の生成子, P は境界上の経路順序を表す.

したがって, 任意の Wilson ライン作用 $S_A(X)$ のある境界状態は,

$$\begin{aligned} |A_\mu\rangle &= \int \mathcal{D} \left[\sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \bar{x} \right] \mathcal{D} \left[\sqrt{\frac{2}{\alpha'}} x \right] dq \text{Tr P exp}[-S_A(x, \bar{x}, q)] |x, \bar{x}, q\rangle \\ &= \exp(-(a^\dagger|\tilde{a}^\dagger)) \int \mathcal{D} \left[\sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \bar{x} \right] \mathcal{D} \left[\sqrt{\frac{2}{\alpha'}} x \right] dq \\ &\quad \times \exp \left[\frac{1}{\alpha'} (\bar{x}|x) + \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} (a^\dagger|x) + \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} (\bar{x}|\tilde{a}^\dagger) \right] \\ &\quad \times \text{Tr P exp}[-S_A(x, \bar{x}, q)] |0\rangle. \end{aligned} \quad (5.31)$$

これが, 背景場 F がある時の境界状態である. 原理的には F を摂動展開することで任意の F に対する境界状態を計算できる. また, この経路積分のアノマリーが消えるという条件から背景場 F の運動方程式が導かれる.

5.4 定数背景場がある時の境界状態

定数背景場がある時の境界状態を考える。簡単のため、ゲージ群のうち、可換部分群を考え、経路順序 P を考えなくてよいようにする。 $A_\mu = \frac{1}{2}X^\nu F_{\nu\mu}$ として、ウィルソン作用 (5.30) は、

$$\begin{aligned} S_F &= \frac{i}{2} F_{\mu\nu} \int_0^{2\pi} d\sigma X^\mu \partial_\sigma X^\nu \\ &= 2\pi F_{\mu\nu} \sum_n (\bar{x}_n^\mu x_n^\nu) \\ &= 2\pi (\bar{x}|F|x) \quad F_{\mu m, \nu n} = F_{\mu\nu} \delta_{mn} \end{aligned} \quad (5.32)$$

と書ける。これを (5.31) に代入すると、

$$\begin{aligned} |F\rangle &= \int \mathcal{D} \left[\sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \bar{x} \right] \mathcal{D} \left[\sqrt{\frac{2}{\alpha'}} x \right] \\ &\quad \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \bar{x} + \frac{2a^\dagger}{1+2\pi\alpha'F} \middle| 1+2\pi\alpha'F \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} x + \frac{2\tilde{a}^\dagger}{1+2\pi\alpha'F} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(a^\dagger \middle| \frac{1-2\pi\alpha'F}{1+2\pi\alpha'F} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \tilde{a}^\dagger \right) \right] |0\rangle \end{aligned} \quad (5.33)$$

積分を実行すると、

$$= \text{tr} [\text{Det}(1+2\pi\alpha'F)]^{-1} \exp \left(a^\dagger \middle| \frac{1-2\pi\alpha'F}{1+2\pi\alpha'F} \right. \tilde{a}^\dagger \left. \right) |0\rangle \quad (5.34)$$

となる。トレースはゲージ群の可換部分群の生成子の足についてとる。

$F_{\mu\nu}$ が位置に依らないため、全運動量は 0 である。また、 $\left(\frac{1-F}{1+F} \right)_{\mu\nu}$ が直交行列なため、行列式要素を除けばゲージ場の効果は左向きモードに対して右向きモードを相対的にローレンツ回転させることである。したがって、Virasoro 生成子、BRST チャージなどの、右向き、あるいは左向きだけのモードからなるローレンツスカラー関数は $F_{\mu\nu}$ により影響を受けない。従って、(5.17) からくる対称性は保たれる。

行列式の部分を計算する。時空の足からくる部分と無限個の振動モードからくる部分に分ける：

$$\begin{aligned} \text{Det}(1+2\pi\alpha'F) &= \prod_{m>0} [\det(1+2\pi\alpha'F)], \\ \det(1+2\pi\alpha'F) &= \det(\delta_{\mu\nu} + 2\pi\alpha'F_{\mu\nu}). \end{aligned} \quad (5.35)$$

ここで、振動モードからくる部分に発散があるので、 ζ -関数の正則化が必要になる。

$$\sum_{m=1}^{\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s} = \zeta(0) \quad (5.36)$$

ここで、

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (5.37)$$

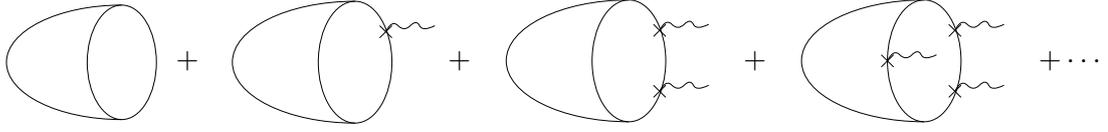


図 5.3: $\langle 0|F\rangle$ に相当する図. $\times\sim$ は開弦の頂点演算子を表す.

と表されるが, これは $s = 0$ で発散するため,

$$\zeta(s)\Gamma(s) = \int_0^1 dt t^{s-1} \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2s} + \int_1^\infty dt \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} \quad (5.38)$$

のように解析接続し, $\Gamma(0)$ の極と比較すると,

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2} \quad (5.39)$$

が求まる. 従って,

$$[\text{Det}(1 + 2\pi\alpha'F)]^{-1} = [\det(1 + 2\pi\alpha'F)]^{1/2} \quad (5.40)$$

結局

$$|F\rangle = \text{tr} [\det(1 + 2\pi\alpha'F)]^{1/2} \exp \left[\left(\frac{1 - 2\pi\alpha'F}{1 + 2\pi\alpha'F} \right)_{\mu\nu} \left(-\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \alpha_{-m}^\mu \tilde{\alpha}_{-m}^\nu \right) \right] |0\rangle \quad (5.41)$$

これはちょうど境界条件を

$$\partial_\tau X^\mu = i2\pi\alpha' F_{\mu\nu} \partial_\sigma X^\nu \quad (5.42)$$

とした時の固有状態になっている. この条件から (5.41) の指数部分を導くこともできるが, 行列式の部分は経路積分を使わないと出ない.

DBI 作用

ここで導いた (5.41) と DBI 作用の関係を見る. (5.41) と真空 $\langle 0|$ の内積をとったものは, 図 5.3 のような振幅を計算していることになり, DBI 作用に一致する. 実際, 計算すると,

$$\langle 0|F\rangle = T_{25} \text{tr} [\det(1 + 2\pi\alpha'F)]^{\frac{1}{2}} \quad (5.43)$$

となる. ここで, T_{25} は D25 ブレーンの張力で, $G = 1, B = 0, \Phi = 0$ の時の DBI 作用 (3.11) と等しい.

5.5 Dブレーンに対応する境界状態

ここまでは全て Neumann 境界条件の元での境界状態だったが, 今度は Dirichlet 境界条件での境界状態を考える. a 方向を Neumann 境界条件 (5.1), i 方向を Dirichlet 境界条件:

$$\left. \frac{\partial X^i}{\partial \sigma} \right|_{\tau=0} = 0 \quad (5.44)$$

をとるとすると, i 方向に関して展開係数は,

$$\begin{aligned} \hat{q}^i &= 0 \\ a_m^\dagger &= -\tilde{a}_m \\ \tilde{a}_m^\dagger &= -a_m \end{aligned} \quad m \geq 1 \quad (5.45)$$

となる. これは Neumann 境界条件の場合 (5.5) と符号のみ異なっているため, 対応する境界状態は Neumann 境界条件の時の $\alpha^\dagger, \tilde{\alpha}^\dagger$ の符号を変えればよい. あるいは (5.42) を $F \rightarrow \infty$ としても Dirichlet 条件になる. したがって, D プレーンの境界状態は, a, b は D プレーン方向, i, j は D プレーンに垂直な方向を表すとして,

$$|B\rangle_D = \exp \left[\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \alpha_{-m}^a \alpha_{-m}^a - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \alpha_{-m}^i \alpha_{-m}^i \right) \right] |0\rangle \quad (5.46)$$

となる.

さらに, 傾いた D プレーンに対応した境界状態を考える. それは, (5.46) を回転させれば得られる (図 5.48).

(c, k) 平面内で角度 ω だけ回転させると,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m} (\alpha_{-m}^c \alpha_{-m}^k) \begin{pmatrix} \cos \omega & \sin \omega \\ -\sin \omega & \cos \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \omega & -\sin \omega \\ \sin \omega & \cos \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_{-m}^{\dagger c} \\ \tilde{\alpha}_{-m}^{\dagger k} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{m} (\alpha_{-m}^c \alpha_{-m}^k) \begin{pmatrix} \cos 2\omega & \sin 2\omega \\ \sin 2\omega & -\cos 2\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_{-m}^c \\ \tilde{\alpha}_{-m}^k \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.47)$$

より,

$$\begin{aligned} |B\rangle_D &= \exp \left[\sum_{a \neq c} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \alpha_{-m}^a \tilde{\alpha}_{-m}^a \right) - \sum_{i \neq k} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \alpha_{-m}^i \tilde{\alpha}_{-m}^i \right) \right. \\ & \quad \left. + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} (\alpha_{-m}^c \alpha_{-m}^k) \begin{pmatrix} \cos 2\omega & \sin 2\omega \\ \sin 2\omega & -\cos 2\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_{-m}^c \\ \tilde{\alpha}_{-m}^k \end{pmatrix} \right] |0\rangle \end{aligned} \quad (5.48)$$

となる. 3 章で見たように, ゲージ場がある D プレーンの T-双対は低い次元の傾いた D プレーンであり, 境界状態を用いた T-双対変換に置いてちょうど (5.48) の形が現れる (6 章).

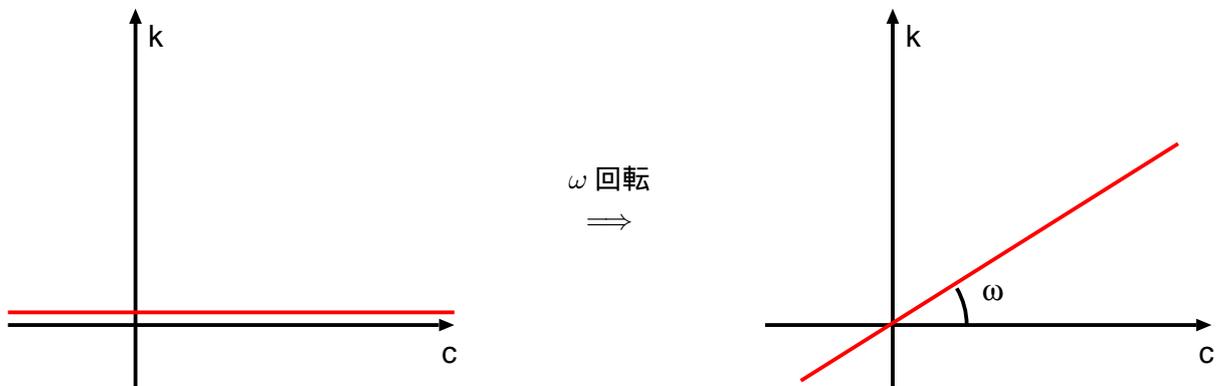


図 5.4: D プレーンの回転

第6章 トーラス上の境界状態

この章では背景場のあるトーラス上の境界状態を考える。前章の平坦な開いた時空での境界状態とはゼロモードが異なる。また，Narain の手法 [10][13] を用いて境界状態の T-双対性について議論する。

6.1 Narain 格子

背景場 G, B, Φ がある時の $2d$ 次元トーラス上の閉弦を考える。世界面の作用は，

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_0^{2\pi} d\sigma \int d\tau \left[\sqrt{g} g^{\alpha\beta} G_{MN} \partial_\alpha X^M \partial_\beta X^N + \varepsilon^{\alpha\beta} B_{MN} \partial_\alpha X^M \partial_\beta X^N - \frac{1}{2} \sqrt{g} \Phi R^{(2)} \right]. \quad (6.1)$$

X の周期性を，トーラスの半径を $R = \sqrt{\alpha'} a_M$ として，

$$X^M \sim X^M + 2\pi\sqrt{\alpha'} a_M \quad (6.2)$$

の同一視で書ける。多脚場 $\{e^a_M\}$ を

$$a_M^{-1} e_a^M a_N^{-1} e^{aN} = G_{MN}, \quad a_M e^a_M a_N^{-1} e^*_a{}^N = \delta_M^N, \quad a_M e^*_a{}^M a_N e^{*aN} = G^{MN} \quad (6.3)$$

ととる。また， a_M を用いてリスケールして，

$$\begin{aligned} \hat{G}_{MN} &\equiv e^a_M e_{aN} = a_M a_N G_{MN}, \\ \hat{B}_{MN} &\equiv a_M a_N B_{MN}, \quad \hat{F}_{MN} \equiv a_M a_N F_{MN}, \quad \hat{\mathcal{F}}_{MN} \equiv a_M a_N \mathcal{F}_{MN}, \\ \hat{G}^{MN} &\equiv e_a^M e^{aN} = a_M^{-1} a_N^{-1} G^{MN}, \\ \hat{B}^{MN} &\equiv a_M^{-1} a_N^{-1} B^{MN}, \quad \hat{F}^{MN} \equiv a_M^{-1} a_N^{-1} F^{MN}, \quad \hat{\mathcal{F}}^{MN} \equiv a_M^{-1} a_N^{-1} \mathcal{F}^{MN} \\ \hat{X}^M &\equiv a_M^{-1} X^M \end{aligned} \quad (6.4)$$

と定義すると， $\hat{G}, \hat{B}, \hat{X}$ を使って (6.1) と同じ形の作用がかける。但し， \hat{X} の周期性は

$$\hat{X}^M \sim \hat{X}^M + 2\pi\sqrt{\alpha'}. \quad (6.5)$$

この時，周期 a_M の情報は \hat{G}, \hat{B} に入っている。閉弦のモード展開は

$$\begin{aligned} \hat{X}^M &= X^a e^*_a{}^M = \hat{X}_L^M(z) + \hat{X}_R^M(\bar{z}), \\ \hat{X}_L^M(z) &= X_L^a e^*_a{}^M = \hat{x}_L^M - i \frac{\alpha'}{2} \hat{p}_L^M \ln z + i \left(\frac{\alpha'}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{m \neq 0} \frac{\hat{\alpha}_m^M}{m z^m}, \\ \hat{X}_R^M(z) &= X_R^a e^*_a{}^M = \hat{x}_R^M - i \frac{\alpha'}{2} \hat{p}_R^M \ln \bar{z} + i \left(\frac{\alpha'}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{m \neq 0} \frac{\hat{\alpha}_m^M}{m \bar{z}^m} \end{aligned} \quad (6.6)$$

となる. 展開係数の交換関係は

$$\begin{aligned}
[\hat{\alpha}_m^M, \hat{\alpha}_n^N] &= [\hat{\alpha}_m^a, \hat{\alpha}_n^b] e_a^*{}^M e^{*a}{}^N \\
&= m\delta_{m+n,0} \hat{G}^{MN}, \\
[\hat{x}_{L,R}^M, \hat{p}_{L,R}^N] &= [\hat{x}_{L,R}^a, \hat{p}_{L,R}^b] e_a^*{}^M e^{*a}{}^N \\
&= i\hat{G}^{MN}
\end{aligned} \tag{6.7}$$

である. (^) 無しの X も同様に

$$\begin{aligned}
X^M &= X^a a_M e_a^*{}^M = X_L^M(z) + X_R^M(\bar{z}), \\
X_L^M(z) &= x_L^M - i\frac{\alpha'}{2} p_L^M \ln z + i\left(\frac{\alpha'}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{m \neq 0} \frac{\alpha_m^M}{mz^m}
\end{aligned} \tag{6.8}$$

等とかける.

