超対称性を持つゲージ理論の双対性
と
その起源について

大阪大学大学院理学研究科吉川研究室
横野貴志

1997 年 2 月 6 日

Abstract

近年、双対性を軸として超対称性を持つゲージ理論の非摂動領域における解析が進んでいる。本稿では $\mathcal{N}=2$ 超対称ゲージ理論における双対性と $\mathcal{N}=1$ 超対称ゲージ理論における双対性を紹介する。

最初に $\mathcal{N}=2$ 超対称 Yang-Mills 理論が持つ双対性について述べ、それを利用して厳密解を得る。次に、$\mathcal{N}=1$ 超対称色力学 (SQCD) の真空構造を与え、$\mathcal{N}=1$ 理論における双対性について紹介する。この $\mathcal{N}=1$ 双対性は $\mathcal{N}=1$ 理論の真空だけを見ていては、成立する理由がよくわからないが、より対称性の高い $\mathcal{N}=2$ 理論の立場から見ると、その起源が明らかになってくる。これについて説明した後、$\mathcal{N}=2$ 理論の立場からは説明出来そうにない $\mathcal{N}=1$ 双対性を紹介し、最後にこれらについて議論する。

Contents

1 Introduction **3**

2 $\mathcal{N}=2$ 超対称性の世界における双対性 **5**
2.1 N_f フレーバーを持つ $\mathcal{N}=2$ $SU(N_c)$ SQCD 5
2.2 古典的な $\mathcal{N}=2$ 超対称 pure Yang-Mills 作用 7
2.3 Flat Direction 9
2.4 $N_c=2$ の場合の低エネルギー有効作用 10
2.5 モジュライ空間の計量 11
2.6 双対性 13
2.7 量子補正にる $U(1)_R$ の破れ 16
2.8 プリポテンシャル 17
2.9 モノドロミー 18
2.10 BPS 質量公式 19
2.11 特異点の数 20
2.12 特異点の意味 21
2.13 モデルの解 24
2.14 $\mathcal{N}=1$ へ 28

3 $\mathcal{N}=1$ 超対称性の世界における双対性 **30**
3.1 Techniques 30
3.2 Flat Direction 31
3.3 古典的なモジュライ空間 34
3.4 系の持つ対称性 35
3.5 $N_f<N_c$ の場合の真空 37
3.6 $N_f=N_c$ の場合の真空 40
3.7 $N_f=N_c+1$ の場合の真空 43
3.8 $N_f\geqq 3N_c$ の場合 45
3.9 双対性 45
3.10 $N_c+2\leqq N_f\leqq\frac{3}{2}N_c$ の場合 50
3.11 $\frac{3}{2}N_c<N_f<3N_c$ の場合 50

4 $\mathcal{N}=2$SUSY QCD の真空と $\mathcal{N}=1$SUSY QCD における双対性 **53**
4.1 Flat Direction 53
4.2 古典的なクーロン branch 54
4.3 古典的な Higgs branch 55
4.3.1 Baryonic Branch $N_f\geqq 2N_c$ (asymptotic non free) 55
4.3.2 Baryonic Branch $N_c\leqq N_f<2N_c$ (asymptotic free) 58
4.3.3 non Baryonic Branch 60
4.4 Mixed branch 63
4.5 古典的モジュライ空間のまとめ 64
4.6 量子論的 Higgs branch と非繰り込み定理 65
4.7 量子論的クーロン branch 66
4.7.1 厳密解 67
4.7.2 Baryonic Branch root の有効理論 68
4.7.3 ゲージ群の $U(1)$ の部分に対する charge Part 1 69

4.7.4 ゲージ群の $U(1)$ の部分に対する charge Part 2 70
4.7.5 magnetic クォークの $U(1)_B$ charge 71
4.8 Baryonic Branch root の低エネルギー有効理論 73
4.9 Breaking to $\mathcal{N} = 1$ 75

5 奇妙な $\mathcal{N} = 1$ 超対称 双対理論 77
5.1 $Spin(10)$ と $SU(N_f - 5)$ 77
5.2 $Spin(7)$ と $SU(N_f - 4)$ 79

6 議論 81

1 Introduction

ここ数年において、双対性という性質が超対称性ゲージ理論を解析する上で非常に重要なものとなってきている。双対性の持つ著しい特徴は、強結合領域と弱結合領域を結びつけるというもので、これを使えば、強結合領域を摂動論的に扱う事が可能になり、これまで解析が困難だった強結合領域が解析出来るようになるのである。

双対性の考えは古くは、Dirac の電磁双対性から始まる (Ref [1])。 Dirac は モノポールを導入すると、電場 $\mathbf{E}$ と磁場 $\mathbf{B}$ と電荷 e と磁荷 g に対して

$$\mathbf{E} \to \mathbf{B} \qquad \mathbf{B} \to -\mathbf{E} \tag{1. 1}$$

$$e \to g \qquad g \to -e \tag{1. 2}$$

という変換をしても、マックスウェル方程式は不変である事を指摘した。このとき Dirac の量子化条件より

$$eg = 2\pi n \quad n \in \mathbf{Z} \tag{1. 3}$$

が成立している。$e \gg 1$ とすると $g \ll 1$ となるので、この変換で強結合と弱結合が入れ替わるのである。

しかし、ここ数年で双対性が重要性を増す契機となったのは section 2 で紹介する Seiberg-Witten の仕事であろう (Ref [2])。これは、4 次元で、物質場がないときの $\mathcal{N} = 2$ 超対称 $SU(2)$ Yang-Mills 理論の真空の構造を厳密に求めたというもので、強結合領域までも含んだものだったので、大きな衝撃を与えた。そのとき、強結合領域を解析するのにポイントになったのが、双対性だったのである。この厳密解を用いて、いくつかの興味ある結果が得られている。例えば、縮退した真空の空間には特異点が存在していて、そこでは余分な massless 粒子が現れており、その余分な massless 粒子は、この理論では、モノポールやダイオンである事が示されている。また、このとき $\mathcal{N} = 2$ 超対称性を $\mathcal{N} = 1$ に破ると、この massless モノポールが凝縮して電荷の閉じ込めを起こす事も解析的に示すことが出来るのである。

これを始めとして、物質場を結合した場合 (Ref [3])、また、さまざまなゲージ群の場合などで厳密解が見つかっている。

section 3 では $\mathcal{N} = 1$ 超対称色力学 (SQCD) の真空の構造について紹介する (Ref [7, 11])。

ゲージ理論にはいくつかの相、例えば、クーロン相、Higgs 相、閉じ込め相などが存在する。ところが、物質場が基本表現に属するときは Higgs 相と閉じ込め相の間に区別がない (Ref [6])。従って、asymptotic free な理論を記述する場合、高エネルギー領域は弱結合なので Higgs 相、低エネルギー領域は強結合なので閉じ込め相で記述するのが自然

であると思われる。しかし、2 つの相には区別がないので、これらはお互いに滑らかにつながっているはずである。

この section での目的は、低エネルギー領域における様子を非摂動的に調べることである。しかし、これらは特別な場合しか正確な解を求めることはできていない。

一方で、$\mathcal{N} = 1$SQCD の持つ性質の 1 つに、次のような双対性があるのではないかと考えられている。ここで言う双対性とは、高エネルギー領域では異なる 2 つの理論が低エネルギー領域では同じ振る舞いをしていて、低エネルギーを見ている観測者にとっては、もはや 2 つの理論を区別できないと言う現象である。これは、非可換双対性と呼ばれている。このとき、2 つの理論は高エネルギー領域では異なるゲージ群を持っており、低エネルギー極限においては非自明な固定点上で超共形場の理論になっていると考えられている。

section 4 では、$\mathcal{N} = 2$ 理論の厳密解を用いて、この $\mathcal{N} = 1$ 理論の非可換双対性の起源を説明する。(Ref [19])

$\mathcal{N} = 1$ SUSY QCD の非可換双対性において、特に奇妙なことは、なぜ異なるゲージ群を持つ二つの理論が、同じ低エネルギー有効理論を与えるのか?ということであろう。section 3 で紹介するような $SU(N_c)$ の Vector like Model の双対性に関しては、$\mathcal{N} = 2$ 理論の立場から眺めると、その意味が見えてくる。$\mathcal{N} = 1$ 理論で magnetic と呼んでいた理論は $\mathcal{N} = 2$ では次のように解釈される。$SU(N_c)$ N_f フレーバーの $\mathcal{N} = 2$ SUSY QCD におけるクーロン相は非可換ゲージ対称性を持つ。特に、Higgs branch の原点が量子補正を受けたクーロン branch と交わる点に注目する。このとき、クーロン branch から見るとゲージ群は、ちょうど $\mathcal{N} = 1$ で magnetic な理論が持っていたゲージ群 $SU(N_f - N_c)$ になっている。そこに現れる $\mathcal{N} = 2$ 理論の massless クォーク や グルオン は、超対称性が $\mathcal{N} = 1$ に破れると、$\mathcal{N} = 1$ 理論の双対性に出てきた magnetic クォーク や グルオン になるのである。

また、$\mathcal{N} = 2$ クーロン branch は滑らかに、基本的なクォークやグルオンにつなげられる。このことと、section 4.6 で述べる非繰り込み定理を用いて Higgs 相から見た ゲージ $SU(N_c)$ 理論と 、クーロン相から見たゲージ $SU(N_f - N_c)$ 理論を同一視すると、$\mathcal{N} = 1$ SUSY QCD に存在した双対性を導くことができる。

section 5 では、このような $\mathcal{N} = 2$ 理論を用いた解析からは説明できそうにない $\mathcal{N} = 1$ 双対性を紹介する。これらの双対性の起源は、まだはっきりわかっていない。

secion 6 では、このような奇妙な $\mathcal{N} = 1$ 双対性に関して現在までにわかっている事を述べ、今後の課題について議論する。

2　$\mathcal{N}=2$超対称性の世界における双対性

2.1　N_f フレーバーを持つ$\mathcal{N}=2$ $SU(N_c)$ SQCD

大局的な$\mathcal{N}=2$超対称性理論には Vector mulitiplet と Hyper multiplet の 2 種類の (massless) 多重項が存在する。

$\mathcal{N}=2$ Vector superfield$\mathbf{\Psi}$ はゲージ群の随伴表現に属し、

$$\begin{array}{ccc} A_\mu & & SU(2)_R \text{ singlet}(\text{ゲージ 場}) \\ \lambda & \psi & SU(2)_R \text{ doublet}(\text{ワイルフェルミオン}) \\ \phi & & SU(2)_R \text{ singlet}(\text{複素スカラー場}) \end{array} \tag{2. 1}$$

のような成分から構成されて、これを、$\mathcal{N}=1$ 超対称性の言葉で言うと、$\mathcal{N}=1$ Vector mulitlet V (A_μ,λ) と $\mathcal{N}=1$ Chiral superfield $\mathbf{\Phi}$ (ψ,ϕ) で構成されていると見ることができる。

ここで、$\mathcal{N}=1$ Chiral superfield $\mathbf{\Phi}$ は

$$\begin{aligned} \mathbf{\Phi} &= \phi(y)+\sqrt{2}\theta\psi(y)+\theta^2F(y) \qquad (2.\ 2) \\ \text{ただし}\quad y^\mu &= x^\mu+i\theta\sigma^\mu\bar{\theta} \end{aligned}$$

$\mathcal{N}=1$ Vector superfield V は

$$V=(-\theta\sigma^\mu\bar{\theta}A_\mu+i\theta^2(\bar{\theta}\bar{\lambda})-i\theta^2(\theta\lambda)+\frac{1}{2}\theta^2\bar{\theta}^2D)(x) \tag{2. 3}$$

また、V からつくられる Field strength superfield W_α は

$$W_\alpha=(-i\lambda+\theta D-i\sigma^{\mu\nu}\theta F_{\mu\nu}+\theta^2\sigma^\mu D_\mu\bar{\lambda})_\alpha(y) \tag{2. 4}$$

ただし

$$\begin{aligned} \sigma^{\mu\nu} &= \frac{1}{4}(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu-\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu) && (2.\ 5) \\ F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu-i[A_\mu,A_\nu] && (2.\ 6) \\ D_\mu\lambda &= \partial_\mu\lambda-i[A_\mu,\lambda] && (2.\ 7) \end{aligned}$$

のように書かれてるものとする。(Ref [37])

$\mathcal{N}=2$ 超対称性理論は大局的な対称性として、$SU(2)_R\times U(1)_R$ 対称性を持つ。上の $\mathcal{N}=1$ superfield を用いた定式化では、このうち以下のような $U(1)_J\times U(1)_R$ が明白と

なっている。

$$U(1)_R: \quad \begin{cases} \mathbf{\Phi}(\theta) \to e^{2i\alpha}\mathbf{\Phi}(e^{-i\alpha}\theta) \\ W_\alpha(\theta) \to e^{i\alpha}W(e^{-i\alpha}\theta) \end{cases} \tag{2. 8}$$

$$SU(2)_R \supset U(1)_J: \quad \begin{cases} \mathbf{\Phi}(\theta) \to \mathbf{\Phi}(e^{-i\alpha}\theta) \\ W_\alpha(\theta) \to e^{i\alpha}W_\alpha(e^{-i\alpha}\theta) \end{cases} \tag{2. 9}$$

Hyper multiplet (物質場) はゲージ群の任意の表現に属することができ、

$$\begin{array}{ccc} \psi_q & & SU(2)_R \text{ singlet}(\text{ワイルフェルミオン}) \\ q & \tilde{q}^\dagger & SU(2)_R \text{ doublet}(\text{複素スカラー場}) \\ \psi_{\tilde{q}}{}^\dagger & & SU(2)_R \text{ singlet}(\text{ワイルフェルミオン}) \end{array} \tag{2. 10}$$

のような成分から構成されている。
これを Vector multiplet の場合と同様に、$\mathcal{N}=1$ superfield を用いて表すなら、2 つの $\mathcal{N}=1$ Chiral mulitlet Q (q,ψ_q) と $\widetilde{Q}$ $(\tilde{q},\psi_{\tilde{q}})$ によって記述することができる。

$$Q = q(y) + \sqrt{2}\theta\psi_q(y) + \theta^2 F_q(y) \tag{2. 11}$$

$$\widetilde{Q} = \tilde{q}(y) + \sqrt{2}\theta\psi_{\tilde{q}}(y) + \theta^2 F_{\tilde{q}}(y) \tag{2. 12}$$

ただし、Q がゲージ対称性とフレーバー対称性に対して基本表現なら、$\widetilde{Q}$ はその共役表現に属する。(2. 10) からわかるように、一般に $(Q, \overline{\widetilde{Q}})$ が同じ表現に属する。
$\mathcal{N}=2$ 超対称性では、1 つの Hyper multiplet が異なる Chirality を持つ superfield $(Q, \overline{\widetilde{Q}})$ で構成されているのが特徴である。
Hyper multiplets が存在すると、一般に $SU(2)_R \times U(1)_R$ に加えて、バリオン数 $U(1)_B$ も大局的対称性になっており、$\mathcal{N}=1$ superfield の上では

$$U(1)_B: \quad \begin{cases} Q(\theta) \to e^{i\alpha}Q(\theta) \\ \widetilde{Q}(\theta) \to e^{-i\alpha}\widetilde{Q}(\theta) \end{cases} \tag{2. 13}$$

$$U(1)_R: \quad \begin{cases} Q(\theta) \to Q(e^{-i\alpha}\theta) \\ \widetilde{Q}(\theta) \to \widetilde{Q}(e^{-i\alpha}\theta) \end{cases} \tag{2. 14}$$

$$SU(2)_R \supset U(1)_J: \quad \begin{cases} Q(\theta) \to e^{i\alpha}Q(e^{i\alpha}\theta) \\ \widetilde{Q}(\theta) \to e^{i\alpha}\widetilde{Q}(e^{-i\alpha}\theta) \end{cases} \tag{2. 15}$$

のように表される。
Q がフレーバー対称性に対して基本表現、$\widetilde{Q}$ がその共役表現に属するときのフレーバー対称性に対する変換性は

$$SU(N_f): \begin{cases} Q^i \to U^i_j Q^j \\ \widetilde{Q}_i \to \widetilde{Q}_j U^{\dagger j}_i \end{cases} \tag{2. 16}$$

のようになっている。ただし、$U^i_j \in SU(N_f)$ $(i,j=1,2,\ldots,N_f)$ である。
ゲージ群が $SU(N_c)$ で N_f フレーバーを持つ $\mathcal{N}=2$ SQCD のラグランジアンは、これら

の $\mathcal{N}=1$ superfield を使って次のように書くことができる。ただし、Q はゲージ対称性とフレーバー対称性に対して基本表現とし、$\widetilde{Q}$ はその共役表現に属するとする。

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{4\pi} Im\left[\int d^2\theta d^2\bar{\theta}\,\tau_{cl}\bar{\mathbf{\Phi}}e^{-2ad(V)}\mathbf{\Phi} + \int d^2\theta\frac{1}{2}\tau_{cl}W^{\alpha}W_{\alpha}\right] \\ &\quad + \int d^2\theta d^2\bar{\theta}\left(\bar{Q}_i e^{2V}Q^i + \widetilde{Q}_i e^{-2V}\bar{\widetilde{Q}}^i\right) \\ &\quad + \left(\int d^2\theta\mathcal{W}_0 + h.c\right) \end{aligned} \tag{2. 17}$$

$$\begin{aligned}\tau_{cl} &= \frac{\theta}{2\pi} + i\frac{4\pi}{g^2} \\ \mathcal{W}_0 &= \sqrt{2}\widetilde{Q}_i^a\mathbf{\Phi}_a^b Q_b^i\end{aligned} \tag{2. 18}$$

但し、$(i,j=1,2,\ldots,N_f)$ はフレーバーの足。$(a,b=1,2,\ldots,N_c)$ はゲージ群の基本表現の足。これらの mulitiplet は short mulitiplet と呼ばれるものであり、massless の系を構成するものである。

但し、Hypermultiplet に対しては、以下のような仮想的な Higgs 機構を考えることにより、後で述べる BPS 質量条件を満たす質量を持たすことができる。即ち、仮想的にフレーバー対称性をゲージ化したとし、その $\mathcal{N}=2$ Vector mulitiple をバックグラウンド場と解釈して、第 1 成分であるスカラー場が真空期待値を持ったと考えるなら、Higgs 機構により質量が生成され、super potential は

$$\mathcal{W} = \mathcal{W}_0 + \mathcal{W}_{mass} = \sqrt{2}\widetilde{Q}_i^a\mathbf{\Phi}_a^b Q_b^i + \sqrt{2}m_j^i\widetilde{Q}_i^a Q_a^j \tag{2. 19}$$

のようになる。

この質量項が $\mathcal{N}=2$ 超対称性を破らない条件は $\left[m\ ,\ m^{\dagger}\right]=0$ で、この条件は、後で述べる Flat direction の条件をバックグラウンド場に対して求めたものであり、m をフレーバー対称性により対角化できることを保証している。

2.2 古典的な $\mathcal{N}=2$ 超対称 pure Yang-Mills 作用

古典的な $\mathcal{N}=2$ 超対称 pure Yang-Mills 作用を考える。ここで 'pure'とは、$N_f=0$、即ち、物質場 $\widetilde{Q},Q$ (Hyper multiplet) がないことを言う。従って、$\mathcal{N}=2$ 超対称 pure Yang-Mills 作用は以下で見るように $\mathcal{N}=2$ Vector superfield Ψ のみで書かれる。

このとき section 2.1 で与えたように、$\mathcal{N}=2$ Vector superfield Ψ は $\mathcal{N}=1$ SUSY の multiplets を使って構成することができる。以下では、$\mathcal{N}=1$ の superfield を使って $\mathcal{N}=1$ 理論の立場から $\mathcal{N}=2$ pure Yang-Mills 作用を構成し、それを $\mathcal{N}=2$ Vector superfield で表すことにする。

$\mathcal{N}=1$ superfield W_α を用いて、次のような量を計算して見よう。

$$\frac{1}{2}\int d^4xd^2\theta trW^\alpha W_\alpha = \int d^4xtr[-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}+\frac{i}{4}F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}-i\lambda\sigma^\mu D_\mu\bar{\lambda}+\frac{1}{2}D^2] \quad (2.\ 20)$$

ここで　　$\tilde{F}^{\mu\nu}=\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$ (2. 21)

(Ref [37])

ここで $\frac{i}{4}F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$ はインスタントン項であり

$$tr\int d^4xF_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}=\int d^4x\frac{1}{2}F^a_{\mu\nu}\tilde{F}^{a\,\mu\nu}=16\pi^2 n \qquad (\mathrm{n}\in \mathrm{Z}:\text{インスタントン数}) \quad (2.\ 22)$$

のように量子化されている。従って、複素結合定数 $\tau_{cl}=\frac{\theta}{2\pi}+i\frac{4\pi}{g^2}$ を導入すると、$\mathcal{N}=1$ Yang-Mills 理論の作用は

$$\begin{aligned}\frac{2}{4\pi}Im[\tau_{cl}\int d^4xd^2\theta\,\frac{1}{2}trW^\alpha W_\alpha] &= \frac{2}{g^2}\int d^4xtr[-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}-i\lambda\sigma^\mu D_\mu\bar{\lambda}+\frac{1}{2}D^2]\\ &\quad+\frac{\theta}{16\pi^2}tr\int d^4xF_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} \qquad (2.\ 23)\end{aligned}$$

と書ける。

一方、これと minimal coupling しているゲージ群の随伴表現に属する Chiral superfiled $\mathbf{\Phi}$ の作用は

$$\begin{aligned}\int d^4xd^2\theta d^2\bar{\theta}tr\mathbf{\Phi}^\dagger e^{-2ad(V)}\mathbf{\Phi} &= \int d^4x\ tr\left(|D_\mu\phi|^2-i\bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu D_\mu\psi+F^\dagger F-\phi^\dagger[D,\phi]\right.\\ &\quad\left.-\sqrt{2}i\phi^\dagger\{\lambda,\psi\}+\sqrt{2}i\bar{\psi}[\bar{\lambda},\phi]\right) \qquad (2.\ 24)\end{aligned}$$

