修士論文

Boundary Conformal Field Theory と 弦理論への応用

東京大学大学院理学系研究科物理学専攻 松尾研究室

06132　山田政樹

9th January 2002

目 次

第 1 章 Introduction **4**

第 2 章 Conformal Field Theory **6**

2.1 共形変換 6
2.2 primary 場と相関関数 9
2.3 エネルギー運動量テンソル 10
2.4 演算子積展開 (OPE) 12
2.5 オペレーター形式 14
2.6 Virasoro 代数、Verma 加群 15
2.7 $c = 1$ 自由ボソン 19
2.8 4 点関数と微分方程式 23
2.9 指標、分配関数、fusion 代数 25

第 3 章 Boundary Conformal Field theory **28**

3.1 準備 28
3.2 境界条件と bondary state 29
3.3 the Cardy condition 33
3.4 Graph fusion 代数 36
3.4.1 boundary state とグラフ 36
3.4.2 Graph fuision 代数 36
3.4.3 fusion 則と block character 38
3.5 Pasquir 代数と Sewing constraint 38
3.5.1 ground state degeneracy 38
3.5.2 boundary field 39
3.5.3 boundary field の相関関数の構造定数 41
3.5.4 bulk field 45
3.5.5 Sewing constraint 46
3.5.6 sewing constraint と fusion 代数、graph fusion 代数、Pasquir 代数 . . 50

第 4 章　$c = 1$ 理論における boundary state の族 **56**
4.1 set up 56
4.2 $R = R_{s.d.}$ のときの boundary state 59
4.3 $R = \frac{M}{N} R_{s.d.}$ の場合への拡張 61
4.4 $R = 0, \infty$ の場合 64
4.5 $R =$ (無理数) $\times R_{s.d.}$ のとき 65
4.6 sewing conatraint etc. 69

第 5 章　ゲージ化された WZW モデルにおける D ブレーンの幾何学的解釈 **71**
5.1 準備 71
5.2 パラフェルミオン理論の D ブレーン 74
5.2.1 パラフェルミオン理論の A ブレーン 74
5.2.2 パラフェルミオン理論の B ブレーン 76
5.2.3 ブレーンの形状 83
5.3 スーパーパラフェルミオン理論の D ブレーン 85
5.3.1 ブレーンの性質について 85
5.3.2 BCFT による記述 88
5.3.3 Witten index に関するコメント 91

第 6 章　結論 **94**

謝辞

本修士論文は様々な人達のサポートにより書くことができた。1 年間、東大素粒子論研究室で指導してくださった松尾泰先生、共に CFT を勉強し続けた東大青木研究室の岡隆史君、基本的な質問にも丁寧に答えてくださった疋田さん、小笠さん他、研究室の皆さんに深く感謝します。

第1章　Introduction

共形場理論 (Conformal Field Theory,CFT) の歴史は大変古く、1984 年に Belavin, Polyakov, Zamolodchikov [1] により定式化がなされて以来、素粒子物理における弦理論や物性物理における臨界現象の研究とあいまって発展してきた。本修士論文のテーマである境界のある共形場理論 (Boundary Conformal Feild theory,BCFT) も 1989 年の Cardy [2] による研究を 1 つのランドマークとし、以来、open string や境界付きの臨界現象の研究を通じてその豊かな内容を我々の眼前に示してきた。

最近の物性理論の分野では非平衡状態に関する研究 [3]、量子ブラウン運動 [4]、近藤効果 [5] 等、広く応用されている。

では超弦理論の分野ではどうか。この点ついては少し歴史をさかのぼりながら眺めていくことにしたい。

神話の世界では混沌とした世界を天と地に神が分離するところから始まるものをよく耳にする。カオスからコスモスへ、といったところであろう。物理学は世界を統一していく方向に歴史は進んできた。もちろんこれは世界をカオスに戻すのではなく自然界の現象を統一していく点でやはりコスモスを指向している。Newton は'天上'も'地上'も同じ物理法則で動いていることを示し、Maxwell は電磁気力を統一し、Weinberg-Salam 理論による電弱統一、ついには標準模型により重力を除く全ての相互作用が統一されるに至った。

残るは重力の統一である。しかし量子論に重力を組み込もうとすると理論を繰り込むことができず、無限大のどうしても発散が生じてしまう。そこで現在、重力を統一する量子論の最有力候補とされるのが超弦理論である。この理論は弦のサイズにより自然にカットオフが入るためにその発散を回避することができる。

1995 年に Polchinski [6] が超弦理論のソリトン解の p ブレーンを D ブレーンと同定したことにより超弦理論は大きく発展した。5 つの超弦理論と M theory がそれぞれある 1 つの理論のモデュライ空間の極限にあることが明らかにされたり Bekenstein-Hawking エントロピーが計算されたり [7] と、華々しく展開した。

現在において D ブレーンは超弦理論において非常に本質的なものであると認識されるに至っている。そしてその D ブレーンの解析の基盤の 1 つを与えるのが BCFT である。D ブレーンは open string のいくつかの次元の端点に Dirichlet 条件を課したときに弦の端点が描く超平面である。そして弦が描く world sheet の境界条件は boundary state により記述され

る。 したがってBCFTの理解を深めることはDブレーンとは何か、という根本的な問いへ示唆を与える。

本修士論文の構成は以下の通りである。第2章でCFTについてのレビューを行う。ここには第3、4章の数学的な準備も一部に含む。ここでの議論は [8] に従った部分が多分にある。第3章ではBCFTのレビューを行う。ここではRational CFTのBCFTの解説を試みる。理論のカイラル対称性を破らない範囲で一般的なboundary stateの構成をする。このようなケースは既によく理解されているが、boundary stateを特徴付けるgraph fusion代数のdualな代数であるPasquir代数がsewing constraintから自然に現れてくるのは興味深い [9]。またこの方面ではOcneanuのquantum groupoidsとの関係でも研究が進められている [10]。しかし本修士論文ではそこには立ち入らない。第4章では前章の境界条件を緩和し、境界上で共形対称性しか満たさないboundary stateの構成法を解説する [11] [12] [13]。ここでは主に [11] に従って議論を進める。irrationalなCFTに対するboundary stateを扱う。ここまで主に代数的なboundary stateの構成に着目していく。確かにこのような代数的な方法は強力であるが必ずしも直観的な幾何学的な理解を与えてくれるとは限らない。第5章では [28] に基づきDブレーンの幾何学的解釈を試みる。

第2章　Conformal Field Theory

2.1　共形変換

d 次元時空を考える。その計量は $g_{\mu\nu}$ であるとする。座標変換 $x \to x'$ であって計量をスケールの変化分以外は不変に保つようなものを共形変換という。

$$g'_{\mu\nu}(x') = \Lambda(x) g_{\mu\nu}(x) \tag{2.1}$$

直観的に並進、回転、引き延ばし $(\mathrm{dilation})$ といった変換からなるように思われる。この共形変換が群をなすことは明らかであろう。ポワンカレ群を部分群として含んでいて、$\Lambda(x) = 1$ の場合がこれにあたる。並進、回転、引き延ばし、からなるのであるから、共形変換により交わる 2 本の曲線がなす角度は保たれる。

d 次元時空の無限小共形変換と有限共形変換

無限小共形変換 $x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \epsilon_\mu$ に対して

$$g_{\mu\nu}(x) \to g'_{\mu\nu}(x') = g_{\mu\nu}(x) - (\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu) \tag{2.2}$$

であるから

$$\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu = f(x) g_{\mu\nu}, \tag{2.3}$$

$$\Longrightarrow \qquad f(x) = \frac{2}{d} \partial_\rho \epsilon^\rho \tag{2.4}$$

簡単のために $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, \cdots, 1)$ とする。(2.3) の両辺を x^ρ で微分する。

$$\partial_\rho \partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \partial_\rho \epsilon_\mu = \eta_{\mu\nu} \partial_\rho f(x)$$

μ, ν, ρ について巡回置換したものを足し引きすると

$$2\partial_\mu \partial_\nu \epsilon_\rho = -\eta_{\mu\nu} \partial_\rho f + \eta_{\nu\rho} \partial_\mu f + \eta_{\rho\mu} \partial_\nu f, \tag{2.5}$$

$$\Longrightarrow \qquad 2\partial^2 \epsilon_\mu = (2 - d) \partial_\mu f \tag{2.6}$$

一方、(2.3) に ∂^2 を作用させて(2.6) を用いると

$$\eta_{\mu\nu}\partial^2 f = \partial^2(\partial_\mu\epsilon_\nu + \partial_{nu}\epsilon_\mu) = \frac{2-d}{2}(\partial_\mu\partial_\nu f + \partial_\nu\partial_\mu f) = (2-d)\partial_\mu\partial_\nu f, \tag{2.7}$$

$$\Longrightarrow \qquad (1-d)\partial^2 f = 0 \tag{2.8}$$

$d > 2$ を想定してしばらく議論を進める。すると共形変換は有限次元であることがわかるのだが、$d = 2$ の場合には、これとは状況が大きく変わって、共形変換は無限次元になる。

上の(2.8) から $f(x) = A + B_\mu x^\mu, A, B_\mu$ は定数、になることがわかる。これを(2.5) に代入すると $\partial_\mu\partial_\nu\epsilon_\rho$ は定数になることがわかる。よって ϵ_μ の一般形は $\epsilon_\mu = a_\mu + b_{\mu\nu}x^\nu + c_{\mu\nu\rho}x^\nu x^\rho, a_\mu, b_{\mu\nu}, c_{\mu\nu\rho}$ は定数係数、になることがわかる。これを$(2.3)(2.4)(2.5)$ に代入して x の各次数の係数を比較して $a_\mu, b_{\mu\nu}, c_{\mu\nu\rho}$ に対する条件を調べる。まず a_μ が自由に選べるのは明らかである。$(2.3)(2.4)$ から $f(x)$ を消去して ϵ_μ を代入して定数項を比較すると

$$b_{\mu\nu} + b_{\nu\mu} = \frac{2}{d}\eta_{\mu\nu}b^\rho_\rho$$

この式は μ, ν の入れ替えについて対称であるから

$$b_{\mu\nu} = \alpha\eta_{\mu\nu} + m_{\mu\nu}, \quad m_{\mu\nu} = -m_{\nu\mu} \tag{2.9}$$

という形に書くことができる。第 1 項は無限小スケール変換、第 2 項は無限小回転を表す。また(2.5) から

$$c_{\mu\nu\rho} = \eta_{\mu\rho}b_\nu + \eta_{\mu\nu}b_\rho - \eta_{\nu\rho}b_\mu \tag{2.10}$$

μ, ν について縮約をとることにより $b_\rho \equiv \frac{1}{d}c^\mu_{\mu\rho}$ である。これに対応する無限小変換は

$$x'^\mu = x^\mu + 2(x\cdot b)x^\mu - b^\mu x^2 \tag{2.11}$$

これを特殊共形変換 ($\mathbf{S}$pecial $\mathbf{C}$onformal $\mathbf{T}$ransformation) という。

以上で得られた無限小共形変換に対応する有限変換をまとめておく。

$$\text{(並進)} \qquad x'^\mu = x^\mu + \alpha^\mu \tag{2.12}$$

$$\text{(dilation)} \qquad x'^\mu = \alpha x^\mu \tag{2.13}$$

$$\text{(回転)} \qquad x'^\mu = M^\mu_\nu x^\nu \tag{2.14}$$

$$\text{(SCT)} \qquad x'^\mu = \frac{x^\nu - b^\mu x^2}{1 - 2(b\cdot x) + b^2x^2} \tag{2.15}$$

これらのうち SCT は見慣れない変換であるが、$\frac{x'^\mu}{x'^2} = \frac{x^\mu}{x^2} - b^\mu$ と書き換えられることから長さについて' 反転' させて平行移動させて' 反転' させるような変換になっている。

これらの共形変換に対する対称性から 2 点、3 点相関関数はその形が強く制限される。

2 次元時空の共形変換

次に $d = 2$ の場合を考える。以後 2 次元の CFT を扱っていく。
まず座標を (z^0, z^1) とする。座標変換の下で計量は

$$z^\mu \to w^\mu = w^\mu(z), \quad g^{\mu\nu} \to g'^{\mu\nu} = \frac{\partial w^\mu}{\partial z^\alpha}\frac{\partial w^\nu}{\partial z^\beta} g^{\alpha\beta} \tag{2.16}$$

と変換される。やはり簡単のために $g^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, 1)$ とすると、この座標変換が共形変換になるための条件は

$$\left(\frac{\partial w^0}{\partial z^0}\right)^2 + \left(\frac{\partial w^0}{\partial z^1}\right)^2 = \left(\frac{\partial w^1}{\partial z^0}\right)^2 + \left(\frac{\partial w^1}{\partial z^1}\right)^2 \tag{2.17}$$

$$\frac{\partial w^0}{\partial z^0}\frac{\partial w^1}{\partial z^0} + \frac{\partial w^0}{\partial z^1}\frac{\partial w^1}{\partial z^1} = 0 \tag{2.18}$$

これを書き換えると、

$$\frac{\partial w^1}{\partial z^0} = \frac{\partial w^0}{\partial z^1}, \quad \frac{\partial w^0}{\partial z^0} = -\frac{\partial w^1}{\partial z^1}, \tag{2.19}$$

または

$$\frac{\partial w^1}{\partial z^0} = -\frac{\partial w^0}{\partial z^1}, \quad \frac{\partial w^0}{\partial z^0} = \frac{\partial w^1}{\partial z^1} \tag{2.20}$$

これらはそれぞれ正則関数、反正則関数の Cauchy-Riemann 方程式になっている。
そこで 2 次元座標平面を複素平面とみなして、複素座標 $(z, \bar{z})$ を使うのは自然である。

$$z = z^0 + iz^1, \qquad \bar{z} = z^0 - iz^1, \tag{2.21}$$

$$\partial = \frac{1}{2}(\partial_0 - i\partial_1), \qquad \bar{\partial} = \frac{1}{2}(\partial_0 + i\partial_1) \tag{2.22}$$

逆に $(z, \bar{z})$ から (z^0, z^1) に戻るためには

$$z^0 = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \qquad z^1 = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}), \tag{2.23}$$

$$\partial_0 = \partial + \bar{\partial}, \qquad \partial_1 = i(\partial - \bar{\partial}) \tag{2.24}$$

なお複素座標での計量と完全反対称テンソルは

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \qquad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\varepsilon_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}i \\ -\frac{1}{2}i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \varepsilon^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -2i \\ 2i & 0 \end{pmatrix} \tag{2.25}$$

厳密なことを言うとCauchy-Riemann方程式を課しただけでは共形変換が複素平面上の各点で定義されていて逆変換が存在することは言えない。逆変換の存在に加えて複素平面を複素平面に写像することが共形変換が群をなすためには必要である。そこでこれらの性質を備えたものを大域的共形変換といい、それ以外の複素平面上の各点ではwell-definedではないものを局所的共形変換と呼ぶことにする。

この大域的共形変換は群をなしていて、それそ特別共形群という。そしてそのような変換は射影変換になっていて$f(z)=\frac{az+b}{cz+d}, ad-bc=1$と書ける。よって特別共形群は$SL(2,\mathbb{C})$に同型である。共形変換全体は正則関数で表されることから無限次元である。もちろん先に見た並進、回転、dilationの各変換を含むことになる。

2.2 primary場と相関関数

共形変換$z\to w=w(z), \bar{z}\to\bar{w}=\bar{w}(\bar{z})$に対して

$$\phi'(w,\bar{w})=\left(\frac{dw}{dz}\right)^{-h}\left(\frac{d\bar{w}}{d\bar{z}}\right)^{-\bar{h}}\phi(z,\bar{z}) \tag{2.26}$$

と変換する場をprimary場と呼ぶ。hを共形ウェイトと呼ぶ。

この性質からprimary場のn点関数は共形変換の下で

$$\langle\phi(w_1,\bar{w_1})\cdots\phi_n(w_n,\bar{w}_n)\rangle=\prod_{i=1}^{\infty}\left(\frac{dw}{dz}\right)^{-h_i}_{w=w_i}\left(\frac{d\bar{w}}{d\bar{z}}\right)^{-\bar{h}_i}_{\bar{w}=\bar{w}_i}\langle\phi(z_1,\bar{z}_1)\cdots\phi_n(z_n,\bar{z}_n)\rangle \tag{2.27}$$

と変換することは明らかである。

ここで理論が共形不変であるとすると大域的共形対称性$(SL(2,\mathbb{C}))$から相関関数の形が強く制限される。

2点関数

スケール変換$z\to\lambda z, \bar{z}\to\bar{\lambda}\bar{z}$より

$$\langle\phi_1(\lambda z_1,\bar{\lambda}\bar{z}_1)\phi_2(\lambda z_2,\bar{\lambda}\bar{z}_2)\rangle=\lambda^{-h_1+-h_2}\bar{\lambda}^{-\bar{h}_1-\bar{h}_2}\langle\phi_1(z_1,\bar{z}_2)\phi_2(z_2,\bar{z}_2)\rangle \tag{2.28}$$

また並進、回転不変性から2点関数は2点間の距離のみに依存するから

$$\langle\phi_1(\lambda z_1,\bar{\lambda}\bar{z}_1)\phi_2(\lambda z_2,\bar{\lambda}\bar{z}_2)\rangle=\frac{C_{12}}{(z_1-z_2)^{h_1+h_2}(\bar{z}_1-\bar{z}_2)^{\bar{h}_1+\bar{h}_2}} \tag{2.29}$$

さらに $w = \frac{b}{z}, b$ は実数、と変換すると

$$\begin{aligned}
&\langle \phi_1(\lambda z_1, \bar{\lambda}\bar{z}_2)\phi_2(\lambda z_2, \bar{\lambda}\bar{z}_2)\rangle \\
&\qquad = \left(-\frac{b}{z_1^2}\right)^{h_1}\left(-\frac{b}{\bar{z}_1^2}\right)^{\bar{h}_1}\left(-\frac{b}{z_2^2}\right)^{h_2}\left(-\frac{b}{\bar{z}_2^2}\right)^{\bar{h}_2}\langle \phi_1(\lambda w_1, \bar{\lambda}\bar{w}_1)\phi_2(\lambda w_2, \bar{\lambda}\bar{w}_2)\rangle \\
&\qquad = \left(-\frac{b}{z_1^2}\right)^{h_1}\left(-\frac{b}{\bar{z}_1^2}\right)^{\bar{h}_1}\left(-\frac{b}{z_2^2}\right)^{h_2}\left(-\frac{b}{\bar{z}_2^2}\right)^{\bar{h}_2} \\
&\qquad \times \frac{(z_1 z_2)^{h_1+h_2}(\bar{z}_1\bar{z}_2)^{\bar{h}_1+\bar{h}_2}C_{12}}{(z_1-z_2)^{h_1+h_2}(\bar{z}_1-\bar{z}_2)^{\bar{h}_1+\bar{h}_2}(-b)^{h_1+h_2+\bar{h}_2+\bar{h}_2}}
\end{aligned} \tag{2.30}$$

であるから $h_1 = h_2, \bar{h}_1 = \bar{h}_2$ のときのみ 2 点関数は意味をもつ。よって

$$\begin{aligned}
\langle \phi_1(\lambda z_1, \bar{\lambda}\bar{z}_1)\phi_2(\lambda z_2, \bar{\lambda}\bar{z}_2)\rangle &= \frac{C_{12}}{(z_1-z_2)^{2h}(\bar{z}_1-\bar{z}_2)^{2\bar{h}}}, \\
&(\text{if} \quad h_1 = h_2 = h, \bar{h}_1 = \bar{h}_2 = \bar{h})
\end{aligned} \tag{2.31}$$

3 点関数

2 点関数と同様の考察により

$$\begin{aligned}
&\langle \phi_1(z_1, \bar{z}_1)\phi_2(z_2, \bar{z}_2)\phi_3(z_3, \bar{z}_3)\rangle \\
&\qquad = \frac{C_{123}}{z_{12}^{h_1+h_2-h_3}z_{23}^{h_2+h_3-h_1}z_{13}^{h_3+h_1-h_2}\bar{z}_{12}^{\bar{h}_1+\bar{h}_2-\bar{h}_3}\bar{z}_{23}^{\bar{h}_2+\bar{h}_3-\bar{h}_1}\bar{z}_{13}^{\bar{h}_3+\bar{h}_1-\bar{h}_2}}
\end{aligned} \tag{2.32}$$

2.3 エネルギー運動量テンソル

無限小共形変換 $x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu(x)$ を考える。この対称変換に対するカレント (エネルギー運動量テンソル) を $T^{\mu\nu}$ とする。ただし一般的にはこれは対称でもトレースレスでもないが、このような性質を満たすように修正が加えられている。

なお無限小共形変換による作用の変分から $T^{\mu\nu}$ を定義することもできる。

$$\begin{aligned}
&\delta S = \frac{1}{2}\int d^2x T^{\mu\nu}(\partial_\mu\epsilon_\nu + \partial_\nu\epsilon_\mu) = \frac{1}{2}\int d^2x T^\mu_\mu \partial_\rho \epsilon^\rho \\
&\because (2.3)
\end{aligned} \tag{2.33}$$

この表式からトレースレスであれば共形不変であることがわかる。

$T^{\mu\nu}$ を使って並進、回転、dilation の各変換に対する Ward 恒等式が書けて

$$\text{並進} \qquad 2\pi\partial\langle T_{z\bar{z}}\rangle + 2\pi\bar{\partial}\langle T_{zz}X\rangle = -\sum_{i=1}^{n}\bar{\partial}\frac{1}{z-w_i}\frac{\partial}{\partial w_i}\langle X\rangle \tag{2.34}$$

$$\text{otamesi} \qquad 2\pi\partial\langle T_{\bar{z}\bar{z}}\rangle + 2\pi\bar{\partial}\langle T_{z\bar{z}}X\rangle = -\sum_{i=1}^{n}\partial\frac{1}{\bar{z}-\bar{w}_i}\frac{\partial}{\partial \bar{w}_i}\langle X\rangle \tag{2.35}$$

$$\text{dilation} \qquad 2\langle T_{z\bar{z}}X\rangle + 2\langle T_{\bar{z}z}X\rangle = -\sum_{i=1}^{n}\delta(x-x_i)\Delta_i\langle X\rangle \tag{2.36}$$

$$\text{回転} \qquad -2\langle T_{z\bar{z}}X\rangle + 2\langle T_{\bar{z}z}X\rangle = -\sum_{i=1}^{n}\delta(x-x_i)s_i\langle X\rangle \tag{2.37}$$

ここで $X = \phi_1(w_1,\bar{w_1})\cdots\phi_n(w_n,\bar{x}_n), \phi_i$ は primary 場、(x_i^0, x_i^1) は通常の'実'座標である。また s_i, Δ_i は ϕ_i のスピンとスケールリング次元である。共形ウェイトとは $h = \frac{1}{2}(\Delta+s), \bar{h} = \frac{1}{2}(\Delta - s)$ という関係があることを指摘しておく。

これらの Ward 恒等式からエネルギー運動量テンソルと primary 場の積との相関関数を知ることができる。具体的には Ward 恒等式の最後の二つから $\langle T_{z\bar{z}}X\rangle, \langle T_{\bar{z}z}X\rangle$ を求めて最初の 2 式に代入してやると

$$\bar{\partial}\left\{\langle T(z,\bar{z})X\rangle - \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{z-w_i}\frac{\partial}{\partial w_i}\langle X\rangle + \frac{h_i}{(z-w_i)^2}\langle X\rangle\right]\right\} = 0, \tag{2.38}$$

$$\partial\left\{\langle \bar{T}(z,\bar{z})X\rangle - \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{\bar{z}-\bar{w}_i}\frac{\partial}{\partial \bar{w}_i}\langle X\rangle + \frac{\bar{h}_i}{(\bar{z}-\bar{w}_i)^2}\langle X\rangle\right]\right\} = 0 \tag{2.39}$$

ただし $\delta(x) = \frac{1}{\pi}\partial\frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{\pi}\bar{\partial}\frac{1}{z}$ を使った。また $T = -2\pi T_{zz}, \bar{z} = -2\pi T_{\bar{z}\bar{z}}$ と再定義した。

したがって

$$\langle T(z)X\rangle = \sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{1}{\bar{z}-\bar{w}_i}\frac{\partial}{\partial \bar{w}_i}\langle X\rangle + \frac{\bar{h}_i}{(\bar{z}-\bar{w}_i)^2}\langle X\rangle\right\} + (\text{正則}) \tag{2.40}$$

(正則) は $z = w_i$ で正則な関数を表す。$\bar{T}(\bar{z})$ についても同様の結果を得る。

ところで $T_{\mu\nu}$ 自身は共形変換のカレントであったから

$$\delta_\epsilon\langle X\rangle = \int_M d^2x\partial_\mu\langle T^{\mu\nu}(x)\epsilon_\nu(x)X\rangle = \int_{\partial M}\varepsilon_{\mu\rho}ds^\rho\langle T^{\mu\nu}(x)\epsilon_\nu(x)X\rangle = \oint_C\frac{i}{2}\left\{-dz\langle T^{\bar{z}\bar{z}}\epsilon_{\bar{z}}X\rangle + d\bar{z}\langle T^{zz}\epsilon_z X\rangle\right\} \tag{2.41}$$

ただし、M は $\{w_i\}$ を含むような領域である。よって共形 Ward 恒等式が得られて

$$\delta_{\epsilon\bar{\epsilon}}\langle X\rangle = -\frac{1}{2\pi i}\oint_C dz\epsilon(z)\langle T(z)X\rangle + \frac{1}{2\pi i}\oint_C d\bar{z}\bar{\epsilon}(\bar{z})\langle\bar{T}(\bar{z})X\rangle \tag{2.42}$$

先程見た Ward 恒等式は、この共形 Ward 恒等式に含まれている。実際、

$$\begin{aligned}\partial_\mu(\epsilon_\nu T^{\mu\nu}) &= \epsilon_\nu \partial_\mu T^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu\right) T^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \epsilon_\nu - \partial_\nu \epsilon_\mu\right) T^{\mu\nu} \\ &= \epsilon_\nu \partial_\mu T^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\rho \epsilon^\rho \eta_{\mu\nu} T^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta}\partial_\alpha \epsilon_\beta \varepsilon_{\mu\nu} T^{\mu\nu}\end{aligned} \tag{2.43}$$

ここで

$$\frac{1}{2}\left(\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu\right) = \frac{1}{2}\partial_\rho \epsilon^\rho \eta_{\mu\nu}, \tag{2.44}$$

を使った。このことは(2.3)(2.4) からいえる。

2.4 演算子積展開 (OPE)

二つの場の積 $A(z)B(w)$ を考える。この二つの場が互いに接近するときには量子ゆらぎが無限に大きくなって発散する。そのときの際の振るまい方は演算子積展開 (OPE) で表現することができる。すなわち無限個の場の集合 $\{C_n(w)\}$ があって

$$A(z)B(w) = \sum_{n=-\infty}^{N} \frac{C_n(w)}{(z-w)^n} \tag{2.45}$$

と書くことができる。

この OPE は相関関数から読み取ることができる。(単に $\langle \cdots \rangle$ をはずすだけ。) 例えば $\langle T(z)\phi(z,\bar{z})\rangle$, ϕ は primary 場、は(2.40) より

$$T(z)\phi(w,\bar{w}) \sim \frac{h}{(z-w)^2}\phi(w,\bar{w}) + \frac{1}{z-w}\partial\phi(w,\bar{w}) \tag{2.46}$$

ただし'$\sim$' は正則関数を除いて等しいことを意味している。

またエネルギー運動量テンソル同士の OPE は

$$T(z)T(w) \sim \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{(z-w)} \tag{2.47}$$

と、なることが知られている。ただし c は定数である。$T(z)$ は primary ではないので第 1 項のようなおつりの項が現れる。またこの式から $T(z)$ の共形ウェイトが 2 であることもわかる。この OPE と共形 Ward 恒等式から $T(z)$ の無限小共形変換の下での変分がわかって

$$\delta_\epsilon T(z) = -\frac{c}{12}\partial^3\epsilon(z) - 2T(z)\partial\epsilon(z) - \epsilon(z)\partial T(z) \tag{2.48}$$

さらにこれを積分すると有限共形変換 $z \to w = w(z)$ の下での $T(z)$ の変換が

$$T'(w) = \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 T(z) + \frac{c}{12}\{z; w\} \tag{2.49}$$

ただし $\{w; z\}$ は Schwarz 微分

$$\{w; z\} = \frac{d^3w/dz^3}{dw/dz} - \frac{3}{2}\left(\frac{d^2w/dz^2}{dw/dz}\right)^2 \tag{2.50}$$

なお、c は central charge と呼ばれる定数で、理論に境界条件などでスケールを与えたときの共形対称性の'ほころび具合'を表す量である。

例：c=1 質量 0 自由ボゾン

OPE の例として質量 0 自由ボゾン ϕ の理論を考えてみたい。結合定数を g としてその S 作用は

$$S = \frac{g}{2}\int d^2x \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi = \frac{1}{2}\int d^2x d^2y \phi(x)A(x,y)\phi(y) \tag{2.51}$$

ただし

$$A(x,y) = -g\delta(x-y)\partial^2 \tag{2.52}$$

2 点関数 $\langle\phi(x)\phi(y)\rangle = K(x,y) = A(x,y)^{-1}, -g\partial^2 K = \delta(x-y)$、の方程式は回転対称性に着目すると

$$2\pi g\int_0^r d\phi\rho\left(-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial r}K(\rho)\right)\right) = 1, \qquad \therefore \quad K(r) = -\frac{1}{2\pi g}\log r + \text{const.} \tag{2.53}$$

よって 2 点関数は複素座標で

$$\langle\phi(z,\bar{z})\phi(w,\bar{w})\rangle = -\frac{1}{4\pi g}\log(z-w) + \log(\bar{z}-\bar{w}) + \text{const.} \tag{2.54}$$

これより

$$\langle\partial\phi(z)\partial\phi(w)\rangle = -\frac{1}{4\pi g}\frac{1}{(z-w)^2} \tag{2.55}$$

$$\Longrightarrow \qquad \partial\phi(z)\partial\phi(w) \sim -\frac{1}{4\pi g}\frac{1}{(z-w)^2} \tag{2.56}$$

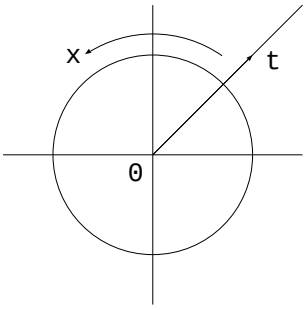

図 2.1: 2 次元面上の時間方向と空間方向

$\bar{\partial}\phi(\bar{z})\bar{\partial}\phi(\bar{w})$ についても同様の結果を得る。

エネルギー運動量テンソルは

$$T(z) = -2\pi g : \partial\phi\partial\phi := -2\pi g \lim_{z\to w}(\partial\phi(z)\partial\phi(w) - \langle\partial\phi(z)\partial\phi(w)\rangle) \tag{2.57}$$

これを用いるとウィックの定理から

$$T(z)\partial\phi(w) \sim \frac{\partial\phi(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial^2\phi(w)}{(z-w)} \tag{2.58}$$

$$T(z)T(w) \sim \frac{1/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{(z-w)} \tag{2.59}$$

など得られる。これより $c = 1, \partial\phi$ の共形ウェイト $h = 1$ が読み取れる。

2.5 オペレーター形式

この節ではオペレーター形式による定式化をを行う。まず、2 次元ユークリッド時空内での空間と時間の方向を決める必要がある。水平方向を空間、鉛直方向を時間方向にとることも考え得るが、共形対称性から原点を中心として半径方向を時間方向、動径方向を空間方向にとることができる。

漸近状態、モード展開

真空状態 $|0\rangle$ の存在を仮定する。始状態を $|\phi_{in}\rangle = \lim_{z,\bar{z}\to\infty}\phi(z,\bar{z})|0\rangle$ で定義する。終状態を $\langle\phi_{out}| = |\phi_{in}\rangle^\dagger$ により定義する。場の Hermite 共役を $[\phi(z,\bar{z})]^\dagger = \bar{z}^{-h}z^{-\bar{h}}\phi(1/\bar{z}, 1/z)$ で定義するのは自然であろう。

共形場 $\phi(z,\bar{z})$ を次のようにモード展開する。

$$\phi(z,\bar{z}) = \sum_{m,n} \frac{1}{z^{m+h}} \frac{1}{\bar{z}^{n+\bar{h}}} \phi_{m,n}, \tag{2.60}$$

$$\phi_{m,n} = \frac{1}{2\pi i} \oint dz z^{m+h-1} \frac{1}{2\pi i} \oint d\bar{z} \bar{z}^{n+\bar{h}-1} \phi(z,\bar{z}) \tag{2.61}$$

これの Hermite 共役をとると

$$\phi(z,\bar{z})^\dagger = \sum_{m,n} \frac{1}{\bar{z}^{m+h}} \frac{1}{z^{n+\bar{h}}} \phi^\dagger_{m,n} \tag{2.62}$$

一方、Hermite 共役の定義からは

$$\phi(z,\bar{z})^\dagger = \bar{z}^{-2h} z^{-2\bar{h}} \sum_{m,n} \bar{z}^{m+h} z^{n+\bar{h}} \phi_{m,n} = \sum_{m,n} \frac{1}{\bar{z}^{m+h}} \frac{1}{z^{n+\bar{h}}} \phi_{-m,-n} \tag{2.63}$$

したがって

$$\phi^\dagger_{m,n} = \phi_{-m,-n} \tag{2.64}$$

また漸近状態が well-defined であるために

$$\phi_{m,n}|0\rangle = 0, \qquad (m > -h, n > -\bar{h}) \tag{2.65}$$

が必要となる。

2.6 Virasoro 代数、Verma 加群

次にエネルギー運動量テンソル $T(z), \bar{T}(\bar{z})$ をモード展開する。

$$T(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{L_n}{z^{n+2}}, \quad L_n = \frac{1}{2\pi i} \oint dz z^{n+1} T(z) \tag{2.66}$$