ここで, \hat{p}^M を Kaluza-Klein モード演算子 \mathbf{n} , 巻きつき数演算子 \mathbf{m} で表す. まず, 共役運動量 P_i は,

$$\begin{aligned}
P_M &= \frac{\delta L}{\delta(i\dot{X}^M)} \\
&= \frac{1}{2\pi\alpha'} (G_{MN} i\dot{X}^N + B_{MN} X^{N'}) = p_M + (\text{振動子}).
\end{aligned} \tag{6.9}$$

\dot{X} は X の τ 微分, X' は σ 微分, p_M は弦の重心運動量を表す. ここで, X の周期性より, p_M は量子化されて

$$p_M = \frac{\mathbf{n}_M}{2\pi\sqrt{\alpha'} a_M} \tag{6.10}$$

となっている. 従って, ハミルトニアンは,

$$\begin{aligned}
H &= \int_0^{2\pi} d\sigma [P \cdot \dot{X} - \mathcal{L}] \\
&= \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_0^{2\pi} d\sigma \left[P_M G^{MN} (2\pi\alpha' P_N - B_{MN} X^{N'}) \right. \\
&\quad \left. + \{ (2\pi\alpha' P_M - B_{MN} X^{N'}) G^{MP} (2\pi\alpha' P_P - B_{PQ} X^{Q'}) - X^{M'} G_{MN} X^{N'} \right. \\
&\quad \left. + 2X^{M'} B_{MN} G^{MP} (2\pi\alpha' P_P - B_{PQ} X^{Q'}) \} \right] \\
&= \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_0^{2\pi} d\sigma \left[(2\pi\alpha')^2 (P_M G^{MN} P_N) + X^{M'} (G - B G^{-1} B)_{MN} X^{N'} \right. \\
&\quad \left. + 4\pi\alpha' X^{M'} B_{MP} (G^{-1})^{PM} P_M \right]
\end{aligned} \tag{6.11}$$

だが,

$$\begin{aligned}
P_{LM} &= \left[P_M - \frac{1}{2\pi\alpha'} (G + B)_{MN} X^{N'} \right], \\
P_{RM} &= \left[P_M + \frac{1}{2\pi\alpha'} (G - B)_{MN} X^{N'} \right]
\end{aligned} \tag{6.12}$$

と表すと,

$$H = \pi\alpha' \int_0^{2\pi} d\sigma (P_L^2 + P_R^2) \quad (6.13)$$

と書くことができる. このうち, ゼロモードだけを見ると, σ 積分を実行して,

$$\begin{aligned} H|_{\text{zero}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a_M a_N} (\mathbf{n}_M G^{MN} \mathbf{n}_N) + a_M a_N \mathbf{m}^M (G - B G^{-1} B)_{MN} \mathbf{m}^N \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{a_M}{a_N} \mathbf{m}^M B_{MP} G^{PN} \mathbf{n}_N \right) \\ &= \frac{\alpha'}{4} G^{MN} (p_{LM} p_{LN} + p_{RM} p_{RN}), \\ \left(\frac{\alpha'}{2} \right)^{\frac{1}{2}} p_{LN} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\mathbf{n}_N}{a_N} - a_N (G + B)_{NN'} \mathbf{m}^{N'} \right), \\ \left(\frac{\alpha'}{2} \right)^{\frac{1}{2}} p_{RN} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\mathbf{n}_N}{a_N} + a_N (G - B)_{NN'} \mathbf{m}^{N'} \right). \end{aligned} \quad (6.14)$$

また,

$$H|_{\text{zero}} = (\mathbf{n}_M \hat{G}^{MN} \mathbf{n}_N) + \mathbf{m}^M (\hat{G} - \hat{B} \hat{G}^{-1} \hat{B})_{MN} \mathbf{m}^N + 2 \mathbf{m}^M \hat{B}_{MP} \hat{G}^{PN} \mathbf{n}_N \quad (6.15)$$

と計算できるので, 無次元運動量 l を使って,

$$H|_{\text{zero}} = \frac{1}{2} (l_L^2 + l_R^2), \quad (6.16)$$

$$\begin{aligned} l_{LN} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\mathbf{n}_N - (\hat{G} + \hat{B})_{NN'} \mathbf{m}^{N'} \right), \\ l_{RN} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\mathbf{n}_N + (\hat{G} - \hat{B})_{NN'} \mathbf{m}^{N'} \right) \end{aligned} \quad (6.17)$$

と表すこともできる. ここで, T-双対性に対する変換性を見る.

$$l_L^2 - l_R^2 = 2 \mathbf{m}^M \mathbf{n}_M \in 2\mathbb{Z} \quad (6.18)$$

より, 運動量 (l_L, l_R) は偶自己双対格子 $\Gamma^{(2d, 2d)}$ を成しており, $O(2d, 2d; \mathbb{R})$ の変換性を持つことが分かる. $O(2d, 2d; \mathbb{R})$ の元 g は $2d \times 2d$ 行列 a, b, c, d を用いて,

$$\begin{aligned} g &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \\ g^t J g &= J, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.19)$$

を満たす. 即ち,

$$a^t c + c^t a = 0, \quad b^t d + d^t b = 0, \quad a^t d + b^t c = \mathbf{1} \quad (6.20)$$

を満たす. $J^{-1} = J$ より, 両辺逆行列をとって $g J g^t = J$ が成り立つので,

$$a b^t + b a^t = 0, \quad c d^t + d c^t = 0, \quad a d^t + b c^t = \mathbf{1} \quad (6.21)$$

も満たす. $O(2d, 2d; \mathbb{R})$ のもとでの $\hat{E} = \hat{G} + \hat{B}$ の変換性を見る. ハミルトニアン (6.16) は,

$$H = \frac{1}{2} z^t M z, \quad (6.22)$$

$$z = \begin{pmatrix} \mathbf{m}^M \\ \mathbf{n}_N \end{pmatrix}, \quad M(\hat{E}) = \begin{pmatrix} \hat{G} - \hat{B}\hat{G}^{-1}\hat{B} & \hat{B}\hat{G}^{-1} \\ -\hat{G}^{-1}\hat{B} & \hat{G}^{-1} \end{pmatrix}$$

と書ける. z は $O(2d, 2d; \mathbb{R})$ で

$$z' = g^t z \quad (6.23)$$

と変換するので, 行列 M は,

$$M_g \equiv g M g^t \quad (6.24)$$

と変換する. これに対応する \hat{E} の変換を求めるために, 行列

$$g_{\hat{E}} = \begin{pmatrix} e & \hat{B}(e^t)^{-1} \\ 0 & (e^t)^{-1} \end{pmatrix} \quad (6.25)$$

を考える. この行列は, $g_{\hat{E}} J g_{\hat{E}}^t = J$ を満たすため, $O(2d, 2d; \mathbb{R})$ の元であり,

$$g_{\hat{E}} g_{\hat{E}}^t = \begin{pmatrix} e & \hat{B}(e^t)^{-1} \\ 0 & (e^t)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ -e^{-1}\hat{B} & (e)^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{G} - \hat{B}\hat{G}^{-1}\hat{B} & \hat{B}\hat{G}^{-1} \\ -\hat{G}^{-1}\hat{B} & \hat{G}^{-1} \end{pmatrix} = M \quad (6.26)$$

を満たす. ここで, $2d \times 2d$ 行列 F に対する $g \in O(2d, 2d; \mathbb{R})$ の作用を

$$g(F) \equiv (aF + b)(cF + d)^{-1} \quad (6.27)$$

と定義する¹. すると,

$$\begin{aligned} g_{\hat{E}}(\mathbf{1}) &= (e + \hat{B}(e^t)^{-1})e^t \\ &= \hat{G} + \hat{B} = \hat{E} \end{aligned} \quad (6.28)$$

従って,

$$\begin{aligned} M' = M(\hat{E}') &\equiv M_g = g M g^t = g g_{\hat{E}} g_{\hat{E}}^t g^t = g_{\hat{E}'} g_{\hat{E}'}^t, \\ g_{\hat{E}'} &= g g_{\hat{E}} \end{aligned} \quad (6.29)$$

¹この議論は, 2つの実数 (z_1, z_2) に対する $SL(2, \mathbb{Z})$ 変換

$$\begin{pmatrix} z'_1 \\ z'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

を一つの複素数 w の変換

$$w' = \frac{aw + b}{cw + d}$$

として見たことと似ている.

となるので，結局 \hat{E} の変換性は

$$\begin{aligned}\hat{E}' &= g_{\hat{E}'}(\mathbf{1}) = gg_{\hat{E}}(\mathbf{1}) = g(\hat{E}) \\ &= (a\hat{E} + b)(c\hat{E} + d)^{-1}\end{aligned}\quad (6.30)$$

のようになる。また，同様にして

$$\hat{E}'^t = (a\hat{E}^t - b)(-c\hat{E}^t + d)^{-1}\quad (6.31)$$

と変換することがわかる。

次に，振動子の変換を見る。(6.14) を (6.8) に代入して，

$$\begin{aligned}X_L^M &= x_L^M - i\frac{\sqrt{\alpha'}}{2}G^{MN} \left[\frac{\mathbf{n}_N}{a_N} + a_N \mathbf{m}^P (G_{PN} + B_{PN}) \right] \ln z + i \left(\frac{\alpha'}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{m \neq 0} \frac{\alpha_m^M}{mz^m}, \\ X_R^M &= x_R^M - i\frac{\sqrt{\alpha'}}{2}G^{MN} \left[\frac{\mathbf{n}_N}{a_N} - a_N \mathbf{m}^P (G_{PN} - B_{PN}) \right] \ln z + i \left(\frac{\alpha'}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{m \neq 0} \frac{\tilde{\alpha}_m^M}{m\bar{z}^m},\end{aligned}\quad (6.32)$$

したがって，

$$\begin{aligned}X^M &= X_L^M + X_R^M \\ &= x_L^M + x_R^M + i\tau\sqrt{\alpha'}G^{MN} \left[\frac{\mathbf{n}_N}{a_N} + a_N \mathbf{m}^P B_{PN} \right] \\ &\quad - \sqrt{\alpha'}\mathbf{m}^M \sigma + i \left(\frac{\alpha'}{2} \right) \sum_{n \neq 0} \left(\frac{\alpha_n^M}{nz^n} + \frac{\tilde{\alpha}_n^M}{n\bar{z}^n} \right).\end{aligned}\quad (6.33)$$

これを (6.9) に代入すると，

$$P_M = \frac{1}{2\pi\sqrt{\alpha'}} \left[\frac{\mathbf{n}_M}{a_M} + \sqrt{\frac{1}{2}} \sum_n \left(E_{MN} \frac{\alpha_n^N}{z^n} + E_{MN}^t \frac{\tilde{\alpha}_n^N}{\bar{z}^n} \right) \right].\quad (6.34)$$

よって，ハミルトニアン H は，

$$\begin{aligned}H &= \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_0^{2\pi} d\sigma \left[(2\pi\alpha')^2 (P_M G^{MN} P_N) + X^{M'} (G - B G^{-1} B)_{MN} X^{N'} \right. \\ &\quad \left. + 4\pi\alpha' X^{M'} B_{MP} (G^{-1})^{PM} P_M \right] \\ &= \frac{1}{2} z M z + N + \tilde{N} \\ N &= \sum_{n>0} \hat{\alpha}_{-n}^M \hat{G}_{MN} \hat{\alpha}_n^N, \quad \tilde{N} = \sum_{n>0} \hat{\tilde{\alpha}}_{-n}^M \hat{G}_{MN} \hat{\tilde{\alpha}}_n^N\end{aligned}\quad (6.35)$$

ここで，(6.30) より，

$$\begin{aligned}(d + c\hat{E})^t \hat{G}' (d + c\hat{E}) &= (d + c\hat{E})^t \frac{\hat{E}' + \hat{E}'}{2} (d + c\hat{E}) \\ &= \frac{1}{2} \left((a\hat{E} + b)^t (d + c\hat{E}) + (d + c\hat{E})^t (a\hat{E} + b) \right) \\ &= \frac{1}{2} (\hat{E} + \hat{E}^t) = \hat{G}\end{aligned}\quad (6.36)$$

3行目で, (6.21) の関係を使った. また, (6.31) から, 同様に,

$$(d - c\hat{E}^t)^t \hat{G}' (d - c\hat{E}^t) = \hat{G} \quad (6.37)$$

この関係と, 演算子の交換関係を保つという条件から, 振動子は

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_n &= T_+ \hat{\alpha}'_n, \quad \hat{\tilde{\alpha}}_n = T_- \hat{\tilde{\alpha}}'_n, \\ T_+ &\equiv (cE + d)^{-1}, \quad T_- \equiv (-cE^t + d)^{-1} \end{aligned} \quad (6.38)$$

のように変換する.

トーラスの境界状態

平坦な時空で計算した境界状態 (5.41) を背景場がある場合について計算しなおす. (5.33) の指数部分は,

$$\begin{aligned} (\bar{x}' | 1 + 2\pi\alpha' F | x') &= \sum_n \bar{x}'_n{}^a (1 + 2\pi\alpha' F)_{ab} x'_b \\ &\rightarrow \sum_n a_M \bar{x}'_n{}^M a_M e^a{}_M (1 + 2\pi\alpha' F)_{ab} a_N x'_n{}^N a_N e^b{}_N \\ &= \bar{x}'_n{}^M (G + \mathcal{F})_{MN} x'_n{}^N \\ \left(a^\dagger \left| \frac{1 - 2\pi\alpha' F}{1 + 2\pi\alpha' F} \right| \tilde{a}^\dagger \right) &= \sum_n a_n{}^{a\dagger} (1 + 2\pi\alpha' F)_{ab}^{-1} \eta^{bc} (1 - 2\pi\alpha' F)_{cd} \tilde{a}^d \\ &\rightarrow \sum_n a_M a_n{}^{M\dagger} a_M^{-1} e^a{}_M e_{aN} e^{*bN} (1 + 2\pi\alpha' F)_{bc}^{-1} \\ &\quad e^{*cP} e^d{}_P (1 - 2\pi\alpha' F)_{de} a_Q^{-1} e^e{}_Q a_Q \tilde{a}^{Q\dagger} \\ &= \sum_n \hat{a}_n{}^{M\dagger} \hat{G}_{MN} (\hat{G} + \hat{\mathcal{F}})^{-1 NP} (\hat{G} - \hat{\mathcal{F}})_{PQ} \hat{a}_n{}^{Q\dagger} \\ &= \sum_n a_n{}^{M\dagger} G_{MN} (G + \mathcal{F})^{-1 NP} (G - \mathcal{F})_{PQ} \tilde{a}_n{}^{Q\dagger} \end{aligned} \quad (6.39)$$

$$\left(x' \equiv x + \frac{2a^\dagger}{1 + 2\pi\alpha' F}, \quad \bar{x}' \equiv \bar{x} + \frac{2\tilde{a}^\dagger}{1 + 2\pi\alpha' F}, \quad \hat{\mathcal{F}}_{MN} \equiv 2\pi\alpha' e^a{}_M F_{ab} e^b{}_N \right)$$

のように書き換えられるので, 境界状態は

$$|F\rangle = \text{tr} [\det(G + \mathcal{F})]^{1/2} \exp \left[\left(G \frac{G - \mathcal{F}}{G + \mathcal{F}} \right)_{MN} \left(- \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \alpha_{-m}^{\dagger M} \tilde{\alpha}_{-m}^{\dagger N} \right) \right] |0\rangle \quad (6.40)$$

のようになる. (5.41) と同様に $\langle 0|F\rangle$ を計算すると, 背景場 G もある DBI 作用になる.

