位相的場の理論とその周辺

江口 徹[*]述
浜中 真志[†]記

1998 年 11 月 24 ~ 27 日[‡]

目 次

1 はじめに **2**
1.1 位相的場の理論とは 2
1.2 動機 2

2 超対称量子力学とモース理論 **5**
2.1 超対称量子力学 5
2.2 モース理論との関わり 13

3 4 次元 $N = 2$ Super Yang-Mills 理論 **19**
3.1 $N = 2$ Super Yang-Mills 理論とツイスト 19
3.2 $N = 2$ 位相的場の理論と Donaldson 不変量 31

4 4 次元 $N = 4$ Super Yang-Mills 理論 **38**
4.1 $N = 4$ Super Yang-Mills 理論と S-duality 38
4.2 バージョン 1 (超対称量子力学 1) 43
4.3 バージョン 2 (超対称量子力学 2) 45
4.4 バージョン 3 ($N = 2 \to N = 4$) 47
4.5 バージョン 4 ($N = 4$ 位相的場の理論) 47

A 複素幾何学 **54**
A.1 多様体 54
A.2 1 次元複素多様体 57
A.3 2 次元複素多様体 62
A.4 コホモロジー理論 65
A.5 (Hyper) Kähler 多様体 72

[*]東京大学大学院理学系研究科物理学専攻
[†]東京大学大学院理学系研究科物理学専攻
[‡]この講義録はこの期間に千葉大学で行われた江口徹による集中講義に基づいて作られたもので、文部省科学研究費特定領域研究 (B) 707「超対称性理論」報告書の講義録シリーズの中の一冊です。

1 はじめに

1.1 位相的場の理論とは

位相的場の理論 (Topological Field Theory。以後 TFT と書く。) と呼ばれる一連の理論があるわけですが、こういうもののあらましをお話しようと思います。どんな種類の理論があるかと言いますと、

- 4 次元の Yang-Mills 理論に関係した TFT (Witten,1988 年 [1], $\cdots$)
- 3 次元の Chern-Simons 理論に関係した TFT (Schwarz,1978 年 [2]; Witten,1989 年 [3], $\cdots$)
- 2 次元の Non-Linear σ-Model から得られる TFT (Witten,1988 年 [4], $\cdots$)
- 2 次元の共形不変性を持つ TFT (江口 $-$ 梁,1991 年 [5])

といったものが知られています。実は、この偶数次元 (2、4 次元) の場合と奇数次元 (3 次元) の場合とは非常に様子が違って来ます。もっと高い次元のものを考えてもいいのですが、今は考えないことにします。これからお話しようと思うのは、偶数次元の場合です。それで、どういうふうに様子が違うかと言いますと、偶数次元の場合には、基本的に Supersymmetry (以後 SUSY と書く) を持った理論が背景にあって [16]、それから少し違ったバージョンの理論を作ることができるということです。ですから、SUSY と密接に関係します。普通の SUSY というのは, ベースとなる時空多様体が曲がっているときには、うまく定義できません。もちろん、局所的な SUSY という考え方もありますが、それは重力を入れて膨らました理論です。曲がった時空では普通で言う rigid な SUSY は定義できないのですが、曲がった時空でも定義しようとすると、ちょっと違ったバージョンの理論にならざるを得なくて、それが TFT になります。そういう意味で、偶数次元の場合は直接 SUSY に密接に関係します。奇数次元の場合には、SUSY とは直接関係はありません。ですから、3 次元の Chern-Simons 理論はそれで独自の理論として考えることができます。もちろん 3 次元の理論も、ハミルトン形式に移り、時間一定の面で切り出してきてその構造を見ることで、2 次元の理論になることが知られています [3]。つまり、奇数次元と偶数次元とは行ったり来たりする関係にあります。ただ、今回のお話では奇数次元のものは扱わないことにして、専ら偶数次元のお話をしたいと思います。

1.2 動機

Witten が初めて TFT を持ち出したときにどんなことを言ったかといいますと、まず動機としては、基本的には量子論的な重力理論を考えたい、一般座標変換に対して不変な 4 次元の時空の上の理論を考えたい、あるいはメトリックなんかを勝手にある程度取り換えても不変な理論を考えたい、ということでした。それで、彼はこんな議論をしました。今量子論的な重力理論があるとします。そんな理論は実際にはまだできていないのですが、あるとしましょう。その理論で一体どういう量が観測可能量 (オブザーバブル) になっているか、ということを考えてみます。いま、あるオペレーター $\mathcal{O}$ があって場所 x に依存しているとし、また別の場所 y にそのオペレーターがあって、その期待値

$$\langle \mathcal{O}(x)\mathcal{O}(y) \rangle \tag{1.1}$$

が計算できたとします。そのときにこれがどんな関数になっているか、ということを調べてみます。普通はこれは距離に依存する形になっていて、

$$\langle \mathcal{O}(x)\mathcal{O}(y)\rangle = \frac{1}{|x-y|}, \quad \text{あるいは} \quad e^{-m|x-y|} \tag{1.2}$$

となります。距離というのはメトリックを決めれば決まるものです。 ところが、今量子論を考えますと、メトリックが量子効果でふらふらと動いてしまいます。そうすると、あるメトリックに関しては近いようにみえるかもしれないし、違うメトリックに関しては凄く遠いように見えるかもしれない。だから、どこかある古典解 (アインシュタイン方程式の解) の周りに、メトリックが少し揺らぐような状況であれば、距離と言うのは well-defined になって、何か良く分かる気がするんですが、メトリックが古典解のまわりに揺らぐんじゃなくて 、非常に大きく揺らいでしまうような状況 (例えば、ブラックホールの真ん中辺のような非常に重力の強い所) では、何が起こっているのかあんまり良く分かりません。さっきの期待値 (1.1) が式 (1.2) のような恰好になっているとすると、メトリックがある固定した値の周りに揺らぐので、一般座標変換不変性のようなものが壊れている、と言えます。これを broken phase と呼びます。普通グローバルな対称性に関しては broken とか unbroken とかいう言い方をして良く知ってるわけですが、一般座標変換の対称性についてはそういう言い方をしません。ですからこう呼んでも良く分からないわけですが、ともかく、これが我々が良く知っているような世界で、つまり、今我々が住んでいる地球 (宇宙) の上では重力理論というのは broken phase で実現されていると考えます。重力場にある配位があってその周りに揺らいでいるような状況です。これに対して、重力理論の unbroken phase というものを考えてみます。これは、強結合の重力理論に相当していて、メトリックも非常に大きく揺らいでしまうかもしれない、という理論です。古典的な特殊な配位の周りで揺らぐのではなく、いわば 0 から ∞ まで非常に大きくふらふらしているという理論です。そういう場合を考えてみたいということです。それはやはり良く分かりませんが、重力理論を調べていく上で、このような unbroken phase の理論に対する理解が得られれば、我々が住んでいる broken phase の重力理論についても理解が得られるかもしれないと、そういう動機があったようです。それで、一般座標変換不変性が全く壊れないで完全に実現されているような所で場の理論を考えることにします。そうすると式 (1.2) のような形は無理だから、一体どのようなものが考えられるかといいますと、相関関数としては

$$\langle \mathcal{O}(x)\mathcal{O}(y)\rangle = \begin{cases} const & (x=y) \\ const' & (x\neq y) \end{cases} \tag{1.3}$$

というものが 1 つの可能性として考えられます。これは実は位相不変量になっています。一般座標変換不変性が実現されているような重力理論を考えると、相関関数は全て位相不変量になっているということです。相関関数が全て位相不変量になっているような場の理論が考えられるということです。こういったことが動機だったようです。重力の broken phase とか unbroken phase とか、やはりあんまり良く分からない理論ですが、一体どんなクラスの理論がありえるのかということを考えてみましょう。

TFT が初めて出て来たのは 10 年程前だと思います。このとき Witten が、こういう新しいクラスの理論を書き下したわけですが [1][4]、当時はどうしてこういうものを考えたのか良く分からないと言うか、何かつまらない理論を考えたな、と受け止めた人が多かったと思います。今でも、TFT とは一体何なのか、なかなかなんとも言えない理論です。一体何が嬉しいのか、どういう物

理的な意味を持っているのか、ということについて考えるとなかなか微妙な所があります。それでまあ今回の講義で、TFT というのはどういうものかというのを紹介して、みんなで考えていきたいと、本当にこんなものでいいのか、一体何をやろうとしているのか、といったことについて議論したいと思います。

2　超対称量子力学とモース理論

物理のコンテクストにコホモロジー論がどうして現れるかを最も分かりやすく説明してくれる例として超対称量子力学 (Supersymmetric Quantum Mechanics) というものがあります [6]。まずは、この基本的な話から始めたいと思います。

2.1　超対称量子力学

量子力学ですから、まずハミルトニアン (Hamiltonian) を作りたいのですが、その前に、スーパーチャージ (Supercharge) Q^*, Q を次のように定義します：

$$\begin{aligned} Q^* &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_+ \left\{ \frac{1}{i}\frac{d}{dx} - i\frac{dW(x)}{dx} \right\} \\ Q &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_- \left\{ \frac{1}{i}\frac{d}{dx} + i\frac{dW(x)}{dx} \right\} \end{aligned} \tag{2.1}$$

Q^*, Q というスーパーチャージが 2 つあって、いわば $N = 2$ の理論です。量子力学なので、スピノールの添字はありません。x は粒子の座標、$W(x)$ は x の任意の多項式とします。$W(x)$ のことをスーパーポテンシャルと言います。σ は普通のパウリ行列で次の通りです：

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

$$\sigma_+ = \frac{1}{2}(\sigma_1 + i\sigma_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

$$\sigma_- = \frac{1}{2}(\sigma_1 - i\sigma_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

これらは 2 行 2 列の行列なので、波動関数は 2 成分です。そこで、波動関数を次のように書きましょう：

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \begin{pmatrix} \varphi_F(x) \\ \varphi_B(x) \end{pmatrix} \\ &= \varphi_F(x) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \varphi_B(x) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.5}$$

また、

$$F = \frac{1 + \sigma_3}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

をフェルミオン数演算子とします。こうしますと、2 成分波動関数のうち上成分がフェルミオニックな成分、下成分がボゾニックな成分を表します。量子力学だからフェルミオンが 1 ついるかいないかしかなく、波動関数の住む空間 $\mathcal{H}$ が直和分解します：

$$\mathcal{H} \simeq \mathcal{H}_B \oplus \mathcal{H}_F \tag{2.7}$$

このような意味で超対称な理論になっています。σ_+ はフェルミオンの生成演算子、σ_- はフェルミオンの消滅演算子となります。これは、どっちがどっちでもいいんですが、コンベンションと

してこう取ることにします。それで、例えば、フェルミオニックな状態 $|f\rangle(\in \mathcal{H}_F)$ に Q^* を働かすと 0 になります：

$$Q^*|f\rangle = 0 \tag{2.8}$$

$|f\rangle$ にフェルミオンを作ろうとすると 0、行きすぎると 0 ということです。ボゾニックな状態 $|b\rangle(\in \mathcal{H}_B)$ についても同様で

$$Q|b\rangle = 0 \tag{2.9}$$

です。まとめますと、こういうことです：

$$0 \overset{Q}{\longleftarrow} \mathcal{H}_B \underset{Q}{\overset{Q^*}{\rightleftarrows}} \mathcal{H}_F \overset{Q^*}{\longrightarrow} 0 \tag{2.10}$$

それでハミルトニアンは、と言いますと次のように作ります：

$$H = Q^*Q + QQ^* \tag{2.11}$$

(2.10) からも明らかなように、Q^*, Q というのは 2 回やると 0 になります ($\sigma_+{}^2 = 0, \sigma_-{}^2 = 0$ より)：

$$\begin{aligned} Q^{*2} &= 0 \\ Q^2 &= 0 \end{aligned} \tag{2.12}$$

$N = 2$ の SUSY というのは BRST 的なので、2 乗が 0 となります。それで、ハミルトニアンを作るには (2.11) のように共役なもの同士をひっつけないといけないのです。これを具体的に計算してみると、

$$H = \frac{1}{2}\left\{-\frac{d^2}{dx^2} + \left(\frac{dW}{dx}\right)^2\right\} + \frac{1}{2}\sigma_3\frac{d^2W}{dx^2} \tag{2.13}$$

となります。第 1 項の計算で $\sigma_+\sigma_- + \sigma_-\sigma_+ = 1$ (左辺はフェルミオンがいたらそれを消して作り ($\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ にうつし)、フェルミオンがいなかったらそれを作って消す ($\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ にうつす) という意味。これは何もしないことに相当するので、右辺の 1 に一致する。) を、第 2 項の計算で $\sigma_+\sigma_- - \sigma_-\sigma_+ = \sigma_3$ (左辺はフェルミオンがいたら消して作り、フェルミオンがいなかったらそれを作って消しマイナスをつけるという意味。これはまさに σ_3 である。) を用いました。第 2 項の意味はパウリ行列で書いてしまうとピンとこないのですが、σ_+ がフェルオンの生成演算子、σ_- がフェルミオンの消滅演算子なので、$\sigma_+\sigma_- - \sigma_-\sigma_+$ の部分を $\psi^*\psi - \psi\psi^*$ とでも書いてやると見やすくなります (式 (2.47) 参照)。つまり、第 2 項は湯川カップリングの項です。第 1 項の $\left(\frac{dW}{dx}\right)^2$ は普通の意味のポテンシャル、ボゾニックなポテンシャルです。これは SUSY で一番基本的な形になっています。つまり、ボゾニックなポテンシャルがスーパーポテンシャルの微分の 2 乗で書けて、湯川カップリングの項がスーパーポテンシャルの 2 階微分に比例する形で書けるということです。

次にこのモデルの性質を調べます。まず、H は $Q^*Q + QQ^*$ の形なので、非負値 (固有値が正または 0) となります。なぜなら、H を波動関数ではさんでやると、

$$\begin{aligned} \langle\psi|H|\psi\rangle &= \langle\psi|Q^*Q|\psi\rangle + \langle\psi|QQ^*|\psi\rangle \\ &= \|Q|\psi\rangle\|^2 + \|Q^*|\psi\rangle\|^2 \\ &\geq 0 \end{aligned} \tag{2.14}$$

となるからです。これは SUSY の特徴です。ここで H の固有状態を考えましょう。

- エネルギー固有値が正の場合
  ボゾニックなエネルギーが E の状態 $|b\rangle$ があったとしましょう：

$$\begin{aligned} H|b\rangle &= E|b\rangle \\ F|b\rangle &= 0 \end{aligned} \tag{2.15}$$

  さっきの定義から Q^* はボゾニックな状態をフェルミオニックな状態に移します：

$$Q^*|b\rangle = |f\rangle \tag{2.16}$$

  今、この $|f\rangle$ が存在するかどうか、$|b\rangle$ の相棒はいるかどうか、ということを調べてみます。$|f\rangle$ の内積が 0 になるかどうか見てみましょう：

$$\begin{aligned} \langle\ f|f\rangle &= \langle\ b|QQ^*|b\rangle \\ &= \langle\ b|\underbrace{Q^*Q + QQ^*}_{H}|b\rangle \\ &= E\langle\ b|b\rangle \\ &\neq 0 \end{aligned} \tag{2.17}$$

  したがって、必ず相棒がいます。今は、ボゾンから出発しましたが、フェルミオンから出発しても同じです。これは SUSY の 2 次元表現になっています。$|b\rangle$ と $|f\rangle$ でちょうど表現をしょっているからです。

- エネルギー固有値が 0 の場合
  この場合はちょっと情勢が変わってきます。いま、

$$H|b\rangle = 0 \tag{2.18}$$

  となる、$|b\rangle$ があったとしましょう。このとき、相棒を作ってみようとすると、

$$\begin{aligned} \langle\ f|f\rangle &= \langle\ b|QQ^*|b\rangle \\ &= \langle\ b|\underbrace{Q^*Q + QQ^*}_{H}|b\rangle \\ &= 0 \end{aligned} \tag{2.19}$$

  となるので、不定計量といった変なことがないとすれば、内積が 0 なので $|f\rangle$ も 0 です。だから、

$$\begin{aligned} Q^*|b\rangle = 0 \\ Q|b\rangle = 0 \end{aligned} \tag{2.20}$$

  です。相棒のフェルミオンがないので、これは SUSY の 1 次元表現です。フェルミオンから出発しても同じように 1 次元表現が得られます。これは BPS 状態というものです。

SUSY の代数の表現を考えたときに表現の大きさが違う場合があります。どう違うかと言いますと、$E > 0$ のようにパラメーターの一般のレンジでは、大きな表現 (この場合は 2 次元表現) がで

きるのに対して、$E=0$ のようにパラメーターの値が許されるぎりぎりの所まで来ると情勢が変わって、今度はより小さな表現 (1 次元表現) ができます。表現のサイズが小さくなります。この小さな表現を BPS 状態といいます [7]。

これについては次のように考えましょう。一般にリー群とリー環の関係というのは、リー群の元を g、リー環の元を L とすれば

$$\begin{aligned} g &= e^{i\theta L} \\ &= 1 + i\theta L + \frac{1}{2}(i\theta L)^2 + \cdots \end{aligned} \tag{2.21}$$

です。θ はパラメーターで、普通は実数ですが、L が SUSY の生成子のときはグラスマン数になります。今もしも、リー環の生成子 L が状態 $|\psi\rangle$ を消している (すなわち $L|\psi\rangle = 0$) とすると、

$$\begin{aligned} e^{i\theta L}|\psi\rangle &= (1 + i\theta L + \frac{1}{2}(i\theta L)^2 + \cdots)|\psi\rangle \\ &= |\psi\rangle \end{aligned} \tag{2.22}$$

となるので、この状態 $|\psi\rangle$ はリー群の変換 $e^{i\theta L}$ に対して不変だということになります。つまりこの $|\psi\rangle$ という状態だけで表現を構成しています。ところがもし、$|\psi\rangle$ がリー環の生成子 L で消されない (すなわち $L|\psi\rangle \neq 0$) とすると、

$$e^{i\theta L}|\psi\rangle = |\widetilde{\psi}\rangle \ (\neq |\psi\rangle) \tag{2.23}$$

のように、状態 $|\psi\rangle$ の相棒 $|\widetilde{\psi}\rangle$ が出来てしまいます。この場合は $|\psi\rangle$ だけではリー群の変換に対する不変性を保つことができなくて、$|\psi\rangle$、$|\widetilde{\psi}\rangle$ 全員で表現を構成します。

このことを今の SUSY の話に適用してみましょう。考える生成子は Q^*、Q の 2 種類あります。

- $E > 0$ の場合
  状態 $|b\rangle$ について考えます。この場合は、$Q^*|b\rangle = |f\rangle \neq 0,\ Q|b\rangle = 0$ が成り立つので、状態 $|b\rangle$ だけでは SUSY 変換に対する不変性を保つことができず、2 つの状態 $|b\rangle$ と $|f\rangle$ でもってその表現を構成することになります。これは SUSY の 2 次元表現です。状態 $|f\rangle$ について考えても同様で、この場合も、2 つの状態 $|b\rangle$ と $|f\rangle$ でもって SUSY の 2 次元表現を構成します。

- $E = 0$ の場合
  同様に状態 $|b\rangle$ について考えます。この場合は $Q^*|b\rangle = Q|b\rangle = 0$ が成り立つので、状態 $|b\rangle$ だけで SUSY 変換に対する不変性を保っています。この場合は、状態 $|b\rangle$ だけで SUSY の表現を構成します。これは SUSY の 1 次元表現です。

このように $E > 0$ の場合と $E = 0$ の場合とで様子が違って来ます。ここで出て来たエネルギーに関する条件式 $E \geq 0$ は Bogomol'nyi 不等式と呼ばれるものの 1 つで、この不等式を saturate する (飽和させる、等号を成立させる) 状態のことを BPS 状態と言います。あるいは SUSY の基底状態とも言えます。BPS 状態は Non-BPS 状態に比べてより小さな表現に属しています。BPS 状態が Non-BPS 状態に転じるにはそれだけ余分な自由度を獲得しなければならず、そんなことはまず起こり得ません。ですから場の理論の場合に、複雑な量子補正を受けても、BPS 状態は BPS 状態のままとどまり、強い安定性を示します。

上の議論から、理論に BPS 状態があれば SUSY 不変な基底状態が存在することが分かります。また逆に、理論に BPS 状態がなければ SUSY 不変な基底状態が存在しません。ですから、BPS

状態がなければ SUSY が自発的に破れます。(対称性が自発的に破れるとは、ハミルトニアンがある対称変換で不変であるにもかかわらず、系の基底状態がその対称変換で不変にならない場合を言います。) このように、BPS 状態を調べれば SUSY が自発的に破れているかどうかが分かります (例えば、[8][9][10])。

それで今、BPS 状態を詳しく調べることにしましょう。その場合には、SUSY 指数 (Witten 指数ともいう。)

$$\mathrm{tr}(-1)^F \tag{2.24}$$

を考えるのが便利です (Witten,1982 年 [11])。$E > 0$ のときは、ボゾンとフェルミオンが対になって出て来ますので SUSY 指数には効いてきません。$\mathrm{tr}(-1)^F$ は BPS 状態だけを拾ってきます。ボゾニックな BPS 状態に対してはプラス 1 でカウントして、フェルミオニックな BPS 状態に対してはマイナス 1 でカウントするので、SUSY 指数は

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(-1)^F &= (\text{ボゾニックな BPS 状態の数}) - (\text{フェルミオニックな BPS 状態の数}) \\ &= n_B - n_F \end{aligned} \tag{2.25}$$

となります。$n_B = 0, n_F = 0$ であれば BPS 状態がないということなので、このとき SUSY が自発的に破れていることになります。そのためには SUSY 指数が 0 であることが必要です。SUSY 指数が 0 でなければ SUSY の自発的破れは起こり得ません。

さて、ハミルトニアン (2.13) について、SUSY 指数を計算しましょう。例えば、n_B を調べたければ、

$$Q^*\psi(x) = 0$$

$$i.e. \quad \left\{\frac{1}{i}\frac{d}{dx} - i\frac{dW(x)}{dx}\right\}\varphi_B(x) = 0 \tag{2.26}$$

$$\int dx|\varphi_B(x)|^2 < \infty \tag{2.27}$$

の存在を調べればいいのですが、形式的には式 (2.26) は簡単に解けて、

$$\varphi_B(x) = e^{-W(x)} \tag{2.28}$$

となります。n_F についても同様に、

$$Q\psi(x) = 0$$

$$i.e. \quad \left\{\frac{1}{i}\frac{d}{dx} + i\frac{dW(x)}{dx}\right\}\varphi_F(x) = 0 \tag{2.29}$$

$$\int dx|\varphi_F(x)|^2 < \infty \tag{2.30}$$

より、

$$\varphi_F(x) = e^{+W(x)} \tag{2.31}$$

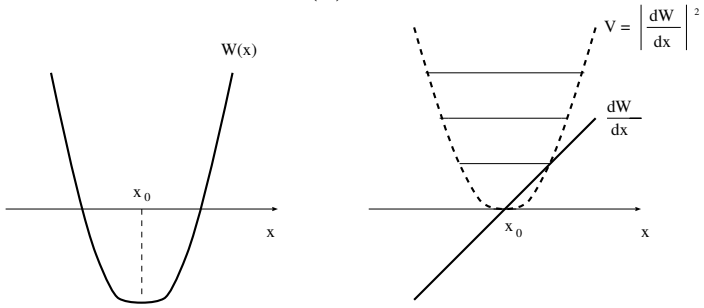
となります。解 (2.28) が存在すれば、$n_B = 1$ であり、解 (2.31) が存在すれば $n_F = 1$ であることになります。(2.28),(2.31) が本当の解になるためには、これらが規格化できなければなりません。(2.28), (2.31) の形の解が規格化できるためには、$|x| \to \infty$ で exponential の肩が $-\infty$ となる必要があります。そこで、$W(x)$ の $|x|$ 大での振る舞いを、$W(x) \simeq \lambda x^n (\lambda \neq 0, n \neq 0)$ として、n の偶奇について場合分けをして調べてみます：

- $n =$ 偶数の場合 (すなわち、$W(x) \simeq \lambda x^2, \lambda x^4, \cdots$ の場合)
  λ が正ならば (2.28) のみ $(n_B = 1, n_F = 0)$ が、λ が負ならば (2.31) のみ $(n_B = 0, n_F = 1)$ が規格化可能な波動関数を与えます。ですから、

$$\mathrm{tr}(-1)^F = \mathrm{sign}(\lambda) \tag{2.32}$$

  となります。つまり、この場合は SUSY が自発的に破れることがありません。例えば、$n = 2$ だと、

図 1: $W(x) \simeq x^2$ の場合



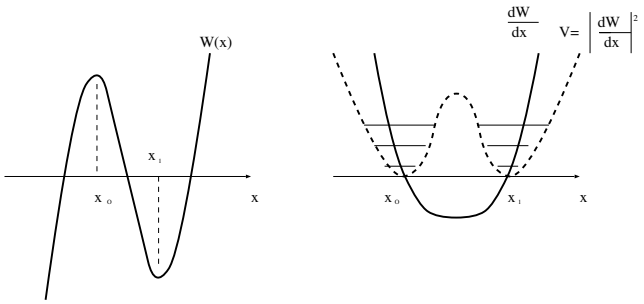
  で、ポテンシャル $V = \left(\frac{dW}{dx}\right)^2$ の井戸の底に基底状態ができるわけですが、そのエネルギー準位がぴったり 0 だということです。それは、$W(x)$ のこの辺をぐちゃぐちゃと変えても、$|x|$ 大での所を変えなければ一番下の準位は全く動かない、そういう主張です。これは答えを知っているからトリビアルな気がするのですが、多分本当は不思議です。今ここに $\hbar$ を入れて、$\hbar$ で WKB 近似をやりますと、各次の摂動項がダーっと出て来るのですが、その各次の係数が全て 0 ということです。要は、指数というのは $W(x)$ の漸近形だけで決まり、その詳細に依らないので、一種の位相不変量になっているということです。

- $n =$ 奇数の場合 (すなわち、$W(x) \simeq \lambda x^1, \lambda x^3, \ldots$ の場合)
  $W(x)$ が $x \to \pm\infty$ で符号を変えてしまうので、規格化可能な波動関数は存在しません $(n_B = 0, n_F = 0)$。ですから、

$$\mathrm{tr}(-1)^F = 0 \tag{2.33}$$

  となります。つまり、この場合は SUSY が自発的に破れます。例えば $n = 3$ だと、

図 2: $W(x) \simeq x^3$ の場合



で、今度も、ポテンシャル $V = \left(\frac{dW}{dx}\right)^2$ のところに準位が出て来て、その一番準位の低いものがエネルギー 0 かどうかが問題となって来るんですが、この場合の主張は、摂動のオールオーダーで 0 なんだけど実はトンネル効果でエネルギーが上がってしまって 0 でなくなってしまう、ということです。

このように、指数は $W(x)$ の漸近形だけで決まり、その詳細に依らないので、いま $W(x)$ を $tW(x)$ とスケールアップして、どんどん大きくしてみます。このとき波動方程式は、t の大きい巾の項が効いてくるので、

$$t^2 \left(\frac{dW}{dx}\right)^2 \varphi(x) = 0 \tag{2.34}$$

となります。だから、$t \to \infty$ の極限で、零エネルギー波動関数は $\frac{dW}{dx} = 0$ となる x 近傍、すなわち $W(x)$ の臨界点近傍に局所化 (localize) します。だから零エネルギー波動関数がもしもあるとすれば、$W(x)$ の臨界点近傍にサポートを持つようなものになっているはずで、それはいわば $t^2 \left(\frac{dW}{dx}\right)^2$ の深い井戸にトラップされた状態です。そういう波動関数がない限り、零エネルギーの波動関数はあり得ません。ただ、そういう波動関数があったからといって、それが正確に零エネルギーの波動関数であるとは限りません。とりあえず、$W(x)$ の臨界点付近で $\frac{dW}{dx}$ が 1 位の零を持つものを考えましょう:

$$\frac{dW}{dx} \simeq \lambda(x - x_0) \tag{2.35}$$

この場合に $W(x)$ の臨界点 $x = x_0$ 付近での波動関数について調べてみます。このとき、$W(x)$ は

$$W(x) \simeq \frac{1}{2}\lambda(x - x_0)^2 \tag{2.36}$$

となり、ハミルトニアンは

$$H \simeq -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}\lambda^2(x - x_0)^2 + \frac{\lambda}{2}\sigma_3 \tag{2.37}$$

となります。このハミルトニアンの第 1 項と第 2 項は、調和振動子の形をしていて、そのエネルギー固有値は $\frac{1}{2}|\lambda|$ です。それで第 3 項をどう見るかですが、ハミルトニアンのエネルギー固有値を 0 にしたいので、λ が正のときはこの項のエネルギー固有値を $-\frac{1}{2}\lambda$ に、λ が負のときはこの項のエネルギー固有値を $+\frac{1}{2}\lambda$ にすればいいので、σ_3 の形から、

$$\lambda < 0 \text{ のとき} \quad \psi(x) \simeq \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}|\lambda|(x-x_0)^2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad : \text{フェルミオン} \tag{2.38}$$

$$\lambda > 0 \text{ のとき} \quad \psi(x) \simeq \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-\frac{1}{2}|\lambda|(x-x_0)^2} \end{pmatrix} \quad : \text{ボゾン} \tag{2.39}$$

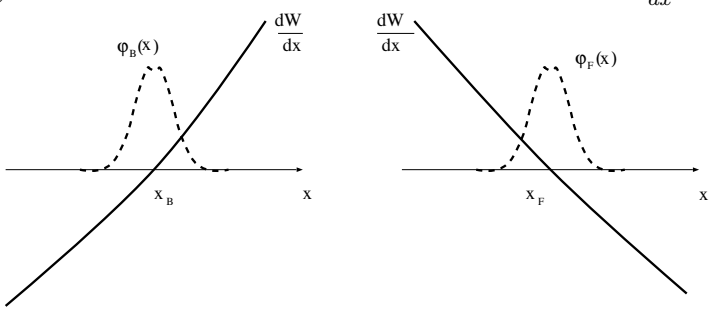
が分かります。$W(x)$ を $tW(x)$ とスケールアップしたときの波動関数は上式で λ を $t\lambda$ に変えるだけでよく (ハミルトニアン (2.37) より)、

$$\lambda < 0 \text{ のとき} \quad \psi(x) \simeq \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}|t\lambda|(x-x_0)^2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad : \text{フェルミオン} \tag{2.40}$$

$$\lambda > 0 \text{ のとき} \quad \psi(x) \simeq \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-\frac{1}{2}|t\lambda|(x-x_0)^2} \end{pmatrix} \quad : \text{ボゾン} \tag{2.41}$$