$\bar{T}(\bar{z})$ についても展開係数を $\bar{L}_n$ として同様に展開できる。実は各 $L_n, \bar{L}_n$ は無限次元対称変換であるところの共形変換の生成子になっている。これらの生成子が満たす代数を調べるのがこの節の目的である。

まず、準備として'時間順序積'(あるいは動径順序付け) を定義する。

$$\mathcal{R}\phi_1(z)\phi_2(w) = \begin{cases} \phi_1(z)\phi_2(w) & (|z| > |w|) \\ \phi_2(w)\phi_1(z) & (|w| > |z|) \end{cases} \tag{2.67}$$

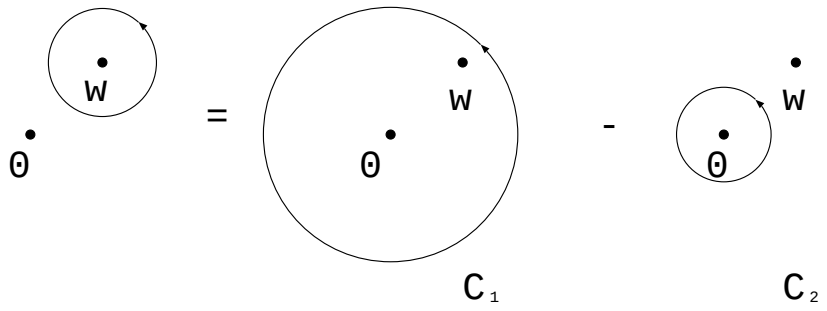

図 2.2: 積分路の変更

このような順序付けを考慮すると

$$\oint_w dza(z)b(w) = \oint_{C_1} dza(z)b(w) - \oint_{C_2} dzb(w)a(z) = [A, b(w)] \tag{2.68}$$

ただし積分路について図 2.2 の関係を使った。ここで $A = \oint_0 dza(z)$ である。同様の発想で、場を周積分して得られる演算子について

$$[A, B] = \oint_0 dw \oint_w dza(z)b(w) \tag{2.69}$$

が言える。

この(2.69) とエネルギー運動量テンソルの OPE (2.47) を用いると、かの有名な Virasoro 代数を得る。

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{m+n} + \frac{c}{12}n(n^2-1)\delta_{n+m,0} \tag{2.70}$$

同様の結果が $\bar{L}_n$ にも成立する。ただし $T\bar{T} \sim 0$ ゆえ

$$[L_n, \bar{L}_m] = 0 \tag{2.71}$$

となる。この性質のおかげで共形対称性の表現を考える際に正則部分と反正則部分との直積に分解して考えることができる。これ以後正則部分のみに着目して話を進めることにする。もちろん現実の物理を記述する際には反正則部分も考慮しなければならないのは言うまでもない。その正則部分と反正則部分とをトーラス上の分配関数によって関係付けられる。

ところで無限小共形変換の’チャージ’ $\mathcal{Q}_\epsilon = \oint \frac{dz}{2\pi i}\epsilon(z)T(z), \epsilon(z) = \sum \epsilon_n z^{n+1}$ を考える。これによって場の変分が $\delta_\epsilon = [\mathcal{Q}_\epsilon, \phi]$ で与えられることは明らかであるが、$\mathcal{Q}_\epsilon$ の積分を実行すると $\sum \epsilon_n L_n$ となるので L_n が共形変換の生成子になっていることが明らかにわかる。特に

L_0 が dilation に対応することは見てとれるわけだが、今、時間方向を半径方向にとっているので $L_0 + \bar{L}_0$ が Hamiltonian であることがわかる。

また $L_0, L_{\pm 1}$ が Virasoro 代数の部分代数をなしている。

$$[L_0, L_{\pm 1}] = \mp L_{\pm 1}, \quad [L_{+1}, L_{-1}] = 2L_0 \tag{2.72}$$

これは $\widehat{sl}(2,\mathbb{C})$ の代数になっていて $SL(2,\mathbb{C})$ を生成する。つまり大域的共形変換を引き起こす。

さらに $T(0)|0\rangle$ が well-defined であれ、という要請から

$$L_n|0\rangle = 0. \qquad (n \geq -1) \tag{2.73}$$

$\bar{L}_n$ についても同様である。

始状態 $|h, \bar{h}\rangle = \phi(0,0)|0\rangle, \phi$ は primary 場、と定義する。これは $L_0, \bar{L}_0$ の固有状態になっている。

$$L_0|h,\bar{h}\rangle = h|h,\bar{h}\rangle, \bar{L}_0|h,\bar{h}\rangle = \bar{h}|h,\bar{h}\rangle \tag{2.74}$$

実際に、これは $[L_n, \phi(z,\bar{z})] = h(n+1)w^n\phi(z,\bar{z}) + w^{n+1}\partial\phi(z,\bar{z}), n \geq -1$ となることから明らかである。同様に $L_n|h,\bar{h}\rangle = \bar{L}_n|h,\bar{h}\rangle = 0$ も言えよう。

Virasoro 代数から $[L_0, L_{-m}] = mL_{-m}$ がいえるので漸近状態に L_{-m} を作用させると共形ウェイトが m だけ増加した状態がつくられる。したがって状態 $L_{-k_1}L_{-k_2}\cdots L_{-k_n}|h\rangle, 1 \leq k_1 \leq k_2 \leq \cdots \leq k_n$、は共形ウェイトが $h + \sum k_i \equiv h + N$ になる。このような N をレベルと呼ぶ。漸近状態 $|h\rangle$ を最高ウェイト状態、最高ウェイト状態に L_n を作用させてつくった状態を descendant 状態などと呼ぶ。そしてこれらの状態の集合を Verma 加群という。Verma 加群は全 Hilbert 空間の部分集合であり、L_n の作用の下で閉じており、Virasoro 代数の最高ウェイト表現になっている。

Verma 加群の中に singular ベクトルと呼ばれる状態が含まれることがある。singular ベクトル $|\chi\rangle$ はそれ自身が最高ウェイト状態になっていて、(つまり(2.74)を満たす、)$\langle\chi|\chi\rangle = 0$ であって、その descendant 状態が元の Verma 加群の部分加群をなしている状態である。singular ベクトルを含むような Verma 加群、あるいは表現を可約であるといい、含まないようなものを既約であるという。

descendant 状態も真空状態 $|0\rangle$ に原点にある場の演算子を作用させたものとして表現される。つまり

$$L_{-n}|h\rangle = L_{-n}\phi(0)|0\rangle = \oint \frac{dz}{2\pi i}\frac{1}{z^{n-1}}T(z)\phi(0)|0\rangle \tag{2.75}$$

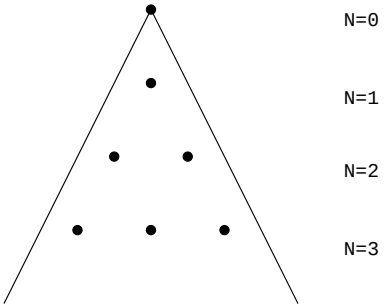

図 2.3: Verma 加群

要するに原点にある ϕ をエネルギー運動量テンソルと OPE をとったときに現れる場を真空に状態に作用させた形になっている。このような場をもう少し一般化して次のような descendant 場を定義する。

$$(L_{-n}\phi)(w) = \oint_w \frac{dz}{2\pi i}\frac{1}{(z-w)^{n-1}}T(z)\phi(w), \tag{2.76}$$

$$\text{i.e.} \qquad T(z)\phi(w) = \sum_n \frac{(L_n\phi)(w)}{(z-w)^{n+2}} \tag{2.77}$$

このような descendant 場と primary 場を合わせて共形族という。singular ベクトル $|\chi\rangle$ に対応する場 χ を null 場と呼ぶ。

descendant 場含む相関関数は対応する primary 場を含んだ相関関数で書き表すことができる。このことは定義から明らかなのだが、$X = \phi_1(w_1)\cdots\phi_n(w_n)$ として

$$\begin{aligned}\langle (L_{-n}\phi)(w)X\rangle &= \oint_w \frac{dz}{2\pi i}\frac{1}{(z-w)^{n-1}}\langle T(z)\phi(w)X\rangle \\ &= -\oint_{\{w_i\}}\frac{dz}{2\pi i}\sum_i\left\{\frac{1}{z-w_i}\partial_{w_i}\langle\phi(w)X\rangle + \frac{h_i}{(z-w_i)^2}\langle\phi(w)X\rangle\right\} \\ &\equiv \mathcal{L}_{-n}\langle\phi(w)X\rangle \qquad (n\geq 1)\end{aligned} \tag{2.78}$$

ここで微分演算子 $\mathcal{L}_{-n}$ を

$$\mathcal{L}_{-n} = \sum_i\left\{\frac{(n-1)h_i}{(w_i-w)^n} - \frac{1}{(w_i-w)^{n-1}}\partial_{w_i}\right\} \tag{2.79}$$

と、定義した。

なお、$(L_{-k_1}L_{-k_1}\cdots\phi)(z)$ といった場も同様に扱っていくことができる。

2.7 $c = 1$ 自由ボソン

周の長さが L であるシリンダー上の質量 0 自由ボソン $\phi(x,t),(x,t)$ は Minkovski 座標、の共形場理論を考える。対応する物理としては時空を伝播する closed string のボゾニックな弦理論が相当する。周期的境界条件 $\phi(x+L,t) = \phi(x,t)$ から $\phi(x,t) = \sum_n e^{\frac{2\pi i n x}{L}}\phi(t)$ と Fourier 展開できる。Lagrangian は $\mathcal{L} = \frac{g}{2}\int dx\{(\partial_t\phi)^2 - (\partial_x\phi)^2\}$ であり、ϕ_n の共役運動量は $\pi_n = gL\dot{\phi}_{-n}, [\phi_n, \pi_m] = i\delta_{nm}$ となる。

ここで $\tilde{a}_n = \frac{1}{\sqrt{4\pi g|n|}}(2\pi g|n|\phi_n + i\pi_{-n})$ を用いて演算子 $a_n, \bar{a}_n$ を定義する。

$$a_n = \begin{cases} -i\sqrt{n}\tilde{a}_n & (n>0) \\ i\sqrt{-n}\tilde{a}^\dagger_{-n} & (n<0) \end{cases}, \bar{a}_n = \begin{cases} -i\sqrt{n}\tilde{a}_{-n} & (n>0) \\ i\sqrt{-n}\tilde{a}^\dagger_n & (n<0) \end{cases} \tag{2.80}$$

これらは Heisenberg 代数を満たす。

$$[a_n, a_m] = n\delta_{n+m,0}, [a_n.\bar{a}_m] = 0, [\bar{a}_n, \bar{a}_m] = n\delta_{n+m,0} \tag{2.81}$$

この $\{a_n\}$ を用いると Hamiltonian は

$$H = \frac{1}{2gL}\sum_n\{\pi_n\pi_{-n} + (2\pi ng)^2\phi_n\phi_{-n}\} = \frac{1}{2gL}\pi_0^2 + \frac{2\pi}{L}\sum_{n>0}(a_{-n}a_n + \bar{a}_{-n}\bar{a}_n) \tag{2.82}$$

と書ける。

$$[H, a_{-m}] = \frac{2\pi}{L}m\alpha_{-m}, \quad [H, \pi_0] = -\frac{i}{gL}\pi_0 \tag{2.83}$$

なる交換関係を満たすので

$$\phi_0 = \pi_0 + \frac{1}{gL}\pi_0 t, \quad a_n(t) = a_n e^{\frac{2\pi i n t}{L}} \tag{2.84}$$

となる。$\bar{a}_n$ についても同様の結果を得る。これを使って $\phi(x,t)$ を一気に書き直すと次のような結果になる。

$$\phi(x,t) = \phi_0 + \frac{1}{gL}\pi_0 t + \frac{i}{\sqrt{4\pi g}}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}(a_n e^{\frac{2\pi i n(x-t)}{L}} - \bar{a}_n e^{\frac{2\pi i n(x+t)}{L}}) \tag{2.85}$$

ϕ_0, π_0 がそれぞれ closed string の重心と全運動量にあたることは指摘するまでもないであろう。

ここで Euclid 時間 $\tau = it$ を導入して $z = e^{\frac{2\pi(\tau - ix)}{L}}, \bar{z} = e^{\frac{2\pi(\tau + ix)}{L}}$ により複素座標に移行すると

$$\phi(z,\bar{z}) = \phi_0 - \frac{i}{4\pi g}\pi_0 \log(z\bar{z}) + \frac{i}{\sqrt{4\pi g}} \sum_{n\neq 0} \frac{1}{n}(a_n z^{-n} + \bar{a}_n \bar{z}^{-n}) \tag{2.86}$$

このように複素座標を導入すると、動径方向を時間方向とする一見エキゾティックな量子化も自然なものに見えてくる。$a_0 = \bar{a}_0 \equiv \frac{\pi_0}{\sqrt{4\pi g}}$ とおくと

$$i\partial\phi(z) = \frac{1}{4\pi g} \sum_n a_n z^{-n-1} \tag{2.87}$$

$\bar{\partial}\phi$ についても同様の結果が得られるのはいいであろう。

Hamiltonian には ϕ_0 が入らないので π_0(すなわち a_0) の固有値は良い量子数になる。その固有値を α とすると、自由ボゾンの Fock 空間は、連続パラメーターで特徴付けられる真空の族 $\{|\alpha\rangle\}$ があって、そこに生成消滅演算子を次々と作用させることによりつくることができる。

$$a_n|\alpha\rangle = \bar{a}_n|\alpha\rangle = 0, \quad (n>0), a_0|\alpha\rangle = \bar{a}_0|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \tag{2.88}$$

もっとも $i\partial\phi(z)$ は $U(1)$ 対称性のカレントになっているから、$\mathcal{Q} = \oint \frac{dz}{2\pi i} i\partial\phi(z) \propto a_0$ なので α は $U(1)$ チャージである。

肝心の $|\alpha\rangle$ であるが、これはバーテックス演算子 $\mathcal{V}_\alpha$ を使って定義することができる。

$$|\alpha\rangle = \mathcal{V}_\alpha(0,0)|0\rangle, \tag{2.89}$$

$$\mathcal{V}_\alpha =: e^{i\alpha\phi(z,\bar{z})} : \tag{2.90}$$

バーテックス演算子と $U(1)$ カレント、エネルギー運動量テンソルの OPE は、バーテックス演算子を Tayler 展開して Wick の定理を使えば容易に計算できる。

$$\partial\phi(z)\mathcal{V}_\alpha(w,\bar{w}) \sim -\frac{i\alpha}{4\pi g}\frac{\mathcal{V}_\alpha(w,\bar{w})}{(z-w)} \tag{2.91}$$

$$T(z)\mathcal{V}_\alpha(w,\bar{w}) \sim \frac{\alpha^2}{8\pi g}\frac{\mathcal{V}_\alpha(w,\bar{w})}{(z-w)^2} + \frac{\partial\mathcal{V}_\alpha(w,\bar{w})}{(z-w)} \tag{2.92}$$

この結果から $h_\alpha = \frac{1}{2}\alpha^2, (g = \frac{1}{4\pi})$ であることは明らかである。

バーテックス演算子同士の OPE は次の公式を使うと簡単にわかる。

$$: e^{A_1} :: e^{A_2} : \cdots : e^{A_n} :=: e^{A_1+A_2+\cdots+A_n} : e^{\sum_{i<j}\langle A_i A_j\rangle} \tag{2.93}$$

ただし A_i は生成消滅演算子の線形和である。左辺の正規積を素直に (生成演算子達)$\times$(消滅演算子達) と書き換えて Hausdorff の公式を使えば右辺に至る。

したがって

$$\mathcal{V}_\alpha(z,\bar{z})\mathcal{V}_\beta(w,\bar{w}) = |z-w|^{\frac{2\alpha\beta}{4\pi g}} : e^{i\alpha\phi(z,\bar{z})+i\beta\phi(w,\bar{w})} :\sim |z-w|^{\frac{2\alpha\beta}{4\pi g}}\mathcal{V}_{\alpha+\beta} + \cdots \tag{2.94}$$

$\alpha\beta > 0$ であると $|z-w| \to \infty$ の場合に $\langle \mathcal{V}_\alpha \mathcal{V}_\beta \rangle$ が大きくなっていくので $\alpha\beta < 0$ でなければならない。しかも primary 場の 2 点関数は二つの場の共形ウェイトが等しくなければ 0 になるから、$\alpha = -\beta$ のときにのみこの OPE は意味をもつ。

$$\mathcal{V}_\alpha(z,\bar{z})\mathcal{V}_{-\alpha}(w,\bar{w}) \sim |z-w|^{-2\alpha^2} + \cdots, \quad (g = \frac{1}{4\pi}) \tag{2.95}$$

一般にバーテックス演算子の n 点関数は $U(1)$ チャージの総和が 0 になるときに意味を持つ。ただし理論が定義されているリーマン面のスカラー曲率とボゾンが結合している理論の場合には $\sum \alpha_i = \text{const.}$ という形に修正され、$i\partial\phi$ は primary ではなくなり、$\mathcal{V}_\alpha$ の共形ウェイト、理論の central charge がずれる。

$T(z)$ をモード展開すると

$$T(z) = -2\pi g : \partial\phi(z)\partial\phi(z) := \frac{1}{2}\sum_{m,n\in\mathbb{Z}} z^{-n^m-2} : a_n a_m : \tag{2.96}$$

となるから

$$L_n = \frac{1}{2}\sum_m a_{n-m}a_m \qquad (n \neq 0) \tag{2.97}$$

$$L_0 = \sum_{n>0} a_{-n}a_n + \frac{1}{2}a_0^2 \tag{2.98}$$

と容易に読みとれる。$\bar{T}(\bar{z})$ についても同様である。これを利用すると $[L_0, a_{-m}] = m a_{-m}$ がすぐわかるが、a_{-m} は共形ウェイトを m だけ増やすことがいえる。さらに Hamiltonian は

$$H = \frac{2\pi}{L}(L_0 + \bar{L}_0) \tag{2.99}$$

と表すことが可能である。

$h = \left(\frac{\text{整数}}{2}\right)^2$ となるときは Verma 加群は可約になる。このような可約な Verma 加群は無限個の既約な Verma 加群に分解することができる。

見やすくするために $\alpha = \sqrt{2}m$ とおくと、$h = m^2$ となる。一般の m に対して Verma 加群は既約なので対応する共形族に primary 場は 1 つしかない。ところが $m \in \mathbb{Z}/2$ の場合には、

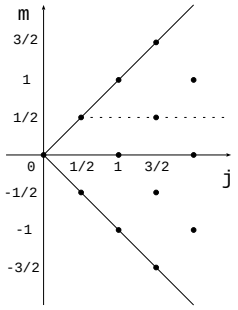

図 2.4: $c = 1$ ボゾン理論の primary 場

$j, j - |m| \in \mathbb{Z}$ で特徴付けられる既約な Verma 加群に分解される。そのような primary 場は (j,m) でラベルされ、その共形ウェイトは j^2 となる。この状況を図に表すと図 2.4 のようになる。$m = \text{const.}$ の線は Verma 加群を表している。descendant 状態、あるいは descendant 場が共形ウェイトの大きさ順に並んでいる。斜めの実線は Verma 加群の最高ウェイト状態に対応する primary 場、点は Verma 加群内の Virasoro 代数の既約表現に対応する primary 場を表している。

(j,m) は $SU(2)$ の多重項を構成する [15]。(j,m) に対応する primary 場は具体的には次のような形になる。

$$\phi_{(j,m)}(w) \sim \left(: \oint \frac{dz}{2\pi i} e^{-i\sqrt{2}\phi(z+w)} : \right)^{j-m} : e^{i\sqrt{2}\phi(z)} : \tag{2.100}$$

自由ボゾンの Lagrangian は $\phi \to \phi + \text{const.}$ に対して不変なので $\phi \sim \phi + 2\pi R$ と同一視してコンパクト化するのに少しの修正ですむ。まず重心の運動量 π_0 が $\frac{1}{R}$ の整数倍になること、そして $\phi(x+L,t) = \phi(x,t) + 2\pi mR, m$ は巻き付き数、となる 2 点である。

すると

$$\phi(x,t) = \phi_0 + \frac{n}{gRL}t + \frac{2\pi Rm}{L}x + \frac{i}{\sqrt{4\pi g}} \sum_{k\neq 0} \frac{1}{k} \left(a_k e^{\frac{2\pi ik(x-t)}{L}} - \bar{a}_{-k} e^{\frac{2\pi ik(x+t)}{L}} \right) \tag{2.101}$$

と変更されるから

$$\begin{aligned} \phi(z,\bar{z}) = \phi_0 &- i\left(\frac{n}{4\pi gR} + \frac{1}{2}mR \right) \log z + \frac{i}{\sqrt{4\pi g}} \sum_{k\neq 0} \frac{1}{k} a_k z^{-k} \\ &- i\left(\frac{n}{4\pi gR} - \frac{1}{2}mR \right) \log \bar{z} + \frac{i}{\sqrt{4\pi g}} \sum_{k\neq 0} \frac{1}{k} \bar{a}_k \bar{z}^{-k} \end{aligned} \tag{2.102}$$

$$\therefore \qquad i\partial\phi(z) = \left(\frac{n}{4\pi gR} + \frac{1}{2}mR \right) \frac{1}{z} + \frac{1}{\sqrt{4\pi g}} \sum_{k\neq 0} a_k z^{-k-1} \tag{2.103}$$

$\frac{1}{z}$ の係数が変化したので

$$L_0 = \sum_{n>0} a_{-n}a_n + 2\pi g\left(\frac{n}{4\pi gR} + \frac{1}{2}mR\right)^2, \quad h_{m,n} = 2\pi g\left(\frac{n}{4\pi gR} + \frac{1}{2}mR\right)^2 \tag{2.104}$$

2.8 4 点関数と微分方程式

大域的共形対称性から 2 点、3 点関数の形が強く制限されることは既に見た。primary 場の 4 点関数の場合にはせいぜい次のような形に制約することが言えるに過ぎない。

$$\langle\phi_0(z_0)\phi_1(z_1)\phi_2(z_2)\phi_3(z_3)\rangle = \prod_{0\le i<j\le 3}(z_i - z_j)^{\mu_{ij}}G(z) \tag{2.105}$$

ただし $\mu_{ij} = \frac{1}{3}(\sum_{k=0}^{3} h_k) - h_i - h_j$ である。また $z = \frac{(z_0-z_1)(z_2-z_3)}{(z_0-z_3)(z_2-z_1)}$ は非調和比で、射影変換の下で不変である。

そこで 4 点関数に対する微分方程式をたてて 4 点関数の形を決定していく。ここでは $c = 1$ コンパクト化自由ボゾンの理論 $(R = (\text{無理数})R_{s.d.})$ での具体例を扱うことにする。結合定数を $g = \frac{1}{4\pi}$ にとり、$\langle\phi_1\phi_k\phi_1\phi_k\rangle$ を計算する。ここで $1, k$ は $(1,0), (k,0)$ を表している。共形ウェイトはそれぞれ $1, k^2$ となっている。

$c = 1$ の共形場理論の $h = 1$ の primary 場 ϕ_1 に対応する Verma 加群は可約であってレベル 3 で singular ベクトルが現れる。対応する null 場は

$$([L_{-3} - \frac{2}{3}L_{-1}L_{-2} + \frac{1}{6}(L_{-1})^3]\phi_1)(z) \tag{2.106}$$

である。null 場は文字通り'0' であるから

$$\langle([L_{-3} - \frac{2}{3}L_{-1}L_{-2} + \frac{1}{6}(L_{-1})^3]\phi_1)(z_0)\phi_k(z_1)\phi_1(z_2)\phi_k(z_3)\rangle = 0 \tag{2.107}$$

なる方程式を得る。

ところで既に見たように descendant 場を含んだ相関関数は微分演算子 $\mathcal{L}_{-n}$ を primary 場のみを含んだ相関関数に作用させた形で表されるから、着目している 4 点関数の微分方程式を得ることができる。

$$\left[\mathcal{L}_{-3} - \frac{2}{3}\mathcal{L}_{-1}\mathcal{L}_{-2} + \frac{1}{6}(\mathcal{L}_{-1})^3\right]\langle\phi_1(z_0)\phi_k(z_1)\phi_1(z_2)\phi_k(z_3)\rangle = 0 \tag{2.108}$$

これをいったん、$G(z)$ の微分方程式に直して $z_1 \to 0, z_2 \to 1, z_3 \to \infty$ の極限をとり、改めて $\mathcal{F}(z) = z^{-\frac{2}{3}}(1-z)^{-\frac{2}{3}}G(z)$ と定義して方程式を変形すると次のようになる [13]。

$$\begin{aligned}-4(k^2(z-1)^3 - z(1-3z+z^2))\mathcal{F} - 2(z-1)z(-1+2k^2(z-1)^2+9z-7z^2)\partial\mathcal{F} \\ + 4(z-1)^2z^2(2z-1)\partial^2\mathcal{F} + z^3(z-1)^3\partial^3\mathcal{F} = 0\end{aligned} \tag{2.109}$$

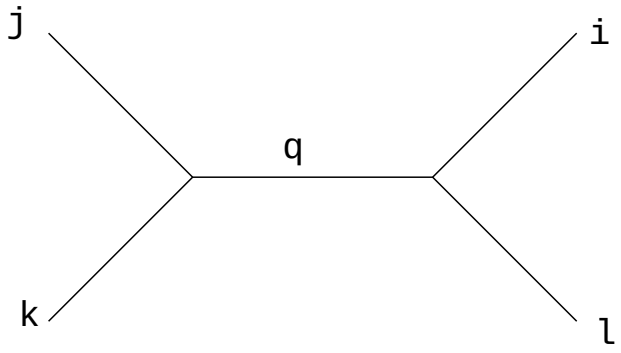

図 2.5: 共形ブロック

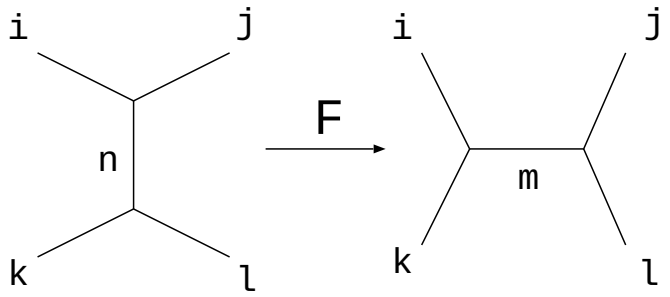

図 2.6: fusing matrix

この方程式は独立な解を 3 つ持っていて

$$\mathcal{F}^{k-1}_{1k,1k} = \frac{z^{-2k}}{1-z}^{2}, \mathcal{F}^{k}_{1k,1k} = \frac{2k^2 - 4k^2 z + z + 2k^2 z^2}{z k^2 (1-z)^2}, \mathcal{F}^{k+1}_{1k,1k} = \frac{z^{2k}}{1-z}^{2} \tag{2.110}$$

$\mathcal{F}$ は共形ブロックと呼ばれるもので、大雑把に言うと $\langle \phi_1(z)\phi_k(0)\phi_1(1)\phi_k(\infty)\rangle$ にあたる。

ここで少し共形ブロックの説明をする。$\langle \phi_j(z)\phi_k(0)\phi_i(1)\phi_l(\infty)\rangle$ の共形ブロック $\mathcal{F}^q_{il,jk}(z)$ が得られたとする。i,j,k,l,q は primary 場をラベルしている。ただし $z \to 0$ の極限で $\mathcal{F}^q_{il,jk}(z) \sim z^{h_q - h_j - h_k}$ と規格化されているとする。$\mathcal{F}^q_{il,jk}(z)$ の物理的意味は primary 場が中間状態 q を経て primary 場 k,l になる振幅を表している (図 2.5)。要するに部分波展開しているわけである。そうすると $z \to 0$ の極限では $\mathcal{F}^q_{il,jk}(z) \sim \langle \phi_j \phi_k \phi_q \rangle \langle \phi_q \phi_i \phi_l \rangle$ と振る舞う。

非調和比を z に固定して $z_1 \to 1, z_2 \to 0, z_3 \to \infty$ の極限をとると $z_0 \to 1-z$ となる。このことは共形ブロックの $0,1$ にあった場を入れ替えることになる。このとき共形ブロック同士は fusing matrix で関係付けられる。また $z_1 \to 0, z_0 \to 0, z_3 \to \infty$ のとき $z_2 \to \frac{1}{z}$ となる。このことは共形ブロックの $z,1$ にあった場を入れ替えることに相当し、それぞれの共形ブロッ

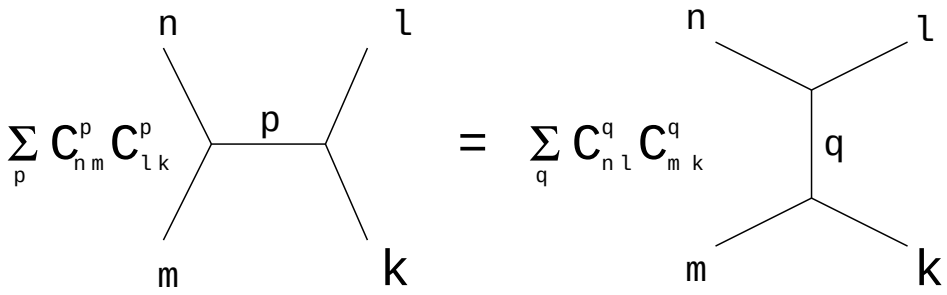

図 2.7: 共形ブロックの交差対称性

クは braiding matrix で関係付けられる。

また $\langle\phi_j(z)\phi_k(0)\phi_i(1)\phi_l(\infty)\rangle$ の交差対称性から図 2.7 の関係が導かれる。

2.9 指標、分配関数、fusion 代数

Verma 加群 $V(c,h)$ は最高ウェイト状態 $|h\rangle$ から生成される Virasoro 代数の最高ウェイト表現であった。$V(c,h)$ に対して指標 $\chi(c,h)(\tau)$ を次のように定義する。

$$\chi(c,h)(\tau) = trq^{L_0-\frac{c}{24}} = \sum_{n=0}^{\infty} \dim(h+n) q^{n+h\frac{c}{24}} \tag{2.111}$$

ただし $q \equiv e^{2\pi i\tau}$ である。$V(c,h)$ が可約でもそのことを考慮しないで指標の計算の遂行は簡単にできる。というのは $\dim(h+n) = p(n), p(n)$ は分配数、なので

$$\chi(c,h)(\tau) = q^{h-\frac{c}{24}} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a-q^n} = \frac{q^{h+\frac{1-c}{24}}}{\eta(\tau)} \tag{2.112}$$

$\eta(\tau)$ は Dedekind の η 関数である。$V(c,h)$ が可約な場合は singular ベクトルで生成される部分加群 $V(c,h')$ をさっ引いて既約な Virasono 代数の表現 $M(c,h)$ が作れる。$M(c,h)$ の指標が $\chi(c,h) - \chi(c,h')$ で与えられるのは明らかである。

ところで $\chi_j(\tau), j$ は Virasoro 代数の表現をラベル、はモデュラー変換の表現になっている。例えばモデュラー変換の S 変換 $\tau \to -\frac{1}{\tau}$ の下で

$$\chi_i(-\frac{1}{\tau}) = \sum_j S_{ij}\chi_j(\tau) \tag{2.113}$$

S_{ij} は unitary、と変換する。

トーラス上の分配関数 Z は

$$Z(\tau) = tr(q^{L_0 - \frac{c}{24}} \bar{q}^{\bar{L}_0 - \frac{c}{24}}) \tag{2.114}$$

で定義される。ただし τ はトーラスのモデュライ変数である。定義から明らかであるが、理論の Hilbert 空間が $\mathcal{H} = \oplus_{h,\bar{h}} M(c,h) \otimes M(c,\bar{h})$ と分解されるとき

$$Z(\tau) = \sum_{h,\bar{h}} \mathcal{M}_{h,\bar{h}} \chi_h(\tau) \bar{\chi}_{\bar{h}}(\bar{\tau}) \tag{2.115}$$

となる。$N_{h,\bar{h}}$ は Hilberrt 空間内の $M(c,h) \otimes M(c,\bar{h})$ の多重度である。

半径 R のコンパクト化された自由ボゾンの分配関数は、状態空間が Fock 空間で張れることから

$$Z(\tau) = \prod_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{1-q^n} \right|^2 \sum_{m,n} \langle m,n | q^{\frac{1}{2}\alpha_0^2 - \frac{c}{24}} \bar{q}^{\frac{1}{2}\bar{\alpha}_0^2 - \frac{c}{24}} | m,n \rangle = \frac{1}{|\eta(\tau)|^2} \sum_{m,n} q^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{R} + \frac{1}{2}mR\right)^2} \bar{q}^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{R} - \frac{1}{2}mR\right)^2} \tag{2.116}$$

Virasoro 代数の既約表現に分解することも可能だがここではそこまでは行わない。

複数の primary 場の OPE により別の primary 場を作ることを fusion という。この fusion を代数的に表したのが fusion 代数である。

$$\phi_i \times \phi_j = \sum_k N_{ij}^k \phi_k \tag{2.117}$$

ここで N_{ij}^k は $\phi_i \phi_j$ の OPE に現れる ϕ_k の個数を表す。これは可換な代数になっていて、スピンの合成則の一般化といえる。

この fusion 係数 N_{ij}^k と S_{ij} とは関係は有名な Verlinde の公式によって記述される。 [16]

$$N_{ij}^k = \sum_m \frac{S_{im} S_{jm} \bar{S}_{mk}}{S_{1m}} \tag{2.118}$$

一般に S_{ij} は複素数であるが N_{ij}^k は常に非負整数になる。1 は真空表現 $(h=0)$ を表す。N_{ij}^k は $\phi_i \times \phi_j \times \phi_{k^*}$ を fusion して生じる恒等演算子の数 N_{ijk^*} に等しい。そうすると $N_{ijk} = N_{ij}^{k^*}$ は i,j,k について対称ゆえ $S_{km} = \bar{S}_{mk^*}$。共役行列 $C_{ij} = \delta_{ji^*}$ を使うと $CA = A^\dagger$ は明らかである。