6.2 コサイクル因子

コンパクトなターゲット空間で閉弦の振幅を考えると, 位相の多価性の問題が生じる. 例えば, 3つの閉弦の tree レベルの振幅 (Regge 頂点) を考える. tree レベル振幅は, 球面に 3

つの頂点演算子を置いて計算するが、球面上では順序づけができないため、それぞれの頂点演算子の位置を入れ替えても不変であるはずである。しかし、実際に振幅 V_3 を計算すると²,

$$V_3 \sim \exp \left[\sum_{j>i=0}^2 \hat{\alpha}_0^i \ln(z_j - z_i) \hat{G} \hat{\alpha}_0^j + \sum_{j>i=0}^2 \hat{\alpha}_0^i \ln(\bar{z}_j - \bar{z}_i) \hat{G} \hat{\alpha}_0^j \right] \quad (6.41)$$

となる。 i, j は 3 つの弦を表す添字である。これの z_1 と z_2 を入れ替えると、 $\ln(-z) = \ln z - i\pi$ より、

$$\begin{aligned} & \exp \left[-i\pi(\hat{\alpha}_0^1 \hat{G} \hat{\alpha}_0^2 - \hat{\alpha}_0^1 \hat{G} \hat{\alpha}_0^2) \right] \\ = & \exp \left[-i\pi \frac{1}{2} \left\{ \hat{G}^{MN} \left(\mathbf{n}_{1N} + (\hat{G} - \hat{B})_{NN'} \mathbf{m}_1^{N'} \right) \hat{G}_{MP} \hat{G}^{PQ} \left(\mathbf{n}_{2Q} + (\hat{G} - \hat{B})_{QQ'} \mathbf{m}_2' \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + \hat{G}^{MN} \left(\mathbf{n}_{1N} - (\hat{G} + \hat{B})_{NN'} \mathbf{m}_1^{N'} \right) \hat{G}_{MP} \hat{G}^{PQ} \left(\mathbf{n}_{1Q} - (\hat{G} + \hat{B})_{QQ'} \mathbf{m}_1^{Q'} \right) \right\} \right] \\ = & \exp \left[-i\pi (\mathbf{n}_1 \mathbf{m}_2 + \mathbf{n}_2 \mathbf{m}_1) \right] \end{aligned} \quad (6.42)$$

と、余分な位相が出てきて不変ではなくなる。これを解消するために、通常はコサイクル因子をかけて、

$$V_3^c = V_3 \exp \left[\frac{i\pi}{2} (\mathbf{n}_1 \mathbf{m}_2 - \mathbf{n}_2 \mathbf{m}_1) \right] \quad (6.43)$$

として、余分な位相を相殺させる。しかし、コサイクル因子は T-双対変換で不変ではない。実際、(6.23) で変換すると、

$$\begin{aligned} V_3^c &= V_3 \exp \left[\frac{i\pi}{2} (\mathbf{m}'_1 \mathbf{n}'_1) \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d^t & b^t \\ c^t & a^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{m}'_2 \\ \mathbf{n}'_2 \end{pmatrix} \right] \\ &= V_3 \exp \left[i\pi (\mathbf{m}'_1 \mathbf{n}'_1) \begin{pmatrix} cd^t & cb^t - 1/2 \\ -cb^t + 1/2 & ab^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{m}'_2 \\ \mathbf{n}'_2 \end{pmatrix} \right] \\ &= V_3^{c'} \exp \left[i\pi (\mathbf{m}'_1 \mathbf{n}'_1) \begin{pmatrix} cd^t & cb^t \\ -cb^t & ab^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{m}'_2 \\ \mathbf{n}'_2 \end{pmatrix} \right] \\ &= V_3^{c'} \prod_{j=0}^2 \exp \left\{ i\pi \sum_{M<N} ((\mathbf{n}'_i)_M (cd^t)^{MN} (\mathbf{n}'_i)_N + (\mathbf{m}'_i)^M (ab^t)_{MN} (\mathbf{m}'_i)^N) + \mathbf{m}'_j cb^t \mathbf{n}'_j \right\} \end{aligned} \quad (6.44)$$

と、余分な位相が現れる。しかし、この位相は (6.44) のようにそれぞれの頂点演算子に依存する部分の積として表せる。このため、境界状態にも同じ位相を掛ければ T-双対不変になる:

$$|n, m\rangle \rightarrow \exp \left[i\pi \sum_{M<N} ((\mathbf{n}'_i)_M (cd^t)^{MN} (\mathbf{n}'_i)_N + (\mathbf{m}'_i)^M (ab^t)_{MN} (\mathbf{m}'_i)^N) + \mathbf{m}'_j cb^t \mathbf{n}'_j \right] |n, m\rangle \quad (6.45)$$

背景場のある境界状態を見ると、この位相が自然に出ることを以下の章で見る。

²付録 B を参照。

この議論は $N + 1$ 個の場合にも一般化できて、

$$V_{N+1}^c = V_{N+1} \exp \left[\frac{i\pi}{2} \sum_{j>i=1}^N (\mathbf{n}_i \mathbf{m}_j - \mathbf{m}_i \mathbf{n}_j) \right] \quad (6.46)$$

となる。

6.3 背景ゲージ場がある時の境界状態

磁場がある時の境界状態は、境界条件 (5.42) を満たす。よって、

$$\left[(G + \mathcal{F}) \hat{\alpha}_n + (G - \mathcal{F}) \hat{\alpha}_{-n} \right] |B_F\rangle = 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (6.47)$$

が成り立つ。また、磁場はコンパクト化のため、

$$\hat{F}_{MN} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{P_{MN}}{w_M w_N}, \quad \begin{array}{l} P_{MN} : \text{整数行列} \\ w_M : \text{D プレーンの巻きつき数} \end{array} \quad (6.48)$$

となっている。これは、第1Chern数が整数になっているためである。5章と同じように、背景場の無い場合の境界状態を計算し、それに Wilson ライン因子を作用させることで背景場のある境界状態を導き出す。

まず、ウィルソンライン因子を求める。トーラスに巻きついた D プレーン上のゲージポテンシャルは変換関数を用いて、

$$A_M(x + 2\pi\sqrt{\alpha'} a_n) = \Omega_N(x) (i\partial_M + A_M(x)) \Omega_N^\dagger(x) \quad (6.49)$$

と表される。一般的なゲージ変換 $\Lambda(x)$ に対して、変換関数 $\Omega_N(x)$ は

$$\Omega_N(x) \rightarrow \Lambda(x + 2\pi\sqrt{\alpha'} a_N) \Omega_N(x) \Lambda^\dagger(x) \quad (6.50)$$

$\Lambda(x)$ は一般の関数で、周期的である必要もない。

ここで、始点を $x + \sum_L \mathbf{m}^L a_L$ ($\mathbf{m}^L \in \mathbb{Z}$)、終点を x (トーラス上では同一点) とする経路 c に沿った Wilson ライン因子 (5.30) を考える。Wilson ライン因子のゲージ変換は

$$\text{P exp}(-S_A) \rightarrow \Lambda(x) \text{P exp}(-S_A) \Lambda^\dagger \left(x + 2\pi\sqrt{\alpha'} \sum_L \mathbf{m}^L a_L \right) \quad (6.51)$$

であり、これはゲージ不変ではない。これはこの経路がトーラス上では閉じているが、被覆空間では開いているためである。そのため、変換関数 $\Omega_N(x)$ を用いて、終点を始点に戻すことでゲージ不変にする (図 6.1):

$$\prod_{K=1}^{2d} \prod_{m=0}^{\mathbf{m}^K-1} \left[\Omega_K(x + 2\pi\sqrt{\alpha'} \sum_L \mathbf{m}^L a_L + 2\pi\sqrt{\alpha'} m a_K) \right] \text{P exp}(-S_A). \quad (6.52)$$

これは確かにゲージ不変で、これをトーラス上の正しい Wilson ライン因子とする。

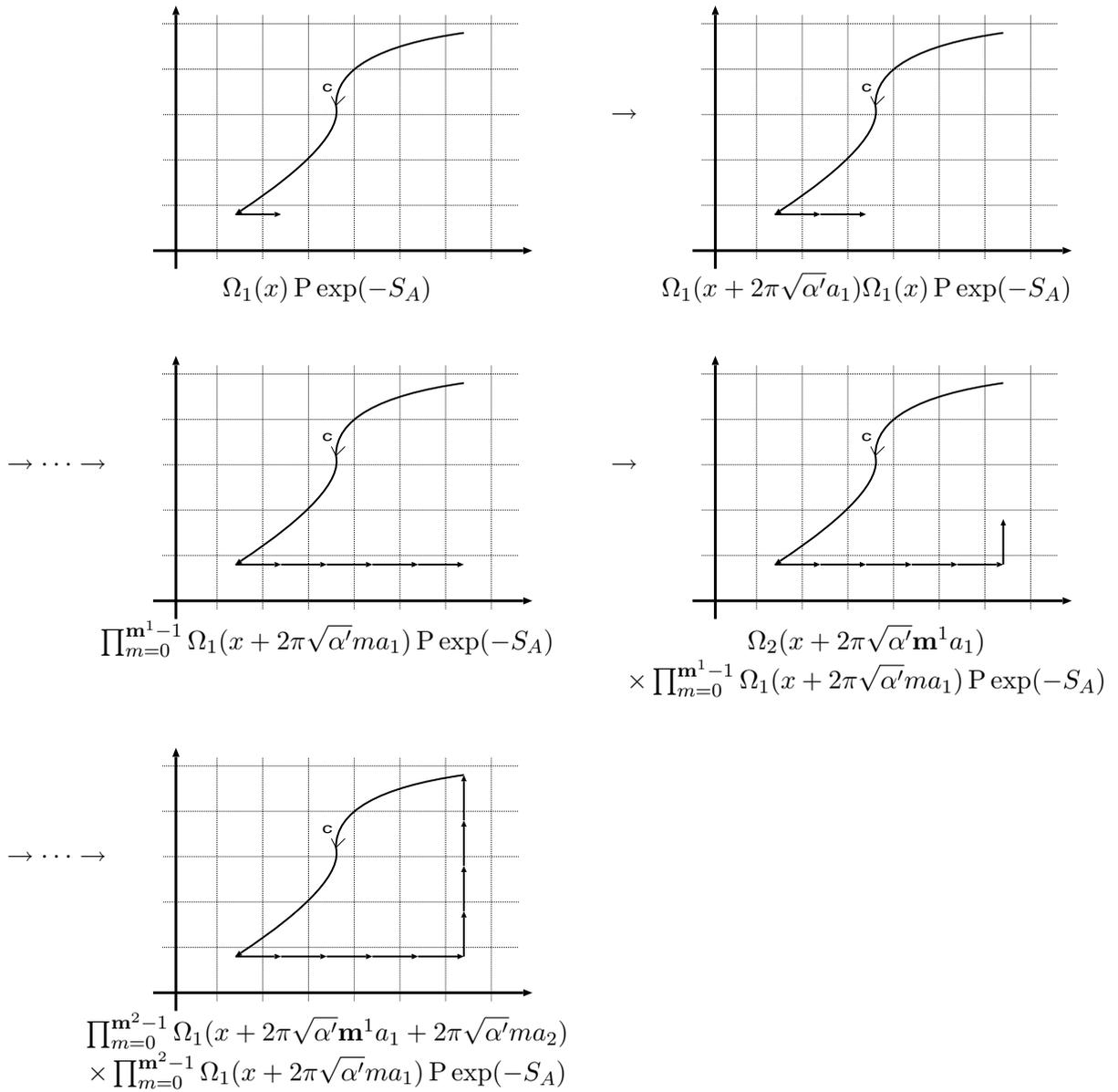


図 6.1: 積分路 c の端点を変換関数 Ω でつなぐ (2次元の例)

6.4 トーラスに巻きついたDブレーン

第3章で見たように, トーラス上に巻きついたDブレーンは非自明束としてみる事ができる. ここで, ゲージ場 F を, ブロック対角系:

$$2\pi\alpha'\hat{F} = \left(\begin{array}{ccccc} 0 & \frac{k_1}{N_1} & 0 & 0 & \cdots \\ -\frac{k_1}{N_1} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{k_2}{N_2} & \cdots \\ 0 & 0 & -\frac{k_2}{N_2} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array} \right), \quad \left. \begin{array}{l} k_\alpha \in \mathbb{Z} \\ N_\alpha \in \mathbb{Z} - \{0\} \end{array} \right\} \forall \alpha = 1, \dots, d \quad (6.53)$$

としておくとも便利である. k_α と N_α は互いに素である. また, (6.53) の基底を使えば, T^{2d} を T^2 の α 個の直積で表すことができ, 偶数方向 $x_M = x_{2\alpha}$ に沿って N_α 回巻くDブレーンを選ぶ:

$$\begin{aligned} \Omega_{2\alpha}(x) &= \mathbf{1}_{N_1 \times N_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{1}_{N_{\alpha-1} \times N_{\alpha-1}} \otimes V_{N_\alpha \times N_\alpha} \otimes \mathbf{1}_{N_{\alpha+1} \times N_{\alpha+1}} \otimes \cdots \otimes \mathbf{1}_{N_d \times N_d}, \\ \Omega_{2\alpha-1}(x) &= \mathbf{1}_{N_1 \times N_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{1}_{N_{\alpha-1} \times N_{\alpha-1}} \otimes (U_{N_\alpha \times N_\alpha})^{k_\alpha} \\ &\quad \otimes \mathbf{1}_{N_{\alpha+1} \times N_{\alpha+1}} \otimes \cdots \otimes \mathbf{1}_{N_d \times N_d} \cdot e^{\frac{i}{a_{2\alpha}\sqrt{\alpha'}} \frac{k_\alpha}{N_\alpha} x^{2\alpha}} \end{aligned} \quad (6.54)$$

V, U は (4.9). 変換性より, A_M は

$$\begin{aligned} 2\pi\alpha' a_{2\alpha} A_{2\alpha}(x) &= \frac{k_\alpha x^{2\alpha-1}}{N_\alpha a_{2\alpha-1}} + 2\pi\sqrt{\alpha'} \theta_{2\alpha}, \\ 2\pi\alpha' a_{2\alpha-1} A_{2\alpha-1}(x) &= 2\pi\sqrt{\alpha'} \theta_{2\alpha-1}, \quad 2\pi\sqrt{\alpha'} \theta_M : \text{Wilson ライン}. \end{aligned} \quad (6.55)$$

(6.52) を弦理論の境界状態に作用する演算子に拡張すると,

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_A = \text{Tr} \left\{ \prod_{K=1}^{2d} \prod_{m=0}^{m_K-1} \left[\Omega_K \left(X|_{\sigma=2\pi, \tau=0} + 2\pi\sqrt{\alpha'} \sum_L^{K-1} \mathbf{m}^L a_L + 2\pi\sqrt{\alpha'} m a_K \right) \right] \right. \\ \left. \times \text{P exp} \left(-\frac{i}{2\pi\alpha'} \int_0^{2\pi} A \frac{\partial X}{\partial \sigma} d\sigma \right) \right\} \end{aligned} \quad (6.56)$$

である.

6.5 境界状態の計算

Wilson ループ因子 \mathcal{O}_A が求まったので, 実際にこれを背景場のない境界状態に作用させて境界状態を求める:

$$|B_{F,\theta}\rangle = \mathcal{O}_A |B_{A=0}\rangle \quad (6.57)$$

巻きついたDブレーンに対応する境界状態は, 巻きついていないDブレーンに対する境界状態に (6.56) を

$$\begin{aligned} A &= 0, \\ \Omega_{2\alpha}(x) &= \mathbf{1}_{N_1 \times N_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{1}_{N_{\alpha-1} \times N_{\alpha-1}} \otimes V_{N_\alpha \times N_\alpha} \otimes \mathbf{1}_{N_{\alpha+1} \times N_{\alpha+1}} \otimes \cdots \otimes \mathbf{1}_{N_d \times N_d} \end{aligned}$$

としたもの，即ち，

$$\mathrm{Tr} \left[\prod_{K=1}^{2d} \Omega_K^{\mathbf{m}_K} \right] \quad (6.58)$$

を作用させれば求まる. $\mathrm{Tr} \Omega_K^{\mathbf{m}_K}$ は, $\mathbf{m}_K = w_k \nu^K$ (w_K : D プレーンの K 方向の巻きつき数, $\nu^K \in \mathbb{Z}$) の時のみゼロでない値を持つため, この D プレーンから放出される閉弦の巻きつき数は D プレーンの巻きつき数と同じでなければならない. したがって, (6.40) で F を 0 に, 真空 $|0\rangle$ を Kaluza-Klein モード 0, 巻きつき数 $w_M \nu^M$ の状態 $|0; w_M \nu^M\rangle$ に代えて,

$$|B_{A=0}\rangle = \sqrt{\det(G+B)} \sum_{\nu^M \in \mathbb{Z}} \prod_{n=1}^{\infty} e^{\frac{1}{2} \alpha_n^\dagger G R_0 \alpha_n} |0; w_M \nu^M\rangle, \quad R_0 = (G+B)^{-1}(G-B) \quad (6.59)$$

となる.