のように書くことができる。

$\mathcal{N}=1$ 超対称 Yang-Mills 作用はこのように、2 つの部分に分けて書くことができる。

ところが $\mathcal{N}=2$ 超対称性 Yang-Mills 理論では、$\mathcal{N}=1$ 超対称の Chiral superfield $\mathbf{\Phi}$ と Field strength superfield W_α が 1 つの multiplet に統合されるので、(2. 23) + $\frac{2}{g^2}$(2. 24) で与えられる。係数は $SU(2)_R$ doublet である ψ と λ が同じ運動項の係数を持っているはずであることから、ψ と λ の運動項の係数が同じになるように決めた。

ただし、以降の計算の簡単のため section 2.1 に比べ全体を 2 倍する定義に変更している。

結局、$\mathcal{N}=2$ 超対称 Yang-Mills 作用 は $\mathcal{N}=1$ 超対称性の superfield を使って

$$S=Im\ tr\int d^4x\frac{2\tau_{cl}}{4\pi}\left[\frac{1}{2}\int d^2\theta\ W^\alpha W_\alpha+\int d^2\theta d^2\bar{\theta}\ \mathbf{\Phi}^\dagger e^{-2V}\mathbf{\Phi}\right] \qquad (2.\ 25)$$

のように書くことができる。

これはまた、$\mathcal{N}=2$ 超対称性の Vector superfield $\mathbf{\Psi}$ を使って

$$\mathcal{S} \quad = \quad Im\frac{\tau_{cl}}{4\pi}\int d^4xd^2\theta d^2\tilde{\theta}\ \frac{1}{2}tr\mathbf{\Psi}^2 \qquad (2.\ 26)$$

のように書くことができる。
但し、

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Psi} &= \mathbf{\Phi}(\tilde{y},\theta) + i\sqrt{2}\tilde{\theta}^{\alpha}W_{\alpha}(\tilde{y},\theta) + \tilde{\theta}^{\alpha}\tilde{\theta}_{\alpha}G(\tilde{y},\theta) && (2.\ 27)\\
G(\tilde{y},\theta) &= \int d^2\bar{\theta}[\mathbf{\Phi}(\tilde{y} - i\theta\sigma\bar{\theta},\theta,\bar{\theta})]^{\dagger}exp[-2V(\tilde{y} - i\theta\sigma\bar{\theta},\theta,\bar{\theta})] && (2.\ 28)\\
\tilde{y}^{\mu} &= y^{\mu} + i\tilde{\theta}\sigma^{\mu}\bar{\tilde{\theta}} && (2.\ 29)\\
y^{\mu} &= x^{\mu} + i\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta} && (2.\ 30)\\
& && (2.\ 31)
\end{aligned}$$

と定義されているとする。
(2. 25) あるいは (2. 26) 式が、古典的な $\mathcal{N}=2$ 超対称 pure Yang-Mills 作用である。

2.3 Flat Direction

$\mathcal{N}=2$ pure Yang-Mills 理論のラグランジアンが持つ重要な性質として、超対称性を破らずにスカラー場の真空期待値を連続的に動かすことができるということがある。従って、このとき真空は連続的に縮退しており、その縮退の方向を flat direction という。

$\mathcal{N}=2$ 超対称 pure Yang-Mills 作用 (2. 25) もしくは (2. 26) の flat direction の条件を調べる。
作用 $\mathcal{S}$ のスカラー場に依存している部分は、(2. 23)(2. 24) より

$$S_{aux} = \frac{2}{g^2}\int d^4x tr\left(\frac{1}{2}D^2 - \phi^{\dagger}[D,\phi] + F^{\dagger}F\right) \qquad (2.\ 32)$$

であるから、補助場 F、D に対する Euler-Lagrange 方程式 を解くと

$$\begin{aligned}
F &= F^{\dagger} = 0 && (2.\ 33)\\
D &= -[\phi^{\dagger},\phi] && (2.\ 34)
\end{aligned}$$

となる。これらを S_{aux} に代入すると

$$S_{aux} = -\frac{1}{g^2}\int d^4x\ tr[\phi^{\dagger},\phi]^2 \qquad (2.\ 35)$$

となり、スカラー場の potential は $V(\phi) \sim\ tr[\phi^{\dagger},\phi]^2$ であることが分かる。超対称性が破れない条件は良く知られているように真空期待値が $V(\phi)=0$ となることなので

$$[\phi^{\dagger},\phi] = 0 \qquad (2.\ 36)$$

であれば、超対称性を破らない真空となる。
これが、flat direction の条件である。ϕ と $\phi^{\dagger}$ が可換でありさえすればよいので、ϕ の真空期待値は色々な値をとれることが重要である。

2.4 $N_c = 2$ の場合の低エネルギー有効作用

一般に有効作用は、$\mathbf{\Psi}$ だけによっていて $\mathbf{\Psi}^\dagger$ によっていない解析関数 $\mathcal{F}(\mathbf{\Psi})$ を用いて

$$\frac{1}{4\pi} Im \int d^4x d^2\theta d^2\tilde{\theta} \mathcal{F}(\mathbf{\Psi}) \tag{2. 37}$$

という形に書ける。これは、これが正則性と呼ばれる $\mathcal{N} = 2$ 超対称性の性質の 1 つであり、厳密解を求める際に非常に重要となる。
この $\mathcal{F}$ はプリポテンシャルと呼ばれる。古典極限で作用が (2. 26) になることから、

$$\mathcal{F}_{cl}(\mathbf{\Psi}) = \frac{1}{2} tr \tau_{cl} \mathbf{\Psi}^2 \tag{2. 38}$$

となる。

ところで、前節で見たように、ϕ は flat direction に沿って真空期待値を取ることができる。真空期待値の取り方を、ゲージ群のカルタン部分を選んでやれば先に求めた flat direction の条件 (2. 36) の解となっている。
ゲージ群を SU(2) で考えると ϕ の真空期待値は

$$< \phi >= \frac{1}{2} a\sigma_3 \qquad (\text{a：複素数，} \sigma_3 \text{：パウリ行列の第 3 成分}) \tag{2. 39}$$

である。
ϕ が、このような真空期待値を持つとき、理論のゲージ群は $SU(2) \to U(1)$ に破れ、massive state と massless state に分かれるのあるが、我々が調べたいのは低エネルギー、つまり真空の構造である。真空は massless 状態で記述され massive state は真空の構造に効いてこないと考えられるので積分して無視する。これは Willson 繰り込みと呼ばれる手法である。またこの真空は、このようにゲージ群が $U(1)$ に壊れているのでクーロン相と呼ばれる。
$SU(2) \to U(1)$ と破れると、Higgs 機構により、 dim(SU(2)) - dim(U(1)) = 2 の自由度、即ち、 ゲージ場のうち 2 つの自由度は massive になる。(2. 39) のような真空期待値を取るときは、A^1_μ,A^2_μ が massive になり、A^3_μ は massless のままである。ただし、flat 条件を満たす真空期待値はゲージ 群を破るが、超対称性は破らないので、超対称性により λ^a,ψ^a,ϕ^a $(a = 1, 2)$ も massive になり、λ^3,ψ^3,ϕ^3 は massless のままである。結局、低エネルギーに効いてくるのは、a=3 の部分だけである。
以上から、低エネルギーでの有効作用がとるべき作用を考える。低エネルギー領域は強結合であるので、プリポテンシャル $\mathcal{F}_{cl}(\mathbf{\Psi})$ は量子補正を受けて、有効作用は先に述べたように一般に解析関数 $\mathcal{F}(\mathbf{\Psi})$ を用いて (2. 37) の形で書かれる。この作用に対して、$\mathcal{F}(\mathbf{\Psi})$ を $\mathbf{\Phi}$ まわりで展開して、$\int d^2\tilde{\theta}$ 積分を実行すると

$$\mathcal{S} = \frac{1}{4\pi} Im \int d^4x \left[d^2\theta \frac{1}{2} \mathcal{F}_{ab}(\mathbf{\Phi}) W^{a\alpha} W^b{}_\alpha + \int d^2\theta d^2\bar{\theta} (\mathbf{\Phi}^\dagger e^{-2gV})^a \mathcal{F}_a(\mathbf{\Phi}) \right] \tag{2. 40}$$

ただし

$$\mathcal{F}_a(\mathbf{\Phi}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{\Phi}^a}\mathcal{F}(\mathbf{\Phi}) \quad , \quad \mathcal{F}_{ab}(\mathbf{\Phi}) = \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{\Phi}^a \partial \mathbf{\Phi}^b}\mathcal{F}(\mathbf{\Phi})$$

となる。
ここで

$$\begin{aligned}(\mathbf{\Phi}^\dagger e^{-2gV})^{a=3} &= (\mathbf{\Phi}^\dagger(1-2gV+\cdots))^3 \\ &= \mathbf{\Phi}^{\dagger 3}\end{aligned}$$

であるから、結局、低エネルギー有効作用は ('3'を省略して)

$$S_{LE} = \frac{1}{4\pi} Im \int d^4x \left[d^2\theta \frac{1}{2}\mathcal{F}''(\mathbf{\Phi}) W^\alpha W_\alpha + \int d^2\theta d^2\bar{\theta} \mathbf{\Phi}^\dagger \mathcal{F}'(\mathbf{\Phi}) \right] \qquad (2.\ 41)$$

となる。これが、我々が興味がある作用であり、最終的に $\mathcal{F}$ の厳密な解を決定する。

2.5 モジュライ空間の計量

前節で見たように、$\mathcal{N}=2$ 理論では真空は連続的に縮退していた。この、ゲージ同値でない、真空の空間 (多様体) をモジュライ空間 $\mathcal{M}$ と呼ぶ。

また古典的には (2. 39) より、

$$u = \frac{1}{2}a^2 \qquad (2.\ 42)$$

である。

次にモジュライ空間 $\mathcal{M}$ の計量を見てみることにする。
一般に、N 次元空間 M_N を標的空間とする非線形シグマ模型のラグランジアンは、N 個のスカラー場 ϕ^i $(i = 1 \ldots N)$

$$\begin{array}{rccc} \phi^i : & x & \longmapsto & \phi^i(x) \\ & \Updownarrow & & \Updownarrow \\ & M_4 & \longmapsto & \mathbf{M_N} \end{array}$$

を用いて

$$\Big((ds)^2 =\Big) G_{ij}(\phi)\partial_\mu \phi^i \partial^\mu \bar{\phi}^j \qquad (2.\ 43)$$

のように与えられる。ここで、$G_{ij}(\phi)$ は標的空間 M_N の計量である。特に $\mathcal{N}=1$ 超対称性があるときには、M_N はケーラー多様体でなければならず、計量 G_{ij} はケーラーポテンシャル $\mathcal{K}(\phi^i, \bar{\phi}^i)$ を用いて、$G_{i\bar{j}} = \partial_{\phi^i}\partial_{\bar{\phi}^j}\mathcal{K}(\phi^i, \bar{\phi}^i)$ のように書かれる。

さらに、$\mathcal{N}=2$ 超対称性があるときは、ケーラーポテンシャルはプリポテンシャル $\mathcal{F}(\phi^i)$ を用いて、$\mathcal{K}(\phi,\phi')=Im\left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\phi^i}\phi^{\dagger i}\right)$ で与えられて

$$G_{i\bar{j}}=Im\frac{\partial^2\mathcal{F}}{(\partial\phi^i)^2} \tag{2. 44}$$

となっている。[1]
実際今の場合、これは以下のように低エネルギー有効作用 (2. 41) の第 2 項を成分で書いてやればわかる。
$\mathbf{\Phi}^\dagger$ は $y^\dagger$ によっていることに注意して

$$\begin{aligned} Im\int d^4xd^2\theta d^2\bar{\theta}\mathbf{\Phi}^\dagger\mathcal{F}'(\mathbf{\Phi}) &= Im\int d^4xd^2\theta d^2\bar{\theta}\left[-\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\phi}\partial_\mu\partial^\mu\phi^\dagger(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})-\cdots\right] \\ &= Im\int d^4x\left[-\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\phi}\partial_\mu\partial^\mu\phi^\dagger\cdots\right] \\ &= Im\int d^4x\left[\mathcal{F}''\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi^\dagger\cdots\right] \end{aligned} \tag{2. 45}$$

従って、確かに $Im\frac{\partial^2\mathcal{F}}{(\partial\phi^i)^2}$ がモジュライの計量となっている。

$$ds^2=Im\mathcal{F}''(a)dad\bar{a}\equiv Im\tau(a)dad\bar{a} \tag{2. 46}$$

特に、古典的には (2. 38) より、$\tau(a)=\tau_{cl}$ となるから、$\tau(a)=\mathcal{F}''(a)$ は有効結合定数と見ることができる。

最後に $\mathcal{M}$ の大局的な構造について考察する。上で見たように、局所的には $\mathcal{M}$ の計量は $ds^2=Im\tau(a)dad\bar{a}$ のように書かれることがわかった。このとき計量の正定値性より

$$Im\tau(a)>0 \tag{2. 47}$$

であるべきである。
ところが、今 $\mathcal{F}$ は正則であるから $Im\tau(a)=Im\mathcal{F}''(a)$ は調和関数であり、最大値の原理より 調和関数の絶対値は最大値を取れない。$Im\tau(a)$ は最小値を取れないので、どこかで必ず $Im\tau(a)<0$ となってしまう。即ち、これは a が座標系としてモジュライ空間 $\mathcal{M}$ の全体を覆うことはできないということを意味している。即ち、次節で見るように $Im\tau(a)<0$ となるような領域では別の座標系を導入してやる必要がある。また、物理的な直感は失われるが、このような煩雑さを避けるためには、ゲージ不変な真空期待値

$$u=<tr\phi^2> \tag{2. 48}$$

を座標としてやればよい。この座標 u は $\mathcal{M}$ の大局的な座標となっている。(Ref [9, 10])

[1] このような多様体は、rigid special ケーラー多様体と呼ばれている。

2.6 双対性

section 2.5 で述べた別の座標を定義して、その意味を調べよう。
$\mathbf{\Phi}$ に対する双対な場を

$$\mathbf{\Phi}_D \equiv \mathcal{F}'(\mathbf{\Phi}) = \frac{d\mathcal{F}(\mathbf{\Phi})}{d\mathbf{\Phi}} \tag{2. 49}$$

で定義する。
そして $\mathcal{F}(\mathbf{\Phi})$ に対する双対な関数 $\mathcal{F}_D(\mathbf{\Phi}_D)$ を

$$\mathcal{F}'_D(\mathbf{\Phi}_D) = \frac{d\mathcal{F}_D(\mathbf{\Phi}_D)}{d\mathbf{\Phi}_D} \equiv -\mathbf{\Phi} \tag{2. 50}$$

とする。
これらの双対変換は単にルジャンドル変換

$$\mathcal{F}_D(\mathbf{\Phi}_D) = \mathcal{F}(\mathbf{\Phi}) - \mathbf{\Phi}\mathbf{\Phi}_D \tag{2. 51}$$

をしているだけである。
この定義を用いると、

$$\tau_D(a_D) = \mathcal{F}''_D(\mathbf{\Phi}_D) = -\frac{d\mathbf{\Phi}}{d\mathbf{\Phi}_D} = -\frac{1}{\tau(a)} \tag{2. 52}$$

である。計量の正定値性より、$Im\tau(a) < 0$ となれないので、$Im\tau(a) \to 0$ の付近で、今定義した双対な座標、$a_D = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial a}$、に移り、計量を $\tau_D(a_D)$ と表すと、計量が負になる点を回避できる。

この双対な座標が持っている意味を見るために系の対称性を調べる。
まずは作用 (2. 41) を $\mathbf{\Phi}_D$ を使って次のように書くと分かりやすい。

$$\mathcal{S}_{LE} = \frac{1}{8\pi} Im \int d^4x d^2\theta \frac{d\mathbf{\Phi}_D}{d\mathbf{\Phi}} W^\alpha W_\alpha + \frac{1}{8\pi i} \int d^4x d^2\theta d^2\bar{\theta} (\mathbf{\Phi}^\dagger \mathbf{\Phi}_D - \mathbf{\Phi}_D^\dagger \mathbf{\Phi}) \tag{2. 53}$$

この作用は

$$\begin{pmatrix} \mathbf{\Phi}_D \\ \mathbf{\Phi} \end{pmatrix} \longrightarrow T \begin{pmatrix} \mathbf{\Phi}_D \\ \mathbf{\Phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{\Phi}_D + b\mathbf{\Phi} \\ \mathbf{\Phi} \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad b \in \mathbf{Z} \tag{2. 54}$$

という T 変換に対して対称であることを以下で示す。
(2. 53) の第 2 項は、もし、b が実数であるなら

$$\begin{aligned} \mathbf{\Phi}^\dagger \mathbf{\Phi}_D - \mathbf{\Phi}_D^\dagger \mathbf{\Phi} \quad &\longrightarrow \quad \mathbf{\Phi}^\dagger (\mathbf{\Phi}_D + b\mathbf{\Phi}) - (\mathbf{\Phi}_D^\dagger + b^\dagger \mathbf{\Phi}^\dagger)\mathbf{\Phi} \\ &= \quad \mathbf{\Phi}^\dagger \mathbf{\Phi}_D - \mathbf{\Phi}_D^\dagger \mathbf{\Phi} \end{aligned}$$

となり、T 変換に対して不変である。
次に第 1 項の変化分は $\delta\left(\frac{d\mathbf{\Phi}_D}{d\mathbf{\Phi}}\right) = b$ より、

$$\begin{aligned} \delta(\text{第 1 項}) = \frac{b}{8\pi} Im \int d^4x d^2\theta W^\alpha W_\alpha \quad &= \quad \frac{b}{16\pi} \int d^4x F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} \\ &= \quad 2\pi b\, n \qquad n \in \mathbf{Z} \quad \text{:インスタントン数} \end{aligned}$$

となる。
作用は経路数積分の中で $e^{i\mathcal{S}}$ の形で出てくるので $b \in \mathbf{Z}$ なら系はこの T 変換に対して不変であることがわかる。
よって

$$T = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad b \in \mathbf{Z} \tag{2. 55}$$

に対して系は不変である。

次に

$$\begin{pmatrix} \mathbf{\Phi}_D \\ \mathbf{\Phi} \end{pmatrix} \longrightarrow S \begin{pmatrix} \mathbf{\Phi}_D \\ \mathbf{\Phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{\Phi} \\ -\mathbf{\Phi}_D \end{pmatrix} \qquad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2. 56}$$

という S 変換に対する系の変換性を考えよう。
作用 (2. 41) の第 2 項は S 変換により、次のように変換される。

$$\begin{aligned} & Im \int d^4x d^2\theta d^2\bar{\theta} \mathbf{\Phi}^\dagger \mathcal{F}'(\mathbf{\Phi}) = Im \int d^4x d^2\theta d^2\bar{\theta} \mathbf{\Phi}^\dagger \mathbf{\Phi}_D \\ & \longrightarrow Im \int d^4x d^2\theta d^2\bar{\theta} (-\mathbf{\Phi}_D^\dagger) \mathbf{\Phi} = Im \int d^4x d^2\theta d^2\bar{\theta} \mathbf{\Phi}_D^\dagger \mathcal{F}'_D(\mathbf{\Phi}_D) \end{aligned} \tag{2. 57}$$

このとき $\mathbf{\Phi}$ は $\mathbf{\Phi}_D$ に書き直されるが、双対な場の意味で元の形に一致している。
次に、第 1 項であるが、これも次のように考えると、双対な場の意味でもとの形に一致していることを示すことができる。即ち、W^α の拘束条件 $Im(D_a W^\alpha) = 0$ に対してルジャンドル未定乗数 Vector Superfield V_D を用いて

$$\begin{aligned} 0 &= \int d^4x d^2\theta d^2\bar{\theta} V_D D_\alpha W^\alpha & (2.\ 58) \\ &= \frac{1}{4} \int d^4x d^2\theta (\bar{D}^2 D_\alpha V_D) W^\alpha \quad \left(\begin{matrix} \int d^4x \text{ の下では } d^2\theta = -\frac{1}{4}\bar{D}^2 \\ \bar{D}W = 0 \quad \text{chiral} \end{matrix} \right. \\ &= -\int d^4x d^2\theta W_{D\alpha} W^\alpha & (2.\ 59) \end{aligned}$$

ただし $W_D \equiv -\frac{1}{4}\bar{D}^2 D_\alpha V_D$ とした。
これを使って第 1 項は経路積分上で次のように書き直せる。

$$\begin{aligned} & \text{作用 (2. 41) の第 1 項} + (2.\ 59) \\ = & \int \mathcal{D}W \mathcal{D}W_D \exp\left[\frac{i}{8\pi} Im \int d^4x d^2\theta \left[\mathcal{F}''(\mathbf{\Phi})(W - \frac{W_D}{\mathcal{F}''})^2 - \frac{1}{\mathcal{F}''(\mathbf{\Phi})} W_D^2 \right] \right] \end{aligned}$$

ここで、W 積分はガウス積分になっているので実行してやると

$$\begin{aligned} &= \int \mathcal{D}W_D \exp\left[\frac{i}{8\pi} Im \int d^4x d^2\theta \frac{-1}{\mathcal{F}''} W_D W_D \right] \\ &= \int \mathcal{D}W_D \exp\left[\frac{i}{8\pi} Im \int d^4x d^2\theta \mathcal{F}''_D(\mathbf{\Phi}_D) W_D W_D \right] \end{aligned} \tag{2. 60}$$

なり、確かに双対な場の意味で元の式の形に一致していることがわかる。但し、最後の等号は $(2.\ 52)$ を使った。
以上から、系は S と T の変換

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in S \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in T \qquad \left(\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^b \quad b \in \mathbf{Z} \right) \tag{2. 61}$$

で作られる群 $SL(2,\mathbf{Z})$ で不変であるから、系は

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_D \\ a \end{pmatrix} &\longrightarrow M \begin{pmatrix} a_D \\ a \end{pmatrix} \\ M &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbf{Z}) \quad (a,b,c,d\ \in \mathbf{Z}, ad-bc=1) \end{aligned} \tag{2. 62}$$

の変換に対して対称性を持つ。
ただし、T 変換は、同じ真空を結ぶ真の対称性であるが、S 変換は双対な場の意味で元に一致しているということから、異なる真空を結んでいるので真の意味での対称性ではないことを注意しておく。