ところでトーラス上の 2 つのサイクル (a,b) は S 変換の下で $S : (a,b) \to (-b,a)$ と移るので $S^2 : (a,b) \to (-a,-b)$。よって $S^2 = C$ は明らかである。また理論が unitary な場合には $S_{1i} = S_{i1} > 0$ である。なぜならば、$\chi_i(-1/\tau) = \sum_j S_{ij} \chi_j(\tau)$ において、$\tau \to i\infty (q \to 0)$ の

極限で (右辺) $\sim S_{i1}q^{-\frac{c}{24}}$。なぜならば理論の unitary 性より $h=0$ が最小の共形ウェイトである。一方 $-\frac{1}{\tau} \to i0$ なので左辺は $+\infty$ に発散する。したがって $S_{i1} > 0$ であることは明らかである。

また S 行列と fusing matrix には

$$S_{ij} = \frac{S_{1i}}{F_{11}\begin{bmatrix} j & j^* \\ j & j \end{bmatrix}} \sum_m e^{2\pi i(h_i+h_j-h_m)} F_{1m}\begin{bmatrix} j & i \\ j & i^* \end{bmatrix} F_{m1}\begin{bmatrix} j^* & j \\ j & j \end{bmatrix} = S_{11}\sum_m e^{2\pi(h_i+h_j-h_m)} d_m N_{ij}^m \tag{2.119}$$

なる関係がある [17][9]。

第3章　Boundary Conformal Field theory

boundary conformal field theory(BCFT) は openstring theory や境界をもつ系の臨界状態を記述する理論として誕生した。1989 年の Cardy の仕事 [2] 以降、boudary state のシステマティックな解析が可能になり、素粒子理論の分野では弦理論に、物性理論の分野では近藤問題への応用がなされていった。最近では D-brane, 量子ブラウン運動に応用されたりなどしている。

この章では rational conformal field theory(RCFT) の boundary CFT のみを扱うこととし、対称性を破らない範囲で一般的な境界条件に対する boundary state の構成法をレビューする。[9]

そしてそれを通じて見えてくるものはというと、boundary state を後述する Cardy condition から求めていこうとすると fusion 代数の非負整数行列表現を求めることに帰着される。したがって、boundary state の分類はそのような行列表現の分類を通じてなすことができる。そして boundary state の分類と分配関数の分類との間の関係をかいま見ることができる。その過程の中で graph fusion 代数が自然に現れてくる。さらに sewing constraint から graph fusion 代数と dual な関係にある Pasquir 代数が現れる。

3.1　準備

この章では RCFT の BCFT をレビューする。理論のカイラル代数を $\mathcal{A}$ とし、代数の生成子を W_n とする。これには Virasono 代数の生成子 L_n を含む。既約表現を i として $\mathcal{I}$ を既約表現の集合であって、その数は有限であるとする。i^* を i の共役表現、1 で真空表現を表すとする。

$(j,\bar{j})$ により bulk の場を表し、その集合を $Spec$ とする。$\mathcal{H} = \oplus_{(j,\bar{j})\in Spec} \mathcal{V}_j \otimes \bar{\mathcal{V}}_{\bar{j}}$ を無限に長いシリンダー上の共形場理論の Hilbert 空間とする。特に $\mathcal{E} = \{j|(j,\bar{j}=j)\}$ を expornent という。一般に j は重複するのでその際には (j,α) と表記してそれらを区別することにする。

共形場理論の分配関数は 2 つのタイプにわけることができる。まず、拡張された代数 $\mathcal{A}' \supseteq \mathcal{A}$

が存在して、ブロック対角な形をしたものをタイプ 1 とする。

$$Z = \sum_{blocksB} |\sum_{i\in B} \chi_i|^2 \tag{3.1}$$

例えば $\widehat{su(2)}$ 理論の A, D_{2p}, E_6, E_8 がこれにあたる。もう一方は $\mathcal{A}'$ の自己同型写像 ζ が存在してブロック対角な形をしていないものをタイプ 2 と呼ぶことにする。

$$Z = \sum_B \left(\sum_{i\in B} \chi_i\right)\left(\sum_{j\in\zeta(B)} \bar{\chi}_j\right) \tag{3.2}$$

たとえば $\widehat{su(2)}$ 理論の D_{2p+1}, E_7 がこれにあたる。

3.2 境界条件と bondary state

まず、上半平面あるいは半無限に伸びた円筒などといった領域の境界上において、エネルギー運動量テンソル $T, \bar{T}$ と chiral algebra の current $W, \bar{W}$ に対して、次のような境界条件を課す。

$$T(z) - \bar{T}(\bar{z})|_{z=\bar{z}} = 0 \tag{3.3}$$
$$W(z) - \bar{W}(\bar{a})|_{z=\bar{z}} = 0 \tag{3.4}$$

(3.3) は共形変換の下で境界が境界に写像されるための必要条件ある。また、境界から外部に運動量が流れ出ないための必要条件ともいえる。

一方、$W, \bar{W}$ にはエネルギー運動量の様な物理的な要請が特にない。そこで(3.4) の条件を少々緩和することを考える。そうは言ってもいきなり共形不変性のみを保つような一般的な境界条件を考えていくのは難しいので、理論の chiral 対称性を保つような境界条件を扱っていくこととして RCFT の枠内で議論を進めていく [18] [19]。chiral field の空間に作用する自己同型写像 Ω を用いて

$$W(z) - \Omega\bar{W}(\bar{z})|_{z=\bar{z}} = 0 \tag{3.5}$$

ただし、Ω は $T, \bar{T}$ に trivial に作用するものとする。

今、境界付きの領域として上半平面を考える。そして $\zeta = e^{-\frac{2\pi i}{T}w}, w = \frac{L}{\pi}\log z$ によって、その上半平面からシリンダーへ変換する。これによって open string の 1-loop ダイヤグラムから closed string の tree ダイヤグラムに描像が移ることになる。

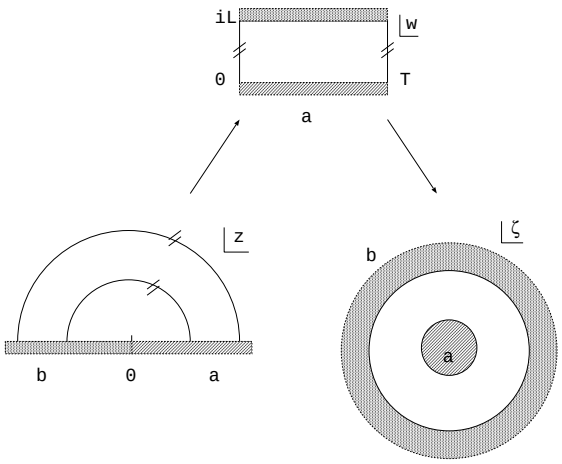

図 3.1: z から ζ への共形変換

これに伴ってエネルギー運動量テンソルとカレントの境界条件は変換されて、

$$\zeta^2 T(\zeta) = \bar{\zeta}^2 \bar{t}(\bar{\zeta}) \tag{3.6}$$

$$\zeta^{h_w} W(\zeta) = (-\bar{\zeta})^{h_w} \Omega \bar{W}(\bar{\zeta}) \tag{3.7}$$

$$\tag{3.8}$$

以上から、closed string のヒルベルト空間中にある boundary state $|a\rangle_\Omega$ を次のように定義する。

$$(W_n - (-1)^{h_w} \Omega \bar{W}_{-n})|a\rangle_\Omega = 0 \tag{3.9}$$

特に

$$(L_n - \bar{L}_{-n})|a\rangle_\Omega = 0 \tag{3.10}$$

ただし第 2 項を計算する際に周積分の向きに気をつけること。

次に、この線型方程式を解いて boundary state $|a\rangle_\Omega$ を実際に求めたい。結論を先に述べると、この方程式の解の空間は Ishibashi state [21] と呼ばれる $\mathcal{E}_\Omega = \{j|(j,\bar{j} = \omega(j)) \in Spec\}$ でラベルされる状態によって張られることが知られている。よって $|a\rangle_\Omega$ を Ishibashi state の線型結合で表わすことになる。なお ω は Ω に依存して決まる。そこで先ず、Ishibasi state が解の空間を張ることを確認する。

はじめに、Ω が trivial で chiral algebra $\mathcal{A}$ が Virasoro 代数の場合を考察する。

$\mathcal{A}_L \otimes \mathcal{A}_R$ の下で bulk のヒルベルト空間 $\mathcal{H} = \sum_{(j,\bar{j})\in Spec} \mathcal{V}_j \otimes \mathcal{V}_{\bar{j}}$ の各 $\mathcal{V}_j \otimes \mathcal{V}_{\bar{j}}$ は混じり合わない。したがって各 $\mathcal{V}_j \otimes \mathcal{V}_{\bar{j}}$ において(3.10) を解いてやればよいことがわかる。

任意の状態 $|A\rangle = \sum_{n,\bar{n}} a_{n,\bar{n}} |j,n\rangle \otimes |\bar{j},\bar{n}\rangle \in \mathcal{V}_j \otimes \mathcal{V}_{\bar{j}}$ に対して $\mathcal{V}_{\bar{j}}$ から $\mathcal{V}_j$ への準同型写像 $X_A = \sum_{n,\bar{n}} a_{n,\bar{n}} |j,n\rangle\langle\bar{j},\bar{n}|$ を一対一対応させることができる。すると

$$
\begin{aligned}
(L_n - \bar{L}_{-n})|A\rangle =& \sum_{n,\bar{n}} a_{n\bar{n}} (L_n|j,n\rangle \otimes |\bar{j},\bar{n}\rangle - |j,n\rangle \otimes \bar{L}_{-n}|\bar{j},\bar{n}\rangle) \\
\Longrightarrow \qquad & \sum_{n,\bar{n}} a_{n\bar{n}} (L_n|j,n\rangle\langle\bar{j},\bar{n}| - |j,n\rangle\langle\bar{j},\bar{n}|L^\dagger_{-n}) \qquad = \sum_{n,\bar{n}} a_{n\bar{n}} (L_n|j,n\rangle\langle\bar{j},\bar{n}| - |j,n\rangle\langle\bar{j},\bar{n}|L_n)
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

ここで $L^\dagger_n = L_{-n}$ であることを使った。

これより(3.10) の代りに

$$
L_n X_A = X_A L_n \tag{3.12}
$$

という方程式を考えればよい。

これは $\mathcal{V}_j$ と $\mathcal{V}_{\bar{j}}$ の中で考えると、L_n と X_A は可換であることを示している。ところで $\mathcal{V}_j, \mathcal{V}_{\bar{j}}$ は既約であり、$X_A : \mathcal{V}_{\bar{j}} \to \mathcal{V}_j$ は準同型である。よってシュアーの補題より X_A は同型写像だ。よって $j = \bar{j}$ で、$X_A \propto \sum_n |j,n\rangle\langle\bar{j},\bar{n}| = P_j$ であることがわかる。

以上から $\mathcal{H}$ の中で $\mathcal{V}_j \otimes \mathcal{V}_j$ の形をした項以外からは解は得られない。規格化しなおして $X_A = P_j$ ととり、この準同型写像に対応する状態を Ishibashi state といい、$|j\rangle\rangle$ で表わす。このようにして独立な boundary state $|j\rangle\rangle$ がとれて、それらは $\mathcal{E}$ でラベルされる。この $\mathcal{E}$ を expornent と呼ぶ。

Ω が trivial な場合には (3.10) についても同様な考察ができる。

次に Ω が non trivial な場合を考える。ある unitary あるいは anti-unitary な演算子 U が存在して

$$
W^\dagger_n = (-1)^{h_W} U^{-1} W_{-n} U \tag{3.13}
$$

を満たす。

この事実を使って先程と同様、$\mathcal{V} \otimes U_\omega U \mathcal{V}_{\bar{j}}$ に属する状態 $|A\rangle$ を考え、それに対して準同型 $X_A : \mathcal{V}_{\bar{j}} \to \mathcal{V}_j$ を 1 対 1 対応させる。ただし $\Omega W_n = U_\Omega W_n U_\Omega^{-1}$ である。つまり

$$
\begin{aligned}
& (W_n - (-1)^{h_W} \Omega \bar{W}_{-n}) \sum_{n,\bar{n}} a_{n\bar{n}} |j,n\rangle \otimes U_\Omega U |\bar{j},\bar{n}\rangle \\
= & \sum_{n,\bar{n}} a_{n\bar{n}} (W_n|j,n\rangle \otimes U_\Omega U|\bar{j},\bar{n}\rangle - (-1)^{h_w} |j,n\rangle \otimes U_\Omega \bar{W}_{-n} U|\bar{j},\bar{n}\rangle)
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

$\Longrightarrow$

$$\begin{aligned}
&\sum_{n,\bar{n}} a_{n\bar{n}}(W_n|j,n\rangle\langle\bar{j},\bar{n}|(U_\Omega U)^\dagger - (-1)^{h_W}|j,n\rangle\langle\bar{j},\bar{n}|(U_\Omega W_{-n}U)^\dagger) \\
&\quad = \sum_{n,\bar{n}} a_{n\bar{n}}(W_n|j,n\rangle\langle\bar{j},\bar{n}|U^\dagger U_\Omega^\dagger - (-1)^{h_W}|j,n\rangle\langle\bar{j},\bar{n}|U^\dagger W_{-n}^\dagger U_\Omega^\dagger) \\
&\quad = \sum_{n,\bar{n}} a_{n\bar{n}}(W_n|j,n\rangle\langle\bar{j},\bar{n}| - |j,n\rangle\langle\bar{j},\bar{n}|)U^\dagger U_\Omega^\dagger \\
&\quad = (W_n X_A - X_A W_n)U^\dagger U_\Omega^\dagger \qquad (3.15)
\end{aligned}$$

よって(3.9)も $W_nX_A = X_AW_n$ に帰着することができる。Ω が trivial な場合と同様の議論を繰り返して、解として Ishibashi state $|j\rangle\!\rangle_\Omega = \sum_n |j.n\rangle \otimes U_\Omega U|j,n\rangle$ が得られる。ただし $U_\Omega U : \mathcal{H}_j \to \mathcal{H}_{\omega(j)}$ である。

以下、見やすくするために Ω を明示的に書かないことにする。

さて、次に Ishibashi state のノルムを定義する必要がある。この時、ナイーブに定義しようとすると困難なことが 2 点ある。

1. $\mathcal{V}_j$ は無限次元ゆえ、ナイーブに trP_j をノルムに採用すると発散する。
2. non-unitary な表現が存在する場合、$\mathcal{V}_j$ 上の Hermite 形式が posotive definite にならず negative norm をもつ状態が存在することになる。

上記 1 に関しては適当な正則化を行って発散を回避することができる。

$\tilde{q} \equiv e^{-\frac{2\pi i}{\tau}}$ を実数となるようにして、$0 < \tilde{q} < 1$ であるとしよう。すると

$$\langle\!\langle j|\tilde{q}^{\frac{1}{2}(L_0+\bar{L}_0-\frac{c}{12})}|j\rangle\!\rangle = trP_j\tilde{q}^{L_0-\frac{c}{24}} = \chi(\tilde{q}) \qquad (3.16)$$

一般に expornent $\mathcal{E}$ の要素は縮退しているので (j,α) とおいてそれらを区別することにする。ここで $(j,\bar{j}) \in Spec$ の重複度は $N_{j\bar{j}}$ であったから、expornent j は N_{jj} だけ縮退していることがわかるので $\alpha = 1, \cdots, N_{jj}$ となる。そして重複度も考慮すると Ishibashi state の内積は

$$\langle\!\langle j',\alpha'|\tilde{q}^{\frac{1}{2}(L_0+\bar{L}_0-\frac{c}{12})}|j,\alpha\rangle\!\rangle = \delta_{jj'}\delta_{\alpha,\alpha'}\chi(\tilde{q}) \qquad (3.17)$$

これらの $\tilde{q} \to 1(\tau \to i\infty)$ の極限を適当に繰り込んでノルムを定義しよう。

理論が unitary である場合、真空状態の conformal weight$= 0$ が、最小の conformal weight である。これより $\chi_j(\tilde{q}) = \sum_j S_{ji}\chi_i(q), q = e^{2\pi i\tau}$ のリーディング・タームは $\chi_1(q) \sim q^{-\frac{c}{24}}$ である。ただし $q \to 0, (\tilde{q} \to 1)$ となる。そこで内積を次のように定義する。

$$\begin{aligned}
\langle\!\langle j',\alpha'|j,\alpha\rangle\!\rangle &= \lim_{\tilde{\to}1} q^{\frac{c}{24}}\langle\!\langle j',\alpha'|\tilde{q}^{\frac{1}{2}(L_0+\bar{L}_0-\frac{c}{12})}|j,\alpha\rangle\!\rangle \\
&= \delta_{jj'}\delta_{\alpha\alpha'}\lim_{\tau\to i\infty} q^{\frac{c}{24}}\chi_j(\tilde{q}) = \delta_{jj'}\delta_{\alpha\alpha'}\lim_{\tau\to i\infty} q^{\frac{c}{24}}S_{j1}\chi_1(q) = \delta_{jj'}\delta_{\alpha\alpha'}S_{1j} \qquad (3.18)
\end{aligned}$$

ただし、$S_{1j}=S_{j1}=S_{1j}^*$ であった。なお、$S_{1j}=S_{11}\times d_j, d_j>0$ は量子次元, であるから Ishibashi state 間の内積は符号が一定である。

次に理論が non-unitary である場合、表現 j_0 が最小の conformal weight $h_{j_0}<0$ をもつとすると

$$\langle\langle j',\alpha'|j,\alpha\rangle\rangle=\delta_{jj'}\delta_{\alpha\alpha'}\frac{S_{1j}}{S_{j0j}}\lim_{\tau\to i\infty}q^{\frac{c_{eff}}{24}}\chi_j(\tilde{q})=\delta_{jj'}\delta_{\alpha\alpha'}S_{1j} \tag{3.19}$$

ただし $c_{eff}=c-24h_{j_0}$ と定義した。結局、理論が unitary のときも non-unitary のときも同じようにノルムを定義することができた。以下、簡単のために α を省略する。

以上から(3.9) の解の空間の基底として $\{\frac{1}{\sqrt{S_{1j}}}|j\rangle\rangle|j\in\mathcal{E}\}$ なる正規直交基底をとることができる。これを用いて最も一般的な boundary state$|a\rangle\rangle$ を次のように表わす。

$$|a\rangle\rangle=\sum_{j\in\mathcal{E}}\frac{\psi_a^j}{\sqrt{S_{1j}}}|j\rangle\rangle \tag{3.20}$$

$\mathcal{V}=a$ を boundary state のラベルの集合とする。

また $a\ \mapsto\ a^*$ なる involution が定義され、$\psi_{a^*}^j=\psi_a^{j^*}=(\psi_a^j)^*$ とする。ただし、$j\ \mapsto\ j^*\quad(N_{ji}^1=\delta_{ji^*})$ は $\mathcal{E}$ 内での involution である。

そして共役な boundary state を

$$\langle\langle b|=\sum_{j\in\mathcal{E}}\langle\langle j|\frac{\psi_{b^*}^j}{\sqrt{S_{1j}}} \tag{3.21}$$

と定義する。

以上から、boundary state の内積は簡単に計算できて

$$\langle\langle b|a\rangle\rangle=\sum_{j\in\mathcal{E}}\frac{\psi_a^j(\psi_b^j)^*}{S_{1j}}\langle\langle j|j\rangle\rangle=\sum_{j\in\mathcal{E}}\psi_a^j(\psi_b^j)^* \tag{3.22}$$

3.3 the Cardy condition

有限の長さのシリンダー上の CFT を考える。

状態 a の boundary state から closed string が放出され、シリンダー上を伝播して、状態 b の boundary state に吸収される過程の分配関数は

$$Z_{b|a}=\langle\langle b|q^{\frac{1}{2}(L_0+\bar{L}_0-\frac{c}{24})}|a\rangle\rangle=\sum_{j\in\mathcal{E}}\psi_a^j(\psi_b^j)^*\frac{\chi_j(q)}{S_{j1}} \tag{3.23}$$

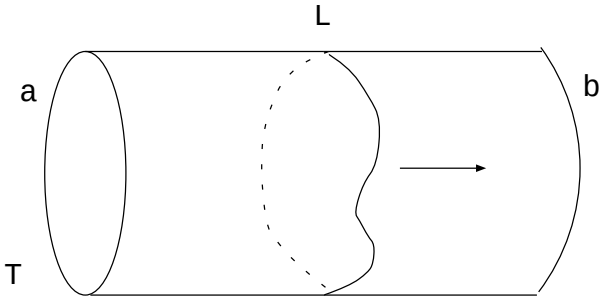

図 3.2: シリンダー上を伝播する closed string

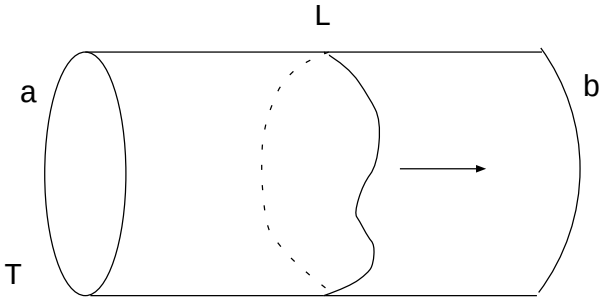

図 3.3: シリンダー上を伝播する open string

ただし $q = e^{-\frac{2\pi i}{\tau}}, \tau = \frac{iT}{2L}$ である。またシリンダー上の Hamiltonian は $H = \frac{2\pi}{T}\left(L_0 + \bar{L}_0 - \frac{c}{24}\right)$ だから $Z_{b|a} = \langle\langle b|e^{-LH}|a\rangle\rangle$ である。

一方この過程は、open string が端点で境界条件 a, b を満たしながら伝搬する 1-loop ダイヤグラムとも考えることが可能である。

open string の Hilbert 空間 $\mathcal{H}_{ba}$ が

$$\mathcal{H}_{ba} = \bigoplus_i n_{ib}^a \mathcal{V}_i \tag{3.24}$$

と分解できるとしよう。ただし n_{ib}^a は非負整数である。するとこの系の分配関数は境界条件 a, b の下での Hamiltonian H_{ba} を用いて

$$Z_{b|a} = tre^{-\frac{\pi T}{L}H_{ba}} = \sum_{i\in\mathcal{I}} n_{ib}^a \chi_i(\tilde{q}) \tag{3.25}$$

ただし、$\tilde{q} = e^{2\pi i\tau} = e^{-\frac{\pi T}{L}}$ である。

この二つの分配関数は同一の現象を記述しているのだから両者は等しくなる。よって

$$n_{ia}^{b} = \sum_{j\in\mathcal{E}} \frac{S_{ij}}{S_{1j}} \psi_a^j (\psi_b^j)^* \tag{3.26}$$

これを Cardy condition という。ただし χ_i の独立性を仮定している。n_{ia}^b は実数であり $(S_{ij})^* = S_{ji^*} = S_{i^*j}, (S_{1j})^* = S_{1j}, \psi_{a^*}^j = \psi_a^{j^*} = (\psi_a^j)^*$ であるから

$$n_{ia}^{b} = n_{i^*b}^{a} = n_{ib^*}^{a^*} \tag{3.27}$$

また、真空の一意性から $n_{1a}^b \leq 1$ である。

注意すべきことだが、$\chi_{i^*}(q) = \chi_i(q)$ 等から一般に specialized character は線型独立ではない。また、affine 代数以外の一般の chiral algebra の unspecialised character が分配関数に現れることもありうるが、unspecialised character の線型独立性、その他の性質についてはほとんど知られていない。よって Cardy condition の成立が一般の RCFT について保証されているかが問題になるが、一般の RCFT についても Cardy condition がやはり成立するものと仮定する。

さて次に orthonormal な、つまり

$$\sum_{j\in\mathcal{E}} \psi_a^j (\psi_b^j)^* = \delta_{ab} \tag{3.28}$$

なる、Cardy condition を満たす boundary state を見つけたとしよう。

さらにそれらが完全系を張っているものと仮定する。

$$\sum_{a\in\mathcal{V}} \psi_a^j (\psi_a^{j'})^* = \delta_{jj'} \tag{3.29}$$

ここで $\frac{S_{ij}}{S_{1j}}$ が fusion 代数の一次元表現になることを使うと、$(n_i)_a^b = n_{ia}^b, i \in \mathcal{I}$ なる行列が可換な fusin 代数を満たすことがわかる。

$$n_i n_j = \sum_{k\in\mathcal{I}} N_{ij}^k n_k \tag{3.30}$$

なお行列 n_i について $n_1 = id, n_{i^*} = n_i^T$ が成立する。

逆に非負整数を要素にとる行列の集合があって、$n_1 = id, n_{i^*} = n_i^T$ であり fusion 代数を満たし、さらに互いに可換であるとする。この時、各行列は同時対角化可能であり固有値は $\frac{S_{ij}}{S_{1j}}$ となる。したがって、各行列は Cardy condition の形で書かれることがわかる。n_i から $\mathcal{E}$ のスペクトルを決定できるが、真空の一意性より $j = 1$ が $\mathcal{E}$ の中に 1 回しか現れないように要請する必要がある。

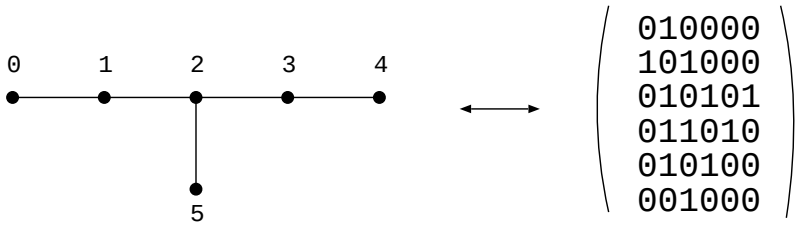

図 3.4: 例：ある行列 n_i とグラフ G_i の対応

以上より、Cardy condition をみたし、orthonormal で完全系を張る解を求めることは fusion 代数の行列表現で、行列要素に非負整数をとり、$n_1 = id, n_{i^*} = n_i^T$ を満すものを求めることに他ならないことがわかった。

n_i が可約な場合、decouple した boundary state を記述するものなので以後、既約な n_i だけを考える。

3.4 Graph fusion 代数

3.4.1 boundary state とグラフ

Cardy condition を解いて $n_{ia}^b, i = 1, \cdots, |\mathcal{I}|, a, b = 1, \cdots, n$ が決定されたとしよう。それらに対して $n \times n$ 行列の集合 $\{n_i\}$ が $(n_i)_a^b = n_{ia}^b$ で定まる。これらの行列の要素は非負整数であるから、各 n_i を conjugacy matrix とするグラフ G_i を対応させることができる。具体的には行、列をラベルする $a, b, \cdots$ を頂点として、頂点間を結ぶ線が行列要素で表わされているグラフを対応させる。例えば対称行列であるならば行、列をラベルする $a, b, \cdots$ を頂点として、頂点 a, b 間を $(n_i)_a^b$ 本の線によって結ばれているグラフが対応する。対称でなければ有向線分になる。

これらの $|\mathcal{I}|$ 個のグラフをまとめてグラフ G と呼ぶことにする。またシンボリックに $n = |G_i| \equiv |G|$ と書き表したりする。特に $n_i = N_i, (N_i)_j^k = N_{ij}^k$ であるものをグラフ A と呼ぶことにする。

n_i の固有値を $Exp(G)$ でラベルする。$\frac{S_{ij}}{S_{1j}}, (j, \alpha) \in Exp(G)(= \mathcal{E})$

3.4.2 Graph fuision 代数

Cardy condition の解である n_i (あるいはグラフ G) に対して graph fusion 代数を定義していく。

まず、$(\psi^j)_2 = \psi^j_a, j \in Exp(G) = \mathcal{E}$ を $\{n_i\}$ の、互いに直交する共通固有ベクトルとする。ここで $1 = 1^*$ であり任意の $j \in Exp(G)$ に対して $\psi^j_1 > 0$ が成立するような ψ^j_1 の存在を仮定しておく。

$\hat{N}^c_{ab}$ を

$$\hat{N}^c_{ab} = \sum_{j \in Exp(G)} \frac{\psi^j_a \psi^j_b (\psi^j_c)^*}{\psi^j_1} \tag{3.31}$$

と定義する。そして $n \times n$ 行列 ($n = |G_i| = |G|$ であった) $\hat{N}_a$ を $(\hat{N}_a)^c_b = \hat{N}^c_{ab}$ により定義する。$\hat{N}^c_{ab} = \hat{N}^{b^*}_{ac^*}$、また ψ^j_a の直交性より $\hat{N}_1 = id$ であることは明らか。さらに $\hat{N}_a$ は第 1 行に唯一ゼロでない要素をもち、$(\hat{N}_a)^b_1 = (\hat{N}_1)^b_a = \delta_{ab}$ である。

ψ^j_a が線型独立なので $\hat{N}_a$ も線型独立である。そしてこの行列は可換な代数をみたす。

$$\hat{N}_a \hat{N}_b = \sum_{c \in \mathcal{V}} \hat{N}^c_{ab} \hat{N}_c \tag{3.32}$$

これを graph fusion 代数と呼ぶ。$G = A$ の場合には $n_i = N_i$ になるから ψ^j_a と S_{ij} は同じ行列になる。($i, j, a = 1, \cdots, |\mathcal{I}|$) よって $\hat{N} = N$ となって graph fusion 代数はお馴染の fusion 代数になる。

このように構成された graph 代数と fuson 代数には一定の関係がある。そこで n_i と $\hat{N}_a$ の関係式を示しておく。この 2 つの行列は共通固有ベクトルをもつことに着目すると

$$n_i \hat{N}_b = \sum_b n^b_{ia} \hat{N}_b \tag{3.33}$$

$$\because \qquad \frac{S_{ij}}{S_{ij}} \frac{\psi^j_a}{\psi^j_a} = \sum_b \sum_k \frac{S_{ik}}{S_{1k}} \psi^k_a (\psi^k_b)^* \frac{\psi^j_b}{\psi^j_1} \tag{3.34}$$

特に $a = 1$ の場合には

$$n^b_{ia} = \sum_c n^c_{i1} \hat{N}^b_{ca} \tag{3.35}$$

$a, b, \cdots$ を頂点とよぶ。頂点 1 の決め方は一意的ではないので graph fusion 代数の定義も一意的ではない。graph fusion 代数も fusion 代数であると思うと構造定数 $\hat{N}^c_{ab}$ は非負整数であることが期待される。しかし一般に $\hat{N}^c_{ab}$ は有理数どころか無理数であってもおかしくなさそうである。しかし適当に ϕ と頂点 1 を選ぶとほとんどの場合に整数になる。$\hat{N}$ が非負整数の行列要素のみ持つようなグラフを proper fusion graph と呼ぶことにする。$\widehat{su}(2)$ 理論では a_n, D_{2q}, E_6, E_8 のグラフがそれにあたる。

3.4.3 fusion則とblock character

Carday conditionを解いて$Z_{a|b}(q)=\sum_{i\in\mathcal{I}} n_{ia}^{b}\chi_i(q)$と対応するグラフが求まったとしよう。ここでblock character $\hat{\chi}_c$を

$$\hat{\chi}_c(q)=\sum_{i\in\mathcal{I}}\hat{n}_{ic}\chi_i(q) \tag{3.36}$$

ただし$\hat{n}_{ic}=n_{i1}^{c}$、と定義すると分配関数は

$$Z_{a|b}(q)=\sum_{c\in\mathcal{V}}\hat{N}_{ca}^{b}\hat{\chi}_c(q) \tag{3.37}$$

と書き表される。$\hat{N}_{ca}^{b}$はgraph fusion代数の構造定数だ。これは固有ベクトルψ_a^jの選び方、頂点1の選び方に依らないことを注意しておく。

物理的には$\hat{N}_{ca}^{b}$が非負整数のときに興味がある。なぜならば有限長さのシリンダーの両端に境界条件a,bが課されているときにopenstringのスペクトルに表現cが現れるときの重複度を表わしていると解釈ができるからである[2]。また、グラフがtype 1、すなわち$\hat{N}_{ab}^{c}$が非負整数のときには頂点aはextended chiral algebraの表現をラベルして$\hat{\chi}_a$はそれらのcharacter、$\hat{N}_{ab}^{c}$はfusion係数と解釈することもできる。type 1の、bulkのトーラス上の分配関数は

$$Z_{torus}=\sum_{a\in T}|\hat{\chi}_a|^2 \tag{3.38}$$

Tはblock characterの部分集合、という形に表わされることが知られている。このextended chiral algebra$\mathcal{A}'$についてのグラフAに対応したboundary stateを表わしていると解釈できるからである。言い換えれば頂点$a\in T$を$\mathcal{A}'$の表現をラベルしていると考えるとTに対応したgraph代数の部分代数は$\mathcal{A}'$をchiral algebraとするRCFTの通常のfusion代数になる。なお、Tはblock characterの部分集合なのでgraph代数の部分代数に対応している。すると、n_{i1}^{c}はブロックc内での表現iの多重度と解釈ができる[22] [23]。$a\notin T$なる頂点はtwisted representationをラベルしているものと思われる。まとめると、graph fusion代数は$\mathcal{A}'$のuntwisted,twistedの両方の表現のfusion代数と考えられる。

3.5 Pasquir代数とSewing constraint

3.5.1 ground state degeneracy

境界条件a,bに対する分配関数$Z_{b|a}$について

$$\log Z_{b|a}\sim\frac{c}{24}4\pi\frac{L}{T}+\log\psi_a^1+\log\psi_b^1-\log S_{11}$$