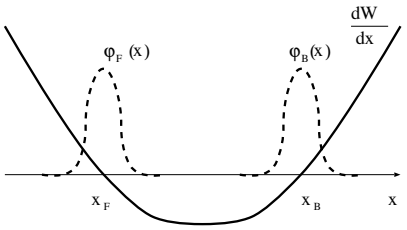
となります。これを見てやりますと、t をどんどん大きくしてやったときに波動関数が臨界点近傍に局所化するのがよく分かります。また、λ というのは、$\frac{dW}{dx}$ が 0 を切るときの $\frac{dW}{dx}$ の傾きの符号

図 3: (近似的) 零エネルギー波動関数の統計性と臨界点近傍での $\frac{dW}{dx}$ の傾きとの関係



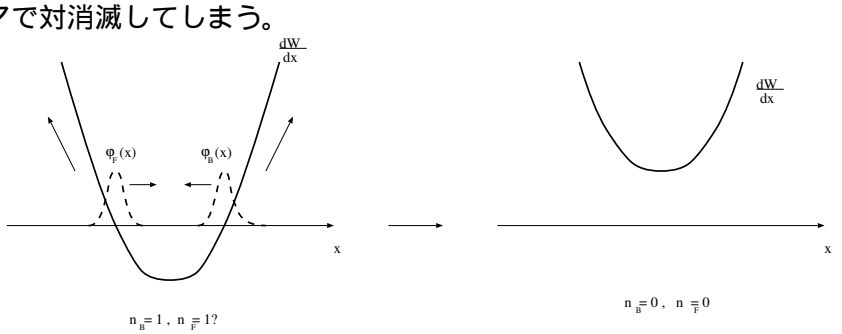
ですから、$\frac{dW}{dx}$ のグラフが右上がりに x 軸を切ればそこにボゾニックな (近似的) 零エネルギー波動関数 $\varphi_B(x)$ が住み、$\frac{dW}{dx}$ のグラフが右下がりに x 軸を切ればそこにフェルミオニックな (近似的) 零エネルギー波動関数 $\varphi_F(x)$ が住むということです：
例えば $\frac{dW}{dx}$ が次のような形だと

図 4:



$x = x_B$ にボゾニックな (近似的) 零エネルギー波動関数が局在して、$x = x_F$ フェルミオニックな (近似的) 零エネルギー波動関数が局在します。では、これは本当に零エネルギー波動関数になっているかといいますと、この場合はそうなっていません。この場合は $W(x) \simeq x^3$ なので 10ページで議論したように、ボゾニックな (真の) 零エネルギー波動関数の数も 0 だし、フェルミオニックな (真の) 零エネルギー波動関数の数も 0 です $(n_B = 0, n_F = 0)$。(真の) 零エネルギー波動関数の数は $W(x)$ の漸近的振る舞いだけで決まりますので、このグラフを遠くの方は止めて上の方へ連続変形してやると、

図 5: ボゾニックな (近似的) 零エネルギー波動関数とフェルミオニックな (近似的) 零エネルギー波動関数はペアで対消滅してしまう。

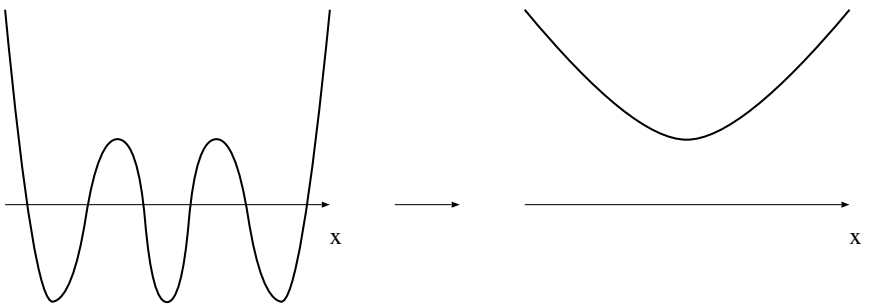


のようになり、これらはペアで対消滅してしまうことが分かります。この状態は実は、トンネル効果で互いに混じり合い、エネルギーが持ち上がって、ペアで消滅する状態です。ですから、

$$(\text{近似的零エネルギー波動関数の数}) \quad \geq \quad (\text{真の零エネルギー波動関数の数}) \tag{2.42}$$

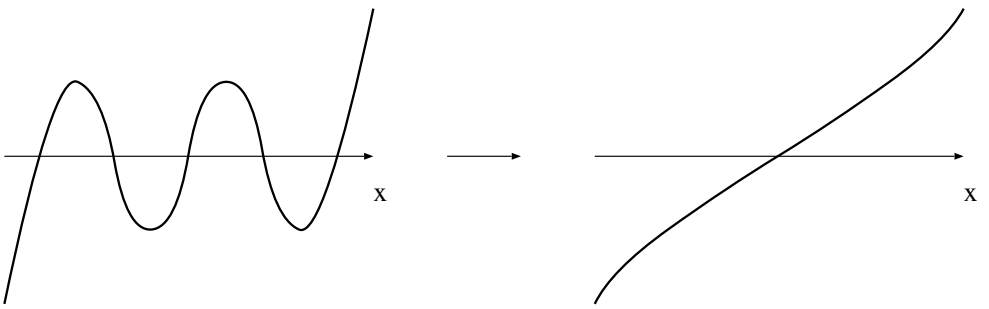
が成り立ちます。図で説明すると、こういうことです：

- $n_B = 0, n_F = 0$ の場合



(2.42) の等号不成立　　(2.42) の等号成立

- $n_B = 1, n_F = 0$ の場合



(2.42) の等号不成立　　(2.42) の等号成立

ただし、対消滅はボゾンとフェルミオンのペアで起こるので、SUSY 指数は変わりません。ですから、SUSY 指数を知りたければ臨界点付近の振る舞いだけを調べればいいということです。

2.2　モース理論との関わり

今お話したことを多変数に拡張してみましょう。今度は、座標は n 変数あります：

$$(x^1, x^2, \cdots, x^n) \tag{2.43}$$

さっきは、フェルミオンは 1 個だけあって、パウリ行列を生成、消滅演算子といったわけですが、オペレーター的に書けば、こういうふうに書けます：

$$\begin{aligned} (\psi^1, \psi^2, \cdots, \psi^n) \quad &: \text{フェルミオンの消滅演算子} \\ (\psi^{*1}, \psi^{*2}, \cdots, \psi^{*n}) \quad &: \text{フェルミオンの生成演算子} \end{aligned} \tag{2.44}$$

座標が n 種類あるので、ψ も n 個の足を持ちます。さっきのパウリ行列 σ_- がいまの ψ に、σ_+ が ψ^* に相当します。これらのフェルミオン反交換関係は

$$\begin{aligned} \left\{\psi^i, \psi^{*j}\right\} &= g^{ij} \\ \left\{\psi^i, \psi^j\right\} = \left\{\psi^{*i}, \psi^{*j}\right\} &= 0 \end{aligned} \tag{2.45}$$

のようになります。それで、さっきと同じようにハミルトニアンを作りたいんですが、スーパーチャージを

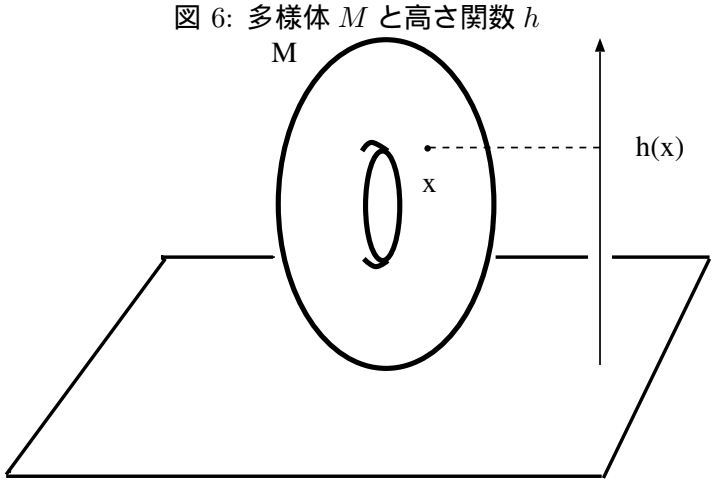
$$\begin{aligned} Q^* &= \frac{1}{\sqrt{2}}\psi^{*j}\left\{\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x^j} - i\frac{\partial h(x)}{\partial x^j}\right\} \\ Q &= \frac{1}{\sqrt{2}}\psi^{j}\left\{\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x^j} + i\frac{\partial h(x)}{\partial x^j}\right\} \end{aligned} \tag{2.46}$$

と定義すれば、

$$H = -\frac{1}{2}\left(g^{ij}\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + g^{ij}\frac{\partial h}{\partial x^i}\frac{\partial h}{\partial x^j}\right) + \frac{1}{2}(\psi^{*i}\psi^j - \psi^i\psi^{*j})\frac{D^2 h}{Dx^i Dx^j} \tag{2.47}$$

となります (D は普通の共変微分です)。Witten はこのモデルを使って、モース理論との関係を見抜きました (1982 年 [12])。多様体 M としては、例えば次のようなものを考えます：

図 6: 多様体 M と高さ関数 h



また W として、高さ関数 h を持って来ます。このとき波動関数は $h(x)$ の臨界点に集中します。このときに、どのような状態が零エネルギー波動関数になれるかを考えてみましょう。さっきは、W の臨界点 ($x = x_0$) 付近で 1 位の零を持つものを考えると、$W(x) \simeq \frac{1}{2}\lambda(x - x_0)^2$ となりました。今、臨界点付近で適当な座標系をとれば、

$$h(x) \simeq \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{(j)}(x^j - x_0^j)^2 \tag{2.48}$$

となります。これを臨界点付近で微分すると

$$\frac{\partial h}{\partial x^j} = \lambda_{(j)}(x^j - x_0^j) \tag{2.49}$$

となります。このときに、どのような状態が零エネルギー波動関数になれるかですが、それは、$\lambda_{(j)}$ の符号に依ります。いま $\lambda_{(j)}$ は n 成分ありますからバラバラにして調べないといけません。

式 (2.48) より、h の Hessian $\frac{\partial^2 h}{\partial x^i \partial x^j}$ はうまく対角化できていまして、またハミルトニアン (2.47) の第 1 項と第 2 項は可換なので、このハミルトニアンは、

$$H = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \lambda_{(j)}^2(x^j - x_0^j)^2 + \frac{1}{2}\lambda_{(j)}(\psi_j^*\psi_j - \psi_j\psi_j^*)\right) \tag{2.50}$$

となります。これは各 j ごとに 1 変数の場合のハミルトニアン (2.37) と全く同じ恰好をしています。だから全くさっきと同じ状況になります。さっきは、λ が正であればフェルミオンを詰めない、λ が負であればフェルミオンを詰めるということでした。ですから、臨界点付近で零エネルギー波動関数を考えると、この部分では波動関数は (2.38) と同じ形をしていて

$$\Phi(x) \simeq \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}|\lambda_{(j)}|(x^j - x_0^j)^2\right\}\psi_{i_1}^*\cdots\psi_{i_p}^*|0\rangle \tag{2.51}$$

となります。ここで、$\{i_k\}_{k=1,\cdots,p}$ は $\lambda_{(i_k)}$ が負になるような方向全体の集合です。$\lambda_{(j)}$ が負の方向にはフェルミオンを詰めるということです。これはもちろん近似的零エネルギー波動関数です。各臨界点において、高さ関数 h の Hessian の負の固有値の数が近似的零エネルギー波動関数のフェルミオン数に一致します。近似的零エネルギー波動関数のフェルミオン数が p である臨界点の個数を m_p で表すことにしましょう。m_p のことをモース指数といいます。例えば、17ページの図だと、$m_0 = 2, m_1 = 6, m_2 = 2$ です。全ての臨界点の寄与を合わせた SUSY 指数は

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(-1)^F &= \sum_{\text{臨界点}}(-1)^p \\ &= \sum_{p=0}^{n}(-1)^p m_p\end{aligned} \tag{2.52}$$

となります。

今、少し元に戻ってこの表式を別の観点から考えてみましょう。$h(x)$ というのは t 倍してもよく、スケールアップしてもいいし、0 に近づけてもいいということでしたので、ちょっと細工をしてみます：

$$\begin{aligned}Q_t^* &= \psi^{*j}\left\{\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x^j} - it\frac{\partial h(x)}{\partial x^j}\right\}\text{, 特に}\quad Q_0^* = \psi^{*j}\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x^j} \\ Q_t &= \psi^{j}\left\{\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x^j} + it\frac{\partial h(x)}{\partial x^j}\right\}\text{, 特に}\quad Q_0 = \psi^{j}\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x^j}\end{aligned} \tag{2.53}$$

基本的には Q_0^*、Q_0 を調べたかったわけですが、このオペレーターを調べるのはつらいので Q_t^*、Q_t の形に移って、それで、t を大きくしてやると波動関数が局在するのでそこを調べた、と考えましょう。

今、$t = 0$ で考えましょう。波動関数はどんな恰好をしているかと言いますと、フェルミオンが p 個いる時、

$$\Phi(x) = \Phi_{i_1,\cdots,i_p}(x)\psi^{*i_1}\cdots\psi^{*i_p}|0\rangle \tag{2.54}$$

の形を持ちます。ただし $\Phi_{i_1,\cdots,i_p}(x)$ は添字の入れ替えについて完全反対称です。これに Q_0^* を作用させると、係数を無視すれば

$$Q_0^*\Phi(x) = \partial_j\Phi_{i_1,\cdots,i_p}(x)\psi^{*j}\psi^{*i_1}\cdots\psi^{*i_p}|0\rangle \tag{2.55}$$

となります。一方 p 次微分形式

$$\omega = \omega_{i_1,\cdots,i_p}(x) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \tag{2.56}$$

に対する外微分 d の作用は

$$d\omega = \partial_j \omega_{i_1,\cdots,i_p}(x) dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \tag{2.57}$$

ですから、フェルミオンの生成演算子 ψ^* は微分形式 (ラインエレメント) dx をつけるという操作に、Q_0^* は外微分 d に対応することが分かります：

$$\psi^* \quad \longleftrightarrow \quad dx \wedge \tag{2.58}$$

$$Q_0^* \quad \longleftrightarrow \quad d \tag{2.59}$$

また、$\Phi(x)$ に Q_0 を作用させると、

$$Q_0 \Phi(x) = (-1)^{k-1} \partial_{i_k} \Phi_{i_1,\cdots,i_k,\cdots,i_p}(x) \psi^{*i_1} \cdots \widehat{\psi^{*i_k}} \cdots \psi^{*i_p} |0\rangle \tag{2.60}$$

となります ($\widehat{\psi^{*i_k}}$ の $\widehat{\ }$ は ψ^{*i_k} を取り去るという意味)。一方 p 次微分形式 (2.56) に対する、外微分 d の随伴作用素 (adjoint operator) δ の作用は

$$\delta\omega = (-1)^{k-1} \partial_{i_k} \omega_{i_1,\cdots,i_k,\cdots,i_p}(x) dx^{i_1} \wedge \cdots \widehat{dx^{i_k}} \cdots \wedge dx^{i_p} \tag{2.61}$$

ですから、フェルミオンの消滅演算子 ψ は微分形式 dx を取り去るという操作、すなわち内部積 (interior product) に、Q_0 は外微分 d の随伴作用素 δ に対応します：

$$\psi \quad \longleftrightarrow \quad \widehat{dx} \tag{2.62}$$

$$Q_0 \quad \longleftrightarrow \quad \delta \tag{2.63}$$

ですから、Q_t^* は外微分 d を、Q_t は外微分 d の随伴作用素 δ を少しねじって作ったようなものと考えられます。実際、式 (2.53) より、Q_t^*、Q_t は次のように書き表すこともできます：

$$\begin{aligned} Q_t^* &= e^{-th(x)} \left(\psi^{*j} \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x^j} \right) e^{th(x)} \\ Q_t &= e^{th(x)} \left(\psi^{j} \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x^j} \right) e^{-th(x)} \end{aligned} \tag{2.64}$$

$h(x)$ は忘れてしまうことにすると、ハミルトニアンは

$$\begin{aligned} H &= Q_0^* Q_0 + Q_0 Q_0^* \\ &= d\delta + \delta d \\ &= \Delta \end{aligned} \tag{2.65}$$

です。これはラプラシアンです。ですから、真の零エネルギー波動関数を考えるということは、ラプラシアンの零モード、すなわち調和微分形式を考えることに対応します。また、フェルミオンが p 個いる状態は p 次微分形式に対応します。BPS 状態は Q_0^* でも Q_0 でも消される状況でしたが、これは d でも δ でも消される微分形式に対応するので、調和微分形式だということです。(正確には、式 (2.64) のように、$e^{th(x)}$ による conjugation だけのずれがありますが、conjugation の下で、

調和微分形式は調和微分形式にうつされるので、この対応はきちんと成り立ちます)。 p 次調和微分形式の数をベッチ数といい b_p で表します。

b_p はフェルミオニックな真の零エネルギー波動関数の数を表すので、SUSY 指数は

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(-1)^F &= \sum_{p=0}^{n}(-1)^p b_p \\ &= \chi(M) \end{aligned} \tag{2.66}$$

となります。式 $(2.52)(2.66)$ より、

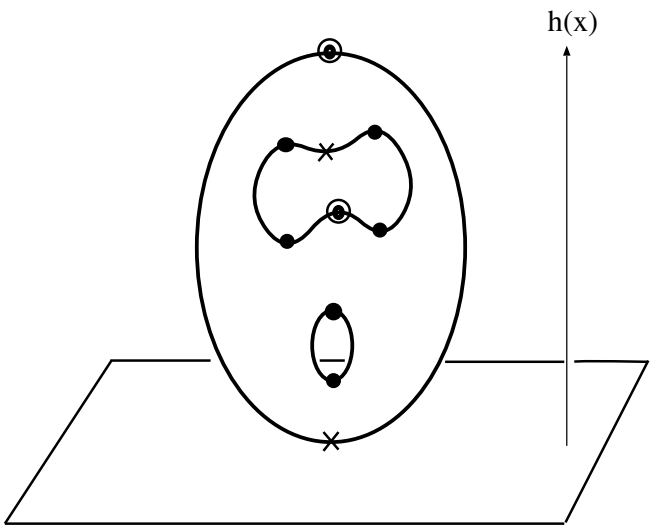
$$\chi(M) = \sum_{p=0}^{n}(-1)^p m_p \tag{2.67}$$

が分かりますが、これは、モース理論の基本定理として知られているものです [13]。臨界点近傍のデータだけで、多様体のオイラー数が分かってしまうという定理です。

また、式 (2.42) と 14ページの議論から、

$$m_p \geq b_p \tag{2.68}$$

が成り立ちます (次図参照)。



◉ : 近似的零エネルギー波動関数のフェルミオン数が 2 である臨界点
● : 近似的零エネルギー波動関数のフェルミオン数が 1 である臨界点
× : 近似的零エネルギー波動関数のフェルミオン数が 0 である臨界点

$$\begin{aligned} m_2 &= 2 \quad (\geq b_2 = 1) \\ m_1 &= 6 \quad (\geq b_1 = 4) \\ m_0 &= 2 \quad (\geq b_0 = 1) \end{aligned}$$

これはモース理論において弱い形のモース不等式として知られているものです。m_p が b_p よりも一般に大きくなるのは、m_p が臨界点近傍のデータのみから定まるため、多様体の大域的なトポロジーを捕えきれず、b_p を正確に評価しきれないことからきています。これは、超対称量子力学で解釈すると、各臨界点近傍にサポートを持つ波動関数 (2.51) どうしの重なり合いを無視したことからきています。2 つの波動関数に重なり合いがあると、トンネル効果で互いに混じり合い、おのおののエネルギー準位が持ち上がることがあります。このため、近似的零エネルギー波動関数の数は、真の零エネルギー波動関数の数よりも一般に大きくなるわけです。

強い形のモース不等式

$$\sum_{p=0}^{\lambda}(-1)^{\lambda+p}m_p \geq \sum_{p=0}^{\lambda}(-1)^{\lambda+p}b_p \tag{2.69}$$

の導出には、このトンネル効果 (すなわちインスタントンの効果) を考慮に入れる必要があります。今、互いにモース指数が 1 だけ異なる隣り合う臨界点を考えると、波動関数の重なり合いは臨界点を結ぶ最急降下線に沿って最大となり、トンネル効果は勾配流の方向に沿って生じると考えられます。この最急降下線と各臨界点における (フェルミオンの住む方向の) 接ベクトルを用いて、コバウンダリー · オペレーターを定義することができます。コバウンダリー · オペレーターは 2 回作用させると 0 になりますので、複体 (Witten 複体という) が定義され、これから強い形のモース不等式が導かれます。詳細については Witten の原論文 [12] を御覧下さい。

このように、超対称量子力学はモース理論の主要な結果を容易に再現します。超対称量子力学は、量子力学のトンネル効果を用いて多様体の臨界点の間に一定のつながりを導き、モース理論を改造するものです。このような方法は Witten 以後広く用いられて、標準的な方法となりました [14]。この延長上にある理論が、Floer の理論です [15]。

3　4 次元 $N = 2$ Super Yang-Mills 理論

3.1　$N = 2$ Super Yang-Mills 理論とツイスト

$N = 2$ の Super Yang-Mills 理論から出発して、TFT がどうやって構成されるのかを調べてみましょう (Witten,1988 年 [1])。

その前に、$N = 1$ の Super Yang-Mills 理論についておさらいすることにします [16]。$N = 1$ 理論の多重項 (multiplet) には、ゲージ場とゲージーノがあるベクトル多重項と、それからスカラー場、スピノル場からなるカイラル多重項があって、全部で次のようになります：

$$(A_\mu{}^a, \lambda^a) : N = 1 \text{ ベクトル多重項} \tag{3.1}$$

$$(\psi^a, \phi^a) : N = 1 \text{ カイラル多重項} \tag{3.2}$$

カイラル多重項は好きな表現で考えることができます。ですから、今はカイラル多重項は随伴 (adjoint) 表現であるとしましょう。これと、ベクトル多重項を合わせて $N = 2$ のベクトル多重項になります：

$N = 2$ ベクトル多重項

$$\begin{array}{ccc} & A_\mu{}^a & \\ \lambda^a & & \psi^a \\ & \phi^a & \end{array} \tag{3.3}$$

$A_\mu{}^a$ はベクトル (スピン 1)、λ^a と ψ^a はワイルスピノル (スピン $1/2$)、ϕ^a は複素スカラー (スピン 0) です。$N = 2$ の場合には、これ全部を合わせて 1 つのファミリーと考えて 1 つのベクトル多重項と呼ぶことにします。$N = 2$ の特徴はフェルミオンが 2 個あるということです。いま、λ, ψ と書きましたが、これらは特に区別する必要はなくて、ψ_1, ψ_2 とでも書いて構いません。

さて、時空はユークリッド空間だとしますと、時空を回す対称性 $SO(4)$ が

$$SO(4) \simeq SU(2)_L \times SU(2)_R \tag{3.4}$$

と分解します。$\simeq$ は局所同型という意味です。$N = 2$ のスーパーチャージ $Q_{\alpha i}, \bar{Q}^{\dot{\alpha}}_i$ ($i = 1, 2$) の量子数は

$$\begin{array}{cc} & SU(2)_L \times SU(2)_R \\ Q_{\alpha i} & (\frac{1}{2}, 0) \\ \bar{Q}^{\dot{\alpha}}_i & (0, \frac{1}{2}) \end{array} \tag{3.5}$$

です。括弧の中の左成分が $SU(2)_L$、括弧の中の右成分が $SU(2)_R$ についてのスピンを表します。多重項に属するそれぞれの場については、

$$\begin{array}{cc} & SU(2)_L \times SU(2)_R \\ A_\mu & (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \\ \psi_i & (\frac{1}{2}, 0) \\ \bar{\psi}_i & (0, \frac{1}{2}) \\ \phi & (0, 0) \\ \bar{\phi} & (0, 0) \end{array} \tag{3.6}$$

です。ここで $\psi_i = (\lambda, \psi)$, $\bar{\psi}_i = (\bar{\lambda}, \bar{\psi})$ $(i = 1, 2)$ です ($^-$ は CPT 共役を表します)。

それで、この理論から TFT を作るやり方ですが、それは次のようにします。まず、$N = 2$ の特徴はフェルミオンが 2 個あることです。つまり、スーパーチャージが 2 個あるので、この 2 つの入れ替えの $U(2)$ の global な対称性があるということになります。この対称性を R-symmetry といいます。R-symmetry は SUSY 独特のものです。この R とさっきの R (Right の R) とで記号が同じで具合が悪いので、R-symmetry に対しては内部対称性 (Internal Symmetry) の頭文字 I を添字に使うことにします。この R-symmetry は、スーパー座標 θ_i $(i = 1, 2)$ に対して、

$$SU(2)_I \quad : \quad \theta_i \to R_i{}^j \theta_j \qquad R_i{}^j \in SU(2) \tag{3.7}$$

$$U(1)_I \quad : \quad \theta_i \to e^{-i\alpha} \theta_i \tag{3.8}$$

のように作用します。変換 (3.7) は、

$$SU(2)_I \supset U(1)_J \quad : \quad \theta_1 \to e^{-i\alpha}\theta_1 \ , \ \theta_2 \to e^{i\alpha}\theta_2 \tag{3.9}$$

となります。$U(1)_J$ は σ_3 によって生成される $SU(2)_I$ の部分群です。この変換の下、不変なラグランジアンが作れるという条件から、さっきの多重項の変換性が決まります。$W_\alpha = (\lambda^a, A_\mu{}^a)$, $\Phi = (\phi^a, \psi^a)$ と表すと、

$$U(1)_I \quad : \quad \begin{cases} W_\alpha(\theta) & \to & e^{i\alpha} W_\alpha(e^{-i\alpha}\theta) \\ \Phi(\theta) & \to & e^{2i\alpha}\Phi(e^{-i\alpha}\theta) \end{cases} \tag{3.10}$$

$$U(1)_J \quad : \quad \begin{cases} W_\alpha(\theta) & \to & e^{i\alpha} W_\alpha(e^{-i\alpha}\theta) \\ \Phi(\theta) & \to & \Phi(e^{-i\alpha}\theta) \end{cases} \tag{3.11}$$

となることが分かります。$W_\alpha \simeq \lambda + \theta\partial A$, $\Phi \simeq \phi + \theta\psi$ より、各成分の場の変換性は、

$$U(1)_I \quad : \quad \begin{cases} A_\mu & \to & A_\mu \\ \lambda & \to & e^{i\alpha}\lambda \\ \psi & \to & e^{i\alpha}\psi \\ \phi & \to & e^{2i\alpha}\phi \end{cases} \tag{3.12}$$

$$U(1)_J \quad : \quad \begin{cases} A_\mu & \to & A_\mu \\ \lambda & \to & e^{i\alpha}\lambda \\ \psi & \to & e^{-i\alpha}\psi \\ \phi & \to & \phi \end{cases} \tag{3.13}$$

となります。この変換性を見やすくするために、各成分の場をダイヤモンド型に書き表したわけです。変換性も添えて、多重項をもう一度書いておきます：

$N = 2$ ベクトル多重項				その CPT conjugate			
			$U(1)_I$				$U(1)_I$
	$A_\mu{}^a$		0		$A_\mu{}^a$		0
λ^a		ψ^a	1	$\bar{\lambda}^a$		$\bar{\psi}^a$	-1
	ϕ^a		2		$\bar{\phi}^a$		-2
$U(1)_J$	1	0	-1	$U(1)_J$	-1	0	1

(3.14)

以上の量子数をまとめると、

$$\begin{array}{cccccccc} & SU(2)_L & \times & SU(2)_R & \times & SU(2)_I & \times & U(1)_I \\ Q_{\alpha i} & (\ \frac{1}{2} & , & 0 & , & \frac{1}{2} & , & -1 \ ) \\ \bar{Q}^{\dot{\alpha}}_i & (\ 0 & , & \frac{1}{2} & , & \frac{1}{2} & , & 1 \ ) \\ A_\mu & (\ \frac{1}{2} & , & \frac{1}{2} & , & 0 & , & 0 \ ) \\ \psi_i & (\ \frac{1}{2} & , & 0 & , & \frac{1}{2} & , & 1 \ ) \\ \bar{\psi}_i & (\ 0 & , & \frac{1}{2} & , & \frac{1}{2} & , & -1 \ ) \\ \phi & (\ 0 & , & 0 & , & 0 & , & 2 \ ) \\ \bar{\phi} & (\ 0 & , & 0 & , & 0 & , & -2 \ ) \end{array} \tag{3.15}$$

となります。これがまともな理論の、つまり、フィジカルな理論の量子数なのですが、これをトポロジカルな理論の量子数に書き換えることをします。量子数の組み換えを行います。

スーパーチャージ $Q_{\alpha i}$ の足 i は内部空間の回転に関する足で、足 α は外部空間あるいは時空の回転に関する足なんですが、これらを同じものだと思ってしまう、ということをします。この操作をツイスト (twist) と言います。数学的には対角和 (diagonal sum) を取るという言い方をします。普通 $SU(2)_R$ と $SU(2)_I$ とを同じだと思って、$SU(2)_{R'}$ と書きます：

$$SU(2)_{R'} = SU(2)_R \overset{\text{対角和}}{\oplus} SU(2)_I \tag{3.16}$$

これは量子数の再定義です。スピンの合成によって $SU(2)_{R'}$ の量子数は次のようになります：

$$\begin{array}{ccccc} & SU(2)_L \times SU(2)_R \times SU(2)_I \times U(1)_I & & SU(2)_L \times SU(2)_{R'} \times U(1)_I \\ Q_{\alpha i} & (\frac{1}{2}, \underbrace{0, \frac{1}{2}})_{-1} & \overset{\text{ツイスト}}{\longrightarrow} & (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})_{-1} \\ \bar{Q}^{\dot{\alpha}}_i & (0, \underbrace{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}})_1 & \overset{\text{ツイスト}}{\longrightarrow} & (0,1)_1 \oplus \underbrace{(0,0)_1}_{Q\ :\ \text{BRST チャージ}} \end{array} \tag{3.17}$$