ここで注目すべきことは、$\mathcal{F}''_D = \tau_D = -\frac{1}{\tau}$ であるので、結合定数が逆数になっていることである。つまり、これは S 変換によって強結合と弱結合が入れ替わることを意味している。

ところで、S 変換によって τ は

$$S : \tau = \frac{d\mathbf{\Phi}_D}{d\mathbf{\Phi}} \longrightarrow -\frac{d\mathbf{\Phi}}{d\mathbf{\Phi}_D} = -\frac{1}{\tau} \tag{2. 63}$$

のように変換される。
これは、先程の双対変換 $(2.\ 52)$ と同じである。つまり、$Im\tau(a) < 0$ を回避する別の座標を取ると言うことは、強結合と弱結合を入れ替えると言うことに対応しているのである。a を座標としてうまく記述される領域は、弱結合であり、摂動が有効である領域であったのだが、強結合領域では、このような描像は破綻していると考えられる。そのような領域で新しい座標 a_D を導入してやれば、弱結合で摂動的な取り扱いができるようなるのである。

次に、座標を (a, a_D) で考えたときのモジュライ空間の持つ対称性を考察する。
モジュライ空間の構造は $(2.\ 46)$ より $ds^2 = Im da_D d\bar{a}$ で与えられる。これは、今求めた $SL(2,\mathbf{Z})$ に対して不変になっている。即ち、これは、真空の構造も $SL(2,\mathbf{Z})$ 双対性を持っていることを意味する。つまり、モジュライの一点 u を決めても、座標 (a_D, a) の選び方にはまだ $SL(2,\mathbf{Z})$ の自由度が残っていて、これが後で述べるモノドロミーをなす。逆に言えば、この真空の無限の縮退の自由度が双対性となっているのである。

2.7 量子補正にる $U(1)_R$ の破れ

この節では、古典的にあった $U(1)_R$ 対称性が量子補正によりまず 離散群である $\mathbf{Z}_8$ に破れることを示し、次にそれがスカラー場の真空期待値により $\mathbf{Z}_4$ に破れ、モジュライが $\mathbf{Z}_2$ 対称性を持つことをみる。

先に与えたように、$U(1)_R$ 対称性は $\mathcal{N}=1$ の superfield を使って (2. 8) で表される。これは $\mathcal{N}=2$ の Vector superfield (2. 27) を用いて

$$R: \quad \mathbf{\Psi}(\theta,\tilde{\theta}) \longrightarrow e^{2i\alpha}\mathbf{\Psi}(e^{-i\alpha}\theta, e^{-i\alpha}\tilde{\theta}) \tag{2. 64}$$

と表すことができる。
また、$\mathcal{N}=2$ SUSY では 量子補正は 摂動論的には 1-loop までであり、次節で述べるように、次のようになる。

$$\mathcal{F}_{one\ loop} = \frac{i}{2\pi}\mathbf{\Psi}^2 \ln\frac{\mathbf{\Psi}^2}{\Lambda^2} \tag{2. 65}$$

ここで、Λ は QCD のスケール不変パラメーター
この Vector superfield $\mathbf{\Psi}$ に $U(1)_R$ を作用させると

$$\frac{i}{2\pi}\mathbf{\Psi}^2 \ln\frac{\mathbf{\Psi}^2}{\Lambda^2} \longrightarrow e^{4i\alpha}\left(\frac{i}{2\pi}\mathbf{\Psi}^2 \ln\frac{\mathbf{\Psi}^2}{\Lambda^2} - \frac{2\alpha}{\pi}\mathbf{\Psi}^2\right) \tag{2. 66}$$

のようになる。従って、作用 $\mathcal{S}$ の変化分は以下のようになる。

$$\begin{aligned}
\Delta\mathcal{S} &= Im\frac{1}{4\pi}\int d^4x d^2\theta d^2\tilde{\theta}\left(-\frac{2\alpha}{\pi}\right) tr\ \mathbf{\Psi}^2 \\
&= \frac{1}{4\pi}\left(-\frac{2\alpha}{\pi}\right)(-2)\int d^4x\ tr\ \frac{1}{2}F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} \\
&= 2\pi m\left(\frac{8\alpha}{2\pi}\right) \qquad m \in \mathbf{Z}\ \text{インスタントン数}
\end{aligned} \tag{2. 67}$$

ところで、作用は経路積分で $e^{i\mathcal{S}}$ と出てくるので、$\Delta\mathcal{S} = 2\pi$(整数) であれば系は不変となる。以上から任意の整数 m に対して $\frac{8\alpha}{2\pi}$ が整数であればよいことがわかる。
従って、真空期待値を持たない系では、$U_R(1)$ は

$$\alpha = \frac{2\pi n}{8} \qquad n = 0\ ,\ldots,7 \tag{2. 68}$$

の $\mathbf{Z}_8$ 対称性に破れる。

次に、Vector superfield に含まれる複素スカラー場が真空期待値を持つときを考えよう。
この $\mathbf{Z}_8$ 対称性の下で複素スカラー場は、 $\phi \longrightarrow e^{2i\alpha}\phi = e^{i\pi n/2}\phi$ のように変換されてる。ここで ϕ 真空期待値を持つとこの変換は $e^{2\pi ik/4} < \phi > \quad k = 0,\ldots,3$ となるので、系の

$U(1)_R$ 対称性はさらに $\mathbf{Z}_8 \longrightarrow \mathbf{Z}_4$ に破れるのである。

次に、大局的な座標 u としたときのモジュライの持つ対称性を考える。モジュライ空間の座標 u は $u =< tr\phi^2 >$ で与えられた。このとき $\mathbf{Z}_4$ に対して u は次のように変化する。

$$\begin{aligned} k = 0, 2 \quad &\text{のとき} \quad u \longrightarrow u \\ k = 1, 3 \quad &\text{のとき} \quad u \longrightarrow -u \end{aligned} \tag{2. 69}$$

理論は $k = 0, \ldots, 3$ で不変であったので、モジュライ空間には $\mathbf{Z}_2$ $(u \Leftrightarrow -u)$ 対称性が存在する。

2.8 プリポテンシャル

ここでは、プリポテンシャルのとるべき形を考える。

一般的に β-関数は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \beta &= -\frac{g^3}{16\pi^2}\left[\frac{11}{3}C_2(G) - \frac{2}{3}\sum_i N_i T(R_i) - \frac{1}{3}\sum_i n_i T(R_i)\right] \\ N_i &= \text{Weyl fermion 数} \\ n_i &= \text{複素スカラー場数} \end{aligned} \tag{2. 70}$$

ゲージ群が $SU(N_c)$ で、Hyper multiplet(フレーバー) 数が N_f のときはこれより

$$\beta(g) = -\frac{g^3}{16\pi^2}(2N_c - N_f) \tag{2. 71}$$

となる。
$N_f < 2N_c$ のとき asymptotic free であるから、今我々が考えている pure ゲージ SU(2) は asymptotic free であり、弱結合極限 $u \to \infty$ $(a \to \infty)$ で $u = \frac{a^2}{2}$ は摂動でよい近似となる。
繰り込み群方程式より

$$\frac{1}{g^2} = \frac{1}{4\pi^2}\ln\frac{a^2}{\Lambda^2} \tag{2. 72}$$

を得る。ただし、Λ は $\Lambda = \Lambda_{QCD} \equiv a\ exp\Big(-\frac{8\pi^2}{(2N_c - N_f)g^2(a)}\Big)$ で与えられるスケール不変パラメーターである。
弱結合極限 $(\frac{1}{g^2} \to \infty)$ では, インスタントン項の θ パラメーターは小さいとして無視できるので

$$\tau(a) = \frac{i}{\pi}\left(\ln\frac{a^2}{\Lambda^2} + 3\right) \tag{2. 73}$$

となる。ただし、定数のずれはスケール不変パラメーターを $\Lambda^2 \to e^{-3}\Lambda^2$ ととり直したことによる。このような再定義をしても、やはりスケール不変である。

ところで、プリポテンシャルと計量の間には $(2.\ 46)\mathcal{F}''(a) = \tau(a)$ という関係があったので積分すると、1-loop 量子補正を含んだ弱結合極限のプリポテンシャル $\mathcal{F}_{one-loop}$ が求まり、それは以下のようになる。

$$\mathcal{F}_{one-loop}(a) = \frac{i}{2\pi} a^2 \ln \frac{a^2}{\Lambda^2} \tag{2.\ 74}$$

ただし、一般のスケールでのプリポテンシャル $\mathcal{F}$ は、この $\mathcal{F}_{one-loop}$ にインスタントン補正を受けて

$$\mathcal{F}(\mathbf{\Psi}) = \frac{i}{2\pi}\mathbf{\Psi}^2 \ln \frac{\mathbf{\Psi}^2}{\Lambda^2} + \mathbf{\Psi}^2 \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left(\frac{\Lambda}{\mathbf{\Psi}}\right)^{4k} \qquad c_k\text{:定数} \tag{2.\ 75}$$

の形となる。
インスタントン補正項は、$(2.\ 71)$ より

$$1-\text{インスタントン} \qquad e^{-\frac{8\pi^2}{g^2}} = \left(\frac{\Lambda}{a}\right)^4 \tag{2.\ 76}$$

である。従って、Λ のべきは 4 に比例しなくはならない。
また、弱結合極限 $(a \to \infty)$ で 摂動論に一致して、$\mathcal{F} \to \mathcal{F}_{one-loop}$ となるべきことから

$$c_k = 0 \qquad (\mathrm{k} \leqq 0) \tag{2.\ 77}$$

が決まる。
最後に系の R 不変性から、積分するときに出てくる $R : \int d^2\theta d^2\tilde{\theta} \to \int d^2\theta d^2\tilde{\theta} e^{-4i\alpha}$ をキャンセルしなくてはならないことから最初にかかっている $\mathbf{\Psi}^2$ が決まる。
以上からプリポテンシャルのとるべき形が求まった。

2.9 モノドロミー

section 2.6 で述べたように、$(a_D(u), a(u))$ は u の多価関数である。よって、ある点を囲む閉じた経路にそって u が変化したとき、その点が特異点でないなら $(a_D(u), a(u))$ は 1 周後も同じ値をとるが、その点が特異点なら $(a_D(u), a(u))$ は元に戻らず、ある線形結合で組み替えられる。

この線形変換はモノドロミーと呼ばれるもので表される。
例として、$u \sim \infty$ のときを考えよう。このときは、asymptotic free の性質より摂動表現でよい近似になっているので $(2.\ 42)(2.\ 74)$ より

$$\begin{cases} a(u) = \sqrt{2u} \\ a_D(u) = \dfrac{i}{\pi}\, a \left(\ln \dfrac{a^2}{\Lambda^2} + 1\right) \end{cases} \tag{2.\ 78}$$

である。
u を複素 u 平面で反時計回りに 1 周させる。
(注:ただし、これはリーマン球で見ると、無限点回りに関しては、”時計回り”になっている。)

$$\begin{aligned} u &\longrightarrow e^{2i\pi}\, u \\ a &\longrightarrow -a \\ a_D &\longrightarrow -a_D + 2a \end{aligned} \tag{2. 79}$$

これを (a_D, a) に作用する行列を使って書くと

$$\begin{pmatrix} a_D \\ a \end{pmatrix} \longrightarrow M_\infty \begin{pmatrix} a_D \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_D + 2a \\ -a \end{pmatrix} \tag{2. 80}$$

$$\text{ここで} \quad M_\infty = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in SL(2, Z) \tag{2. 81}$$

と書くことができる。
よって、この説の最初で述べたように、$u \sim \infty$ の回りを 1 周すると元の (a_D, a) に戻っていないので、$u \sim \infty$ はモジュライ空間の特異点となっている。

2.10 BPS 質量公式

この節では、質量と電荷 (磁荷) と $(a_D(u), a(u))$ を関係づける公式を与える。

$\mathcal{N} = 2$ の代数に現れる Central charge Z と質量には古典的に次の不等式の関係がある。

$$M \geqq \sqrt{2}\,|\mathbf{Z}_{cl}| \tag{2. 82}$$

$$\text{ここで} \quad \mathbf{Z}_{cl} = a(n_e + \tau_{cl}\, n_m) \text{ であり } \begin{cases} n_e : \text{電荷} \\ n_m : \text{磁荷} \end{cases}$$

これは、BPS 質量公式と呼ばれる。(Ref [4])

ところで、今考えている理論は元々の系は massless であり、質量はすべて Higgs 機構によって得たと考えている。このような $\mathcal{N} = 2$ 超対称性理論は section 2.1 で与えたような 4 自由度の multiplet によって構成される。そのような multiplet を ‘short‘ もしくは ‘small‘ と呼ぶ。(逆に元々、質量があるとするときは 16 自由度の multiplet によって構成され、‘long‘もしくは ‘large‘と呼ぶ。)
Higgs 機構で質量を持った状態は、short multiplet でないとならない。なぜなら、Higgs 機構は自由度を変えないという要請があるので、4 自由度から 16 自由度へ移れないからである。

今考えている short 表現のときは、表現論から BPS 質量公式の等号が成立する。(Ref [5])
よって、質量は Central charge を用いて次のように正確に求まる。

$$M = \sqrt{2}\,|\mathbf{Z}_{cl}| \tag{2. 83}$$

量子論的にこの式はどう変化するであろうか?
まず、等号は表現論により決まっていたので short multiplet で考えている限り成立しなくてはならない。
次に $\mathbf{Z}$ であるが、磁荷を持つ粒子がないとすると $\mathbf{Z} = n_e\, a$ であるが、系が持つ双対性は a_D と a の入れ替えに対して理論は同等であることを保証している。従って、双対な描像では $\mathbf{Z} = n_m\, a_D$ となると思われる。そして、実際モノポールはこの式を満たす。(Ref [2])
よって、一般の dayon では

$$\mathbf{Z} = a\, n_e + a_D\, n_m \tag{2. 84}$$

となると思われる。確かにこの式は、$a_D = \frac{d\mathcal{F}(a)}{da}$ だったので古典極限では $a_D = a\tau_{cl}$ となり (2. 82) に帰着する。
よって、量子論的な BPS 質量公式は

$$M = \sqrt{2}\,|\mathbf{Z}| \tag{2. 85}$$

$$\mathbf{Z} = (n_m\ ,\ n_e)\begin{pmatrix} a_D \\ a \end{pmatrix} \tag{2. 86}$$

で与えられる。

ところで質量スペクトラムは観測量であるので、同じ真空にある質量スペクトラムは経路の取り方で変化すべきものではない。よって双対変換 (2. 62)、もしくはモノドロミーに対して質量スペクトラムは不変であるべきなので charge は

$$(n_m\ ,\ n_e) \longrightarrow (n_m\ ,\ n_e)M^{-1} \qquad (M \in SL(2,Z)) \tag{2. 87}$$

と変換される。

2.11 特異点の数

section 2.5 で述べたように、モジュライの計量の正定値性のためには、特異点が必要であった。section 2.9 で見たように $u \sim \infty$ は確かに特異点になっていたが、これだけだろうか?

branch cut には始点と終点が必要なため、少なくとも後 1 つは特異点が必要である。しかし、もし後 1 つしか無いとすると、今、モジュライには $\mathbf{Z}_2$ 対称性があったので、そ

れは $u=0$ の点でないとならない。
このとき、$u=0$ 回りのモノドロミーは 、(特異点の無いところでは、経路を変形できるので)$u\sim\infty$ 回りのものと一致する。すると、$(2.\ 80)$ で見たように a^2 はどんなモノドロミーに対しても、影響を受けないので大局的に $u=\frac{1}{2}a^2$ を良い座標と取れてしまう。これは、計量の正定値性に矛盾するので、特異点が 2 つのというのは、うまくいかない。

よって特異点が 3 つ以上あるはずある。以後、この最小 3 つの特異点であると仮定する。
このとき、$\mathbf{Z}_2$ 対称性により、$u=\infty, u_0, -u_0\ (u_0\neq 0)$ が特異点となる。

ここで、注意として、古典的には $u=0$ は特異点であると思われる。なぜなら 古典的には $u=\frac{1}{2}a^2$ より $a=0$ である。つまり、Higgs 機構が起きてない点である。今までの、モジュライに関する議論はすべて、Higgs 機構が起きて質量項を積分した後のゲージ $U(1)$ に限っている。よって、$a=0$ でゲージ $SU(2)$ に回復するところではこの描像は破綻しているはずである。
では、この $u=0$ の点を特異点でないとする仮定は、なぜ正当なのであろうか?
それは $a\sim\infty$ は弱結合極限であり、asymptotic free の性質により古典的にうまく記述できていたが、$a\sim 0$ は強結合領域にあり、そこでは、$u=\frac{1}{2}a^2$ という記述が意味を持っていないからである。よって $u=0$ の点は古典的な議論が意味を持たない。だから $a=0 \nLeftrightarrow u=0$ となっていても良いのである。
さらに言えば、量子効果により $a=0$ という点がモジュライからなくなりゲージ対称性が回復する点が存在しなくなっていても良い。実は今のモデルはそうなっている。

2.12 特異点の意味

この節では $u=\pm u_0$ の強結合領域での特異点では何が起きているのか考える。

モジュライは massless の粒子で記述されているので、今まで考えていた光子だけで記述されているなら、特異点はないはずである。したがって、何か別のものが新たに特異点で massless となり、それで今までの Wilson 繰り込みでの議論が破綻していると思われる。
前節で議論したように古典的には、$u=a=0$ で対称性が回復することによりゲージボゾンが massless となっていたと考えられた。よって、やはり $u=\pm u_0$ でもゲージボゾンが massless になっていると考えるとどうであろうか?
今考えている理論は asymptotic free 理論なので 、赤外極限 $u=\pm u_0$ で conformal 不変な固定点があるとすると、そこではオペレーター $tr\phi^2$ が次元を持っていてはならない。よって $tr\phi^2$ は単位オペレーターか 0 でないとならないが、今我々は計量は定数でないと

考えているので単位オペレーターではない。さらに、特異点が 3 つであるという仮定、すなわち、$u = \pm u_0 (\neq 0)$ の下ではオペレーター $tr\phi^2$ は 0 にもなりえないので、この特異点は massless のゲージボゾンには相当しえない。
従って他の可能性を探らなくてはならないが、自発的に破れたゲージ論では 磁荷を運ぶソリトン解、つまりモノポールが存在することが知られている。よって、磁荷 1 のモノポールが massless になっていると考える。
以下、$u = u_0$ の点でモノポールが massless となっているとして、理論に矛盾がないことを確かめる。
BPS 質量公式 (2. 84) からモノポールの質量は

$$M = \sqrt{2}\,|a_D| \tag{2. 88}$$

よって、モノポールが massless になるのは $a_D = 0$ の点である。
先に議論したように、ゲージボゾンは新たに massless となり得なかったので、モノポールは $spin \leq \frac{1}{2}$ の multiplet つまり、hyper multiplet $M, \widetilde{M}$ で表される。また、磁荷を運ぶのは magnetic phton $\mathbf{\Phi}_D, W_D$ であるから、双対な描像でみると、$\mathbf{\Phi}_D, W_D, M, \widetilde{M}$ で書かれる 超対称 QED になっている。
モノポールが特異点で massless になっていると考えたときの真空の構造を調べるために、モノドロミーを調べる。まずは、β-関数 (2. 70) より

$$\beta(g_D) = \frac{g_D^3}{8\pi} \tag{2. 89}$$

と求まる。$u \sim \infty$ のときと同様繰り込み群方程式を解いてやると

$$\tau_D = -\frac{da}{da_D} = -\frac{i}{\pi}\ln a_D \tag{2. 90}$$

と、双対な計量が求まる。これを $a_D \sim 0$ で積分してやると

$$a \approx a_0 + \frac{i}{\pi} a_D \ln a_D \qquad (a_0\text{:定数}) \tag{2. 91}$$

と a が分る。次に、a_D は u_0 の近傍で $a_D \sim 0$ のよい座標となっているべきであることから (a_D, a) をモジュライの座標 u を使って書くと

$$\begin{cases} a_D \approx c_0(u - u_0) \\ a \approx a_0 + \dfrac{i}{\pi} c_0 (u - u_0)\ln(u - u_0) \end{cases} \tag{2. 92}$$

となる。
これより $u = u_0$ でのモノドロミーが計算できて

$$\begin{pmatrix} a_D \\ a \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a_D \\ a - 2a_D \end{pmatrix} = M_{u_0} \begin{pmatrix} a_D \\ a \end{pmatrix} \quad M_{u_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \tag{2. 93}$$

である。
すると、今特異点は 3 点しかないので、もう 1 つの特異点である $u = -u_0$ でのモノドロミーを決定することができる。なぜなら、3 つすべての特異点を回るということは、リーマン球の反対側から見ると、どの特異点も回ってないことと同じだからである。M_∞ だけリーマン球で見ると時計回りだったことに注意して

$$M_\infty = M_{u_0} M_{-u_0} \tag{2. 94}$$

より、$u = -u_0$ でのモノドロミーが求まる。

$$M_{-u_0} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \tag{2. 95}$$

ところで、section 2.10 の最後で述べたように、モノドロミーは 1 周してもとの真空に戻って来ているので、質量スペクトラムは不変である。
しかし、そのとき (2. 87) のように charge が変換されるので、一般にその粒子の名前 (磁荷、電荷) は変化する。ただし、特異点近傍のよい座標にいる範囲で特異点に近付くときに、近づき方の違いでは、その点を特徴づけている massless 粒子の名前は変わらないはずである。
よって、

$$(n_m\ ,\ n_e)M^{-1} = (n_m\ ,\ n_e) \qquad (= (n_m\ ,\ n_e)M) \tag{2. 96}$$

となるものが massless である。(確かに モノポール (1,0) は M_{u_0} の固有値 1 の左固有値ベクトルとなっている。)
M_{-u_0} の固有値 1 の左固有値ベクトルは (1,-1) であるから、$u = -u_0$ の特異点では $(n_m, n_e) = (1, -1)$ のダイオンが massless となっている。