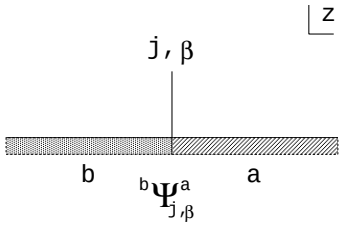

図 3.5: boundary filed

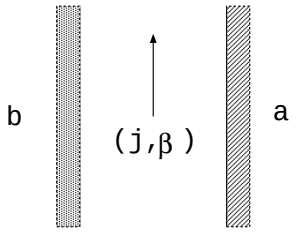

図 3.6: strip 上の state

第 1 項は L に依存しているが、第 2 項以下は L に依存していないので境界条件に依存する ground state degeneracy $\log g_a g_b$ と解釈することが可能である。よって

$$g_a = \frac{\psi_a^1}{\sqrt{S_{11}}} = \langle \mathbf{1} \rangle_a = \lim_{\frac{L}{T}\to\infty} \frac{Z_{b|a} e^{-\frac{\pi i}{6}\frac{L}{T}}}{g_b} \tag{3.39}$$

3.5.2 boundary field

Cardy の解釈によれば、境界条件の変化とは境界上に boundary field ${}^b\Psi^a_{j,\beta}(x)$ を置くことと同視する [2]。ただし $j \in \mathcal{I}$, $a, b \in \mathcal{V}, \beta = 1, 2, \cdots, n^b_{ja}$ とする。この boundary field をシンボリックに $\binom{b}{a,j}$ と表わすこともある。

$n^b_{1a} = \delta_{ab}$ より ${}^b\Psi^a_{1,\beta}$ の縮退度は 1 なので $\beta = \mathbf{1}_b$ などと書き表す。

さて図 3.5 の上半面を共形変換して strip に写像する。この strip の境界条件は a, b であり、状態空間は真空状態 ${}^b\Psi^a_{j,\beta}(0)|0\rangle$ とその descendant state により張られる。

なお dual vacuum state、すなわち無限の未来にある boundary field は

$$\sum_{\beta'} \lim_{x\to\infty} C_{a,b,j:\beta,\beta'} x^{2h_j} \langle 0|^a \Psi^b_{j^*,\beta'}(x).$$

ただし $\beta' = 1, \cdots, n^a_{j^* m b} (= n^b_{ja})$、$C_{a,b,j:\beta,\beta'}$ は規格化定数である。

${}^b\Psi^a_{j,\beta}(x)$ 自身は chiral vertex operater(CVO) ではないが、その相関関数は大域的共形対称性 $(SL(2,\mathbb{R}))$ により、その形がかなり限定される。

- **1 点関数** ${}^b\Psi^a_{j,\alpha}$

$$\langle 0|{}^b\Psi^a_{j,\alpha}(x)|0\rangle = \delta_{j1}\delta_{ba}\delta_{\alpha\mathbf{1}_a}\langle\mathbf{1}\rangle_a \tag{3.40}$$

共形対称性から x には依存できず $j=1$ が要求される。また境界条件を変える boundary field が 1 つしかないので、その boundary field の左右の境界条件は一致すべきである。$\langle\mathbf{1}\rangle_a$ は境界条件 a の下での恒等演算子の期待値、別の書き表し方をすると $\langle 0|{}^a\Psi^a_{1,\mathbf{1}_a}|0\rangle$ である。

- **2 点関数** ${}^a\Psi^b_{i,\alpha_1}{}^c\Psi^d_{j,\alpha_2}$

boundary field は境界条件を変えるものであるから $b=c$ のときにのみ定義される。同様にして $a=d$ である。$C^{ab}_{i^*i;\alpha_1\alpha_2}$ を定数として

$$\langle 0|{}^a\Psi^b_{i,\alpha_1}(x_1){}^b\Psi^c_{j,\alpha_2}(x_2)|0\rangle = \delta_{ji^*}\delta ac\frac{C^{ab}_{i^*i;\alpha_1\alpha_2}}{|x_{12}|^{2h_j}}, \qquad x_1\neq x_2 \tag{3.41}$$

- **3 点関数**

境界条件についての考察から

$$\langle 0|{}^a\Psi^b_{i,\alpha_1}(x_1){}^b\Psi^c_{j,\alpha_2}(x_2){}^c\Psi^d_{k,\alpha_3}(x_3)|0\rangle_t = \delta_{ad}\frac{C^{abc}_{ijk;\alpha_1\alpha_2\alpha_3;t}}{|x_{12}|^{2h^k_{ij}}|x_{23}|^{2h^i_{jk}}|x_{31}|^{2h^j_{ki}}} \tag{3.42}$$

ここで $h^k_{ij}=h_i+h_j-h_k, x_{ij}=x_i-x_j$、また t は $\binom{i^*}{j,k}$ というタイプの bulk field のカップリングをラベルするもので、$t=1,\cdots,N^{i^*}_{jk}$ である。

以下では2,3 点関数の構造定数の決定を目標としていくが、そこで使われる記号をいくつか導入しておく。σ_{23},σ_{13} は bulk 3 点関数のカップリングからカップリングの写像で $\sigma_{23}\binom{p}{i,j}=\binom{p}{j,i}, \sigma_{13}\binom{p}{i,j}=\binom{j^*}{i,p^*}$。さらにはカップリングのラベルの t を別のカップリングのラベルに写すときにも使う。また、$\sigma_{23}(\mathbf{1}_i),\mathbf{1}'_i,\mathbf{1}_a$ を省略して $\mathbf{1}$ と書くこともあるので注意。$\mathbf{1}_i$ は $\binom{i}{1,i}$ のカップリングを表わしている。

3.5.3 boundary field の相関関数の構造定数

まず boundary field の演算子積展開 (OPE) を定義する。

$$
{}^b\Psi^c_{i,\alpha_1}(x_1){}^c\Psi^a_{j,\alpha_2}(x_2) = \sum_{p,\beta,t} {}^{(1)}F_{cp}\begin{bmatrix} i & j \\ b & a \end{bmatrix}^{\beta t}_{\alpha_1\alpha_2} \sum_P \langle p,P|\phi_{i,t}(x_{12})|j,0\rangle {}^b\Psi^a_{p,\beta;P}(x_2)
$$

$$
\sim \sum_{p,\beta,t} {}^{(1)}F_{cp}\begin{bmatrix} i & j \\ b & a \end{bmatrix}^{\beta t}_{\alpha_1\alpha_2} \frac{1}{|x_{12}|^{h_i+h_j-h_p}} {}^b\Psi^a_{p,\beta;P}(x_2) + \cdots \tag{3.43}
$$

P は Verma 加群 $\mathcal{V}_p$ の descendant 状態をラベルしている。α_1 は $\binom{b}{i,c}$、α_2 は $\binom{c}{j,a}$、β は $\binom{b}{p,a}$ の各タイプのカップリングのインデックスである。

またシンボリックに

$$
\binom{b}{i,c}_{\alpha_1 x_1}\binom{c}{j,a}_{\alpha_2 x_2} = \sum_{p,\beta,t} {}^{(1)}F_{cp}\begin{bmatrix} i & j \\ b & a \end{bmatrix}^{\beta t}_{\alpha_1\alpha_2}\binom{p}{i,j}_{t x_{12}}\binom{b}{p,a}_{\beta x_2} \tag{3.44}
$$

次に特定の ${}^{(1)}F$ の形を決める。そのために boundary1 点関数を利用する。(3.43) で $j=1$ とすると

$$
{}^b\Psi^c_{i,\alpha_1}(x_1){}^c\Psi^a_{1,\alpha_2}(x_2) \sim \sum_{p,\beta,t} {}^{(1)}F_{cp}\begin{bmatrix} i & 1 \\ b & a \end{bmatrix}^{\beta t}_{\alpha_1\alpha_2} \frac{1}{|x_{12}|^{h_i-h_p}} {}^b\Psi^a_{p,\beta;P}(x_2) + \cdots \tag{3.45}
$$

一方、(3.45) 式左辺の OPE について、bule field のインデックスについては通常の bulk OPE と同様に考えて i が出てくる。また $\binom{c}{1,a}$ について $n^c_{1a} = \delta_{ac}$ であることを考慮すれば $c=a, \alpha_2 = \mathbf{1}_a$ のとき以外はゼロになってしまう。このことから

$$
{}^b\Psi^c_{i,\alpha_1}(x_1){}^c\Psi^a_{1,\alpha_2}(x_2) \sim {}^b\Psi^c_{i,\alpha_1}(x_2)\delta_{ac}\delta_{\alpha_2\mathbf{1}_a} + \cdots = {}^b\Psi^a_{i,\alpha_1}(x_2)\delta_{ac}\delta_{\alpha_2\mathbf{1}_a} + \cdots \tag{3.46}
$$

ところで t は $\binom{i}{1,i}$ のインデックスだから $t=\mathbf{1}$ でなければ ${}^{(1)}F_{cp}$ はゼロになる。よって (3.45) と(3.46) を比較し

$$
{}^{(1)}F_{cp}\begin{bmatrix} i & 1 \\ b & a \end{bmatrix}^{\beta t}_{\alpha_1\alpha_2} = \delta_{ca}\delta_{\alpha_2\mathbf{1}}\delta_{t\mathbf{1}}\delta_{\alpha_1\beta}\delta_{pi} \tag{3.47}
$$

同様にして

$$
{}^{(1)}F_{cp}\begin{bmatrix} 1 & j \\ b & a \end{bmatrix}^{\beta t}_{\alpha_1\alpha_2} = \delta_{bc}\delta_{\alpha_1\mathbf{1}}\delta_{t\mathbf{1}}\delta_{\alpha_2\beta}\delta_{pj} \tag{3.48}
$$

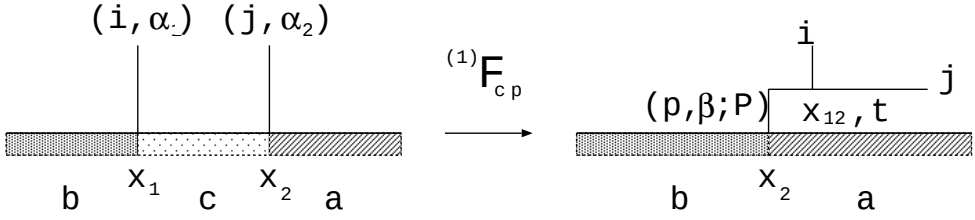

図 3.7: boundary field の OPE

ところで ${}^{(1)}F$ については少し視点を変えて見ることができる。$\mathcal{U}_{pa}^{b}$ を $\binom{b}{p,a}_{\alpha}$ タイプの boundary field の空間、U_{ij}^{p} を $\binom{p}{i,j}_{t}$ タイプの CVO の 3 点カップリングを表わす空間とする。$\dim \mathcal{U}_{pa}^{b} = n_{pa}^{b}, \dim U_{ij}^{p} = N_{ij}^{p}$ となる。すると ${}^{(1)}F$ は演算子に見えて

$$ {}^{(1)}F : \oplus_c \mathcal{U}_{ic}^{b} \otimes \mathcal{U}_{ja}^{c} \longmapsto \oplus_p U_{ij}^{p} \otimes \mathcal{U}_{pa}^{b} \tag{3.49} $$

なお、n_i は fusion 代数を満たし $\sum_c n_{ja}^{c} n_{ic}^{b} = \sum_k N_{ij}^{k} n_{ka}^{b}$ であるから (3.49) の両辺の次元は一致する。

このように ${}^{(1)}F$ を解釈すると (3.44) をグラフィカルに表現することができる。

またこのようにグラフを用いて OPE の計算を簡単に行うことができる。

以上のことから boundary n 点関数は boundary 1,2 点関数と CVO の conformal block で書き表すことができる。

相関関数の計算例

まず、2 点関数を計算する。図 3.8 を数式を使って表わすならば

$$ {}^{a}\Psi_{i,\alpha_1}^{b}(x_1) {}^{b}\Psi_{i^*,\alpha_2}^{c}(x_2) \sim {}^{(1)}F_{b1} \begin{bmatrix} i & i^* \\ a & a \end{bmatrix}_{\alpha_1\alpha_2}^{\mathbf{1}_a \mathbf{i}'} \frac{1}{|x_{12}|^{h_i+h_{i^*}}} {}^{a}\Psi_{1,\mathbf{a}_a}^{a}(x_2) + \cdots \tag{3.50} $$

一方 2 点関数は (3.41) の形をしている。$h_i = h_{i^*}$ ゆえ

$$ C_{ii^*;\alpha_1\alpha_2}^{ab} = {}^{(1)}F_{b1} \begin{bmatrix} i & i^* \\ a & a \end{bmatrix}_{\alpha_1\alpha_2}^{\mathbf{1}_a \mathbf{i}'} \langle \mathbf{1} \rangle_a \tag{3.51} $$

同様に 3 点関数についてもグラフィカルに計算ができてる。

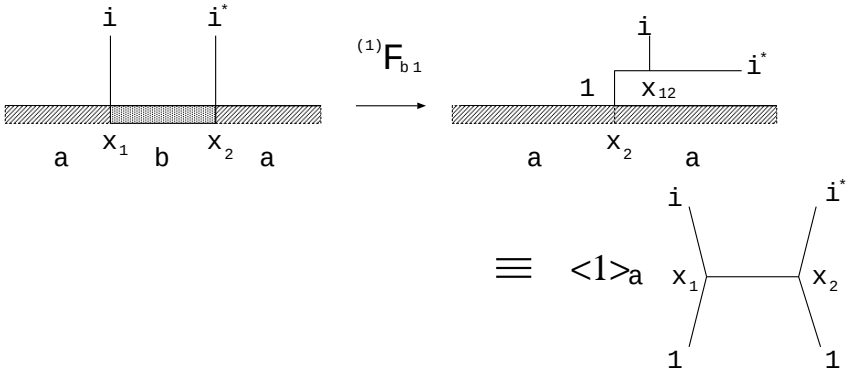

図 3.8: 2 点関数の計算

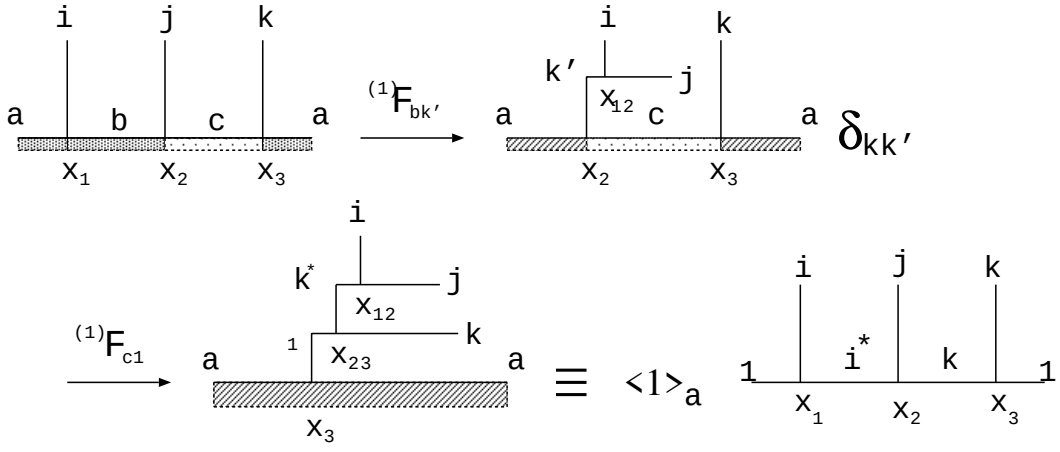

図 3.9: 3 点関数の計算

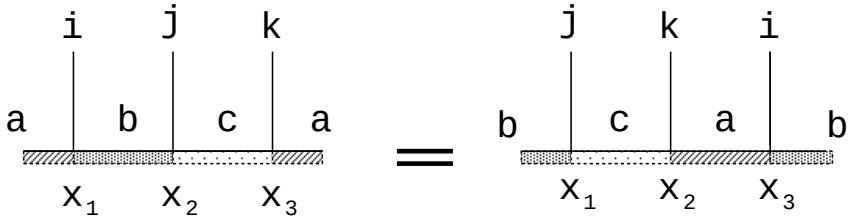

図 3.10: cyclic symmetry

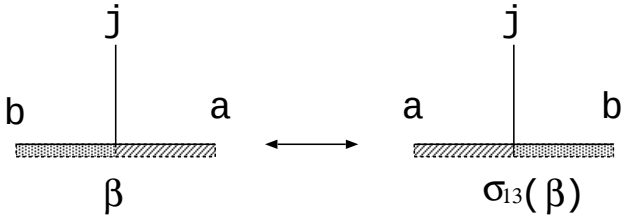

図 3.11: antilenear transformation

OPE のとる順序が二通りあるので

$$C^{abc}_{ijk;\alpha_1\alpha_2\alpha_3;t} = \sum_{\beta} {}^{(1)}F_{bk^*} \begin{bmatrix} i & j \\ b & a \end{bmatrix}^{\beta\,\sigma_{23}\sigma_{13}(t)}_{\alpha_1\alpha_2} {}^{(1)}F_{c\mathbf{1}} \begin{bmatrix} k^* & k \\ a & a \end{bmatrix}^{\mathbf{1}_a\mathbf{1}'_{k^*}}_{\beta\alpha_3} \langle \mathbf{1} \rangle_a$$
$$= \sum_{\gamma} {}^{(1)}F_{ci^*} \begin{bmatrix} j & k \\ b & a \end{bmatrix}^{\gamma t}_{\alpha_2\alpha_3} {}^{(1)}F_{b\mathbf{1}} \begin{bmatrix} i & i^* \\ a & a \end{bmatrix}^{\mathbf{1}_a\mathbf{1}'_i}_{\alpha_1\gamma} \langle \mathbf{1} \rangle_a \tag{3.52}$$

ここまで boundary field の OPE を利用して相関関数の構造定数を決定してきた。逆に物理的要請を構造定数に課すことにより ${}^{(1)}F$ についての拘束条件が得られる。

例

- cyclic symmetry 図 3.10
- antilinear transformation 図 3.11

これらより

$$C^{abc}_{ijk;\alpha_1\alpha_2\alpha_3} = C^{bca}_{jki;\alpha_2\alpha_3\alpha_1} = (C^{cba}_{k^*j^*i^*;\sigma_{13}(\alpha_3^*)\sigma_{13}(\alpha_2^*)\sigma_{13}(\alpha_1^*)})^* \tag{3.53}$$
$$C^{ab}_{i^*i;\alpha\beta} + C^{ba}_{ii^*;\beta\alpha} = (C^{ab}_{i^*i;\sigma_{13}(\beta^*)\sigma_{13}(\alpha^*)})^* \tag{3.54}$$

よって cyclic symmetry からは

$$ {}^{(1)}F_{c1}\begin{bmatrix} j & j^* \\ a & a \end{bmatrix}^{\mathbf{1}_a\mathbf{1}'_j}_{\alpha_1\alpha_2}\langle\mathbf{1}\rangle_a = {}^{(1)}F_{a1}\begin{bmatrix} j^* & j \\ c & c \end{bmatrix}^{\mathbf{1}_c\mathbf{1}'_{j^*}}_{\alpha_2\alpha_1}\langle\mathbf{1}\rangle_c \tag{3.55} $$

$$ \sum_\beta {}^{(1)}F_{ak^*}\begin{bmatrix} j & s \\ b & c \end{bmatrix}^{\beta t}_{\delta\alpha} {}^{(1)}F_{c1}\begin{bmatrix} k^* & k \\ a & a \end{bmatrix}^{\mathbf{1}_b\mathbf{1}'_{k^*}}_{\beta\beta_2}\langle\mathbf{1}\rangle_c = \sum_\beta {}^{(1)}F_{bs^*}\begin{bmatrix} k & j \\ c & a \end{bmatrix}^{\gamma\,\sigma_{23}\sigma_{13}(t)}_{\beta_2\delta} {}^{(1)}F_{a1}\begin{bmatrix} s & s^* \\ c & c \end{bmatrix}^{\mathbf{1}_c\mathbf{1}'_{s^*}}_{\alpha\delta}\langle\mathbf{1}\rangle_c \tag{3.56} $$

さらに antilinear transformation からは

$$ {}^{(1)}F_{c1}\begin{bmatrix} j & j^* \\ a & a \end{bmatrix}^{\mathbf{1}_a\mathbf{1}'_j}_{\alpha_1\alpha_2}\langle\mathbf{1}\rangle_a = \left({}^{(1)}F_{c1}\begin{bmatrix} j & j^* \\ a & a \end{bmatrix}^{\mathbf{1}_a\mathbf{1}'_j}_{\sigma_{13}(\alpha_1)\sigma_{13}(\alpha_2)}\langle\mathbf{1}\rangle_a\right)^* \tag{3.57} $$

3.5.4 bulk field

次に、上半面上の bulk field $\Phi_{(i,\bar{i})}(z,\bar{z}), z = x+iy, \bar{z} = x-iy, i, \bar{i} \in \mathcal{I}$ を考察する。境界が存在することにより z と $\bar{z}$ は独立ではなくなっている。そのため、Virasoro 代数は 1 組しか存在しない。大域的共形対称性より 2 点関数 $\langle {}^a\Psi^a_{p,\alpha}(x)\Phi_{(i,\bar{i})}(z,\bar{z})\rangle$ の形が決まる。

$$ \langle {}^a\Psi^a_{p,\alpha}(x)\Phi_{(i,\bar{i})}(z,\bar{z})\rangle = \frac{C^a_{p,(i,\bar{i}),\alpha,t}}{(z-\bar{z})^{h_i+h_{\bar{i}}-h_p}(x-z)^{h_i+h_p-h_{\bar{i}}}(x-\bar{z})^{h_{\bar{i}}+h_p-h_i}} \tag{3.58} $$

ただし $x > \mathrm{Re}z$ で定義されている。一方、$\langle\Phi_{(i,\bar{i})}(z,\bar{z}) {}^a\Psi^a_{p,\alpha}(x)\rangle$ は $x < \mathrm{Re}z$ で定義される。相関関数が ${}^a\Psi^a_{p,\alpha}(x)$ と $\Phi_{(i,\bar{i})}(z,\bar{z})$ の順序に依らないことを要請し $h_i - h_{\bar{i}} \in \mathbb{Z}$ とする。

$\Phi_{(i,\bar{i})}(z,\bar{z})$ の境界近くでの振る舞いは boundary field によって記述できる。

$$ \begin{aligned} \Phi_{(i,\bar{i})}(z,\bar{z}) &= \sum_{a,\alpha,p\in\mathcal{I},t} {}^{a\alpha}B^{pt}_{(i,\bar{i})} \sum_P \langle p,P|\phi_{i,t}(z-\bar{z})|\bar{i},0\rangle {}^a\Psi^a_{p,\alpha}(\bar{z}) \\ &\sim \sum_{a,\alpha,p\in\mathcal{I},t} {}^{a\alpha}B^{pt}_{(i,\bar{i})} \frac{1}{(z-\bar{z})^{h_i+h_{\bar{i}}-h_p}} {}^a\Psi^a_{p,\alpha}(\bar{z}) \\ &\sim \sum_{a,\alpha,p\in\mathcal{I},t} {}^{a\alpha}B^{pt}_{(i,\bar{i})} \frac{1}{(z-\bar{z})^{h_i+h_{\bar{i}}-h_p}} {}^a\Psi^a_{p,\alpha}(x) \end{aligned} \tag{3.59} $$

ただし $x = \mathrm{Re}z$ であり、${}^a\Psi^a_{p,\alpha}(\bar{z})$ は boundary field を x から $\bar{z}$ に解析接続したもので、unphysical なものである。。また、この OPE 係数を bulk-boundary 反射係数と呼ぶ。(3.59) をシンボリックに

$$ \Phi_{(i,\bar{i})}(z,\bar{z}) = \sum_{a,\alpha,p\in\mathcal{I},t} {}^{a\alpha}B^{pt}_{(i,\bar{i})}\binom{p}{i,\bar{i}}_{t,z-\bar{z}}\binom{a}{p,a}_{\alpha,\bar{z}} \tag{3.60} $$

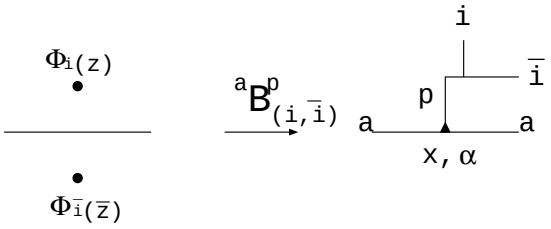

図 3.12: bulk-boundary 反射係数

と表わす。図 3.12 では境界条件を表す模様は省略した。代わりに boundary field を黒三角で表している。なお、 [24] [25] などの bulk-boundary 反射係数 (${}^{a\alpha}B^{pt}_{(i,\bar{i})}(CL)$ と、おく) とは位相が異なっていることを指摘しておく。

$$ {}^{a\alpha}B^{pt}_{(i,\bar{i})} = e^{\frac{\pi i}{2}(h_i+h_{\bar{i}}-h_p)}{}^{a\alpha}B^{pt}_{(i,\bar{i})}(CL) \tag{3.61} $$

したがって $\Phi_{(i,\bar{i})}$ の n 点関数は ${}^{a\alpha}B^{pt}_{(i,\bar{i})}$ と ${}^{a}\Psi^{a}_{p,\alpha}(\bar{z})$ の OPE を用いて計算できる。特に境界条件 a の下での 1 点関数は ${}^{a\mathbf{1}}B^{\mathbf{11}}_{(i,\bar{i})}$ で与えられる。

$$ \langle \Phi_{(i,\bar{i})}(z,\bar{z})\rangle_a = \delta_{i^*i}\frac{{}^{a\mathbf{1}}B^{\mathbf{11}}_{(i,\bar{i})}}{(z-\bar{z})^{2h_i}}\langle \mathbf{1}\rangle_a \tag{3.62} $$

なお bulk field どうしの OPE を次のように定義しておく。

$$ \Phi_{(k,\bar{k})}(z_1,\bar{z}_1)\Phi_{(l,\bar{l})}(z_2,\bar{z}_2) \sim \sum_{j,\bar{j},t,\bar{t}} \frac{D^{(j,\bar{j});t,\bar{t}}_{(k,\bar{k})(l,\bar{l})}}{z_{12}^{h^j_{kl}}\bar{z}_{12}^{h^{\bar{j}}_{\bar{k}\bar{l}}}}\Phi_{(j,\bar{j})}(z_2,\bar{z}_2) \tag{3.63} $$

3.5.5 Sewing constraint

この小節では OPE 係数 ${}^{(1)}F, B, D$ さらに bulk field の fusing matrix F の満たすべき関係式、Cardy-Lewellwn 方程式、を紹介する。これらは、一般の n 点関数は bulk("closed string")3 点関数、boundary("open string")3 点関数、bulk-boundary("open-closed string") の遷移振幅からつくられて、それらの 縫い合わせ方 に依らないという sewing constraint から導かれる。[25]

boundary 4 点関数より

$$ F^{(1)}F^{(1)}F = {}^{(1)}F^{(1)}F \tag{3.64} $$

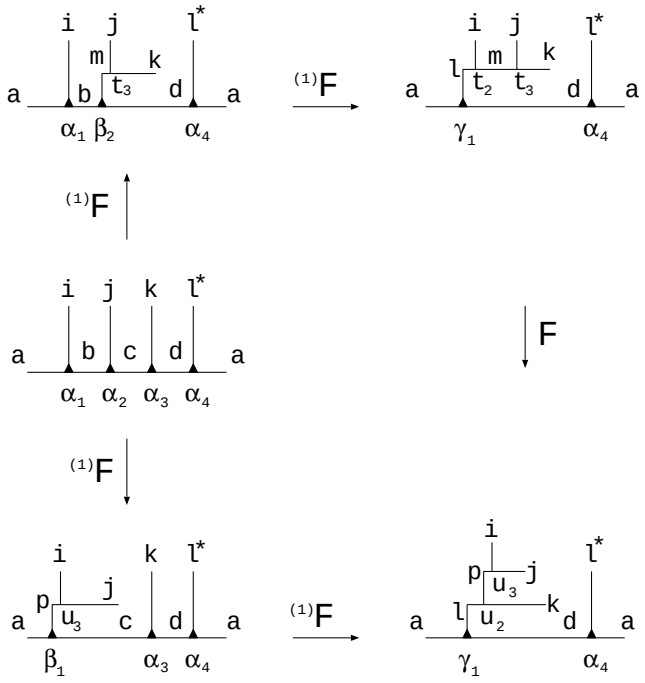

図 3.13: boundary 4 点関数の計算

より正確に書くならば

$$\sum_{m,\beta,t_2,t_3} F_{mp}\begin{bmatrix} i & j \\ l & k \end{bmatrix}^{u_2u_3}_{t_2t_3} {}^{(1)}F_{bl}\begin{bmatrix} i & m \\ a & d \end{bmatrix}^{\gamma_1 t_2}_{\alpha_1\beta_2} {}^{(1)}F_{cm}\begin{bmatrix} j & k \\ b & d \end{bmatrix}^{\beta_2 t_3}_{\alpha_2\alpha_3}$$
$$= \sum_{\beta_1} {}^{(1)}F_{cl}\begin{bmatrix} p & k \\ a & d \end{bmatrix}^{\gamma_1 u_2}_{\beta_1\alpha_3} {}^{(1)}F_{bp}\begin{bmatrix} i & j \\ a & c \end{bmatrix}^{\beta_1 u_3}_{\alpha_1\alpha_2} \tag{3.65}$$

boundary 4 点関数は 2 通りの方法で計算されるのだが、それらの結果が等しいことを要請することでこの関係式が得られる。グラフを使って計算すると図 3.13 のようになる。弦理論の言葉でいうならば open string の 4 点関数は open string の 3 点関数 2 つからつくられるが、その 3 点関数の縫い合わせ方に依らない。

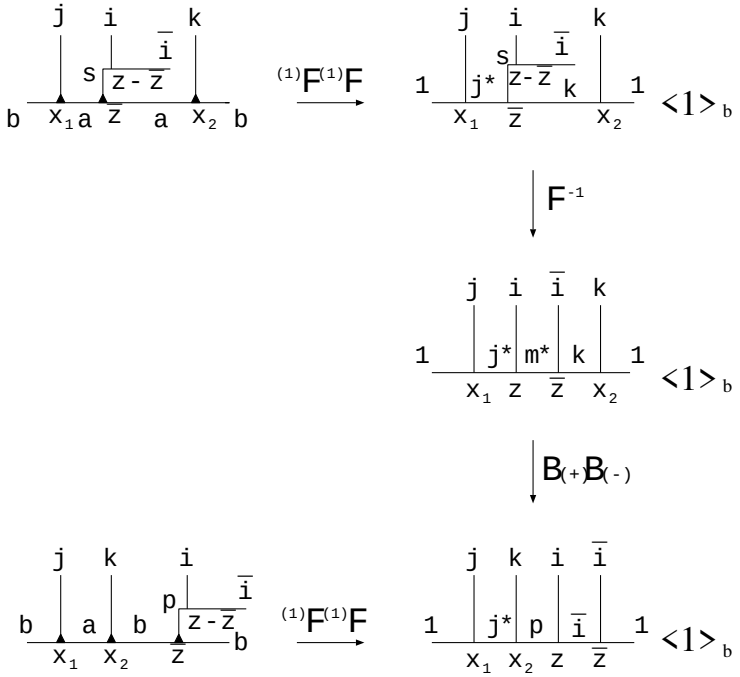

図 3.14: bulk fied が 1 つ、boundary field が 2 つの相関関数

bulk×1, boundary×2 の相関関数より

$$\sum_{\beta\beta'} {}^{b\beta}B^{p}_{(i,\bar{i})}\langle \mathbf{1}\rangle_{b}\,{}^{(1)}F_{b\mathbf{1}}\begin{bmatrix} p^* & p \\ b & b \end{bmatrix}^{\mathbf{1}}_{\beta'\beta}\,{}^{(1)}F_{ap^*}\begin{bmatrix} j & k \\ b & b \end{bmatrix}^{\beta'}_{\delta\gamma}$$
$$= \sum_{s,\alpha\alpha'} {}^{a\alpha}B^{s}_{(i,\bar{i})}\langle \mathbf{1}\rangle_{a}\,{}^{(1)}F_{a\mathbf{1}}\begin{bmatrix} s^* & s \\ a & a \end{bmatrix}^{\mathbf{1}}_{\alpha'\alpha}\,{}^{(1)}F_{bs^*}\begin{bmatrix} k & j \\ a & a \end{bmatrix}^{\alpha'}_{\gamma\delta}$$
$$\times \sum_{m} e^{\pi i(2h_i-2h_m+h_k+h_j-h_p)}F_{sm}\begin{bmatrix} j & i \\ k^* & \bar{i} \end{bmatrix}F_{mp^*}\begin{bmatrix} k & j \\ \bar{i}^* & i \end{bmatrix} \tag{3.66}$$

この関係式は $\langle {}^{b}\Psi^{a}_{j,\delta}(x_1)\Phi_{(i,\bar{i})}(z,\bar{z})\,{}^{a}\Psi^{b}_{k,\gamma}(x_2)\rangle = \langle {}^{b}\Psi^{a}_{j,\delta}(x_1)\,{}^{a}\Psi^{b}_{k,\gamma}(x_2)\Phi_{(i,\bar{i})}(z,\bar{z})\rangle$ から得られる。グラフによる計算は図 3.66 による。弦理論でいうならば closed string が 1 つ、open string が 2 つの遷移振幅への Sewing constraint である。

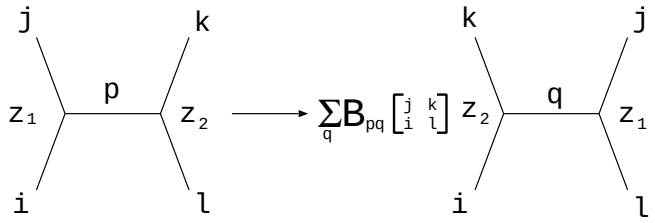

図 3.15: braiding matrix

ここで braiding matrix は $z_{12} \in H_\epsilon$ として

$$B_{pq} \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix}^{\sigma_{23}(\gamma_2)\delta}_{\beta_1\sigma_{23}(\beta_2)} (\epsilon) e^{\pi i\epsilon(h_k+h_l-h_p-h_q)} F_{pq} \begin{bmatrix} i & l \\ k & j \end{bmatrix}^{\gamma_2\delta}_{\beta_1\beta_2} \tag{3.67}$$