$\bar{Q}^{\dot{\alpha}}_i$ において、スピン $1/2$ とスピン $1/2$ の合成によりスピン 1 とスピン 0 ができました ($\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = 1 \oplus 0$)。括弧の右下の添字は $U(1)_I$ チャージ、すなわちゴースト数を表します。これで何がやりたかったかと言いますと、ここに $(0,0)$ というのが出て来ますが、これは反可換なスカラーで、実は BRST チャージになっています。実際、2 乗して 0 になります (実際に確かめることができます)。これを Q と書くことにします。

今から、これが BRST オペレーターになるような理論に化けていくというのを見てみることにしましょう。すなわち、$N = 2$ の超対称な理論から量子数の読み換えをして BRST 不変な理論を作るということです。どうしてこんなことがやりたいかは段々分かります。

これと同じことをフェルミオンについても行います。スーパーチャージとフェルミオンとは量子数は同じですから同じことが起こります。それを書き下すと次のようになります：

$$\begin{array}{cc} & SU(2)_L \times SU(2)_{R'} \times U(1)_I \\ \psi^a_\mu & (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})_1 \\ \chi^{+a}_{\mu\nu} & (0,1)_{-1} \\ \eta^a & (0,0)_{-1} \end{array} \tag{3.18}$$

スピン 1 の ψ^a_μ はベクトルですが反可換な量です。つまりゴースト (Ghost) です。$\chi^{+a}_{\mu\nu}$ は自己双対 (Self-Dual) な 2 形式で、反ゴーストです (自己双対か反自己双対 (Anti Self-Dual) かはコンベ

ンションによります。)。 η^a はスカラーです。$\chi_{\mu\nu}^{+a}$ と η^a は $\bar{\psi}_i$ をツイストして得られたものです。もともとフェルミオンが 2 個あった理論から、ベクトルと自己双対な 2 形式とスカラーが出て来て、かなり変な気がするんですが、実はこれが丁度うまくはまります。Yang-Mills インスタントンのモジュライ空間の記述にぴったり合います。

他の場については、

$$\begin{array}{cc} & SU(2)_L \times SU(2)_{R'} \times U(1)_I \\ A_\mu & (\frac{1}{2},\frac{1}{2})_0 \\ \phi & (0,0)_2 \\ \bar{\phi} & (0,0)_{-2} \end{array} \tag{3.19}$$

です。登場人物はこんなものです。あと、正確には補助場 H を考えないといけないのですが、簡単のため、$H=0$ とします。

$N=2$ 理論にはベクトル多重項以外に、もう 1 種類の多重項が存在します。これをハイパー多重項といい、$N=1$ カイラル多重項を 2 つ持ってきて作ることができます：

$N=2$ カイラル多重項

$$\begin{array}{ccccc} & & & & U(1)_I \\ & & \psi_q^a & & -1 \\ q^a & & & \tilde{q}^{\dagger a} & 0 \\ & & \widetilde{\psi}_q^{\dagger a} & & 1 \\ \\ U(1)_J & 1 & 0 & -1 & \end{array} \tag{3.20}$$

ψ_q はワイルスピノル (スピン $1/2$) で、q は複素スカラー (スピン 0) です。また、q, ψ_q の属する表現は任意で、この表現を R と書けば、$\tilde{q}, \widetilde{\psi}_q$ は R の共役表現 R^* に属します。変換性はラグランジアンの $\int d^2\theta\ \sqrt{2}\widetilde{Q}\Phi Q$ ($Q=(q,\psi_q)$, $\widetilde{Q}=(\tilde{q},\widetilde{\psi}_q)$) の不変性から決まりまして、

$$U(1)_I \quad : \quad \left\{ \begin{array}{rcl} Q(\theta) & \to & Q(e^{-i\alpha}\theta) \\ \widetilde{Q}(\theta) & \to & \widetilde{Q}(e^{-i\alpha}\theta) \end{array} \right. \tag{3.21}$$

$$U(1)_J \quad : \quad \left\{ \begin{array}{rcl} Q(\theta) & \to & e^{i\alpha}Q(e^{-i\alpha}\theta) \\ \widetilde{Q}(\theta) & \to & e^{i\alpha}\widetilde{Q}(e^{-i\alpha}\theta) \end{array} \right. \tag{3.22}$$

となります。これから、各成分の場の変換性が分かります：

$$U(1)_I \quad : \quad \left\{ \begin{array}{rcl} q & \to & q \\ \psi_q & \to & e^{-i\alpha}\psi_q \\ \tilde{q}^\dagger & \to & \tilde{q}^\dagger \\ \widetilde{\psi}_q^\dagger & \to & e^{i\alpha}\widetilde{\psi}_q^\dagger \end{array} \right. \tag{3.23}$$

$$U(1)_J \quad : \quad \left\{ \begin{array}{rcl} q & \to & e^{i\alpha}q \\ \psi_q & \to & \psi_q \\ \tilde{q}^\dagger & \to & e^{-i\alpha}\tilde{q}^\dagger \\ \widetilde{\psi}_q^\dagger & \to & \widetilde{\psi}_q^\dagger \end{array} \right. \tag{3.24}$$

これらの量子数を書き下すと、

$$\begin{array}{cccccccccc} & & SU(2)_L & \times & SU(2)_R & \times & SU(2)_I & \times & U(1)_I & \\ \psi_q & (& \frac{1}{2} & , & 0 & , & 0 & , & -1 &) \\ q & (& 0 & , & 0 & , & \frac{1}{2} & , & 0 &) \\ \tilde{q}^\dagger & (& 0 & , & 0 & , & \frac{1}{2} & , & 0 &) \\ \widetilde{\psi}_q^\dagger & (& 0 & , & \frac{1}{2} & , & 0 & , & 1 &) \end{array} \tag{3.25}$$

のようになります。これらについてもツイストを行うと、量子数は、

$$\begin{array}{cc} & SU(2)_L \times SU(2)_{R'} \times U(1)_I \\ \psi_q & (\frac{1}{2}, 0)_{-1} \\ q & (0, \frac{1}{2})_0 \\ \tilde{q}^\dagger & (0, \frac{1}{2})_0 \\ \widetilde{\psi}_q^\dagger & (0, \frac{1}{2})_1 \end{array} \tag{3.26}$$

となります。このハイパー多重項についてはここでは扱いませんが、ツイストしたハイパー多重項はモノポール (monopole) 方程式で活躍します (Witten,1994 年 [17])。

さて、ここからはベクトル多重項に話を戻します。まずツイストの後のこれらの BRST 変換則がどうなるかですが、これはもともとの超対称変換から読むことができます。それはちゃんと示せるのですが長くなるので省略します。BRST 変換則は

$$\begin{aligned} \delta A_\mu{}^a &= i\varepsilon\psi_\mu \\ \delta\psi_\mu &= -\varepsilon D_\mu\phi \\ \delta\phi &= 0 \\ \delta\bar{\phi} &= 2i\varepsilon\eta \\ \delta\eta &= \frac{1}{2}\varepsilon[\phi, \bar{\phi}] \\ \delta\chi_{\mu\nu} &= \varepsilon(F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma}) \end{aligned} \tag{3.27}$$

となります。スーパーチャージ Q のゴースト数は 1 ですから (Q は $\bar{Q}^{\dot{\alpha}}_i$ (ゴースト数 1) をツイストして作ったので)、場のゴースト数を考えれば上の変換則が大体予想できます。補助場 H を入れて実際に計算すると、$Q^2 = 0$ ($\delta^2 = 0$) となります。ゲージ変換の不定性は残りますが、きちんと処理できます。

次にラグランジアン (Lagrangian) ですが、書き下しますと、

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \int_M d^4x\sqrt{-g}\ \mathrm{tr}\Bigg(& \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \underbrace{\frac{1}{4}F_{\mu\nu}\widetilde{F}^{\mu\nu}}_{\text{インスタントン数}} + \frac{1}{2}\phi D_\mu D^\mu\bar{\phi} \\ & -i\eta D_\mu\psi^\mu + iD_\mu\psi_\nu\cdot\chi^{\mu\nu} \underbrace{-\frac{i}{8}\phi[\chi_{\mu\nu}, \chi^{\mu\nu}]}_{\text{湯川カップリング}} \end{aligned}$$

$$\left.\underbrace{-\frac{i}{2}\bar{\phi}[\psi_\mu,\psi^\mu]-\frac{i}{2}\phi[\eta,\eta]}_{\text{湯川カップリング}}-\underbrace{\frac{1}{8}[\phi,\bar{\phi}]^2}_{\substack{\text{ボゾニック}\\ \text{ポテンシャル}}}\right) \tag{3.28}$$

というようになります (ただし $\widetilde{F}^{\mu\nu}=\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$)。このラグランジアンも奇妙な恰好をしています。このラグランジアンがいろいろ不思議な性質を持ちます。

次にストレス · テンソル (Stress tensor) を定義します。ストレス · テンソルというのはメトリック (metric) を少し変えたときにラグランジアンがどのくらい変わるかで決まり、次のようになります：

$$\delta\mathcal{L} = \frac{1}{2}\int_M d^4x\sqrt{-g}\;\delta g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} \tag{3.29}$$

$$\begin{aligned}T_{\mu\nu} = \mathrm{tr}\Big\{&(F_{\mu\sigma}F_\nu{}^\sigma-\frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\sigma\tau}F^{\sigma\tau})\\ &+\frac{i}{2}\left[(D_\mu\psi_\sigma-D_\sigma\psi_\mu)\chi_\nu{}^\sigma+(\mu\leftrightarrow\nu)-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}(D_\lambda\psi_\sigma-D_\sigma\psi_\lambda)\chi^{\lambda\sigma}\right]\\ &-\frac{1}{2}\left(D_\mu\phi D_\nu\bar{\phi}+(\mu\leftrightarrow\nu)-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}D_\sigma\phi D^\sigma\bar{\phi}\right)\\ &-i\left(D_\mu\eta\cdot\psi_\nu+(\mu\leftrightarrow\nu)-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}D_\sigma\eta\cdot\psi^\sigma\right)\\ &-2i(\bar{\phi}\psi_\mu\psi_\nu-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\bar{\phi}\psi_\sigma\cdot\psi^\sigma)+\frac{i}{2}g_{\mu\nu}\cdot\phi\,[\eta,\eta]+\frac{1}{8}g_{\mu\nu}[\phi,\bar{\phi}]^2\Big\}\end{aligned} \tag{3.30}$$

大事なことは、このストレス · テンソルがある別の量の BRST 変換になっているということです：

$$T_{\mu\nu} = \{Q,\lambda_{\mu\nu}\} \tag{3.31}$$

$$\begin{aligned}\lambda_{\mu\nu} = &\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(F_{\mu\sigma}\chi_\nu{}^\sigma+F_{\nu\sigma}\chi_\mu{}^\sigma-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}F_{\sigma\tau}\chi^{\sigma\tau}\right)\\ &+\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\psi_\mu D_\nu\bar{\phi}+\psi_\nu D_\mu\bar{\phi}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\psi_\sigma D^\sigma\bar{\phi}\right)+\frac{1}{4}g_{\mu\nu}\mathrm{tr}\,(\eta[\phi,\bar{\phi}])\end{aligned} \tag{3.32}$$

この λ に BRST 変換を施すと実際ストレス · テンソルになっています (補助場を入れていないのでぼろがでるかも知れませんが本質的には大丈夫です。)。

いま 4 次元の曲がった多様体上に場の理論を定義したいので、メトリックが必要です。それが奇数次元の Chern-Simons 理論と違うところです。Chern-Simons ではメトリックなしでラグランジアンが書けます。しかし、偶数次元だとメトリックがないとラグランジアンが書けません。足を上げ下げするのにメトリックが必要です。だからまずメトリックがいるのですが、そのメトリックに対して理論がどう変わるかを見るにはストレス · テンソルの様子を調べなければなりません。ここで非常に特徴的なのはストレス · テンソルが BRST-exact だということです。一般に物理量 $\mathcal{O}$ が BRST-exact であるとは、ある物理量 $\mathcal{O}'$ があって、

$$\begin{aligned}\mathcal{O} &= \delta\mathcal{O}'\\ &= \{Q,\mathcal{O}'\}\end{aligned} \tag{3.33}$$

が成り立つことを言います。BRST 変換というのは基本的にフェルミオン的なゲージ変換です。BRST-exact な量というのはゲージの自由度しかないので本質的な物理的な自由度というのがなくなってトリビアル (trivial) な量になっています。それが全体の設定です。だから、メトリックに

一見依っているように見えるのですが、実は依存の仕方は BRST 変換の恰好に書けていて、ゲージ変換のように見えるのでゲージ不変量だけについてみるとそれはメトリックに依らないということです。

BRST 不変量 $\mathcal{O}$ とは BRST 変換を施すと消える量のことです：

$$\delta\mathcal{O} = 0 \tag{3.34}$$

こういう $\mathcal{O}$ を BRST-closed と呼びます。こういうものがゲージ不変な量となってこれから注目する量となります。一方 BRST-exact な量というのはピュアゲージだと思えるので、物理的な自由度を持ちません。BRST-trivial な量です。物理量というのは exact な差だけ無視して考えるので、$\mathcal{O}_1$,$\mathcal{O}_2$ を BRST-closed な量、$\mathcal{O}'$ をある物理量としたとき、

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_1 &= \mathcal{O}_2 + \delta\mathcal{O}' \\ \Longrightarrow\quad \mathcal{O}_1 &\sim \mathcal{O}_2 \end{aligned} \tag{3.35}$$

として、コホモロジーを定めます (コホモロジーについては、Appendix 参照)。$\mathcal{O}_1$ と $\mathcal{O}_2$ とはゲージ変換の差だけ異なるので、物理量としては同じだと思うということです。このようにして定まったコホモロジーを BRST コホモロジーといいます。BRST 変換 δ を外微分 d と対応させれば、ちょうど de Rham コホモロジーと対応します。相関関数はコホモロジークラスのみにしか依らないということです。

それで、さっきのストレス · テンソル (3.31) を見ますと BRST-exact な恰好になっていますので物理量としてはトリビアルだということです。ストレス · テンソルがトリビアルだとどうなるかといいますと、次のようになります。例えば、

$$\langle \mathcal{O}_1(x)\mathcal{O}_2(y)\cdots\rangle \tag{3.36}$$

のような相関関数を考えたときに、この x 依存性を調べたいとします。そうすると、

$$\begin{aligned} \partial_x\langle \mathcal{O}_1(x)\mathcal{O}_2(y)\cdots\rangle &= \langle [T,\mathcal{O}_1(x)]\mathcal{O}_2(y)\cdots\rangle \\ &= \langle Q(\lambda\mathcal{O}_1(x)\mathcal{O}_2(y)\cdots)\rangle \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3.37}$$

より、相関関数 $\langle \mathcal{O}_1(x)\mathcal{O}_2(y)\cdots\rangle$ は x 座標に依らないということが分かります。位相不変量になっているということです。相関関数の x 依存性というのは量子論であれば、ストレス · テンソルで動かして調べるわけですが、ストレス · テンソルが BRST-exact な恰好になっているということはストレス · テンソルが効かない、ということです。ストレス · テンソルが実質 0 なので、エネルギーとか運動量とかは実際なく、だから相関関数は場所に依りません。この辺りの事情が、1 章で言った重力理論の broken phase とか unbroken phase とかいうことを表しています。ストレス · テンソルが BRST-exact というのは、エネルギーとか運動量は物理量ではないと言ってるわけで、常識とは違う世界のことを記述しています。一般に超対称な理論から出発してツイストを行うとストレス · テンソルは必ず BRST-trivial になります。

ところで、もう一つ重要な性質があります。さっきはストレス · テンソルが BRST-exact だったのですが、実は、ラグランジアンも BRST-exact になっています。補助場を入れていないのでこれもずれる可能性があるのですが、本質的には大丈夫です：

$$\mathcal{L} = \{Q, V\} \tag{3.38}$$

$$V = \frac{1}{4}\mathrm{tr}(F_{\mu\nu}\chi^{\mu\nu}) + \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\psi_\mu D^\mu\bar{\phi}) - \frac{1}{4}\mathrm{tr}(\eta[\phi,\bar{\phi}]) \tag{3.39}$$

これも実際に確かめることができます。これも非常に強い性質でこういうことがあると非常に特別なことが起こります。このようなことから理論がどんな恰好になってくるかですが、経路積分をすると次のような性質を持つことが分かります。

まず次の経路積分を考えます：

$$\begin{aligned} Z &= \int \mathcal{D}X \exp\left(-\frac{\mathcal{L}}{g^2}\right) \\ \mathcal{D}X &= \mathcal{D}A\mathcal{D}\phi\mathcal{D}\bar{\phi}\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\chi\mathcal{D}\eta \end{aligned} \tag{3.40}$$

ここで結合定数 g を動かしてみましょう。そうすると、

$$\begin{aligned} \delta Z &= \int \mathcal{D}X\delta\left(-\frac{1}{g^2}\right) \underbrace{\mathcal{L}}_{\{Q,V\}} \exp\left(-\frac{\mathcal{L}}{g^2}\right) \\ &= -\delta\left(\frac{1}{g^2}\right)\int \mathcal{D}X \underbrace{\left\{Q, V\exp\left(-\frac{\mathcal{L}}{g^2}\right)\right\}}_{\substack{\text{経路積分の意味での} \\ \text{total derivative}}} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3.41}$$

となり、分配関数 Z が結合定数に依らないということが分かります。結合定数に依らないということは結合定数を大きく取るか小さく取るかどっちでもいいということです。ですから結局 g を 0 にもっていって考えてます。g というのは、$\hbar$ に相当します。だから、g を 0 にもっていって考えると WKB 近似になるのですが、WKB 近似が exact だと言ってるわけです。これは $\mathcal{L} = \{Q, V\}$ から従います。WKB 近似が exact ということは結局古典解を探せばいいのですが古典解はいくつかのパラメーターで記述されるので、そのパラメーターについて積分すればいいということです。その古典解は実際 Yang-Mills のインスタントンになっています。この Z をメトリックで変分を取ると、

$$\begin{aligned} \delta Z &= \int \mathcal{D}X \frac{-1}{2g^2}\int d^4x\sqrt{-g}\ \delta g_{\mu\nu}T^{\mu\nu}e^{-\frac{\mathcal{L}}{g^2}} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3.42}$$

となり、0 となります。経路積分の測度にメトリックは入ってこないとしています。

それで、TFT の不思議なところは次のようなことです。まずメトリックを持って来ないと理論が書けません。これは仕方がないです。曲がった時空で理論を記述しようと思ったらメトリックがないと書けません。曲がった時空に対してはメトリックが、重力が必要だというのは一般相対論の基本ですから、とにかくメトリックが必要なわけです。もちろん Chern-Simons は特別です。Chern-Simons は曲がった時空でもメトリックなしで理論が書けます。しかし一般にはメトリックが必要なわけです。ところが非常に奇妙なことなのですが、理論の invariance のおかげで、勝手に持って来たメトリックについてちょっと動かしても理論は変化しません。結合定数というのも勝手に持って来たのですが、この結合定数にも依りません。だから、この理論は基本的に古典的な理論に本質的に落ちてしまっているので、量子論的な高次の難しい補正は無視できると考えられます。運動方程式を満たすところだけ、結合定数 g を 0 にもっていって考えているので鞍点だけ拾ってきて、答えを求めることができます。それで何か出てくるわけですが、出て来たものはベースとなる多様体 M のメトリックに依らない量になっています。つまり位相不変量です。多様体 M の形を与えたときに、色々なメトリックの入れ方があるわけですが、とりあえず便宜的に入れて調べるわけです。ところが、実はメトリックの入れ方に依らないというわけなので、多様体

M のトポロジーだけにしか依らない量が出て来たということです。メトリックの入れ方に依らないようにしようと思ったときに、ストレス $\cdot$ テンソルを 0 にしてしまうのは単純すぎます。TFT ではもっと微妙にやっているわけで、ゲージ不変なセクターに限れば 0 だ、ということです。ストレス $\cdot$ テンソルはメトリックによっていないというわけではありません。依っているんだけども BRST-exact な形でしか依っていない。しかし BRST 不変性のお蔭で、本質的には依っていないということです。それで、WKB 近似が正しいので鞍点法を用いて運動方程式の解を調べてみます。WKB 近似というのは何かというと、まず、鞍点の古典的なところを拾ってそのまわりの Gaussian Fluctuation まで拾って来るというものです。それより上は $\hbar$ が正のべきで入って来るところですが、そこは捨てます。それが WKB 近似です。

それでは運動方程式はどんな恰好かですが、ラグランジアンを見ますとゲージ場の作用は、

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + F_{\mu\nu}\widetilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(F_{\mu\nu} + \widetilde{F}_{\mu\nu})(F^{\mu\nu} + \widetilde{F}^{\mu\nu}) \geq 0 \tag{3.43}$$

となります。今メトリックは Euclidean なので注意して下さい ($\widetilde{F}_{\mu\nu}\widetilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{4}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{\mu\nu\lambda\tau}F^{\rho\sigma}F_{\lambda\tau} = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$)。これは非負値ですから、$0$ となるところが運動方程式です：

$$F_{\mu\nu} = -\widetilde{F}_{\mu\nu} \tag{3.44}$$

これは反自己双対なゲージ場です。もともとは全てのゲージ場について経路積分をするはずだったのですが、こういう設定にすると経路積分は反自己双対なゲージ場の部分だけに落ちてしまうということです。すなわち経路積分をする問題がインスタントンを足し上げるという問題にすり変わります。ゲージ場について経路積分の部分はインスタントンのモジュライ空間上の積分に落ちてしまいます。インスタントンというのはパラメーターを持っていますのでそのパラメーターについての積分です。モジュライ空間というのはインスタントンのパラメーターの空間で、$\mathcal{M}$ と書きます。TFT というのはまた別の見地からすると、無限大の自由度を扱っている経路積分を有限自由度の積分にまで落として well-defined にする処方箋を与えている、と見ることもできます。

モジュライ空間のパラメーターの数について少し議論しましょう。いま、反自己双対な配位が見つかったとします：

$$F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma} = 0 \tag{3.45}$$

こういうものを見つけたときに、ゲージ場 A をちょっと動かしてみます：

$$A_\mu \to A_\mu + \delta A_\mu \tag{3.46}$$

ただし、微小変化させた後でも反自己双対性の条件を満たしているとしましょう。これは、この変化の方向だったら、インスタントンはインスタントンのまま留まっているということです。そうすると、この方程式から変化分についての方程式が出て来ます：

$$D_\mu\delta A_\nu - D_\nu\delta A_\mu + \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}D^\rho\delta A^\sigma = 0 \tag{3.47}$$

共変微分に現れるゲージ場は Background Field です。また、この変換がゲージ変換だとつまらないので、次のような条件を課します：

$$\delta A_\mu \neq D_\mu\Lambda \tag{3.48}$$

これは、次のようなゲージ条件を課すことで満たされます：

$$D_\mu\delta A^\mu = 0 \tag{3.49}$$

この議論は、複体

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & V_0 & \stackrel{D_A}{\to} & V_1 & \stackrel{D_A^+}{\to} & V_2^+ & \to & 0 \\ & & \cup\!\!\!| & & \cup\!\!\!| & & \cup\!\!\!| & & \\ & & \Lambda & & \delta A_\mu & & \chi_{\mu\nu} & & \end{array} \tag{3.50}$$

について、$H^1 = \mathrm{Ker}D_A^+/\mathrm{Im}D_A$ を計算していることになります。射影演算子 D_A^+ は元のラグランジアン (3.28) にも潜んでいます ($\chi^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\delta^\mu{}_\rho\delta^\nu{}_\sigma + \epsilon^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma})\chi^{\rho\sigma}$)。$\dim H^1$ が分かれば指数定理からインスタントンのパラメーターの数 (= モジュライ空間の次元) が分かります。これ以上の議論は省略しますが、結果は良く知られていまして、ゲージ群を $SU(2)$, インスタントン数を k とすると、

$$\dim \mathcal{M} = 8k - \frac{3}{2}(\chi(M) + \sigma(M)) \tag{3.51}$$

となります。ただし $\chi(M)$ は M のオイラー数、$\sigma(M)$ は M の符号数です。(一般には $\dim \mathcal{M} = 4hk - \frac{1}{2}(\chi(M) + \sigma(M))\dim G$ となります [22]。h は群 G の dual Coxeter 数です (33ページ参照)。) ベッチ数を用いて表すと、

$$\begin{aligned} \chi(M) &= b_0(M) - b_1(M) + b_2(M) - b_3(M) + b_4(M) \\ &= 2 - 2b_1(M) + b_2(M) && (3.52) \\ \sigma(M) &= b_2^+(M) - b_2^-(M) && (3.53) \\ b_2(M) &= b_2^+(M) + b_2^-(M) && (3.54) \end{aligned}$$

より、

$$\dim \mathcal{M} = 8k - 3(1 - b_1(M) + b_2^+(M)) \tag{3.55}$$

となります。4 次元ユークリッド空間では $\dim \mathcal{M} = 8k - 3$ です。この結果は認めることにしましょう。

今度はフェルミオンの方の運動方程式を考えます：

$$\begin{aligned} D_\mu\psi^\mu &= 0 \quad (\ \eta \text{ の変分から}) && (3.56) \\ D_\mu\psi_\nu - D_\nu\psi_\mu + \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}D^\rho\psi^\sigma &= 0 \quad (\ \chi \text{ の変分から}) && (3.57) \end{aligned}$$

これらは式 (3.47)(3.49) と同じです。さっきの式は反自己双対配位からのずれを記述している式だったのですが、それがフェルミオンの方の運動方程式と一致します。つまり、鞍点からのずれについては、ボゾンの方の揺らぎとフェルミオンの方の揺らぎが同じ振る舞いをしていて、Gaussian Fluctuation が丁度キャンセルします [23]。唯一残るのは符号だけです。

簡単のため今、モジュライ空間の次元を 0 とします。これはどういう状況かといいますと、インスタントンがパラメーターを持っていない、すなわち孤立している状況です。ここで、ボゾンを 3 つまとめて

$$\Phi = (A, \phi, \bar{\phi}) \tag{3.58}$$

と書き、フェルミオンを 3 つまとめて

$$\Psi = (\eta, \psi, \chi) \tag{3.59}$$

と書きます。それで、ラグランジアンを 2 次の項まで書き出すと

$$\mathcal{L}_{(2)} = \int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}\ (\Phi\Delta_B\Phi + i\Psi D_F\Psi) \tag{3.60}$$

となります。この Gaussian 積分を実行すると

$$\frac{\mathrm{Pfaff}(D_F)}{\sqrt{\det \Delta_B}} = \prod_i \frac{\lambda_i}{\sqrt{\lambda_i^2}} = \pm 1 \tag{3.61}$$

が得られます。分母はボゾンから出たもので分子はフェルミオンから出たものです。Pfaff はパフィアン (Pfaffian) と呼ばれるもので、行列式のルートです。ただし符号が出ることがあります。その符号を正確に決める議論は非常に難しいので、ここでは省略します [19]。

今 SUSY が入っているので、

$$iD_F\Psi = \lambda\Psi \tag{3.62}$$

$$\Delta_B\Phi = \lambda^2\Phi \tag{3.63}$$

が成り立ちます (ただし、$\lambda \neq 0$ です)。結局分配関数は、孤立したインスタントンの寄与を加えて、

$$Z = \sum_i (-1)^{n_i} \tag{3.64}$$

となります。

次に、Donaldson 不変量がどんなものかというのをお話します [18]。今お話してる議論は Witten の 1988 年の仕事なんですが [1], この限りで言うと、別に何か数学的に新しいものを与えたというのではなくて、数学で考えられていた位相不変量をどういう場の理論でどういう仕掛けでもって議論すればいいかというなんか翻訳みたいなものを提供したということです。だから、当時は余りご利益がないというか、興味を持たれませんでした。しかし、最近になって Seiberg-Witten の理論が出て情勢が変わりました (1994 年 [20])。この理論は $N = 2$ Super Yang-Mills 理論の厳密解を与えるものです。この $N = 2$ Super Yang-Mills 理論を用いて幾何を調べるというのが実際の物理の手法でできるようになりまして、それでうんと進展したわけです。ただここの段階では言い換えの規則を調べている、こういう特殊なクラスの場の理論があって、こういうもので位相不変量を書くことができる、その程度のことだったわけです。とりあえず、その辺の事情をもう少し詳しく調べることにしましょう。

BRST 不変な物理量としてどんなものが考えられるかですが、まずさっきの BRST 変換 (3.27) を思い出しましょう：

$$\begin{aligned} \delta A_\mu &\simeq \psi_\mu \\ \delta\psi_\mu &\simeq D_\mu\phi \\ \delta\phi &= 0 \end{aligned} \tag{3.65}$$

係数は適当です。ここで ϕ は BRST 不変になっているので、次のゲージ不変な量を定義します：

$$W_0(P) = \mathrm{tr}\phi^2(P) \tag{3.66}$$

P は位置を表します。これも BRST 不変になっています：

$$\delta W_0(P) = 0 \tag{3.67}$$

それでいま k 点関数

$$Z(k) = \int \mathcal{D}X e^{-\frac{\mathcal{L}}{g^2}} \prod_{i=0}^{k} W_0(P_i) = \langle W_0(P_1)\cdots W_0(P_k)\rangle \tag{3.68}$$

を定義します。このようなものの集まりを Donaldson 不変量と呼ぶことにしましょう。多様体 M を調べるためにこのような量を考えます。これから、W_0 の相棒を作っていくことを考えます。W_0 の微分をとります。そうすると 1 形式ができているんですが、これは実は次のように表されます：

$$\begin{aligned} dW_0 &= \{Q, W_1\} && (3.69)\\ W_1 &= \mathrm{tr}\phi\psi && (3.70) \end{aligned}$$