次に磁場 F を考える. Wilson ラインのみの場合は簡単で, (6.56) より,

$$\begin{aligned} |B_\theta\rangle &= e^{\frac{i}{\sqrt{\alpha'}} \int_0^{2\pi} \theta dX} |B_{A=0}\rangle \\ &= e^{2\pi i \theta \mathbf{m}}. \end{aligned} \quad (6.60)$$

一般の A がある場合を考えるために, X をゼロモード部分と非ゼロモード部分に分け, ゼロモード部分を見る. 非ゼロモード部分は, 開いた空間の議論 (5 章) と同じなので, $G+B$ に $2\pi\alpha'F$ を加える ($B \rightarrow \mathcal{F}$) のと同じ結果になる. まず, 変換関数が (6.54) で定義されているために, この境界状態は α 番目の T^2 に N_α の整数倍だけ巻きついた閉弦とのみ結合する. そのため, 行列

$$w = \begin{pmatrix} N_1 & 0 & \cdots \\ 0 & N_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \otimes \mathbf{1}_{2 \times 2} \quad (6.61)$$

を定義し, $w\nu$ を D プレーンから放出される閉弦の巻きつきを表す縦ベクトルとする.

(5.42) の両辺を積分して,

$$\mathbf{n}_M = -2\pi\alpha' \hat{F}_{MN} \mathbf{m}^N \quad (6.62)$$

となるが, この関係は \mathcal{O} の作用からも導かれることが分かる. (6.33), (6.54), (6.55), (6.56),

(6.57) を用いて ,

$$\begin{aligned}
|B_F\rangle &= \mathcal{O}_A |B\rangle \\
&= \text{Tr} \left[\prod_{\alpha=1}^d \left\{ \prod_{m=0}^{\mathbf{m}_\alpha-1} \Omega_{2\alpha} \left(X|_{\sigma=2\pi, \tau=0} + 2\pi\sqrt{\alpha'} \sum_L^{2\alpha-1} a_L \mathbf{m}^L + 2\pi\sqrt{\alpha'} m a_{2\alpha} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times \prod_{m=0}^{\mathbf{m}_{\alpha-1}-1} \Omega_{2\alpha-1} \left(X|_{\sigma=2\pi, \tau=0} + 2\pi\sqrt{\alpha'} \sum_L^{2\alpha-2} a_L \mathbf{m}^L + 2\pi\sqrt{\alpha'} m a_{2\alpha-1} \right) \right\} \right. \\
&\quad \left. \times \text{P} e^{\frac{i}{2\pi\alpha} \int_0^{2\pi} A \frac{\partial X}{\partial \sigma} d\sigma} \right] |B\rangle \\
&= \text{Tr} \left\{ \left(V_1^{\mathbf{m}_1} \times U_1^{k_1 \mathbf{m}_1} \right) \otimes \cdots \otimes \left(V_d^{\mathbf{m}_d} \times U_d^{k_d \mathbf{m}_d} \right) \right. \\
&\quad \times \prod_{\alpha=1}^d \exp \left[i \frac{\mathbf{m}^{2\alpha-1}}{\sqrt{\alpha'}} \frac{k_\alpha}{N_\alpha} \left(\hat{x}_L^{2\alpha} + \hat{x}_R^{2\alpha} - 2\pi\sqrt{2\alpha'} \mathbf{m}^{2\alpha} \right) \right] \\
&\quad \left. \times \text{P} \exp \left[\frac{i}{2\pi\alpha'} \int_0^{2\pi} d\sigma \frac{k_\alpha}{N_\alpha} \left(\hat{x}_L^{2\alpha-1} + \hat{x}_R^{2\alpha-1} - \sqrt{2\alpha'} \mathbf{m}^{2\alpha-1} \sigma \right) \cdot \left(-\sqrt{\alpha'} \mathbf{m}^{2\alpha} \right) \right] \right\} |B\rangle .
\end{aligned} \tag{6.63}$$

座標演算子 $\hat{q}^M = \hat{x}_L^M + \hat{x}_R^M$ として , \mathbf{m}^M の一次の寄与を見ると ,

$$\begin{aligned}
&= \exp \left\{ i \sum_{\alpha=1}^d \frac{k_\alpha}{N_\alpha} \mathbf{m}^{2\alpha-1} \frac{\hat{q}^{2\alpha}}{\sqrt{\alpha'}} \right\} \cdot \exp \left\{ -i \sum_{\alpha=1}^d \frac{k_\alpha}{N_\alpha} \frac{\hat{q}^{2\alpha-1}}{\sqrt{\alpha'}} \mathbf{m}^{2\alpha} \right\} |0; w\nu\rangle \\
&= \left| -2\pi\alpha' \hat{F} w\nu; w\nu \right\rangle .
\end{aligned} \tag{6.64}$$

ここで , (6.14) を使った .

次に , Wilson ループ因子の中の $\hat{\alpha}_0$ の 2 次の寄与を考えると ,

$$\begin{aligned}
&\exp \left[-\frac{i}{2} \sum_{\alpha=1}^d \int_0^{2\pi} d\sigma \frac{1}{2\pi} (\hat{\alpha}_0^{2\alpha-1} - \hat{\alpha}_0^{2\alpha-1}) (\hat{\alpha}_0^{2\alpha} - \hat{\alpha}_0^{2\alpha}) \sigma \right] \left| -2\pi\alpha' \hat{F} w\nu; w\nu \right\rangle \\
&= \exp \left[-i\pi \sum_{\alpha=1}^d N_\alpha k_\alpha \mathbf{m}^{2\alpha-1} \mathbf{m}^{2\alpha} \right] \left| -2\pi\alpha' \hat{F} w\nu, w\nu \right\rangle \\
&= \exp \left[-i\pi \sum_{M>N} \mathbf{m}^M \left(2\pi\alpha' \hat{F}_{MN} \right) \mathbf{m}^N \right] \left| -2\pi\alpha' \hat{F} w\nu, w\nu \right\rangle
\end{aligned} \tag{6.65}$$

結局 , \mathcal{O}_A の作用により , 境界状態 $|B_{F,\theta}\rangle$ は (6.59) の運動量を 0 から $-2\pi\alpha' \hat{F} w\nu$ に代え , (6.60),(6.65) の位相を加えたもの:

$$\begin{aligned}
|B_{F,\theta}\rangle &= \sqrt{\text{Det}(G + \mathcal{F})} \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^{2d}} e^{-i\pi \sum_{M>N} \mathbf{m}^M 2\pi\alpha' \hat{F}_{MN} \mathbf{m}^N} e^{2\pi i \theta \mathbf{m}} \\
&\quad \times \left[\prod_{n=1}^{\infty} e^{\frac{1}{n} \alpha_n^\dagger G R \alpha_n^\dagger} \right] \left| -2\pi\alpha' \hat{F} w\nu, w\nu \right\rangle
\end{aligned} \tag{6.66}$$

になる. さらに, ここで R は,

$$R = (G + \mathcal{F})^{-1}(G - \mathcal{F}) \quad (6.67)$$

となっている.

ここで, F, R は T-双対性変換 $O(2d, 2d, \mathbb{R})$ に対して,

$$\begin{aligned} 2\pi\alpha'\tilde{F} &= (2\pi\alpha'\hat{F}a - b)(-2\pi\alpha'\hat{F}c + d)^{-1}, & \tilde{R} &= T_-^{-1}RT_+, \\ T_{\pm} &= [c(\pm G + B) + d] \end{aligned} \quad (6.68)$$

と変換する.

$(-2\pi\alpha'\hat{F}c + d)$ が非可逆な時, T-双対変換された D ブレーンには, Dirichlet 境界条件を持つ方向がある. D ブレーンの次元が下がり, ゲージ場ではなくなるからである. この時, 以前強調したように, T-双対変換により傾いた次元の低い D ブレーンになる. F をブロック対角化して T^{2d} を d 個の T^2 に分けたときの, 偶数次元を T-双対変換する. それは, $O(2d, 2d; \mathbb{R})$ 行列:

$$a = d = \mathbf{1}_{2 \times 2} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = c = \mathbf{1}_{2 \times 2} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.69)$$

で表される. これを使って (6.66) を変換すると³,

$$\begin{aligned} |B_{F,\theta}\rangle_{2\alpha} &= \prod_{\alpha} \sqrt{a_{2\alpha-1}N_{\alpha}^2 + \tilde{a}_{2\alpha}k_{\alpha}^2} \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^{2d}} e^{-i\pi\mathbf{m}_{2\alpha-1}\mathbf{n}_{2\alpha} + 2\pi i(\theta_{2\alpha-1}\mathbf{m}_{2\alpha-1} + \theta_{2\alpha}\mathbf{n}_{2\alpha})} \\ &\times \left[\prod_{n=1}^{\infty} \exp \left\{ \frac{1}{n} \frac{1}{a_{2\alpha-1}^2 N_{\alpha}^2 + \tilde{a}_{2\alpha} k_{\alpha}^2} (\alpha_n^{1\dagger} \alpha_n^{2\dagger}) \begin{pmatrix} a_{2\alpha-1}^2 a_{2\alpha}^2 N_{\alpha}^2 - k_{\alpha}^2 & 2a_{2\alpha-1} a_{2\alpha} N k \\ 2a_{2\alpha-1} a_{2\alpha} N k & a_{2\alpha-1}^2 a_{2\alpha}^2 N_{\alpha}^2 - k_{\alpha}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_n^{2\alpha-1\dagger} \\ \tilde{\alpha}_n^{2\alpha\dagger} \end{pmatrix} \right\} \right] \\ &\times \left| \begin{pmatrix} -k\nu_{2\alpha} \\ N\nu_{2\alpha} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} N\nu_{2\alpha-1} \\ k\nu_{2\alpha-1} \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \prod_{\alpha} \sqrt{a_{2\alpha-1}N_{\alpha}^2 + \tilde{a}_{2\alpha}k_{\alpha}^2} \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^{2d}} e^{-i\pi\mathbf{m}_{2\alpha-1}\mathbf{n}_{2\alpha} + 2\pi i(\theta_{2\alpha-1}\mathbf{m}_{2\alpha-1} + \theta_{2\alpha}\mathbf{n}_{2\alpha})} \\ &\times \left[\prod_{n=1}^{\infty} \exp \left\{ \frac{1}{n} (\alpha_n^{1\dagger} \alpha_n^{2\dagger}) \begin{pmatrix} \cos 2\omega_{\alpha} & \sin 2\omega_{\alpha} \\ \sin 2\omega_{\alpha} & -\cos 2\omega_{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_n^{1\dagger} \\ \tilde{\alpha}_n^{2\dagger} \end{pmatrix} \right\} \right] \\ &\times \left| \begin{pmatrix} -k\nu_{2\alpha} \\ N\nu_{2\alpha} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} N\nu_{2\alpha-1} \\ k\nu_{2\alpha-1} \end{pmatrix} \right\rangle \quad (6.70) \\ &\left(\omega_{\alpha} \equiv \arctan \frac{a_{2\alpha}k_{\alpha}}{\tilde{a}_{2\alpha-1}N_{\alpha}} \right) \end{aligned}$$

下線部の位相は, 振幅を T-双対不変にするために (6.44) で付け加えたものであり, これが自然な形で導かれた. また, 振動子の部分は, ちょうど (5.48) の形で, 第一 Chern 数 k の D2 ブレーンの片方の方向の T-双対を取ると, 斜めに伸びた D1 ブレーンになるという, 期待された通りの結果が得られた (図 6.2, 6.3).

³ x^i 方向を T-双対変換した境界状態を $|B\rangle_i$ のように表す.

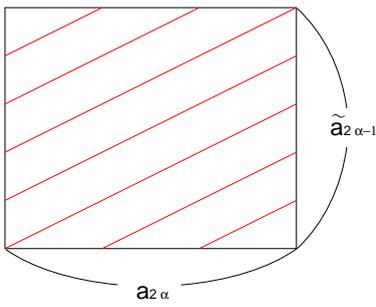


図 6.2: T-双対変換で得られる傾いた D-プレーン

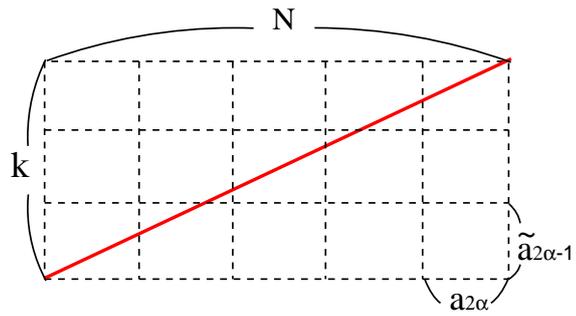


図 6.3: 被覆空間で見たもの

第7章 Nahm 変換と境界状態

この章では Nahm 変換と境界状態を用いた T-双対変換を 2 次元の場合について、2 方向同時に変換する場合と、1 方向ずつ変換する場合の 2 つのやり方で議論する。

7.1 2 方向の T-双対変換

平坦な ($G = 1, B = 0$) 2 次元トーラスにフラックス

$$F_{MN} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \begin{pmatrix} 0 & \frac{k}{a_1 a_2 N} \\ -\frac{k}{a_2 a_1 N} & 0 \end{pmatrix} \quad (7.1)$$

がある場合に両方の方向に対して T-双対変換を施す。また、その結果を 4 章で Nahm 変換を用いて T-双対変換を行った結果と比較して一致することを見る。まず、平坦な 2 次元トーラスの場合の (6.66) を具体的に書き下すと、

$$\begin{aligned} |B_{F,\theta}\rangle &= \text{tr} \sqrt{\text{Det}(1 + 2\pi\alpha' F)} \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^2} e^{-i\pi \mathbf{m}^1 2\pi\alpha' \hat{F}_{12} \mathbf{m}^2} e^{2\pi i(\theta_1 \mathbf{m}_1 + \theta_2 \mathbf{m}_2)} \\ &\quad \times \left[\prod_{n=1}^{\infty} e^{\frac{1}{n} \alpha_n^\dagger \frac{1-2\pi\alpha' F}{1+2\pi\alpha' F} \tilde{\alpha}_n^\dagger} \right] \left| -2\pi\alpha' \hat{F} w\nu, w\nu \right\rangle \\ &= \sqrt{(a_1 a_2 N)^2 + k^2} \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^2} e^{-i\pi \mathbf{m}^1 \mathbf{m}^2 \frac{k}{N}} e^{2\pi i(\theta_1 \mathbf{m}_1 + \theta_2 \mathbf{m}_2)} \\ &\quad \times \left[\prod_{n=1}^{\infty} \exp \left\{ \frac{1}{n} \frac{1}{a_1^2 a_2^2 N^2 + k^2} (\alpha_n^{1\dagger} \alpha_n^{2\dagger}) \begin{pmatrix} a_1^2 a_2^2 N^2 - k^2 & 2a_1 a_2 N k \\ -2a_1 a_2 N k & a_1^2 a_2^2 N^2 - k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_n^{1\dagger} \\ \tilde{\alpha}_n^{2\dagger} \end{pmatrix} \right\} \right] \\ &\quad \times \left| \begin{pmatrix} -k\nu_2 \\ k\nu_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} N\nu_1 \\ N\nu_2 \end{pmatrix} \right\rangle. \quad (7.2) \end{aligned}$$

両方向への T-双対変換は $O(2, 2, \mathbb{R})$ 行列:

$$a = d = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.3)$$

で表されるので、(6.23) の変換性を見ると、

$$\begin{aligned} \mathbf{m}^M &\rightarrow \mathbf{n}^M, \\ \alpha_n^M &\rightarrow \alpha_n^M, \\ \tilde{\alpha}_n^M &\rightarrow -\tilde{\alpha}_n^M \end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned}
|B_{F,\theta}\rangle_{\tilde{1}\tilde{2}} &= \sqrt{N^2 + \left(\frac{k}{a_1 a_2}\right)^2} \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^2} e^{-i\pi \mathbf{n}^1 \mathbf{n}^2 \frac{N}{k}} e^{2\pi i(\theta_1 \mathbf{n}_1 + \theta_2 \mathbf{n}_2)} \\
&\times \left[\prod_{n=1}^{\infty} \exp \left\{ \frac{1}{n} \frac{1}{a_1^2 a_2^2 N^2 + k^2} (\alpha_n^{1\dagger} \alpha_n^{2\dagger}) \begin{pmatrix} a_1^2 a_2^2 N^2 - k^2 & 2a_1 a_2 N k \\ -2a_1 a_2 N k & a_1^2 a_2^2 N^2 - k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_n^{1\dagger} \\ \tilde{\alpha}_n^{2\dagger} \end{pmatrix} \right\} \right] \\
&\times \left| \begin{pmatrix} N\nu_1 \\ N\nu_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -k\nu_2 \\ k\nu_1 \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= \sqrt{N^2 + (\tilde{a}_1 \tilde{a}_2 k)^2} \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^2} e^{-i\pi N k \nu^1 \nu^2} e^{2\pi i N(\theta_1 \nu_1 + \theta_2 \nu_2)} \\
&\times \left[\prod_{n=1}^{\infty} \exp \left\{ \frac{1}{n} \frac{1}{\tilde{a}_1^2 \tilde{a}_2^2 k^2 + N^2} (\alpha_n^{1\dagger} \alpha_n^{2\dagger}) \begin{pmatrix} \tilde{a}_1^2 \tilde{a}_2^2 k^2 - N^2 & 2\tilde{a}_1 \tilde{a}_2 N k \\ -2\tilde{a}_1 \tilde{a}_2 N k & \tilde{a}_1^2 \tilde{a}_2^2 k^2 - N^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_n^{1\dagger} \\ \tilde{\alpha}_n^{2\dagger} \end{pmatrix} \right\} \right] \\
&\times \left| \begin{pmatrix} N\nu_1 \\ N\nu_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -k\nu_2 \\ k\nu_1 \end{pmatrix} \right\rangle. \quad (7.4)
\end{aligned}$$

ただし, $\tilde{a}_M \equiv a_M^{-1}$ とした.