補足
今我々は、$u = u_0$ の特異点をモノポールが massless として議論を始めたが、何が massless として始めるかには任意性がある。なぜなら、特異点に近づく前に他の特異点をまわっているとしても、その特異点にいる観測者にはわからないからである。一般に (2. 94) の条件を満たしていればいい。
またそのときの massless 粒子は

$$(n_m\ ,\ n_e)M = (n_m\ ,\ n_e) \qquad M = \begin{pmatrix} 1 + 2n_m n_e & 2n_e^2 \\ -2n_m^2 & 1 - 2n_m n_e \end{pmatrix} \tag{2. 97}$$

で与えられる。ただし、$u \sim \infty$ でのモノドロミーは (2. 80) であるが、これはこの式では表すことができない。なぜなら $u \sim \infty$ は今考えているように hyper multiplets が massless になる特異点には対応してないからである。

2.13　モデルの解

こうして、各特異点でのモノドロミーが求まった。

$$M_\infty = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad M_{u_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_{-u_0} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \tag{2. 98}$$

このモノドロミーに対する変換でモジュライの構造は不変である。
実はこのモノドロミーは

$$M_\infty, M_{u_0}, M_{-u_0} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (mod\ 2) \tag{2. 99}$$

になっている。
このように

$$\Gamma(2) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\mathrm{mod}\ 2) \quad ad - bc = 1\ a, b, c, d \in \mathbf{Z} \tag{2. 100}$$

となっている群を $\Gamma(2)(setSL(2, Z))$ と呼ぶ。
また、計量の正定値性より $Im\tau > 0$ であるから、複素 τ-平面は上半面 H の値しかとれない。よって、結局 τ をパラメトライズするのは $H/\Gamma(2)$ である。

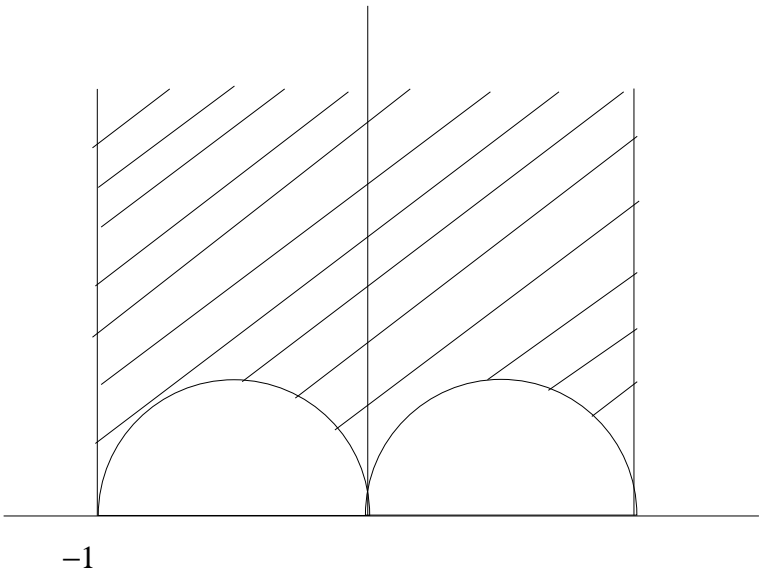

Figure 1: H/Γ(2)

これによってパラメトライズされる、つまり、このτをモジュラーパラメーターとする曲線族は($u_0 = \Lambda^2$と規格化して)

$$E_u \ : \ y^2 = (x - \Lambda^2)(x + \Lambda^2)(x - u) \quad (x, y \in \mathbf{C}) \tag{2. 101}$$

で与えられる。
これは、複素トーラスをなしていて、確かに$u = \infty, \pm\Lambda^2$はトーラスがつぶれる特異点を表している。
このように、この楕円曲線のモジュラーパラメーターτ_uが我々の知りたい計量τであると考えると、実際にこれまで得られたモジュライの構造を再現できることを以下で示す。
• $\mathbf{Z}_2$対称性
(2. 101)のE_uは

$$\left\{ \begin{array}{rcccl} \omega & : & (u, x, y) & \longrightarrow & (-u, -x, iy) \\ \omega^2 & : & (u, x, y) & \longrightarrow & (u, x, -y) \\ \omega^3 & : & (u, x, y) & \longrightarrow & (-u, -x, -iy) \\ \omega^4 & : & (u, x, y) & \longrightarrow & (u, x, y) \end{array} \right. \tag{2. 102}$$

という、$\mathbf{Z}_4$対称性を持っている。しかし、パラメーター u だけに関して見ると$\mathbf{Z}_2$対称性になっていて、これは secition 2.7 で求めた$U(1)_R$対称性の破れによりモジュライの持つ$\mathbf{Z}_2$対称性に一致している。

- 漸近形

モジュラーパラメーターとモジュライの計量を同一視したとき、先に摂動論で求めていた漸近形に一致することを確かめる。
複素トーラス E_u の独立な 2 つの周期は、パラメーター u が特異点回りに移動すると $\Gamma(2)$ 群によって変換されることが知られている。したがって、適当な微分 1 形式を持ってきて、それを複素トーラス E_u の 2 つの周期で周期積分してやれば、(a_D, a) と同じ変換性を持つことになる。
複素トーラス E_u の微分 1 形式 $H^1(E_u, C)$ は 2 次元なので、2 つの独立な基底によって張られる。
たとえば

$$\lambda_1 = \frac{dx}{y} \quad , \quad \lambda_2 = \frac{xdx}{y} \tag{2. 103}$$

λ_1 は極を持たない。λ_2 は無限遠に 2 位極を持ち、留数は 0 である。よってこれらは留数を持たないので、周期積分したときの経路を変えても定数のずれを出さない。(a_D, a) もモノドロミー行列だけの変換を受けて、定数のずれは出さなかったので、これらの適当な線形結合を 2 つのサイクルでそれぞれ積分したものは、(a_D, a) の資格を持つ。

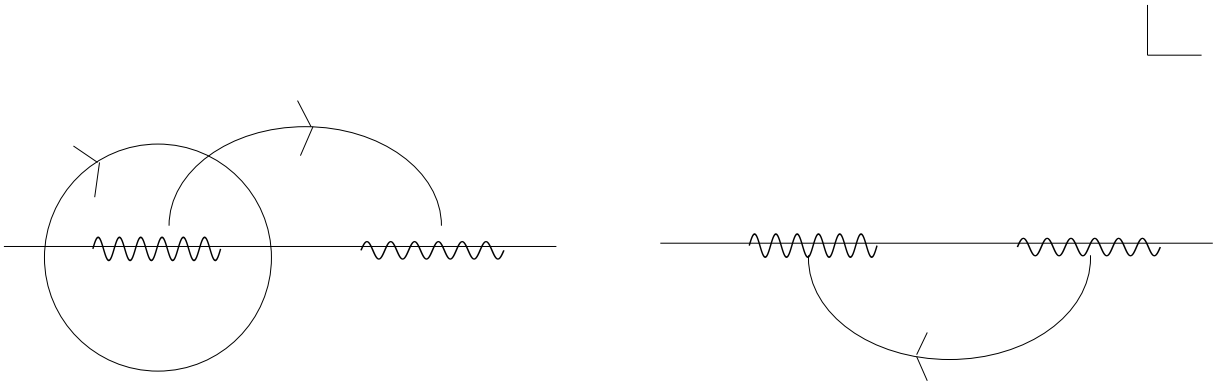

Figure 2: 周期

モジュラーパラメーターは経路を Figure 2 のようにとると、λ_1 を用いて

$$\tau_u = \frac{b_2}{b_1} \qquad b_i = \oint_{\gamma_i} \lambda_1 \quad \gamma_1 = \alpha, \gamma_2 = \beta \tag{2. 104}$$

で与えられる。この τ_u は Figure 1 の値をとるので $Im\tau_u > 0$ を満たす。
今、モジュライの計量とモジュラーパラメーターを同一視しているので、次の等式が成り

立つ。

$$\tau = \frac{da_D/du}{da/du} = \frac{b_1}{b_2} = \tau_u \tag{2. 105}$$

これより、分母と分子を比較すると

$$\begin{cases} \dfrac{da_D}{du} = -\dfrac{\sqrt{2}}{4\pi} b_1 \\ \\ \dfrac{da}{du} = -\dfrac{\sqrt{2}}{4\pi} b_2 \end{cases} \tag{2. 106}$$

ただし、比例係数はすぐ後で求める漸近形を満たすように決めた。
ここで $\frac{d\lambda}{du} = -\frac{\sqrt{2}}{4\pi}\lambda_1$ を満たすように微分 1 形式 λ をとると

$$\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2\pi}\frac{dx\sqrt{x-u}}{\sqrt{x^2-\Lambda^4}} = \frac{\sqrt{2}}{2\pi}(\lambda_2 - u\lambda_1) \tag{2. 107}$$

この λ をつかって

$$\begin{cases} a = \oint_\alpha \lambda = \dfrac{\sqrt{2}}{\pi}\displaystyle\int_{-\Lambda^2}^{\Lambda^2} \frac{dx\sqrt{x-u}}{\sqrt{x^2-\Lambda^4}} \\ a_D = \oint_\beta \lambda = \dfrac{\sqrt{2}}{\pi}\displaystyle\int_{\Lambda^2}^{u} \frac{dx\sqrt{x-u}}{\sqrt{x^2-\Lambda^4}} \end{cases} \tag{2. 108}$$

となる。
確かに λ は λ_1 と λ_2 の線形結合で書けていて、(a_D, a) はその周期積分で表されている。
この厳密解 (2. 108) を $u \sim \infty$ で近似すると

$$\begin{cases} a \approx \sqrt{2u} \\ \\ a_D \approx i\dfrac{\sqrt{2u}}{\pi}\ln u \end{cases} \tag{2. 109}$$

$u \sim \Lambda^2$ で近似すると

$$\begin{cases} a \approx \dfrac{i}{2}(u-\Lambda^2) \\ a_D \approx \dfrac{4}{\pi} - \dfrac{1}{2\pi}(u-\Lambda^2)\ln(u-\Lambda^2) \end{cases} \tag{2. 110}$$

これらは、先に摂動論により求めていた (2. 78)(2. 92) の形に一致する。また、$u \sim -\Lambda^2$ での正当性はモジュライの $\mathbf{Z}_2$ 対称性より保証される。

こうして、(2. 101) はモジュライが持つべき構造をすべて満たすので厳密解であると示された。
モジュライの厳密解が分かると、今見たように正確な (a_D, a) が求まり、$a_D = \frac{d\mathcal{F}(a)}{da}$ であるので、積分すればインスタントン補正なども含んだ正確なプリポテンシャル $\mathcal{F}$ が求められる。

2.14 $\mathcal{N}=1$ へ

こうして、$\mathcal{N}=2$ 超対称 pure ゲージ SU(2) Yang-Mills 理論の Coulomb 相の真空が求まったので、途中でのいくつかの仮定は正しかったと言える。そこで、モノポールが massless 粒子として現れている特異点で、$\mathcal{N}=2$ Vector multiplet に含まれる $\mathcal{N}=1$chiral multiplet だけに質量を与えて $\mathcal{N}=2$ から $\mathcal{N}=1$ に破ったときどのようなことが起きているのか調べる。

massless モノポールのある点の近傍では、双対な描像で書くと摂動でうまく記述できる。このとき、モノポールは section 2.12 で述べた様に hyper multiplet$(M, \widetilde{M})$ で表される。
$\mathcal{N}=1$ に破ったラグランジアンは

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{4\pi} Im\left[\int d^2\theta d^2\bar{\theta}\tau_D \bar{\mathbf{\Phi}}_D \mathbf{\Phi}_D + \int d^2\theta \frac{1}{2}\tau_D W_D W_D\right] \\ &\quad + \int d^2\theta d^2\bar{\theta}\left(\bar{M}e^{2V_D}M + \overline{\widetilde{M}}e^{-2V_D}\widetilde{M}\right) + Re\int d^2\theta \hat{W} \qquad (2.\ 111)\\ \hat{W} &= \sqrt{2}\mathbf{\Phi}_D M\widetilde{M} + m\, U(\mathbf{\Phi}_D) \qquad (2.\ 112)\end{aligned}$$

で表される。
$\mathcal{N}=1$ Chiral multiplet に質量を与え、$\mathcal{N}=2$ から $\mathcal{N}=1$ に破る項である $U(\mathbf{\Phi}_D)$ はオペレーター $tr\mathbf{\Phi}^2$ を低エネルギーで Chiral superfield U として表したもので、その最初の成分、スカラー場、の真空期待値は

$$u =< tr\phi^2 > \qquad (2.\ 113)$$

である。
スーパーポテンシャル $\hat{W}$ が正確な表式であることは後で述べる section 3.1 の非摂動論的非繰り込み定理から従う。
(2. 111) の flat direction は $\mathcal{N}=2$ に対して section 2.3 で求めたように、bosonic potential V = 0 となる条件を求めると

$$\begin{aligned}a_D &= 0 \qquad (2.\ 114)\\ M = \widetilde{M} &= \left(-m\frac{u'(0)}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \equiv \frac{v}{\sqrt{2}} \qquad (2.\ 115)\end{aligned}$$

で与えられる。
各粒子の質量を調べると

$$\begin{pmatrix}\text{(massless chiral multiplet)}\times 2\\ \text{(massless vector multiplet)}\times 1\end{pmatrix} \overset{\text{Higgs 機構}}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix}\text{(massive chiral multiplet)}\times 1\\ \text{(massive vector multiplet)}\times 1\end{pmatrix} \qquad (2.\ 116)$$

となっていて、すべての粒子は質量 $\sqrt{2}v$ を持つ。すなわち、質量ギャップが存在する。モノポールが真空期待値を持つので今起きてている Higgs 機構は、磁気的な Higgs 機構である。よって、このモノポール凝縮はマイスナー効果によって電荷の閉じ込めを引き起こすことを解析的に示せた。

$\mathcal{N} = 2$SUSY の真空は、平坦方向の無限縮退を持っていた。ところが、$\mathcal{N} = 1$ ではこの縮退はほぼ解けて、モノポール凝縮の点 $a_D = 0$、と $\mathbf{Z}_2$ によって交換するダイオン凝縮の点,$a - a_D = 0$ の 2 点しか残らない。つまり、$\mathcal{N} = 1$SUSY では $\mathbf{Z}_2$ で結ばれる 2 つの真空しか残らないのである。

3　$\mathcal{N}=1$ 超対称性の世界における双対性

3.1　Techniques

この節では、量子補正を受けた super potential の解析に必要な Techniques を紹介する。(Ref [8])

一般に有効 super potential は次の形で与えられる。

$$\int d^2\theta W_{eff}(Q_r, g_I, \Lambda) \tag{3. 1}$$

ここで、Q_r は Chiral superfield

$$Q_r = \phi_r + \theta\psi_r + \theta\theta F_r \qquad (r = 1, 2, \ldots)$$

$g_I \quad (I = 1, 2, \ldots)$ は結合定数 (質量パラメーターも含む)。
Λ はスケール不変パラメーター。

この有効 super potential に対して以下の条件が課される。

(1) 拡張された対称性と選択則
結合定数にも仮想的な対称性を考えてやることにより、ラグランジアンにより大きな対称性を持たせることができる。このとき、この対称性に対して有効ラグランジアンも不変であるべきというものである。このときの大きい対称性を拡張された対称性と呼び、拡張された対称性に対する結合定数の量子数の選び方を選択則と言う。

(2) 正則性
超対称性を持つ理論では、super potential は Chiral superfield Q_r と結合定数 g_I のみで構成されていて、$Q_r^\dagger$ や $g_I^\dagger$ を含まない。

(3) 弱結合極限
W_{eff} は弱結合極限では、古典的な super potential に一致しなくてはならない。これは、弱結合では摂動が有効なので自然であると思われる。

以上の条件は摂動によらず成立すべきことなので、非摂動の有効 super potential を解析する際に重要な手がかりとなる。実は、これらの条件は強力で、これらの条件だけで有効 super potential が決まることも多い。

例として、Wess-Zumino Model を考えてみよう。
tree の super potential は

$$W_{tree} = m\phi^2 + g\phi^3 \tag{3. 2}$$

で与えられる。
これに (1) の選択則を使って以下のように量子数を課すと、$U(1) \times U(1)_R$ の拡張された大局的対称性を持たせる。

	$U(1)$	$U(1)_R$
W	0	2
ϕ	1	1
m	-2	0
g	-3	-1

(3. 3)

ただし W は super potential 。
この拡張された対称性を有効 super potential も持たなくてはならないので、(2) の正則性の条件より有効 super potential は

$$W_{eff} = m\phi^2 \, f(t) \qquad t \equiv \frac{g\phi}{m} \tag{3. 4}$$

で書くことができる。
ここで $f(t)$ は charge を持っていない任意関数である。
これに対して $\frac{g}{m}\phi \ (= t)$ を任意に保ったまま $m \to 0 \, , g \to 0$ という弱結合極限をとると、(3) の条件より $W_{eff} \to W_{tree}$、つまり弱結合極限で

$$f(t) = 1 + t \tag{3. 5}$$

とならなくてはならない。
ところが今は t を任意に保っていたので $f(t)$ は弱結合極限と無関係にこの形をとる。
よって、m、g の全領域で有効 super potential は

$$W_{eff} = m\phi^2 + g\phi^3 \tag{3. 6}$$

となる。$\mathcal{N} = 1$ の super potential が摂動論的には繰り込みを受けないという非繰り込み定理はよく知られいるが、Wess-Zumino Model に対しては、非摂動論的にもやはり繰り込みを受けないということが確認できた。

3.2 Flat Direction

我々はゲージ群 $SU(N_c)$ でフレーバー対称性 $SU(N_f)_{L,R}$ に対して、以下のように Chiral superfield が変換される Vector like Model を考える。ただし、$N_c > 2$ とする。

	$G = SU(N_c)$	$SU(N_f)_L$	$SU(N_f)_R$
Q	N_c	N_f	1
$\widetilde{Q}$	$\overline{N_c}$	1	$\overline{N_f}$

(3. 7)

$(Q, \widetilde{Q})$ はクォークに相当する。もちろん、このほかに Yang-Mills 作用を作る Field strength superfield W_α も存在する。
もし、質量項がなければ 、これらのカイラル場が真空期待値を持つ flat direction、すなわち Higgs branch が存在する。これを以下のようにして求めることができる。
section 2.1 で与えた $\mathcal{N} = 2$ 理論のラグランジアン (2. 17) から、adjoint Chiral superfield Φ に関する項を除けば、今考えている $\mathcal{N} = 1$ 理論の Model になるので、スカラー場のポテンシャル V の真空期待値は

$$V = \frac{1}{2g^2} D^2 + \sum_i |F_i|^2 = \frac{1}{2}(Q^\dagger T^a Q - \widetilde{Q} T^a \widetilde{Q}^\dagger)^2 \tag{3. 8}$$

であることがわかる。ここで 補助場の E-L 方程式より

$$D = -(Q^\dagger T^a Q - \widetilde{Q} T^a \widetilde{Q}^\dagger) \tag{3. 9}$$

$$F_i = 0 \tag{3. 10}$$

を使った。
ただし、T^a はゲージ群の生成子である。
ただし、ここで使っている Q、$\widetilde{Q}$ は Chiral superfield Q、$\widetilde{Q}$ の第 1 成分のスカラー場の意味で使っている。
これより、flat direction は $D = 0$ であれば良いことがわかる。では、$D = 0$ の解を求めるために

$$A \equiv (QQ^\dagger - \widetilde{Q}^\dagger \widetilde{Q}) \tag{3. 11}$$

とする。ただし、フレーバーの足は縮約してあり、ゲージの足は浮いているものとする。
従って、 A は $N_c \times N_c$ 行列である。
$D = 0$ の条件は A を用いて表すと

$$0 = tr\ T^a A \tag{3. 12}$$

と書くことができる。
今考えているゲージ群は半単純群なので $tr\ T^a = 0$ であるから

$$A \propto I \qquad I : N_c \times N_c \text{ 単位行列} \tag{3. 13}$$

が flat 条件となる。
以下で、Q、$\widetilde{Q}$ がこの解を満たすとき、いったいどのような形をとるかを、フレーバーの数によって場合分けして考察することにする。

- $N_f < N_c$ のとき

Q、$\widetilde{Q}$ をゲージ対称性とフレーバー対称性と flat 条件を使って対角化して[2]

$$< Q >= \overbrace{\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_f \end{pmatrix}}^{N_f} \Bigg\} N_c \qquad < \widetilde{Q}^\dagger >= \overbrace{\begin{pmatrix} \tilde{a}_1^\dagger & & \\ & \ddots & \\ & & \tilde{a}_f^\dagger \end{pmatrix}}^{N_f} \Bigg\} N_c \tag{3. 14}$$

とすると、flat 条件 (3. 13) は

$$A = \begin{pmatrix} |a_1|^2 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & |a_f|^2 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} |\tilde{a}_1|^2 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & |\tilde{a}_f|^2 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \propto I \tag{3. 15}$$

より、$A = 0$ とならなくてはならない。従って

$$< Q >=< \widetilde{Q}^\dagger >= \overbrace{\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_f \end{pmatrix}}^{N_f} \Bigg\} N_c \tag{3. 16}$$

•$N_f \geqq N_c$ のとき
同様にして、flat 条件は

$$< Q >= \overbrace{\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_c \end{pmatrix}}^{N_f} \Bigg\} N_c \qquad < \widetilde{Q}^\dagger >= \overbrace{\begin{pmatrix} \tilde{a}_1^\dagger & & \\ & \ddots & \\ & & \tilde{a}_c^\dagger \end{pmatrix}}^{N_f} \Bigg\} N_c \tag{3. 17}$$

ただし、$|a_i|^2 - |\tilde{a}_i|^2 = c$ (c は i によらない実数)。

このようにして、flat 条件を満たす解を求めることができた。ここで見たように N_f の大きさによって flat 条件を満たす解は異なることを注意しておく。

[2] ゲージ対称性とフレーバー対称だけでは $Q, \widetilde{Q}$ の内、一方しか対角化できない。残りの対角化を行う際に flat 条件を用いている。ただし、この段階では flat 条件の自由度は使い切っておらず、対角成分に対する条件が残っている。