これは、さっきの式 (3.65) からすぐに確かめられます。 さらに、W_1 の微分をとると、

$$dW_1 = \{Q, W_2\} \tag{3.71}$$

となる 2 形式 W_2 の存在が言えます。これをどんどん繰り返していくと W の系列ができます。4 次元なので、4 形式 W_4 までが存在します ($dW_4 = 0$)。W の系列を書き下すと次のようになります：

$$\begin{array}{rll} 0 = \{Q, W_0\} & W_0 = \mathrm{tr}\phi^2 & 4 \\ dW_0 = \{Q, W_1\} & W_1 = \mathrm{tr}(\phi\psi) & 3 \\ dW_1 = \{Q, W_2\} & W_2 = \mathrm{tr}(\frac{1}{2}\psi\wedge\psi + i\phi F) & 2 \\ dW_2 = \{Q, W_3\} & W_3 = \mathrm{tr}(i\psi\wedge F) & 1 \\ dW_3 = \{Q, W_4\} & W_4 = \mathrm{tr}(-\frac{1}{2}F\wedge F) & 0 \\ dW_4 = 0 & & \end{array} \tag{3.72}$$

右の数字は各 W_i ($i = 0, 1, 2, 3, 4$) のゴーストチャージです。ϕ のゴースト数が 2 であることからこうなることが分かります。この系列を descent equations (降下方程式) と言います。

いま BRST 不変なオブザーバブルとしてはまず W_0 がありましたが、W_k ($k = 1, 2, 3, 4$) もそれほど悪いものではありません。例えば W_1 を見てやると、これは BRST 変換すると消えません (dW_0 になるから)。消えないけども total derivative なわけです。だから積分してやれば 0 となってしまうので積分してやればいい。ちょっと落ちこぼれがあるんだけど何とか消せるから、W_k ($k = 1, 2, 3, 4$) も役に立つということです。だからオブザーバブルをちょっと増やして考えることにしましょう。

よく使われるのは W_2 なのですが、ここでは一般に W_k を用います。これは k 次の微分形式であり、k サイクル上で積分が定義できます：

$$I(\gamma) \equiv \int_\gamma W_k \tag{3.73}$$

今もし、この k サイクル γ_k が、$k+1$ サイクル β_{k+1} の境界になっているとすると、Stokes の定理より、

$$\begin{aligned} I(\gamma) &= \int_{\gamma_k} W_k = \int_{\partial\beta_{k+1}} W_k \\ &= \int_{\beta_{k+1}} dW_k = \int_{\beta_{k+1}} \{Q, W_{k+1}\} \\ &\to 0 \end{aligned} \tag{3.74}$$

となります。最期の矢印は期待値を取ったら 0 になるという意味です。ですから $I(\gamma)$ は γ のホモロジー · クラスのみによる量となります。

次に、Donaldson 不変量がどんなものなのか定義することにします。一般に多様体の次元の半分の次元、すなわち中間次元というのは重要です (Appendix 70ページ参照)。今の 4 次元多様体

の場合は 2 次元です。何故重要かといいますと、一つには中間次元のサイクル同士の交点数をそれらの内積として考えることができるという事情があります。これを交点形式 (intersection form) といいます。それで Donaldson 不変量ですが、W_2 を用いて、大体次のように定義されます：

$$\langle \prod_{i=1}^{p} \int_{S_i} W_2 \prod_{j=1}^{p'} W_0(P_j) \rangle \tag{3.75}$$

物理的意味は次のようなものです。W_2 の部分に着目します。W_2 というのは大体 ϕF の形をしていますが、ϕ も F も行列で、アイソスピンの足を持っています。それでいま、ϕ が真空期待値を持っていて、例えば第 3 方向について non-zero に留まっているとしましょう。そうすると、F の第 3 成分について面積分を行うことになります。すなわち S_i を貫く flux (磁束) を数えていることになります。それで、各 S_i を貫く flux について列挙する、そのようなことをやります。経路積分するときに、ゲージ場のインスタントンの配位が入って来るのですが、各インスタントンが球面 S_i を貫く flux を調べて列挙する、そのようなことをやっています。そういうものが、この空間の位相不変量になっているというわけです。こういう量はホモロジーといった古典的な位相不変量よりも、ずっと高級な位相不変量です。多様体を調べるのに、多様体だけ考えていたのでは余り良く分からない。そこで、その上にゲージ場を持ってきて Yang-Mills 理論を展開する、ということをやります。特にインスタントンの配位に興味があるから、どういう設定にするかというと、まず運動方程式がインスタントンを記述するようなラグランジアンを持って来ます。一般にはその周りの難しい量子補正が入って来るのですが、そういう量子補正がなくて、WKB 近似が正しくなってしまうような設定にする。そうすると、本当に多様体の上のインスタントン解だけを列挙して、そういうものの総体を調べることによって、元の多様体についての情報が得られるということです。ですから、かなり高級なことをやっています。実は、Donaldson 不変量は微分同相に関する不変量で、多様体の微妙な性質を反映してきます。古典的な位相不変量よりもよりモダンで、量子論的な位相不変量と呼ぶこともできます。

3.2 $N = 2$ 位相的場の理論と Donaldson 不変量

さらに Donaldson 不変量についてもう少し詳しく調べてみます (Witten,1994 年 [21])。数学的側面には立ち入らずに、物理の直観やアイデアを使って相関関数を評価したいのですが、そのために $N = 2$ の理論を $N = 1$ の理論に落とすということを考えます。まず、$N = 2$ の理論のベクトル多重項は、

$$\begin{array}{ccc} & A_\mu{}^a & \\ \lambda^a & & \psi^a \\ & \phi^a & \end{array} \tag{3.76}$$

であり、これは $N = 1$ のカイラル多重項と $N = 1$ のベクトル多重項が合わさってできたものです。だから、バラバラにしてしまえば $N = 1$ に戻ってしまいます。このためカイラル多重項に mass term (質量項)

$$\int d^4x d^2\theta \; m \; \mathrm{tr}\Phi^2 \tag{3.77}$$

を加えて、これを、うんと重くしてやります。そうすると、カイラル多重項の方は無視できて、$N = 1$ の理論に落ちます。この操作を mass perturbation と呼びましょう。この摂動項は実は BRST-trivial です。ですから BRST 不変なものを考える範囲では、物理的には何もしていないということになります。

それで、どうして $N=1$ の理論にしてしまいたいかといいますと、$N=1$ の理論の方が物理的に familiar だからです。$N=1$ の理論というのは QCD に近い理論で、asymptotic freedom (漸近的自由性) があり、dimensional transmutation (次元転移) が起こります。ですから、Λ という length scale を与える量があって、次元を持つ量は全て Λ の定数倍となります。こういう状況を、理論に mass gap が存在すると言います。mass gap を持つというのは簡単に言うと、次のようなことです。システムを例えば有限サイズのボックスに入れて、ハミルトニアンの固有値を調べるとします。そのとき、エネルギー固有値のエネルギー間隔というのはシステムの距離分の 1 に比例します。したがって、距離を段々大きくしていくとエネルギー間隔がぎゅうっと小さくなって来ます。エネルギー最低の状態 (基底状態)、第 1 励起状態、第 2 励起状態、と状態が続いているわけですが、距離を段々大きくしていったときに、第 1 励起状態のエネルギーが基底状態のエネルギーまで本当に近づいて来るか、ということが問題となって来ます。第 1 励起状態のエネルギーがどんどん下がってくるんだけど、あるところでつっかかってそれ以上下がらない場合、gap があるといいます。gap があれば、体積が無限大であっても第一励起状態と基底状態との間に有限の間隔が空きます。gap がないと、基底状態にある粒子を無限小のエネルギーでもって励起させることができます。Coulomb phase (クーロン相) みたいなものです。$N=2$ の理論というのはあまり familiar ではありません。ベータ関数は負です。ですから、asymptotic freedom があり、dimensional transmutation が起こります。しかし mass gap はない、そういう理論です。

したがって $N=1$ の理論と $N=2$ の理論とは物理的には全く異なる理論です。とは言え mass perturbation で $N=2$ の理論は $N=1$ の理論に落ちるという物理的な洞察があるので、まず $N=1$ の理論を解析して、それから $N=2$ の理論に戻るということをします。ただ、$N=1$ の理論は $N=2$ の理論と違って Internal な対称性 $SU(2)_I$ がないので、そのままでは TFT はできないのですが頑張ってやってみます。しかし、そのままではやはり無理があるので、ベースとなる多様体に条件をつけます。ベースとなる多様体を Kähler 多様体とします。この場合 mass perturbation を加えても BRST 不変性は保たれます。実は Kähler 多様体の場合にはもう一個スーパーチャージが、すなわち BRST 演算子に相当するものが作れます。その余分に作られた BRST 演算子があるため、mass perturbation をかけた後でも BRST 不変性は保たれるということです。

それで Kähler 多様体とは何かですが、これはたちの良い複素多様体で、複素構造が平行移動のもとで不変になります。またホロノミーが $SO(4)$ から $U(2)$ に落ちます：

$$SO(4) \simeq SU(2)_L \times SU(2)_R \longrightarrow SU(2)_L \times U(1)_R \simeq U(2) \tag{3.78}$$

一般に TFT は $N=2$ じゃないと作れないんですがホロノミーが $SO(4)$ から $U(2)$ に落ちているので、

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\dot{\alpha} i}\bar{Q}_{\dot{\alpha} i} &= Q_1 \\ \delta^{\dot{\alpha} i}\bar{Q}_{\dot{\alpha} i} &= Q_2 \end{aligned} \tag{3.79}$$

として、BRST 演算子に相当するものが 2 つ作れます。ベースとなる多様体に何か条件を付けるとフィジカルな理論と トポロジカルな理論とが同等になることがあります。どのような場合にフィジカルな理論とトポロジカルな理論とが同等になるかという問題は微妙な問題です。それについて、少し調べることにしましょう。

$N=1$ の理論に戻ります。今ゲージ群を G とし, ゲージ場を $A^a{}_\mu$, ゲージーノを λ^a とします。ラグランジアンは

$$\mathcal{L} = \frac{1}{e^2}\int d^4x\sqrt{-g}(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}} iD_\mu\lambda^\alpha) \tag{3.80}$$

と書けます。これは、古典的な $U(1)_R$ 対称性を持ちます：

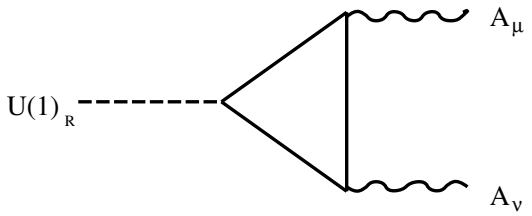
$$\begin{aligned} \lambda_\alpha &\rightarrow e^{i\gamma}\lambda_\alpha \\ \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}} &\rightarrow e^{-i\gamma}\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}} \end{aligned} \tag{3.81}$$

つまり、これはカイラルな対称性です。これがインスタントンによって破れて、対称性が $\mathbf{Z}_{2h}$ にまで落ちます。h は dual Coxeter 数で $SU(N)$ の場合は N です (次表参照)。

群	ランク	次元	dual Coxeter 数 h
$SU(N)$ $(N \geq 2)$	$N-1$	N^2-1	N
$SO(N)$ $(N \geq 2)$	$\left[\frac{N}{2}\right]$	$\frac{1}{2}N(N-1)$	$N-2$ $(N \geq 4)$
$Sp(N)$	N	$N(2N+1)$	$N+1$
E_6	6	78	12
E_7	7	133	18
E_8	8	248	30
F_4	4	52	9
G_2	2	14	4

$\mathbf{Z}_{2h}$ は図 7のようなグラフのアノマリーの計算から出て来ます。

図 7: アノマリーを出す 3 角グラフ



この 3 角形をフェルミオンがぐるっとまわってアノマリーを出します。いま随伴表現を考えているので、随伴表現の 2 次のカシミア C_2 が出て来ます $(\partial_\mu J^\mu \simeq C_2 F\widetilde{F})$。この 2 次のカシミアが dual Coxeter 数に一致します。まず連続的なカイラル対称性 $U(1)_R$ がアノマリーで離散的なカイラル対称性 $\mathbf{Z}_{2h}$ に落ちます。次にこの離散的なカイラルな対称性が自発的に破れて $\mathbf{Z}_2$ にまで落ちます。$\mathbf{Z}_2$ 対称性は

$$\begin{aligned} \lambda &\rightarrow -\lambda \\ \bar{\lambda} &\rightarrow -\bar{\lambda} \end{aligned} \tag{3.82}$$

という変換のもと理論が不変だというものですが、この対称性はローレンツ群の中に含まれています。したがって $\mathbf{Z}_2$ は破れようがありません。ですから、異なる真空がどれだけあるかといいますと、$2h \div 2 = h$ 個あります。$SU(2)$ の場合は 2 個あります。これは $N=1$ Super Yang-Mills 理論の SUSY 指数です。

さてここで、$N=2$ の話に戻ります。さっき定義したオブザーバブルの notation を少し変えて $(W_k \rightarrow \mathcal{O}^{(k)})$、

$$d\mathcal{O}^{(k)} = \left\{Q, \mathcal{O}^{(k+1)}\right\} \tag{3.83}$$

$$\mathcal{O}(x) = \mathcal{O}^{(0)}(x) = \mathrm{tr}\phi^2(x) \tag{3.84}$$

$$Z_{\mu\nu}(x) = \mathcal{O}^{(2)}(x) = \mathrm{tr}(\phi F_{\mu\nu} - i\psi_\mu\psi_\nu) \tag{3.85}$$

$$I(\Sigma) = \int_\Sigma Z_{\mu\nu} d\sigma^{\mu\nu} \qquad \Sigma \in H_2(M;\mathbf{Z}) \tag{3.86}$$

のように書きましょう。相関関数としては

$$\langle \mathcal{O}(x_1)\ldots\mathcal{O}(x_r) I(\Sigma_1)\cdots I(\Sigma_s)\rangle \tag{3.87}$$

を考えます。

今、$U(1)_R$ チャージのバランスを考えます：

$$\Delta U = 8k - \frac{3}{2}(\chi+\sigma) \tag{3.88}$$

この式の意味は次のようなものです。$U(1)_R$ カレントが anomalous になっているので、

$$\partial_\mu j^\mu = aF\widetilde{F} + bRR^* + cRR^{**} \tag{3.89}$$

が成り立ちます (a,b,c は定数。また $R^*_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}R_{\alpha\beta}{}^{\rho\sigma}$, $R^{**}_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{4}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\gamma\delta\rho\sigma}$)。右辺については普通第 1 項のみを考えるのですが、多様体が曲がっているので、さらに第 2 項、第 3 項が出て来ます。第 1 項は積分すると $8k$ となります。第 2 項、第 3 項も計算すると、σ,χ が出ます。これで、式 (3.88) が出て来ます。一方、式 (3.87) のゴーストチャージを勘定すると、

$$\Delta U = 4r + 2s \tag{3.90}$$

となります。これが、(3.88) と一致するとき、(3.87) の期待値が $\neq 0$ になります。

一般に $N=2$ の理論では $U(1)_R$ チャージが anomalous です (式 (3.88))。したがって、分配関数そのものは零になるので、相関関数 (3.87) を考えることになります。一方、$N=4$ の理論では $U(1)_R$ チャージが non-anomalous となり分配関数を考えることに意味があります。つまり理論にアノマリーがあるかどうかで相関関数を考えるか分配関数を考えるかの違いが出て来ます。

さてそれで $N=2$ の理論で相関関数を計算することにしましょう。とはいっても非常に難しくてどうやったらいいのか見当もつきません。そこで、本当は正しくないのですが、$N=2$ の理論なんだけど理論が mass gap を持つという仮定を置きます。それでどうするかですが、まずある量 X の期待値を normalization を考えないで

$$\langle X\rangle \tag{3.91}$$

と書くことにします。そうすると分配関数は

$$\langle 1\rangle \tag{3.92}$$

と書けます。

以下ちょっとインチキな議論をします。いま多様体 M の上にメトリック $g_{\mu\nu}$ をいれます。それから、t というパラメーターを持って来て、メトリック $g_{\mu\nu}$ をうんと間延びさせることを考えます：

$$g_{\mu\nu} \to t g_{\mu\nu} \quad (\ t\to\infty\ ) \tag{3.93}$$

そうすると、M は至るところ大体平坦になります。そのときに例えば分配関数はどうなるかですが、

$$\langle 1\rangle = e^{-L_{eff}} \tag{3.94}$$

$$L_{eff} = \int d^4x\sqrt{-g}\,(u + vR + wR^2 + \cdots) \tag{3.95}$$

という形になると考えられます。ここで、$u, v, w, \cdots$ は定数、R はスカラー曲率です。有効ラグランジアン L_{eff} としてはこのようなものしかありません。

次に質量の次元が n の演算子 U を持って来て

$$\int d^4x\sqrt{-g}\,U \tag{3.96}$$

という量を考えますと、これは t^{4-n} に比例するスカラーとなります。いまメトリックに依らない量を考えているので、生き残るのは n が 4 のときだけです。それで、n が 4 のときというのは曲率の 2 乗の項だけが生き残ります。それは 2 種類ありましてさっきの χ と σ です。ですから topological invariant な分配関数は

$$\langle 1\rangle = e^{a\chi + b\sigma} \tag{3.97}$$

となります (a, b は定数)。

つまり仮定としては、何か難しい non-local な曲率や、遠くの曲率を掛けて積分したようなものはないとしよう、local なデータだけで書けているとしよう、ということです。異なる点における量を掛けて積分したものはないとします。いま mass gap がある理論を考えていますから、システムをギュウっと引き延ばしてやると、ある所で起こっている exitation は decay してしまう、遠くまで届かない、ということが起こります。massless だとヒュウっと延びていくので遠くの相関があるんだけど、mass に比べてメトリックをうんと伸ばしてしまえば局所的なものだけで書けてしまいます。そういう論法です。そうすると、χ と σ しかなくなります。

それで次に相関関数を議論しましょう。今と同じ論法を使うと相関関数は因数分解して、

$$\langle \mathcal{O}(x_1)\cdots\mathcal{O}(x_r)\rangle = \langle \mathcal{O}\rangle^r\langle 1\rangle \tag{3.98}$$

となります。mass gap があって topological invariance があるからこういうことが成り立ちます。こういうのを、cluster decomposition と言います。また、

$$\langle I(\Sigma_1)I(\Sigma_2)\rangle \tag{3.99}$$

がどうなるかを考えてみます。$Z_{\mu\nu}$ は、さっきの式 (3.85) の形でしたが、これに mass gap の議論を使ったらどうなるか、ということを考えます。$I(\Sigma)$ を 1 つだけにしてしまうと、いわば平均して零になります：

$$\langle I(\Sigma)\rangle = 0 \tag{3.100}$$

零にならない唯一の可能性は 2 つの面 Σ_1 , Σ_2 に intersection (交わり) がある場合です。intersection がない場合は引き離してしまって零にできますが、intersection は同じ点なので引き離しようがありません。intersection からの寄与だけが残ります。そうすると、2 点関数は

$$\begin{aligned}\langle I(\Sigma_1)I(\Sigma_2)\rangle &= \int_{\Sigma_1\times\Sigma_2}\langle Z_{\mu\nu}(x)Z_{pq}(y)\rangle d\sigma^{\mu\nu}(x)d\sigma^{pq}(y)\\ &= \eta\cdot\sharp(\Sigma_1\cap\Sigma_2)\langle 1\rangle\end{aligned} \tag{3.101}$$

となります。ただし、η は未知の定数、$\sharp(\Sigma_1 \cap \Sigma_2)$ は Σ_1 と Σ_2 の交点数です。非常に思い切った評価ですが、mass gap があればこのように clustering をして、非常に荒っぽい計算ができます。そうすると、母関数は

$$\left\langle \exp\left(\sum_{\Sigma_a \in H_2(M)} \alpha_a I(\Sigma_a)\right)\right\rangle = \exp\left(\frac{\eta}{2}\sum_{a,b}\alpha_a\alpha_b\cdot\sharp(\Sigma_a\cap\Sigma_b)\right)\langle 1\rangle \tag{3.102}$$

$$i.e. \quad \sum\frac{1}{(2n)!}\left\langle\left(\sum\alpha_a I(\Sigma_a)\right)^{2n}\right\rangle = \sum\frac{1}{(2n)!}\frac{(2n)!}{2^n n!}\left(\sum_{a,b}\eta\cdot\alpha_a\alpha_b\cdot\sharp(\Sigma_a\cap\Sigma_b)\right)^n\langle 1\rangle$$

となります。3 重衝突、4 重衝突はないとしました。ただし、自己交点数は勘定に入れています。それで結局、

$$\left\langle \exp\left(\sum\alpha_a I(\Sigma_a)+\lambda\mathcal{O}\right)\right\rangle = \exp\left(\frac{\eta}{2}\sum\alpha_a\alpha_b\cdot\sharp(\Sigma_a\cap\Sigma_b)+\lambda\langle\mathcal{O}\rangle\right)e^{a\chi+b\sigma} \tag{3.103}$$

が得られます。これでちょっと具体的な感じがして来ました。$N=2$ の理論なんだけど mass gap を持つとしていますので本当は嘘なんだけど、この式はかなり真実に近いものです。ただいろいろずれています。だからちょっと補正しなければいけません。$N=2$ の理論に mass perturbation を掛けて $N=1$ の理論に落とすわけですが、$N=1$ の理論は真空が 1 つではありません。さっき言ったように真空は大体 h 個あります。この期待値を取っているところはそれぞれの真空について期待値を取っていますので、正しくは $N=1$ では

$$\left\langle \exp\left(\sum\alpha_a I(\Sigma_a)+\lambda\mathcal{O}\right)\right\rangle = \sum_\rho \exp\left(\frac{\eta}{2}\sum\alpha_a\alpha_b\cdot\sharp(\Sigma_a\cap\Sigma_b)+\lambda\langle\mathcal{O}\rangle_\rho\right)\langle 1\rangle_\rho \tag{3.104}$$

です。これでも未だ完全に正確ではありませんが相関関数の母関数の候補としてこの式を持って来ましょう：

$$\text{相関関数の母関数} = \sum_\rho \exp\left(\frac{\eta}{2}\sum_{a,b}\alpha_a\alpha_b\cdot\sharp(\Sigma_a\cap\Sigma_b)+\lambda\langle\mathcal{O}\rangle_\rho\right)e^{a_\rho\chi+b_\rho\sigma} \tag{3.105}$$

実はこういう恰好というのは幾何の方で知られていて、Donaldson 不変量の構造定理といいます (Kronheimer & Mrowka [24])。一般にはちょっとずれますが、$K3$ 曲面のような hyper Kähler 多様体の場合にはこれでぴったりです。hyper Kähler 多様体でない場合は、次のように考えましょう。$N=2$ の理論を $N=1$ の理論に落とすには mass perturbation を掛けるわけですが、mass perturbation は平坦な時空では

$$m\int d^4x d^2\theta\ \mathrm{tr}\Phi^2 \tag{3.106}$$

となります。これを曲がった時空でどう書くかですが、まず測度の部分を

$$d^4x d^2\theta \to d^2z d^2\bar{z} d^2\theta \tag{3.107}$$

と書き換えます。d^2z の部分が問題ですが、これは正則 2 形式 $dz_1\wedge dz_2$ です。平坦な時空では正則 2 形式は存在しますが、曲がった時空では一般には正則 2 形式は存在しません。しかしとりあえず、正則 2 形式が存在する曲がった多様体を考えることにします。正則 2 形式が存在する曲がった多様体というのは実は hyper Kähler 多様体と等価です。その正則 2 形式を ω と書くことにします。そうすると $dz_1\wedge dz_2$ は ω になりますので mass term は

$$m\int \omega\ d^2\bar{z}d^2\theta\ \mathrm{tr}\Phi^2 \tag{3.108}$$

と書けます。hyper Kähler 多様体の場合には ω は non-vanishing 正則 2 形式となります。どこでも零にならないんだからどこでもしっかり mass が入るということです。そうするとさっきの議論が使えて、clustering decomposition とかなんとかが正確に言えます。ところが、もし ω がどこかで零になったとすると、そこでは mass が零になってしまいます。そこでは mass が消えますから、Coulomb phase 的な状況になります。そうするとそこから補正が出て来ます。mass が零になる部分は 2 次元の部分多様体になって、そこから補正が出ます。mass が零になる部分を cosmic string とか vortex line のようにみなして補正の計算をします。これをきちんとやるのは難しいです。正則 2 形式のことを canonical class と言うので、こういう canonical class が消えるところを canonical divisor と言います。さっきの構造定理と言うのは canonical divisor についての足し上げの恰好で書かれているのですが、これを物理的に解釈すると $N = 2$ の理論を $N = 1$ の理論に落とす mass perturbation と読めるいうことです。

4　4 次元 $N = 4$ Super Yang-Mills 理論

今度は $N = 4$ の Super Yang-Mills 理論から出発して、TFT がどうやって構成されるのかを調べたいんですが、これはかなり込み入った議論になります (Vafa &Witten, 1994 年 [25])。今までやったこととかなり重なる部分もありますが、興味があるのは S-duality の話です。

4.1　$N = 4$ Super Yang-Mills 理論と S-duality

まず $N = 4$ の多重項はどうなるかですが、フェルミオンが 4 個欲しいので、$N = 2$ のベクトル多重項と $N = 2$ のハイパー多重項を minimal にカップルさせることを考えます。ハイパー多重項は好きな表現で考えることができるので、ここでは随伴表現で考えましょう。これで $N = 4$ の多重項ができます：

$$N = 2 \text{ ベクトル多重項} \ \oplus \ N = 2 \text{ (随伴表現) ハイパー多重項}$$

$$\begin{array}{ccc} & A_\mu{}^a & \\ \lambda^a & & \psi^a \\ & \phi^a & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} & \psi_q^a & \\ q^a & & \tilde{q}^{\dagger a} \\ & \widetilde{\psi}_q^{\dagger a} & \end{array} \tag{4.1}$$

ここで、$\lambda, \psi, \psi_q, \widetilde{\psi}_q$ と書いているのがフェルミオン (スピン $\frac{1}{2}$) で、$\phi, q, \tilde{q}$ と書いているのが複素スカラー (スピン 0) です。そうすると、場は全部でどれだけあるかと言いますと、

$$\left\{ \begin{array}{lll} \text{ベクトル 1 個} & : & A_\mu \\ \text{スピノル 4 個} & : & \psi_i \qquad i = 1, 2, 3, 4 \\ \text{スカラー 6 個} & : & \phi_m(\text{実}) \quad m = 1 \sim 6 \end{array} \right. \tag{4.2}$$

だけあります。

この場合、R-symmetry は何かと言いますと、$N = 4$ ですから一見 $U(4)_I \simeq SU(4)_I \times U(1)_I$ のように思えますが、実は $SU(4)_I$ になります。その理由は次の通りです。$U(1)_I$ の生成子を B と表しますと、

$$[Q_{\alpha i}, B] = i\frac{N-4}{4} Q_{\alpha i} \tag{4.3}$$

が成り立ちます。$N = 4$ のときに右辺は 0 になりますので、B と $Q_{\alpha i}$ とは全ての状態に対して同じ作用をします。ところが、$N = 4$ の多重項は CPT self-conjugate なので (48ページ参照)、B はヘリシティー $+\frac{1}{2}$ の状態と $-\frac{1}{2}$ の状態に対して同じ作用をしなくてはならず、B の作用は 0 になります。したがって $N = 4$ の R-symmetry は $SU(4)_I$ です。

$SU(4)_I$ は $SO(6)_I$ と局所同型です：

$$SU(4)_I \simeq SO(6)_I \tag{4.4}$$

フェルミオンは $SU(4)_I$ の 4 次元ベクトル表現で、ボゾンは $SO(6)_I$ の 6 次元ベクトル表現となります：

$$\begin{array}{rcl} \text{フェルミオン} & : \mathbf{4} \quad \text{of} \quad SU(4)_I \\ \text{ボゾン} & : \mathbf{6} \quad \text{of} \quad SO(6)_I \end{array} \tag{4.5}$$

なお、この $\mathbf{4}$ は $SO(6)_I$ の表現としてはスピノルに、$\mathbf{6}$ は $SU(4)_I$ の表現としては 2 階反対称テンソルになります。

それから $N=4$ の理論はベータ関数が 0 です:

$$\beta(g) = 0 \tag{4.6}$$

どうしてそうなるか計算してみましょう。$N=2$ の $SU(N_c)$ 理論のベータ関数は 1 ループの寄与しかありませんが、1 ループのベータ関数は、良く知られているように、

$$\begin{aligned}
\beta(g) &= -\frac{bg^3}{16\pi^2} && (4.7)\\
b &= \frac{11}{3}C_2(G) - \sum_{R_S}\frac{1}{6}T(R_S) - \sum_{R_F}\frac{2}{3}T(R_F) && (4.8)\\
T(R)\delta^{ab} &= \mathrm{tr}(R^a R^b) && (4.9)\\
C_2(G)\delta^{ab} &= f_{acd}f_{bcd} && (4.10)
\end{aligned}$$

となります。$C_2(G)$ は群 G の 2 次のカシミアで、$T(R)$ は表現 R の Dynkin index です。R^a は表現 R の表現行列で、R_S, R_F の下添字 S, F はそれぞれ実のスカラー、実のスピノルからの寄与を表します。$G = SU(N_c)$ の時、

$$\begin{aligned}
C_2(SU(2)) &= N_c && (4.11)\\
T(\text{随伴表現}) &= N_c && (4.12)\\
T(\text{ベクトル表現}) &= \frac{1}{2} && (4.13)
\end{aligned}$$

です。この公式を用いて、$N=2$ のベクトル多重項とハイパー多重項について、係数 b を求めてみます。

- ベクトル多重項について
  ベクトルが 1 個、実のスピノルが 2 個、複素スカラーが 1 個あるので、

  $$b = \left(\frac{11}{3}\times 1 - \frac{1}{6}\times 2 - \frac{2}{3}\times 2\right) N_c = 2N_c \tag{4.14}$$