一方, 4章の結果より, Nahm 変換を用いて T-双対性を見た場合は,

$$\begin{aligned}
2\pi\alpha' a_1 \tilde{A}_1 &= 2\pi\sqrt{\alpha'} \tilde{\theta}_1, \quad 2\pi\alpha' a_2 \tilde{A}_2 = -\frac{N}{k} \frac{\hat{x}_1}{a_1} + 2\pi\sqrt{\alpha'} \tilde{\theta}_2, \quad 2\pi\alpha' \tilde{F} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{N}{k} \\ \frac{N}{k} & 0 \end{pmatrix} \\
\tilde{\Omega}_1 &= e^{-i\frac{N}{\sqrt{\alpha'} k} \frac{x_2}{a_2}} U_{k \times k}^{-N}, \quad \tilde{\Omega}_2 = V_{k \times k} \quad (7.5)
\end{aligned}$$

の条件の下で 6章と同じように境界状態を計算すると,

$$\begin{aligned}
|B_{F,\theta}\rangle_{\text{Nahm}} &= \sqrt{(\tilde{a}_1 \tilde{a}_2 k)^2 + N^2} \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^2} e^{i\pi N k \nu^1 \nu^2} e^{2\pi i k(\tilde{\theta}_1 \nu_1 + \tilde{\theta}_2 \nu_2)} \\
&\times \left[\prod_{n=1}^{\infty} \exp \left\{ \frac{1}{n} \frac{1}{\tilde{a}_1^2 \tilde{a}_2^2 k^2 + N^2} (\alpha_n^{1\dagger} \alpha_n^{2\dagger}) \begin{pmatrix} \tilde{a}_1^2 \tilde{a}_2^2 k^2 - N^2 & 2\tilde{a}_1 \tilde{a}_2 N k \\ -2\tilde{a}_1 \tilde{a}_2 N k & \tilde{a}_1^2 \tilde{a}_2^2 k^2 - N^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_n^{1\dagger} \\ \tilde{\alpha}_n^{2\dagger} \end{pmatrix} \right\} \right] \\
&\times \left| \begin{pmatrix} N\nu_2 \\ -N\nu_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k\nu_1 \\ k\nu_2 \end{pmatrix} \right\rangle \quad (7.6)
\end{aligned}$$

ここで,

$$\nu_1 \rightarrow -\nu_2, \quad \nu_2 \rightarrow \nu_1 \quad (7.7)$$

とすると,

$$\begin{aligned}
|B_{F,\theta}\rangle_{\text{Nahm}} &= \sqrt{(\tilde{a}_1 \tilde{a}_2 k)^2 + N^2} \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^2} e^{-i\pi N k \nu^1 \nu^2} e^{2\pi i k(-\tilde{\theta}_1 \nu_2 + \tilde{\theta}_2 \nu_1)} \\
&\times \left[\prod_{n=1}^{\infty} \exp \left\{ \frac{1}{n} \frac{1}{\tilde{a}_1^2 \tilde{a}_2^2 k^2 + N^2} (\alpha_n^{1\dagger} \alpha_n^{2\dagger}) \begin{pmatrix} \tilde{a}_1^2 \tilde{a}_2^2 k^2 - N^2 & 2\tilde{a}_1 \tilde{a}_2 N k \\ -\tilde{a}_1 \tilde{a}_2 2N k & \tilde{a}_1^2 \tilde{a}_2^2 k^2 - N^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_n^{1\dagger} \\ \tilde{\alpha}_n^{2\dagger} \end{pmatrix} \right\} \right] \\
&\times \left| \begin{pmatrix} N\nu_1 \\ N\nu_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -k\nu_2 \\ k\nu_1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad (7.8)
\end{aligned}$$

となり，Wilson ラインを除いて (7.4) と一致する．そもそも Nahm 変換では Wilson ラインを考慮せず，ゲージ自由度があるため

$$\tilde{\theta}_1 = -\frac{N}{k}\theta_2, \quad \tilde{\theta}_2 = \frac{N}{k}\theta_1 \quad (7.9)$$

となるようにゲージを選んでおけば

$$|B_{F,\theta}\rangle_{\tilde{1}\tilde{2}} = |B_{F,\theta}\rangle_{Nahm} \quad (7.10)$$

と，一致する．

7.2 1 方向の T-双対性

次に，2次元の $|B_{F,\theta}\rangle$ の x^2 方向を T-双対変換したものと， $|B_{F,\theta}\rangle_{Nahm}$ の x^1 方向を T-双対変換したものを比較する．2次元の $|B_{F,\theta}\rangle$ の x^2 方向の T-双対変換は $O(2, 2, \mathbb{R})$ 行列

$$a = d = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = c = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.11)$$

を用いて表されるので，

$$\begin{aligned} |B_{F,\theta}\rangle_{\tilde{2}} &= \sqrt{(a_1 N)^2 + (\tilde{a}_2 k)^2} \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^2} e^{-i\pi \mathbf{m}^1 \mathbf{n}^2 \frac{k}{N}} e^{2\pi i(\theta_1 \mathbf{m}_1 + \theta_2 \mathbf{n}_2)} \\ &\times \left[\prod_{n=1}^{\infty} \exp \left\{ \frac{1}{n} \frac{1}{a_1^2 a_2^2 N^2 + k^2} (\alpha_n^{1\dagger} \alpha_n^{2\dagger}) \begin{pmatrix} a_1^2 a_2^2 N^2 - k^2 & 2a_1 a_2 N k \\ 2a_1 a_2 N k & a_1^2 a_2^2 N^2 - k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_n^{1\dagger} \\ \tilde{\alpha}_n^{2\dagger} \end{pmatrix} \right\} \right] \\ &\quad \times \left| \begin{pmatrix} -k\nu_2 \\ N\nu_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} N\nu_1 \\ k\nu_1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \sqrt{(a_1 N)^2 + (\tilde{a}_2 k)^2} \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^2} e^{-i\pi \mathbf{m}^1 \mathbf{n}^2 \frac{k}{N}} e^{2\pi i(\theta_1 \mathbf{m}_1 + \theta_2 \mathbf{n}_2)} \\ &\times \left[\prod_{n=1}^{\infty} \exp \left\{ \frac{1}{n} \frac{1}{a_1^2 a_2^2 N^2 + k^2} (\alpha_n^{1\dagger} \alpha_n^{2\dagger}) \begin{pmatrix} \cos 2\omega & \sin 2\omega \\ \sin 2\omega & -\cos 2\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_n^{1\dagger} \\ \tilde{\alpha}_n^{2\dagger} \end{pmatrix} \right\} \right] \\ &\quad \times \left| \begin{pmatrix} -k\nu_2 \\ N\nu_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} N\nu_1 \\ k\nu_1 \end{pmatrix} \right\rangle. \quad (7.12) \end{aligned}$$

ただし， $\omega \equiv \tan^{-1} \frac{\tilde{a}_2 k}{a_1 N}$ ．そして，Nahm 変換したもの (7.8) を行列

$$a = d = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.13)$$

を用いて x^1 方向に T-双対変換をすると，

$$\begin{aligned} |B_{F,\theta}\rangle_{Nahm \tilde{1}} &= \sqrt{(a_1 N)^2 + (\tilde{a}_2 k)^2} \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^2} e^{-i\pi \mathbf{m}^1 \mathbf{n}^2 \frac{k}{N}} e^{2\pi i(\theta_1 \mathbf{m}_1 + \theta_2 \mathbf{n}_2)} \\ &\times \left[\prod_{n=1}^{\infty} \exp \left\{ \frac{1}{n} \frac{1}{a_1^2 a_2^2 N^2 + k^2} (\alpha_n^{1\dagger} \alpha_n^{2\dagger}) \begin{pmatrix} a_1^2 a_2^2 N^2 - k^2 & 2a_1 a_2 N k \\ 2a_1 a_2 N k & a_1^2 a_2^2 N^2 - k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_n^{1\dagger} \\ \tilde{\alpha}_n^{2\dagger} \end{pmatrix} \right\} \right] \\ &\quad \times \left| \begin{pmatrix} -k\nu_2 \\ N\nu_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} N\nu_1 \\ k\nu_1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad (7.14) \end{aligned}$$

2つの結果は(7.9)を用いれば一致することがわかる.

第8章 まとめと考察

2次元トーラス上の N 枚の D2 プレーンと k 枚の D0 プレーンの結合系の T-双対を見ると, Neumann 境界条件と Dirichlet 境界状態が入れ替わり, k 枚の D2 プレーンと N 枚の D0 プレーン系になることは定性的な議論から明らかであるが, 4章で実際に Nahm 変換によりこれを見ると第 1Chern 数に負符号が付くことがわかった. さらに, 7章で境界状態を用いた T-双対変換に置いても同様に負符号は現れ, Nahm 変換と無矛盾であることを確かめた. 素朴に考えればこれは 2次元トーラス上の N 枚の D2 プレーンと k 枚の D0 プレーンの結合系の T-双対空間では k 枚の D2 プレーンと N 枚の反 D0 プレーン系になると考えられる. しかし, D プレーンと反 D プレーンが同時に存在すればタキオン凝縮が起きることが知られているが, この場合にはタキオン凝縮が起きないため, このような素朴に第 1Chern 数の符号で D プレーンか反 D プレーンかを判断することはできないと思われる. Nahm 変換はこれまで 4次元でよく研究されてきたが, 2次元ではあまり議論されてこなかったため, この様な問題は指摘されなかった.

D プレーンは超弦の R-R 場のソースになることが知られている. したがって, D プレーンか反 D プレーンかを判断するには R-R 場との相対的な符号を見る必要がある. R-R 場 \mathcal{A} の T-双対変換は,

$$\tilde{\mathcal{A}} = a \int_{T^n} \text{ch}(\mathcal{P}) \mathcal{A} \quad (8.1)$$

であることが知られている [16].

これを今の例に適用すると,

$$\begin{aligned} \text{(左辺)} &= \tilde{A}_0^{(1)} dx^0 + \tilde{A}_i^{(1)} dy^i + \tilde{A}_{0ij}^{(3)} dx^0 \wedge dy^i \wedge dy^j + \dots \\ \text{(右辺)} &= a \int_{T^2} \left(1 + \frac{1}{2\pi} dy^i \wedge dy_i + \frac{1}{8\pi^2} dy^i \wedge dy_i \wedge dy^j \wedge dy_j \right) \\ &\quad \wedge \left(A_0^{(1)} dx^0 + A_i^{(1)} dy^i + A_{0ij}^{(3)} dx^0 \wedge dy^i \wedge dy^j \right) \\ &= a \left(-A_0^{(1)} dx^0 \wedge d\tilde{y}^i \wedge d\tilde{y}^j + A_{012}^{(3)} dx^0 \right) \end{aligned} \quad (8.2)$$

時間方向 x^0 があることに注意. また, a については, 1 方向を T-双対変換すると IIA 型理論から IIB 理論に移るか, または IIB 型理論から IIA 理論に移るが, (8.1) を適用するとき, 一方は $a = +1$ もう一方は $a = -1$ である. 今の場合には両方の変換を行っているので, $a = -1$ である [20].

従って,

$$\tilde{A}_0^{(1)} = -A_{012}^{(3)}, \quad \tilde{A}_{012}^{(3)} = A_0^{(1)} \quad (8.3)$$

D($k-1$) プレーンが R-R k フォーム $A^{(k)}$ のソースになるため, 双対空間の D0 プレーンの符号が入れ替わる. Nahm 変換では D0 プレーンの符号が入れ替わるため, 両方が正符号になり, タキオン凝縮の問題は回避されている.

また，カイラリティの問題もある．4 章で Nahm 変換した時に $\bar{D}\psi = 0$ を使ったが，逆 Nahm 変換するときには Chern 数が負なっているため， $D\psi = 0$ を使う．つまり，トーラスと双対トーラスでカイラリティが入れ替わっている．これは γ^{2d+1} (付録 C) が T-双対変換により $-\gamma^{2d+1}$ になるためと推測できるが，詳しく調べる必要がある．

また，行列模型 (付録 E) 等，他の T-双対性記述との関係も今後調べるべきである．

謝辞

本修士論文作成にあたり，1年間に渡り暖かい指導をしてくださった綿村哲准教授，浅川嗣彦助教に深く感謝致します。また，2年間を通してお世話になった素粒子・宇宙理論研究室の皆様にも感謝します。

付録 A 共形場理論

A.1 共形対称性

作用が

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \partial^a X_\mu \partial_a X^\mu \quad (\text{A.1})$$

で与えられる理論を考える。複素座標 $w = \sigma - i\tau, \bar{w} = \sigma + i\tau$ を用いて,

$$S = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2w \partial X_\mu \bar{\partial} X^\mu \quad (\text{A.2})$$

と書くこともできる。ただし, $\partial = \partial/\partial w, \bar{\partial} = \partial/\partial \bar{w}$ 。

X の O.P.E は

$$X^\mu(w_1, \bar{w}_1) X^\nu(w_2, \bar{w}_2) \sim -\frac{\alpha'}{2} \eta^{\mu\nu} \ln |w_{12}|^2 \quad (\text{A.3})$$

である。

エネルギー-運動量テンソルは,

$$T_{ab} = -\frac{1}{\alpha'} : \left(\partial_a X_\mu \partial_b X^\mu - \frac{1}{2} \delta_{ab} \partial_c X_\mu \partial^c X^\mu \right) : \quad (\text{A.4})$$

で表される。したがって,

$$T^a_a = 0 \quad (\text{A.5})$$

であり, 複素座標で表すと $T_{w\bar{w}} = 0$ となる。すると, 保存則 $\partial^a T_{ab}$ は

$$\partial_{\bar{w}} T_{ww} = 0, \quad \partial_w T_{\bar{w}\bar{w}} = 0 \quad (\text{A.6})$$

となり, つまり, $T_{ww}, T_{\bar{w}\bar{w}}$ はそれぞれ正則, 反正則である。具体的には,

$$\begin{aligned} T(w) \equiv T_{ww} &= -\frac{1}{\alpha'} : \partial X^\mu \partial X_\mu : \\ \tilde{T}(\bar{w}) \equiv T_{\bar{w}\bar{w}} &= -\frac{1}{\alpha'} : \bar{\partial} X^\mu \bar{\partial} X_\mu : \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

となる。

エネルギー-運動量テンソルが (A.5) を満たすとき, 理論は共形変換

$$w \rightarrow w' = f(w) \quad \bar{w} \rightarrow \bar{w}' = \tilde{f}(\bar{w}) \quad (\text{A.8})$$

のもとで不変である。

エネルギー運動量テンソルとある演算子 A の OPE を考える。

$$T(z)A(0,0) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} A^{(n)}(0,0) \quad (\text{A.9})$$

と表すと, Ward 恒等式から, A は $z' \rightarrow z + \epsilon v(z)$ に対して

$$\delta A(0,0) = -\epsilon \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\partial^n v(z) A^{(n)} + \bar{\partial}^n v(z) * \bar{A}^{(n)} \right] \quad (\text{A.10})$$

のように変換するので $A^{(n)}$ は A の共形変換性から決まる. $w \rightarrow \zeta w$ のもとで

$$A'(z, z') = \zeta^{-h} \zeta^{-\tilde{h}} A(z, \bar{z}) \quad (\text{A.11})$$

と変換する演算子に関して, OPE は

$$T(z)A(0,0) \sim \dots + \frac{h}{w^2} A(0,0) + \frac{1}{w} \partial A + \dots \quad (\text{A.12})$$

となる. (h, \tilde{h}) は A の共形ウェイトとよばれる.