3.3 古典的なモジュライ空間

モジュライ空間は section 2.5 で述べたように独立なゲージ不変なパラメーターで記述される。asymptotic free 理論では低エネルギー領域で閉じ込めが起きていると考えると、ちょうどこのモジュライのパラメーターが低エネルギー領域での基本的な粒子になっていると考えられる。
このモジュライを記述するパラメーターも flat direction のときと同様 フレーバー数 N_f の大きさによって場合分けされる。

- $N_f < N_c$ のとき

$$\text{‘メソン‘} \quad M^i{}_j = Q^i \widetilde{Q}_j \qquad i,j = 1,\ldots,N_f \tag{3. 18}$$

但し、$M^i{}_j$ の i,j の足はフレーバーの足であり、ゲージの足は縮約している。

- $N_f \geqq N_c$ のとき

$$\text{‘メソン‘} \qquad M^i{}_j = Q^i \widetilde{Q}_j \qquad i,j = 1,\ldots,N_f \tag{3. 19}$$

$$\text{‘バリオン‘} \qquad B^{i_1\cdots i_{N_c}} = \frac{1}{N_c!}\epsilon_{a_1\cdots a_{N_c}} Q^{i_1 a_1}\cdots Q^{i_{N_c} a_{N_c}} \tag{3. 20}$$

$$\widetilde{B}_{i_1\cdots i_{N_c}} = \frac{1}{N_c!}\epsilon^{a_1\cdots a_{N_c}} \widetilde{Q}_{i_1 a_1}\cdots \widetilde{Q}_{i_{N_c} a_{N_c}} \tag{3. 21}$$

$$\begin{pmatrix} i,j \text{ はフレーバの足} \\ a_i \text{ はゲージの足} \end{pmatrix}$$

がゲージ不変で独立なパラメーターとなっている。

このように、$N_f < N_c$ ではバリオンが存在できないので、モジュライの次元が $N_f = N_c$ で不連続に大きくなっている。

$N_f \geqq N_c$ のとき、メソン M とバリオン $B, \widetilde{B}$ が古典的に満たすべき拘束条件が存在する。以下ではその条件を求める。
メソンとバリオンの真空期待値は (3. 17) を使うと

$$M \;=\; Q\widetilde{Q} = \overbrace{\begin{pmatrix} a_1\tilde{a}_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & a_{N_c}\tilde{a}_{N_c} & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}}^{N_f} \Bigg\} N_f \tag{3. 22}$$

$$B^{1\cdots N_c} = a_1 a_2 \cdots a_{N_c} \tag{3. 23}$$
$$\widetilde{B}_{1\cdots N_c} = \tilde{a}_1 \tilde{a}_2 \cdots \tilde{a}_{N_c} \tag{3. 24}$$

と表すことができる。
これに対して、一般の $a_i, \tilde{a}_i$ のとき、

$$(M \text{ の } 0 \text{ でないすべての固有値の積}) = B^{1\cdots N_c}\widetilde{B}_{1\cdots N_c} \quad (= a_1\tilde{a}_1 \cdots a_{N_c}\tilde{a}_{N_c}) \tag{3. 25}$$

という等式が成立している。また $N_f \times N_f$ 行列 M のランクは (3. 22) を見てもわかるように

$$rank\ M \leqq N_c \tag{3. 26}$$

でなくてはならない。
これら (3. 25)(3. 26) が古典的なモジュライ空間に対する拘束条件である。

最後に、古典的なモジュライの持つ特異点について考察する。
一般の $a_i, \tilde{a}_i$ のときゲージ群は完全に破れている。しかし、$a_i, \tilde{a}_i$ の値によっては、ゲージ対称性が回復する。例えば $a_i = \tilde{a}_i = 0$ のとき、Higgs 機構は働かずゲージ対称性は完全に回復している。すると、massless ゲージボゾンが新たな massless 粒子として出て来るが、これは $\mathcal{N} = 2$ 超対称性のときと同様にそのような点は特異点となっていると言うことを意味している。
今の例、$a_i = \tilde{a}_i = 0$ はモジュライ空間のパラメーターを使って言うと、 $M = B = \widetilde{B} = 0$ となっている点に相当する。このような点は、確かに古典的拘束条件 (3. 25)(3. 26) を満たすので、古典的モジュライ上の点である。従ってモジュライの原点は古典的には特異点となっているということが言える。

3.4 系の持つ対称性

この節では系の持つ対称性について整理する。

super potential を持たない系に存在する古典的な大局的対称性は
$SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R \times U(1)_A \times U(1)_X \times U(1)_B$
のようになっている。
これらの大局的対称性の $U(1)$ に対するそれぞれの場の変換性は次のように与えられる。

$$B \quad : \begin{cases} Q(\theta) & \longrightarrow & e^{i\alpha}Q(\theta) \\ \widetilde{Q}(\theta) & \longrightarrow & e^{-i\alpha}\widetilde{Q}(\theta) \\ W_\alpha(\theta) & \longrightarrow & W_\alpha(\theta) \end{cases} \tag{3. 27}$$

$$X \quad : \begin{cases} Q(\theta) & \longrightarrow & Q(e^{-i\alpha}\theta) \\ \widetilde{Q}(\theta) & \longrightarrow & \widetilde{Q}(e^{-i\alpha}\theta) \\ W_\alpha(\theta) & \longrightarrow & e^{i\alpha}W_\alpha(e^{-i\alpha}\theta) \end{cases} \tag{3. 28}$$

$$A \quad : \begin{cases} Q(\theta) & \longrightarrow & e^{i\alpha}Q(\theta) \\ \tilde{Q}(\theta) & \longrightarrow & e^{i\alpha}\tilde{Q}(\theta) \\ W_\alpha(\theta) & \longrightarrow & W_\alpha(\theta) \end{cases} \tag{3. 29}$$

ここで、$U(1)_B$ はバリオン数を数える対称性に相当していて、アノマリーを持っていない。一方 $U(1)_A$ と $U(1)_X$ はアノマリーを持っているが、これらを 2 つ組み合わせてアノマリーを持ってない $U_R(1)$ をつくることができる。$U_R(1)$ に対する場の変換性は以下のようにして決定することができる。
アノマリーはフェルミオンの三角グラフを計算することによって求められるので、以下で与えられるフェルミオンの charge により、アノマリーが計算できる。

	$G = SU(N_c)$	$SU(N_f)_L$	$SU(N_f)_R$	$U(1)_A$	$U(1)_X$
ψ_Q	N_c	N_f	1	1	-1
$\psi_{\widetilde{Q}}$	$\overline{N_c}$	1	$\overline{N_f}$	1	-1
λ	adj	1	1	0	1

(3. 30)

ただし、$\psi_Q, \psi_{\widetilde{Q}}$ は Chiral superfield $Q, \widetilde{Q}$ のフェルミオン項、λ は Feild strength superfield W_α のフェルミオン項である。これ以降このような表記をした場合、この意味で用いているとする。
アノマリーを計算すると、

$$\partial J_X = 2(N_c - N_f) \times (\text{1-インスタントン}) \tag{3. 31}$$

$$\partial J_A = 2N_f \times (\text{1-インスタントン}) \tag{3. 32}$$

よって、$U(1)_X$ と $U(1)_A$ を以下のように組み合わせるとアノマリーのない $U(1)_R$ を作ることができる。

$$\partial J_R \equiv \partial(J_X + \frac{N_f - N_c}{N_f} J_A) = 0$$

$$U(1)_R = U(1)_X (U(1)_A)^{\frac{N_f - N_c}{N_f}}$$

変換性は

$$R \ : \begin{cases} Q(\theta) & \longrightarrow & e^{i\frac{N_f - N_c}{N_f}\alpha} Q(e^{-i\alpha}\theta) \\ \tilde{Q}(\theta) & \longrightarrow & e^{i\frac{N_f - N_c}{N_f}\alpha} \tilde{Q}(e^{-i\alpha}\theta) \\ W_\alpha(\theta) & \longrightarrow & e^{i\alpha} W_\alpha(e^{-i\alpha}\theta) \end{cases} \tag{3. 33}$$

で与えられる。

$U(1)_A$ は今見たようにアノマリーを持っているので破れてしまっているが、Section 3.1 で説明したように選択則を用いて拡張された対称性にする。そのためには (3. 32) より 1-インスタントンに $U(1)_A$charge $2N_f$ を持たせれば良いことがわかる。
ただし β-関数 (2. 70) より、1-インスタントンは

$$|\exp 2\pi i \tau_{cl}| \propto \Lambda^{3N_c - N_f} \tag{3. 34}$$

である。
これまで得られた対称性を以下にまとめる。

	$G=SU(N_c)$	$SU(N_f)_L$	$SU(N_f)_R$	$U(1)_A$	$U(1)_B$	$U(1)_R$
Q	N_c	N_f	1	1	1	$\frac{N_f-N_c}{N_f}$
$\widetilde{Q}$	$\overline{N_c}$	1	$\overline{N_f}$	1	-1	$\frac{N_f-N_c}{N_f}$
W_α	adj	1	1	0	0	1
$\Lambda^{3N_c-N_f}$	1	1	1	$2N_f$	0	0
M	1	N_f	$\overline{N_f}$	2	0	$\frac{2(N_f-N_c)}{N_f}$
B	1	${}_{N_f}C_{N_c}$	1	N_c	N_c	$\frac{N_c(N_f-N_c)}{N_f}$
$\widetilde{B}$	1	1	$\overline{{}_{N_f}C_{N_c}}$	N_c	$-N_c$	$\frac{N_c(N_f-N_c)}{N_f}$
$\mathcal{W}$	1	1	1	0	0	2

(3. 35)

ただし、最後の$\mathcal{W}$はsuper potentialである。また、この表ではsuperfieldに対するchargeは、その第1成分に対するものを表しているので、カイラル場のフェルミオン項に対する$U_R(1)$ chargeが必要なときは(3. 33)から分かるように、-1しなければならないことを注意しておく。

3.5 $N_f < N_c$の場合の真空

この節では、$N_f < N_c$のときの有効super potentialを求める。

section 3.3で見たように$N_f < N_c$のモジュライはメソン$M = Q\widetilde{Q}$のみで記述される。$W_{tree} = 0$のmasslessの系でもdynamicalにポテンシャルが生成される可能性があって、このとき、super potentialが生成されるとすると対称性は(3. 35)であるから、section 3.1の議論により次の形をしていなくてはならない。

$$W_{eff} = C_{N_c,N_f}\left(\frac{\Lambda^{3N_c-N_f}}{\det M}\right)^{\frac{1}{N_c-N_f}} \tag{3. 36}$$

ここでC_{N_c,N_f}は定数。

定数C_{N_c,N_f}は以下のようないくつかの極限を考えることにより決定することができる。

(1)$a_{N_f} \to \infty$の極限
このとき、ゲージ$SU(N_c)$ N_fフレーバー$\to$ゲージ$SU(N_c-1)$ (N_f-1)フレーバーに破れる。

(2)$Q_{N_f}, \widetilde{Q}_{N_f}$ に大きい質量を与え積分する。
このとき、ゲージ $SU(N_c)$ N_f フレーバー $\rightarrow$ ゲージ $SU(N_c)$ $(N_f - 1)$ フレーバーに破れる。

これらの極限でもスケールマッチングを行うと (3. 36) の形になるべきということから $C_{N_c,N_f} = (N_c - N_f)c^{(N_c - N_f)}$ と決まる。ここで c は (N_c, N_f) によらない定数。

さらに、$N_f = N_c - 1$ のとき、1-インスタントンは (3. 34) で与えられるので、有効 super potential は 1-インスタントンに比例していることがわかる。特に、$N_c = 2, N_f = 1$ のときは直接計算できて (Ref [13])、

$$W_{eff} = (N_c - N_f) \left(\frac{\Lambda^{3N_c - N_f}}{\det M} \right)^{\frac{1}{N_c - N_f}} \tag{3. 37}$$

と決定できる。
実は、これは $M \rightarrow \infty$ で最小値を取るので (有限のスケールに) 安定な真空は存在しない。

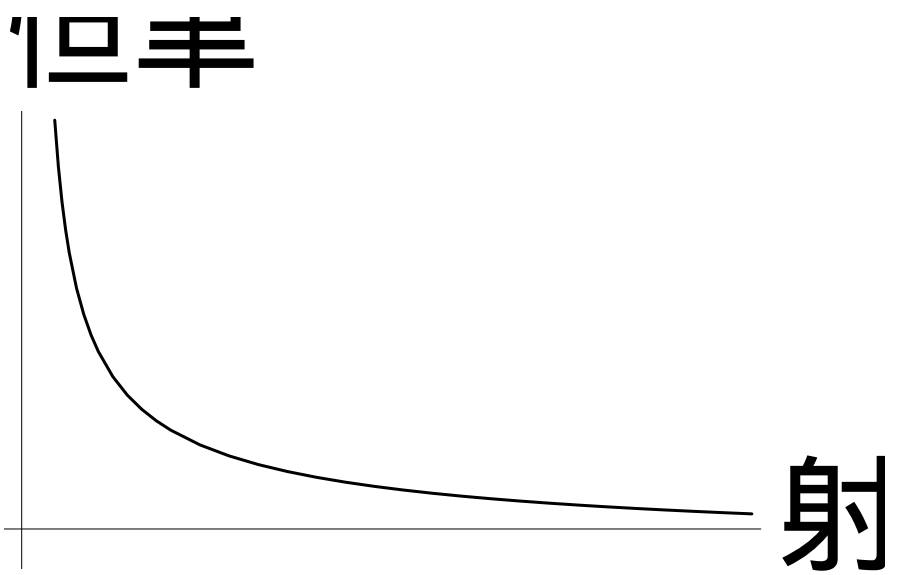

Figure 3: 真空は無限遠に存在する

ところが、クォークに質量を与えると有限のスケールに真空が生成されることが以下のようにして見ることができる。
まず、tree のクォークの質量項 $W_{tree} = tr\ mM$ を W_{eff}(3. 37) に加える。
この項は、大局的対称性を壊すが以下のように m に charge を与えると拡張された対称

性を持つ。

$$\begin{array}{cccccc} & SU(N_f)_L & SU(N_f)_R & U(1)_A & U(1)_B & U(1)_R \\ m & \overline{N_f} & N_f & -2 & 0 & 2\frac{N_c}{N_f} \end{array} \tag{3. 38}$$

すると、section 3.1 の議論を用いると

$$W_{exact} = (N_c - N_f)\left(\frac{\Lambda^{3N_c-N_f}}{\det M}\right)^{\frac{1}{N_c-N_f}} + tr\ mM \tag{3. 39}$$

は正確な super potential であることわかる。
このとき、super potential の形は Figure 4 のように変更される。

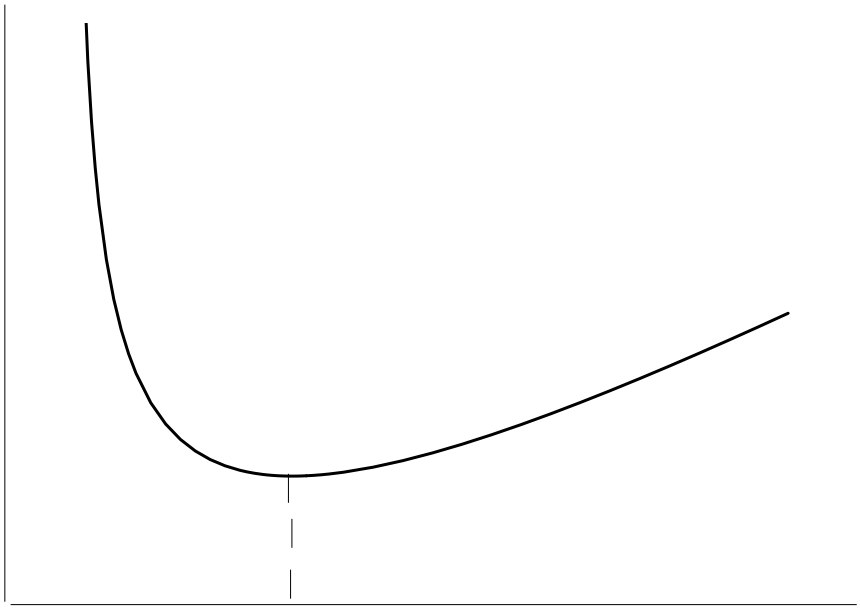

Figure 4: 真空は有限スケールに存在する

超対称を破らない真空は $\frac{\partial W_{exact}}{\partial < M >_0} = 0$ となる点なので、真空は

$$< M >_0 = (\det m\Lambda^{3N_c - N_f})^{\frac{1}{N_c}} \frac{\omega}{m} \qquad \omega = e^{\frac{2i\pi n}{N_c}} \tag{3. 40}$$

で与えられる。但し、n は整数。
従って、真空は N_c 個あることがわかる。

3.6 $N_f = N_c$ の場合の真空

古典的には section 3.3 で議論したように、モジュライは複合場 $M, B, \widetilde{B}$ で記述されて、それらの間には古典的拘束条件 (3. 25)(3. 26) が存在していた。$N_f = N_c$ では、$B, \widetilde{B}$ は フレーバーに対しても Singlet になっているので、古典的なモジュライに対する拘束条件は

$$\det M - B\widetilde{B} = 0 \tag{3. 41}$$

と書くことができる。
以下では、古典的なモジュライが量子補正を受けて、どのように変更されるのか調べる。

このときの拡張された対称性は以下のようになっている。

	$G=SU(N_c)$	$SU(N_c)_L$	$SU(N_c)_R$	$U(1)_A$	$U(1)_B$	$U(1)_R$
Q	N_c	N_c	1	1	1	0
$\widetilde{Q}$	$\overline{N_c}$	1	$\overline{N_c}$	1	-1	0
M	1	N_c	$\overline{N_c}$	2	0	0
B	1	1	1	N_c	N_c	0
$\widetilde{B}$	1	1	1	N_c	$-N_c$	0
Λ^{2N_c}	1	1	1	$2N_f$	0	0
m	1	$\overline{N_c}$	N_c	-2	0	2

(3. 42)

ここで m は質量パラメーター。
massless の系 $(m=0)$ を考えると super potential の $U(1)_R$ charge 2 を作ることができないので、ダイナミカルに super potential が生成されることはない。

しかし、質量項 $W_{tree}=tr\ mM$ があるとき、$<B>=<\widetilde{B}>=0$ とすると、対称性 (3. 42) と正則性より M の真空期待値は

$$<M>=c(\Lambda^{2N_c}\det m)^{\frac{1}{N_c}}\frac{1}{m}\qquad c:\text{定数} \tag{3. 43}$$

の形にならなければならない。
定数 c は $m^{N_f}{}_{N_f}\to\infty$ としたとき、理論はゲージ $SU(N_c)$ N_c-1 フレーバー に破れているので、このときの $<M>$ は前節の $<M>_0$(3. 40) に一致しなくてはならないということから決定することができる。それを次のように行う。
マッチング条件は

$$\left(\frac{\Lambda_L}{m^{N_f}{}_{N_f}}\right)^{3N_c-(Nc-1)}=\left(\frac{\Lambda}{m^{N_f}{}_{N_f}}\right)^{2N_c} \tag{3. 44}$$

$$\det m=m^{N_f}{}_{N_f}\det m_L \tag{3. 45}$$

である。但し、Λ_L, m_L は破れた後の理論の定数とする。
このマッチングを行うと ¡M¿ は、

$$<M>_L=c(\Lambda_L^{2N_c+1}\det m_L)^{\frac{1}{N_c}}\frac{1}{m_L}=<M>_0 \tag{3. 46}$$

となるので、$c=1$ と分かる。即ち、¡M¿は

$$<M>=(\Lambda^{2N_c}\det m)^{\frac{1}{N_c}}\frac{1}{m} \tag{3. 47}$$

で与えられる。
従って、これより¡M¿の行列式は

$$\det<M>=\Lambda^{2N_c} \tag{3. 48}$$

と量子補正を受けていることがわかる。これは、もはや古典的拘束条件を満たしてはいない。
よって、量子補正を受けたモジュライの拘束条件は

$$\det M - B\widetilde{B} = \Lambda^{2N_c} \tag{3. 49}$$

となっていると考えられる。確かに古典極限 $\Lambda \to 0$ では (3. 41) に一致しているのももっともらしい。ただし、ここで注意しなくてはならないのは、この条件は元々は質量項を考えたときに出てきた条件であったのであるが、その条件は、もはや質量パラメーター m によらないものになっているので、massless の系のモジュライもこの条件を満たすのである。

このモジュライの特徴は、古典的に存在していた特異点が、量子補正を受けることによりモジュライ上から消え去ってしまうことである。従って、(3. 49) が正しいとすると、低エネルギー領域は (3. 49) を満たす $< M >, < B >, < \widetilde{B} >$ の量子的揺らぎで記述されると思われる。
この見方が正しいと言う厳密な証明ではないが、非自明なチェックとして 'tHooft アノマリーマッチング条件 (以下 'tHooft AMC と略す) を確かめることができる。(Ref [14])
'tHooft AMC とは破れていない大局的対称性を仮想的にゲージ化したときに、元の理論と低エネルギー有効理論のアノマリーは一致しなければならないという条件である。

例えば、$M = \Lambda^2 I, B = \widetilde{B} = 0$ のとき
2 つの理論の破れていない対称性及び量子数は以下のようになっている。

	$G = SU(N_c)$	$SU(N_c)_V$	$U(1)_B$	$U(1)_R$
ψ_Q	N_c	N_c	1	-1
$\psi_{\widetilde{Q}}$	$\overline{N_c}$	$\overline{N_c}$	-1	-1
λ	adj	1	0	1
ψ_M	1	adj	0	-1
ψ_B	1	1	N_c	-1
$\psi_{\widetilde{B}}$	1	1	$-N_c$	-1

(3. 50)

このときの、両者のアノマリーは

	高エネルギー	低エネルギー
$U(1)_R^3$	$-N_c^2 - 1$	$-N_c^2 - 1$
$U(1)_B^2 U(1)_R$	$-2N_c^2$	$-2N_c^2$
$SU(N_c)_V^2 U(1)_R$	$-N_c$	$-N_c$
$U(1)_R$	$-N_c^2 - 1$	$-N_c^2 - 1$

(3. 51)