  となります。

- ハイパー多重項について
  複素スカラーが 2 個、実のスピノルが 2 個あるので、

  $$\begin{aligned}
  b &= -\left(\frac{1}{6}\times 4 + \frac{2}{3}\times 2\right)\times\frac{1}{2} = -1 \quad : \text{ベクトル表現} && (4.15)\\
  b &= -\left(\frac{1}{6}\times 4 + \frac{2}{3}\times 2\right)\times N_c = -2N_c \quad : \text{随伴表現} && (4.16)
  \end{aligned}$$

  となります。

今考えている $N=4$ の多重項 (4.1) には、$N=2$ のベクトル多重項が 1 個、随伴表現のハイパー多重項が 1 個あるので、

$$b = 2N_c \times 1 + (-2N_c)\times 1 = 0 \tag{4.17}$$

となります。したがって、ベータ関数が 0 になります。ベータ関数が 0 なので、理論に発散がありません。つまり紫外有限な理論です。しかも、もともと massless の理論ですから古典的スケール不変性があり、これが量子論でも保たれます。こういう意味で非常に特別な理論です。量子論なんですが非常に古典論に近い、繰り込み可能というだけでなく本当に発散が出ない、そんな理論の最初の例です。ただこの理論の正体は本当は良く分かりません。

それから duality (双対性) の話ですが、$N = 4$ で特に興味があるのは S-duality (Strong-Weak duality) です。$N = 4$ の理論は S-duality の変換の下不変であることが期待されています。S-duality の変換とは、古典電磁気学における電気と磁気を入れ換える変換の拡張で、理論の素粒子とソリトンを入れ換える変換のことです。理論の結合定数を g、真空角を θ とすると、S-duality の変換は、

$$\frac{4\pi}{g^2} \quad \to \quad \frac{g^2}{4\pi} \tag{4.18}$$

$$\theta \quad \to \quad \theta + 2\pi \tag{4.19}$$

という 2 つの変換から生成されるものです。式 (4.18) を見れば分かるように、結合定数の逆数を取るような、理論の強結合領域と弱結合領域を入れ換えるような変換です。この S-duality の変換は普通、$SL(2, \mathbf{Z})$ 変換として考えます。g と θ をまとめて、新たに結合定数を

$$\tau = \frac{\theta}{2\pi} + \frac{4\pi i}{g^2} \tag{4.20}$$

と定義し、$SL(2, \mathbf{Z})$ の元の τ に対する作用を

$$SL(2, \mathbf{Z}) \ni \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \ : \ \tau \mapsto \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \tag{4.21}$$

とすれば、S-duality の変換は $SL(2, \mathbf{Z})$ 変換と大体 1 対 1 に対応します：

$$\text{S-duality の変換} \quad \longleftrightarrow \quad SL(2, \mathbf{Z}) \text{ 変換}$$

$$\frac{4\pi}{g^2} \to \frac{g^2}{4\pi} \quad \longleftrightarrow \quad \tau \to -\frac{1}{\tau} \ \ (\theta = 0) \quad \text{S 変換} \tag{4.22}$$

$$\theta \to \theta + 2\pi \quad \longleftrightarrow \quad \tau \to \tau + 1 \qquad\quad \text{T 変換} \tag{4.23}$$

S 変換、T 変換を行列表示すると、

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \ : \ \text{S 変換} \tag{4.24}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ : \ \text{T 変換} \tag{4.25}$$

となります。$SL(2, \mathbf{Z})$ 変換は、この S 変換、T 変換によって生成されます。正確には、S-duality の変換によってゲージ群が少し違ったものになります：

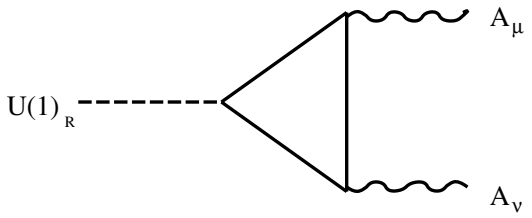
$$\left.\begin{array}{l} \text{ゲージ群 } G \\ \\ \tau \end{array}\right\} \quad \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \text{S-duality 変換} \end{array} \quad \left\{\begin{array}{l} \text{ゲージ群 } \widehat{G} \\ \\ \dfrac{a\tau + b}{c\tau + d} \end{array}\right. \tag{4.26}$$

$\widehat{G}$ は G に dual な群です。$\widehat{G}$ と G の weight lattice が互いに dual になっているという意味です。例えば、$G = SU(2)$ のとき、$\widehat{G} = SO(3)$ です [26] 。しかしここではそのことについてはあまり気にしないことにします。

S-duality 変換のもと理論が不変であるべしというのを最初に言った人は Montonen と Olive です (1977 年 [27])。これを Montonen-Olive duality と言います。彼らは最初 $N = 2$ の理論についてこういうことを言い出したんですが、本当は $N = 2$ の理論ではこの duality は厳密には成り立っていません。$N = 4$ の理論で成り立つと考えられます [28][29]。こういう考え方の背景となるものは何かと言いますと、こういう理論にはソリトンが出て来るということです。もともと理論には素粒子があるのですが、結合定数をひっくり返すことで、ソリトンを素粒子と思い直してやることができるということです。そのときに duality が成り立つのは、素粒子のスペクトラムとソリトンのスペクトラムとの入れ換えがきく場合のみです。$N = 4$ の理論にはモノポール (ソリトン) が出て来るんですが、SUSY があるからモノポールも多重項を作ります。その多重項がちょうどさっきと同じ $N = 4$ のベクトル多重項を形成します。スピン 1 のものが 1 個、スピン $1/2$ のものが 4 個、スピン 0 のものが 6 個出て来ます。ですから exact な意味の S-duality が成り立つ可能性があります。一方 $N = 2$ の理論ではモノポールはスピン $1/2$ とスピン 0 のもので多重項を作ります。$N = 2$ の多重項にはスピン 1 とスピン $1/2$ とスピン 0 のものが入っていたので、exact な意味の S-duality が成り立ちません。ただ、$N = 2$ の理論でもちょっと変形した形の duality は成り立ちます。それが Seiberg-Witten の理論で威力を発揮しました [20]。

1 章でも述べましたが、$N = 2$ の理論では $U(1)_R$ チャージが anomalous です。このとき分配関数は 0 になってしまうので、いろいろな量を計算するときに相関関数を計算しなければならなくて、それが Donaldson 不変量になります。一方 $N = 4$ の理論では $U(1)_R$ チャージが non-anomalous です。ですから分配関数は non-zero となり、分配関数を考えることが意味を持ちます。アノマリーがあるかどうかというのは

図 8: アノマリーを出す三角グラフ



という三角グラフを計算すればいいわけです。三角形のループをフェルミオンが回るのですが、$N = 4$ の理論ではベクトル多重項に 2 個、ハイパー多重項に 2 個フェルミオンがいるので、それらの $U(1)_R$ チャージの寄与がちょうどキャンセルします (ベクトル多重項のフェルミオン 1 個の寄与は $+1$、ハイパー多重項のフェルミオン 1 個の寄与は -1 です。)。あるいは次のように考えてもいいです。$N = 2$ の対称性は $SU(2) \times U(1)_R$ で、これが $N = 4$ の理論の対称性 $SU(4)$ の中にはまり込みますので各生成子はトレースレスになります。ということは $U(1)_R$ チャージを足したものは 0 になっているということです。

それで分配関数はと言いますと、結合定数を τ, ゲージ群を G として

$$Z(\tau; G) = \int \mathcal{D}X \exp\left\{ \int_M d^4x\sqrt{-g} \left(\frac{1}{g^2}\mathrm{tr}F^2 + \frac{i\theta}{8\pi^2}\mathrm{tr}F\widetilde{F} + \text{matter part} \right) \right\} \tag{4.27}$$

となります。θ は真空角です。Vafa と Witten は S-duality 予想として、次の式を提唱しました：

$$Z_M(-\frac{1}{\tau}; G) = \pm \left(\frac{\tau}{i}\right)^{-\frac{\chi(M)}{2}} Z_M\left(\tau; \widehat{G}\right) \tag{4.28}$$

ただし、

$$
\begin{aligned}
Z_M &= \frac{q^{-\frac{\chi(M)}{12}}}{\sharp Z(G)} \sum_{n=1}^{\infty} \chi(\mathcal{M}_n) q^n \qquad (4.29)\\
q &= e^{2\pi i \tau} = e^{-\frac{8\pi^2}{g^2} + i\theta}\\
\mathcal{M}_n &: n- \text{インスタントンのモジュライ空間}\\
\sharp Z(G) &: \text{群 } G \text{ の中心の元の個数 (例えば } \sharp Z(SU(N)) = \sharp\, \mathbf{Z}_N = N \text{)}
\end{aligned}
$$

これが成り立つかどうかをこれからチェックしたいのですが、一般には難しすぎて手のつけようがありません。そこで多様体 M として何か特別なものを持って来て状況を簡単にすることを考えます。M が hyper Kähler 多様体の場合が簡単です。hyper Kähler 多様体の例としては $K3$ 曲面や 4 次元トーラス T^4 等があります (Appendix 参照)。M が hyper Kähler 多様体の時、もともとのフィジカルな理論とトポロジカルな理論が等価になります。分配関数を評価する際、トポロジカルな理論に移って評価していいということです。どうしてこういう事情になるかというのは Appendix (74ページ) でやることにしましょう。

これから、$N = 2$ の理論の真似をして、$N = 4$ の理論でトポロジカルな理論を作ることにします。それで分配関数 (4.27) を評価したいわけですが、目標はこれがインスタントンの足し上げになることを示し、さらにそれを explicit に求めるということです。

まず、ツイストを行います。$N = 4$ ですからスーパーチャージが 4 個あります：

$$
\begin{aligned}
&Q_{\alpha i} \quad i = 1, 2, 3, 4\\
&\bar{Q}^{\dot{\alpha}}_{i} \quad i = 1, 2, 3, 4 \qquad (4.30)
\end{aligned}
$$

これらはそれぞれ $SU(4)_I$ の 4 次元表現 $\mathbf{4}$、$\bar{\mathbf{4}}$ を作っています。$N = 2$ の場合と同様に Internal な足を Space-Time の足に置き換えます。Space-Time の Symmetry は $SO(4) \simeq SU(2)_L \times SU(2)_R$ ですが、$SU(4)_I$ の 4 次元表現の $\mathbf{4}$ を $SU(2)_L \times SU(2)_R$ の表現としてどう思うかということが問題となります。これには 3 つ可能性がありまして

$$
\begin{aligned}
&(SU(2)_{I,L} \times SU(2)_{I,R})\\
\text{(i)} \quad &(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})\\
\text{(ii)} \quad &(0, \frac{1}{2}) \oplus (0, \frac{1}{2})\\
\text{(iii)} \quad &(0, \frac{1}{2}) \oplus (0, 0) \oplus (0, 0)
\end{aligned}
$$

があります。括弧の中の左成分が $SU(2)_{I,L}$ のスピンを、括弧の中の右成分が $SU(2)_{I,R}$ のスピンを表します。この 3 つのチョイスがあるわけですが、今は (ii) を選ぶことにします。$(0, \frac{1}{2})$ だけなら $N = 2$ の場合と全く同じです。$N = 2$ のコピーが 2 個あるという状況になっています。また、$SO(6)_I$ の 6 次元表現 $\mathbf{6}$ は $SU(2)_L \times SU(2)_R$ の表現として

$$
\begin{aligned}
&(SU(2)_{I,L} \times SU(2)_{I,R})\\
&(0, 1) \oplus 3(0, 0)
\end{aligned}
$$

であると思うことにします。$N=4$ の登場人物の量子数は以下の通りです：

$$\begin{array}{ccc} & (SU(2)_L \times SU(2)_R) & \times \quad (SU(2)_{I,L} \times SU(2)_{I,R}) \\ Q_{\alpha i} & (\frac{1}{2},0) & 2(0,\frac{1}{2}) \\ \bar{Q}^{\dot{\alpha}}_{i} & (0,\frac{1}{2}) & 2(0,\frac{1}{2}) \\ A_\mu & (\frac{1}{2},\frac{1}{2}) & (0,0) \\ \psi_i & (\frac{1}{2},0) & 2(0,\frac{1}{2}) \\ \bar{\psi}_i & (0,\frac{1}{2}) & 2(0,\frac{1}{2}) \\ \phi_m & (0,0) & (0,1) \oplus 3(0,0) \end{array} \tag{4.31}$$

ただし、$\psi_i = (\lambda, \psi, \psi_q, \widetilde{\psi}_q),\ \bar{\psi}_i = (\bar{\lambda}, \bar{\psi}, \bar{\psi}_q, \bar{\widetilde{\psi}}_q),\ \phi_m = (\phi, \bar{\phi}, q, \tilde{q}, \bar{q}, \bar{\tilde{q}})$ です。$N=2$ のときと同様、 $SU(2)_R$ と $SU(2)_{I,R}$ についてツイストを行います：

$$SU(2)_{R'} = SU(2)_R \overset{\text{対角和}}{\oplus} SU(2)_{I,R} \tag{4.32}$$

まずスーパーチャージについては

$$\begin{array}{rcl} Q_{\alpha i} & \to & 2(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \\ \bar{Q}^{\dot{\alpha}}_{i} & \to & 2(0,1) \oplus \underbrace{2(0,0)}_{\text{BRST 演算子}} \end{array} \tag{4.33}$$

となります。$(0,0)$ が BRST 演算子です。フェルミオンについては

$$\begin{array}{ccll} & SU(2)_L \times SU(2)_{R'} & & \\ \psi_\mu, \widetilde{\chi}_\mu & (\frac{1}{2},\frac{1}{2}) & & \text{反可換なベクトル} \\ \chi^+_{\mu\nu}, \widetilde{\psi}^+_{\mu\nu} & (0,1) & & \text{自己双対な 2 形式} \\ \eta, \zeta & (0,0) & & \text{スカラー} \end{array} \tag{4.34}$$

となります。$(\chi^+_{\mu\nu}, \eta)$ は $\bar{\psi}_i$ のベクトル多重項のツイストから、$(\widetilde{\psi}^+_{\mu\nu}, \zeta)$ は $\bar{\psi}_i$ のハイパー多重項のツイストから得られました。ボゾンについては

$$\begin{array}{ccll} & SU(2)_L \times SU(2)_{R'} & & \\ A_\mu & (\frac{1}{2},\frac{1}{2}) & & \text{ベクトル} \\ B^+_{\mu\nu} & (0,1) & & \text{自己双対な 2 形式} \\ \phi, C & (0,0) & & \text{スカラー 3 つ} \end{array} \tag{4.35}$$

となります。ϕ は複素なので 2 つと数えます。たくさんの場が入って来ますから頭が痛いんですが、これがどうやって活躍するか見ることにしましょう。まずオイラー数がどうやって場の理論に顔を出すかということをちょっと考えてみましょう。簡単な場合から出発して、設定を少しずつバージョンアップしていくことにします。

4.2 バージョン 1 (超対称量子力学 1)

まず、経路積分が有限次元の積分である場合を考えてみます。これは超対称量子力学みたいなものです。M を $d\ (=2n)$ 次元のコンパクトな向きづけられた多様体とし、V を向きづけられたランク d の実ベクトル束とします。V のメトリックを g_{ab} と書き、内積を

$$(v,w) = g_{ab} v^a w^b\ , \qquad v, w \in V \tag{4.36}$$

とします。構造群は $SO(d)$ となります。u_i を M の局所座標とし、フェルミオン ψ_i を M の接ベクトルとします ($i = 1, \cdots, d$)。超対称量子力学ではフェルミオンというのは微分形式という解釈でした。

BRST 変換は

$$\begin{aligned} \delta u_i &= i\varepsilon\psi_i \\ \delta\psi_i &= 0 \end{aligned} \tag{4.37}$$

です。また、ε を除いた BRST 変換を導入し、δ_0 と表すことにします。例えば、

$$\delta_0 u_i = i\psi_i \tag{4.38}$$

です。

それからちょっと面倒臭いのですが V の切断を 2 つ導入し、$\chi^a(u), H^a(u)(\ a = 1, \ldots, d \ )$ と表します。$\chi^a(u)$ は V の切断で反可換な量、$H^a(u)$ は V の切断で可換な補助場です。切断と言うと大げさですが、要は多成分の波動関数のことです。V のランクが波動関数の成分の数に相当します。これらの BRST 変換は

$$\begin{aligned} \delta\chi^a &= \varepsilon H^a - \varepsilon\delta_0 u^i A_i{}^a{}_b \chi^b \\ \delta H^a &= \varepsilon\delta_0 u^i A_i{}^a{}_b H^b - \frac{\varepsilon}{2}\delta_0 u^i \delta_0 u^j F_{ij}{}^a{}_b \chi^b \end{aligned} \tag{4.39}$$

です。$A_i{}^a{}_b, F_{ij}{}^a{}_b$ はベクトル束 V の接続と曲率です。この BRST 変換は実際 2 回やると 0 になります。

それでラグランジアンを

$$L = \delta_0 W \tag{4.40}$$

$$W = \frac{1}{2\lambda}(\chi, H + 2is) = \frac{1}{2\lambda}\chi^a(H^a + 2is^a) \tag{4.41}$$

$$i.e. \quad L = \frac{1}{2\lambda}(H, H + 2is) + \frac{1}{\lambda}g_{ab}\chi^a\frac{\partial s^b}{\partial u^i}\psi^i - \frac{1}{2\lambda}F_{ijab}\psi^i\psi^j\chi^a\chi^b \tag{4.42}$$

と表すことにします。λ は結合定数で、s^a は V の切断です。分配関数は

$$Z = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int dud\psi d\chi dH e^{-L} \tag{4.43}$$

となります。まず、H について積分してやって、ラグランジアンから補助場 H を消去すると

$$Z = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{\frac{d}{2}}\int dud\psi d\chi e^{-L} \tag{4.44}$$

$$L = \frac{(s,s)}{2\lambda} + \frac{1}{\lambda}g_{ab}\chi^a\frac{\partial s^b}{\partial u^i}\psi^i + \frac{1}{2\lambda}F_{ijab}\psi^i\psi^j\chi^a\chi^b \tag{4.45}$$

となります。

さて、この積分を評価したいわけですが、そのために $\lambda \to 0$ の極限と $\lambda \to \infty$ の極限で評価することを考えます。これは TFT の常套手段です。

まず $\lambda \to 0$ の極限をとると、

$$s^a(u) = 0 \quad (\ a = 1, \ldots, d \ ) \tag{4.46}$$

付近の寄与が支配的になることが分かります。これは 1 章でやった議論と同じです。すなわち、スーパーポテンシャル W を用いて

$$s^a(u) = \frac{\partial W}{\partial u^a} \tag{4.47}$$

と表すと、ラグランジアンのポテンシャルの項は

$$\left(\frac{\partial W}{\partial u}\right)^2 + \bar{\psi}\frac{\partial^2 W}{\partial u^2}\psi \tag{4.48}$$

と書けて見慣れた形になります。つまり、W の鞍点の寄与だけが積分に効いてきます。

それで今もし、s が点 P_α において、孤立した 1 位の零点を持つとすると、s は

$$s^a = f_{(a)}u^a \quad (\ a\text{: not summed}\ ) \tag{4.49}$$

と書けます。$u \to 0$ で s は 0 に近づきます。そうすると 1 個の零点からの寄与は

$$\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{\frac{d}{2}} \int du^a d\psi^a d\chi^a \exp\left\{-\frac{(f_a u^a)^2}{2\lambda} + \frac{1}{\lambda} f_a \psi^a \chi^a\right\} = \prod_{a=1}^{d} \frac{f_a}{|f_a|} = \pm 1 \tag{4.50}$$

となります。これは、2 章でやった結果と同じものになっています。したがって分配関数は

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{P_\alpha} \varepsilon_\alpha \\ \varepsilon_\alpha &= \mathrm{sign}\left(\det\left(\frac{\partial s^a}{\partial u^a}\right)\right)\Big|_{P_\alpha} \end{aligned} \tag{4.51}$$

となります。符号付きで零点からの寄与を足していくというものになっています。

今度は $\lambda \to \infty$ の極限をとると、ラグランジアンの第 1、2 項は無視できて (すなわち $s = 0$ としたような状況)、分配関数は

$$\begin{aligned} Z &= \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{\frac{d}{2}} \int du d\chi d\psi \exp\left\{\frac{1}{2\lambda} F_{ijab}\psi^i\psi^j\chi^a\chi^b\right\} \\ &= \int_M du\ \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}} n!} \mathrm{Pfaff}(\underbrace{F \wedge \cdots \wedge F}_{n\text{ 個}}) \\ &= \sum_\alpha \varepsilon_\alpha \end{aligned} \tag{4.52}$$

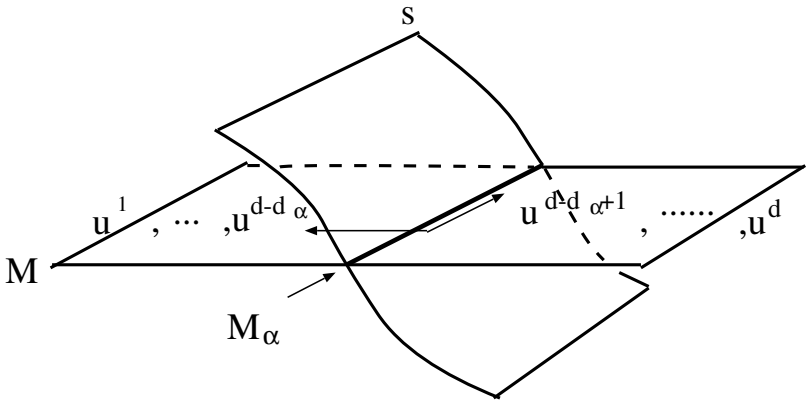
となり、2 章の結果と一致します。第 2 行の被積分部分はベクトル束のオイラー類です。最後の等号は数学の定理です。この式はいわゆる Poincaré-Hopf の定理 (ベクトル束のオイラー数がベクトル束の切断の全ての零点の情報から分かるというもの) に相当しています。ですから、ここでの計算からはオイラー数が出て来ます。

4.3 バージョン 2 (超対称量子力学 2)

もう少し込み入った場合についてやってみます。バージョン 1 では s の零点は孤立していたのですが、今度はそれがある広がりを持っている場合について考えましょう。$s = 0$ となる部分多様体が次元 d_α を持つ M の部分多様体 M_α の union に一致するとしましょう。
M_α の近傍で、M_α に normal な方向の切断の成分を、normal な方向の座標 u_i $(i = 1, \cdots, d - d_\alpha)$ を用いて

$$s^a = f^a_{\ i} u^i \quad (\ a = 1, \cdots, d - d_\alpha\ ) \tag{4.53}$$

図 9: 切断 s の零点集合が次元 d_α を持つ M の部分多様体 M_α になっている。



と表しましょう $(f^a_i \neq 0)$。つまりこの方向には s は退化していないとします。M_α に tangent 方向の切断の成分は

$$s^a = 0 \quad (\ a = d - d_\alpha + 1, \cdots, d\ ) \tag{4.54}$$

となります。

これについてバージョン 1 と同じことをやってみます。行列 f^a_i は M_α 付近でのフェルミオンの質量行列であり (式 (4.45) より湯川カップリングの項が $g_{ab}\chi^a \frac{\partial s^b}{\partial u^i}\psi^i$ となることに注意)、

$$\begin{array}{c} \overset{d-d_\alpha}{\longleftrightarrow}\quad \overset{d_\alpha}{\leftrightarrow} \\ \\ d-d_\alpha \updownarrow \\ \\ d_\alpha \updownarrow \\ \\ \text{massless fermion} \end{array} \begin{pmatrix} \text{massive fermion} & \\ & O \end{pmatrix} \tag{4.55}$$

です。バージョン 1 と同様、M_α 上の ($s = 0$ にそった) 積分からオイラー数が出て、M_α に normal な方向 $(s \neq 0)$ の積分から符号が出ます。よって分配関数は

$$\begin{aligned} Z &= \sum \varepsilon_\alpha \cdot \chi(V_\alpha) \\ V_\alpha &: \text{(tangent 方向)} \\ \varepsilon_\alpha &: \text{(normal 方向)} \end{aligned} \tag{4.56}$$

となります。V_α はベクトル束を M_α に制限したものです。

これは雰囲気としては目標の式 (4.29) と非常に近いものになっています。すごくきれいな式で、こういうのは特性類の本を見れば出ています。1950 年代の数学の結果で、良く知られたものです [30][1]。今の議論はこの数学の結果を量子力学のオモチャで再現したというものです。目標の式 (4.29) に到達するには更にバージョンアップしなければなりません。

[1]講義録作成者注：この文献は、秦泉寺雅夫さんに教えて頂いたものです。ここで出て来た式をかなり一般化したものですが有名なものです。

4.4 バージョン 3 ($N = 2 \to N = 4$)

さっきは分配関数の計算では積分を、M_α に対して normal な方向と tangent な方向に分けました。tangent 方向の積分は M_α のオイラー数となり、normal 方向の積分は符号となりました。今度はこの符号をとりさってやることを考えます。バージョン 1、2 でやってきたことは大体 $N = 2$ の状況です。ゲージ理論では、A_μ が u に、ψ_μ が M の接ベクトルに対応します。他のスカラー場はゲージ変換のパラメータに対応します。$N = 4$ ではもう少し登場人物が多くなります。それで符号がとれます。

それを見るため、

$$s = u^2 - a \tag{4.57}$$

となっているような例を考えます。簡単のため、積分は有限次元です。そうすると、$s = 0$ のとき

$$\begin{cases} a > 0 \text{ のとき} \quad u = \pm\sqrt{a} \quad (\ \mathrm{sign}\left(\dfrac{\partial s}{\partial u}\Big|_{u=\pm\sqrt{a}}\right) = \pm 1 \quad \text{複号同順}) \\ a < 0 \text{ のとき} \quad \text{解なし} \end{cases} \tag{4.58}$$

となりますので、分配関数は、

$$Z = \sum_{u=\pm\sqrt{a}} \mathrm{sign}\left(\frac{\partial s}{\partial u}\right) = +1 + (-1) = 0 \tag{4.59}$$

です。これを符号なしで足したいわけですが、そこで、新たな座標 y をもってきて、

$$\begin{aligned} s_1 &= u^2 - a - y^2 \\ s_2 &= 2uy \end{aligned} \tag{4.60}$$

とします。変数を増やしたので、方程式も増やさないといけません ($\dim M = \mathrm{rank} V$) より)。そこで、$s_1 = 0, s_2 = 0$ の 2 本の条件を考えます。

さて、$s_1 = 0, s_2 = 0$ とすると、(4.60) の解は、

$$\begin{cases} a > 0 \text{ のとき} \quad y = 0, u = \pm\sqrt{a} \\ a < 0 \text{ のとき} \quad y = \pm\sqrt{a}, u = 0 \end{cases} \tag{4.61}$$

です。このとき、

$$\det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial s^1}{\partial u} & \dfrac{\partial s^1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial s^2}{\partial u} & \dfrac{\partial s^2}{\partial y} \end{pmatrix} = 4(u^2 + y^2) \tag{4.62}$$

は常に正となっています。その理由は、例えば $a > 0$ のときを見れば、$\frac{\partial s^1}{\partial u} = 2u$ と $\frac{\partial s^2}{\partial y} = 2u$ のように同じ符号を出すものが 2 つあるからです。つまり変数を増やして、方程式も増やして行列式が正となるように設定されています。

4.5 バージョン 4 ($N = 4$ 位相的場の理論)

いよいよ、TFT の話に移ります。これまでの考察を TFT に適用しましょう。バージョン 3 で変数を増やしましたが、これがちょうど $N = 4$ の状況に対応します。$N = 4$ の topological

Yang-Mills 理論の登場人物を、ゴースト数 U で分類してもう一度書きますと、

$$\begin{array}{lccccc} U=2 & \phi & & & & \\ U=1 & \psi_\mu & \widetilde{\psi}^+_{\mu\nu} & \zeta & & \\ U=0 & A_\mu & B^+_{\mu\nu} & C & H^\dagger & \widetilde{H}_\mu \\ U=-1 & \chi^+_{\mu\nu} & \widetilde{\chi}_\mu & \eta & & \\ U=-2 & \bar{\phi} & & & & \end{array} \tag{4.63}$$

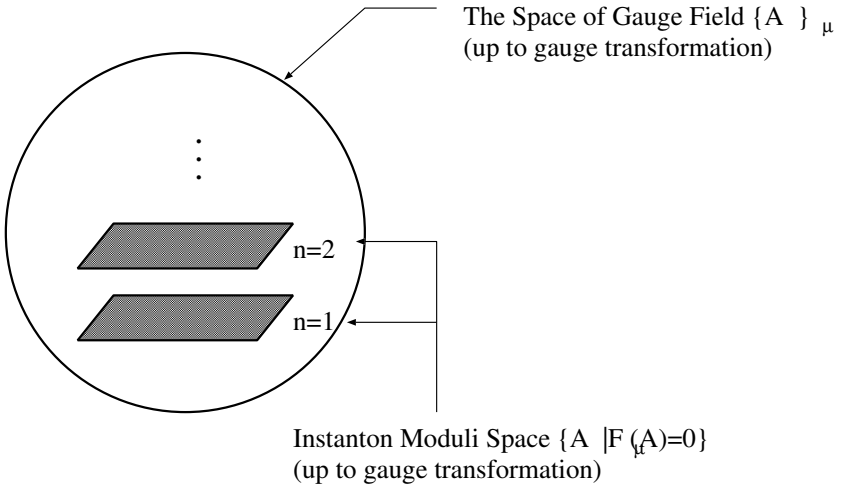
となります。$(H^\dagger, \widetilde{H}_\mu)$ は補助場です。ゴースト数が $U=j$ のものと $U=-j$ のものとは量子数が等しくなっています。こういうのを self-conjugate であるという言い方をします。この $N=4$ 理論の self-conjugate 性から、分配関数の符号がとれます。

いま多様体 M としてはゲージポテンシャル A 全体を集めたものを考えます。それで切断 s として何を持ってくるかですが、

$$s(A) = F^+(A) \tag{4.64}$$

というものを考えます。ここでは s は汎関数です。$s=F^+(A)=0$ の解は反自己双対接続です。すなわちインスタントンを表します。$s=0$ の空間というのはインスタントンのパラメーターの空間となっています。だからこれはインスタントンのモジュライ空間です。