境界条件の下での bulk 2 点関数より

$$\sum_{\alpha\beta} {}^{a\alpha}B^{rs_1}_{(k,\bar{k})}{}^{a\beta}B^{rs_2\,(1)}_{(l,\bar{l})} F_{a1} \begin{bmatrix} r & r^* \\ a & a \end{bmatrix}^{\mathbf{1}_a\mathbf{1}'_r}_{\alpha\beta} \tag{3.68}$$

$$= \sum_j {}^aB^1_j e^{\pi i(h_k+h_{\bar{l}}-h_r-h_j)} \sum_{t,\bar{t}} D^{(j,j^*);t\bar{t}}_{(k,\bar{k})(l,\bar{l})} F_{j^*} \begin{bmatrix} \bar{k} & k \\ \bar{l}^* & l \end{bmatrix}^{sigma_{23}\sigma_{13}(s_2)\sigma_{23}(s_1)}_{\sigma_{12}(\bar{t})t} \tag{3.69}$$

あるいは同等だが

$$D^{(j,j\ *);t,\bar{t}a}_{(k,\bar{k})(l,\bar{l})} B^1_j e^{i\pi(h_k+h_{\bar{l}-h_j})} = \sum_{\alpha,\beta,r,s_1,s_2} e^{i\pi h_r a,\alpha} B^{r,s_1\,a,\beta}_{k,\bar{k}} B^{r^*,s_2\,(1)}_{l,\bar{l}} F_{a1} \begin{bmatrix} r & r^* \\ a & a \end{bmatrix}^{\mathbf{1}_a\mathbf{1}'_r}_{\alpha,\beta} F_{r^*j} \begin{bmatrix} k & l \\ \bar{k}^* & \bar{l} \end{bmatrix}^{\sigma_{12}(\bar{t}t)}_{\sigma_{13}(s_1)s_2} \tag{3.70}$$

この関係式は 2 点関数 $\langle \Phi_{(l,\bar{l})}(z_1,\bar{z}_1)\Phi_{(l,\bar{l})}(z_2,\bar{z}_2)\rangle$ から得られるが、次に示す(3.71) の $i=1$ の場合に相当する。

bulk×2, boundary×1 の相関関数より

$$\sum_{\alpha\beta}{}^{a\alpha}B^{r}_{(k,\bar{k})}{}^{a\beta}B^{t}_{(l,\bar{l})}{}^{(1)}F_{ai^*}\begin{bmatrix} r & t \\ a & a \end{bmatrix}^{\gamma}_{\alpha\beta}$$
$$= \sum_{j\bar{j}} D^{(j,\bar{j})}_{(k,\bar{k})(l,\bar{l})}{}^{a\gamma}B^{i}_{(j,\bar{j})}e^{\pi i(h_k-h_r-h_j)}\sum_{s} e^{\pi i h_s}F_{\bar{j}s^*}\begin{bmatrix} j & \bar{k} \\ i^* & \bar{l} \end{bmatrix} F_{j^*r^*}\begin{bmatrix} l & s \\ k^* & \bar{k} \end{bmatrix} F_{st}\begin{bmatrix} l & \bar{l} \\ r^* & i \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

この方程式は $\langle\Phi_{(k,\bar{k})}(z_1,\bar{z}_1)\Phi_{(l,\bar{l})}(z_2,\bar{z}_2)^a\Psi^a_{i,\gamma}(x)\rangle$ より得られる。(図 3.16) 弦理論の言葉で言えば closed string が 2 つ、open string が 1 つの遷移振幅に対する sewing constraint になっている。

bulk 3 点関数より

$$D^{(j,\bar{j});t\bar{t}}_{(k,\bar{k})(l,\bar{l})}D^{(1,1)}_{(j,\bar{j})(j^*,\bar{j}^*)} = D^{(k^*,\bar{k}^*);\sigma_{13}\sigma_{23}(t)\sigma_{13}\sigma_{23}(\bar{t})}_{(l,\bar{l})(j^*,\bar{j}^*)}D^{(1,1)}_{(k^*,\bar{k}^*)(k,\bar{k})} \quad (3.72)$$

bulk field の 3 点関数は計算の仕方が 2 通りあることによる。

3.5.6 sewing constraint と fusion 代数、graph fusion 代数、Pasquir 代数

この小節では sewing constraint に fusion 代数と graph fusion 代数の関係式 (3.34) と Pasquir 代数が含まれていることを示す。

sewing constraint と fusion 代数、graph 代数

結論から先に述べるが方程式 (3.66) から、$\bar{i} = i^*$ のとき

$$\frac{S_{ij}}{S_{1i}}{}^{a}B_{(i,\bar{i})}\langle\mathbf{1}\rangle_a = \sum_b {}^{b}B_{(i,\bar{i})}\langle\mathbf{1}\rangle_b \quad (3.73)$$

これは (3.34) を実現している。つまり

$$\gamma_j i\hat{\gamma}_a(i) = \sum_b n^b_{ja}\hat{\gamma}_b(i) \quad (3.74)$$

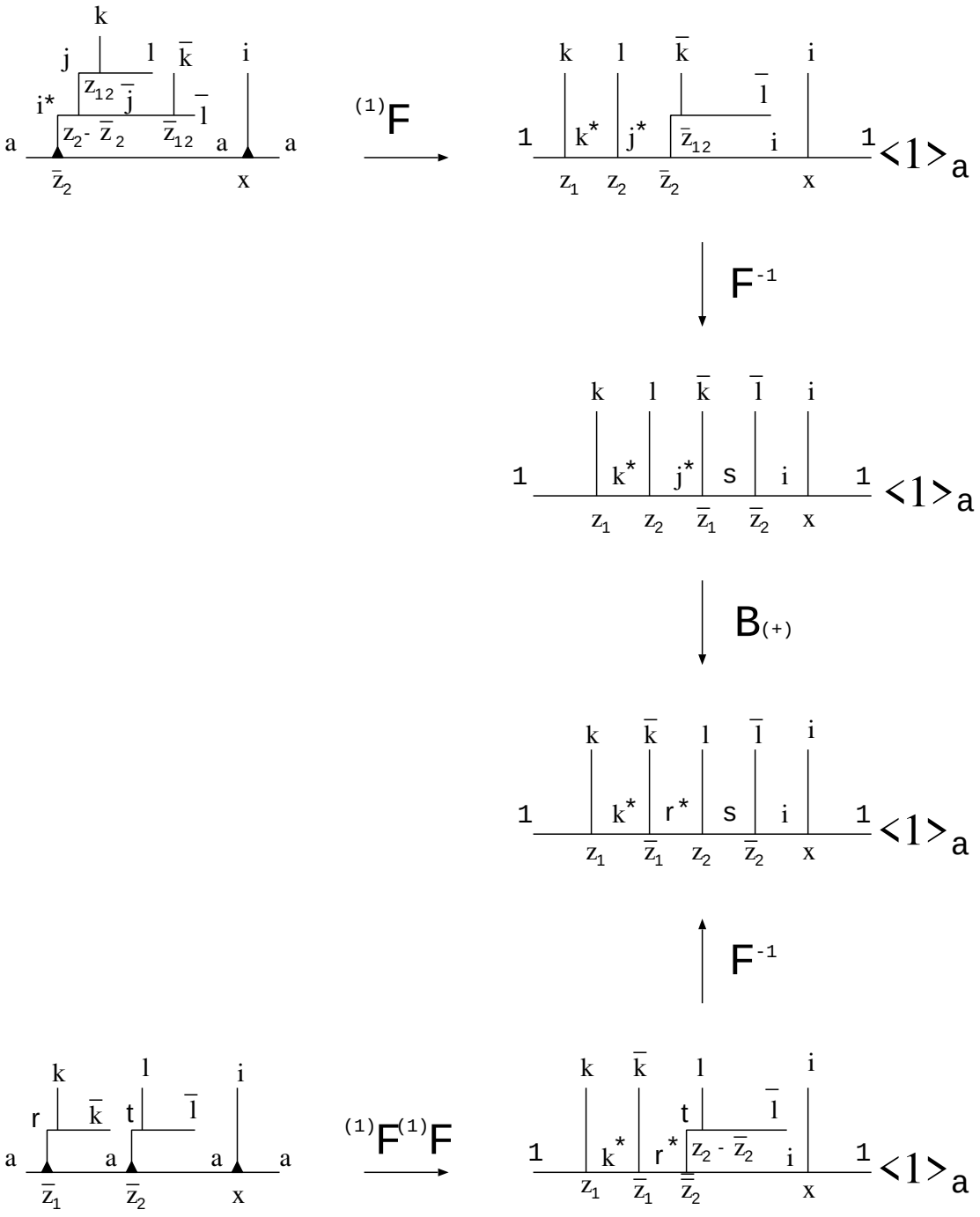

図 3.16: bulk fied が 2 つ、boundaryfield が 1 つの相関関数

$i \in \mathcal{E}, i \in \mathcal{I}, \gamma_j(i) = \frac{S_{ji}}{S_{1j}}, \hat{\gamma}_a(i) = \frac{\psi_a^i}{\psi_1^i}$ である。

よって両者を比較し

$$\frac{{}^bB_i^1\langle \mathbf{1}\rangle_b}{{}^aB_i^1\langle \mathbf{1}\rangle_a} \propto \frac{\hat{\gamma}_b(i)}{\hat{\gamma}_a(i)} \tag{3.75}$$

ところで $\langle \mathbf{1}\rangle_a = g_a = \frac{\psi_a^1}{\sqrt{S_{11}}}$ であるから

$${}^aB_i^1 = \frac{\hat{\gamma}_a}{\langle \mathbf{1}\rangle_a}\text{const.} = \frac{\psi_a^1}{\psi_a^1}e^{\pi i h_i}\sqrt{\frac{C_{ii^*}}{d_i}} = e^{\pi i h_i\, a}B_i^1(CL) \tag{3.76}$$

ただし C_{ii^*} は任意定数、d_i は量子次元である。逆に ${}^aB_i^1$ がこのような形をしていれば (3.66) は (3.34) を含むことが言える。特に diagonal なケース ($\mathcal{E} = \mathcal{I}$) では (3.34) は単に fusion 代数になるので (3.66) は fusion 代数を含むことになる。

(3.73) の導出　ます、準備としてとして必要となる式を導出しておく。

${}^{(1)}F$ の逆行列 ${}^{(3)}F(\text{third fusing matris})$ を定義する。

$$\sum_{b,\beta_2,\beta_3} {}^{(3)}F_{pb^*}\begin{bmatrix} c^* & k \\ a^* & j \end{bmatrix}^{\sigma_{12}(\beta_3)\sigma_{12}(\beta_2)}_{\sigma_{23}(\alpha_2)t'} {}^{(1)}F_{bs}\begin{bmatrix} k & j \\ c & a \end{bmatrix}^{\sigma_{13}(\gamma_2)t}_{\beta_2\beta_3} = \delta_{ps}\delta_{\alpha_2\gamma_2}\delta_{t't} \tag{3.77}$$

特に

$${}^{(3)}F_{pb}\begin{bmatrix} a & \mathbf{1} \\ c & k \end{bmatrix}^{\beta\gamma}_{\alpha t} = \delta_{ab}\delta_{kp}\delta_{\alpha\beta}\delta_{t\mathbf{1}}\delta_{\gamma\mathbf{1}} \tag{3.78}$$

$${}^{(3)}F_{pb}\begin{bmatrix} a & j \\ c & \mathbf{1} \end{bmatrix}^{\beta\gamma}_{\alpha t} = \delta_{cb}\delta_{jp}\delta_{\alpha\gamma}\delta_{t\mathbf{1}}\delta_{\beta\mathbf{1}} \tag{3.79}$$

((3.47)、(3.48) 参照)

(3.65) の両辺に ${}^{(3)}F_{m'c^*}\begin{bmatrix} b^* & j \\ d^* & k \end{bmatrix}^{\sigma_{12}(\alpha_3)\sigma_{12}(\alpha_2)}_{\delta t}$ をかけて c, α_2, α_3 について和をとる。

$$\begin{aligned}
&\sum_{t_2} F_{mp}\begin{bmatrix} i & j \\ l & k \end{bmatrix}^{u_2u_3}_{t_2t_3} {}^{(1)}F_{bl}\begin{bmatrix} i & m \\ a & d \end{bmatrix}^{\gamma_1t_2}_{\alpha\sigma_{12}(\delta)} \\
&= \sum_{c,\alpha_2,\alpha_3}\sum_{\beta_1} {}^{(1)}F_{cl}\begin{bmatrix} p & k \\ a & d \end{bmatrix}^{\gamma_1u_2}_{\beta_1\alpha_3} {}^{(1)}F_{bp}\begin{bmatrix} i & j \\ a & c \end{bmatrix}^{\beta_1u_3}_{\alpha_1\alpha_2} {}^{(3)}F_{mc^*}\begin{bmatrix} b^* & j \\ d^* & k \end{bmatrix}^{\sigma_{12}(\alpha_3)\sigma_{12}(\alpha_2)}_{\delta t}
\end{aligned} \tag{3.80}$$

簡単のために m' を改めて m とした。ここで $m=1, p=1$ として、$i,j,k \to j,\ j \to j^*$ と置き換えて、 (3.47) (3.48) を使って和をとってしまうと

$$F_{11}\begin{bmatrix} j & j^* \\ j & j \end{bmatrix}^{u_2 u_3}_{1 t_3} \delta_{bd}\delta_{\alpha_1\gamma_1}\delta_{\beta \mathbf{1}} = \sum_{\alpha_2} {}^{(1)}F_{b1}\begin{bmatrix} j & j^* \\ a & a \end{bmatrix}^{\mathbf{1}u_3}_{\alpha\alpha_2} {}^{(3)}F_{1a^*}\begin{bmatrix} b^* & j^* \\ d^* & j \end{bmatrix}^{\sigma_{12}(\gamma)\sigma_{12}(\alpha_2)}_{\beta t_3} \delta_{u_2\mathbf{1}}\delta_{u_2\mathbf{1}} \tag{3.81}$$

$b=d, \beta_2=\mathbf{1}, \alpha_1=\gamma_1\equiv\alpha, u_2=\mathbf{1}, \delta=\mathbf{1}$ とおくと

$$F_{11}\begin{bmatrix} j & j^* \\ j & j \end{bmatrix}^{\mathbf{1}u_3}_{\mathbf{1}t_3} = \sum_{\alpha_2} {}^{(3)}F_{1a^*}\begin{bmatrix} b^* & j^* \\ b^* & j \end{bmatrix}^{\sigma_{12}(\alpha)\sigma_{12}(\alpha_2)}_{\mathbf{1}t_3} {}^{(1)}F_{b1}\begin{bmatrix} j & j^* \\ a & a \end{bmatrix}^{\mathbf{11}}_{\alpha,\alpha_2} \tag{3.82}$$

さらに、$u_3=t_3=\mathbf{1}$ とおいて、あとで結果が使いやすいように a,b を入れ替え、そして、$\alpha_2=\sigma_{13}(\beta)$ と置き換える。$\alpha=\alpha_1$ は $\binom{a}{j,b}$ のインデックスであるから $n_{jb}^a=n_{ja}^b$ 個の値をとる。 (3.82) の両辺を α について和をとると

$$\frac{1}{d_j}n_{ja}^b = \sum_{\alpha\beta} {}^{(3)}F_{1b^*}\begin{bmatrix} a^* & j^* \\ a^* & j \end{bmatrix}^{\sigma_{23}(\alpha)\sigma_{23}(\beta)}_{\mathbf{11}} {}^{(1)}F_{a1}\begin{bmatrix} j & j^* \\ b & c \end{bmatrix}^{\mathbf{11}}_{\sigma_{13}(\alpha)\sigma_{13}(\beta)} \tag{3.83}$$

ただし $d_j=\frac{S_{j1}}{S_{11}}=F_{11}\begin{bmatrix} j & j^* \\ j & j \end{bmatrix}$ であることを使った。

(3.66) から (3.34) の導出　(3.66) を少し書き換える。両辺に ${}^{(3)}F_{b^*s'^*}\begin{bmatrix} a^* & k \\ a & j \end{bmatrix}^{\sigma_{12}(\delta)\sigma_{12}(\gamma)}_{\sigma_{13}(\alpha'')}$ をかけて b,δ,γ について和をとる。

すると左辺は

$$(\mathrm{LHS}) = \sum_{\alpha} {}^{a\alpha}B^s_{(i,\bar{i})}\langle\mathbf{1}\rangle_a {}^{(1)}F_{a1}\begin{bmatrix} s^* & s \\ a & a \end{bmatrix}^{\mathbf{1}}_{\sigma_{13}(\alpha')\alpha} \sum_m e^{\pi i(2h_i-2h_m+h_k+h_j-h_p)}F_{sm}\begin{bmatrix} j & i \\ k^* & \bar{i} \end{bmatrix} F_{mp^*}\begin{bmatrix} k & j \\ \bar{i}^* & i \end{bmatrix} \tag{3.84}$$

ただし便宜上、$s'\to s, \alpha''\to\alpha'$ と置き換えた。

一方、右辺は

$$(\mathrm{RHS}) = \sum_{b\beta} {}^{b\beta}B^p_{(i,\bar{i})}\langle\mathbf{1}\rangle_b \sum_{\delta,\gamma,\gamma'} {}^{(3)}F_{b^*s^*}\begin{bmatrix} a^* & k \\ a & j \end{bmatrix}^{\sigma_{12}(\delta)\sigma_{12}(\gamma)}_{\sigma_{13}(\alpha')} {}^{(1)}F_{bj^*}\begin{bmatrix} k & p \\ a & b \end{bmatrix}^{\gamma'}_{\gamma\beta} {}^{(1)}F_{a1}\begin{bmatrix} j & j^* \\ b & b \end{bmatrix}_{\delta\gamma'} \tag{3.85}$$

ここで (3.52) を用いた。

(3.66) $\Longrightarrow$

$$\sum_{\alpha}{}^{a\alpha}B^{s}_{(i,\bar{i})}\langle\mathbf{1}\rangle_{a}{}^{(1)}F_{a1}\begin{bmatrix}s^{*} & s\\ a & a\end{bmatrix}^{\mathbf{1}}_{\sigma_{13}(\alpha')\alpha}\sum_{m}e^{\pi i(2h_i-2h_m+h_k+h_j-h_p)}F_{sm}\begin{bmatrix}j & i\\ k^{*} & \bar{i}\end{bmatrix}F_{mp^{*}}\begin{bmatrix}k & j\\ \bar{i}^{*} & i\end{bmatrix}$$
$$=\sum_{b\beta}{}^{b\beta}B^{p}_{(i,\bar{i})}\langle\mathbf{1}\rangle_{b}\sum_{\delta,\gamma,\gamma'}{}^{(1)}F_{bj^{*}}\begin{bmatrix}k & p\\ a & b\end{bmatrix}^{\gamma'}_{\gamma\beta}{}^{(3)}F_{b^{*}s^{*}}\begin{bmatrix}a^{*} & k\\ a & j\end{bmatrix}^{\sigma_{12}(\delta)\sigma_{12}(\gamma)}_{\sigma_{13}(\alpha')}{}^{(1)}F_{a1}\begin{bmatrix}j & j^{*}\\ b & b\end{bmatrix}_{\delta\gamma'} \tag{3.86}$$

特に $s=p=1$ とすると

$$\sum_{\alpha}{}^{a\alpha}B^{1}_{(i,\bar{i})}\langle\mathbf{1}\rangle_{a}{}^{(1)}F_{a1}\begin{bmatrix}1 & 1\\ a & a\end{bmatrix}^{\mathbf{1}}_{\sigma_{13}(\alpha')\alpha}\sum_{m}e^{\pi i(2h_i-2h_m+h_k+h_j)}F_{1m}\begin{bmatrix}j & i\\ k^{*} & \bar{i}\end{bmatrix}F_{m1}\begin{bmatrix}k & j\\ \bar{i}^{*} & i\end{bmatrix}$$
$$=\sum_{b\beta}{}^{b\beta}B^{1}_{(i,\bar{i})}\langle\mathbf{1}\rangle_{b}\sum_{\delta,\gamma,\gamma'}{}^{(1)}F_{bj^{*}}\begin{bmatrix}k & 1\\ a & b\end{bmatrix}^{\gamma'}_{\gamma\beta}{}^{(3)}F_{b^{*}1}\begin{bmatrix}a^{*} & k\\ a & j\end{bmatrix}^{\sigma_{12}(\delta)\sigma_{12}(\gamma)}_{\sigma_{13}(\alpha')}{}^{(1)}F_{a1}\begin{bmatrix}j & j^{*}\\ b & b\end{bmatrix}_{\delta\gamma'} \tag{3.87}$$

$\alpha'=\mathbf{1}, k=j^{*}$, 特に $\bar{i}=i^{*}$ として、 (3.47)、 (3.48) を使って和をとると

$${}^{a\mathbf{1}}B^{1}_{(i,\bar{i})}\langle\mathbf{1}\rangle_{a}\sum_{m}e^{\pi i(2h_i-2h_m+2h_j)}F_{1m}\begin{bmatrix}j & i\\ j & \bar{i}\end{bmatrix}F_{mp^{*}}\begin{bmatrix}j^{*} & j\\ \bar{i}^{*} & i\end{bmatrix}$$
$$=\sum_{b,\delta,\gamma'}{}^{b\mathbf{1}}B^{1}_{(i,\bar{i})}\langle\mathbf{1}\rangle_{b}{}^{(3)}F_{b^{*}1}\begin{bmatrix}a^{*} & j\\ a & j\end{bmatrix}^{\sigma_{12}(\delta)\sigma_{12}(\gamma)}_{\mathbf{1}}{}^{(1)}F_{a1}\begin{bmatrix}j & j^{*}\\ b & b\end{bmatrix}_{\delta\gamma} \tag{3.88}$$

ここで (3.83) と (2.119) を用いると

$${}^{a\mathbf{1}}B^{1}_{(i,\bar{i})}\langle\mathbf{1}\rangle_{a}\frac{S_{ij}}{S_{i1}}=\sum_{b}{}^{b\mathbf{1}}B^{1}_{(i,\bar{i})}\langle\mathbf{1}\rangle_{b} \tag{3.89}$$

sewing constraint と Pasquir 代数

ここでは sewing constraint から Pasquir 代数が導出されることを示す。 (3.69) において $r=1, \bar{k}=k^{*}, \bar{l}=l^{*}$ とする。 (3.76) を使うと

$$p_l(a)p_l(a)=\sum_{j}M^{j}_{kl}p_j(a) \tag{3.90}$$

ただし $p_i(a) = \frac{\psi_a^i}{\psi_a^1}$ で

$$M_{kl}^j \equiv \sqrt{\frac{d_k d_l}{d_j}} \sqrt{\frac{C_{jj^*}}{C_{kk^*} C_{ll^*}}} \sum_{t,\bar{t}} D^{(j,j^*);t\bar{t}}_{(k,k^*)(l,l^*)} F_{j1} \begin{bmatrix} k^* & k \\ l & l \end{bmatrix}^{\mathbf{11}}_{\sigma_{13}(\bar{t})t} \tag{3.91}$$

diagonal な場合には $D^{(j,j^*)\bar{t}}_{(k,k^*)(l,l^*)} = C^{(j,j^*)\bar{t}}_{(k,k^*)(l,l^*)}$ とおいて、(3.70) で $a = 1$ にとると

$$\frac{{}^1B_j^1}{{}^1B_k^{11} B_l^1} e^{i\pi(h_k + h_l - h_j)} C^{(j,j^*)\bar{t}}_{(k,k^*)(l,l^*)} = F_{1j} \begin{bmatrix} k & l \\ k & l^* \end{bmatrix}^{\sigma_{12}(\bar{t})t}_{11} \tag{3.92}$$

$n_{r1}^1 = N_{r1}^1 = \delta_{1r}$ より $\alpha = \beta = \mathbf{1}, r = 1$ しかとれないので和が簡単になる。特に $j = 1, l = k^*$ の場合には

$${}^1B_k^{11} B_{k^*}^1 = e^{2\pi i h_k} d_k C^{(1,1)}_{(k,k^*)(k^*l,k)} \tag{3.93}$$

一方、(3.76) より

$${}^1B_k^{11} B_{k^*}^1 = \frac{S_1^j}{S_1^1} e^{i\pi h_k} \sqrt{\frac{C_{kk^*}}{d_k}} \frac{S_1^j}{S_1^1} e^{i\pi h_{k^*}} \sqrt{\frac{C_{k^*k}}{d_{k^*}}} = d_i e^{2\pi i h_k} C_{kk^*} \tag{3.94}$$

であるから、diagonal な場合には C_{kk^*} は bulk の 2 点関数であるといえる。

第4章　$c=1$理論におけるboundary stateの族

4.1　set up

まず、円周上のfree bosonの理論を考える。円周の半径が$R=\frac{M}{N}R_{selfdual},\quad M,N$は互いに素な整数、の場合を中心に考えていく。簡単に$R_{selfdual}$を$R_{s.d.}$と表記する。

boundary stateの満たすべき条件は

$$\left(L_n-\bar{L}_{-n}\right)|boundary\,state\rangle\rangle=0 \tag{4.1}$$

とする。つまりこのboundary stateは共形不変性のみを保ち、$U(1)$対称性は一般に保たない。この点、$(\alpha_n+\alpha_{-n})|D\rangle\rangle=0,(\alpha_n-\alpha_{-n})|N\rangle\rangle=0,\alpha_n$は自由ボソンのモード、といったDirichlet条件やNeumann条件を満たすboundary stateを考えて、$U(1)$対称性を保つようなboundary stateを扱うのならば前章で述べたRCFTのboundary stateの構成法で十分である。しかし、$U(1)$対称性を破ることにより無限個のVirasoro代数の表現を扱う必要がある。つまりirrational CFTの範囲でboundary stateを構成することを考えなくてはいけないので、もはやCrdayの構成法は使えない。

以下、free bosonを中心に見ていくが、fermionを加えて、world-sheetに超対称性を導入した場合もほぼ同様にboundaru stateを構成していくことができる。

notationについて、$\alpha'=\frac{1}{2}$として、運動量(p_L,p_R)を

$$(p_L,p_R)=\left(\frac{\hat{m}}{2R}+\hat{n}R,\frac{\hat{m}}{2R}-\hat{n}R\right) \tag{4.2}$$

と、定義する。またbulkの分配関数は

$$Z(q,\bar{q})=\sum_{\hat{m},\hat{n}\in\mathbb{Z}}\theta_{p_L}(q)\theta_{p_R}(\bar{q}) \tag{4.3}$$

ただし

$$\theta_s(q)=\frac{q^{\frac{1}{2}s^2}}{\eta(q)} \tag{4.4}$$

ところで、$c=1$ CFT の表現 s (confomal weight $h=\frac{1}{2}s^2$) の既約な character χ_h について、次のように表わされる。$j=0,\frac{1}{2},1.\cdots$ とし、

$$h\neq j^2 \Longrightarrow \chi_h(q)=\frac{q^h}{\eta(q)} \tag{4.5}$$

$$h=j^2 \Longrightarrow \chi_h(q)=\theta_{\sqrt{2}j}(q)-\theta_{\sqrt{2}(j+1)}(q) \tag{4.6}$$

$s=\sqrt{2}j$ の時 $h=j^2$ となるわけだが、この時表現 s は可約な表現であり、レベル $2j+q$ に null vector が現れる。null vector の conformal weight $h'=h+2j+2=(j+1)^2$ なので、この null vector は表現 $s'=\sqrt{2}(j+1)$ である。したがって、$\chi_h(q)=\theta_{\sqrt{2}j}(q)-\theta_{\sqrt{2}(j+1)}(q)$ となる。それ以外の場合は全て既約な表現となる。

そうすると、$p_l=\sqrt{2}j \quad (j=0,\frac{1}{2},1,\cdots)$ とき、$h_L=j^2$ であり、

$$\theta_{\sqrt{2}j}=\sum_{l=0}^{\infty}(\theta_{\sqrt{2}(j+l)}-\theta_{\sqrt{2}(j+l+1)}) \tag{4.7}$$

であるから、

$$\mathcal{H}_j^{U(1)}=\bigoplus_{l=0}^{\infty}\mathcal{H}_{|j|+l}^{Vir} \tag{4.8}$$

このように $U(1)$ の既約表現を無限個の Virasoro 代数の既約表現に分解するのは、共形不変性しか保たない boundary state を構成するのが目標なので $U(1)$ の既約表現に対して定義された Ishibashi state ではなく、Virasoro 代数の既約表現に対して定義された Ishibashi state で boundary state を構成する必要があるからだ。

とするならば、このように分解可能な $U(1)$ の既約表現を明らかにしておくことも必要になる。

さて、半径 $R=\frac{M}{N}R_{s.d.}$ の時から考えていく。始めに $(M,N)=(1,1)$ の場合から見ていこう。

$$(M,N)=(1,1) \Longrightarrow (p_L,p_R)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{m}+\hat{n},\hat{m}-\hat{n},) \tag{4.9}$$

$$h=\frac{1}{2}p_L^2=\left(\frac{\hat{m}+\hat{n}}{2}\right)^2\equiv m^2 \tag{4.10}$$

$$\bar{h}=\frac{1}{2}p_R^2=\left(\frac{\hat{m}-\hat{n}}{2}\right)^2\equiv n^2 \tag{4.11}$$

とすると、常に $m,n \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ である。そして $j \geq |m|,|n|$ かつ $m-j, n-j \in \mathbb{Z}$ なる j が存在して

$$\mathcal{H}_m^{U(1)} \otimes \bar{\mathcal{H}}_m^{U(1)} \supset \mathcal{H}_j^{Vir} \otimes \bar{\mathcal{H}}_j^{Vir} \tag{4.12}$$

なので、$(j;m,n)$ に対して 1 つずつ Ishibashi state が定義できる。

一般の M,N の場合には

$$(p_L, p_R) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{N}{M}\hat{m} + \frac{M}{N}\hat{n}, \frac{N}{M}\hat{m} - \frac{M}{N}\hat{n}\right) \tag{4.13}$$

$$h = \frac{1}{2}p_L^2 = \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{N}{M}\hat{m} + \frac{M}{N}\hat{n}\right)\right\}^2 \equiv m^2 \tag{4.14}$$

$$\bar{h} = \frac{1}{2}p_R^2 = \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{N}{M}\hat{m} - \frac{M}{N}\hat{n}\right)\right\}^2 \equiv n^2 \tag{4.15}$$

と定義された m,n が $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ に含まれるときその表現は縮退した表現である。m,n が $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ のどのような値をとりうるかは初等的な計算により、次の条件を満たすものに限られる。

$$m+n = lN, m-n = l'M \tag{4.16}$$

ただし $l,l' \in \mathbb{Z}$ とする。$(M,N) = (1,1)$ のときと同様に $j \geq |m|,|n|$ かつ $m-j, n-j \in \mathbb{Z}$ なる j が存在して $(j:m,n)$ により Ishibashi state をラベルすることができる。

なお、半径 $R = (\text{無理数}) \times R_{s.d.}$ のときは $(m,n) = (0,0)$ 以外に縮退する表現は存在しない。実際、m について

$$2m = \frac{1}{(\text{無理数})}\hat{m} + (\text{無理数})\hat{n} \in \mathbb{Z}$$

という条件と n について同様の条件が得られるが、これらを満たす (m,n) は $(0,0)$ に限る。

結局、半径 R の情報は「縮退した表現はどれか」という情報に翻訳されて明示的に現れなくなっている。

ここで定義した Ishibashi state $|j;m,n\rangle\rangle$ の規格化は通常通りに

$$\langle\langle j;m,n|q^{\frac{1}{2}(L_0+\bar{L}_0-\frac{c}{12})}|j;m,n\rangle\rangle = \chi_{j^2}(q) \tag{4.17}$$

以下では縮退した $U(1)$ の表現から得られた Ishibashi state を用いて対称性を破る boundary state を構成していく。

4.2 $R = R_{s.d.}$ のときの boundary state

半径 R が自己双対半径のとき、通常通りに境界条件として

$$(\alpha_n - \bar{\alpha}_{-n})|N\rangle\rangle = 0, (\alpha_n + \bar{\alpha}_{-n})|D\rangle\rangle = 0$$

を課すと特定の点に存在する Dirchlet boundary state と、特定の値の Wilson line をもつ Neumann boundary state しか得ることはできない。ところが任意の位置に存在する Dirchlet boundary state、任意の値の Wilson line をもつ Neumann boundary state を含む、$SU(2)$ をモデュライ空間とするような boundary state も存在する。この節では boundary condition のモデュライ空間が $g \in SU(2)$ でラベルされる、言い換えると boundary state が g でラベルされることを見ていく。

まず、任意の $g \in SU(2)$ に対して、boundary state $|g\rangle\rangle$ が定義できて

$$\left(\mathrm{Ad}_{g\cdot\iota}(J^a_n) + \bar{J}^a_{-m}\right)|g\rangle\rangle = 0 \qquad (\text{for all } m) \tag{4.18}$$

ただし $\iota = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ 、を境界条件として満たしているとする。このとき

$$|g\rangle\rangle \equiv \frac{1}{2^{\frac{1}{4}}} \sum_{j,m,n} D^j_{m,n}(g)|j;m,n\rangle\rangle \tag{4.19}$$

ここで $D^j_{m,n}$ は g の行列表現、$|j;m,n\rangle\rangle$ は前節で定義した Virasoro Ishibashi state である。また g は

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}, |a|^2 + |b|^2 = 1 \tag{4.20}$$

と、特徴付けられている。参考までに $D^j_{m,n}$ は

$$D^j_{m,n}(g) = \sum_{l=\max(0,n-m)}^{\min(j-m,j+n)} \frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+n)!(j-n)!}}{(j-m-l)!(j+n-l)!l!(m-n+l)!} a^{j+n-l}(a^*)^{j-m-l}b^{m-n+l}(-b^*)^l \tag{4.21}$$