となり確かにすべて一致している。
また、モジュライの他のすべての点についても、具体的に計算してやることによりすべて 'tHooft AMC 満たしていることがわかる。
従って、低エネルギー有効理論は (3. 49) をみたす $M, B, \widetilde{B}$ で記述されると思われる。

3.7 $N_f = N_c + 1$ の場合の真空

このときは、モジュライを記述するパラメーターは $M^i{}_j, B_i, \widetilde{B}^i$ である。
ただし、$B_i, \widetilde{B}^i$ はフレーバー対称性の不変テンソルと $(3.\ 20)(3.\ 21)$ を用いて

$$B_i = \frac{1}{N_c!}\epsilon_{ij_1\ldots j_{N_c}} B^{j_1\ldots j_{N_c}} \tag{3. 52}$$

$$\widetilde{B}^i = \frac{1}{N_c!}\epsilon^{ij_1\ldots j_{N_c}} \widetilde{B}_{j_1\ldots j_{N_c}} \tag{3. 53}$$

$$\tag{3. 54}$$

で与えられる。
このときの古典的拘束条件は次のように書くことができる。

$$(\det M)(M^{-1})_i{}^j - B_i\widetilde{B}^j = 0 \tag{3. 55}$$

$$B_i M^i{}_j = M^i{}_j \widetilde{B}^j = 0 \tag{3. 56}$$

但し、ここでの $(\det M)(M^{-1})_i{}^j$ は余因子の意味で用いており、$(3.\ 55)$ が $(3.\ 25)$ の条件を式で表したものになっていて、$(3.\ 56)$ が $(3.\ 26)$ の条件となっている。

この古典的拘束条件で与えられた真空が、量子補正によりどのような変更を受けるのかを調べよう。
前節の $N_f = N_c$ のときと同様に $W_{tree} = tr\ mM$ を加えて $B = \widetilde{B} = 0$ とすると、対称性と正則性より

$$M = \Lambda^{\frac{2N_c-1}{N_c}} (\det m)^{\frac{1}{N_c}} \left(\frac{1}{m}\right) \tag{3. 57}$$

でなければならない。ただし、係数は $m^{N_f}{}_{N_f} \to \infty$ で $N_f = N_c$ の $M(3.\ 47)$ に一致するように決めた。
これより

$$\frac{\det M}{M} = \Lambda^{2N_c-1} m \tag{3. 58}$$

となることがわかる。
即ち、古典的拘束条件 $(3.\ 55)$ は量子補正を受けて

$$(\det M)\left(\frac{1}{M}\right) - B\widetilde{B} = \Lambda^{2N_c-1} m \tag{3. 59}$$

となると思われる。
しかし、この量子補正を受けた拘束条件は $m \to 0$ の massless 極限では古典的拘束条件 $(3.\ 55)$ に一致している。
従って、$N_f = N_c + 1$ のときは massless の系を考えるならば、量子論的モジュライは古典的モジュライに一致すると思われる。即ち、モジュライは量子補正を受けないと考えられるので、古典的モジュライに存在した特異点は、量子論でも特異点である。特に、section

3.3 で議論したように、モジュライの原点も量子論で特異点となっている。ただし、この特異点の解釈は異なっていて、古典的には、この特異点は massless gluons が現れるものと考えていたが、低エネルギー有効理論では $M, B, \widetilde{B}$ すべてが massless になって現れる特異点であると考える。

非自明なチェックとして 'tHooft AMC を確かめる。
例えば、モジュライの原点にある特異点で確かめよう。そこではすべての対称性は回復していて、2 つの理論の対称性及び量子数は以下のようになっている。

	$G = SU(N_c)$	$SU(N_f)_L$	$SU(N_f)_R$	$U(1)_B$	$U(1)_R$
ψ_Q	N_c	N_c+1	1	1	$\frac{-N_c}{N_c+1}$
$\psi_{\widetilde{Q}}$	$\overline{N_c}$	1	$\overline{N_c+1}$	-1	$\frac{-N_c}{N_c+1}$
λ	adj	1	1	0	1
ψ_M	1	N_c+1	$\overline{Nc+1}$	0	$\frac{-N_c+1}{N_c+1}$
ψ_B	1	$\overline{N_c+1}$	1	N_c	$-\frac{1}{N_c+1}$
$\psi_{\widetilde{B}}$	1	1	N_c+1	$-N_c$	$-\frac{1}{N_c+1}$

(3. 60)

両者のアノマリーは

	高エネルギー	低エネルギー
$SU(N_f)^3_{\substack{L\\R}}$	$\pm N_c$	$\pm N_c$
$SU(N_f)^2_{\substack{L\\R}}U(1)_R$	$\frac{-N_c^2}{2(N_c+1)}$	$\frac{-N_c^2}{2(N_c+1)}$
$SU(N_f)^2_{\substack{L\\R}}U(1)_B$	$\pm\frac{N_c}{2}$	$\pm\frac{N_c}{2}$
$U(1)_R^2U(1)_B$	0	0
$U(1)_B^2U(1)_R$	$\frac{-2N_c^2}{N_c+1}$	$\frac{-2N_c^2}{N_c+1}$
$U(1)_R^3$	$-1+N_c^2-\frac{2N_c^4}{(1+N_c^2)}$	$-1+N_c^2-\frac{2N_c^4}{(1+N_c^2)}$

(3. 61)

となり、確かに一致している。
これ以外のモジュライのすべての点でも具体的な計算により 'tHooft AMC が一致していることが確かめられるので、低エネルギー領域はこのような M、B、$\widetilde{B}$ で記述されると思われる。
従って、これを信じると $N_f = N_c+1$ では、今確かめたように、モジュライの原点で、カイラル対称性が破れずに閉じ込めが起きていると考えることができる。

ところで、M、B、$\widetilde{B}$ の拘束条件 (3. 55)(3. 56) を出す super potential は次のように与えられる。

$$W_{eff} = \frac{1}{\Lambda^{2N_c-1}}(BM\widetilde{B} - \det M) \tag{3. 62}$$

これが超対称性を破らないために $\frac{\partial W_{eff}}{\partial M} = \frac{\partial W_{eff}}{\partial B} = \frac{\partial W_{eff}}{\partial \widetilde{B}} = 0$ より確かに拘束条件 (3. 55)(3. 56) が求まる。
次に、$N_f = N_c$ のときのモジュライとの整合性を確かめるために、$N_f = N_c+1$ 番目の

クォークに質量 m を与えると、super potential は正則性と対称性の議論から次の形のものが正確に求まる。

$$W_{exact} = mM^{N_c+1}_{N_c+1} + \frac{1}{\Lambda^{2N_c-1}}(BM\widetilde{B} - \det M) \tag{3. 63}$$

このときの超対称性を破らないための条件 $\frac{\partial W_{exact}}{\partial M^{N_c+1}_{N_c+1}} = 0$ より

$$m + \frac{1}{\Lambda^{2N_c-1}}(B_{N_c+1}\widetilde{B}^{N_c+1} - \det M^i_j = 0 \tag{3. 64}$$

であることが分かる。但し、$i, j = 1, \ldots, N_c$ である。ここで $m \to \infty$ として $N_f = N_c+1 \to N_c$ の極限を考える。
このときのスケールマッチングは、$N_f = N_c$ のスケールでのパラメーターには添え字 L をつけて表すことにすると

$$\Lambda_L^{2N_c} = m\Lambda^{2N_c-1} \tag{3. 65}$$

である。また、場は

$$M^i_j = M_L \tag{3. 66}$$
$$B_L = B_{N_c+1} \tag{3. 67}$$
$$\widetilde{B}_L = \widetilde{B}^{N_c+1} \tag{3. 68}$$

となるので、(3. 64) は $N_f = N_c$ のスケールで

$$\det M_L - B_L\widetilde{B}_L = \Lambda_L^{2N_c} \tag{3. 69}$$

であることが分かる。これは確かに (3. 49) に一致していることが分かるので、これらの描像はもっともらしいと考えられる。

3.8 $N_f \geqq 3N_c$ の場合

β-関数 (2. 70) より

$$\beta(g) \sim -\frac{g^3}{16\pi^2}(3N_c - N_f) \tag{3. 70}$$

であるから $N_f \geqq 3N_c$ のときは、理論は asymptotic non free である。
このとき IR 固定点は、free theory となっているので、低エネルギー領域では閉じ込めが起きておらず、グルーオンやクォークなどの elementary 粒子がそのまま出てくるのが自然な描像であると考えられる。

3.9 双対性

これまでの議論で、$N_c + 2 \leqq N_f < 3N_c$ 以外の真空は求めることができた。特に、$N_f = N_c, N_c + 1$ では、低エネルギーでは閉じ込めが起きていることが確かめられた。ところ

が、$N_f \geqq N_c + 2$ では $M, B, \widetilde{B}$ でうまく真空を記述することができないのである。このことは実際に 'tHooft AMC を満たさないことでも確かめられる。$N_f \geqq N_c + 2$ のときも、$N_f = N_c + 1$ のときと同じく、massless の理論では量子論的なモジュライと古典的なモジュライが一致することが知られている (Ref [12]) ので、例えば $U(1)_B^2 U(1)_R$ のアノマリー をモジュライの原点で求めて見ると

$$\begin{array}{lcc} & \text{高エネルギー} & \text{低エネルギー} \\ U(1)_B^2 U(1)_R & -2N_c^2 & -2N_c^2 {}_{N_f}C_{N_c} \left(\frac{N_f - N_c(N_f - N_c)}{N_f}\right) \end{array} \tag{3. 71}$$

であり、$N_f = N_c, N_c + 1$ では確かに 'tHooft AMC を満たしているが、$N_f \geqq N_c + 2$ では一致していないことがわかる。
そこで、Seiberg はこの範囲では低エネルギー理論は以下で述べるような、双対な理論によって記述されていると考えた。ただし、ここでの双対性の意味は、モジュライの原点で同じ低エネルギー極限を持つ別の高エネルギー理論が存在するということである。[3]

この双対な理論が元の理論と同じ低エネルギー有効理論を記述するために次の条件を考える。ただし、ここで言う"同じ"とは 2 つの理論が実験的に区別できないという意味で用いている。

(1) 大局的対称性はスケールによらない物理的観測量であるので、元の理論と同じでなければならない。
(2) ゲージ対称性は低エネルギーで閉じ込めが起きているのなら直接的な物理量でないので元の理論と変わっても良い。また、低エネルギーで非自明な固定点があるとき、そこでは、強結合ではあるが閉じ込めを起こすとまでは言うことができない。しかし、このときもゲージ群は元の理論と双対な理論で変わってもよいと考えられる。なぜなら、ゲージ相互作用は (massless の) グルーオンにより媒介されているのであるが、強結合領域であるため粒子描像で記述されないので、そこでのグルーオンの"数"、つまりゲージ群の種類を実験的に確かめることができないからである。
(3) 独立なゲージ不変パラメーターはお互いの理論で一致しなくてはならない。今の場合、$M, B, \widetilde{B}$ である。これらのパラメーターは (1) の条件より 2 つの理論で同じ大局的対称性を持たなくてはならない。
(4) ゲージアノマリーを持たない。これは、双対性とは無関係にゲージ理論が持つべき条件であるが、以下で見るように、双対な理論はゲージ群が元の理論と異なっているので、注意として条件の 1 つに加えておくものとする。

以後、元の理論を electric な理論、双対な理論を magnetic な理論と呼ぶことにする

[3] $\mathcal{N} = 2$SUSY のときの双対性は、モジュライの異なる 2 点を結ぶものだったので、ここでの双対性とは意味が異なっている。

と、magnetic な理論として以下の理論を選ぶとこれらの条件を満たすことがわかる。

	magnetic	electric
ゲージ	$SU(N_f - N_c)$	$SU(N_c)$
場	$q, \tilde{q}, \widetilde{W}_\alpha, M_{mag}$	$Q, \widetilde{Q}, W_\alpha$
super potential	$\mathcal{W}_{mag} = qM_{mag}\tilde{q}$	$\mathcal{W}_{ele} = 0$

(3. 72)

•electric と magnetic の関係

$\widetilde{N_c} \equiv N_f - N_c$ と定義して magnetic な理論でのスケールを $\tilde{\Lambda}$ とする。

M_{mag} は elementary な場としたので正準次元は 1 とする。一方、electric な理論での対応する場 $M = Q\tilde{Q}$ は正準次元 2 を持つので、正準次元 1 のパラメーター μ を導入して、両者は $M = \mu M_{mag}$ のように対応しているものとする。

ただしこのとき、μ は双対条件として

$$\Lambda^{3N_c - N_f} \tilde{\Lambda}^{3\widetilde{N_c} - N_f} = (-1)^{\widetilde{N_c}} \mu^{N_f} \tag{3. 73}$$

を満たすとする。

以上のような magnetic な理論が存在したとすると、双対な理論のための条件を満たしていることを確かめる。

まず (1)(3) の条件を確かめよう。そのためには electric な理論に存在したゲージ不変オペレーターと同様に、magnetic な理論でもゲージ不変オペレーターは $M, B, \widetilde{B}$ でなければならないが、そのうち M は magenetic な理論で elementary な singlet としてすでに現れている。

一方、$B, \widetilde{B}$ は次のように $q, \tilde{q}$ によって表される。

$$\begin{aligned} B_{i_1 \ldots i_{\widetilde{N_c}}} &= \epsilon_{i_1 \ldots i_{\widetilde{N_c}} j_1 \ldots j_{N_c}} B^{j_1 \ldots j_{N_c}} \\ &= \epsilon^{a_1 \ldots a_{\widetilde{N_c}}} q_{i_1 a_i} \cdots q_{i_{\widetilde{N_c}} a_{\widetilde{N_c}}} \end{aligned} \tag{3. 74}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{B}^{i_1 \ldots i_{\widetilde{N_c}}} &= \epsilon^{i_1 \ldots i_{\widetilde{N_c}} j_1 \ldots j_{N_c}} \widetilde{B}_{j_1 \ldots j_{N_c}} \\ &= \epsilon_{a_1 \ldots a_{\widetilde{N_c}}} \tilde{q}^{i_1 a_i} \cdots \tilde{q}^{i_{\widetilde{N_c}} a_{\widetilde{N_c}}} \end{aligned} \tag{3. 75}$$

ただし i, j はフレーバーの足、a はゲージの足である。

このとき、この形のバリオンが正しくゲージ不変なオペレーターとなるには、magnetic な理論のゲージ群は $SU(\widetilde{N_c})$ でなければならないことが分かる。また、上で与えられたバリオンが実際 electric な理論の持つ大局的対称性を持つためには、$q, \tilde{q}$ の大局的対称性は以下のようになっていなければならない。

	$G = SU(\widetilde{N_c})$	$SU(N_f)_L$	$SU(N_f)_R$	$U(1)_B$	$U(1)_R$
q	$\overline{\widetilde{N_c}}$	$\overline{N_f}$	1	$\frac{N_c}{\widetilde{N_c}}$	$\frac{N_c}{N_f}$
$\tilde{q}$	$\widetilde{N_c}$	1	N_f	$-\frac{N_c}{\widetilde{N_c}}$	$\frac{N_c}{N_f}$
M	1	N_f	$\overline{N_f}$	0	$\frac{2(N_f - N_c)}{N_f}$

(3. 76)

また、${M_{mag}}_j^i$ が electric な理論の M と同じ大局的対称性を持つためには (3. 72) で与えた super potential が必要である。この super potential はもう 1 つの意味を持っていて、双対な理論への条件 (3), 即ち、ゲージ不変パラメーターは $M, B, \widetilde{B}$ のみ、という条件を満たすために必要である。なぜなら、 magnetic な理論では、ゲージ不変なパラメーターとしてもう 1 つ $N \equiv q\tilde{q}$ を作ることができるが、低エネルギーでの運動方程式

$$\frac{\partial \mathcal{W}_{mag}}{\partial M_{mag}} = 0 \Rightarrow N = q\tilde{q} = 0 \tag{3. 77}$$

より、低エネルギーでは独立でないことがわかる。

更にこの magnetic な理論が正しく双対な理論になっていることを確かめるのに、いくつかの非自明なチェックをすることができる。

•'tHooft AMC

2 つの理論の対称性及び量子数は

	G	$SU(N_f)_L$	$SU(N_f)_R$	$U(1)_B$	$U(1)_R$
ψ_Q	N_c	N_f	1	1	$-\frac{N_c}{N_f}$
$\psi_{\widetilde{Q}}$	$\overline{N_c}$	1	$\overline{N_f}$	-1	$-\frac{N_c}{N_f}$
λ	$N_c^2 - 1(adj)$	1	1	0	1
ψ_q	$\widetilde{\overline{N_c}}$	$\overline{N_f}$	1	$\frac{N_c}{\widetilde{N_c}}$	$-\frac{\widetilde{N_c}}{N_f}$
$\psi_{\tilde{q}}$	$\widetilde{N_c}$	1	N_f	$-\frac{N_c}{\widetilde{N_c}}$	$-\frac{\widetilde{N_c}}{N_f}$
$\psi_{M_{mag}}$	1	N_f	$\overline{N_f}$	0	$\frac{N_f - 2N_c}{N_f}$
$\tilde{\lambda}$	${\widetilde{N_c}}^2 - 1(adj)$	1	1	0	1

(3. 78)

のようになっている。これを用いて、両者のアノマリーを計算してやると

	electric	magnetic
$SU(N_f)_{L,R}^3$	$\pm N_c$	$\pm N_c$
$SU(N_f)_{L,R}^2 U(1)_R$	$-\frac{1}{2}\frac{N_c^2}{N_f}$	$-\frac{1}{2}\frac{N_c^2}{N_f}$
$SU(N_f)_{L,R}^2 U(1)_B$	$\pm\frac{1}{2}N_c$	$\pm\frac{1}{2}N_c$
$U(1)_R^3$	$N_c^2 - 1\frac{2N_c^4}{N_f^2}$	$N_c^2 - 1\frac{2N_c^4}{N_f^2}$
$U(1)_B^2 U(1)_R$	$-2N_c^2$	$-2N_c^2$
$U(1)_R$	$-N_c^2 - 1$	$-N_c^2 - 1$

(3. 79)

となり、確かに両者で一致していることがわかる。

• magnetic な理論の双対をとると元の electric な理論に戻る。

$q\tilde{q}$ に対応する singlet を N とし、 $d, \tilde{d}$ を 双対-双対理論のクォークとする。まず magnetic なゲージ群 $SU(\widetilde{N_c})$ の双対をとると $G = SU(N_f - \widetilde{N_c}) = SU(N_c)$

となり、electirc なゲージ群 $SU(N_c)$ に戻る。一方 super potential $\mathcal{W}_{dual-dual}$ は

$$\mathcal{W}_{dual-dual} = \underbrace{\frac{1}{\mu} tr\ MN}_{\text{元々の } \mathcal{W}_{mag}} + \frac{1}{\tilde{\mu}} \tilde{d} N d \tag{3. 80}$$

ここで $\tilde{\mu}$ は双対-双対理論のパラメーター。
更に、双対-双対理論のスケールを $\widetilde{\widetilde{\Lambda}}$ として、$\widetilde{\widetilde{\Lambda}} = \Lambda$ と同一視すると、双対条件より

$$\begin{aligned} \Lambda^{3N_c - N_f} \widetilde{\Lambda}^{3\widetilde{N_c} - N_f} &= (-1)^{\widetilde{N_c}} \mu^{N_f} \\ = \widetilde{\Lambda}^{3\widetilde{N_c} - N_f} \widetilde{\widetilde{\Lambda}}^{3N_c - N_f} &= (-1)^{N_c} \tilde{\mu}^{N_f} \end{aligned} \tag{3. 81}$$

これより

$$\mu = -\tilde{\mu} \tag{3. 82}$$

よって $\mathcal{W}_{dual-dual}$ は

$$\mathcal{W}_{dual-dual} = \frac{1}{\mu} tr\ N(-d\tilde{d} + M) \tag{3. 83}$$

となる。
従って、メソン M, N は massive になるので、運動方程式

$$\frac{\partial \mathcal{W}_{dual-dual}}{\partial N} = 0 \Rightarrow M = d\tilde{d} \tag{3. 84}$$

$$\frac{\partial \mathcal{W}_{dual-dual}}{\partial M} = 0 \Rightarrow N = 0 \tag{3. 85}$$

を用いて積分を実行すると、$\mathcal{W}_{dual-dual} = 0$ となり、また 1 つ目の関係式より $(d, \tilde{d})$ を $(Q, \widetilde{Q})$ と書くと元の electric な理論に戻っていることがわかる。

他に非自明なチェックとして以下を満たしている。(Ref [7])

- 可換性を満たす。

$$\begin{array}{ccccc} & & \overset{\text{dual}}{\longrightarrow} & & \\ & \text{electric} & & \text{magnetic} & \\ & (N_c, N_f) & & (N_f - N_c, N_f) & \\ \text{flow} & \downarrow & & \downarrow & \text{flow} \\ & \text{low energy} & \overset{\text{dual}}{\longrightarrow} & \text{low energy} & \\ & \text{electric} & & \text{magnetic} & \\ & (N_c, N_f - 1) & & (N_f - N_c - 1, N_f - 1) & \end{array} \tag{3. 86}$$

ただし、(N_c, N_f) はゲージ $SU(N_c)$ N_f フレーバー の意味である。

- 量子補正まで考えると electric も magnetic もモジュライに対し同じ拘束条件を出す。

更にもっと直接的な証明を次章で $\mathcal{N}=2$ SUSY からの flow を考えることにより与える。

3.10 $N_c+2 \leqq N_f \leqq \frac{3}{2}N_c$ の場合

前節の議論により、$N_c+2 \leqq N_f$ の場合には双対な理論が存在すると考えられることがわかった。 ただし、$N_f \leqq \frac{3}{2}N_c$ の場合は electric な理論は asymptotic free ではあるが、magnetic な理論では $N_f > 3\widetilde{N_c}$ の場合に相当しているので、asymptotic non free となっている。$N_f > \frac{3}{2}N_c$ の範囲では magnetic な理論で asymptoric free になっている範囲、即ち、$N_f < 3\widetilde{N_c}$ に相当しているので、$N_c+2 \leqq N_f \leqq \frac{3}{2}N_c$ の場合と、$N_f > \frac{3}{2}N_c$ の場合では異なる相にあることがわかる。
section 3.8 でも述べたが、asymptotic non free では、elementary な massless 場が低エネルギーに出てくるのは自然であり、低エネルギー領域は magnetic な理論で見ると弱結合になっていて、ゲージ群 $SU(\widetilde{N_c})$ で場は $q, \tilde{q}, M$ で構成されると考えられる。
これは non Abelian Coulom 相と呼ばれている。