共形変換 (A.8) のもとで

$$\mathcal{O}'(w', \bar{w}') = (\partial w')^{-h} (\bar{\partial} \bar{w}')^{-\tilde{h}} \mathcal{O}(w, \bar{w}) \quad (\text{A.13})$$

と変換するものをプライマリー場と呼ぶが, プライマリー場に対しては,

$$T(w)\mathcal{O}(0,0) \sim \frac{h}{w^2} \mathcal{O}(0,0) + \frac{1}{w} \partial \mathcal{O} + \dots \quad (\text{A.14})$$

と決まる.

エネルギー運動量テンソル同士の OPE は,

$$T(w)T(0) \sim \frac{D}{2w^4} + \frac{2}{w^2} T(0) + \frac{1}{w} \partial T(0) \quad (\text{A.15})$$

となる. D は時空の次元. (A.14) の形ではないので, T 自身はプライマリー場ではない. また, この形から, 共形変換の元の T の変換は,

$$\epsilon^{-1} \delta T(w) = -\frac{D}{12} \partial^3 v + 2\partial v(w)T(w) + v(w)\partial T(0) \quad (\text{A.16})$$

となる. 有限形は,

$$(\partial w')^2 T'(w') = T(w) - \frac{D}{12} \{w', w\}, \quad \{w', w\} = \frac{2\partial^3 w' \partial w' - 3\partial^2 w' \partial^2 w'}{2\partial w' \partial w'} \quad (\text{A.17})$$

である.

一般的に共形不変性のある理論では, エネルギー運動量テンソルの OPE は

$$T(w)T(0) \sim \frac{c}{2w^4} + \frac{2}{w^2} T(0) + \frac{1}{w} \partial T(0) \quad (\text{A.18})$$

となり, c はセントラルチャージと呼ばれる.

A.2 Virasoro 代数

弦理論においては，共形変換により， z 座標

$$z \equiv \exp(iw) = \exp(\tau + i\sigma) \tag{A.19}$$

を使うと便利ことが多い. この座標では， $|z|$ が時間，位相が空間を表し，原点が無限の過去にあたる. z 座標を使って，エネルギー運動量テンソルを Laurent 展開する:

$$T_{zz}(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{L_m}{z^{m+2}}, \quad \tilde{T}_{\bar{z}\bar{z}}(\bar{z}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{L}_m}{\bar{z}^{m+2}} \tag{A.20}$$

L_m は Virasoro 生成子と呼ばれる. 時間推進のハミルトニアンは，

$$H = \int_0^{2\pi} \frac{d\sigma}{2\pi} T_{22} = L_0 + \tilde{L}_0 - \frac{c + \tilde{c}}{24} \tag{A.21}$$

である. セントラルチャージの項は， T の共形変換性 (A.17) からきている.

カレントの OPE から，対応する c チャージの代数を決定することができる. カレントの周回積分で一般的なチャージ Q_i を

$$Q_i\{C\} = \oint_C \frac{dz}{2\pi i} j_i \tag{A.22}$$

と表されるとして，2つのチャージ $Q_{1,2}$ と図 A.1 のような経路に対して，

$$Q_1\{C_1\}Q_2\{C_2\} - Q_1\{C_3\}Q_2\{C_2\} \tag{A.23}$$

のような量を考える. これを演算子の言葉で解釈する時に，演算子の順序は時間順序で決まる. よって，(A.23) は

$$\hat{Q}_1\hat{Q}_2 - \hat{Q}_2\hat{Q}_1 \equiv [\hat{Q}_1, \hat{Q}_2] \tag{A.24}$$

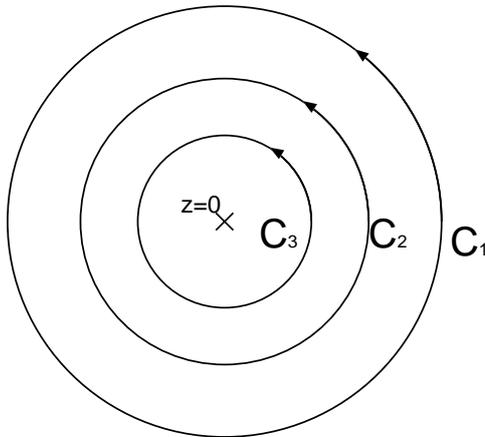


図 A.1: $z = 0$ を中心とした 3 つの積分路

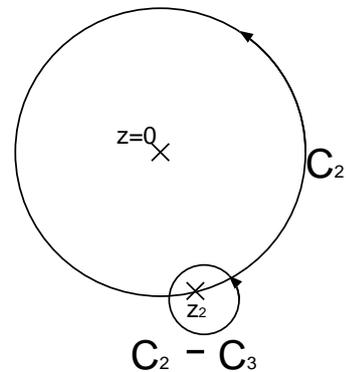


図 A.2: 図 A.1 の $C_1 - C_1$ を変形したもの

に対応する C_1 と C_3 を図 A.2 のように変形することができるので、交換子は、

$$[Q_1, Q_2]\{C_2\} = \oint_{C_2} \frac{dz_2}{2\pi i} \text{Res}_{z_1 \rightarrow z_2} j_1(z_1) j_2(z_2) \quad (\text{A.25})$$

と表される. $Q_2\{C\}$ を任意の演算子 \mathcal{A} に置き換えることもできる:

$$[Q_1, \mathcal{A}(z_2, \bar{z}_2)] = \text{Res}_{z_1 \rightarrow z_2} j_1(z_1) \mathcal{A}(z_2, \bar{z}_2) \quad (\text{A.26})$$

(A.25) を使って、Virasoro 生成子の交換関係は、

$$\begin{aligned} [L_m, L_n] &= \oint_{C_2} \frac{dz_2}{2\pi i} \text{Res}_{z_1 \rightarrow z_2} z_1^{m+1} T(z_1) z_2^{n+1} T(z_2) \\ &= (m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12}(m^3 - m)\delta_{m,-n} \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

である. これが Virasoro 代数である.

A.3 モード展開

$\partial X, \bar{\partial} X$ はそれぞれ正則, 反正則なので、

$$\begin{aligned} \partial X^\mu(z) &= -i \left(\frac{2}{\alpha'}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_m^\mu}{z^{m+1}}, & \bar{\partial} X^\mu(\bar{z}) &= -i \left(\frac{2}{\alpha'}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_m^\mu}{\bar{z}^{m+1}} \\ \alpha_m^\mu &= \left(\frac{2}{\alpha'}\right)^{\frac{1}{2}} \oint \frac{dz}{2\pi} z^m \partial X^\mu, & \tilde{\alpha}_m^\mu &= -\left(\frac{2}{\alpha'}\right)^{\frac{1}{2}} \oint \frac{d\bar{z}}{2\pi} \bar{z}^m \bar{\partial} X^\mu \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

∂X^μ の一価性から $\alpha_0^\mu = \tilde{\alpha}_0^\mu$ が分かり、さらに時空の並進に対する Noether カレント p^μ を使って、

$$\left(\frac{2}{\alpha'}\right)^{\frac{1}{2}} \alpha_0^\mu = \left(\frac{2}{\alpha'}\right)^{\frac{1}{2}} \tilde{\alpha}_0^\mu = p^\mu \quad (\text{A.29})$$

とかける. (A.28) を積分して、

$$X^\mu(z) = x^\mu - i \frac{\alpha'}{2} \ln |z|^2 p^\mu + i \left(\frac{\alpha'}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{m \neq 0} \left(\frac{\alpha_m^\mu}{m z^m} + \frac{\tilde{\alpha}_m^\mu}{m \bar{z}^m} \right) \quad (\text{A.30})$$

と書ける. (A.25) から、交換関係

$$\begin{aligned} [\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu] &= [\tilde{\alpha}_m^\mu, \tilde{\alpha}_n^\nu] = m \eta^{\mu\nu} \delta_{m,-n} \\ [x^\mu, p^\nu] &= i \eta^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

が導かれる. この形から、 $m > 0$ を消滅演算子、 $m < 0$ を生成演算子と考えられる. 以上から、(A.7),(A.20),(A.28) を用いて、

$$L_m = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{m-n}^\mu \alpha_{n\mu} \quad (\text{A.32})$$

特に、

$$L_0 = \frac{\alpha' p^2}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{-n}^\mu \alpha_{n\mu} \quad (\text{A.33})$$

となる.

A.4 頂点演算子

閉弦の無限の過去から現在への伝搬を考える。 w 表示ではそれは $0 \geq \text{Re } w \geq 2\pi, \text{Im } w < 0$ の半無限のシリンダー、 z 表示では $|z| \leq 1$ の単位円板になる。経路積分を定義するためには無限の過去での始状態を決める必要があるが、シリンダーでの始状態 $|A\rangle$ に対応させて、円盤の原点にある演算子 \mathcal{A} (頂点演算子) を置くことができる。自由場の理論の場合は、チャージ Q を状態 $|A\rangle$ にさせることを考えて、OPE を用いて周回積分を評価すれば、 \mathcal{A} を求めることができる。

具体的に計算する。単位演算子に対応する状態 $|1\rangle$ を求める。この場合、原点に演算子が無いため、 $\partial X^\mu, \bar{\partial} X^\mu$ は積分路内で正則、反正則である。したがって、

$$\alpha_m^\mu = \left(\frac{2}{\alpha'}\right)^{\frac{1}{2}} \oint \frac{dz}{2\pi} z^m \partial X^\mu(z) \quad (\text{A.34})$$

は $m \geq 0$ に対して 0 になる。 $\tilde{\alpha}_m^\mu$ についても同じである。したがって、単位演算子 $|1\rangle$ に対応した始状態は $\alpha_m^\mu, \tilde{\alpha}_m^\mu (m \geq 0)$ で消される状態、即ち

$$|1\rangle = |0, 0\rangle \quad (\text{A.35})$$

である。状態 $\alpha_m^\mu |1\rangle, \tilde{\alpha}_m^\mu |1\rangle (m \geq 0)$ に対する頂点演算子は

$$\begin{aligned} \alpha_m^\mu |1\rangle &\cong \left(\frac{2}{\alpha'}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{i}{(m-1)!} \partial^m X^\mu(0) \\ \tilde{\alpha}_m^\mu |1\rangle &\cong \left(\frac{2}{\alpha'}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{i}{(m-1)!} \bar{\partial}^m X^\mu(0) \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

で、さらに一般の状態 $\prod_m (\alpha_m^\mu)^{k_m} (\tilde{\alpha}_m^\mu)^{\bar{k}_m} |1\rangle$ については、

$$\begin{aligned} \alpha_m^\mu |1\rangle &\rightarrow \left(\frac{2}{\alpha'}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{i}{(m-1)!} \partial^m X^\mu(0) \\ \tilde{\alpha}_m^\mu |1\rangle &\rightarrow \left(\frac{2}{\alpha'}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{i}{(m-1)!} \bar{\partial}^m X^\mu(0) \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

の置換えをして、正規順序を取ったものである。

A.5 bc CFT

ここまで考えた CFT の他に bc CFT がある。 bc CFT の作用は

$$S_{bc} = \frac{1}{2\pi} \int d^2 z b \bar{\partial} c \quad (\text{A.38})$$

で与えられ、 b, c はウェイト $(h_b, h_c) = (\lambda, 1 - \lambda)$ の反可換なテンソルである。特に、 $\lambda = 2$ の時は弦理論のゴーストになる。OPE は、

$$b(z_1)c(z_2) \sim \frac{1}{z_{12}}, \quad c(z_1)b(z_2) \sim \frac{1}{z_{12}} \quad (\text{A.39})$$

エネルギー運動量テンソルは,

$$\begin{aligned} T(z) &= :(\partial b)c: - \lambda \partial(:bc:) \\ \tilde{T}(\bar{z}) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

で, セントラルチャージ c は

$$c = -3(\lambda - 1)^2 + 1, \quad \tilde{c} = 0 \quad (\text{A.41})$$

となる.

モード展開

モード展開を

$$b(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{b_m}{z^{m+\lambda}}, \quad c(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{c_m}{z^{m+1-\lambda}} \quad (\text{A.42})$$

と表すと, 反交換子は,

$$\{b_m, c_n\} = \delta_{m,-n} \quad (\text{A.43})$$

$n > 0$ を生成演算子として, $n = 0$ については,

$$\begin{aligned} b_0 |\downarrow\rangle &= 0, \quad b_0 |\uparrow\rangle = |\downarrow\rangle, \quad c_0 |\downarrow\rangle = |\uparrow\rangle, \quad c_0 |\uparrow\rangle = 0 \\ b_n |\downarrow\rangle &= b_n |\uparrow\rangle = c_n |\downarrow\rangle = c_n |\uparrow\rangle = 0, \quad n > 0 \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

とし, $|\downarrow\rangle$ を真空とする. Virasoro 生成子は,

$$L_m = \sum_{n=1}^{\infty} (m\lambda - n) \circ b_n c_{m-n} \circ + \frac{\lambda(1-\lambda)}{2} \quad (\text{A.45})$$

但し, $\circ \dots \circ$ は生成消滅の正規順序を表す.

頂点演算子

bc CFT の頂点演算子は

$$b_m = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{m+\lambda-1} b(z), \quad c_m = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{m-\lambda} c(z) \quad (\text{A.46})$$

より, 単位演算子 $\mathbf{1}$ に対応する状態 $|\mathbf{1}\rangle$ は,

$$b_m |\mathbf{1}\rangle = 0 \quad m \geq 1 - \lambda, \quad c_m |\mathbf{1}\rangle = 0 \quad m \geq \lambda \quad (\text{A.47})$$

となる.