と表わすことができる。

$|g\rangle\rangle$ は確かに上の境界条件を満たす。なぜならその境界条件は Dirichlet 条件を g による自己同型写像により closed string sector の正則部分に作用するところの J^a_m がある種 “回転” させたものになっている。一方、通常の Dirichlet state をの正則部分を g により “回転” させたものが $|g\rangle\rangle$ と考えられる。とすれば、g によって “回転” させられた境界条件とを $|g\rangle\rangle$ が満たすことは Dirichlet 条件を Dirichlet state が満たしていることに帰着される。

この表示の下で、$g = id, \iota$ に対応する boundary state はそれぞれ原点に存在する Dirichlet state、Wilson line がゼロの Neumann state となる。実際、

$$|id\rangle\rangle = \sum_{j,m} |j; m, m\rangle\rangle$$
$$|\iota\rangle\rangle = \sum_{j,m} |j; m, -m\rangle\rangle$$

であるから直ちにそのことは確かめられる。

そしてこれらの boundary state を Cardy condition を満たす。このことは実際に二つの boundary state 間の分配関数を計算して、そこに現れる openstring のスペクトルを見れば直ちに確認できる。

$$Z_{g_1 g_2}(\tilde{q}) \equiv \sum_{n \in \mathbb{Z}} \theta_{-\frac{\alpha}{\sqrt{2}\pi} + \sqrt{2}n}(\tilde{q}) \tag{4.22}$$

ただし、$tr_j(g_1^{-1} g_2) = \frac{\sin((2j+1)\alpha)}{\sin \alpha}$ により α は定義される。$U(1)$ の各表現の character の係数が非負整数であるのは明らかである。$g_1 = g_2$ の場合には open stirng のスペクトルのならびは $\widehat{su}(2)_1$ 対称性を示している。

また、任意の g に対して、Z_{gg} は同じ open stirng のスペクトルを持つ。このことは [26][27][18] のの結果と一致する。しかし、ここでの結果は異なるタイプの boundary state 間の open stirng のスペクトルを決定する。

(4.22) の導出

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \langle\langle g_1 | q^{\frac{1}{2}(L_0 + \bar{L}_0 - \frac{c}{12})} | g_2 \rangle\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{jmn} \sum_{j'm'n'} \langle\langle j'; m'n' | (D^{j'}_{m'n'}(g_1))^* D^j_{mn}(g_2) | j; mn \rangle\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{jmn} (D^j_{mn}(g_1))^* D^j_{mn}(g_2) \chi_{j^2}(q) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{jmn} D^j_{nm}(g_1^{-1}) D^j_{mn}(g_2) \chi_{j^2}(q) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{j} tr_j(g_1^{-1} g_2) \chi_{j^2}(q)
\end{aligned} \tag{4.23}$$

ここで $tr_j(g_1^{-1}g_2) = \frac{\sin((2j+1)\alpha)}{\sin\alpha}, 0 \leq \alpha \geq 2\pi$ と表わせることを利用する。また $\chi_{j^2}(q) = \theta_{\sqrt{2}j} - \theta_{\sqrt{2}(j+1)}$ であったから

$$\begin{aligned}
\sqrt{2}\mathcal{A} &= \sum_{j\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}_+} \frac{\sin((2j+1)\alpha)}{\sin\alpha}(\theta_{\sqrt{2}j} - \theta_{\sqrt{2}(j+1)}) \\
&= \theta_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \theta_{\sqrt{2}j} \underbrace{\left(\frac{\sin((2j+1)\alpha)}{\sin\alpha} - \sin((2j-1)\alpha)\sin\alpha\right)}_{2\cos(2j\alpha)} \\
&+ 2\cos\alpha\theta_{\frac{1}{\sqrt{2}}} + \sum_{j=\frac{3}{2}}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{\sin((2j+1)\alpha)}{\sin\alpha} - \sin((2j-1)\alpha)\sin\alpha\right)}_{2\cos(2j\alpha)} \\
&= \sum_{j\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}} \cos(2j\alpha)\theta_{\sqrt{2}j} \qquad (4.24)
\end{aligned}$$

最後の等号では $\theta_s = \theta_{-s}$ であることを使った。ここで $\theta_s(q)$ はモデュラー変換に対して次のように振る舞う。

$$\theta_s(q) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{2\pi i t s}\theta_t(\tilde{q}) \qquad (4.25)$$

ただし $q = e^{2\pi i\tau}, \mathrm{Im}\tau > 0, \tilde{q} = e^{-\frac{2\pi i}{\tau}}$ である。これらをまとめてると $\mathcal{A} = Z_{g_1g_2}(\tilde{q})$ は

$$\begin{aligned}
Z_{g_1g_2}(\tilde{q}) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{\infty} dt\theta_t(\tilde{q}) \sum_{j\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}} e^{2\pi i\sqrt{2}jt}\cos(2j\alpha) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{\infty} dt\theta_t(\tilde{q}) \sum_{l\in\mathbb{Z}} e^{il(\sqrt{2}\pi t+\alpha)} \\
&= \frac{2\pi}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{\infty} dt\theta_t(\tilde{q}) \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(\sqrt{2}\pi t + \alpha + 2\pi n) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \theta_{-\frac{\alpha}{\sqrt{2}\pi}+\sqrt{2}n}(\tilde{q}) \qquad (4.26)
\end{aligned}$$

4.3 $R = \frac{M}{N}R_{s.d.}$ の場合への拡張

この節では前節での構成方法を $R = \frac{M}{N}R_{s.d.}$ の場合に拡張することを目的とする。この場合も $g \in SU(2)$ により boundary state をがラベルできて $R = R_{s.d.}$ の場合とほぼ同様に $|g\rangle\rangle$ を定義することができる。

$$|g\rangle\!\rangle_{M,N} = \frac{\sqrt{MN}}{2^{\frac{1}{4}}} \sum_{\substack{j,\,m,\,n \\ m+n=lM \\ m-n=l'N \\ l,l'\in\mathbb{Z}}} D^j_{m,n}(g)|j;m,n\rangle\!\rangle \tag{4.27}$$

ただし、m,n の和は $m+n=lM, m-n=l'N,\ l,l'\in\mathbb{Z}$ の下でとる点に注意。

$R=R_{s.d.}$ の場合との相違は m,n について和をとるとき m,n は一定の条件の下でとられなければならない点にある。こののために、boundary state 間の分配関数を計算する際、少々煩雑になる。そこで

$$\Gamma_M = \begin{pmatrix} e^{\frac{\pi i}{M}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{\pi i}{M}} \end{pmatrix} \tag{4.28}$$

を用いて見通しよくすることができる。

$$D^j_{m,n}(\Gamma_M) = e^{\frac{2\pi i}{M}m}\delta_{m,n} \tag{4.29}$$

なので

$$P^-_M \equiv \frac{1}{M}\sum_{l=0}^{M-1} D^j_{m,n}(\Gamma^l_M g \Gamma^{-l}_M) = \begin{cases} D^j_{m,n}(q) & m-n\equiv 0 \pmod M \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases} \tag{4.30}$$

となることがわかる。

同様にして

$$P^+_N \equiv \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{M-1} D^j_{m,n}(\Gamma^k_N g \Gamma^k_N) = \begin{cases} D^j_{m,n}(q) & m+n\equiv 0 \pmod N \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases} \tag{4.31}$$

以上をまとめると

$$|g\rangle\!\rangle_{M,N} = \frac{\sqrt{MN}}{2^{\frac{1}{4}}} \sum_{j,m,n} P^+_N P^-_M(g)|j;m,n\rangle\!\rangle \tag{4.32}$$

ただし

$$P^+_N P^-_M(g) = \frac{1}{MN}\sum_{l=0}^{M-1}\sum_{k=0}^{N-1} D^j_{m,n}(\Gamma^k_N \Gamma^l_M g \Gamma^{-l}_M \Gamma^k_N) \tag{4.33}$$

これを用いて $|g_1\rangle\rangle, |g_2\rangle\rangle$ 間の分配関数を計算すると

$$Z_{g_1,g_2}(\tilde{q}) \sum_{l=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \theta_{-\frac{\alpha_{k,l}(g_1,g_2)}{\sqrt{2}\pi}+\sqrt{2}n}(\tilde{q}) \tag{4.34}$$

ただし $\alpha_{k,l}(g_1, g_2)$ は

$$2\cos(\alpha_{k,l}(g_1,g_2)) = tr_{j=\frac{1}{2}}[g_1^{-1}\Gamma_N^k\Gamma_M^l g_2 \Gamma_M^{-l}\Gamma_N^k] \tag{4.35}$$

計算自体は $R = R_{s.d.}$ のときと同様に計算できる。また Cardy condition が満たされていることは明らかである。なお $\alpha_{k,l}(g_1g_2)$ には $2\pi i$ 分の不定性があるが、n についての和をとってしまうので、その影響はない。

(4.34) から $U(1)$ 対称性が破れている様が確認できる。

$$(M,N) = (1,1) \quad \text{i.e } \alpha = 0 \Longrightarrow Z_{g,g} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \theta_{\sqrt{2}n}(\tilde{q}) \tag{4.36}$$

このとき boundary state $|g\rangle\rangle$ の間に現れる open string のスペクトルを見ると $U(1)$ charge が charge lattice を構成することから、$U(1)$ 対称性が保たれていることがわかる。実際、この場合 ($R = R_{s.d}$) には理論の対称性は $\hat{u}(1)_1 = \widehat{su}(2)_1$ なので、boundary state の正則部分を $SU(2)$ の元で"回転"させたところで boundary state が理論の対称性を破ることはない、と考えれば当然である。

一方、

$$(M,N) \neq (1,1) \Longrightarrow Z_{g,g} = \sum_{l=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \theta_{-\frac{\alpha_{k,l}(g,g)}{\sqrt{2}\pi}+\sqrt{2}n}(\tilde{q})$$

ここで

$$\cos(\alpha_{k,l}(g,g)) = \cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right) a^*a + \cos\left(\frac{2\pi l}{M}\right) b^*b \tag{4.37}$$

となるので一般にスペクトル中の"$U(1)$ charge"が lattice を形成しえない。すなわち $U(1)$ が破れていることがいえる。

具体的に $M = 1, N = 2$ のときにを考えてみる。ある実数 λ を決めて

$$g = \begin{pmatrix} \cos\lambda & \sin\lambda \\ -\sin\lambda & \cos\lambda \end{pmatrix}$$

とすると、$a_{0,0}=0, a_{1,0}=2\lambda+\pi$ なので

$$Z_{g,g}=\sum_n \theta_{\sqrt{2}n}+\sum_n \theta_{-\frac{2\lambda+\pi}{\sqrt{2}\pi}+\sqrt{2}n}.$$

よって open string の"$U(1)$ charge"は $n, n-\frac{2\lambda+\pi}{2\pi}$ だから一般に charge lattice を形成しえない。

また $Z_{g,g}$ の openstring スペクトルについて、$ab\neq 0 (g\neq e,\iota)$ の場合には真空状態 $(h=0)$ は縮退がなく、$ab=0 (g=e,\iota)$ の場合には縮退があることもわかる。

例えば $a=1, b=0$ のばあい $\alpha_{k,l}=\frac{2\pi k}{N}$ ととれるから

$$Z_{g,g}=\sum_{l=0}^{M-1}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\theta_{\frac{2\pi k}{\sqrt{2}\pi N}+\sqrt{2}n}$$

となる。明らかに真空状態 (θ_0 に対応) は M 重に縮退していることがわかる。同様に $a=0, b=1$ の場合には N 重に縮退していることがわかる。

このことは何を意味するかというと $g=e,\iota$ に対応する boundary state は特定の場所に位置する、あるいは特定の Wilson line を持った通常の $U(1)$ Dirichlet, あるいは Newmann boundary state を足しあげたものになっている。

$$|e\rangle\rangle_{M,N}=\sum_{p=0}^{M-1}|D,\frac{2\pi Rp}{M}\rangle\rangle \tag{4.38}$$

$$|\iota\rangle\rangle_{M,N}=\sum_{s=0}^{M-1}|N,\frac{\pi s}{RN}\rangle\rangle \tag{4.39}$$

なお、boundary state のモデュライ空間は今や $SU(2)$ ではなく

$$SU(2)/\mathbb{Z}_M\times\mathbb{Z}_N$$

となる。なぜならば $g=\begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}, g'=\begin{pmatrix} e^{i\theta}a & b \\ -b^* & e^{-i\theta}a^* \end{pmatrix}$ に対して $D^j_{m,n}(g)=e^{-i(m+n)\theta}D^j_{m,n}(g')$ という関係がある。ここで $|g\rangle\rangle$ の中で和をとるとき $m+n\equiv 0 \pmod N$ なので $\theta=\frac{2\pi}{N}l, l\in\mathbb{Z}$ の時 $D^j_{m,n}(g)$ は変化しない。同様に $b\to e^{i\phi}b$ と置き換えるときも、$\phi=\frac{2\pi}{M}l', l'\in\mathbb{Z}$ ならばやはり $D^j_{m,n}(g)$ は変化しない。よって boundary state のモデュライ空間は $SU(2)/\mathbb{Z}_M\times\mathbb{Z}_N$ である。

4.4 $R=0,\infty$ の場合

$R\to 0$ のときは $M=1, N\to\infty$,$R\to\infty$ のときは $M\to\infty, N=1$ の極限を考えればよい。ここでは $R\to 0$ の極限を扱う。

このとき (4.33) の k を連続量として扱えて、

$$P_M^+ P_N^-(g) \Longrightarrow \frac{1}{\pi}\int_0^\pi d\theta D^j_{m,n}\left(\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta}\end{pmatrix} g \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta}\end{pmatrix}\right) \tag{4.40}$$

と置き換えればよく、$Z_{g,g}$ は無限大の因子を除いて

$$Z_{g,g} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi d\theta \sum_{j\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}_+} tr_j \left[\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta}\end{pmatrix} g \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta}\end{pmatrix} g^{-1}\right] \chi_{j^2}(\tilde{q}). \tag{4.41}$$

χ_{j^2} の前のトレース因子を $\frac{\sin((2j+1)\alpha)}{\sin\alpha}, \alpha \equiv \alpha(g,\theta) \equiv 2\pi f(g,\theta)$ とおいて $j = \frac{1}{2}$ として α について解いて整理すれば

$$Z_{g,g} = \frac{1}{\eta(\tilde{q})}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_0^\pi \frac{d\theta}{\pi}\tilde{q}^{(n+f(g,\theta))^2}, f(g,\theta) = \frac{1}{\pi}\arcsin(|a|\sin\theta) \tag{4.42}$$

半径 R が有理数のときとは違って open string のスペクトルが連続的になっている。

4.5 $R =$ (無理数) $\times R_{s.d.}$ のとき

ここでは Gaberdiel,Recknagel の構成法 [12] を離れて janik による構成方法 [13] を説明したい。こちらの方法は sewing constraint を出発地点にして boundary state における Ishibashi state の係数を決定していく点が興味深い。

boundary state は Ishibashi state を用いて一般的に次のように表すことができる。

$$|a\rangle\rangle = \sum_{j=0,1,\cdots}\psi_j^a|j\rangle\rangle + \sum_m \psi_m^a|(m,m)\rangle\rangle + \sum_n \psi_n^a|(n,-n)\rangle\rangle \tag{4.43}$$

j は $(j,0,0)$ を表しているとする。この ψ_i^a を sewing constraint から導いた Pasquir 代数から決定していきたい。Cardy,Lewellen の記法を採用すると、ここでは $\sqrt{S_{j1}}$ を ψ_i^a に入れてしまっているので ${}^aB_i^1(CL) = \frac{\psi_a^i}{\psi_a^1}\sqrt{C_{ii^*}}$ になる。C_{ii^*} は 2 点関数の構造定数にとったので 1 である。$C_{ii^*} = 1$ にとって $\psi_a^1 = 1$ に規格化しなおすと classifying lgebra は

$$\psi_a^{i_1}\psi_a^{i_2} = \sum_i C_{i_1 i_2}^{i_3} F_{i_3 0}\begin{bmatrix} i_2 & i_2 \\ i_1 & i_1\end{bmatrix}\psi_a^{i_3} \tag{4.44}$$

となる。ただし 0 は真空表現を表している。結果を先に述べると $(0,0)$ 表現に属する Virasoro 代数の primary 場に対応する Ishibashi state を使って、次のような連続量で特徴付けられる

boundary state の族が構成できる。

$$|x\rangle\rangle = \mathcal{N}\sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)|l\rangle\rangle, -1 < x < 1 \tag{4.45}$$

ただし $P_1(x) = x$ である。$|l=1\rangle\rangle$ は真空状態ではなく $(i,0,0)$ に対応する Ishibashi state であることに注意していただきたい。$\mathcal{N}$ は規格化定数である。

Pasquir 代数から P_l の漸化式が得られる。

$$xP_l(x) = \frac{j}{2j+1}P_{j-1}(x) + \frac{j+1}{2j+1}P_{j+1}(x) \tag{4.46}$$

これは Legendre 多項式の漸化式に他ならない。よって P_l は Legendre 多項式であることがわかる。

また open string のスペクトルは

$$\begin{aligned} Z &= \langle\langle \cos\theta_1 | q^{\frac{1}{2}(L_0+\bar{L}_0-\frac{c}{12})} | \cos\theta_2 \rangle\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}\pi^2}\int_0^{\pi} d\phi_2 \int_0^{\pi} d\phi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \theta_{\frac{1}{\sqrt{2}}(n+t/2\pi)}(\tilde{q}), \end{aligned} \tag{4.47}$$

$$t(\theta_1,\theta_2,\phi,\phi_2) = 2\arccos\left(\cos\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{1+\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\phi_2}{2}}\right) \tag{4.48}$$

このスペクトルは連続的になり、共形ウェイトの空間の非負測度で積分されている。

以下では (4.46) (4.47) を実際に導出する。

(4.46) の導出

出発点は

$$xP_j = \sum_{k=0}^{\infty} C_{1j}^k F_{k0}\begin{bmatrix} j & j \\ 1 & 1 \end{bmatrix} P_k \tag{4.49}$$

であるが、実は $C_{1j}^{j+1}, C_{1j}^{j-1}$ 以外はゼロになる (後述) ので

$$xP_j = C_{1j}^{j+1}F_{j+1\,0}\begin{bmatrix} j & j \\ 1 & 1 \end{bmatrix} P_{j+1} + C_{1j}^{j-1}F_{j-1\,0}\begin{bmatrix} j & j \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.50}$$

の右辺の構造定数と fusion matrix を計算するのが目標である。

・$\mathbf{F}_{j+1\,0}\begin{bmatrix} j & j \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 1$

fusing matrix は共形ブロックによって

$$\mathcal{F}^{k+1}_{1k,1k}(1-z) = \sum_l F_{k+1\,l}\begin{bmatrix} k & k \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\mathcal{F}^{l}_{kk,11}(z) \tag{4.51}$$

と定義される。ここで $z \to 0$ のときの右辺のリーディング・タームは $F_{k+1\,0}\begin{bmatrix} k & k \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\mathcal{F}^{0}_{kk,11} \sim F_{k+1\,0}\begin{bmatrix} k & k \\ 1 & 1 \end{bmatrix} z^{-2}$ であるから

$$F_{k+1\,0}\begin{bmatrix} k & k \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \lim_{z\to 0} z^2 \mathcal{F}^{k+1}_{1k,1k}(1-z) \tag{4.52}$$

である。ところで $\mathcal{F}^{k+1}_{1k,1k}(z)$ は(2.110) により既にわかっているので

$$F_{j+1\,0}\begin{bmatrix} j & j \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 1 \tag{4.53}$$

という結果を得る。

・$\mathbf{C}^{j+1}_{1j} = \frac{j+1}{2j+1}$

構造定数はコンパクト化半径によらず共形ウェイトにより決まるものであるから半径 $R = R_{s.d.}$ の場合から決定していく。既に述べたように Virasoro 代数の primary 場 $\phi_{(j,m)}$ は $SU(2)$ の多重項になり、

$$\phi_{(j,m)}() \sim \left(: \oint \frac{dz}{2\pi i} e^{-i\sqrt{2}\phi(z)} :\right)^{j-m} : e^{i\sqrt{2}j\phi(0)} := (J^-_0)^{j-m} : e^{i\sqrt{2}j\phi(0)} : \tag{4.54}$$

となる。ゆえにその OPE の形は

$$\phi_{(j_1,m_1)}(z)\phi_{(j_2,m_2)}(0) \sim \sum_{j_3,m_3} (j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2 j m_3) f(j_1,j_2,j_3) \frac{1}{z^{h_{j_1}+h_{j_2}-h_{j_3}}} \phi_{(j_3,m_3)} \tag{4.55}$$

$(j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2 j m_3)$ は Clebsch-Gordan 係数である。したがって $C^{k+1}_{1k}, C^{k-1}_{1k}$ 以外の構造定数は消えてしまう。実際に C^{k+1}_{1k} を知るには $f(1,k,k+1)$ を知る必要があるが、これは次の OPE の計算から容易に読みとれる。

$$\phi_{(1,1)}(z)\phi_{(k,k)}(0) =: e^{i\sqrt{2}\phi(z)} :: e^{i\sqrt{2}k\phi(0)} :\sim z^{2k}\phi_{(k+1,k+1)}(0) \tag{4.56}$$

$$\therefore \qquad f(1,k,k+1) = (11kk|1k\,k+1\,k+1)^{-1} \tag{4.57}$$

以上より

$$C_{1k\ k+1} = \frac{(10k0|1k\ k+1, 0)}{(11kk|1k\ k+1\ k+1)} = \frac{k+1}{2k+1} \tag{4.58}$$

・$F_{k-1\,0}\begin{bmatrix} k & k \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{2k-1}{2k+1}$

交差対称性から

$$\sum_q \sqrt{C^q_{11}C^q_{kk}}\mathcal{F}^q_{kk,11}(1-z) = \sum_p \sqrt{C^p_{1k}C^p_{1k}}\mathcal{F}^p_{1k,1k}(z) \tag{4.59}$$

右辺を fusing matrix を使って変形すると

$$(\mathrm{RHS}) = \sum_{pm} \sqrt{C^p_{1k}C^p_{1k}}F_{pm}\begin{bmatrix} k & k \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\mathcal{F}^m_{11,kk}(1-z) \tag{4.60}$$

$\mathcal{F}^0_{11,kk}$ の係数を比較すると

$$\sum_p C^p_{1k}F_{p0}\begin{bmatrix} k & k \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \sqrt{C^0_{11}C^0_{kk}} = 1 \tag{4.61}$$

$p = k+1, k-1$ しか寄与しないので、$C^{k-1}_{1k} = C^k_{1\,k-1}$ から

$$F_{k-1\,0}\begin{bmatrix} k & k \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{2k-1}{2k+1} \tag{4.62}$$

を得る。

以上から漸化式(4.46) 示されることは明らかである。

(4.47) の導出

まず、

$$Z = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta_1)P_l(\cos\theta_2)\chi_{j^2} \tag{4.63}$$

から始める。

Legendre 多項式に関する公式

$$P_l(\cos\theta_1)P_l(\cos\theta_2) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi d\phi_2 P_l(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2\cos\phi_2) \tag{4.64}$$

を使う。さらに Legendre 多項式を積分表示すると、

$$P_l(\cos\theta) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi d\phi \frac{\sin\left(l+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}} \tag{4.65}$$

ここで $\cos t/2 = \cos\theta/2\cos\phi/2$ である。

さて、和をとる順を変えると、

$$\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\sin\left(l+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}(q^{l^2}-q^{(l+1)^2}) = 1+2\sum_{n=0}^{\infty}q^{n^2}\cos nt \tag{4.66}$$

となる。Poisson の和公式を使えば、モデュラー変換により

$$\frac{1}{\sqrt{-i2\tau}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\tilde{q}^{\frac{1}{4}\left(n+\frac{t}{2\pi}\right)^2} \tag{4.67}$$

$\sqrt{-i2\tau}$ は eta 関数からも出てくるので打ち消し合う。$\eta(-1/\tau) = \sqrt{-i2\tau}\eta(\tau)$ だからである。

以上をまとめて

$$Z = \frac{1}{\sqrt{2}\pi^2}\int_0^\pi d\phi_2\int_0^\pi d\phi\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\theta_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(n+\frac{t}{2\pi}\right)(\tilde{q}) \tag{4.68}$$

t は半角の公式を使えば(4.48) を満たすことも明らかである。

4.6 sewing conatraint etc.

$R =$ 無理数 $\times R_{s.d.}$ であるときは得られた boundary state が Pasquir 代数を満たすことは明らかである。では $R =$ 有理数 $\times R_{s.d.}$ のときはどうであろうか。

まず、$R = R_{s.d.}$ のときは $D^0_{0,0} = 1$ であるが

$$D^{j_1}_{m_1,n_1}(g)D^{j_2}_{m_2,n_2}(g) = \sum_{j_3,m_3,n_3}M^{(j_3;m_3,n_3)}_{(j_1;m_1,n_1)(j_2;m_2,n_2)}D^{j_3}_{m_3,n_3}(g) \tag{4.69}$$

なる代数が成立する。なぜならば $D^j_{m,n}(g)$ は $SU(2)$ 上の L^2 関数の基底をあたえる。(peter-Weyl 理論)$D^j_{m,n}(g)$ の積はやはり $SU(2)$ 上の L^2 関数になるから、その積は $D^j_{m,n}(g)$ により一意的に展開され、その展開係数が M になる。

$$M^{(j_3;m_3,n_3)}_{(j_1;m_1,n_1)(j_2;m_2,n_2)} = (j_1m_1,j_2m_2|j_3m_3)(j_3n_3|j_1n_1,j_2m_2) \tag{4.70}$$

$R =$ 有理数 $\times R_{s.d.}$ のときはどうであろうか。半径の変化により表現の共形ウェイトは変化しない。各表現は共形ウェイトで特徴付けられるから構造定数 M は変化せず、$\mathrm{Pasquir}$ 代数はやはり満たされるものと考えられる。

第5章　ゲージ化されたWZWモデルにおけるDブレーンの幾何学的解釈

これまでは代数的にboundary stateを構成してその性質を調べる、というスタンスをとってきた。確かにこれらの方法は強力であり様々な解析をなしうるものである。しかしその幾何学がはっきりしない。Dブレーンがどのように配位し、どのように崩壊するかなどといったダイナミックな物理が、それだけではなかなか見えてこない。ここではMaldacena等の方法[28]に従ってDブレーンの幾何学を調べていく。

扱うモデルはパラフェルミオン理論 $\frac{SU(2)_k}{U(1)_k}$ のDブレーンである。これに対応するシグマモデルのターゲット空間は円盤になることが知られている。境界条件 $J+\bar{J}=0$ を満たすboundary stateをAブレーン、$J-\bar{J}=0$ を満たすものをBブレーンと呼ぶことにする。Aブレーンは通常のDブレーンであるが、円盤の縁上の点に存在するD0ブレーン、縁上の2点をつなぐD1ブレーンなどがあることがわかる。これらの理論はその $\mathbb{Z}_k$ オービフォルドとT-dualである。そのオービフォルドのAブレーンに対応するパラフェルミオン理論のブレーンがBブレーンである。これらは円盤の中心付近に存在して、ほとんどのものが不安定である。理論のレベルを k として、k が偶数の場合には二つの安定なD2ブレーンがあって円盤全体を被っていることがわかる。

5.1　準備

ここでは後で必要になるパラフェルミオン理論についての結果だけ資料集としてまとめておくことにする。

理論の表現を $\mathcal{H}_{(j,n)}$ とする。ただし $j\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}, 0\le j\le\frac{k}{2}, n\in\mathbb{N} \mod 2k, 2j+n=0 \mod 2$ である。また、

$$(j,n)\sim(\frac{k}{2}-j,k+n) \tag{5.1}$$

により同一視がなされる。(5.1)により区別される既約表現の集合を $PF(k)$ とする。

指標は

$$\chi^k_{jn}(q) = tr_{\mathcal{H}_{(j,n)}} q^{L_0 - \frac{c}{24}} = \frac{1}{(\eta(\tau))^2} \left(\sum_{(x,y)\in A(j,n,k)} + \sum_{(x,y)\in A(k/2-j,k+n,k)} sign(x) e^{2\pi i \tau((k+2)x^2 - ky^2)} \right) \tag{5.2}$$

ただし

$$A(j,n,k) = \left\{ (x,y) \Big| -|x| \leq y \leq |x|, (x,y) \in \mathbb{Z}^2 + \left(j + \frac{1}{2(k+2)}, \frac{n}{2k} \right) \right\} \tag{5.3}$$

$2j + n \equiv 1 \mod 2$ のときは指標はゼロになると定義しておく。$\chi_{j,n} = \chi_{j,-n} = \chi_{k/2-j,k-n}$ が成立するが、$(j,n), (j,-n)$ は異なる既約表現であることに注意していただきたい。

primary 場の共形ウェイトは

$$h_{jn} = \begin{cases} \frac{j(j+1)}{k+2} - \frac{n^2}{4k} & (-j \leq \frac{n}{2} \leq j) \\ \frac{j(j+1)}{k+2} - \frac{n^2}{4k} & (j \leq \frac{n}{2} \leq k-j) \end{cases} \tag{5.4}$$

ただし n の基本領域を $n = -2j, -2j+2, \cdots, 2k-2j-2$ にとった。

モデュラー変換の S 行列は

$$S^{PFj'n'}_{jn} = \sqrt{\frac{2}{k}} e^{\frac{i\pi nn'}{k}} S^{j'}_j, \tag{5.5}$$

$$S^{j'}_j = \sqrt{\frac{2}{k+2}} \sin \frac{\pi(2j+1)(2j'+1)}{k+2} \tag{5.6}$$

明らかに対称行列である。$S^{j'}_j$ は $SU(2)_k$ の S 行列である。

fusion 行列は

$$N^{(j''n'')}_{(jn)(j'n')} = N^{j''}_{jj'} \delta_{n+n'-n''} + N^{\frac{k}{2}-j''}_{jj'} \delta_{n+n'-n''-k} \tag{5.7}$$

ここで $N^{j''}_{jj'}$ は $SU(2)_k$ の fusion 行列であって

$$N^{j''}_{jj'} = \begin{cases} 1 & (|j-j'| \leq j'' \leq \min\{j+j', k-j-j'\}, j+j'+j'' \in \mathbb{Z}) \\ 0 & (otherwise) \end{cases} \tag{5.8}$$

クロネッカー・デルタは $0 \mod 2k$ のときに 1 になる。

diagonal な理論を考えることにして分配関数は

$$Z = \sum_{(j,n)\in PF(k)} |\chi_{j,n}|^2 = \frac{1}{2}\sum_j \sum_{n=0}^{2k} |\chi_{j,n}|^2 \tag{5.9}$$

パラフェルミオンの理論は $\mathbb{Z}_k$ 対称性がある。その対称変換 g により primary 場は $\phi_{j,n} \to \omega^n \phi_{j,n}$ と位相が変化する。これより $\mathbb{Z}_k$ オービフォルドが構成できる。$k = ll', l, l' \in \mathbb{Z}$ である整数 l についても $\mathbb{Z}_l$ でもオービフォルドがつくれて、その分配関数は

$$Z_l = \frac{1}{2} \sum_{\substack{j,n,\bar{n}, \\ n-\bar{n} = 0 \mod 2l, \\ n+\bar{n} = 0 \mod 2l'}} \chi_{jn}\bar{\chi}_{j\bar{n}} \tag{5.10}$$

なお、$\chi_{jn} = \chi_{j,-n}$ なので $\mathbb{Z}_l$ と $\mathbb{Z}_{l'}$ のオービフォルドの分配関数は等しいのでこれらは同等である。特に $\mathbb{Z}_k$ オービフォルドとパラフェルミオンは同等である。

これらのパラフェルミオン理論をシグマモデルにより幾何学的に記述できる。具体的には S^3 上の場の理論である $SU(2)_k$ WZW モデルを $U(1)$ 対称性で割ることにより構成できる。S^3 の座標を $\theta, \phi, \tilde{\phi}$ として、$U(1)$ 対称性である $\tilde{\phi}$ の並進対称性で割るためにゲージ場を導入しゲージ場を積分すればよい。

その結果このシグマモデルの計量と string coupling が得られる。

$$(ds)^2 = k\frac{1}{1-\rho^2}(d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2) \tag{5.11}$$

$$g_s(\rho) = e^{\Phi} = g_s(0)(1-\rho^2)^{-\frac{1}{2}} \tag{5.12}$$

$\rho = \sin\theta$ である。したがってターゲット空間は円盤になることがわかる。半径方向の距離は有限ではあるが、計量の形から円盤の縁に沿った距離は無限大になる。ϕ の並進対称性がありそうだが、実際には $\mathbb{Z}_k$ に対称性が壊れている [28]。

CFT のレベルで先程、パラフェルミオンと $\mathbb{Z}_k$ オービフォルドの同等性を確認したが、これはシグマモデルでも確認できる。それは上のモデルに T-dual を施すことによって次の理論が得られることからいえる。

$$(ds')^2 = k\frac{1}{1-\rho'^2}(d\rho'^2 + \rho'^2 d\phi'^2) \tag{5.13}$$

$$g'_s(\rho') = \frac{g_s(0)}{\sqrt{k}}(1-\rho'^2)^{-\frac{1}{2}} \tag{5.14}$$

$$\rho' = (1-\rho^2)^{\frac{1}{2}} \tag{5.15}$$

$$\phi' \sim \phi' + \frac{2\pi}{k} \tag{5.16}$$

よってstring coupling $g_s(0)$のパラフェルミオンと$g_s(0)/\sqrt{k}$の$\mathbb{Z}_k$オービフォルドが同等であることがわかる。