図 10: インスタントンのモジュライ空間



あとインスタントンのパラメーターの空間に直交する空間についての積分は符号が正となるようにできています。それは認めてしまうことにすると、topological Yang-Mills 理論の分配関数は

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{n=1} \chi(\mathcal{M}_n) q^n \\ q^n &= e^{-\frac{8\pi^2 n}{g^2} + in\theta} \end{aligned} \tag{4.65}$$

となります。この重み q^n はどこから来るかといいますと、直接作用積分から来ます。

後の計算は、数学で知られた結果を使います。物理で議論できたらいいんですが、ほとんどできません。また、M としては $K3$ 曲面を取ります。このモジュライ空間の構造を調べてみます。

以下の議論は向井茂さんの仕事です [31]。まず、$K3$ 曲面上のインスタントンのモジュライ空間の次元は

$$\dim \mathcal{M}_k = 8k - \frac{3}{2}(\chi + \sigma)$$

$$
\begin{aligned}
&= 8k - \frac{3}{2}(24 + (-16)) \\
&= 4(2k-3)
\end{aligned} \tag{4.66}
$$

となることが知られています。

今、インスタントン数 k を持つ $K3$ 曲面上の $SU(2)$ 束 E を考えます。$SU(2)$ 束というのは $SU(2)$ ゲージ場だと思ってください。このとき、うまい直線束 L をとって、零点の数が $2k-3$ 個となるような $H^0(M; L^{-1} \otimes E)$ の正則な切断 s がただ 1 つ存在するようにします。直線束 L というのは essential に言って $U(1)$ ゲージ場です。s は正則な波動関数のことです。これは物理でも良く知られていることです。例えば 2 次元平面上に原点中心の渦があるとして、その上でスカラー場を考えます。原点に磁束があるような状況です。そのスカラー場の運動方程式を解くと、それは原点に零点を持ちます。渦は遠心力みたいなもので、スカラー場を外に押し出します。そのため、渦度 (磁束) が n ぐらいだと、スカラー場は原点で n 位の零点を持つことになります。つまり零点の次数が磁束の強さを反映します。ここで言ってるのは、ゲージ場 $L^{-1} \otimes E$ を外場として持って来たときに、零点の数が $2k-3$ 個となるような正則波動関数がただ 1 つ存在するということです。いま $K3$ 曲面上に $2k-3$ 個の点が定まっているわけですが、その点を用いてこの束を記述することを考えます。束を動かせば点が動きますが、逆に束がどのくらい変形の自由度を持っているかというのをこの零点の動き方で追いかけます。$K3$ 曲面は 4 次元ですから 1 つの零点あたり 4 つの自由度があります。ですから、束の変形の自由度は、

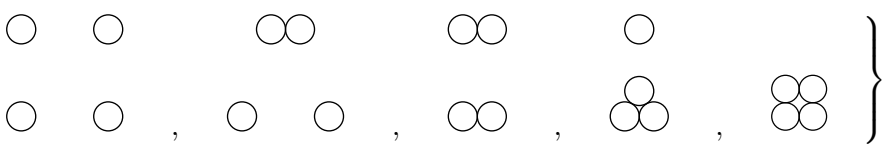
$$
4(2k-3) \tag{4.67}
$$

となり、モジュライ空間の次元と一致します。次元だけを見比べれば、$K3$ 曲面上のインスタントンのモジュライ空間は、$K3$ 曲面の $2k-3$ 個のコピーを集めたもののように思えます。数が合えばいいというものではありませんが、モジュライ空間の記述の仕方としてこういうものがちゃんとあります。そこで、$K3$ 曲面上のインスタントンのモジュライ空間は、大雑把には対称積 $(K3)^n/S_n$ の形となります。n 次の対称群 S_n で割るのは n 個の $K3$ 曲面の入れ換えについて完全対称なものを考えるという意味です。ボーズ統計を課したようなものです。ただ点と点がぶつかったところは注意しなければいけません。ぶつかったところはモジュライ空間の特異点に対応します。いま、$K3$ 曲面上のインスタントンのモジュライ空間のコホモロジー (オイラー数) を計算したいので、この特異点を解消しておく必要があります。そこで、対称積の特異点が自然に解消 (resolution) された空間を考えます。この空間は、n 点のヒルベルトスキームと呼ばれるものです [32]。記号として、

$$
\text{対称積 } X^n/S_n \overset{\text{resolution}}{\longrightarrow} \text{ヒルベルトスキーム} \widetilde{X^n/S_n} \tag{4.68}
$$

を用いることにします。普通は $\widetilde{X^n/S_n}$ と書かずに、$X^{[n]}$ と書きますが、後の説明の都合上、こう書くことにします。ヒルベルトスキーム $\widetilde{(K3)^n}/S_n$ とは、例えば $n=4$ だと、

$$
\widetilde{(K3)^4}/S_4 = \left\{ \quad , \quad , \quad , \quad , \quad \right\}
$$



ただし、例えば は $K3$ 曲面が同じ点に 4 つ重なっているものを表す。

のことです。対称積 $(K3)^n/S_n$ の場合には $K3$ 曲面が重なったものはモジュライ空間の特異点になっていますが、ヒルベルトスキームの場合には特異点をスムーズにしたものが全て含まれます。

この取り扱いはストリング理論のオービフォールドに現れるもので計算方法は良く知られています [33]。ただし厳密には Weil 予想といった抽象数学が必要です。しかし結果は非常に面白いものなので簡単に紹介します。

まず一般的な状況を考えます。X を空間とし、有限群 Γ がそれに作用しているものとします。また、ある $\gamma \in \Gamma$ の作用に対して動かない点があるとし、動かないもの全体を X^γ と書きます。また、γ と交換する Γ の元全体を N_γ と書くことにします。いまこの X^γ のコホモロジーを考えます：

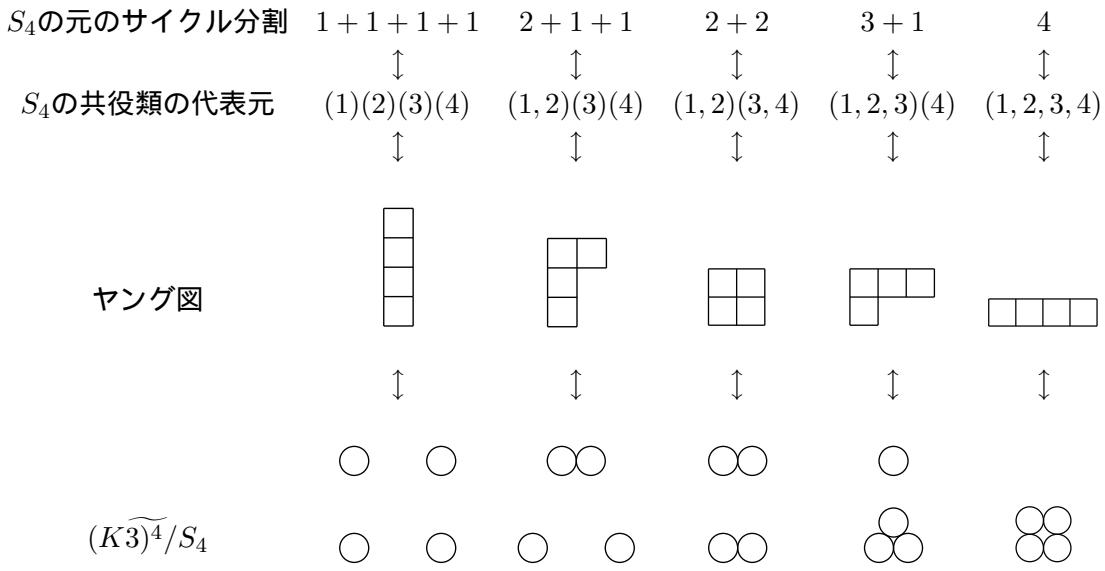
$$H^*(X^\gamma) \tag{4.69}$$

最終的にはオイラー数を計算したいわけで、ベッチ数の交代和を計算することになりますから、まずこういうもののコホモロジーを考えます。それから、$H^*(X^\gamma)^{N_\gamma}$ を、X^γ のコホモロジーで、N_γ の作用のもと不変なものとし、$H_\gamma = H^*(X^\gamma)^{N_\gamma}$ と表します。そうすると、

$$H^*\left(X/\Gamma\right) = \oplus_\gamma H_\gamma \tag{4.70}$$

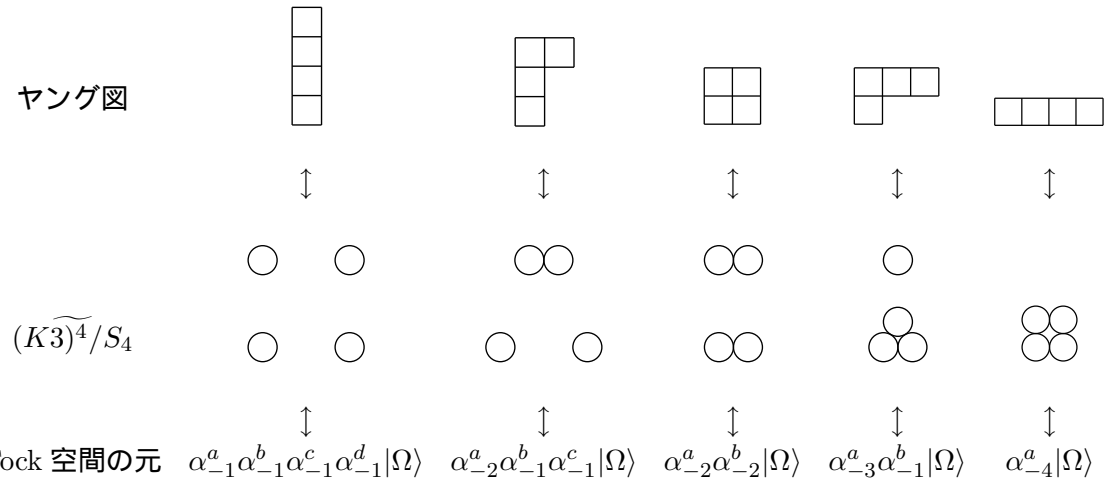
となります。直和は Γ の全ての共役類についてとります。これはどういうことかというと、γ で固定されたものの上には N_γ が働きますから、N_γ については全部対称なものだけをとってくるということです。ボーズ統計を課すようなものです。

ここで Γ が対称群 S_n だったらどうなるか考えましょう。また、空間 X としては、$(K3)^n$ を考えます。S_n の共役類は n のサイクル分割やヤング図を用いて記述することができます。例えば $n=4$ だと、



です。このヒルベルトスキームのコホモロジーの次元 $\dim H^*((K3\widetilde{)^n}/S_n)$ を計算したいのですが、

これについては生成演算子を用いた記述があります。$n=4$ の例だと、



という対応を考えます。すなわち、$K3$ 曲面が l 個重なっている点 (l サイクルと呼ぶことにしましょう) を第 l 励起状態にある 1 粒子状態と同一視します。また、$\gamma=(1,2)(3,4)$ とすると対称積は 2 サイクルが 2 個並んだ状態ですが、このとき $N_\gamma=\{(1,3)(2,4),(1,4)(2,3)\}$ です。すなわち、2 サイクル同士の置換になります。

- $N_\gamma \ni (1,3)(2,4)$:

- $N_\gamma \ni (1,4)(2,3)$:

一般には n のサイクル分割は

$$n=\sum_l l n_l \tag{4.71}$$

と書けます。n_l は l サイクルの数です。このとき N_γ は

$$N_\gamma=\prod_l N_\gamma(l) \tag{4.72}$$

となります。ここで、$N_\gamma(l)$ は l サイクルの置換全体を表します。同じ次数のサイクルを並び替えるような置換全体の集合です。また、l サイクルが n_l 個あるとき、そのコホモロジーは $H^*(K3)^{\otimes n_l}$ となります。これで、$\dim H^*((K3)^{\widetilde{n}}/S_n)$ が求まります。さらに、全ての n について考慮にいれてやると、$\alpha_{-i_1}\cdots\alpha_{-i_m}|\Omega\rangle$ $(i_1+\cdots+i_m=n)$ の形のものが各 n について登場し、それらがちょうど Fock 空間全体を張ります。コホモロジーというのは微分形式ですから、ベッチ数が偶数のものはボゾン、ベッチ数が奇数のものはフェルミオンに相当します。以上の考察によって、

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \dim H^*\left((K3)^{\widetilde{n}}/S_n\right)=\frac{\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^n)^{b_{odd}(K3)}}{\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{b_{even}(K3)}} \tag{4.73}$$

となることが分かります。分母がボゾンからの寄与で、分子がフェルミオンからの寄与です。なお一般的な式としては、Göttsche の公式というものがあり [34]、ブレーンを用いたブラックホールのエントロピーの計算でよく知られています：

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n P_t(X^{\widetilde{n}}/S_n)=\frac{\prod_{m=1}^{\infty}(1+t^{2m-1}q^m)^{b_1(X)}(1+t^{2m+1})^{b_3(X)}}{\prod_{m=1}^{\infty}(1-t^{2m-2}q^m)^{b_0(X)}(1-t^{2m}q^m)^{b_2(X)}(1-t^{2m+2}q^m)^{b_4(X)}} \tag{4.74}$$

ただし、$P_t(X)$ は Poincaré 多項式で

$$P_t(X) = \sum_{i=0}^{\dim X} b_i(X) t^i \tag{4.75}$$

です。例えば、

$$P_1(X) = \sum_{i=0}^{\dim X} b_i(X) = \dim H^*(X) \tag{4.76}$$

$$P_{-1}(X) = \sum_{i=0}^{\dim X} (-1)^i b_i(X) = \chi(X) \tag{4.77}$$

です。Göttsche の公式 (4.74) において、$X = K3$、$t = 1$ とすると、式 (4.73) が得られます。

結局、求めたかった分配関数 (4.65) は、

$$\begin{aligned} Z(\tau) &= \sum_{n=0}^{\infty} q^n \chi\left(\mathcal{M}_n\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} q^n \chi\left(\widetilde{(K3)^n}/S_n\right) \\ &= \frac{\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{b_{odd}(K3)(=0)}}{\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{b_{even}(K3)(=1+22+1)}} \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-q^n)^{24}} \end{aligned} \tag{4.78}$$

となります。これはボゾニック · ストリングの分配関数と大体同じ形をしています。$G(\tau)$ という量を

$$G(\tau) = \frac{1}{q} Z(\tau) = \frac{1}{q \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24}} \tag{4.79}$$

で定義すると、これは Dedekind の η 関数で書けます：

$$\begin{aligned} G\left(\tau\right) &= \frac{1}{\eta(\tau)^{24}} \\ \eta(\tau) &= q^{\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n) \end{aligned} \tag{4.80}$$

Dedekind の η 関数はいい保型性を持っていて、

$$G(-\frac{1}{\tau}) = \left(\frac{\tau}{i}\right)^{-\frac{\chi(M)}{2}} G(\tau) \tag{4.81}$$

$$\eta\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \left(\frac{\tau}{i}\right)^{\frac{1}{2}} \eta(\tau) \tag{4.82}$$

が成り立ちます。ここから $Z_M(\tau)$ を導くにはもう少し議論が必要ですが、省略します。詳しい議論については原論文 [25] を御覧下さい。最終的には、

$$Z_M\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \left(\frac{\tau}{i}\right)^{-\frac{\chi(M)}{2}} Z_M(\tau) \tag{4.83}$$

が言えて、S-duality 予想 (4.28) が成り立つことが確かめられます。

$K3$ 曲面以外の多様体については議論が難しくなるので、$\mathbf{CP}^2$ や ALE 空間についてのみ同様の議論がなされている程度です。この場合には厳密な意味の S-duality は成り立たなくなり、τ だけでなく $\bar{\tau}$ も入ってきます。いわゆる正則アノマリー (holomorphic anomaly) と呼ばれているものです。このようなものについてはまだまだ良く分かっていないのが現状だと言えます。

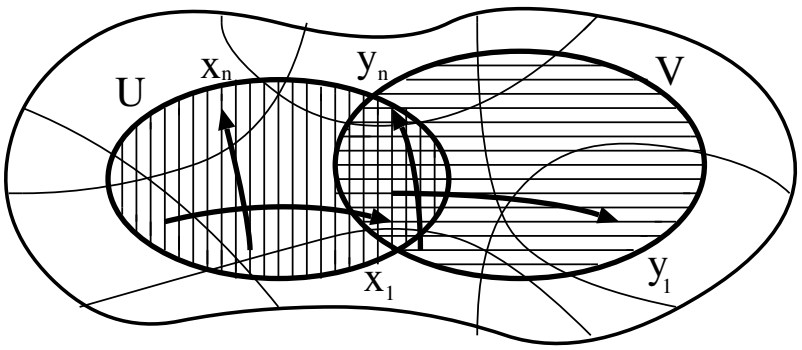
A　複素幾何学

この付録では、複素幾何学の基本的な話をします。数学的厳密性や細部にはこだわらずに、直観的概念と結果について議論したいと思います。それぞれの内容について、その都度参考文献を挙げていきますので、詳しいことを知りたい人はそちらを参照して下さい。物理学者向けの幾何学全般の本や解説としては [35] があります。

A.1　多様体

まず多様体 (manifold) の話から始めます [36]。n 次元多様体 M というのは大雑把に言って、M のどの点においても、その付近が n 次元ユークリッド空間のように見える空間のことです。局所的に座標 (n 成分) が描けるような空間のことです：

図 11: n 次元多様体 M (パッチ U, V にそれぞれ局所座標 $(x_1, x_2, \cdots, x_n), (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ が入っている。)



M の開集合 U とそこに書かれた局所座標 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ を合わせてパッチという言い方をします。パッチ同士の交わりには座標変換の式が定まります。パッチ (布切れ) を座標変換の式にしたがって貼り合わせた (縫い合わせた) ものが多様体です。座標変換の式を全てのパッチ間で連続であるようにできるとき M を位相多様体といい、微分可能であるようにできるとき M を微分可能多様体といい、正則であるようにできるとき M を複素多様体と言います。

多様体というのは、幾何学の舞台です。この上にさまざまな幾何構造を入れることによって、幾何学的な性質を調べるということをします：

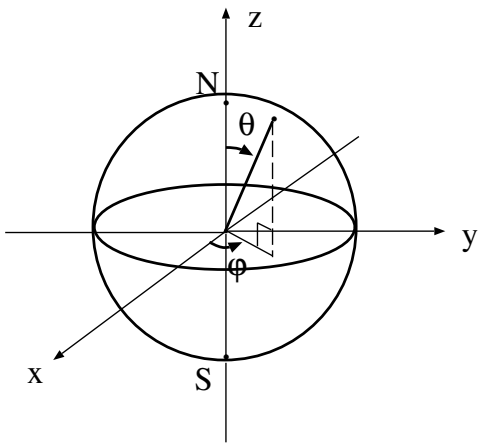
<u>複素幾何学</u>

hyper Kähler 多様体
↑
Kähler 多様体
↑
Hermite 多様体
↑
複素多様体
↑
<u>シンプレクティック幾何学</u>[37] ← 概複素多様体 → <u>リーマン幾何学</u>[38]
↑
微分可能多様体
↑
位相多様体

今回扱うのはこの表の、複素多様体、Kähler 多様体、hyper Kähler 多様体といったきれいな構造を持ったものです。他のものについて興味がある方は参考文献を御覧下さい。特に最近はシンプレクティック多様体といった、比較的粗い構造の多様体も量子コホモロジーの話などでよく顔を出します。

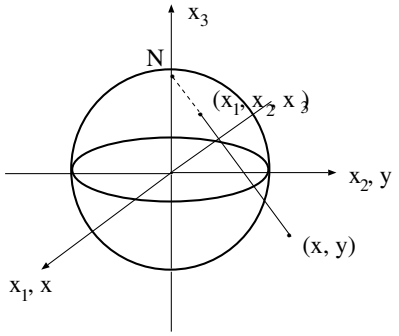
簡単な例として、2 次元球面 S^2 に実際に局所座標を入れてみます。2 次元球面は $S^2 = \{ (x_1, x_2, x_3) \mid (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 = 1 \}$ で表されるものです：

図 12: 2 次元球面 S^2



2 次元球面に入れる座標としては、極座標 (θ, φ) が良く知られていますが、これは局所座標ではありません。なぜなら、北極 $N(0,0,1)$ を指定する (θ, φ) が一意でなく $\theta = 0, \varphi =$ 不定 となってしまうからです。南極 $S(0,0,-1)$ についても同様です。ですから、このような座標の入れ方では、正確な議論ができません。そこで、用いられるのが立体射影の方法です。まず、$U = S^2 - \{N\}$ に対して、次のような方法で局所座標 (x, y) を導入します：

図 13: パッチ $U = S^2 - \{N\}$ への局所座標 (x, y) の導入

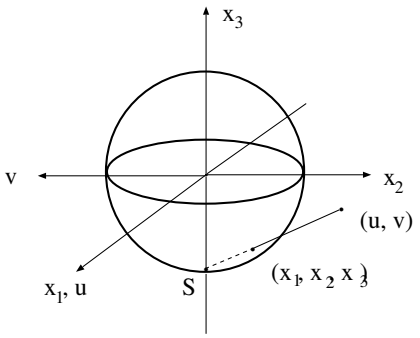


(x, y) と (x_1, x_2, x_3) との関係は次のようになります:

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, x_3) &= \left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{2y}{1+x^2+y^2}, \frac{x^2+y^2-1}{1+x^2+y^2}\right) \\ (x, y) &= \left(\frac{x_1}{1-x_3}, \frac{x_2}{1-x_3}\right) \end{aligned} \tag{A.1}$$

これで、$U = S^2 - \{N\}$ に対して局所座標が入ったわけですが、北極 N に対しては局所座標が入っていません。そこで今度は $V = S^2 - \{S\}$ に対して、次のような方法で局所座標 (u, v) を導入します：

図 14: パッチ $V = S^2 - \{S\}$ への局所座標 (u, v) の導入 (v 軸の向きは敢えてこのように取っている。v 軸を x_2 軸と同じ向きに取ると、パッチ U と V の貼り合わせの式 (A.6) が $w = 1/\bar{z}$ と反正則になってしまう。)



(u, v) と (x_1, x_2, x_3) との関係は次のようになります:

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, x_3) &= \left(\frac{2u}{1+u^2+v^2}, \frac{-2v}{1+u^2+v^2}, \frac{1-u^2-v^2}{1+u^2+v^2}\right) \\ (u, v) &= \left(\frac{x_1}{1+x_3}, \frac{-x_2}{1+x_3}\right) \end{aligned} \tag{A.2}$$

この 2 枚のパッチ U, V で 2 次元球面 S^2 の全ての点に対して局所座標を入れることができました。パッチが 2 枚あるので、$U \cap V = S^2 - \{N, S\}$ の同じ点に対して、U と V とで異なる局所座標の値がラベルされることになります。例えば、点 $(x_1, x_2, x_3) = (0, 1, 0)$ は U では $(x, y) = (0, 1)$ で、

V では $(u,v)=(0,-1)$ です。具体的に、U での局所座標 (x,y) と V での局所座標 (u,v) との間の座標変換の式は、式 (A.1)、(A.2) より

$$\begin{aligned}(x,y) &= \left(\frac{u}{u^2+v^2},\frac{-v}{u^2+v^2}\right)\\ (u,v) &= \left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{-y}{x^2+y^2}\right)\end{aligned} \tag{A.3}$$

となります。

2 次元球面 S^2 は式 (A.3) より 2 次元の微分可能実多様体ですが、実は 1 次元の複素多様体にもなっています。実際、$z=x+iy, w=u+iv$ と書けば、式 (A.1)(A.2) より、

$$\begin{aligned}z &= \frac{x_1+ix_2}{1-x_3}\\ w &= \frac{x_1-ix_2}{1+x_3}\end{aligned} \tag{A.4}$$

となりますが、

$$(x_1)^2+(x_2)^2+(x_3)^2=1 \iff \frac{x_1+ix_2}{1-x_3}=\frac{1+x_3}{x_1-ix_2} \tag{A.5}$$

より、

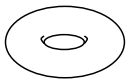
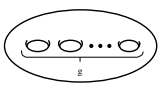
$$w=\frac{1}{z} \tag{A.6}$$

となります。これは、$U\cap V=S^2-\{N,S\}$ において正則です。2 次元球面を複素多様体としてみたとき、リーマン球面 (Riemann Sphere) と呼ぶことがあります。

貼り合わせが正則だという条件は厳しく、複素多様体になり得る偶数次元の微分可能多様体はかなり限られます。これから 1、2 次元の複素多様体について、お話したいと思います。普通は層コホモロジーや因子の定義からちゃんとやっていくところですが、ここでは微分形式やベクトル場を具体的に取り扱って、その都度、用語の説明をしていくというスタイルにしたいと思います。厳密な取り扱いについては [39] を御覧下さい。

A.2 1 次元複素多様体

まずは、1 次元複素多様体の話ですが、1 次元複素多様体はリーマン面 (Riemann Surface) とも呼ばれていて、トポロジー的には種数 g (穴の数) で分類されます：

種数	図	例
$g=0$		1 次元複素射影空間 $\mathbf{CP}^1$
$g=1$		2 次元トーラス $\mathbf{T^2}$
$g\geq 2$		g 人乗り浮き輪Σ_g

種数が 0 のものと種数が 1 のものは特別で、種数が 2 以上のものと性質が違います。この辺から議論したいと思います。

1. 1 次元複素射影空間 $\mathbf{CP}^1$

   さっき議論したようにトポロジカルには球面と同じです。変換関数は

   $$z = \frac{1}{w} \tag{A.7}$$

   でしたので、基本的な関係として

   $$dz = d\left(\frac{1}{w}\right) = -\frac{1}{w^2}dw \tag{A.8}$$

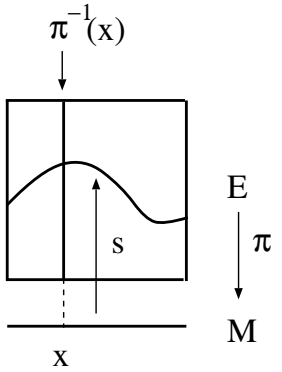
   が得られます。

   まずは、1 次微分形式を考えます：

   $$\omega = f_z(z)dz = \tilde{f}_w(w)dw \tag{A.9}$$

   これは、標準束 (canonical bundle) の切断を考えていることになります。標準束というのは、n 次元複素多様体だったら、$(n,0)$ 次微分形式が多様体の各点に乗っかっているものです。その切断とは、大域的な (多様体全体で定義された) $(n,0)$ 次微分形式という意味です。一般に切断と言ったら、波動関数を思い浮かべればいいです (図 15参照)。

   図 15: ファイバー束 $E \xrightarrow{\pi} M$ の切断 s

   式 (A.8) を、式 (A.9) に代入すると、

   $$f_z(z) = -w^2\tilde{f}_w(w) \tag{A.10}$$

   が得られます。ですから違うパッチに移ると $-w^2$ という重みが掛かります。関数 (0 次微分形式) には重みが掛かりません。

   ベクトル場については、

   $$X = f^z(z)\frac{\partial}{\partial z} = \tilde{f}^w(w)\frac{\partial}{\partial w} \tag{A.11}$$

   より、同様にして、

   $$f^z(z) = \frac{dz}{dw}\tilde{f}^w(w) = -\frac{1}{w^2}\tilde{f}^w(w) \tag{A.12}$$

となり、今度は $-\frac{1}{w^2}$ という重みが掛かります。

さてここで、至るところ (多様体全体で) 正則な 1 次微分形式、ベクトル場について考えましょう。これらは、$z=0$ のまわりのパッチ U では、

$$z^k dz \quad k \geq 0 \quad : \text{正則な 1 次微分形式} \tag{A.13}$$

$$z^l \frac{\partial}{\partial z} \quad l \geq 0 \quad : \text{正則なベクトル場} \tag{A.14}$$

と書けます。変換則 (A.8)、(A.12) を用いると、

$$z^k dz = -w^{-k-2} dw \tag{A.15}$$

$$z^l \frac{\partial}{\partial z} = -w^{-l} w^2 \frac{\partial}{\partial w} = -w^{2-l} \frac{\partial}{\partial w} \tag{A.16}$$

となることが分かります。この式の右辺は $w=0$ のまわりのパッチ V での表式です。これらが至るところ正則であるためには、$w=0$ のまわりのパッチ V でも正則でなければならないので、

$$k \geq 0,\ -k-2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{そのような } k \text{ は存在しない} \tag{A.17}$$

$$l \geq 0,\ 2-l \geq 0 \quad \Rightarrow \quad l = 0,1,2 \tag{A.18}$$

が得られます。すなわち、至るところ正則な 1 次微分形式はなく、至るところ正則なベクトル場は $l=0,1,2$ の場合の 3 つだということです。このことを記号で、

$$\dim H^0(\mathbf{CP}^1; [K]) = 0 \tag{A.19}$$

$$\dim H^0(\mathbf{CP}^1; [-K]) = 3 \tag{A.20}$$

と表します。$[K], [-K]$ は切断の変換性の指定です。一般に $[mK]$ ($m \in \mathbf{Z}_{>0}$) と書いたときは切断が m 次微分であることを意味し、$[-mK]$ ($m \in \mathbf{Z}_{>0}$) と書いたときは切断がベクトル場の m 階テンソルであることを意味します。H^0 の 0 は切断がいたる所正則という意味です。

ここで出て来た 3 つの正則なベクトル場は共形場理論で良く知られたものです。ビラソロ代数の生成子 L_n は次のような座標変換を引き起こす演算子で、

$$L_n \ : \ z \to z + \varepsilon z^{n+1} \frac{\partial}{\partial z} \tag{A.21}$$

z を z^{n+1} だけずらすという変換ですが、この z^{n+1} に着目すると、上の 3 つは L_{-1},L_0,L_{+1} に対応します。これは実は $SL(2,\mathbf{C})$ 変換の生成子になっていて、球面の持ってる invariance を表しています。