3.11 $\frac{3}{2}N_c < N_f < 3N_c$ の場合

$\frac{3}{2}N_c < N_f < 3N_c$ の場合は、electric な理論も、magnetic な理論も asymptotic free になっているので、低エネルギー領域はどちらの理論でも強結合である。しかし、section 3.9 で確かめたように、閉じ込めが起きていると言う描像はもはや正しくないと思われる。このとき、低エネルギーを記述するもっとも簡単な描像としては、高エネルギーで存在した elementary な粒子が低エネルギーでも出現する場合であろう。しかし、このようなことが起きるためには低エネルギー極限では非自明な固定点、即ち、スケール不変な点が存在しなくてはならない。以下の議論より、そのような点があるとすると $\frac{3}{2}N_c < N_f < 3N_c$ の範囲でないとならないことが言える。逆に $\frac{3}{2}N_c < N_f < 3N_c$ の範囲すべてに非自明な固定が存在することはまだ証明されていないが、信じられている。
これは、前節の non Abelian Coulom 相に対して、特に、相互作用のある non Abelian Coulom 相と呼ばれている。また、スケール不変であるためには、次元を持ったパラメーターが存在していてはならないので、そのような点があるとすれば、すべての場が真空期待値を持たないモジュライの原点になっていなければならない。

まず、$N_f < 3N_c$ のときは asymptotic free なので、非自明な IR 固定点が存在する資格がある。
次に (Ref [15, 16]) により 正確な β-関数は次ように与えられる。

$$\beta(g) = -\frac{g^3}{16\pi^2}\frac{3N_c - N_f + N_f\gamma(g^2)}{1 - N_c\frac{g^2}{8\pi^2}} \tag{3. 87}$$

$$\gamma(g) = -\frac{g^2}{8\pi^2}\frac{N_c^2-1}{N_c} + O(g^4) \tag{3. 88}$$

ここで $\gamma(g)$ は $Q(\widetilde{Q})$ の異常次元で、$Q(\widetilde{Q})$ の次元は $dim(Q(\widetilde{Q})) = \frac{1}{2}\gamma + 1$ で与えられる。‘1‘は$Q(\widetilde{Q})$ の正準次元である。ところで、もし IR 固定点があるとすると、そこでは Super Conformal 代数の表現として、ユニタリーであるための条件として

$$D \geqq \frac{3}{2}|R| \qquad \begin{pmatrix} D: \text{オペレーター (場) の次元} \\ R: \text{オペレーター (場) の } R\text{-charge} \end{pmatrix} \tag{3. 89}$$

が成立していなければならないここで、ちょうど等号が成立するのは

$$\text{オペレーターが カイラル のとき} \qquad D = \frac{3}{2}R \tag{3. 90}$$

$$\text{オペレーターが 反カイラル のとき} \qquad D = -\frac{3}{2}R \tag{3. 91}$$

の場合である。
ここで 2 つのカイラルオペレーター $O_1(x), O_2(x)$ のオペレーター積を考えると

$$O_3(x) = \lim_{x\to y} O_1(x)O_2(y) \underset{x\to y}{\sim} \sum_i C_i(x-y)O_i(\frac{x+y}{2}) \tag{3. 92}$$

となり、係数は次元解析により $x \sim y$ で

$$C_i(x-y) \underset{x\to y}{\sim} \left(\frac{1}{x-y}\right)^{D_1+D_2-D_i} \tag{3. 93}$$

となっている。ところが、R-charge の保存則から $R_i = R_1 + R_2$ でなければならない。すると、条件 (3. 90) より、$D_i = D_1 + D_2$ であることがわかるので、オペレーター積は $x \to y$ で non-singular であるであることがわかる。
よって、カイラル場の積は単純にとることが出来て環をなす。これは Chiral ring と呼ばれている。
section 3.4 で定義したカイラルオペレーター Q、$\widetilde{Q}$ の R-charge はどちらも $\frac{N_f - N_c}{N_f}$ であったから、IR 固定点があるとすると、Super Conformal 代数よりゲージ不変なオペレーターの次元が

$$D(Q\widetilde{Q}) = \frac{3}{2}R(Q\widetilde{Q}) = 3\frac{N_f - N_c}{N_f} \tag{3. 94}$$

$$D(B) = D(\widetilde{B}) = \frac{3}{2}\frac{N_c(N_f - N_c)}{N_f} \tag{3. 95}$$

のように決まる。一方、(3. 87) を用いると、IR 固定点で

$$\beta = 0 \Rightarrow \gamma = \frac{N_f - 3N_c}{N_f} \tag{3. 96}$$

$$D(Q\widetilde{Q}) = \gamma + 2 = 3\frac{N_f - N_c}{N_f} \tag{3. 97}$$

ここで、第 2 式の ‘2‘は $Q\widetilde{Q}$ の正準次元である。よって、Super Conformal 代数より決まった次元と繰り込み群から決まる次元が一致していることから、section 3.4 で定義した $U(1)_R$ は Super Conformal 代数の $U(1)_R$ と同じものであることが確かめられた。

さらに、Super Conformal 代数には以下の条件がある。(Ref [17, 18])

•Spinless のオペレーターは単位オペレーター $(D = 0)$ を除いて $D \geqq 1$ でなくてはならない。
•$D = 1$ となるのは自由場のときのみである。

ところが、もし、$N_f < \frac{3}{2}N_c$ に IR 固定点が存在するとすると

$$D(M = Q\widetilde{Q}) = 3\left(1 - \frac{N_c}{N_f}\right) < 1 \tag{3. 98}$$

となり、上の条件に反する。また、$N_f = \frac{3}{2}N_c$ のとき $D(M) = 1$ なので M は自由場である。
以上のように、$\frac{3}{2}N_c < N_f < 3N_c$ に 非自明な IR 固定点があるとしても Super Comformal 代数に矛盾しない。
よって、$\frac{3}{2}N_c < N_f < 3N_c$ の範囲には Conformal 不変な固定点がある、つまり 相互作用のある non Abelian Coulomb 相があることを以後仮定すると、section 3.9 で議論した双対性が相互作用のある non Abelian Coulomb 相に存在すると考えられる。

4 $\mathcal{N}=2$SUSY QCD の真空と $\mathcal{N}=1$SUSY QCD における双対性

4.1 Flat Direction

ゲージ群 $SU(N_c)$ N_f フレーバーを持つ $\mathcal{N}=2$ SUSY QCD のラグランジアンは section 2.1 の (2. 17) で与えた。このラグランジアンよりスカラー場の potential を計算すると

$$V = \frac{1}{2g^2} tr\ D^2 + \sum_i |F_i|^2 \tag{4. 1}$$

$$F_i = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \varphi^i} \tag{4. 2}$$

$$D^a = \sum_i \varphi^{i+} T^a \varphi^i \tag{4. 3}$$

となる。ただし、φ^i はすべてのスカラー場を表し、T^a は φ^i の表現によるゲージ群の生成子である。また $\mathcal{W}$ はクォークのバリオン数を 1 に規格化したときの super potential で、

$$\mathcal{W} = \sqrt{2}\widetilde{Q}_i^a \mathbf{\Phi}_a^b Q_b^i + \sqrt{2} m_j^i \widetilde{Q}_i^a Q_a^j \tag{4. 4}$$

で与えられているものである。これらより flat 条件が求まり
D-term より

$$0 = [\Phi, \Phi^\dagger] \tag{4. 5}$$

$$\nu \delta_b^a = Q^i{}_a (Q^\dagger)^b{}_i - (\widetilde{Q}^\dagger)^i{}_a \widetilde{Q}^b{}_i \tag{4. 6}$$

であることが分かる。ただし ν は任意の実数でり、a, b はゲージ群の足、i, j はフレーバーの足を表すものとする。

F-term からは

$$\rho \delta_b^a = Q_a{}^i \widetilde{Q}^b{}_i \tag{4. 7}$$

$$0 = Q_a{}^j m^i{}_j + \Phi_a{}^b Q_b{}^i \tag{4. 8}$$

$$0 = m^j{}_i \widetilde{Q}^a{}_j + \widetilde{Q}^b{}_i \Phi_b{}^a \tag{4. 9}$$

が求まる。ただし、ρ は任意の複素数である。
(4. 6)(4. 7) の導出には考えているゲージ群が半単純群であることを使った。
これらの flat 条件を満たす解は次の 3 つの相を持つ。

クーロン相	$\widetilde{Q} = Q = 0$
Higgs 相	$\Phi = 0$
混合相	$\Phi, Q, \widetilde{Q} \neq 0$

section 2 で厳密に決定した真空はフレーバー $(Q, \widetilde{Q})$ が存在していない場合を考えていたのでクーロン相しか存在しえなかったのである。また、section 3 で調べていた真空は $\mathcal{N} = 1$SQCD の真空で、adjoint カイラル場 Φ を含んでいなかったので Higgs 相しか存在していなかったが、ここではどちらも存在できる。

4.2 古典的なクーロン branch

古典的なクーロン相の真空を求める。クーロン相は $\widetilde{Q} = Q = 0$ であるから、D-flat 条件 (4. 5) より

$$[\Phi, \Phi^\dagger] = 0 \qquad Q = \widetilde{Q} = 0 \tag{4. 10}$$

である。このとき、F-flat の条件は自動的に満たされている。
この解は、section 2 と同様にゲージ群の随伴表現である Φ のカルタン部分をとれば良くて

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \phi_{N_c} \end{pmatrix} \qquad \sum_a \phi_a = 0 \tag{4. 11}$$

の真空期待値をとることが出来る。
これは一般にゲージ群を $SU(N_c) \longrightarrow U(1)^{N_c-1}$ に破る。[4]
従って、クーロン相は $N_c - 1$ 個の独立なゲージ不変パラメーター $tr\Phi^2 \quad tr\Phi^3 \cdots$ によって記述される。これは、ゲージ群 $SU(N_c)$ に含まれるワイル群の置換に対して同一視された ϕ_a で記述されるという言い方も出来る。以下では後者を真空の座標として採用する。

古典的なクーロン相のモジュライはいくつかの特異点を持つ。
例えば、いくつかの ϕ_a が同じ値をとると、ゲージ対称性が回復し新しい massless 粒子であるグルオンが出てくる。
また、特異点になる別のパターンとして、Φ が真空期待値をとると (m が対角化されているとして)、質量項は

$$\mathcal{W}_{mass} = \sum_{a,i} (\phi_a + m_i) Q^i{}_a \widetilde{Q}_i{}^a \tag{4. 12}$$

なので、$\phi_a + m_i = 0$ となるところがあれば、そこの $Q, \widetilde{Q}$ は massless になる。

このように新しい massless 粒子が出てくる点はこれまでの議論と同様特異点となっている。

[4] よって、クーロン相と呼ばれている。

4.3 古典的な Higgs branch

古典的な Higgs 相の真空を massless 系で考える。
Higgs branch の flat 条件は $\Phi = 0$ であることに注意すると (4. 5)∼(4. 9) より

$$\nu\delta^a_b = Q^i{}_a(Q^\dagger)^b{}_i - (\widetilde{Q}^\dagger)^i{}_a\widetilde{Q}^b{}_i \quad \nu \in \mathrm{R} \tag{4. 13}$$

$$\rho\delta^a_b = Q_a{}^i\widetilde{Q}^b{}_i \quad \rho \in \mathrm{C} \tag{4. 14}$$

を満たせばよい。Higgs branch でのゲージ不変オペレーターは、メソン M、バリオン $B, \widetilde{B}$ で, これらは以下のように構成されている。

$$M^i{}_j = Q^i_a\widetilde{Q}^a_j \tag{4. 15}$$

$$B^{i_1\cdots i_{N_c}} = \epsilon_{a_1\cdots a_{N_c}}Q^{i_1a_1}\cdots Q^{i_{N_c}a_{N_c}} \tag{4. 16}$$

$$\widetilde{B}_{i_1\cdots i_{N_c}} = \epsilon^{a_1\cdots a_{N_c}}\widetilde{Q}_{i_1a_1}\cdots\widetilde{Q}_{i_{N_c}a_{N_c}} \tag{4. 17}$$

$$\tag{4. 18}$$

これからわかるように、$N_f \geqq N_c$ の範囲にはバリオンが存在できる。Higgs branch のなかでバリオンが存在している範囲は Baryonic brach と呼ばれている。
一方、$N_f < N_c$ の範囲では恒等的に $B, \widetilde{B} = 0$ となるので、Baryonic brach になりえない。さらに $N_f \geqq N_c$ の範囲にあっても $Q, \widetilde{Q}$ の真空期待値のとり方によっては $B, \widetilde{B} = 0$ となるので、そのようなバリオンの存在しない範囲を non Baryonic branch と呼ぶ。
以下バリオンが存在する場合しない場合で分けて、flat 条件を解いていくことにする。

4.3.1 Baryonic Branch $N_f \geqq 2N_c$ (asymptotic non free)

ここでは $N_f \geqq 2N_c$ の場合の Baryonic branch について考察する。この範囲では (2. 71) より、asymptotic non free となっている。

$Q, \widetilde{Q}$ の真空期待値はゲージ対称性と大局的対称性 $SU(N_c) \times SU(N_f) \times U(1)_B$ と flat 条件 (4. 13)(4. 14) を用いると一般に次のように対角化出来る。

$$Q = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c|c} \overbrace{\begin{array}{ccc} k_1 & & \\ & \ddots & \\ & & k_{N_c} \end{array}}^{N_c} & \overbrace{\begin{array}{ccc} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{array}}^{N_c} & \overbrace{\begin{array}{ccc} 0 & & \\ & \ddots & \end{array}}^{N_f-2N_c} \end{array}\right)}_{N_f} \Bigg\} N_c \tag{4. 19}$$

$${}^t\widetilde{Q} = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c|c} \overbrace{\begin{array}{ccc} \tilde{k}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \tilde{k}_{N_c} \end{array}}^{N_c} & \overbrace{\begin{array}{ccc} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{N_c} \end{array}}^{N_c} & \overbrace{\begin{array}{ccc} 0 & & \\ & \ddots & \end{array}}^{N_f-2N_c} \end{array}\right)}_{N_f} \Bigg\} N_c \tag{4. 20}$$

$$k_a, \lambda_a \in \mathrm{R} \quad \tilde{k}_a \in \mathrm{C} \tag{4. 21}$$

ただし、flat 条件 (4. 13)(4. 14) は対角化に対して用いただけで、成分に対しては、更に条件が課される。(4. 19)(4. 20) を flat 条件に代入すると、満たすべき条件は

$$k_a\tilde{k}_a = \rho \qquad \rho \in \mathrm{C} \tag{4. 22}$$

$$\nu = k_a^2 - (|\tilde{k}_a|^2 + \lambda_a^2) \qquad \nu \in \mathrm{R} \tag{4. 23}$$

となる。
ただし、Baryonic Branch では $k_a \neq 0$ とする。
従って、第 2 式は

$$\lambda_a^2 = k_a^2 - \frac{|\rho|^2}{|k_a|^2} - \nu \tag{4. 24}$$

と書ける。
このときのモジュライを記述するパラメーターの自由度は実数で数えて

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \underbrace{N_c}_{k} + \underbrace{N_c}_{\lambda} + \underbrace{2N_c}_{\tilde{k}} + \underbrace{1}_{\nu} + \underbrace{2}_{\rho} - \underbrace{2N_c}_{(4.\ 22)} - \underbrace{N_c}_{(4.\ 24)} \\ &= N_c + 3 \end{aligned} \tag{4. 25}$$

である。
このとき $Q, \widetilde{Q}$ の真空期待値を不変にするゲージ群の部分群は単位行列しかないので、ゲージ対称性は完全に壊れていることがわかる。
すると、Higgs 機構により、残る massless (neutral) Hypermultiplets の数は

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \underbrace{N_f N_c}_{\text{最初の massless Hypermultiplet 数}} - (dim\ SU(N_c)) \\ &= N_f N_c - N_c^2 + 1 \end{aligned} \tag{4. 26}$$

ただし、'neutral' はゲージ群に対して singlet になっているもの、という意味であるが、ここではゲージは完全に壊れているので、存在している Hypermultiplets はすべて neutral になっている。

次に大局的対称性の破れについて調べる。
ゲージ不変オペレーターは、メソン M とバリオン $B, \widetilde{B}$ である。
今、$B, \widetilde{B} \neq 0$ であるから $U(1)_B$ は壊れる。
また、このときメソン M の真空期待値は (4. 19)(4. 20) より

$$M^i{}_j = \overbrace{\left(\begin{array}{c|c|c} \rho & k_1\lambda_1 & \\ \ddots & \ddots & 0 \\ \rho & k_{N_c}\lambda_{N_c} & \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right)}^{N_c \quad N_c \quad N_f-2N_c} \Bigg\} N_f \tag{4. 27}$$

で与えられる。
この M の真空期待値を不変に留めるようなフレーバー対称性の部分群を求める。
つまり

$$\begin{aligned} U &\in SU(N_f) \text{ に対して} \\ U^\dagger M U &= M \end{aligned} \tag{4. 28}$$

を満たすような、U を求めればよい。そのような U は

$$U = \begin{pmatrix} A & & \\ & A & \\ & & U' \end{pmatrix} \tag{4. 29}$$

ただし

$$det\, U = 1 \tag{4. 30}$$

$$A = \left.\begin{pmatrix} \overbrace{e^{i\theta_1} \quad\quad\quad\quad}^{N_c} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\theta_{N_c}} \end{pmatrix}\right\} N_c \tag{4. 31}$$

$$U' \in U(N_f - 2N_c) \tag{4. 32}$$

である。
よって、大局的対称性は $SU(N_f) \times U(1)_B \longrightarrow U(N_f - 2N_c) \times U(1)^{N_c - 1}$ に破れている。
この大局的対称性が $B, \widetilde{B}$ の真空期待値を不変に留めるかどうかは自明ではない。しかし、$Q, \widetilde{Q}$ の各成分に対してあった条件より、$M, B, \widetilde{B}$ の間には古典的拘束条件が存在していて、$B, \widetilde{B}$ がこれ以上は大局的対称性を破らないを示すことができる。あらわにそのことを示すこともできるが、ここではひとまずこれ以上は破れないことを仮定しておく。
すると、このときの大局的対称性の自発的破れに対する NG ボゾンは実自由度で

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= dim(SU(N_f) \times U(1)_B) - dim(U(N_f - 2N_c) \times U(1)^{N_c - 1}) \\ &= 4N_f N_c - 4N_c^2 - N_c + 1 \end{aligned} \tag{4. 33}$$

だけ出てくるはずである。

このとき、系の持つ massless (neutral) Hypermultiplets の自由度には

$\mathcal{H}$ ･･･ ゲージ対称性の破れより決められる系が持っているべき massless (neutral) Hypermultiplets の数

$\mathcal{P}$･･･モジュライの次元より存在してないとならない massless (neutral) Hypermultiplets の数

$\mathcal{G}$ ⋯ 大局的対称性のやぶれより生成される massless (neutral) Hypermultiplets の数

があり、これらは

$$\mathcal{G} + \mathcal{P} = 4\mathcal{H} \tag{4. 34}$$

という関係を満たしていないとならない。ただし、Hypermultiplets は複素スカラー場を 2 つ含むので、実自由度で数えるために 4 倍した。
これは、(4. 25)(4. 26)(4. 33) より、確かに満たされている。
従って、この真空を正しく記述出来ていると言うチェックが出来た。($B, \widetilde{B}$ によって大局的対称性はこれ以上破れないこともこのことからわかる。)

4.3.2 Baryonic Branch $N_c \leqq N_f < 2N_c$ (asymptotic free)

ここでは $N_c \leqq N_f < 2N_c$ の場合の Baryonic branch について考察する。このとき (2. 71) より asymptoric free であることが分かる。
このときは $Q, \widetilde{Q}$ は次のように対角化される。

$$Q = \left(\begin{array}{ccc|ccc} k_1 & & & 0 & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & \ddots & & & 0 \\ & & k_{N_c} & & 0 & \end{array}\right) \tag{4. 35}$$

$$^t\widetilde{Q} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \tilde{k}_1 & & & \lambda_1 & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & \ddots & & & \lambda_{N_f-N_c} \\ & & \tilde{k}_{N_c} & & 0 & \end{array}\right) \tag{4. 36}$$

$$k_a, \lambda_a \in \mathrm{R} \quad \tilde{k}_a \in \mathrm{C}$$

flat 条件 (4. 13)(4. 14) より

$$k_a \tilde{k}_a = \rho \qquad \rho \in \mathrm{C} \tag{4. 37}$$

$$\nu = k_a^2 - (|\tilde{k}_a|^2 + \lambda_a^2) \qquad 1 \leqq a \leqq N_f - N_c \tag{4. 38}$$

$$\nu = k_b^2 - |\tilde{k}_b|^2 \qquad N_f - N_c + 1 \leqq b \leqq N_c \tag{4. 39}$$