5.2 パラフェルミオン理論のDブレーン

5.2.1 パラフェルミオン理論のAブレーン

Aブレーンを構成するIshibashi stateをA-Ishibashi state $|A,j,n\rangle\rangle, (j,n)\in PF(k)$とする。ただし、$PF$は既約表現の集合で、同一視される表現は同一の表現とみなしている。boundary stateは

$$|A,\hat{j},\hat{n}\rangle\rangle = \sum_{(j,n)\in PF(k)} \frac{S^{PFjn}_{\hat{j}\hat{n}}}{\sqrt{S^{PFjn}_{00}}}|A,j,n\rangle\rangle \tag{5.17}$$

open stringのスペクトルは

$$\begin{aligned}
\langle\langle A,\hat{j},\hat{n}|{q'_c}^{L_0+\bar{L}_0-\frac{c}{12}}|A,\hat{j'},\hat{n'}\rangle\rangle &= \sum_{(j,n),(j',n')\in PF(k)} \frac{(S^{PFjn}_{\hat{j}\hat{n}})^* S^{PFj'n'}_{\hat{j'}\hat{n'}}}{\sqrt{(S^{PFjn}_{00})^* S^{PFj'n'}_{00}}}\langle\langle A,j,n|{q'_c}^{L_0+\bar{L}_0-\frac{c}{12}}|A,j'',n''\rangle\rangle \\
&= \sum_{(j,n),(j',n')\in PF(k)} \frac{S^{PFjn}_{\hat{j}(-\hat{n})} S^{PFjn}_{\hat{j'}\hat{n'}} S^{j''n''}_{jn}}{S^{PFjn}_{00}}\chi_{j''n''}(q_o) \\
&= \sum_{(j,n),(j',n')\in PF(k)} \frac{S^{PFjn}_{\hat{j}(-\hat{n})} S^{PFjn}_{\hat{j'}\hat{n'}} S^{jn}_{j''n''}}{S^{PFjn}_{00}}\chi_{j''n''}(q_o) \\
&= \sum_{(j,n)\in PF(k)} N^{jn}_{\hat{j}(-\hat{n}),\hat{j'}\hat{n'}}\chi_{jn}(q_o)
\end{aligned} \tag{5.18}$$

ただし、指標がnの符号の反転について不変であることと、Verlindeの公式を使った。また、$q_o = e^{-2\pi i/\tau}, q_c = {q'_c}^2 = e^{2\pi i\tau}$とする。Cardyの構成法でboundary stateを構成していくので、これをA-Cardy stateと呼ぶことにする。

これらのDブレーンには次のような解釈ができる。

$j=0$のk個の状態は円盤の縁を等間隔に分割するk個の点上のDブレーンである。$j=\frac{1}{2},\cdots.\frac{1}{2}\left(\frac{k-1}{2}\right)$の状態は全部で$k\frac{k-1}{2}$個あるが、これらは円盤の縁の線分ををを$2\hat{j}$本だけ切り出すような2点を結ぶD1ブレーンと解釈できる。

さらにkが偶数のときには$\hat{j}=k/4$に対応するブレーンは対せき点を結ぶブレーンと解釈できる。ただし、$(j,n)\sim(k/2-j,k+n)$の同一視から、その数は$k/2$である。

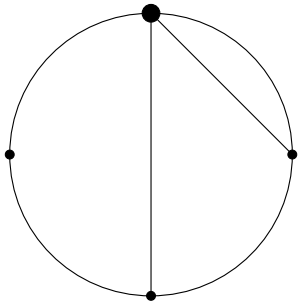

図 5.1: パラフェルミオン理論の A ブレーン $(k=4)$

このような解釈がなされる根拠には次のようなものがある。

実際に closed string の散乱振幅からブレーンの形を計算することによって知ることができる [28]。これについてはこの節の最後で触れることにする。

大域的 $\mathbb{Z}_k$ 対称性がこの理論にある。この対称変換により Ishibasi state に $e^{2\pi n/k}$ だけ位相がかかる。すると $S^{PFjn}_{\hat{j}\hat{n}}e^{2\pi n/k} = S^{PFjn}_{\hat{j}\hat{n}+2}$ なので cardy state は $\hat{n} \to \hat{n}+2$ と変化する。この解釈によれば $2\hat{j}$ 本の線分を切り出す D1 ブレーンは別の $2\hat{j}$ 本の線分を切り出す D1 ブレーンに移る。これは $\mathbb{Z}_k$ 対称性を幾何学的にうまく表現できている。

D ブレーンの質量は D ブレーンと Ishibashi state $|A, j=0, n=0\rangle\rangle$ との内積から求まる。

$$\begin{aligned}|A,\hat{j},\hat{n}\rangle\rangle &= \frac{S^{PF00}_{\hat{j}\hat{n}}}{\sqrt{S^{PF00}_{00}}}|A,0,0\rangle\rangle + \cdots \\ &= \sqrt{\frac{2}{k}}\sqrt{\frac{2}{k+2}}\frac{1}{\sqrt{S^{PF00}_{00}}}\sin\frac{\pi(2\hat{j}+1)}{k+2}|A,0,0\rangle\rangle + \cdots \end{aligned} \tag{5.19}$$

よって質量は

$$M_{\hat{j}} = \frac{1}{g_s(0)\sqrt{k(k+2)}}\sin\frac{\pi(2\hat{j}+1)}{k+2} \tag{5.20}$$

$$\tag{5.21}$$

に比例する。$k, \hat{j}$ が大きいとき D ブレーンの質量は $\sin\frac{2\pi\hat{j}}{k}$ に比例することがわかる。これは平坦な円盤上の D ブレーンの長さに比例している。

$SU(2)$ 上の D ブレーンは conjugacy class に巻き付いていることが知られている。conjugacy class は S^3 の $\mathbb{R}^4$ の中の超平面による切断面である。よってパラフェルミオン理論の A ブレーンは、ゲージ化する $U(1)$ 対称性の下で不変な conjugacy class に巻き付いていると考えられる。そこで S^3 をゲージ化して円盤に射影する際に、この conjugacy class がどのように射影

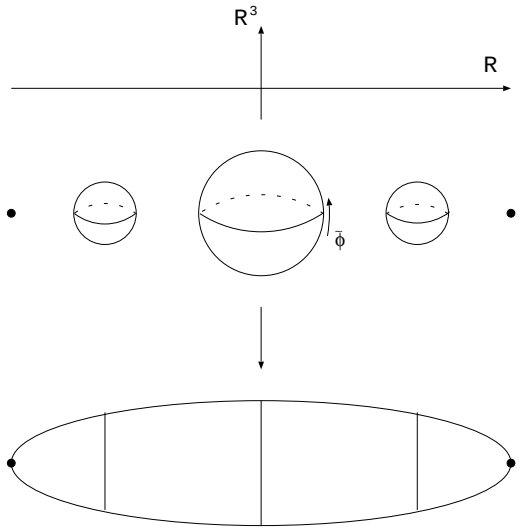

図 5.2: conjugacy class の $U(1)$ ゲージ化

されるかを調べると、円盤の縁を結ぶ直線に写されることがわかる。なぜならば、S^3 の超平面による切口は S^2 になる。そして S^2 は $U(1)$ 対称性のゲージ化により直線に写されるからである。したがって、パラフェルミオンの A ブレーンは円盤の縁上の点を結ぶ直線になることが言える。(図 5.2)

5.2.2 パラフェルミオン理論の B ブレーン

パラフェルミオン理論とその $\mathbb{Z}_k$ オービフォルドは T-dual により関係付けられる。$\mathbb{Z}_k$ オービフォルドの A ブレーンを T-dual 変換すると元のパラフェルミオン理論の B ブレーンに移されることが知られている。

B ブレーンの性質

まず B ブレーンの性質を定性的に論じていく。まず、string coupling が $g_s(0)$ であるパラフェルミオン理論の $\mathbb{Z}$ オービフォルドの A ブレーンに着目する。まず、パラフェルミオンの A ブレーンに $\mathbb{Z}_k$ 変換の下での像を次々と足し上げて、$\mathbb{Z}_k$ 不変なブレーンをつくる。各 $\hat{j} = 0, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{2}\frac{k-1}{2}$ に対して一つずつ質量が M_j である A ブレーンが対応すると考える。ここでターゲット空間は $\mathbb{Z}_k$ で割られた円盤であるから質量を $kM_{\hat{j}}$ としていない。k が偶数のときは $\hat{j} = \frac{k}{2}$ に対応するブレーンも存在するが、質量が $\frac{1}{2}M_{\hat{j}}$ であることを注意したい。なぜ

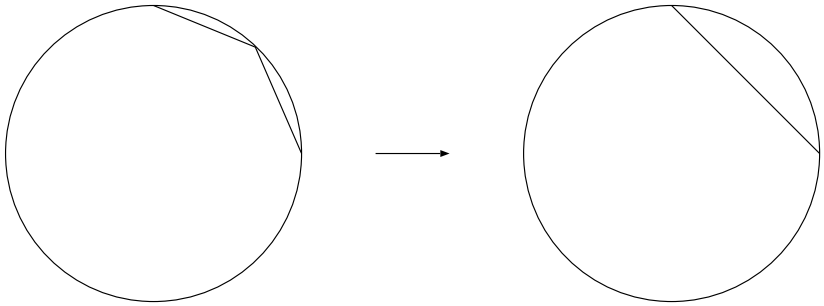

図 5.3: オービフォルドの A ブレーンの崩壊

ならばパラフェルミオンの $\hat{j} = \frac{k}{2}$ A ブレーンは円盤の対せき点を結ぶブレーンであり、したがって $\mathbb{Z}_k$ の像を $\frac{k}{2}$ だけ足し上げれば $\mathbb{Z}_k$ 不変なブレーンができてしまうからである。また、そのために $\hat{j} = \frac{k}{2}$ に対応する $\mathbb{Z}$ オービフォルドの A ブレーンは 2 つ存在することも指摘しておく。

ここで string coupling $g_s(0)$ のシグマモデルと $g_s/\sqrt{k}$ の $\mathbb{Z}_k$ オービフォルドとの間に T-duality が存在した。そしてオービフォルドへは座標変換 $\rho' = (1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}$ で写るから $\mathbb{Z}_k$ オービフォルドのターゲット空間の縁のあたりに存在する A ブレーンはパラフェルオンのターゲット空間の中心付近に写される。前節でみた A ブレーンは円盤の縁にあったので、ここで得られたブレーンはそれらとは異なるものであることがわかる。

ところで、オービフォルド上の $\hat{j} = 0$ A ブレーンは不安定である。実際、パラフェルミオンの隣り合う $\hat{j} = 0$ A ブレーンの間の open string スペクトルは(5.18) で $\hat{n}' = \hat{n} + 2$ とおくことにより $N^{jn}_{0,-\hat{n},0,\hat{n}+2}$ であたえられる。これは $j = 0, n \equiv 0 \mod 2$ または $j = k/2, n \equiv 2 - k \mod 2$ のときにのみ 1 をとり、それ以外はゼロになる。例えば $j = 0, n = 0$ に対する共形ウェイトは 0 であるから、タキオンの存在が確認される。この不安定性により、D0 A ブレーンはオービフォルド中心に向かおうとする。対応する B ブレーンは不安定で円盤の中心から離れていこうとする。 これはオービフォルドで考えると、中心で string coupling が最小になるので中心に向かった方が open string の質量が軽くなり系のエネルギーを小さくすることが可能であるからである。オービフォルドの A ブレーンの不安定性は直観的に理解しやすいので、B ブレーンの不安定性もこちらにうつって考えるのがよい。

$\hat{j} = \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{2}\frac{k-1}{2}$ となる被覆空間の D1 A ブレーンはループ状の形をしている。これらはより中心に近付くためにより小さなループに崩壊する。k が偶数のときには被覆空間には $\hat{j} = k/4$ の 2 つの D1 ブレーンが存在する。これらは円盤の縁の対せき点を結ぶ形状をしているので、より縮まろうとして崩壊することはない。したがってこのブレーンは安定である。

B ブレーンは string coupling が $g_s(0)/\sqrt{k}$ である $\mathbb{Z}_k$ オービフォルドの A ブレーンと T-dual であるから、パラフェルミオンの同じ $\hat{j}$ をもつ A ブレーンとは質量が $\sqrt{k}$ 倍だけ異なる。

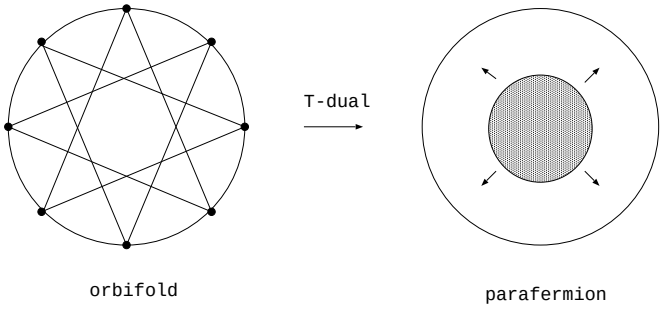

図 5.4: パラフェルミオン理論の B ブレーンとオービフォルドの A ブレーン

(ただし $\hat{j} = k/4, k$ は偶数、のときは $\sqrt{k}/2$ 倍違う。) よって $\hat{j} = 0$ の D0 ブレーンは質量が $\sqrt{k}M_{\hat{j}=0}$ である。さらに $\hat{j} = \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{2}\frac{k-1}{2}$ に対応して D2 ブレーンが中心付近に存在し、その質量は $\sqrt{k}M_{\hat{j}}$ である。なぜ 2 次元であるかというと、k が大きいとき、対応する被覆空間上の A ブレーンはターゲット空間の縁の付近を被っているから、B ブレーンは中心付近を被うブレーンであることがいえる。以上のブレーンは先程の考察により中心からのずれに対して不安定でありターゲット空間の中心から広がろうとする。ただし k が偶数のときには $\hat{j} = k/4$ D2 ブレーン存在し、これは安定である。質量は $\frac{1}{2}\sqrt{k}M_{\hat{j}=\frac{k}{4}}$ であり、ターゲット空間全体を被う。

B ブレーンの BCFT による定式

ここでは B ブレーンを Ishibashi state を用いて構成していく。方針としてはパラフェルミオン理論の A ブレーンに $\mathbb{Z}_k$ 対称変換を作用させていき得られた像を足し上げることにより、オービフォルド上の A ブレーンを構成する。続いて T-dual 変換を施すことにより、目的とするパラフェルミオン理論の B ブレーンを構成する。

まずパラフェルミオン理論からオービフォルドへ A ブレーンを射影する過程で $n = 0$ 以外

の Ishibashi state は全て消えて無くなってしまう。実際、

$$
\begin{aligned}
|A,\hat{j}\rangle\rangle &= \frac{1}{k}\sum_{g\in\mathbb{Z}_k} g|A,\hat{j},\hat{n}\rangle\rangle \\
&= \frac{1}{k}\left\{|A,\hat{j},\hat{n}\rangle\rangle + |A,\hat{j},\hat{n}+2\rangle\rangle + \cdots\right\} \\
&= \frac{1}{k}\sum_{(j,n)\in PF(k)} \frac{S^{PFjn}_{\hat{j}\hat{n}}}{\sqrt{S^{PFjn}_{00}}}\left(1+e^{2\pi i\frac{n}{k}}+e^{2\pi i\frac{2n}{k}}+\cdots\right)|A,j,n\rangle\rangle \\
&= \sum_{(j,0)\in PF(k)} \frac{S^{PFj0}_{\hat{j}\hat{n}}}{\sqrt{S^{PFj0}_{00}}}|A,j,0\rangle\rangle
\end{aligned}
\tag{5.22}
$$

ただし 3 行目の無限級数は $n=0,k$ であることを要求するが、表現の同一視 $(j,n)\sim(k/2-j,k+n)$ を考慮して $n=k$ となる表現を全て $n=0$ に写してしまえば $n=0$ のみを考えればよいことがわかる。また選択条件 $2j+n\equiv 0 \mod 2$ から $j=\mathbb{Z}+\frac{1}{2}$ の Ishibashi state の寄与は無いことを指摘しておく。

次にこの boundary state に対して T-dual を施したい。そのためにはラフに言って、A Ishibashi state の rightmover の運動量の符号を反転させたような B Ishibashi state を定義したい。理論の chiral な Hilbert 空間は

$$
\mathcal{H}^{SU(2)}_j = \oplus_{r=0}^{2k-1}\mathcal{H}^{PF}_{(j,r)}\otimes\mathcal{H}^{U(1)}_r \tag{5.23}
$$

に対して $e^{i\pi J^1_0}, e^{i\pi J^1_0}J^3_0 e^{-i\pi J^1_0} = -J^3_0$ は対角的に作用することを利用する。$e^{i\pi J^1_0}:\mathcal{H}^{U(1)}_r\mapsto\mathcal{H}^{U(1)}_{-r}$ であるのでパラフェルミオンの Hilbert 空間には

$$
e^{i\pi J^1_0}:\mathcal{H}^{PF}_{(j,r)}\mapsto\mathcal{H}^{PF}_{(j,-r)} \tag{5.24}
$$

と定義できる。

これを利用して B Ishibashi state を次のように定義する。

$$
(1\otimes e^{i\pi\tilde{J}^1_0})|j\rangle\rangle^{SU(2)} = \sum_{r=0}^{2k-1}|Bj,r,-r\rangle\rangle^{PF}\otimes|B,r,-r\rangle\rangle^{U(1)} \tag{5.25}
$$

このような定義は A,B ブレーンの振幅の計算に使ったりするが、少々技術的になるので詳細は割愛する。

形式的には A Ishibashi state から B Ishibashi state への変換は right mover の r にマイナ

ス符号をつけるだけでよい。よってBブレーンが得られて

$$|B,\hat{j}\rangle\rangle = \sqrt{k}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\frac{S^{PF\,j0}_{\hat{j}0}}{S^{PF\,j0}_{00}}|B,j,0\rangle\rangle$$
$$= (2k)^{\frac{1}{4}}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\frac{S^{j}_{\hat{j}}}{S^{j}_{0}}|B,j,0\rangle\rangle \tag{5.26}$$

kが偶数のときに現れる$|B,\hat{j}=\frac{k}{4}\rangle\rangle$は自分自身との間に生じるopen stringスペクトルを調べると真空表現の指標の係数が2になるので、これは可約なboundary stateであることがわかる。これは後で調べてみることにする。そこでより基本的な既約な2つのboundary stateに分解できる。実際に、B Ishibashi state $|B,\frac{k}{4},\frac{k}{2},-\frac{k}{2}\rangle\rangle$を使ってそのようなboundary stateを構成することができる。

$$|B,\frac{k}{4},\eta\rangle\rangle = \frac{1}{2}(2k)^{\frac{1}{4}}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\frac{S^{j}_{\hat{j}}}{S^{j}_{0}}|B,j,0\rangle\rangle + \eta\frac{\sqrt{k(k+2)}}{2}|B\frac{k}{4},\frac{k}{2},-\frac{k}{2}\rangle\rangle \tag{5.27}$$

最後の項の係数は適切なopen stringスペクトルが得られるように決められたものである。このことも実際に後で確かめる。

$\mathbb{Z}_k$変換はIshibashi stateに$e^{\frac{2\pi in}{k}}$だけ位相をずらすのでAブレーンが

$$|A,\hat{j},\hat{n}\rangle\rangle \to |A,\hat{j},\hat{n}+2\rangle\rangle$$

と、互いに移りかわる。Bブレーンは$\hat{j}<\frac{k}{4}$の場合にはこの変換の下で不変である。$\hat{j}=\frac{k}{4}$の既約なBブレーンは

$$|B\frac{k}{4},\frac{k}{2},-\frac{k}{2}\rangle\rangle \to -|B\frac{k}{4},\frac{k}{2},-\frac{k}{2}\rangle\rangle$$

と符号が変わるので互いに入れ替わる。

$$|B,\frac{k}{4},\eta\rangle\rangle \leftrightarrow |B,\frac{k}{4},-\eta\rangle\rangle \tag{5.28}$$

Bブレーンの間のopen stringスペクトル

ここでは先程構成したBブレーンがCardy conditionを満たしていることを確認する。幾何学的考察によりBブレーンの構成の指針が与えられたのだから、必ずしもこれらのboundary stateがCardy conditionを満たすとは言い切れない。しかしオービフォルド上の由緒正しいboundary stateからの結果であるから、その条件が満たされていることが期待はされる。

まず、(5.26) で与えられる B ブレーンの分配関数は次のように計算される。A ブレーンのときのように Ishibashi state 同士の分配関数は計算できて

$$\begin{aligned}
\langle\langle B\hat{j}|{q_c}^{L_0-\frac{c}{24}}|B\hat{j}'\rangle\rangle &= (2k)^{\frac{1}{2}}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\frac{(S^j_{\hat{j}})^*S^j_{\hat{j}'}}{S^j_0}\chi_{j0}(q_c)\\
&= (2k)^{\frac{1}{2}}\sum_{(j'',n'')\in PF(k)}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\frac{(S^j_{\hat{j}})^*S^j_{\hat{j}'}S^{PF\,j''n''}_{j0}}{S^j_0}\chi_{j''n''}(q_o)\\
&= 2\sum_{(j'',n'')\in PF(k)}\sum_{all\,j}\frac{(S^j_{\hat{j}})^*S^j_{\hat{j}'}S^{j''}_j}{S^j_0}\frac{1+(-1)^{2j}}{2}\chi_{j''n''}(q_o)\\
&= 2\sum_{(j'',n'')\in PF(k)}\sum_{all\,j}\frac{1}{2}(N^{j''}_{\hat{j}\hat{j}'}+N^{\frac{k}{2}-j''}_{\hat{j}\hat{j}'})\chi_{j''n''}(q_o)\\
&= \sum_{j''=0}^{k/2}\sum_{n''=0}^{2k-1}N^{j''}_{\hat{j}\hat{j}'}\chi_{j''n''}(q_o)
\end{aligned}\tag{5.29}$$

ここで Verlinde の公式と、$S^{j'}_j$ の具体形から $(-1)^{2j}S^{j'}_j = S^{\frac{k}{2}-j'}_j$ が成立するという事実を使った。もちろん $j\in\mathbb{Z}$ や $all\,j$ といっても $0\le j\le k/2$ の範囲に限られている。また最後の等号では和のとり方を変えていて、表現の同一視をやめて足し上げている。

この結果から、$\hat{j}=k/4, k\equiv 0 \mod 2$ の場合には boundary state が可約になっていることが確かめられる。実際に上の式の最後から 2 番目の fusion 係数の項は

$$N^{j''}_{\frac{k}{4}\frac{k}{4}}+N^{\frac{k}{2}-j''}_{\frac{k}{4}\frac{k}{4}} = \begin{cases}2 & (j''=0,\frac{k}{4})\\ 0 & (otherwise)\end{cases}\tag{5.30}$$

と具体的に書き表せるので真空表現の指標 χ_{00} の係数は 2 になるので、この B ブレーンは可約であることが明らかである。

次に A ブレーンと (5.26) の B ブレーンとの間の分配関数を見る。計算の過程に関しては coset モデルの知識など要するためここでは立ち入らないことにして結果のみを紹介する。

$$\langle\langle B,\hat{j}'|{q_c}^{L_0-\frac{c}{24}}|A,\hat{j}\,\hat{n}\rangle\rangle = \sum_{j''}N^{j''}_{\hat{j}'\hat{j}}\tilde{\chi}_{j''}(q_o)\tag{5.31}$$

ただし

$$\tilde{\chi}_j(q_o) = {q_o}^{k/16}\chi^{SU(2)}_j(\tau_o,\tau_o/2){q_o}^{\frac{1}{24}}{q_o}^{-\frac{1}{16}}\prod_{n=1}^{\infty}(1-{q_o}^{n-\frac{1}{2}})\tag{5.32}$$

$\chi_j^{SU(2)}$ は $SU(2)$ レベル k の指標である。

$$\chi_j^{SU(2)}(\tau,z) \equiv q^{-c/24} tr_j[q^{L_0} e^{i2\pi z J_0^3}] \tag{5.33}$$

次に $k \equiv 0 \mod 2$ の場合の既約な $\hat{j} = k/4$ B ブレーンの分配関数を調べる。$|B, \frac{k}{4}, \frac{k}{2}, -\frac{k}{2}\rangle\rangle$ は他の $|B, j, 0\rangle\rangle$ とは直交するので $|B, \frac{k}{4}, \frac{k}{2}, -\frac{k}{2}\rangle\rangle$ を含む項同士の内積を調べればよいことがわかる。その結果は

$$\frac{\eta\eta'\sqrt{k(k+2)}}{4} \chi_{\frac{k}{4}\frac{k}{2}}(q_c) = \frac{\eta\eta'}{4} \sum_{j,n\, j\in\mathbb{Z}} (-1)^{j+\frac{n}{2}} \chi_{jn}(q_o) \tag{5.34}$$

である。最後の和について、同一視される表現を重複して足し上げることとする。また(5.29)の結果を利用できるのだが、それにあたり、

$$N_{\frac{k}{4}\frac{k}{4}}^{j''} = \begin{cases} 1 & (0 \le j'' \le \frac{k}{2}, j'' + \frac{k}{2} \in \mathbb{Z}) \\ 0 & (otherwise) \end{cases} \tag{5.35}$$

なので j について整数についてのみ和をとることになる。この 2 つの結果を合わせて

$$\langle\langle B, \frac{k}{4}\eta | {q_c}^{L_0 - \frac{c}{24}} | B, \frac{k}{4}\eta' \rangle\rangle = \frac{1}{4} \sum_{j,n,j\in\mathbb{Z}} \chi_{jn}(1 + \eta\eta'(-1)^{j-\frac{n}{2}}) = \sum_{\substack{(j,n) \in PF(k) \quad j \in \mathbb{Z} \\ j - \frac{n}{2} \in 2\mathbb{Z} + \frac{1-\eta\eta'}{2}}} \chi_{jn}(q_o) \tag{5.36}$$

となる。最後の等号では同一視の下で区別される表現について和をとる。また $\hat{j} \neq \frac{k}{4}$ である B ブレーンとの分配関数も(5.29)を利用して結果が得られる。$|B, \frac{k}{4}\eta\rangle\rangle$ の規格化に気をつけて

$$\langle\langle B, \hat{j} | {q_c}^{L_0 - \frac{c}{24}} | B, \frac{k}{4}\eta \rangle\rangle = \frac{1}{2} \sum_{jn} N_{\hat{j}\frac{k}{4}}^{j} \chi_{jn}(q_o) \tag{5.37}$$

ここでは表現を同一視しないで和ととっている。したがって $PF(k)$ の各表現は 2 回足されるので、$\frac{1}{2}$ の因子が存在しても全ての指標の係数は整数値をとる。A ブレーンとの $\hat{j} = \frac{k}{4}$ B ブレーンとの分配関数も計算が技術的に過ぎるところがあるのでここでは割愛する。

以上の結果から B ブレーンは Cardy condition を満たしていることが確認される。

参考：(5.34) の導出

$$
\begin{aligned}
&\frac{\eta\eta'\sqrt{k(k+2)}}{4}\chi_{\frac{k}{4}\frac{k}{2}}(q_c) = \frac{\eta\eta'\sqrt{k(k+2)}}{4}\sum_{(j,n)\in PF} S^{jn}_{\frac{k}{4}\frac{k}{2}}\chi_{jn}(q_o)\\
&= \frac{\eta\eta'\sqrt{k(k+2)}}{4}\sum_{(j,n)\in PF}\sqrt{\frac{2}{k}}\sqrt{\frac{2}{k+2}}e^{ipi\frac{n}{k}\frac{k}{2}}\sin\frac{\pi(2j+1)(2\frac{k}{4}+1)}{k+2}\chi_{jn}(q_o)\\
&= \frac{\eta\eta'\sqrt{k(k+2)}}{4}\sum_{(j,n)\in PF}\frac{2}{\sqrt{k(k+2)}}e^{i\pi\frac{n}{2}}\sin\frac{\pi(2j+1)}{2}\chi_{jn}(q_o)\\
&= \frac{\eta\eta'\sqrt{k(k+2)}}{4}\sum_{(j,n)\in PF}\frac{2}{\sqrt{k(k+2)}}(-1)^{\frac{n}{2}}\frac{(-1)^{j+\frac{1}{2}}-(-1)^{-j-\frac{1}{2}}}{2i}\chi_{jn}(q_o)\\
&= \frac{\eta\eta'\sqrt{k(k+2)}}{4}\sum_{(j,n)\in PF}\frac{2}{\sqrt{k(k+2)}}(-1)^{\frac{n}{2}}\frac{(-1)^{j}+(-1)^{-j}}{2}\chi_{jn}(q_o)\\
&= \frac{\eta\eta'\sqrt{k(k+2)}}{4}\sum_{(j,n)\in PF}\frac{2}{\sqrt{k(k+2)}}(-1)^{j+\frac{n}{2}}\frac{1+(-1)^{-2j}}{2}\chi_{jn}(q_o)\\
&= \frac{\eta\eta'\sqrt{k(k+2)}}{4}\sum_{(j,n)\in PF\quad j\in\mathbb{Z}}\frac{2}{\sqrt{k(k+2)}}(-1)^{j+\frac{n}{2}}\chi_{jn}(q_o)\\
&= \frac{\eta\eta'\sqrt{k(k+2)}}{4}\frac{1}{2}\sum_{j,n\quad j\in\mathbb{Z}}\frac{2}{\sqrt{k(k+2)}}(-1)^{j+\frac{n}{2}}\chi_{jn}(q_o)\\
&= \frac{\eta\eta'}{4}\sum_{j,n\quad j\in\mathbb{Z}}(-1)^{j+\frac{n}{2}}\chi_{jn}(q_o) \qquad (5.38)
\end{aligned}
$$

5.2.3 ブレーンの形状

ここではパラフェルミオンの A ブレーンの形を調べる。ただし k が無限大の極限で考えることとし、古典的な幾何学として扱う。そのためにブレーンから散乱される closed string の散乱振幅を考えていく。具体的には $\langle\langle boundary\quad state|closed\quad string\rangle$ を計算する。このことは別の言い方をすれば重力子の散乱を見ることでブレーンの幾何を調べようというものである。BCFT の境界条件の下での bulk の場の 2 点関数に対応すると言える [29]。

ここでは n のかわりに $m = n/2, m = 0, 1/2, \cdots$ を使っていく。

まず、$\vec{\theta}$ を $SU(2)$ の座標として、$SU(2) \sim S^3$ の一点に局在した closed string の状態を $|\vec{\theta}\rangle$ とし、$SU(2)$ 上のデルタ関数を $\delta(\vec{\theta}-\vec{\theta'})$ とする。

$SU(2)$ 上の Laplacian の固有関数は

$$D^j_{mm'} = \langle jm|g(\vec{\theta})|jm'\rangle, \quad \langle jm|jm'\rangle = \delta_{mm'} \tag{5.39}$$

ここで $|jm\rangle$ は $SU(2)$ のスピン j 表現の基底である。昇降演算子の作用に対して $D^j_{mm'}$ と $|j,m,m'\rangle$ は同じように振る舞う。また、$|j,m,m'\rangle$ を 1 に規格化したいので $\sum_{mm'}|\langle jm|g(\vec{\theta})|jm'\rangle|^2 = 2j+1$ であることを考慮すれば

$$D^j_{mm'} \sim \frac{1}{\sqrt{2j+1}}\langle\vec{\theta}|j,m,m'\rangle \tag{5.40}$$

となる。ただし、よく局在した closed string を見たいのでカットオフ e^{-j^2/ϵ^2} を入れて、$k\to\infty$ のとき $\epsilon\to 0$ ととることにする。

いまパラフェルミオンのブレーンを調べたいので $SU(2)$ の波動関数のうち $\tilde{\phi}$ の並進に対して不変なものが必要になる。

$$\Psi_{j,m} = e^{i\alpha_{j,m}}\langle j,m|g|j,-m\rangle = e^{i2m\phi}\langle j,m|e^{i(2\theta-\pi)J^1}|j,m\rangle = \frac{1}{2j+1}\langle\theta,\phi|j,m,m\rangle_{PF} \tag{5.41}$$

ただし $e^{i\alpha_{j,m}}$ は位相因子である。

これを用いると

$$\begin{aligned}\langle\langle A,\hat{j},\hat{m}|\theta,\phi\rangle &\sim \sum_j\sum_{m=-j}^{j} S^j_{\hat{j}} e^{\frac{i4\pi\hat{m}m}{k}}(\Psi_{jm}(\theta,\phi))^* \\ &\sim \sum_j\sum_{m=-j}^{j}\sqrt{\frac{2}{k+2}}\sin(\hat{\psi}(2j+1))e^{-i2m\phi+i4\pi\hat{m}m/k}\langle j,m|e^{i(2\theta-\pi)J^1}|j,m\rangle^* \\ &= \sum_j\sum_{m=-j}^{j}\sqrt{\frac{2}{k+2}}\sin(\hat{\psi}(2j+1))(\Psi_{jm}(\theta,\phi-\frac{2\pi\hat{m}}{k}))^*\end{aligned} \tag{5.42}$$

$\mathbb{Z}_k$ 対称性から $\hat{m}=0$ のときのみ調べれば、$\hat{m}\neq 0$ の場合の結果も得られる。ここで

$$\sum_{m=-j}^{j}\langle j,m|e^{i2\theta J^1}|j,-m\rangle e^{i2m\phi} = \mathrm{Tr}_j[e^{i2mJ^3}e^{i(2\theta-\pi)J^1}] = \frac{\sin(2j+1)\psi}{\sin\psi} \tag{5.43}$$

と書けることを利用する。$j=1/2$ の場合から

$$\cos\psi = \cos\phi\sin\theta \tag{5.44}$$

が得られる。

そうすると、

$$\langle\langle A, \hat{j}, \hat{m} = 0|\theta, \phi\rangle \sim \sum_j \sin\hat{\psi}(2j+1)\frac{\sin(2j+1)\psi}{\sin\psi} \tag{5.45}$$

ここで j について足し上げれば

$$\langle\langle A, \hat{j}, \hat{m} = 0|\theta, \phi\rangle \sim \frac{\delta(\hat{\psi} - \phi(\theta, \phi))}{\sin\phi} \tag{5.46}$$

ところで円盤上の中心からの距離は $\rho = \sin\theta$ であるので $\rho\cos\theta =$ 定数 となる。これは直線を極座標表示したものなので、A ブレーンは円盤の直線上にあることが言える。