あと degree の話をしないといけません。degree とは何かと言いますと、大雑把に言って波動関数 (切断) の零点の数のことです：

$$\deg(\Sigma; [mK]) = [mK] \text{ の変換性を持つ波動関数の零点の個数} \tag{A.22}$$

例えば、さっきの 3 つの正則なベクトル場については、

$$\begin{aligned}
1 \cdot \frac{\partial}{\partial z} &= -w^2 \frac{\partial}{\partial w} \ : \ z=\infty\ (w=0) \text{ で 2 次の零} \\
z \frac{\partial}{\partial z} &= -w \frac{\partial}{\partial w} \ : \ z=0\ (w=\infty),\ z=\infty\ (w=0) \text{ で 1 次の零} \\
z^2 \frac{\partial}{\partial z} &= -1 \cdot \frac{\partial}{\partial w} \ : \ z=0\ (w=\infty) \text{ で 2 次の零}
\end{aligned} \tag{A.23}$$

より、

$$\begin{aligned}\deg(\mathbf{CP}^1;[-K]) &= [-K]\text{ の変換性を持つ波動関数の零点の個数} \\ &= 2 \end{aligned} \tag{A.24}$$

となります。個数を決める際には、零点の次数の重みをつけて足し上げます。(A.23) の例を見ても分かるように、degree というのは変換性が同じであればどの正則なベクトル場を見ても同じです。変換性を指定したときに零点が何個あるかというのが固有の情報になってきます。

また記号として、

$$h^{1,0}(\Sigma) = \dim H^0(\Sigma;[K]) \tag{A.25}$$

と書くことにします。$h^{p,q}$ については後で説明します (71 ページ参照)。1 次元射影空間については、

$$h^{1,0}(\mathbf{CP}^1) = 0 \tag{A.26}$$

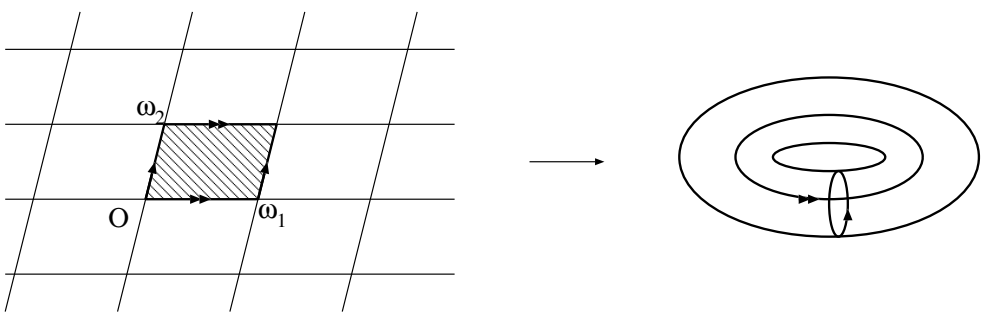
です。この $h^{1,0}$ は種数 g と一致します：

$$h^{1,0}(\Sigma_g) = g \tag{A.27}$$

2. 2 次元トーラス $\mathbf{T}^2$

トーラスの場合はまた感じが違います。トーラスは次のように作ります：

図 16: 2 次元トーラス $\mathbf{T}^2$



同一視 $z \sim w \Leftrightarrow {}^{\exists}m,n \in \mathbf{Z},\ z = w + m\omega_1 + n\omega_2$ によって、この平行四辺形の上下の辺同士と左右の辺同士がひっついてトーラスができ上がります。

まず 1 次微分形式を考えましょう。1 次微分形式の変換は

$$dz = dw \tag{A.28}$$

なので、標準束はトリビアルです。これがトーラスの特徴です。また正則な (極を持たない) 切断がいくつあるかですが、2 重周期関数は極と零点の個数が等しいので、至るところ正則な切断は定数のものしかありません。したがって

$$h^{1,0}(\mathbf{T}^2) = \dim H^0(\mathbf{T}^2;[K]) = 1 \tag{A.29}$$

となります。(A.27) から、$g = 1$ ということになります。また、零点がないので degree は 0 です：

$$\deg(\mathbf{T}^2; [K]) = 0 \tag{A.30}$$

ベクトル場についても、変換はトリビアルですから、

$$\dim H^0(\mathbf{T}^2; [-K]) = 1 \tag{A.31}$$

$$\deg(\mathbf{T}^2; [-K]) = 0 \tag{A.32}$$

となります。

まとめますと、コンパクトな 1 次元の複素多様体については

コンパクトな 1 次元の複素多様体	種数 $g = h^{1,0}$	$\deg(K)$
$\mathbf{CP}^1$	0	−
$\mathbf{T^2}$	1	0
Σ_g ($g \geq 2$)	g	$2g-2$

となります。

それからあと活躍するものとしては、エネルギー運動量テンソル (ストレス·テンソル) $T_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu = 1, 2)$ があります。エネルギー運動量テンソルは、添字について対称 $(T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu})$ です。また、保存則と traceless の条件

$$\partial_\mu T_{\mu\nu} = 0 \quad (\ \nu = 1, 2\ ) \tag{A.33}$$

$$T_\mu{}^\mu = 0 \tag{A.34}$$

を用いると、

$$\begin{aligned} \partial_1 T_{11} + \partial_2 T_{21} &= 0 \\ \partial_1 T_{12} + \partial_2 T_{22} &= \partial_1 T_{12} - \partial_2 T_{11} = 0 \end{aligned} \tag{A.35}$$

となり、$T_{zz} \equiv T_{11} - iT_{12}$ は z の正則関数、$T_{\bar{z}\bar{z}} \equiv T_{11} + iT_{12}$ は $\bar{z}$ の正則関数となることが分かります。正則成分 T_{zz} については、正則な座標変換 $z \to w = w(z)$ の下で、

$$T_{zz}(z)(dz)^2 = T_{ww}(w)(dw)^2 \tag{A.36}$$

と変換します。したがって T_{zz} は 2 次微分になります。このようなものの中で至るところ正則なものはいくつあるかですが、実は、

$$\dim H^0(\Sigma_g; [2K]) = 3g - 3 \tag{A.37}$$

となることが知られています。一般には、

$$\dim H^0(\Sigma_g; [mK]) = (2m-1)(g-1) \quad m \geq 1 \tag{A.38}$$

が成り立ちます。特に $g = 1$ のときはつねに 0 です。この辺の話はゴースト数アノマリーと関係します。弦理論に現れる b, c ゴーストの変換性はそれぞれ $[2K], [-K]$ です。ですからラグランジアンを作るときには次のような恰好になります。

$$c^z \partial_{\bar{z}} b_{zz} \tag{A.39}$$

これを、$dz\wedge d\bar{z}$ で積分するとスカラー量になります。運動方程式は

$$\begin{aligned}\partial_{\bar{z}} b_{zz} &= 0 \\ \partial_{\bar{z}} c^{z} &= 0\end{aligned} \tag{A.40}$$

となります。このとき、

$$\begin{aligned}b \text{ の零モードの数} &= \dim H^0(\Sigma_g;[2K]) \\ c \text{ の零モードの数} &= \dim H^0(\Sigma_g;[-K])\end{aligned} \tag{A.41}$$

ですが、この差が重要となってきます。指数定理によれば、

$$\dim H^0(\Sigma_g;[2K]) - \dim H^0(\Sigma_g;[-K]) = 3g-3 \tag{A.42}$$

が成り立ちます。一般には

- **Riemann-Roch の定理**

$$\dim H^0(\Sigma_g;[D]) - \dim H^0(\Sigma_g;[K-D]) = \deg(D) - g + 1 \tag{A.43}$$

があり、これから上式が導かれます。

A.3　2 次元複素多様体

次に 2 次元複素多様体 (複素曲面) の話に移ります [40]。分類を大雑把に書きましょう：

$-K$ が ample (豊富)	$\mathbf{CP}^2$, ruled surface 等
$K=0$	$K3$, T^4
K が ample	general type

2 次元複素多様体の標準束については、

$$f dz_1 \wedge dz_2 = \tilde{f} dw_1 \wedge dw_2 \tag{A.44}$$

を考えることになります。

1. 2 次元複素射影空間 $\mathbf{CP}^2$
   1 次元複素射影空間のときは、立体射影の方法で局所座標近傍を導入しましたが、今度は斉次座標を用いて、局所座標近傍を導入します。まず 3 つの複素数

   $$(z_0, z_1, z_2) \in \mathbf{C}^3 - \{0\} \tag{A.45}$$

   を用意して、

   $$(z_0 : z_1 : z_2) = (w_0 : w_1 : w_2) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} {}^{\exists}\lambda \in \mathbf{C}^{\times}\ ,\ (w_0, w_1, w_2) = (\lambda z_0, \lambda z_1, \lambda z_2) \tag{A.46}$$

   という同一視を行います。$(z_0 : z_1 : z_2)$ を斉次座標といいます。この斉次座標全体が 2 次元複素射影空間 $\mathbf{CP}^2$ です：

   $$\mathbf{CP}^2 = \{(z_0 : z_1 : z_2)\} \tag{A.47}$$

パッチとしては

$$U_0 \ : \left\{ \left(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0} \right), z_0 \neq 0 \right\} \tag{A.48}$$

$$U_1 \ : \left\{ \left(\frac{z_0}{z_1}, \frac{z_2}{z_1} \right), z_1 \neq 0 \right\} \tag{A.49}$$

$$U_2 \ : \left\{ \left(\frac{z_0}{z_2}, \frac{z_1}{z_2} \right), z_2 \neq 0 \right\} \tag{A.50}$$

をとることができます。さっきの $\mathbf{CP}^1$ について、このような表し方をすると、

$$\mathbf{CP}^1 \ = \{(z_0 : z_1)\} \tag{A.51}$$

$$(z_0 : z_1) = (w_0 : w_1) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} {}^\exists\lambda \in \mathbf{C}^\times \ , \ (w_0, w_1) = (\lambda z_0, \lambda z_1)$$

$$U_0 \ : \ \left\{ \frac{z_1}{z_0}, z_0 \neq 0 \right\} \tag{A.52}$$

$$U_1 \ : \ \left\{ \frac{z_0}{z_1}, z_1 \neq 0 \right\} \tag{A.53}$$

となります。$z = \frac{z_1}{z_0}$, $w = \frac{z_0}{z_1}$ と書けば、座標変換の式は、

$$z = \frac{1}{w} \tag{A.54}$$

となりますので、さっきの $\mathbf{CP}^1$ の定義と一致することが分かります。N 次元複素射影空間 $\mathbf{CP}^N$ についても同様に、

$$\mathbf{CP}^N \ = \{(z_0 : \cdots : z_N)\} \tag{A.55}$$

$$(z_0 : \cdots : z_N) = (w_0 : \cdots : w_N) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} {}^\exists\lambda \in \mathbf{C}^\times \ , \ (w_0, \cdots, w_N) = (\lambda z_0, \cdots \lambda z_N)$$

$$U_i \ : \ \left\{ \left(\frac{z_0}{z_i}, \cdots, \frac{z_N}{z_i} \right), z_i \neq 0 \right\} (i = 0, \cdots, N) \tag{A.56}$$

のように定義されます。

次に胞体分割を考えます。まず $\mathbf{CP}^1$ の胞体分割は、パッチ U_0 (式 (A.52)) に着目して、

$$\begin{aligned} \mathbf{CP}^1 \ &\simeq \ \underbrace{\mathbf{C}}_{z_0 \neq 0} \cup \underbrace{\{\infty\}}_{z_0 = 0} \\ &\simeq \ \mathbf{C}^1 \oplus \mathbf{C}^0 \end{aligned} \tag{A.57}$$

となることが分かります。$z \neq 0$ のところは U_0 で覆い、$z_0 = 0$ のところに一点を加えれば $\mathbf{CP}^1$ になるということです。同様に $\mathbf{CP}^2$ についても、パッチ U_0(式 (A.48)) に着目して、

$$\begin{aligned} \mathbf{CP}^2 \ &\simeq \ \underbrace{\mathbf{C}^2}_{z_0 \neq 0} \cup \underbrace{\mathbf{CP}^1}_{z_0 = 0} \\ &\simeq \ \mathbf{C}^2 \oplus \mathbf{C}^1 \oplus \mathbf{C}^0 \end{aligned} \tag{A.58}$$

となることが分かります。N 次元複素射影空間 $\mathbf{CP}^N$ の胞体分割も同様に、

$$\mathbf{CP}^N \simeq \mathbf{C}^N \oplus \cdots \oplus \mathbf{C}^1 \oplus \mathbf{C}^0 \tag{A.59}$$

となります。基本的には $\mathbf{C}^N$ なんですが、縁のところに落ちこぼれがあるので、順次、飾り $\mathbf{C}^j$ $(j < N)$ をつけてコンパクト化するという感じです。

次に $\mathbf{CP}^2$ の標準束を考えましょう。$\mathbf{CP}^2$ は複素 2 次元の多様体なので、複素の面要素を考えることになります。パッチ U_0, U_1 で、

$$\begin{aligned} U_0 \quad &: \quad d\left(\frac{z_1}{z_0}\right) \wedge d\left(\frac{z_2}{z_0}\right) = \frac{1}{z_0^3}(z_0 dz_1 \wedge dz_2 - z_1 dz_0 \wedge dz_2 + z_2 dz_0 \wedge dz_1) \\ U_1 \quad &: \quad d\left(\frac{z_0}{z_1}\right) \wedge d\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = \frac{-1}{z_1^3}(z_0 dz_1 \wedge dz_2 - z_1 dz_0 \wedge dz_2 + z_2 dz_0 \wedge dz_1) \end{aligned} \tag{A.60}$$

となりますので、それらの関係は、

$$d\left(\frac{z_1}{z_0}\right) \wedge d\left(\frac{z_2}{z_0}\right) = \left(\frac{z_1}{z_0}\right)^3 d\left(\frac{z_0}{z_1}\right) \wedge d\left(\frac{z_2}{z_1}\right) \tag{A.61}$$

となります。degree については

$$\deg(\mathbf{CP}^2; [-K]) = 3 \tag{A.62}$$

となります。

なお、$\deg(M; [-K])$ を 1st Chern class といい $c_1(M)$ と書きます。一般に射影空間については、

$$c_1(\mathbf{CP}^N) = N + 1 \tag{A.63}$$

となります。それで 1st Chern class が何故重要かといいますと、これが多様体 M をターゲットにする非線形シグマ模型の (1-loop の) ベータ関数の係数 b_0 になっているからです:

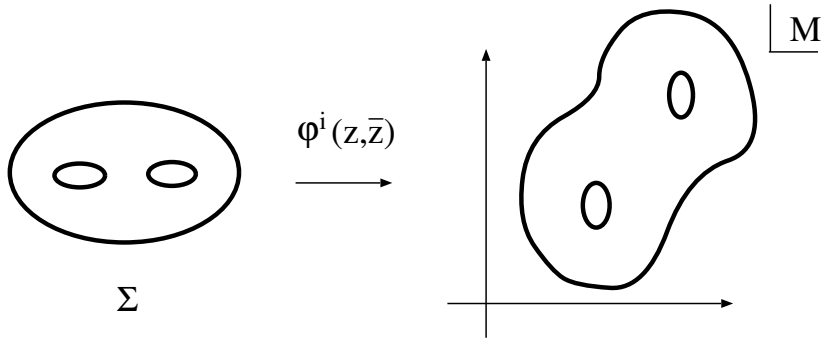
$$b_0 = -c_1(M) \tag{A.64}$$

非線形シグマ模型というのは、リーマン面 Σ から標的空間 (target space) M への写像 $\varphi^i(z, \bar{z})$ $(i = 1, \cdots, \dim M)$ を用意して、ラグランジアンを

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \quad &= \quad \frac{1}{2} g^{ij}(\varphi) \partial_z \varphi^i \partial_{\bar{z}} \varphi^j \\ g_{ij} \quad &: \quad \text{標的空間上の計量} \end{aligned} \tag{A.65}$$

で与える理論のことです (図 17参照):

図 17: 非線形シグマ模型



標的空間として $\mathbf{CP}^1$ や $\mathbf{CP}^2$ をとると b_0 が負になりますので QCD 的な理論となります。1st Chern class が零になる場合は特別で、理論に発散がなくスケール不変性があります。

1st Chern class で 2 次元複素多様体を分類すると次のようになります：

$c_1 > 0$ ($-K$ が ample)	$\mathbf{CP}^2$, ruled surface 等
$c_1 = 0$ ($K = 0$)	$K3$, T^4
$c_1 < 0$ (K が ample)	general type

A.4 コホモロジー理論

次にコホモロジー論の話をします [41]。とりあえず微分可能多様体 M のコホモロジー論の話に限定します。これは de Rham 理論と呼ばれているものです。まず M 上で微分形式を考えましょう。p 次の微分形式の住む空間を $\Omega^p(M)$ と書きましょう。外微分 d は p 次の微分形式を $p+1$ 次の微分形式にうつす作用素で、具体的には次のように定義されます：

$$\begin{aligned} d &: \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M) \\ d\omega &= d(\omega_{i_1,\cdots,i_p}(x)dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}) \\ &= \partial_j \omega_{i_1,\cdots,i_p}(x)dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \end{aligned} \tag{A.66}$$

外微分は 2 回やると 0 になります：

$$d^2 = 0 \tag{A.67}$$

これは、ベクトル解析でおなじみの恒等式 div·rot$= 0$, rot·grad $= 0$ に相当します。

性質 (A.67) によりコホモロジーが定義できます。そのために、閉形式 (closed form)、完全形式 (exact form) と呼ばれるものを説明します。なお、2 章で BRST コホモロジーの話が出て来ましたが、あのときも BRST 変換は 2 回やると 0 になりました。ですから、BRST の話もコホモロジーそのものになるのです。

閉形式 ω とは外微分 d を施すと消えるものです：

$$d\omega = 0 \tag{A.68}$$

p 次の閉形式全体を

$$Z^p(M) = \{\omega \in \Omega^p(M) \mid d\omega = 0\} \tag{A.69}$$

と表すことにします。BRST コホモロジーの文脈では、閉形式はちょうど BRST-closed な量に相当します。BRST 変換というのはフェルミオン的なゲージ変換ですので、BRST-closed な量というのはゲージ不変な量を考えていることになります。

また、p 次の完全形式は次のように定義されます：

$$B^p(M) = \left\{\omega \in \Omega^p(M) \mid \omega = d\eta, {}^{\exists}\eta \in \Omega^{p-1}(M)\right\} \tag{A.70}$$

BRST コホモロジーの文脈では、完全形式というのは、ちょうど BRST-exact な量に相当します。BRST-exact な量というのはピュアゲージになっているような量で、トリビアルな量です。

性質 (A.67) により、完全形式は閉形式です。包含関係は次のようになっています：

$$B^p(M) \subseteq Z^p(M) \subseteq \Omega^p(M) \tag{A.71}$$

これで p 次の de Rham コホモロジー $H^p(M)_{DR}$ が定義できます：

$$H^p(M)_{DR} = Z^p(M)/B^p(M) \tag{A.72}$$

閉形式を考えたいんだけれども差が完全形式になっているものは同じと思え、ということです。すなわち、

$$H^p(M)_{DR} \ni [\omega_1] = [\omega_2] \;\Leftrightarrow\; \omega_1 - \omega_2 = d\eta \quad {}^{\exists}\eta \in \Omega^{p-1}(M) \tag{A.73}$$

ということです。ω_1 と ω_2 とが $d\eta$ だけ違っていれば同じコホモロジークラスに属します。$H^p_{DR}(M)$ の元に対しては、代表元という意味で角括弧を付けて表します。BRST コホモロジーの文脈では、ゲージ不変な量を考えたいんだけれどもゲージ変換で移り合えるものは同じと思え、ということです。

ここで Poincaré (ポアンカレ) の補題という重要な定理があります：

- **Poincaré の補題**：可縮な空間 M (例えばユークリッド空間) では閉形式は完全形式になる

$$Z^p(M) = B^p(M), \quad H^p_{DR}(M) = 0 \tag{A.74}$$

電磁気学で、$\mathrm{div}\mathbf{B} = 0$ より $\mathbf{B} = \mathrm{rot}\mathbf{A}$ となる $\mathbf{A}$ が存在するという statement がありましたが、これは Poincaré の補題の一例です。可縮な空間はトポロジーがトリビアルで、そのために de Rham コホモロジーが零になります。ところが、空間のトポロジーがトリビアルでなくなってくると、閉形式の中で完全形式で書けないものが現れてきて、de Rham コホモロジーが非零になります。つまり de Rham コホモロジーが空間のトポロジーを反映してきます。その正確な内容を表しているのが de Rham の定理です：

- **de Rham の定理**：de Rham コホモロジーはホモロジーの双対空間である。

$$H^p(M)_{DR} \simeq H_p(M) \tag{A.75}$$

ホモロジーというのは、位相不変量 (空間を連続的に変形しても変わらない量) の 1 つであり、空間の大域的な情報を担っているものです。それが、微分形式で定義される de Rham コホモロジーから求まるという主張です。

ホモロジーについて説明します。de Rham コホモロジーにおける p 次微分形式に対応するのが、p チェイン (p-chain) と呼ばれるものです。p チェインとは大雑把に言って、多様体 M の p 次元部分多様体のことです。p チェイン全体を $C_p(M)$ で表すことにしましょう。外微分 d に対応するのは境界作用素 ∂ です。これは、あるチェインをその境界となっているチェインにうつすという作用で定義されます。すなわち境界をとるという作用です。この境界を取るという作用 ∂ もやはり 2 回やると 0 になります：

$$\partial^2 = 0 \tag{A.76}$$

また、p 次閉形式、p 次完全形式に対応するのが、それぞれ p サイクル (p-cycle)、p バウンダリー (p-boundary) と呼ばれるものです。それら全体の集合を

$$\begin{aligned} Z_p(M) &= \{\gamma_p \in C_p(M) \mid \partial\gamma_p = 0\} \\ B_p(M) &= \left\{\gamma_p \in C_p(M) \mid \gamma_p = \partial\gamma_{p+1}, {}^{\exists}\gamma_{p+1} \in C_{p+1}(M)\right\} \end{aligned} \tag{A.77}$$

と表します。包含関係は次のようになっています：

$$B_p(M) \subseteq Z_p(M) \subseteq C_p(M) \tag{A.78}$$

これで p 次のホモロジー群が定義できます：

$$H_p(M) = Z_p(M)/B_p(M) \tag{A.79}$$

サイクルを考えたいんだけれども、1 次元高い別のサイクルの境界になっているものはトリビアルだと思え、ということです。

さて、de Rham の定理に戻りましょう。これがどんなものかをみるために、内積を

$$\begin{aligned} < \gamma_p, \omega^p > &= \int_{\gamma_p} \omega_{i_1,\cdots,i_p} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \in \mathbf{R} \\ \gamma_p &\in C_p(M) \\ \omega_p &= \omega_{i_1,\cdots,i_p}(x) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \in \Omega^p(M) \end{aligned} \tag{A.80}$$

で定義します。この内積はホモロジークラスとコホモロジークラスのみに依ります。どうしてかといいますと、

- サイクル γ_p 上で、$d\eta^{p-1}$ だけ異なる 2 つの p 次微分形式 ω_1^p, ω_2^p を積分する場合

$$\int_{\gamma_p} \omega_1^p - \int_{\gamma_p} \omega_2^p = \int_{\gamma_p} d\eta^{p-1} = \int_{\underbrace{\partial\gamma_p}_{0}} \eta^{p-1} = 0$$

- p 次微分形式 ω^p を、差が $\partial\gamma_{p+1}$ になっている 2 つの p サイクル γ_p^1, γ_p^2 上で積分する場合

$$\int_{\gamma_p^1} \omega^p - \int_{\gamma_p^2} \omega^p = \int_{\partial\gamma_{p+1}} \omega^p = \int_{\gamma_p} \underbrace{d\omega^p}_{0} = 0$$

となるからです。よって、この内積は $H^p_{DR}(M) \times H_p(M)$ の内積として well-defined です。あと、この内積が退化しないということを示さなければいけないのですが、それが de Rham の基本定理になります。

$H^p_{DR}(M) \simeq H_p(M)$ ですから、$H^p_{DR}(M)$ の次元と $H_p(M)$ の次元が等しくなります。この次元のことをベッチ (Betti) 数と言います：

$$b_p(M) = \dim H^p_{DR}(M) = \dim H_p(M) \tag{A.81}$$

また、オイラー (Euler) 数 $\chi(M)$ はベッチ数の交代和で定義されます：

$$\chi(M) = \sum_{i=0}^{\dim M} (-1)^i b_i(M) \tag{A.82}$$

いくつか例を上げましょう。

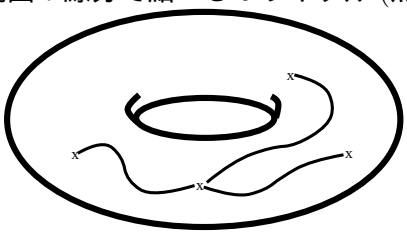
1. 2 次元トーラス $\mathbf{T}^2 \simeq S^1 \times S^1$

   - 0 次元ベッチ数 b_0
     0 サイクルというのは点のことですが、1 サイクルの境界になっている (線分で結べる) ものは同じとみなして、独立なものが何個あるかということを考えます。図 18のように、2 次元トーラス上の 2 点は線分で結べますので、独立な点は 1 つです。したがって、

     $$b_0 = 1 \tag{A.83}$$

     です。一般に、連結な空間の 0 次元ベッチ数は 1 です。

図 18: 0 サイクルの説明図：線分で結べる 0 サイクル (点) 同士は同じとみなす。



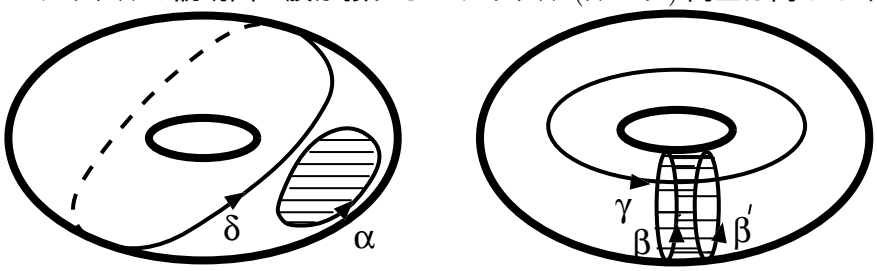
- 1 次元ベッチ数 b_1

  1 サイクルというのはループのことですが、2 サイクルの境界になっている (膜が張れる) ものは同じとみなして、独立なものが何個あるかということを考えます。図 19において、まずサイクル α は膜が張れるのでトリビアルなサイクルになります。ホモロジーの元としては 0 です。膜が張れないサイクルとしては、β, γ があります。この 2 つのサイクル β と γ の間に膜を張ることはできませんから、これらは互いに独立なサイクルです。サイクル β と β' とは間に膜が張れるので同じサイクルと思います。また、他の膜が張れないサイクルは、2 つのサイクル β と γ の合成で書けます。例えばサイクル δ は $\beta + \gamma$ のようになります。したがってベッチ数は

$$b_1 = 2 \tag{A.84}$$

  です。

図 19: 1 サイクルの説明図：膜が張れる 1 サイクル (ループ) 同士は同じとみなす。



- 2 次元ベッチ数 b_2

  2 次元トーラスにおいては 3 サイクルというものが存在しないので、2 サイクルが 3 サイクルの境界になっているということはあり得ません。独立な 2 サイクルというのは 2 次元トーラスそのものですから、ベッチ数は

$$b_2 = 1 \tag{A.85}$$

  です。

オイラー数は

$$\chi(\mathbf{T}^2) = b_0 - b_1 + b_2 = 0 \tag{A.86}$$

となります。

2. 4 次元トーラス $\mathbf{T}^4 \simeq S^1 \times S^1 \times S^1 \times S^1$
   結果だけ書きますと、ベッチ数は

$$\begin{aligned} b_0 &= 1 \\ b_1 &= 4 \\ b_2 &= 6 \\ b_3 &= 4 \\ b_4 &= 1 \end{aligned} \tag{A.87}$$

   です。4 次元トーラスというのは 4 つの S^1 の直積ですから、$b_1 = 4$ という結果は、4 つの異なる S^1 に巻き付く独立な 1 サイクルが 4 つあるということからきています。$b_2 = 6$ という結果は、6 つの異なる $S^1 \times S^1$ に巻き付く独立な 2 サイクルが 6 つあるということからきています。3 サイクルについても同様です。

   オイラー数は

$$\chi(\mathbf{T}^4) = b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + b_4 = 0 \tag{A.88}$$

   です。

3. $K3$ 曲面 [42]
   $K3$ 曲面というのは、1st Chern class が 0 で、$b_1 = 0$ (あるいは単連結) な 2 次元コンパクト複素多様体の総称です。$K3$ 曲面の例としては、Kummer 曲面というものがあります。Kummer 曲面はどうやって作るかといいますと、まず、4 次元トーラス $\mathbf{T}^4$ を持ってきて $\mathbf{Z}_2$ 作用で割ります。そのときに $2^4 = 16$ 個の特異点が出て来ますが、これをブローアップしたものが Kummer 曲面です。任意の $K3$ 曲面のいくらでも近くに Kummer 曲面が存在します。

   $K3$ 曲面のベッチ数は

$$\begin{aligned} b_0 &= 1 \\ b_1 &= 0 \\ b_2 &= 22 \\ b_3 &= 0 \\ b_4 &= 1 \end{aligned} \tag{A.89}$$

   となることが知られています。これをきちんと求めるのはここではできません。ただ、さっきの Kummer 曲面だと、$b_2 = 22$ というのは、もともとの $\mathbf{T}^4$ の部分で $b_2 = 6$、特異点をブローアップした部分が 16 個あるので $b_2 = 16$、ということから大雑把には分かります。またオイラー数は

$$\chi(\mathbf{T}^4) = b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + b_4 = 24 \tag{A.90}$$

   です。

上の例からも予想できますが、$b_{n-r} = b_r$ となっています。これは Poincaré の双対定理というものの帰結です：

- **Poincaré の双対定理**：

$$H_{n-r}(M) = H^r_{DR}(M) \quad 0 \leq r \leq n \tag{A.91}$$

これと de Rham の定理とを合わせますと

$$\begin{array}{ccc} H^r(M) & = & H^{n-r}(M) \\ \| & & \| \\ H_r(M) & = & H_{n-r}(M) \end{array} \tag{A.92}$$