A.6 弦の作用

最後に，弦理論の作用を与える．弦の作用は

$$S = S_X + \lambda\chi \quad (\text{A.48})$$

$$S_X = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_M d^2\sigma g^{\frac{1}{2}} g^{ab} \partial_a X \partial_b X \quad \chi : \text{世界面の Euler 数}$$

だが，Polyakov 経路積分をする際にゲージ固定をする必要がある：

$$Z \equiv \int \frac{\mathcal{D}X \mathcal{D}g}{V_{\text{diff} \times \text{Weyl}}} \exp(-S) \quad (\text{A.49})$$

これを Fadeev-Popov の手続きに従って計算し，ゲージを共形ゲージ $g_{ab} = e^{2\omega(\sigma)} \delta_{ab}$ にとると，

$$Z = \int \mathcal{D}X \mathcal{D}b \mathcal{D}c e^{-S_X - S_g - \lambda\chi} \quad (\text{A.50})$$

$$S_X = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2z \partial X_\mu \bar{\partial} X^\mu, \quad S_g = \frac{1}{2\pi} \int d^2z (b\bar{\partial}c + \tilde{b}\partial\tilde{c})$$

となる．

付録B 散乱振幅

B.1 S 行列

弦の散乱は，図 B.1 のような，ソースが $\pm\infty$ に近づく過程で計算される。これは共形変換により，図 B.2 のように球面に頂点演算子が乗った描像に移れる。開弦は世界面の端点に頂点演算子を挿入すればよい。従って，弦の S 行列は

$$S_{j_1 \dots j_n}(k_1, \dots, k_n) = \sum_{topology} \int \frac{\mathcal{D}X \mathcal{D}g}{V_{\text{diff} \times \text{Weyl}}} \exp(-S_X - \lambda\chi) \prod_{i=1}^n \int d^2\sigma_i g(\sigma_i)^{\frac{1}{2}} \mathcal{V}_{j_i}(k_i, \sigma_i) \quad (\text{B.1})$$

となる。弦理論において，ゲージ固定する際，計量を決めても固定されない対称性（共形 Killing 群，CKG），対称性により除けない計量のパラメーター（モジュライ）があり，これを考える必要がある。前者はいくつかの頂点演算子の位置を固定することで，後者はモジュライ t で積分することで完全なゲージ固定ができる。

これらのことを考慮した上で (B.1) を計算すると，

$$\begin{aligned} S_{j_1 \dots j_n}(k_1, \dots, k_n) &= \sum_{topology} \int_F \frac{d^\mu t}{n_R} \int \mathcal{D}X \mathcal{D}b \mathcal{D}c \exp(-S_X - S_g - \lambda\chi) \\ &\times \prod_{(a,i) \notin f} \int d\sigma_i^a \prod_{k=1}^{\mu} \frac{1}{4\pi} (b, \partial_k g) \prod_{(a,i) \in f} c^a(\sigma_i) \prod_{i=1}^n g(\sigma_i)^{\frac{1}{2}} \mathcal{V}_{j_i}(k_i, \sigma_i) \\ &(b, \partial_k g)^{\frac{1}{2}} \equiv \int d^2\sigma g^{\frac{1}{2}} b \cdot \partial g \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

となる。 μ はモジュライ空間の次元， f は固定された座標の集合， n_R は離散な CKG の位数とする。

B.2 球面の 3 つの tachyon 振幅

X^{26} をトーラスコンパクト化したときの球面上の 3 つの tachyon の振幅を計算する。(→6) 球面は， $\chi = 2\text{CKG}$ は $PSL(2, \mathbb{Z})$ ，モジュライなしなので，(B.2) より，

$$S_{S_2} = g_c^3 e^{-2\lambda} \left\langle \prod_{i=1}^2 : \tilde{c} c e^{ik_i X}(z_i, \bar{z}_i) : \right\rangle_{S_2} \quad (\text{B.3})$$

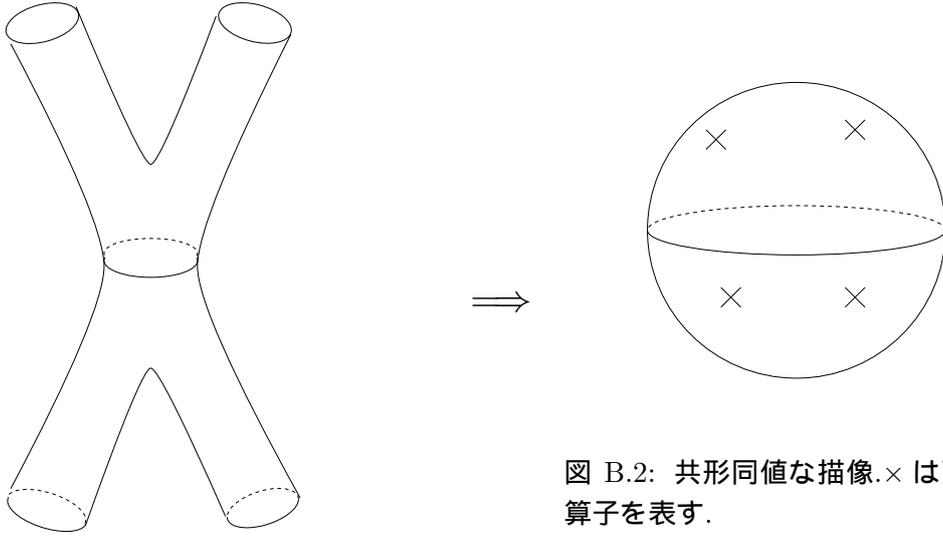


図 B.1: 4つの閉弦の散乱

図 B.2: 共形同値な描像. × は頂点演算子を表す.

である. g_c は閉弦の結合定数. 球面上では,

$$\begin{aligned}
\langle c(z_0)c(z_1)c(z_2)\tilde{c}(z_0)\tilde{c}(z_1)\tilde{c}(z_2) \rangle_{S_2} &= C_{S_2}^g z_{12}z_{13}z_{23}\bar{z}_{12}\bar{z}_{13}\bar{z}_{23} \\
\langle : e^{ik \cdot X(\sigma_1)} :: e^{ik \cdot X(\sigma_2)} :: e^{ik \cdot X(\sigma_3)} : \rangle_{S_2} \\
&= iC_{S_2}^X (2\pi)^{26} \delta^{25} \left(\sum_i k_i \right) \delta_{\sum_i k_{L i}} \delta_{\sum_i k_{R i}} \\
&\times \prod_{i < j} \left[|z_{ij}|^{\alpha' k_i^\mu \cdot k_{\mu} + z_{ij}^{\frac{\alpha'}{2} k_{L i} k_{L j}} + \bar{z}_{ij}^{\frac{\alpha'}{2} k_{R i} k_{R j}} \right] \quad (B.4)
\end{aligned}$$

従って,

$$\begin{aligned}
S_{S_2} &= ig_c^3 C_{S_2} (2\pi)^{26} \delta^{25} \left(\sum_i k_i \right) \delta_{\sum_i k_{L i}} \delta_{\sum_i k_{R i}} \\
&\times \prod_{i < j} \left[|z_{ij}|^{\alpha' k_i^\mu \cdot k_{\mu} + 2} + z_{ij}^{\frac{\alpha'}{2} k_{L i} k_{L j}} |z_{ij}|^2 + \bar{z}_{ij}^{\frac{\alpha'}{2} k_{R i} k_{R j}} |z_{ij}|^2 \right] \quad (B.5)
\end{aligned}$$

となる. C_{S_2} は定数.

B.3 円筒の分配関数

1-ループの計算において, 頂点演算子を含まない経路積分 (分配関数) を計算することは重要である. 円筒の場合は, 時間 t だけ進んだ後に端を同一視したものとして選られる.

$$Z_{C_2} = \int_0^\infty \frac{dt}{2t} \text{Tr}'_o [-2\pi L_0] \quad (B.6)$$

で表される. Tr'_o は全ての開弦 CFT についてとり, ゴーストのゼロモードを無視する. 具体的に計算すると,

$$\begin{aligned}
Z_{C_2} &= \int_0^\infty d\tau \text{Tr}'_o[\exp(-2\pi\tau L_0)] \\
&= \int_0^\infty d\tau \int \frac{d^D k}{2\pi} \text{Tr} \left[\exp \left\{ -2\pi\tau \left(\alpha' k^2 + \sum_n n a_n^\dagger{}^\mu a_{n\mu} - 1 \right) \right\} \right] \\
&= iV_d \int_0^\infty \frac{d\tau}{2\tau} \left(\frac{1}{2\pi\tau\alpha'} \right)^{-\frac{D}{2}} \prod_{\mathcal{H}_o^\perp} \prod_n \sum_{N_n} e^{2\pi\tau(nN_n-1)} \\
&= iV_d \int_0^\infty \frac{d\tau}{2\tau} \left(\frac{1}{2\pi\tau\alpha'} \right)^{-\frac{D}{2}} e^{-2\pi\tau} \prod_n (1 - e^{2\pi n\tau})^{-D+2} \\
&\rightarrow iV_{26} n^{26} \int_0^\infty \frac{d\tau}{2\tau} \left(\frac{1}{2\pi\tau\alpha'} \right)^{-13} \eta(i\tau)^{-24} \tag{B.7}
\end{aligned}$$

$\prod \mathcal{H}_\perp^o$ は全ての開弦の物理的スペクトルについてとることを表している. 最後の行では, 平坦な 26 次元として計算した n は Chern-Paton 因子からくる. ここで, $\eta(t)$ は Dedekind の η -関数:

$$\eta(t) = e^{2\pi i t/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2n\pi i t}) \tag{B.8}$$

である. η -関数の性質:

$$\eta(it) = t^{-1/2} \eta(i/t) \tag{B.9}$$

を用いて変数変換すると, (B.7) は

$$\int_0^\infty d\tau e^{-2\tau} \prod_n (1 - e^{n\tau})^{-D} \tag{B.10}$$

と表せるので, 2つの結果は一致する.

付録C Atiyah-Singerの指数定理

m (偶数)次元の向き付け可能な多様体 M 上のスピノ束 $S(M)$ を考える. この束の切断全体の集合を $\Delta(M) = \Gamma(M, S)$ と表す. このとき, スピン群 $SPIN(m)$ は

$$\gamma^{\alpha\dagger} = \gamma^\alpha \quad (\text{C.1})$$

$$\{\gamma^\alpha, \gamma^\beta\} = \delta^{\alpha\beta} \quad (\text{C.2})$$

を満たす Dirac 行列 $\{\gamma^\alpha\}$ で生成され, Clifford 代数は

$$1; \gamma^{\alpha_1}; \dots; \gamma^{\alpha_1} \dots \gamma^{\alpha_k} (\alpha_1 < \dots < \alpha_k); \dots; \gamma^1 \dots \gamma^m \quad (\text{C.3})$$

で生成される. 特に, 最後の生成元を

$$\gamma^{m+1} \equiv i^{m/2} \gamma^1 \dots \gamma^m \quad (\text{C.4})$$

と定義すると,

$$\gamma^{m+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{2^{m/2-1} \times 2^{m/2-1}} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_{2^{m/2-1} \times 2^{m/2-1}} \end{pmatrix} \quad (\text{C.5})$$

となるように $\{\gamma^\alpha\}$ を選ぶと便利である.

特に 2 次元の場合は

$$\gamma_\mu = -i\sigma_\mu, \quad \mu = 1, 2 \quad (\text{C.6})$$

ここで, σ_i は Pauli 行列である. さらに, 4 次元の場合は,

$$\gamma_\mu = \begin{pmatrix} 0 & e_\mu \\ \bar{e}_\mu & 0 \end{pmatrix} \quad \mu = 1, 2, 3, 4 \quad (\text{C.7})$$

$$e_\mu = (-i\sigma_i, \mathbf{1}), \quad \bar{e}_\mu = (i\sigma_i, \mathbf{1}) \quad (\text{C.8})$$

と選ぶ. ここで, Dirac スピノル $\psi \in \Delta(M)$ を γ^{m+1} の固有値に従って分解する. γ^{m+1} の固有値は ± 1 であるので, $\Delta(M)$ は

$$\Delta(M) = \Delta^+(M) + \Delta^-(M) \quad (\text{C.9})$$

に分解される. ここで, $\psi^\pm \in \Delta^\pm(M)$ に対して $\gamma^{m+1}\psi^\pm = \pm\psi^\pm$. このとき, Δ^\pm 上への射影演算子 \mathcal{P}^\pm が

$$\mathcal{P}^+ \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \gamma^{m+1}) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.10})$$

$$\mathcal{P}^- \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \gamma^{m+1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad (\text{C.11})$$

で与えられるので,

$$\psi^+ = \begin{pmatrix} \psi^+ \\ 0 \end{pmatrix} \in \Delta^+(M), \quad \psi^- = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi^- \end{pmatrix} \in \Delta^-(M) \quad (\text{C.12})$$

と書ける. ここで, Dirac 作用素

$$i\mathcal{D}\psi \equiv i\gamma^\mu D_\mu \psi \quad (\text{C.13})$$

を定義する. ここで, D は共変微分を表す. (C.6),(C.7) のように, 一般的に $\{\gamma^\alpha\}$ は

$$\gamma^\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_\beta \\ \bar{\alpha}_\mu & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.14})$$

$$(\text{C.15})$$

と表せるので,

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{D} \\ \bar{\mathcal{D}} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.16})$$

これより, $\mathcal{D}: \Delta^+(M) \rightarrow \Delta^-(M)$, $\bar{\mathcal{D}}: \Delta^-(M) \rightarrow \Delta^+(M)$ が分かるので, スピン復体

$$\Delta^+(M) \begin{array}{c} \xrightarrow{\bar{\mathcal{D}}} \\ \xleftarrow{\mathcal{D}} \end{array} \Delta^-(M) \quad (\text{C.17})$$

が得られる. こうして得られたスピン復体に対して Atiyah-Singer の指数定理:

$$\begin{aligned} \text{ind } \mathcal{D} &= \dim \ker \mathcal{D} - \dim \ker \bar{\mathcal{D}} \\ &= \int_M \text{ch}(\Delta^+(M) - \Delta^-(M)) \frac{\text{Td}(TM^{\mathbb{C}})}{e(TM)} \Big|_{\text{vol}} \\ &= \int_M \hat{A}(TM) \Big|_{\text{vol}} \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

が得られる.

付 録 D 両方向に複数回巻きついた D プレーン

これまでは x_1 方向に N 回, x_2 方向に 1 回巻きついた D プレーンを考えてきたが, x_1 方向に N_1 回, x_2 方向に N_2 回巻きついた D プレーンを考えてみる. それは, 変換関数を

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= e^{ikx_2/N_1} U^{k_1} \otimes V \\ \Omega_2 &= V \otimes e^{ikx_1/N_2} U^{k_2}\end{aligned}\tag{D.1}$$

のようにとれば良く, これはコサイクル条件を満たしており, この変換関数から導かれるゲージ場 A は,

$$\begin{aligned}A_1 &= -\frac{i}{2\pi} \frac{k_2}{N_2} x_1, & A_2 &= -\frac{i}{2\pi} \frac{k_1}{N_1} x_2 \\ F_{12} &= -\frac{i}{2\pi} \frac{k_1}{N_1} + \frac{i}{2\pi} \frac{k_2}{N_2} \\ &= \frac{i}{2\pi} \frac{N_1 k_2 - N_2 k_1}{N_1 N_2}.\end{aligned}\tag{D.2}$$

したがって Chern 数は

$$C_1 = N_1 k_2 - N_2 k_1\tag{D.3}$$

この様に, Chern 数が整数になるために, F は $\frac{1}{2\pi R_1 R_2} \frac{\text{整数}}{\text{整数}}$ の形になる. R_1, R_2 はトーラスの半径.