5.3 スーパーパラフェルミオン理論の D ブレーン

5.3.1 ブレーンの性質について

スーパーパラフェルミオン　この節では超対称性を導入したパラフェルミオンを扱う。$\mathcal{N} = 1$ の超対称性を入れたパラフェルミオンは、実は $\mathcal{N} = 2$ の超対称性を持つ。

円盤の接空間にフェルミオンを入れる。そしてそれをボゾン化してコンパクト化する。すると対象とするモデルには

$$\frac{SU(2)_k \times U(1)_2}{U(1)_{k+2}} \tag{5.47}$$

を考えればよい。表現は (j, n, s) で表される。j, n, s はそれぞれ $SU(2)_k$ のスピン、$U(1)_{k+2}$ のラベルで $\mod 2(k+2)$ で定義された整数、$U(1)_2$ のラベルで $\mod 4$ で定義されている整数である。これらは選択則 $2j + n + s \equiv 0 \mod 2$ に従う。また表現の同一視 $(j, n, s) \sim (k/2-j, n+k+2, s+2)$ がなされる。さらに定義から $(j, n, s) \sim (j, n, s+4), \sim (j, n+2k+4, s)$ でもある。そして区別される表現の集合を $SPF(k)$ と表す。s が偶数のものは NSNS セクター、s が奇数のものは RR セクターである。もっぱら diagonal な理論を考えることにするので NS-R セクターはここでは考えないことにする。

理論には離散的対称性があって、生成子を g_1, g_2 とすると

$$g_1\Phi_{j,n,s} = e^{2\pi i\left(\frac{n}{2k+4} - \frac{s}{4}\right)}\Phi_{j,n,s} \tag{5.48}$$

$$g_2\Phi_{j,n,s} = (-1)^s\Phi_{j,n,s} \tag{5.49}$$

と作用する。ここでは $g_1^2 g_2, g_2$ で生成される部分群 $H = \mathbb{Z}_{k+2} \times \mathbb{Z}_2$ によるオービフォルドを見ていく。

表現の数は、j,n の取り方と、選択則の下での s の選び方、同一視から $2(k+2)(k+1)$ だけあることがわかる。したがって、Ishibashi state も $2(k+2)(k+1)$ だけありそれらを $(\hat{j},\hat{n},\hat{s})$ でラベルする。これらの状態は A タイプの境界条件を満たす。Cardy state は $\hat{s}=0,2$ の場合には境界条件

$$G^{\pm}-i\bar{G}^{\mp}=0, \qquad J-\bar{J}=0 \tag{5.50}$$

を満たす。これらを even A-boundary state と呼ぶ。またこれらの状態は NS-NS,R-R の両方の Ishibashi state を含む。$\hat{s}=\pm 1$ の Cardy state は

$$G^{\pm}+i\bar{G}^{\mp}=0, \qquad J-\bar{J}=0 \tag{5.51}$$

を境界条件として満たす。これらを odd A-boundary state と呼ぶ。

これらの boundary state の解釈は次のようになされる。even boundary state、odd boundary state はターゲット空間の縁上の点を結ぶ向き付けされた D1 ブレーンと解される。それぞれ $(k+2)(k+1)$ 個ずつ存在する。各ブレーンの始点と終点は

$$\phi_i=(\hat{n}-2\hat{j}-1)\frac{\pi}{k+2}, \qquad \phi_f=(\hat{n}+2\hat{j}+1)\frac{\pi}{k+2} \tag{5.52}$$

で与えられ、$\hat{s}=0,-1$ の場合には $\phi_i\to\phi_f$、$\hat{s}=+1,2$ の場合には $\phi_f\to\phi_i$ の方向に結ばれる。この解釈は表現の同一視と両立する。すなわち、$(\hat{j},\hat{n},\hat{s})$ に対して $(\frac{k}{2}-\hat{j},\hat{n}+k+2,\hat{s}+2)$ は

$$\phi_i=(\hat{n}+k+2-k+2\hat{j}-1)\frac{\pi}{k+2}=(\hat{n}+2\hat{j}+1)\frac{\pi}{k+2} \tag{5.53}$$

$$\phi_f=(\hat{n}+k+2+k-2\hat{j}+1)\frac{\pi}{k+2}=(\hat{n}-2\hat{j}-1)\frac{\pi}{k+2}+2\pi \tag{5.54}$$

そして、$\hat{s}$ が 2 だけ変化するので始点と終点を結ぶ向きが反転するので、やはり同じ D1 ブレーンを表している。選択則から even boundary state の場合には $\frac{\pi}{k+2}$ の前の係数が奇数、odd boundary state の場合には偶数になる。なお後で述べるが、$(\hat{j},\hat{n},\hat{s}+2)$ に対応する A ブレーンは $(\hat{j},\hat{n},\hat{s})$ に対応する A ブレーンの anti ブレーンと考えられる。

各状態の質量は $M_{\hat{j}}\sim\sin\frac{\pi(2\hat{j}+1)}{k+2}$ となる。ボゾニックなケースと異なり、正確に D1 ブレーンの長さに比例している。

オービフォルド　次にここまでに述べたスーパーパラフェルミオン理論の $\mathbb{Z}_2$ オービフォルドを考えたい。この対称変換は g_2 により生成される。したがって元の理論の分配関数を $Z_{diag}=\frac{1}{2}\sum_{j,n,s}|\chi_{j,n,s}|^2$ とすると、$\mathbb{Z}_2$ オービフォルドの分配関数は

$$Z'=\frac{1}{2}\sum_{j,n,s}\chi_{j,n,s}\bar{\chi}_{j,n,-s}=Z_{diag}-(k+1) \tag{5.55}$$

と表される。最後の定数項は Ramond sector $(j, 2j+1, \pm 1), L_0 = c/24$ からの寄与である。実際、$\chi_{j,2j+1,1} = \chi_{j,2j+1,-1} + 1$ であるので、

$$\sum_j (\chi_{j,2j+1,1}\bar{\chi}_{j,2j+1,-1} + \chi_{j,2j+1,-1}\bar{\chi}_{j,2j+1,1}) = \sum_j (\chi_{j,2j+1,1}\bar{\chi}_{j,2j+1,1} + \chi_{j,2j+1,-1}\bar{\chi}_{j,2j+1,-1} - 1) \tag{5.56}$$

から確かめられる。$\hat{s} \sim \hat{s} + 4$ より NS-NS セクター (s は偶数) はツイストされていない。同様にして R-R セクター (s は奇数) は s について正則部分と反正則部分の表現が異なっていて、ツイストされていることがわかる。分配関数が異なることから元の理論と $\mathbb{Z}_2$ オービフォルドは異なった理論であることがいえる。さらにこのことは $\mathbb{Z}_2$ オービフォルドの D1 A ブレーンが向き付けされないことからもわかる。これが向き付けされないことは、分配関数から $J_0 - \bar{J}_0 = 0$ を満たす R-R プライマリー場が存在しないこと、それにより $\hat{s} = 0$ の boundary state と $\hat{s} = 2$ の boundary state とが区別つかなくなることからいえる。

さらに $\mathbb{Z}_{k+2}$ によりオービフォルドをつくる。これで出発した理論を正味、$H = \mathbb{Z}_{k+2} \times \mathbb{Z}_2$ 対称性で割ったことになる。この結果、得られる分配関数は

$$Z'' = \frac{1}{2}\sum_{j,n,s} \chi_{j,n,s}\bar{\chi}_{j,-n,-s} = Z, \tag{5.57}$$

$$\because \quad \chi_{j,n,s} = \chi_{j,-n,-s}$$

よってこのオービフォルドは元のスーパーパラフェルミオン理論と T-dual である。ボゾニックな理論のときと同様にして、このオービフォルドの D1 A ブレーンを調べていく。各 $\hat{j} = 0, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{2}\frac{k-1}{2}$ に対して 1 つの D1 ブレーンがあり、その質量は $M_{\hat{j}}$ である。k が偶数のときはオービフォルドの中心を通る $\hat{j} = \frac{k}{4}$ に対応する D1 ブレーンが 2 つ存在して、その質量は $\frac{1}{2}M_{\hat{j}=k/4}$ である。これらの D1 A ブレーンに対応するスーパーパラフェルミオン理論の B ブレーンには次のものが存在する。オービフォルドの string coupling は $g_s(0)/\sqrt{2(k+2)}$ であることに気を付けると $\hat{j} = 0, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{2}\frac{k-1}{2}$ でラベルされる質量が $\sqrt{2(k+2)}M_j$ の D2 ブレーン、k が偶数のときに $\hat{j} = k/4$ でラベルされる質量 $\frac{1}{2}\sqrt{2(k+2)}M_{\hat{j}=k/4}$ の D2 ブレーンが存在する。これらはいずれもターゲット空間の中心に存在する。$\hat{j} = 0$ のブレーンはサイズが小さいため D0 ブレーンともいえる。

ほとんどの B ブレーンは向き付けされない。なぜならば R-R Ishibashi state が存在しないため anti B ブレーンが存在しないからである。しかし、$\hat{j} = k/4$ B ブレーンは $\mathbb{Z}_2$ により互いに移り変わり合うので向き付けされると考えられる。

5.3.2 BCFT による記述

基本的なデータとしてモデュラー変換の S 行列と fusion 係数を紹介しておく。

$$S_{jns}^{SPF\ j'n's'} = 2S_j^{j'}S_n^{n'}S_s^{s'} = \frac{1}{\sqrt{2(k+2)}}S_j^{j'}e^{\frac{i\pi nn'}{k+2}}e^{-\frac{i\pi ss'}{2}} \tag{5.58}$$

$$N_{\hat{j},-\hat{n},-\hat{s};\hat{j}',\hat{n}',\hat{s}'}^{jns} = N_{\hat{j},\hat{j}'}^{j}\delta_{n-\hat{n}+\hat{n}'}\delta_{s-\hat{s}+\hat{s}'} + N_{\frac{k}{2}-\hat{j},\hat{j}'}^{j}\delta_{n+k+2-\hat{n}+\hat{n}'}\delta_{s+2-\hat{s}+\hat{s}'} \tag{5.59}$$

S 行列の 2 番目の係数の 2 は表現の同一視により生じる。また δ_n, δ_s はそれぞれ周期が $2(k+2), 4$ である。

表現の共形ウェイトは

$$h_{(j,n,s)} = \begin{cases} \frac{j(j+1)}{k+2} - \frac{n^2}{4(k+2)} + \frac{s^2}{8} & (-2j \le (n-s) \le 2j) \\ \frac{j(j+1)}{k+2} - \frac{n^2}{4(k+2)} + \frac{s^2}{8} + \frac{n-s-2j}{2} & (2j \le (n-s) \le 2k-2j) \end{cases} \tag{5.60}$$

A ブレーン

A ブレーンは明示的に次のように書ける。

$$|A,\hat{j}\hat{n}\hat{s}\rangle\rangle = \sum_{(j,n,s)\in SPF} \frac{S_{\hat{j}\hat{n}\hat{s}}^{SPF\ jns}}{\sqrt{S_{000}^{SPF\ jns}}}|A,jns\rangle\rangle \tag{5.61}$$

これは境界条件を $J - \bar{J} = 0$ と $\hat{s}$ の偶奇に応じて

$$\begin{cases} G^{\pm} - i\bar{G}^{\mp} = 0, & \hat{s} \equiv 0 \mod 2 \\ G^{\pm} + i\bar{G}^{\mp} = 0, & \hat{s} \equiv 1 \mod 2 \end{cases} \tag{5.62}$$

を満たす。ボソニックなケースと同様にして $M_{\hat{j}} \sim \sin\frac{\pi(2\hat{j}+1)}{k+2}$ が得られる。

open string の分配関数はボゾニックなときと同様にして

$$\begin{aligned} \langle\langle A,\hat{j}\hat{n}\hat{s}|q_c^{L_0-\frac{c}{24}}|A,\hat{j}'\hat{n}'\hat{s}'\rangle\rangle &= \sum_{(j,n,s)\in SPF(k)} N_{\hat{j},-\hat{n},-\hat{s};\hat{j}',\hat{n}',\hat{s}'}^{jns}\chi_{jns}(q_o) \\ &= \sum_j N_{\hat{j}\hat{j}'}^{j}\chi_{j,\hat{n}-\hat{n}',\hat{s}-\hat{s}'}(q_o) \end{aligned} \tag{5.63}$$

ここで注意すべき点がある。$\langle\langle A,\hat{j}\hat{n}\hat{s}|$ は $|A,\hat{j}\hat{n}\hat{s}\rangle\rangle$ とは反対方向を向いたブレーンである。したがって分配関数の計算の際に bra にとるブレーンの $\hat{s}$ を 2 だけずらして計算しなければならない。したがって自分自身との分配関数に現れる指標は $\chi_{j,0,2}$ の形のものに限られる。(5.60)

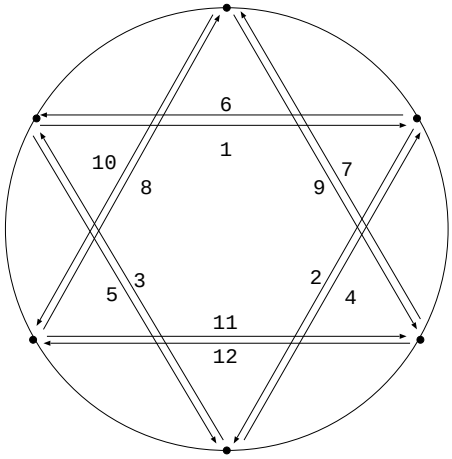

図 5.5: スーパーパラフェルミオン理論の A ブレーン

を参考にすると、この open string スペクトルに対する共形ウェイトは明らかに $\frac{1}{2}$ 以上になる。したがって A ブレーン上にタキオンは無いといえる。したがって A ブレーンは安定であるといえよう。一方、$\hat{s} = \hat{s}'$ とおくと、これはブレーンと anti ブレーンの間の分配関数と期待される。(5.60) よりタキオンがいくつも生じることがわかるからである。

さらに他のブレーンの分配関数を見ていきたい。open string スペクトルにおけるタキオンの存在とブレーンの幾何学的な交差には関係がある。共に even であるブレーン、共に odd であるブレーンが交わるか、非常に接近しているときにはタキオンが生じる。一方、交わらず、弦のサイズ以上離れていればタキオンは生じなく安定である。even のものと odd のものとが交わるときもタキオンが生じなく安定である。なお、このとき $\hat{s} - \hat{s}' \equiv 1 \mod 2$ ゆえ、open string のスペクトルは Ramond sector のみである。

より具体的なケースで確かめていきたい。$(\hat{j}, \hat{n}, \hat{s})$ で特徴付けられる A ブレーンは ϕ_i, ϕ_f を結ぶとし、$(\hat{j}', \hat{n}', \hat{s}')$ で特徴付けられるブレーンは ${\phi'}_i, {\phi'}_f$ を結んでいるとしよう。このとき両者が交わるのは

$$\phi_i \leq {\phi'}_i \leq \phi_f \leq {\phi'}_f \tag{5.64}$$

もう少し具体的に書き換えると

$$|2\hat{j} - 2\hat{j}'| \leq \hat{n} - \hat{n}' \leq 2\hat{j} + 2\hat{j}' + 2 \tag{5.65}$$

と表せる。$\hat{s} - \hat{s}' = 0$ のとき、このときには少なくとも一つタキオンが生じる。これを $k = 1$ である簡単な場合で調べる。図 5.5 の 1 と 2 の A ブレーンを考えてみる。これらはそれぞれ $(0,0,2), (0,2,0)$ が対応する (表 5.1)。$\hat{s} = 0, \hat{s}' = 2$ にとることに気を付けて fusion 係数から

No.	n	s	h
1	0	0	0
2	2	0	$\frac{2}{3}$
3	-2	0	$\frac{2}{3}$
4	2	2	$\frac{1}{6}$
5	-2	2	$\frac{1}{6}$
6	0	2	$\frac{3}{2}$
7	1	1	$\frac{1}{24}$
8	-1	-1	$\frac{1}{24}$
9	1	-1	$\frac{25}{24}$
10	-1	1	$\frac{25}{24}$
11	3	1	$\frac{3}{8}$
12	3	-1	$\frac{3}{8}$

表 5.1: $k=1$ スーパーパラフェルミオン理論のスペクトル (ただし $j=0$ にとった)

open string のスペクトルを調べると $(0,2,2)$ がブレーン間を伝播することがわかる。これの共形ウェイトは $\frac{1}{6}$ であるから、タキオンが出てきていることがわかる。$\hat{s}-\hat{s}'=2$ の場合にはタキオンは出ない。これらからブレーンの不安定性に幾何学的な解釈が与えることができる。つまり、ブレーンが交わっているとき、崩壊して短い 1 つのブレーンに変わる。ただし、これはブレーンの向き付けと一致しなければならない。

交わらない場合はどうか。

$$\phi_i < \phi_f < \phi'_i < \phi'_f, \tag{5.66}$$

$$\phi_i < \phi'_i < \phi'_f < \phi_f \tag{5.67}$$

前者の場合、タキオンは生じない。後者は交わっていないがタキオンは生じ得る。しかし弦の長さのスケール以上離れていればタキオンは生じない。このような状況は $\hat{n},\hat{n}'$ が同程度で、$\hat{j}$ が $\hat{j}'$ より十分大きい場合に相当するが、そのとき (5.60) は $\frac{1}{2}$ を超えることが読みとれる。

B ブレーン

k が偶数の場合を念頭に置いていく。Ishibashi state を $|B,j,n,s;j,-n,-s\rangle\rangle$ とおく。ボソニックのときと同様に $n=0,k+2,s=0,2$ である Ishibashi state のみが B ブレーンに現れる。ただし k が偶数のときには $|B,\frac{k}{4},\frac{k+2}{2},\pm1;\frac{k}{4},-\frac{k+2}{2},\mp1\rangle\rangle$ も現れる。

ボゾンのときと同様に Cardy state が構成できて

$$|B,\hat{j},\hat{n},\hat{s}\rangle\rangle = \sqrt{2(k+2)}\sum_{j\in\mathbb{Z},s=0,2}\frac{S^{SPF\ j0s}_{\hat{j}\hat{n}\hat{s}}}{\sqrt{S^{SPF\ j0s}_{000}}}|B,j,0,s;j,0,-s\rangle\rangle \tag{5.68}$$

S^{SPF} への $\hat{s},s$ の寄与は $e^{-\frac{i\pi\hat{s}s}{2}}$ という形で現れる。今、s は偶数であるから $\hat{s}$ が 2 だけ変わっても B ブレーンは変わらない。したがって B ブレーンは $\hat{s}=0,1$ のみで異なるブレーンが指定される。それぞれ境界条件 $G=\pm i\bar{G}$ を満たす。このように B ブレーンには anti ブレーンが存在せず、向き付けがされない。H オービフォルドの A ブレーンが方向付けされないのも同様に考えることができる。

open string のスペクトルも以下のように計算できる。

$$\langle\langle B,\hat{j},\hat{n},\hat{s}|q_c^{L_0-\frac{c}{24}}|B,\hat{j}',\hat{n}',\hat{s}'\rangle\rangle = \sum_{(j,n,s)\in SPF}(N^{j}_{\hat{j}\hat{j}'}+N^{\frac{k}{2}-j}_{\hat{j}\hat{j}'})\frac{1+(-1)^{\hat{s}'-\hat{s}-s}}{2}\chi_{jns}(q_o) \tag{5.69}$$

これより $\hat{j}=\frac{k}{4}$ の場合には可約なブレーンであることが確かめられる。

そしてそのときには、(5.68) において $\hat{j}=\frac{k}{4}$ とおいたものを省略して $|B,\hat{s}\rangle\rangle$ と表すとすると、

$$|B,\frac{k}{4},\hat{s}\rangle\rangle = \frac{1}{2}\left(|B,\hat{s}\rangle\rangle + \sqrt{k+2}e^{-\frac{\pi\hat{s}^2}{2}}\sum_{s=\pm1}e^{-i\pi\frac{\hat{s}s}{2}}|B,\frac{k}{4},\frac{k+2}{2},s;\frac{k}{4},-\frac{k+2}{2},-s\rangle\rangle\right) \tag{5.70}$$

という、既約なブレーンが構成できる。第 2 項の係数は Cardy condition が満たされるように決められた。この状態は $\hat{s}$ によって 4 つの状態に区別されている。また RR Ishibashi state を含むので向きが付けられる。なおこれらのブレーン間の内積は

$$\langle\langle B,\frac{k}{4},\hat{s}|q_c^{L_0-\frac{c}{24}}|B,\frac{k}{4},\hat{s}'\rangle\rangle = \sum_{n,j}\chi_{j,n,\hat{s}'-\hat{s}}\frac{1}{2}\{1+(-1)^{(\hat{s'}^2+\hat{s}'-\hat{s}^2-\hat{s})/2}(-1)^{(2j+n-\hat{s}-\hat{s'})/2}\} \tag{5.71}$$

となる。ただし和は $j\in\mathbb{Z}, n+\hat{s}'-\hat{s}\equiv 0 \mod 2$ の下でとるものとする。確かに Cardy condition は満たされている。$\hat{s}'=\hat{s}+2$ のときにはタキオンが生じないので、安定なブレーンである。

5.3.3 Witten index に関するコメント

$\mathcal{N}=2$ 代数の $U(1)$ カレントのチャージは

$$J=\frac{s}{2}-\frac{n}{k+2} \tag{5.72}$$

である。NS sectorのchiral primaryは$\phi_{l,-2l,0}$である。実際に共形ウェイトを計算すると$h=\frac{q}{2}$が成立している。R sectorのchiral primaryは$\phi_{(l,2l+1,1)}$である。実際、$c=\frac{3k}{k+2}$を考慮すれば、$h=\frac{c}{24}$になっている。これらはspectral flowでNS sectorからR sectorに移る。

ここではWitten index $\mathrm{Tr}_R(-1)^F q_o^{L_0}$の計算を行いたい。open stringのR sectorについてトレースをとりたいので$G=i\bar{G}$と$G=-i\bar{G}$を満たすboundary stateを用いる。このboundary stateの間にはR sectorのopen stringしかスペクトルに現れない。

そこでAブレーン$|A,\hat{j},\hat{n},\hat{s}\rangle\rangle$に対して、こちらとは異なる境界条件を満たしている$|A,\hat{j},\hat{n}+1,\hat{s}+1\rangle\rangle$を対応させることができる。$\hat{n}$が異なるのは選択則のためである。ここでこれらを同一のブレーンを記述すると考えたい。$(-1)^F$はclosed stringのRR sectorのみ通すフィルターのようなものだから次のようにしてRR sectorのみを残すことができる。

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_{\alpha\beta}}(-1)^F=\langle\langle A,\hat{j},\hat{n},\hat{s}|q_c^{L_0-\frac{c}{24}}|A,\hat{j}',\hat{n}',\hat{s}'\rangle\rangle-\langle\langle A,\hat{j},\hat{n},\hat{s}|q_c^{L_0-\frac{c}{24}}|A,\hat{j}',\hat{n}',\hat{s}'+2\rangle\rangle \tag{5.73}$$

ただし、α,βはR sectorにいるopen stringの境界条件である。また$\hat{s}-\hat{s}'\equiv\pm1 \mod 4$であることも指摘しておく。

(5.63)と(5.73)とを使うと

$$\mathrm{Tr}(-1)^F=(-1)^{\frac{\hat{s}-\hat{s}'-1}{2}}\sum_j N^j_{\hat{j}\hat{j}'}(\chi_{j,\hat{n}-\hat{n}',1}-\chi_{j,\hat{n}-\hat{n}',-1})=N^{j_1}_{\hat{j}\hat{j}'}-N^{j_2}_{\hat{j}\hat{j}'} \tag{5.74}$$

jが$2j_1=\hat{n}-\hat{n}'-1$または$k-2j_2=k+2+\hat{n}-\hat{n}'-1$のときには和の中にR sectorのchiral primaryが現れる。そして$\chi_{j,2j+1,1}=\chi_{j,2j+1,-1}+1$であることからそれぞれ第1項、第2項から寄与が現れる。またこの二つの寄与が同時に生じることはない。$j_2=-j_1-1$なので、第1項がゼロではないとき、すなわち$|\hat{j}-\hat{j}'|\le j_1\le\min\{\hat{j}+\hat{j}',k-\hat{j}-\hat{j}'\}$の場合には(5.8)より明らかに第2項はゼロになる。逆も同様である。また$\hat{n}>\hat{n}'$とすると、第1項がゼロではない条件は$|2\hat{j}-2\hat{j}'|\le\hat{n}-\hat{n}'\le\min\{2\hat{j}+2\hat{j}'+1,2k-2\hat{j}-2\hat{j}'+1\}$となる。これは(5.65)に含まれる。したがってブレーンが交わる条件は、このようなchiral primaryが出るための必要条件と言える。(5.74)は2つ直線の交わる向きも含めた交点数である。

Aブレーンと向き付けされないBブレーンとのWitten indexはゼロになる。実際にこのBブレーンはRR sectorを含まないからである。

次に向き付けされたBブレーンとAブレーンとのWitten indexを考える。

$$\langle\langle B\frac{k}{4}\hat{s}'|q_c^{L_0-\frac{c}{24}}\left(|A,\hat{j},\hat{n},\hat{s}\rangle\rangle+|A,\hat{j},\hat{n},\hat{s}+2\rangle\rangle\right) \tag{5.75}$$

これは

$$\sin[\frac{\pi}{2}(2\hat{j}+1)]e^{i\pi(\hat{s})^2/2}\left(e^{\frac{i\pi}{2}(\hat{s}'+\hat{n}-\hat{s})}f_+ + e^{\frac{i\pi}{2}(-\hat{s}'-\hat{n}-\hat{s})}f_-\right) \tag{5.76}$$

と書ける。ただし

$$f_+ = \langle\langle B\frac{k}{4}, \frac{k+2}{2}, 1; -\frac{k+2}{2}, -1|q_c^{L_0-\frac{c}{24}}|A\frac{k}{4}, \frac{k+2}{2}, 1\rangle\rangle \tag{5.77}$$

$$f_- = \langle\langle B\frac{k}{4}, \frac{k+2}{2}, -1; -\frac{k+2}{2}, 1|q_c^{L_0-\frac{c}{24}}|A\frac{k}{4}, \frac{k+2}{2}, -1\rangle\rangle \tag{5.78}$$

$$\tag{5.79}$$

これらは simple current の 1 点関数である。$q_c \to 0$ の極限をとり RR sector の基底状態からの寄与を読みとると

$$\langle\langle B\frac{k}{4}\hat{s}'|q_c^{L_0-\frac{c}{24}}\left(|A, \hat{j}, \hat{n}, \hat{s}\rangle\rangle + |A, \hat{j}, \hat{n}, \hat{s}+2\rangle\rangle\right) = \begin{cases} 0 & (\hat{j} \in \frac{1}{2}+\mathbb{Z}) \\ (-1)^{\hat{s}'(\hat{s}'+1)/2}(-1)^{(2\hat{j}+\hat{n}-\hat{s})/2} & (\hat{j} \in \mathbb{Z}) \end{cases} \tag{5.80}$$

boundary state の Witten index は交点数を与えるので(5.80) は A ブレーンとターゲット空間一杯に広がった $\hat{j} = k/4$ B ブレーンの縁との符号を付けられた交点数の和になっている。(5.80) は A ブレーンと符号を付けられた点の和 $(-1)^{\hat{s}'(\hat{s}'+1)/2}(P_0 + P_1)$、$P_0$ は $4n\frac{\pi}{k+2}$ の形をした境界上の点の和、P_1 は境界上の $(4n+1)\frac{\pi}{k+2}$ の形をした点の和、を表す。このように解釈をするとこのターゲット空間に広がった B ブレーンは、非摂動的な不安定性により円盤の縁上の向き付けのされた D0 ブレーンになっている可能性がある。

第6章　結論

第2章ではRCFTのboundary stateの分類に自然にfusion代数、graph fusion代数、Pasquir代数が現れた。第3章ではirrationalなCFTのboundary stateを構成した。その結果、Dirichlet条件、Neumann条件を満たすboundary stateを含め共形対称性のみを保つboundary stateが連続的なモデュライ空間にあることをみた。またboundary stateの間に現れるopen stringのスペクトルはときには連続的なものにもなった。第4章ではDブレーンに幾何学的解釈を与えた。その結果ブレーンの崩壊と幾何学的な配置との間に自然な対応がついた。

関連図書

[1] A. A. Belavin, A. M. Polyakov and A. B. Zamolodchikov, "Infinite Conformal Symmetry In Two-Dimensional Quantum Field Theory," Nucl. Phys. B **241** (1984) 333.

[2] J. L. Cardy, "Boundary Conditions, Fusion Rules And The Verlinde Formula," Nucl. Phys. B **324** (1989) 581.

[3] B. Derrida, J. L. Lebowitz, E. R. Speer, "Large Deviation of the Density Profile in the Symmetric Simple Exclusion Process"[arXiv:cond-mat/0109346]

[4] I. Affleck, M. Oshikawa and H. Saleur, "Quantum Brownian motion on a triangular lattice and c = 2 boundary conformal field theory," Nucl. Phys. B **594** (2001) 535 [arXiv:cond-mat/0009084].

[5] I. Affleck, "Conformal Field Theory Approach to the Kondo Effect," Acta Phys. Polon. B **26** (1995) 1869 [arXiv:cond-mat/9512099].

[6] J. Polchinski, "Dirichlet-Branes and Ramond-Ramond Charges," Phys. Rev. Lett. **75** (1995) 4724 [arXiv:hep-th/9510017].

[7] A. Strominger and C. Vafa, "Microscopic Origin of the Bekenstein-Hawking Entropy," Phys. Lett. B **379** (1996) 99 [arXiv:hep-th/9601029].

[8] P. Di Francesco, P. Mathieu and D. Senechal, "Conformal field theory," *New York, USA: Springer (1997) 890 p.*

[9] R. E. Behrend, P. A. Pearce, V. B. Petkova and J. B. Zuber, "Boundary conditions in rational conformal field theories," Nucl. Phys. B **570** (2000) 525 [Nucl. Phys. B **579** (2000) 707] [arXiv:hep-th/9908036].

[10] V. B. Petkova and J. B. Zuber, "The many faces of Ocneanu cells," Nucl. Phys. B **603** (2001) 449 [arXiv:hep-th/0101151].

[11] M. R. Gaberdiel, A. Recknagel and G. M. Watts, "The conformal boundary states for SU(2) at level 1," arXiv:hep-th/0108102.

[12] M. R. Gaberdiel and A. Recknagel, "Conformal boundary states for free bosons and fermions," JHEP **0111** (2001) 016 [arXiv:hep-th/0108238].

[13] R. A. Janik, "Exceptional boundary states at c = 1," Nucl. Phys. B **618** (2001) 675 [arXiv:hep-th/0109021].

[14] J. Maldacena, G. W. Moore and N. Seiberg, "Geometrical interpretation of D-branes in gauged WZW models," JHEP **0107** (2001) 046 [arXiv:hep-th/0105038].

[15] I. R. Klebanov and A. M. Polyakov, "Interaction of discrete states in two-dimensional string theory," Mod. Phys. Lett. A **6** (1991) 3273 [arXiv:hep-th/9109032].

[16] E. Verlinde, "Fusion Rules And Modular Transformations In 2-D Conformal Field Theory," Nucl. Phys. B **300** (1988) 360.

[17] G. W. Moore and N. Seiberg, "Classical And Quantum Conformal Field Theory," Commun. Math. Phys. **123** (1989) 177.

[18] A. Recknagel and V. Schomerus, "Boundary deformation theory and moduli spaces of D-branes," Nucl. Phys. B **545** (1999) 233 [arXiv:hep-th/9811237].

[19] A. Recknagel and V. Schomerus, "D-branes in Gepner models," Nucl. Phys. B **531** (1998) 185 [arXiv:hep-th/9712186].

[20] V. B. Petkova and J. B. Zuber, "Conformal boundary conditions and what they teach us," arXiv:hep-th/0103007.

[21] N. Ishibashi, "The Boundary And Crosscap States In Conformal Field Theories," Mod. Phys. Lett. A **4** (1989) 251.

[22] P. Di Francesco and J. B. Zuber, "SU(N) Lattice Integrable Models And Modular Invariance," PUPT-90-1164 *In *Trieste 1989, Proceedings, Recent developments in conformal field theories* 179-215 and Princeton Univ. - PUPT-1164 (90,rec.Apr.) 36 p*

[23] P. Di Francesco, "Integrable lattice models, graphs and modular invariant conformal field theories," Int. J. Mod. Phys. A **7** (1992) 407.

[24] J. L. Cardy and D. C. Lewellen, Phys. Lett. B **259** (1991) 274.

[25] D. C. Lewellen, "Sewing constraints for conformal field theories on surfaces with boundaries," Nucl. Phys. B **372** (1992) 654.

[26] C. G. Callan, I. R. Klebanov, A. W. Ludwig and J. M. Maldacena, "Exact solution of a boundary conformal field theory," Nucl. Phys. B **422** (1994) 417 [arXiv:hep-th/9402113].

[27] J. Polchinski and L. Thorlacius, "Free fermion representation of a boundary conformal field theory," Phys. Rev. D **50** (1994) 622 [arXiv:hep-th/9404008].

[28] J. Maldacena, G. W. Moore and N. Seiberg, "Geometrical interpretation of D-branes in gauged WZW models," JHEP **0107** (2001) 046 [arXiv:hep-th/0105038].

[29] G. Felder, J. Frohlich, J. Fuchs and C. Schweigert, "The geometry of WZW branes," J. Geom. Phys. **34** (2000) 162 [arXiv:hep-th/9909030].

[30] W. Lerche, C. Vafa and N. P. Warner, "Chiral Rings In N=2 Superconformal Theories," Nucl. Phys. B **324** (1989) 427.

[31] D. Gepner, "Space-Time Supersymmetry In Compactified String Theory And Superconformal Models," Nucl. Phys. B **296** (1988) 757.