が成り立ちます。

$n = 2k$ (偶数次元) のとき、中間次元の (コ) ホモロジーには特別な状況が生じます。中間次元のもの同士は一般に点でぶつかりますので、交点形式 (intersection form) が定義できます：

$$Q \ : \ H_k(M) \times H_k(M) \to \mathbf{Z} \tag{A.93}$$

k サイクルの基底を定めればこれは行列表示できます。これを交点行列といいます。特に $k = 2l$ (すなわち $n = 4l$) の時、交点行列は対称行列になります。

$K3$ 曲面では、交点行列は

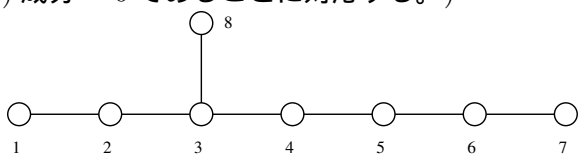
$$(-E_8) \oplus (-E_8) \oplus \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{A.94}$$

となることが知られています。E_8 と書いたのはリー群 E_8 のカルタン行列です：

E_8のカルタン行列 (空白となっている成分は全て 0)

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & & & -1 \\ & & -1 & 2 & -1 & & & \\ & & & -1 & 2 & -1 & & \\ & & & & -1 & 2 & -1 & \\ & & & & & -1 & 2 & \\ & & -1 & & & & & 2 \end{pmatrix} \tag{A.95}$$

図 20: E_8 の Dynkin 図 (Cartan 行列は Dynkin 図から再現できる。E_8 の Dynkin 図では例えば、頂点 3 と 8 は線分で結ばれおり、頂点 1 と 8 は線分で結ばれていないが、このことが Cartan 行列で (3-8) 成分 $= -1$、(1-8) 成分 $= 0$ であることに対応する。)



交点行列を対角化すると、E_8 の部分の固有値が全て正になるため、

$$\begin{aligned} b_2^+ &= 3 : \text{正の固有値の数} \\ b_2^- &= 19 : \text{負の固有値の数} \end{aligned} \tag{A.96}$$

が得られます。これで全部で 22 個です。符号数は

$$\sigma(M) = b_2^+ - b_2^- = -16 \tag{A.97}$$

となります。一般に閉 4 次元スピン多様体の符号数は 16 の倍数となります (Rohlin の定理)。なお、$K3$ 曲面で E_8 が出て来るというのがヘテロティック・ストリングで可能なゲージ群の 1 つが $E_8 \times E_8$ になるという事情に対応しています。

微分可能多様体では de Rham コホモロジーを考えましたが、複素多様体では Dolbeault コホモロジーというものを考えることができます。今度は、外微分 d の代わりに

$$\bar{\partial} = d\bar{z}^i \frac{\partial}{\partial \bar{z}^i} \tag{A.98}$$

を考えます。これも 2 回やると 0 になります。ですから de Rham コホモロジーと同様に

$$\begin{aligned} \Omega^{p,q}(M) &= \{(p,q) \text{ 形式}\} && \text{(A.99)} \\ &= \left\{\omega = \omega_{i_1,\cdots,i_p,j_1,\cdots,j_q} dz^{i_1} \wedge \cdots \wedge dz^{i_p} \wedge d\bar{z}^{j_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}^{j_q}\right\} \\ Z^{p,q}(M) &= \{\bar{\partial} - \text{閉 } (p,q) \text{ 形式}\} && \text{(A.100)} \\ &= \{\omega \in \Omega^{p,q} \mid \bar{\partial}\omega = 0\} \\ B^{p,q}(M) &= \{\bar{\partial} - \text{完全 } (p,q) \text{ 形式}\} && \text{(A.101)} \\ &= \left\{\omega \in \Omega^{p,q} \mid {}^{\exists}\eta \in \Omega^{p,q-1},\ \omega = \bar{\partial}\eta\right\} \end{aligned}$$

というものを考えます。$\bar{\partial}$ は (p,q) 形式を $(p,q+1)$ 形式にうつす作用素です：

$$\bar{\partial} : \Omega^{p,q}(M) \to \Omega^{p,q+1}(M) \tag{A.102}$$

Dolbeault コホモロジーは

$$H^{p,q}(M) = Z^{p,q}(M)/B^{p,q}(M) \tag{A.103}$$

で定義されます。また、Hodge 数を

$$h^{p,q}(M) = \dim H^{p,q}(M) \tag{A.104}$$

で定義します。Kähler 多様体の場合は

$$b^r(M) = \sum_{p+q=r} h^{p,q}(M) \tag{A.105}$$

の関係が成り立ちます。つまり、Kähler 多様体の場合にはベッチ数を正則、反正則の部分に分けることができて、より精密な議論ができます。一般に

$$h^{p,q} = h^{q,p} \tag{A.106}$$

が成り立つので、

$$b_2 = h^{2,0} + h^{1,1} + h^{0,2} = 2h^{2,0} + h^{1,1} \tag{A.107}$$

となります。$K3$ 曲面の場合は

$$b_2 = 22 \tag{A.108}$$

ですが、内訳は

$$\begin{aligned} h^{1,1} &= 20 = \left\{ \begin{array}{ll} 19 & \\ 1 & : \text{Kähler class} \end{array} \right. \\ h^{2,0} &= 1 \qquad\qquad : \text{正則 2 形式} \\ h^{0,2} &= 1 \qquad\qquad : \text{反正則 2 形式} \end{aligned} \tag{A.109}$$

となります。この Kähler class と正則 2 形式と反正則 2 形式とがさっきの $b_2^+ = 3$ に相当します。この 3 つが J_3,J_+,J_- のような役割を果たしまして hyper Kähler 多様体の特徴となります。$K3$ 曲面は hyper Kähler 多様体の代表です。hyper Kähler 多様体の例として、他には 4 次元トーラスや ALE (Asymptotically Locally Euclidian) 空間 ($K3$ 曲面の non-compact バージョン) があります。

A.5 (Hyper) Kähler 多様体

hyper Kähler 多様体について説明します。hyper Kähler 多様体には 3 つの概複素構造があります。概複素構造について少しお話をしましょう。

M をここでは $2n$ 次元実多様体とし、局所座標を

$$(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n) \tag{A.110}$$

で表します。これを n 次元の複素多様体に化かしたいとします。そこで、概複素構造を入れて $2n$ 個の座標を 2 個ずつ実部、虚部に組んで複素座標

$$(z_1, \cdots, z_n) \tag{A.111}$$

を定めるということをします。M の接空間 T_pM の基底として

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^n}, \frac{\partial}{\partial y^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial y^n}, \right) \tag{A.112}$$

を持って来ます。概複素構造 I というのはこの接空間に働く線形変換で 2 回やると -1 になるものです：

$$I^2 = -1 \tag{A.113}$$

したがって、I というのは虚数単位 i のようなものです。I をさっきの基底に作用させると

$$\begin{aligned} I_i{}^j \frac{\partial}{\partial x^j} &= \frac{\partial}{\partial y^i} \\ I_i{}^j \frac{\partial}{\partial y^j} &= -\frac{\partial}{\partial x^i} \end{aligned} \tag{A.114}$$

になるとします。なお、行列表示すると、

$$\begin{pmatrix} O & \mathbf{1}_{n\times n} \\ -\mathbf{1}_{n\times n} & O \end{pmatrix} \tag{A.115}$$

です。そうすると、

$$\begin{aligned} I_i{}^j \left(\frac{\partial}{\partial x^j} - \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y^j}\right) &= \frac{\partial}{\partial y^i} + \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial x^i} = \sqrt{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x^i} - \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y^i}\right) \\ I_i{}^j \left(\frac{\partial}{\partial x^j} + \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y^j}\right) &= \frac{\partial}{\partial y^i} - \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial x^i} = -\sqrt{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x^i} + \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y^i}\right) \end{aligned} \tag{A.116}$$

となりますので、この分解で複素座標を定めることができます：

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z^i} &= \frac{\partial}{\partial x^i} - \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y^i} \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}^i} &= \frac{\partial}{\partial x^i} + \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y^i} \end{aligned} \tag{A.117}$$

これで、局所的には複素座標を定めることができるのですが、これだけでは全てのパッチ間で貼り合わせが正則となるように、複素座標を定めることができません。それには Nijenhuis テンソルが 0 になるという条件が必要です。その議論はここでは省略します。

さて計量というのはもともと

$$\begin{aligned} g &: T_pM \times T_pM \to \mathbf{R} \\ g_{ij} &= g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \end{aligned} \tag{A.118}$$

で定義されていました。この計量が概複素構造とうまくフィットしないといけません。そこで次の条件を導入します

$$g(u,v) = g(Iu, Iv) \quad u, v \in T_pM \tag{A.119}$$

この条件を満たす計量のことをエルミート計量といいます。ここで、Kähler form

$$\omega(u,v) = g(Iu, v) \tag{A.120}$$

を定義しましょう。これは反対称です：

$$\begin{aligned} \omega(u,v) &= g(Iu, v) \\ &= -g(u, Iv) \\ &= -g(Iv, u) \\ &= -\omega(v, u) \end{aligned} \tag{A.121}$$

引き数が 2 つのベクトルで反対称ですから、これは 2 次微分形式と同一視できます。Kähler 多様体とは、この Kähler form が閉じているものです：

$$d\omega = 0 \tag{A.122}$$

これがコホモロジークラスを定めます。これを Kähler class といいます。この条件は

$$\nabla I = 0 \tag{A.123}$$

と同値であることが知られています。これが平行移動のもと概複素構造が不変だというのをあらわに表している式です。概複素構造は各点の接空間を正則、反正則の 2 つの部分に分ける分け方を指定するものですが、その分け方が多様体全体でうまく貼り合っているということです。

最後に hyper Kähler 多様体とは何かを説明します。hyper Kähler 多様体とは、平行移動のもと不変な 3 つの概複素構造 I、J、K があって

$$\begin{aligned} &I^2 = J^2 = K^2 = -1 \\ &IJ = K,\ JK = I,\ KI = J \end{aligned} \tag{A.124}$$

が成り立つ、という Kähler 多様体のことです。この 3 つの概複素構造から 3 つの Kähler form が作れます：

$$\begin{aligned} &g(Iu, v) && : \text{ Kähler class} \\ &g(Ju, v) && +\sqrt{-1}g(Ku, v) : \text{正則 2 形式} \\ &g(Ju, v) && -\sqrt{-1}g(Ku, v) : \text{反正則 2 形式} \end{aligned} \tag{A.125}$$

この 3 つがさっきの $K3$ 曲面の例にあった $b_2^+ = 3$ のものに相当します。

他の特徴は次のようなものです：

- ホロノミーが $SO(4)$ から $SU(2)$ まで落ちる
- 標準束 (Canonical bundle) がトリビアル
  すなわち
  1st Chern class = 0 (Calabi-Yau 条件)
  このとき
  no-where vanishing な正則 2 形式がただ 1 つ存在する

ホロノミーが落ちるのはどうしてかといいますと、まず、

$$\nabla_\mu I = 0 \quad \mu = 1, 2, 3, 4 \tag{A.126}$$

より、

$$\underbrace{[\nabla_\mu, \nabla_\nu]}_{\text{曲率}} I = 0 \tag{A.127}$$

となります。$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]$ が曲率を表す行列なのですが、ここで言っているのは、式 (A.127) が解を持つということ、すなわち行列のランクが落ちているということです。曲率を表す行列というのは、ベクトルを無限小のループに沿ってベクトルを平行移動して一周させたときに、元のベクトルとどれだけずれているかを表す行列です。曲率を表す行列のランクが落ちているので、ホロノミーが落ちます：

$$\begin{array}{ccc} SO(4) & \simeq & SU(2)_L \times SU(2)_R \\ \downarrow & & \\ U(2) & : & \text{Kähler 多様体} \\ \downarrow & & \\ SU(2) & : & \text{hyper Kähler 多様体} \end{array} \tag{A.128}$$

ホロノミーが $SO(4)$ から $SU(2)$ まで落ちるとどうなるかといいますと、$SO(4) \simeq SU(2)_L \times SU(2)_R$ の表現に従う場 $\Phi_{\alpha\dot{\beta}}$ の 2 つの添字のうち、片方はどうでもよくなるということです。落ちたホロノミーを $SU(2)_L$ だと思えば、$SU(2)_R$ の足 $\dot{\beta}$ は曲率を感じないのであってもなくてもよくなり、その部分だけをツイストして量子数の読み換えを行っても理論は変わらないということになります。このことにより、フィジカルな理論とトポロジカルな理論が等価になります。

講義録作成者あとがき

この講義録は、1998 年 11 月 24 ~ 27 日の 4 日間にかけて千葉大学で行われた集中講義：基礎物理学特別講義 II (講師：江口徹、題目：位相的場の理論とその周辺) に基づいて作られたものです。日程の詳細は次の通りでした。

11 月	午前	午後 (前半)	午後 (後半)
24 日		4 次元 $N = 2$	4 次元 $N = 2$
25 日	4 次元 $N = 2$	4 次元 $N = 4$	4 次元 $N = 4$
26 日	複素幾何学	複素幾何学	超対称量子力学とモース理論
27 日	位相的超弦理論 (OHP)		

最終日の位相的超弦理論のお話は最近の江口先生の研究の紹介でした [43]。

講義録の作成は私、浜中が担当しました。江口先生の講義は、終始明解で分かりやすく、多くの聴衆を魅了しました。この講義録では、その臨場感を出来るだけ失わないよう口語調にし、お話しされたことを忠実に再現するよう試みました。しかし私の力不足のため、そのほとんどが失われており、とても残念です。その代わり基本的な事柄については詳しく書き加え、また、参考文献も出来るだけ多く付けるようにしました。この講義録がこの分野に興味を持つ方々(特に学部学生や修士 1 年生) に少しでも役に立てば、私としてもとても嬉しく思います。最終日の位相的超弦理論については、私が OHP の行間を埋めることが出来ず、この講義録では省略することになりました。この話題については江口先生が集中講義などで再びお話をする機会があるそうなので、そのときに改めてまとめようと思っています。この講義録に関して御意見などございましたら、浜中にお申し付け下さい。

この講義録の作成によって、私自身、位相的場の理論の面白さ、不思議さに触れることができ、とても勉強になりました。このような機会を与えて下さり、質問や推敲にも長い時間とても親切につき合って下さった江口先生に心からお礼申し上げます。また、ツイストに関することを、何度も辛抱強く教えて下さった寺嶋靖治先輩にとても感謝しております。さらに、TEX に関すること、オービフォールドに関することなどを非常に丁寧に指導して下さり、常に激励を惜しまれなかった細道和夫先輩に深く感謝いたします。細道先輩の御指導がなかったならば、TEX 形式のこの講義録の完成はありえなかったでしょう。同輩の高柳匡君には、SUSY の基本的なことなどいろいろ教わりました。改めて、お礼申し上げます。また同輩の疋田泰章君にはパソコンのトラブルのとき何度も助けてもらいました。勉強の邪魔ばかりしてすみませんでした。その他にも大勢の方にお世話になりました。どうもありがとうございます。

最後に、講義の期間中、コーヒーの手配や OHP のコピーなどいろいろと気を配って下さった千葉大学の関係者の方々に、この場をお借りしてお礼申し上げます。

1999 年 夏

東京大学大学院理学系研究科物理学専攻
素粒子論研究室 修士 2 年
浜中 真志
e-mail : hamanaka@hep-th.phys. s.u-tokyo.ac.jp

参考文献

[1] E.Witten, *Topological Quautum Field Theory*, Comm. Math. Phys.**117** (1988)353-386

[2] A.Schwarz, *The Partition Function of Degenerate Quadratic Functional and Ray-Singer Invariants* , Lett. Math. Phys. **2** (1978) 247-252

[3] E.Witten, *Quantum Field Theory and the Jones Polynomial*, Comm. Math. Phys. **121** (1989) 351-399

[4] E.Witten, *Topological Sigma Model*, Comm. Math. Phys.**118** (1988) 411-449

[5] T.Eguchi and S.K.Yang, *N=2 Superconformal Models as Topological Field Theories*, Mod. Phys. Lett. **A4** (1990) 1693-1701

[6] 江口徹 「超対称性理論入門」, (中村誠太郎編『大学院素粒子物理 2 』 (講談社；1998) 10 章)

F.Cooper, A.Khare and U.Sukhatme, *Supersymmetry and Quantum Mechanics*, Physics Reports **251** (1995) 267-385

[7] E.B.Bogomol'nyi, *The Stability of Classical Solutions*, Sov. J. Nucl. Phys. **24** (1976) 449-454

M.K.Prasad and C.M.Sommerfield, *Exact Classical Solution for the 't Hooft Monopole and Julia-Zee Dyon*, Phys. Rev. Lett. **35** (1975) 760-762

[8] P.Fayet and J.Iliopoulos, *Spontaneously Broken Supergauge Symmetries and Goldstone Spinors*, Phys. Lett. **51B** (1974) 461-464

[9] L.O'Raifeartaigh, *Spontaneously Symmetry Breaking for Chiral Scalar Superfields*, Nucl. Phys. **B96** (1975) 331-352

[10] E.Witten, *Dynamical Breaking of Supersymmetry*, Nucl. Phys. **B188** (1981) 513-554

[11] E.Witten, *Constraints on Supersymmetry Breaking*, Nucl. Phys. **B202** (1981) 253-316

[12] E.Witten, *Supersymmetry and Morse Theory*, J. Diff. Geom. **17** (1982) 661-692

[13] J.Milnor, *"Morse Theory"*, (Princeton University Press；1963)
邦訳 ： 志賀浩二訳『モース理論 -多様体上の解析学とトポロジーとの関係-』数学叢書 **8** (吉岡書店；1968)

長野正 『大域変分法』 共立講座 現代の数学 **17** (共立出版；1971)

横田一郎 『多様体とモース理論』 (現代数学社；1978)

松本幸夫 『Morse 理論の基礎』 岩波講座 現代数学の基礎 **27** (岩波書店；1997)

服部晶夫 『いろいろな幾何 II』 岩波講座 応用数学 [基礎 **10**] (岩波書店；1993)

[14] M.Atiyah, *New Invariants of 3- and 4-Dimensional Manifolds*, Proc. of Symp. in Pure Math. **48** (1988) 285-299 , (R.O.Wells, Jr., ed. *"The Mathematical Heritage of Hermann Weyl"* (AMS；1988))

[15] A.Floer, *An Instanton-Invariant for 3-Manifolds* Comm. Math. Phys.**118** (1988) 215-240

[16] J.Wess and J.Bagger, *"Supersymmetry and Supergravity (2nd edition)"*, (Princeton Univ. Press ; 1992)

P.G.O.Freund, *"Introduction to Supersymmetry"*, (Cambridge Univ. Press ; 1986)

P.West, *"Introduction to Supersymmetry and Supergravity (extended second edition)"*, (World Scientific ; 1990)

D.Bailin and A.Love, *"Supersymmetric Gauge Field Theory and String Theory"*, Graduate Student Series in Physics (IOP ; 1994)

M.F.Sohnius, *Introducting Supersymmetry*, Physics Reports **128** (1985) 39-204

J.D.Lykken, *Introduction to Supersymmetry*, hep-th/9612114

[17] E.Witten, *Monopoles and Four-Manifolds*, Math. Res. Lett. **1** (1994) 769-796, hep-th/9411102

[18] S.K.Donaldson, *Polynomial Invariants for Smooth Four-Manifold*, Topology **29** (1990) 257-315

S.K.Donaldson and P.B.Kronheimer, *"The Geometry of Four-Manifolds"*, (Oxford Univ. Press ; 1990)

R.Friedman and J.W.Morgan,eds. *"Gauge Theory and the Topology of Four-Manifolds"*, IAS/Park City Mathematics Series **4** (AMS ; 1998)

深谷賢治 『ゲージ理論とトポロジー』 (シュプリンガー · フェアラーク東京 ; 1995)

[19] S.K.Donaldson, *The Orientation of Yang-Mills Moduli Spaces and 4-Manifold Topology*, J. Diff. Geom. **26** (1987) 397-428

[20] N.Seiberg and E.Witten, *Electric-Magnetic Duality, Monopole Condensation, and Confinement in $N = 2$ Supersymmetric Yang-Mills Theory* , Nucl. Phys. **B426** (1994) 19-52, hep-th/9407087

N.Seiberg and E.Witten, *Monopoles, Duality and Chiral Symmetry Breaking in $N = 2$ Supersymmetric QCD*, Nucl. Phys. **B431** (1994) 484-550, hep-th/9408099

Review としては、例えば

江口徹 「超対称性理論入門」, (中村誠太郎編 『大学院素粒子物理 2 』(講談社 ; 1998) 10 章)

奥山和美 「超対称ゲージ理論の双対性」, 素粒子論研究 **93-1** (1996) 1-103

L.Alvarez-Gaumé and S.F.Hassan, *Introduction to S-Duality in N=2 Supersymmetric Gauge Theories (A Pedagogical Review of the Work of Seiberg and Witten)*, hep-th/9701069

S.V.Ketov, *Solitons, Monopoles, and Duality : from Sine-Gordon to Seiberg-Witten*, hep-th/9611209

A.Bilal, *Duality in N=2 SUSY SU(2) Yang-Mills Theory : A Pedagogical Introduction to the Work of Seiberg and Witten*, hep-th/9601007

があります。

[21] E.Witten, *Supersymmetric Yang-Mills Theory on a Four-Manifold*, J. Math. Phys. **35**(1994) 5101-5135, hep-th/9403195

[22] M.F.Atiyah, N.J.Hitchin and I.M.Singer, *Self-Duality in Four-Dimensional Riemannian Geometry*, Proc. Roy. Soc. Lond. **A362** (1978) 425-461

[23] A.D'Adda and P.Di Vecchia, *Supersymmetry and Instanton*, Phys. Lett. **73B** (1978) 162-166

[24] P.B.Kronheimer and T.Mrowka, *Recurrence Relations and Asymptotics for Four-manifold Invariants* Bull. Amer. Math. Soc. **30** (1994) 215-221

P.B.Kronheimer and T.Mrowka, *Embedded Surfaces and the Structure of Donaldson's Polynomial Invariants*, J. Diff. Geom. **41** (1995) 573-734

[25] C.Vafa and E.Witten, *A Strong Coupling Test of S-Duality*, Nucl. Phys. **B431** (1994) 3-77, hep-th/9408074

[26] P.Goddard, J.Nuyts and D.Olive, *Gauge Theories and Magnetic Charge*, Nucl. Phys. **B125** (1977) 1-28

[27] C.Montonen and D.Olive, *Magnetic Monopoles as Gauge Particles?*, Phys. Lett. **72B** (1977) 117-120

Review としては、例えば

D.I.Olive, *Exact Electromagnetic Duality : Introductory Lectures*, NATO ASI Series **C520** (1997) 3-31, (L.Baulieu et al., *"Strings,Branes and Dualities"* (Kluwer Academic Publishers ; 1997))

D.I.Olive, *Exact Electromagnetic Duality*, Nucl. Phys. **B** (Proc.Suppl.) **45A** (1996) 88-102, Nucl. Phys. **B** (Proc.Suppl.) **46** (1996) 1-15, hep-th/9508089

があります。

[28] H.Osborn, *Topological Charges for N=4 Supersymmetric Gauge Theories and Monopole of Spin 1*, Phys. Lett. **83B** (1979) 321-326

[29] A.Sen, *Dyon-Monopole Bound States, Self-Dual Harmonic Forms on the Multi-Monopole Moduli Space, and SL(2,Z) Invariance in String Theory*, Phys. Lett. **329B** (1994) 217-221, hep-th/9402032

[30] R.Bott, *A Residue Formura for Holomorphic Vector-Fields*, J. Diff. Geom. **1** (1967) 311-330

[31] S.Mukai, *Symplectic Structure of the Moduli Space of Sheaves on an Abelian or K3 Surface*, Inv. Math. **77** (1984) 101-116

[32] H.Nakajima, *Lectures on Hilbert Schemes of Points on Surfaces*, (AMS；1999) [ISBN/0-8218-1956-9]

L.Göttsche, *"Hilbert Schemes of Zero-Dimensional Subschemes of Smooth Varieties"*, Lecture Notes in Mathematics **1572** (Springer-Verlag；1991)

中村郁「 Hilbert スキーム入門」, (http : // www-hep. phys. s. u-tokyo. ac. jp/ japanese/ tokutei99. html から手に入る。)

[33] L.Dixon, J.A.Harvey, C.Vafa and E.Witten, *Strings on Orbifold*, Nucl. Phys. **B261** (1985) 678-686
L.Dixon.J.A.Harvey,C.Vafa and E.Witten, *Strings on Orbifold II*, Nucl. Phys. **B274** (1986) 285-314

[34] L.Göttsche, *The Betti Numbers of the Hilbert Scheme of Points on a Smooth Projective Surface*, Math. Ann. **286** (1990) 193-207

L.Göttsche and W.Soergel, *Perverse Sheaves and the Cohomology of Hilbert Schemes of Smooth Algebraic Surfaces*, Math. Ann. **296** (1993) 235-245

[35] T.Eguchi, P.B.Gilkey and A.J.Hanson, *Gravitation, Gauge Theories and Differential Geometry*, Physics Reports **66** (1980) 213-393

Choquet-Bruhat, DeWitt-Morette and Dillard-Bleick, *"Analyis,Manifold and Physics Part I (revised ed.)"*, (North-Holland；1982)
Choquet-Bruhat and DeWitt-Morette, *"Analyis,Manifold and Physics Part II"*, (North-Holland；1989)

C.Nash and S.Sen, *"Topology and Geometry for Physicists"*, (Academic Press；1983)
邦訳 ： 佐々木隆監訳、南部保偵 / 吉井久博訳『物理学者のためのトポロジーと幾何学』(マグロウヒル；1989)

C.Nash, *"Differential Topology and Quantum Field Theory"*, (Academic Press；1991)

M.Nakahara, *"Geometry,Topology and Physics"*, Graduate Student Series in Physics (IOP；1990)

Bo-Yu Hou and Bo-Yuan Hou, *"Differential Geometry for Physicists"*, (World Scientific；1997)

T.Frankel, *"The Geometry of Physics"*, (Cambridge Univ. Press；1997)

B.Felsager, *"Geometry, Particles, and Fields"*, (Odense Univ. Press, 1981 ； Springer, 1998)

H.Flanders, *"Differential Forms with Applications to the Physical Sciences"*, (Academic Press,1963 ； Dover,1989)
邦訳 ： 岩堀長慶訳『微分形式の理論 -およびその物理科学への応用-』(岩波書店；1967)

B.F.Schutz, *"Geometrical Methods of Mathematical Physics"*, (Cambridge Univ. Press；1980)
邦訳 ： 家正則、二間瀬敏史、観山正見訳『物理学における幾何学的方法』(吉岡書店；1987)

M.B.Green, J.H.Schwarz and E.Witten, *"Superstring Theory"*, Chap. 12, 15 (Cambridge Univ. Press；1987)

[36] 松島与三 『多様体入門』 数学選書 **5** (裳華房；1965)

松本幸夫 『多様体の基礎』 基礎数学 **5** (東京大学出版会；1988)

村上信吾 『多様体 (第 2 版)』 (共立出版；1989)

[37] V.Guillemin and S.Sternberg, *"Symplectic Techniques in Physics"*, (Cambridge Univ. Press; 1984)

H.Hofer and E.Zehnder, *"Symplectic Invariants and Hamiltonian Dynamics"*, (Birkhäuser; 1994)

D.McDuff and D.Salamon, *"Introduction to Symplectic Topology (2nd ed.)"*, (Oxford Univ. Press；1998)

深谷賢治 『シンプレクティック幾何学』 岩波講座 現代数学の展開 **21** (岩波書店；1999)

[38] S.Kobayashi and K.Nomizu, *"Foundations of Differential Geometry I,II"*, (John Wiley & Sons；1963,1969)

酒井隆 『リーマン幾何学』 数学選書 **11** (裳華房；1992)

矢野健太郎 『リーマン幾何学入門』 (森北出版；1971)

[39] P.Griffiths and J.Harris, *"Principles of Algebraic Geometry"*, (John Wiley & Sons；1978)

S.-S.Chern, *"Complex Manifolds without Potential Theory (Second ed.)"*, (Springer-Verlag; 1995)

小平邦彦 『複素多様体と複素構造の変形 I、II』 東大数学教室セミナリー · ノート **19,31** (1968,1974)

小平邦彦 『複素多様体論 I、II、III』 岩波講座 基礎数学 (岩波書店；1979,1981)

[40] 飯高茂、上野健爾、浪川幸彦 『デカルトの精神と代数幾何 [増補版]』 (日本評論社；1993)

W.Barth, J.Morgan and A.Van de Van, *"Compact Complex Surface"*, (Springer-Verlag；1984)

R.Friedman,J.W.Morgan, *"Smooth Four-Manifolds and Complex Surfaces"*, (Springer-Verlag；1994)

上正明 *"Topology of Elliptic Surfaces and Related Topics (in Japanese)"*, Seminar Notes on Differential Topology **10** (1991)

[41] 秋月康夫 『調和積分論 (第 2 版)』 現代数学 **16** (岩波書店；1973)

R.Bott and L.W.Tu, *"Differential Forms in Algebraic Topology"*, (Springer-Verlag；1982)
邦訳 ： 三村護訳 『微分形式と代数トポロジー』 (シュプリンガー · フェアラーク東京,1996)

[42] P.S.Aspinwall, *K3 Surfaces and String Duality*, hep-th/9611137

[43] T.Eguchi, K.Hori and C.S.Xiong, *Quantum Cohomology and Virasoro Algebra*, Phys. Lett. **B402** (1997) 71-80, hep-th/9703086

T.Eguchi, M.Jinzenji and C.S.Xiong, *Quantum Cohomology and Free-Field Representation*, Nucl. Phys. **B510** (1998) 608-622, hep-th/9709152

T.Eguchi and C.S.Xiong, *Quantum Cohomology at Higher Genus: Topological Recursion Relations and Virasoro Conditions*, Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1998) 219-229, hep-th/9801010