付録E 行列模型におけるT-双対性

行列模型を用いたT-双対性とDブレーンの記述法もある。この方法では、高次元Dブレーン電荷を持つ低次元Dブレーンを扱うことができる。本文とは直接関係はないが、代表的なDブレーンの記述法の一つであるので載せておく。

E.1 円周上の0ブレーン

空間を $\mathbb{R}^8 \times S^1$ に取り、その上にある N 枚の D0 ブレーンを考える。 $S^1 = R/\mathbb{Z}$ と考え、 R 上の D0 ブレーンを考えた後に \mathbb{Z} で拘束条件を課す。 D0 ブレーン i, j 間に伸びる弦を $X_{i,j}$ と書くと、この空間では D0 ブレーンの添字 $i, j = 1 \cdots N$ の他に R 上の S^1 のコピーの添字 $m, n \in \mathbb{Z}$ が必要なため、 $X_{mi,nj}$ と書く (図 E.1)。この系では添字が無限個取り得るので $U(\infty)$ 行列で表される。さらにこれを X_{mn} と書き、それぞれを $N \times N$ 行列として見る。

ここで、 \mathbb{Z} の拘束条件を課す。 $X^9 \rightarrow X^9 + 2\pi R$ は、添字を $n \rightarrow n + 1$ と変えることと同じなので、この条件は

$$\begin{aligned} X_{mn}^a &= X_{(m-1),(n-1)}^a & a < 9 \\ X_{mn}^9 &= X_{(m-1),(n-1)}^9 & m \neq n \\ X_{mn}^9 &= 2\pi R g_{11} + X_{(m-1),(n-1)}^9 \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

3行目にのみ $2\pi R g_{11}$ が足されている理由は、 X^9 を対角化するとわかりやすい。 X^9 を対角化すると、その各成分は X^9 方向の D ブレーンの位置を表すので、 \mathbb{Z} による拘束条件は、3行目のように単位行列に比例した行列を足せばよい。単位行列は全ての行列と可換なため、対角化しない場合でも単位行列の定数倍を足せばよい。

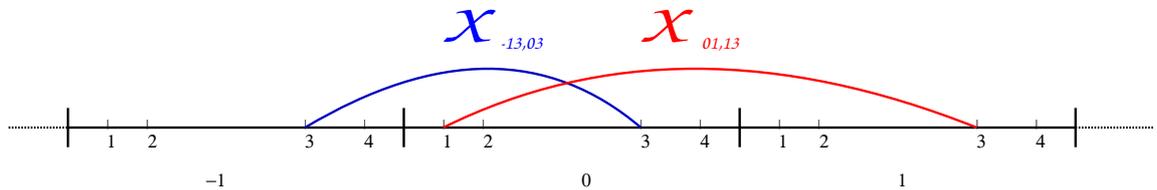


図 E.1: S^1 上の D0 ブレーンと開弦

(E.1) の結果, $X_k = X_{0l}^9$ と書くと, X_{mn} は

$$\begin{pmatrix} \ddots & & \vdots & & \ddots \\ & X_{-1-1}^9 & X_{-10}^9 & X_{-11}^9 & \\ \cdots & X_{0-1}^9 & X_{00}^9 & X_{01}^9 & \cdots \\ & X_{1-1}^9 & X_{10}^9 & X_{11}^9 & \\ \ddots & & \vdots & & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddots & & \vdots & & \ddots \\ & X_0 - 2\pi R_9 \mathbf{1} & X_1 & X_2 & \\ \cdots & X_{-1} & X_0 & X_1 & \cdots \\ & X_{-2} & X_{-1} & X_0 + 2\pi R_9 \mathbf{1} & \\ \ddots & & \vdots & & \ddots \end{pmatrix} \quad (\text{E.2})$$

と書ける.

この行列が Fourier 展開,

$$\phi(\hat{x}) = \sum_n \hat{\phi}_n e^{in\hat{x}/\tilde{R}_9}, \quad \tilde{R}_9 \equiv \frac{\alpha'}{R_9} \quad (\text{E.3})$$

に作用する共変微分

$$X^9 = 2\pi\alpha'(i\hat{\partial} + A(\hat{x})) \quad (\text{E.4})$$

と表せることを見る.

まず, Fourier 展開の成分を縦ベクトル

$$\phi(\hat{x}) \rightarrow \begin{pmatrix} \vdots \\ \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_0 \\ \hat{\phi}_{-1} \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (\text{E.5})$$

と表す. そうすると, 微分演算子の部分は,

$$i2\pi\alpha'\hat{\partial} = \text{diag}(\cdots, -2\pi R_9 \mathbf{1}, 0, 2\pi R_9 \mathbf{1}, \cdots) \quad (\text{E.6})$$

よって,

$$A(\hat{x}) = \sum_n A_n e^{in\hat{x}/\tilde{R}_9} \quad (\text{E.7})$$

とすると, $X_n = X_{0n}^9 = A_n$ で, 確かに, (E.4) と表現できることが分かる. こうして, S^1 上の N 枚の D0 ブレーンに対応する $U(\infty)$ 理論の行列 X^9 は双対円 \hat{S} の $U(N)$ の接続として表され, Fourier モードは巻きつきモードになっている.

この 0 ブレーン行列理論と双対円上の超対称 Yang-Mills 理論が (E.4) により関係づいていることを見る. 0 ブレーン行列理論のラグランジアンに

$$\text{Tr}[X^a, X^b]^2 \quad (a, b \neq 9) \quad (\text{E.8})$$

という項が含まれるが, トレースを実行すると,

$$\frac{1}{2\pi\tilde{R}_9} \int d\hat{x} \text{Tr}[X^a, X^b]^2 \quad (\text{E.9})$$

となり, これは2次元の超対称 Yang-Mills 理論のラグランジアンにも含まれる項である. ここで, トレースは, Fourier ゼロモードの添字 $n \in \mathbb{Z}$ についてとるが, \mathbb{Z} の位数で割っている. また, $1/2\pi\tilde{R}_9$ の因子も, 規格化因子として掛かっている.

次に,

$$\text{Tr}[X^9, X^a]^2 \quad (\text{E.10})$$

の項について考える.(E.4) の置換をしてトレースをとると,

$$\begin{aligned} \text{Tr}[2\pi\alpha'(i\partial_9 + A_9), X^a] &= -\frac{\alpha'}{\tilde{R}_9} \int d\hat{x} \text{Tr}(\partial_9 X^a - i[A_9, X^9])^2 \\ &= -\frac{\alpha'}{\tilde{R}_9} \int d\hat{x} \text{Tr}(D_9 X^a)^2 \end{aligned} \quad (\text{E.11})$$

これは双対 1-ブレーン理論から予想される. スカラーの微分の2次の項である.

X^9 の運動項は

$$\text{Tr}(D_0 X^9)^2 = \frac{1}{2\pi\tilde{R}_9} \int d\hat{x} \text{Tr}(F_{09})^2 \quad (\text{E.12})$$

と, Yang-Mills 曲率の2乗になる. この様に計算すれば 0ブレーンの残りの項も2次元の超対称 Yang-Mills 理論のラグランジアンに残りの項と一致する. このように, $R^8 \times S^1$ 上の N 枚の D0 ブレーン理論の低エネルギー有効理論と \hat{S}^1 に巻きついた N 枚の D1 ブレーンの低エネルギー有効理論 (2次元の超対称 Yang-Mills 理論) が等価である.

E.2 d次元トーラス上のpブレーン

これまでの議論を d次元トーラス上の pブレーンに拡張する. 前章の議論と同様に T^d に巻きついていない N 枚の D_p ブレーンの低エネルギー理論は T^d に巻きついた $D(p+d)$ ブレーン理論と等価であることが示せる. 前章の計算と違う点は, コンパクト化された方向同士の交換子がある点である:

$$\begin{aligned} \text{Tr}[X^a, X^b]^2 &= -\frac{(\alpha')^2}{\tilde{R}_a \tilde{R}_b} \int d\hat{x}^a d\hat{x}^b \left[(\hat{\partial}^a - iA^a), (\hat{\partial}^b - iA^b) \right] \\ &= -\frac{(\alpha')^2}{\tilde{R}_a \tilde{R}_b} \int d\hat{x}^a d\hat{x}^b \text{Tr}(F^{ab})^2 \end{aligned} \quad (\text{E.13})$$

と, 双対理論の Yang-Mills 曲率の2乗となっている. ここで, 再び巻きつきモードが Fourier モードになっている. また, Yang-Mills の結合定数が g_{YM} は $V^{1/2}$ に比例している. V は元のトーラスの体積.

E.3 束とDブレーン

ここまでは自明な境界条件に対応する $U(N)$ 接続に対する双対性を見てきたが, 非自明な境界条件を持つツイストされたセクターもある. 並進演算子 U を用いて, X^a の変換を

$$UX^aU^{-1} = X^a + \delta^{a9} 2\pi R_9 \quad (\text{E.14})$$

のようにすると,

$$X^9 = i\partial^9 + A_9, \quad U = e^{2\pi i \hat{x}^9 R_9} \quad (\text{E.15})$$

のように置き換えることができる. ここで, U は群 $\Gamma = \mathbb{Z}$ の生成子である. より一般的に, ゲージ変換まで含めて

$$UXU^{-1} = \Omega(X^a + \delta^{a9} 2\pi R_9 \mathbf{1})\Omega^{-1} \quad (\text{E.16})$$

とすることもできる. $\Omega \in U(N)$ はゲージ群の任意の元である. この時,

$$X^9 = i\partial^9 + A_9, \quad U = \Omega \cdot e^{2\pi i \hat{x}^9 R_9} \quad (\text{E.17})$$

となる. これで非自明なゲージ変換も考えることができる.¹

半径 R_1, R_2 の 2 次元トーラス T^2 に N 回巻きついた D2 プレーンの低エネルギー有効理論を考える.

$U(N)$ を

$$U(N) = (U(1) \times SU(N))/\mathbb{Z}_N \quad (\text{E.18})$$

と分解して, $\text{Tr } F$ は可換な部分のみ効くので, $C_1 = k$ となるようなフラックス F は $F = k/N$ となる.

E.3.1 T^2 上の D0 プレーン

$C^1 = 1$ の T^2 上の非自明な $U(N)$ 束を考え, Chern 数が D0 プレーンの数であることを具体的に見る. 変換関数は,

$$\Omega_1 = e^{ix_2/R_2 T} V, \quad V_{N \times N} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Omega_2 = \mathbf{1} \quad (\text{E.19})$$

とする. $\Omega_2 = \mathbf{1}$ と取ったのは $X^2 = i\partial_2 + A_2$ の置き換えを単純にするためである. この変換関数で (3.14) のように変換するゲージ場 A は,

$$A_1 = 0, \quad A_2 = Fx_1 + \frac{1}{R_2} \text{diag}\left(0, \frac{1}{N}, \dots, \frac{N-1}{N}\right)$$

$$F = \frac{1}{2\pi N R_1 R_2} \mathbf{1} \quad (\text{E.20})$$

これで $X^2 = i\partial_2 + A_2$ の置き換えをして, X^2 は (E.2) のような行列で書け, $(n, m) = (0, 0)$ の成分を見ると,

$$X^2 = \frac{\tilde{R}_2}{N} \begin{pmatrix} \frac{x_1}{R_1} & & & \\ & \frac{x_1}{R_1} + 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{x_1}{R_1} + (N-1) \end{pmatrix} \quad (\text{E.21})$$

¹非自明な境界条件の本でも, 双対円 S^1 上の $U(N)$ 束は自明束になる.

これはちょうど, x_1 方向に N 回, x_2 方向に 1 回, 斜めに巻きついた 1 枚の D1 ブレーンを表している.(図 E.2)

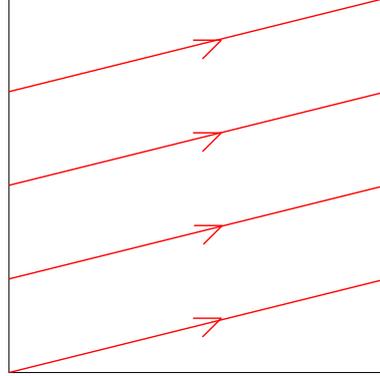


図 E.2: T^2 に $(N, 1)$ 回斜めに巻きついた D1 ブレーン

E.4 低次元 D ブレーンの高次元ブレーン電荷

前章では, 高次元 D ブレーンの Chern 数が低次元 D ブレーンの電荷であることを見たが, この章では低次元 D ブレーンが高次元 D ブレーンの電荷を持っていることを見る. E.3.1 で見た, T^2 上に $(N, 1)$ 回巻きついた D1 ブレーンを見る (図??). この場合, D1 ブレーンの配位は

$$[(\partial_1 - iA_1), X^2] = \frac{R_2}{NR_1} \mathbf{1} \quad (\text{E.22})$$

これを x_2 方向を T 双対変換すると,

$$[(\partial_1 - iA_1), (\partial_2 - iA_2)] = -iF = -\frac{-i}{2\pi iNR_1R_2} \mathbf{1} \quad (\text{E.23})$$

これは前章で見た通り, N 枚の D2 ブレーンを表す. 一方, x_1 方向に T 双対変換すると,

$$[X^1, X^2] = \frac{2\pi i\tilde{R}_1R_2}{N} \mathbf{1} \quad (\text{E.24})$$

\tilde{R}_1, R_2 は D0 ブレーンのあるトーラスの半径である. X^2 方向に巻きついた D1 ブレーンは X^1 方向の T-双対変換で D2 ブレーンになり, X^2 方向の T-双対性で D0 ブレーンになる. そのため,

$$\text{Tr} [X^1, X^2] = \frac{iA}{2\pi} \quad A : T^2 \text{ の面積} \quad (\text{E.25})$$

を満たす X で表される D0 ブレーンは D2 ブレーン電荷を運ぶ. これは有限次元の X では必ず 0 になるが, 無限次元だと非ゼロになりうる.

同様に,

$$\text{Tr} \epsilon_{abcd} X^a X^b X^c X^d = \frac{V}{2\pi^2} \quad (\text{E.26})$$

は D4 ブレーン電荷を運ぶ. 同様にして, D_p ブレーンは垂直方向のトレースから $D(p+2k)$ ブレーン電荷を持つことができる.

参考文献

- [1] J. Polchinski, "String Theory vol 1,2"
- [2] M. Nakahara, "Geometry, Topology and Physics I,II"
- [3] D. Duo, R. Russo and S. Sciuto, "New twist field couplings from the partition function for multiply wrapped D-branes," JHEP **0712** (2007) 042 [arXiv:0709.1805 [hep-th]].
- [4] M. F. Atiyah and I. M. Singer, Annals Math. **93** (1971) 119.
- [5] M. Hamanaka and H. Kajiura, "Gauge fields on tori and T-duality," Phys. Lett. B **551** (2003) 360 [arXiv:hep-th/0208059].
- [6] P. Di Vecchia and A. Liccardo, "D branes in string theory. I," NATO Adv. Study Inst. Ser. C. Math. Phys. Sci. **556** (2000) 1 [arXiv:hep-th/9912161].
- [7] P. Di Vecchia and A. Liccardo, "D-branes in string theory. II," arXiv:hep-th/9912275.
- [8] C. G. . Callan, C. Lovelace, C. R. Nappi and S. A. Yost, "Loop Corrections to Superstring Equations of Motion," Nucl. Phys. B **308** (1988) 221.
- [9] C. G. . Callan, C. Lovelace, C. R. Nappi and S. A. Yost, "Adding Holes and Crosscaps to the Superstring," Nucl. Phys. B **293** (1987) 83.
- [10] A. Giveon, M. Porrati and E. Rabinovici, "Target space duality in string theory," Phys. Rept. **244** (1994) 77 [arXiv:hep-th/9401139].
- [11] W. Taylor, "Lectures on D-branes, gauge theory and M(atrices)," arXiv:hep-th/9801182.
- [12] R. C. Myers, "Dielectric-branes," JHEP **9912**, 022 (1999) [arXiv:hep-th/9910053].
- [13] K. S. Narain, M. H. Sarmadi and E. Witten, "A Note on Toroidal Compactification of Heterotic String Theory," Nucl. Phys. B **279** (1987) 369.
- [14] W. Nahm, "A Simple Formalism For The Bps Monopole," Phys. Lett. B **90** (1980) 413. [15]
- [15] P. Meessen and T. Ortin, "An $Sl(2, Z)$ multiplet of nine-dimensional type II supergravity theories," Nucl. Phys. B **541** (1999) 195 [arXiv:hep-th/9806120].
- [16] K. Hori, "D-branes, T-duality, and index theory," Adv. Theor. Math. Phys. **3** (1999) 281 [arXiv:hep-th/9902102].

- [17] P. Di Vecchia, A. Liccardo, R. Marotta, I. Pesando and F. Pezzella, “Wrapped Magnetized Branes: Two Alternative Descriptions?,” *JHEP* **0711** (2007) 100 [arXiv:0709.4149 [hep-th]].
- [18] I. Pesando, “Open and Closed String Vertices for branes with magnetic field and T-duality,” arXiv:0910.2576 [hep-th].
- [19] P. J. Braam and P. van Baal, “NAHM’S TRANSFORMATION FOR INSTANTONS,” *Commun. Math. Phys.* **122** (1989) 267.
- [20] S. F. Hassan, “T-duality, space-time spinors and R-R fields in curved backgrounds,” *Nucl. Phys. B* **568** (2000) 145 [arXiv:hep-th/9907152].