を満たしていなければならない。さらに (4. 37) を用いると (4. 39) より

$$k_b = k_0 \qquad (k_0 \text{ は } b \text{ によらない実数}) \tag{4. 40}$$

となる。これを使うと、flat 条件を満たす $Q, \tilde{Q}$ の真空期待値は次のようになる。

$$Q = \left(\begin{array}{ccccc|ccc} \overbrace{k_1}^{N_c} & & & & & \overbrace{0}^{N_f-N_c} & & \\ & \ddots & & & & & \ddots & \\ & & k_{N_f-N_c} & & & & & 0 \\ & & & k_0 & & & & \\ & & & & \ddots & & 0 & \\ & & & & k_0 & & & \end{array}\right) \Bigg\} N_c \qquad (4.\ 41)$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{2N_c-N_f}$$

$$ {}^t\tilde{Q} = \left(\begin{array}{ccccc|ccc} \overbrace{\tilde{k}_1}^{N_c} & & & & & \overbrace{\lambda_1}^{N_f-N_c} & & \\ & \ddots & & & & & \ddots & \\ & & \tilde{k}_{N_f-N_c} & & & & & \lambda_{N_f-N_c} \\ & & & k_0 & & & & \\ & & & & \ddots & & 0 & \\ & & & & \tilde{k}_0 & & & \end{array}\right) \Bigg\} N_c \qquad (4.\ 42)$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{2N_c-N_f}$$

$$k, \lambda \in \mathrm{R} \qquad \tilde{k} \in \mathrm{C}$$

ただし

$$k_a \tilde{k}_a = \rho \quad k_0 \tilde{k}_0 = \rho \qquad (4.\ 43)$$

$$\lambda_a^2 = k_a^2 - k_0^2 - |\rho|^2 \left(\frac{1}{k_a^2} - \frac{1}{k_0^2}\right) \qquad 1 \leqq a \leqq N_f - N_c \qquad (4.\ 44)$$

$$(4.\ 45)$$

ただし、$k \neq 0, \lambda \neq 0$ として、(4. 44) は (4. 38)(4. 39) より ν を消去したものである。
このときのモジュライの自由度は実自由度で

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \underbrace{N_f - N_c + 1}_{k_a\ k_0} + \underbrace{N_f - N_c}_{\lambda_a} + \underbrace{2(N_f - N_c + 1)}_{\tilde{k}_a\ \tilde{k}_0} + \underbrace{2}_{\rho} - \underbrace{2(N_f - N_c + 1)}_{(4.\ 43)} - \underbrace{N_f - N_c}_{(4.\ 44)} \\ &= N_f - N_c + 3 \qquad (4.\ 46) \end{aligned}$$

となる。

このとき、ゲージ群は $N_f \geqq 2N_c$ のとき同様完全に壊れている。
従って、massless (neutral) Hypermultiplets の数は $N_f \geqq 2N_c$ のときと同じく

$$\mathcal{H} = N_f N_c - N_c^2 + 1 \qquad (4.\ 47)$$

となっている。

次に大局的対称性について調べる。
ゲージ不変オペレーターは $N_f \geqq 2N_c$ のときと同じく、メソン M、バリオン B、$\widetilde{B}$ で構成されている。
$B, \widetilde{B} \neq 0$ より $U(1)_B$ は壊れる。
M の真空期待値は (4. 41)(4. 42) より

$$M = \left(\begin{array}{c|c} \overbrace{\begin{array}{ccc} \rho & & \\ & \ddots & \\ & & \rho \end{array}}^{N_c} & \overbrace{\begin{array}{ccc} k_1\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & k_{N_f-N_c}\lambda_{N_f-N_c} \end{array}}^{N_f-N_c} \\ \begin{array}{c} 0 \\ \\ \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ \\ \end{array} \end{array} \right) \Bigg\} N_f \tag{4. 48}$$

この M の真空期待値を不変に留めるようなフレーバー対称性の部分群を求める。
前節同様にして、大局的対称性は
$SU(N_f) \times U(1)_B \longrightarrow U(2N_c - N_f) \times U(1)^{N_f - N_c - 1}$
に破れる。
このときも、$B, \widetilde{B}$ によってこれ以上破れないとする。
すると NG ボゾン数は

$$\mathcal{G} = -4N_c^2 + 4N_cN_f - N_f + N_c + 1 \tag{4. 49}$$

となる。

このとき massless (neutral) Hypermultiplets は (4. 46)(4. 47)(4. 49) より

$$\mathcal{G} + \mathcal{P} = 4\mathcal{H} \tag{4. 50}$$

を確かに満たす。
よって、この branch を正しく記述出来ていると言うチェックが出来た。

4.3.3 non Baryonic Branch

$N_f < N_c$ では $B, \widetilde{B}$ が存在しないのと言うのは自明であるが、$N_f \geqq N_c$ でも $Q, \widetilde{Q}$ の真空期待値のとり方によっては $B, \widetilde{B}$ が存在しない。
$Q, \widetilde{Q}$ の真空期待値は $N_f \geqq 2N_c$ のとき (4. 19)(4. 20) で表せ、$N_c \leqq N_f < 2N_c$ のときは (4. 41)(4. 42) で表せるがどちらの場合も最低 1 つ以上の行がすべて 0 になると $B, \widetilde{B} = 0$

となる。このようなときの真空の構造について調べる。

- $N_f \geqq 2N_c$ のとき

すべて 0 となる行を b 行目する、即ち $k_b = \tilde{k}_b = \lambda_b = 0$ とする。
このとき (4. 22)(4. 23) より

$$\nu = \rho = 0 \tag{4. 51}$$

が従う。
よって (4. 22)(4. 23) は

$$k_a \tilde{k}_a = 0 \tag{4. 52}$$

$$\lambda_a^2 = k_a^2 - |\tilde{k}_a|^2 \tag{4. 53}$$

となる。
もし、$k_a = 0$ とすると $\lambda_a^2 = -|\tilde{k}_a|^2$ となってしまうが 、$\lambda \in$R なので $\tilde{k}_a = \lambda_a = 0$ でないとならないことがわかる。0 でない行の数を r とすると、$Q\tilde{Q}$ の真空期待値は再び対角化して

$$Q = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} k_1 & & & 0 & & & 0 & & \\ & \ddots & & & \ddots & & & \ddots & \\ & & k_r & & & 0 & & & \\ & & & & & & & & \\ & 0 & & & 0 & & & 0 & \end{array}\right) \tag{4. 54}$$

$${}^t\tilde{Q} = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & & & k_1 & & & 0 & & \\ & \ddots & & & \ddots & & & \ddots & \\ & & 0 & & & k_r & & & \\ & & & & & & & & \\ & 0 & & & 0 & & & 0 & \end{array}\right) \tag{4. 55}$$

ただし $\qquad k_a \in \mathrm{R}$

となる。
このとき、バリオンを作ってはならないので r は $r < N_c$ でなければならない。さらに今 $N_f \geqq 2N_c$ であるので $2r < N_f$ と書ける。
よって r の条件は

$$r < \left[\frac{N_f}{2}\right] \tag{4. 56}$$

となる。

- $N_c < N_f < 2N_c$

ある行をすべて 0 にするには $k_a = \tilde{k}_a = \lambda_a = 0$ か $k_0 = 0$ でなければならないが、section 4.3.2 で調べたように、$\lambda_a = 0$ とするとそれに対応する $k_a, \tilde{k}_a$ は $k_0, \tilde{k}_0$ になるので、non Baryonic Branch への条件は $k_0, \tilde{k}_0 = 0$ とすれば十分である。
これより、flat 条件 (4. 37)∼(4. 39) を使うと、

$$\tilde{k}_a = 0 \qquad 1 \leqq a \leqq N_f - N_c \tag{4. 57}$$

$$k_a = \lambda_a \tag{4. 58}$$

が従うので、$Q, \widetilde{Q}$ の真空期待値は $N_f \geqq 2N_c$ のときとまったく同じ形 (4. 55) となる。

$N_c < N_f < 2N_c$ のときの r に対する制限 $r \leqq N_f - N_c$ は、$N_f < 2N_c$ より $N_f - N_c < \frac{N_f}{2}$ と書き直せるので、1 まとめに書けて、non Baryonic Branch は asymptotic free, non free によらず、(4. 54)(4. 55) で記述される。

以上の構成から、Baryonic Branch と non Baryonic Branch は branch は接していることがわかる。また、このようにして出来た non Baryonic Branch は non Baryonic Branch 全体を記述している。従って、Higgs branch の全体像は各 r に対して non Baryonic Branch が広がっているところに、Baryonic Branch が接していて、その接点は Baryonic Branch から見ると ゲージ群が大きくなり massless gluons が現れる特異点となっている、というものになっている。

このときの、non Baryonic Branch の モジュライの実自由度は

$$\mathcal{P} = r \tag{4. 59}$$

ゲージ群は、(4. 54)(4. 55) より、一般に $SU(N_c - r)$ に破れていて $N_f - 2r$ massless fundamental hypermultiplets となっている。
よって、massless neutral hypermultiplets の数は

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= N_f N_c - (dim\ SU(N_c) - dim\ SU(N_c - r)\ ) - \underbrace{(N_c - r)(N_f - 2r)}_{\text{fundamental hypermultiplets}} \\ &= r(N_f - r) \end{aligned} \tag{4. 60}$$

次に、大局的対称性の破れを調べる。

ゲージ不変パラメーターは、メソン M のみなので、$U(1)_B$ は破れない。
また M の真空期待値は

$$M = Q\tilde{Q} = \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{matrix}}^{r} & & \overbrace{\begin{matrix} k_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & k_r^2 \end{matrix}}^{r} & & \overbrace{\begin{matrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{matrix}}^{N_f-2r} \\ & & 0 & & \end{pmatrix} \tag{4. 61}$$

となっている。この M を不変にする 大局的対称性は、section 4.3.1 と同様にして
$SU(N_f) \times U(1)_B \longrightarrow U(N_f - 2r) \times U(1)^{r-1} \times U(1)_B$ となることがわかる。
従って、NG ボゾン数は

$$\mathcal{G} = r\ (4N_f - 4r - 1) \tag{4. 62}$$

となっている。

このとき、(4. 59)(4. 60)(4. 62) より確かに

$$\mathcal{G} + \mathcal{P} = 4\mathcal{H} \tag{4. 63}$$

を満たしている。

4.4 Mixed branch

ここでも、massless のときを考える。このとき、flat 条件 (4. 5)∼(4. 9) と $\Phi, Q, \tilde{Q} \neq 0$ を満たす解は次のようになっている。

$$\Phi = (\underbrace{0, \cdots, 0}_{r}, \underbrace{\phi_{r+1}, \cdots, \phi_{N_c}}_{N_c - r}) \qquad \sum_i \phi_i = 0 \tag{4. 64}$$

$$Q = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} k_1 & & & 0 & & & 0 & & \\ & \ddots & & & \ddots & & & \ddots & \\ & & k_r & & & 0 & & & \\ & 0 & & & 0 & & & 0 & \end{array}\right) \tag{4. 65}$$

$${}^t\tilde{Q} = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & & & k_1 & & & 0 & & \\ & \ddots & & & \ddots & & & \ddots & \\ & & 0 & & & k_r & & & \\ & 0 & & & 0 & & & 0 & \end{array}\right) \tag{4. 66}$$

この解が意味するところは、Mixed branch とは クーロン branch と non Baryonic Branch とをつないでいるということである。
つまり、クローン branch $\Phi \neq 0, Q, \widetilde{Q} = 0$ から non Baryonic Branch に近づいていくとき、 ゲージ $SU(r) \times U(1)^{N_r - r}$ N_f フレーバー理論に拡大される特異点を通って、non Baryonic Branch 側のゲージ $SU(N_c - r)$ $N_f - 2r$ フレーバー理論に抜けて行く事が出来ると言う事を意味している。この意味で、Mixed brach を non Baryonic branch と呼ぶ。

4.5 古典的モジュライ空間のまとめ

以上の議論により、古典的なモジュライの構造がわかった。
全体像は Figure 5 のようになっている。

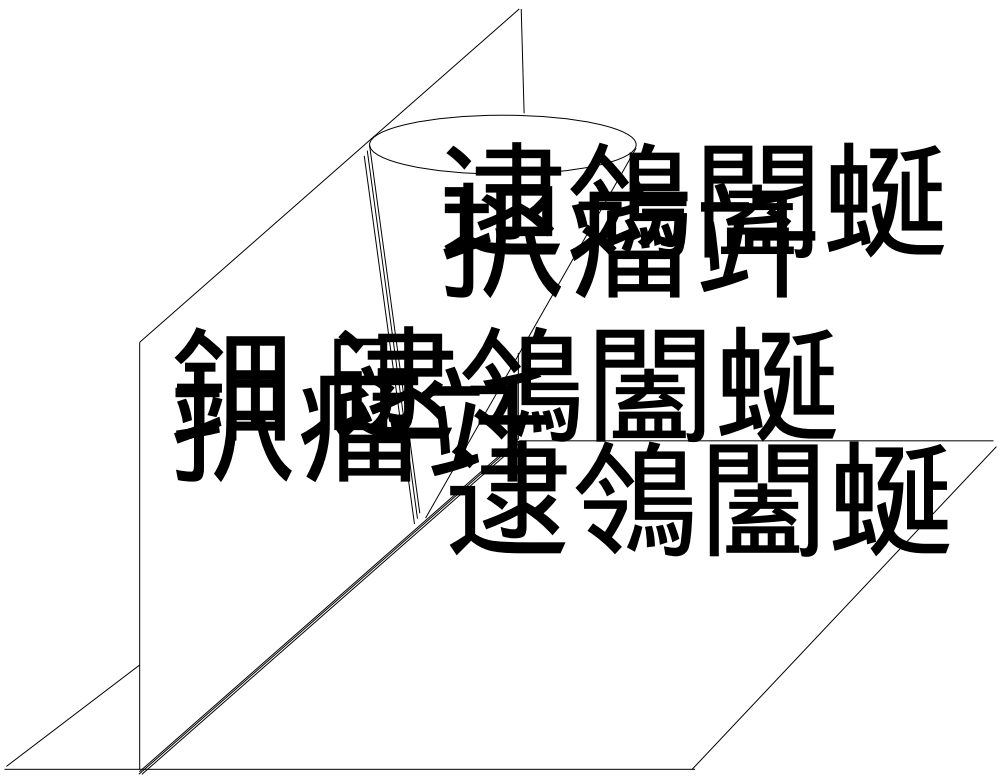

Figure 5: 古典的モジュライ

non Baryonic Branch と Baryonic Branch は ‘A‘ で接している。
Baryonic Branch 側から見ると、‘A‘ は特異点になっていて、ゲージ $SU(N_c - r)$ $(N_f - 2r)$ フレーバー に回復する特異点を通って、non Baryonic Branch に滑らかにつながっている。

また、non Baryonic Branch の板は 1 枚しか描いてないが、各 r について存在している。

'B' で ゲージ $SU(r) \times U(1)^{N_r - r}$ N_f フレーバー理論になるクローン branch の特異点と、non Baryonic Branch (Mixed branch) に滑らかにつながっている。

'A'と'B'が交差している Baryonic root は、Higgs branch と クーロン branch の原点になっていて、すべての対称性が回復する、ゲージ $SU(N_c)$ N_f フレーバーの特異点となっている。

4.6 量子論的 Higgs branch と非繰り込み定理

古典的なモジュライが求まったので、これが量子補正をどのように受けるか考える。

理論に
neutral Hyper multiplets $Q^i, \widetilde{Q}_i \quad i = 1, \ldots, \mathcal{H}$
$\mathcal{N} = 2$ Vector mutilplets $\Phi^a \qquad a = 1, \ldots, \mathcal{V}$
が含まれるとき、ケーラーポテンシャルが

$$\mathcal{K}(Q^i, \widetilde{Q}^i, \Phi^a, Q^{i+}, \widetilde{Q}_i^\dagger, \Phi^{a+})$$

で与えられているとする。
すると、モジュライの計量は、section 2.5 で述べたように 超対称性を持つ理論のモジュライの計量はケーラーポテンシャルの 2 階微分で与えられる。このとき、もし

$$(\partial_{Q^i}\partial_{\Phi^{a+}}\mathcal{K})\partial_\mu q^i \partial^\mu \phi^{a+} \qquad \begin{pmatrix} q^i \in Q^i \\ \phi^a \in \Phi^a \end{pmatrix} \text{のスカラー場} \tag{4. 67}$$

という運動項があるとすると、$\mathcal{N} = 2$ SUSY が存在するためには $\mathcal{N} = 2$ Vcetor multiplets に含まれるゲージ場 A_μ と、Hyper multiplet の成分を含む運動項が必要となる。 ところが、対となるべき Hyper multiplet にはローレンツの足 μ だけを持った場は存在しないので、ラグランジアンのローレンツ不変性より、このような項は禁止される。
よって、ケーラーポテンシャルは $\mathcal{K} = \mathcal{K}_H(Q^i, \widetilde{Q}^i, Q^{i+}, \widetilde{Q}_i^\dagger,) + \mathcal{K}_V(\Phi^a, \Phi^{a+})$
と、Higgs branch とクーロン branch に分離することがわかる。
つまり、量子補正を受けてもこの 2 つの branch は混ざったりせず、局所構造は保存されるのである。

さらに、Higgs branch は次のように考えると、「非繰り込み定理」が成立し、量子補正を受けないことがわかる。

まず、質量がないときを考える。
$Q, \widetilde{Q}$ は 結合定数 τ を用いて、$\sqrt{\tau}(Q, \widetilde{Q}) \to (Q, \widetilde{Q})$ と再定義すると、$Q, \widetilde{Q}$ に関する項すべてから、τ を消すことが出来る。
ところで、 τ はスケール不変パラメーター Λ を用いて $\tau \sim \ln \Lambda$ と表せるのであるが、古典極限 $\Lambda \to 0$ に対して、$Q, \widetilde{Q}$ に関する項は τ を含んでないので、Higgs branch のケーラーポテンシャルは変化しない。
従って、質量がないとき Higgs branch は量子補正を受けない。
次に、質量項 m があったとしても、フレーバー対称性を仮想的にゲージ化し、m をバックグラウンド $\mathcal{N} = 2$ Vector superfield とすると、先に示したように、Higgs branch のケーラーポテンシャルは Vector superfield "m" によれないので、やはり Higgs branch は量子補正を受けない。

従って、Higgs branch の非繰り込み定理が言えた。

一方、クーロン branch は τ, m によるので、量子補正を受ける。(section 2 はこれを正確に解いたものであった。)
ところが、モジュライの局所的構造は保存されなくてはならないので、クーロン branch が量子補正を受けると Baryonic Branch や non Baryonic Branch は形を変えずに、クーロン branch の上を移動する事になる。

4.7 量子論的クーロン branch

Coulomb branch の強結合領域にある Baryonic Branch の root を、 $\mathcal{N} = 2$ SQCD ですでに求まっている厳密解を用いて解析し、有効理論を求めていくことにする。
Baryonic Branch の root は古典的に Higgs branch の原点になっているので、非繰り込み定理より、量子論的にも Higgs branch の原点になっている。また、古典的にはクーロン branch の原点であったが、後で議論するように量子補正でクーロン branch の原点からずれることわかる。

以後、$N_f < 2N_c$ の asymptotic free 理論に限ってこの Baryonic root に対する議論を行うことにする。

4.7.1 厳密解

これまで、(Ref [20, 21, 22, 23]) などによってクーロン branch の正確な解が与えられている。

$N_f = 2N_c$ スケール不変理論の curve は[5] (Ref [22]) より

$$y^2 = \prod_{a=1}^{N_c}(x-\phi_a)^2 + h(h+2)\prod_{i=1}^{N_f}(x+hm_s+m_i) \tag{4. 68}$$

ここで ϕ_a はモジュライのパラメーターで $\Phi = (\phi_i, \cdots, \phi_{N_c}) \quad \sum \phi_a = 0$
$m_s = \frac{1}{N_f}\sum_i m_i$
$h = h(\tau) = \frac{2\theta_1^4(\tau)}{\theta_2^4(\tau)-\theta_1^4(\tau)}$ のモジュラー関数
と与えられている。
S-双対変換は $h(\tau) \to h(-1/\tau) = -h(\tau) - 2$ で与えられるので、質量に対する S-変換は以下のようになる。

$$\left(\begin{array}{ccccc} m_i & \to & \tilde{m}_i & = & m_i - 2m_s \\ m_s & \to & \tilde{m}_s & = & -m_s \end{array} \right. \tag{4. 69}$$

一旦 (4. 68) が与えられると、$N_f < 2N_c$ の asymptotic free の理論は、以下のようにいくつかのフレーバーの質量を $m \to \infty$ として積分する事によって得られる。

- $N_f = 2N_c - 1$ のとき

$m_{2N_c} \to \infty$ とする事によって、ゲージ $SU(N_c)$ $N_f = 2N_c - 1$ フレーバー理論が得られる。
スケールマッチングは $\Lambda = 16 m_{2N_c} e^{i\pi\tau}$ として

$$y^2 = \prod_{a=1}^{N_c}(x-\phi_a)^2 + 4\Lambda\prod_{i=1}^{N_f}(x+m_i+\frac{\Lambda}{N_c}) \tag{4. 70}$$

- $N_f < 2N_c - 1$ のとき

$m_i \to \infty \quad (N_f + 1 \leqq i \leqq 2N_c)$ とする事によって、ゲージ $SU(N_c)$ N_f フレーバー理論が得られる。
スケールマッチングは $\Lambda^{2N_c - N_f} = 16 \prod_{i=N_f+1}^{2N_c} m_i e^{i\pi\tau}$ として

$$y^2 = \prod_{a=1}^{N_c}(x-\phi_a)^2 + 4\Lambda^{2N_c-N_f}\prod_{i=1}^{N_f}(x+m_i) \tag{4. 71}$$

これらの curve は全て genus $N_c - 1$ の 超楕円リーマン面を表していて、degree $2N_c$ の多項式になっている事が特徴である。それを一般に

$$y^2 = P_{2N_c}(x, \phi_a, m_i, \Lambda(\tau)\ ) \tag{4. 72}$$

[5] 一般のクーロン branch はゲージ $SU(N_c) \to U(1)^{N_c-1}$ に破れている

と書く。

ところで、BPS 状態の Hyper multiplets の質量は section 2.10 で与えたように (a, a_D) の線形結合で表せた。さらに、この (a, a_D) は section 2.13 で調べたように、リーマン面の周期であった。従って、2 つ以上の $P_{2N_c}(x)$ の零点がくっつくとリーマン面がつぶれるので、その周期で質量が与えられていた BPS 状態の粒子は massless になる。つまり、逆に言えば、零点が縮退したときに 0 となる周期を調べれば massless になる粒子がわかるのである。

4.7.2 Baryonic Branch root の有効理論

ここでは Baryonic Branch root に クーロン branch から近付いて行ったときの有効理論を調べる。microscopic には強結合であるが、section 2 で議論した $\mathcal{N} = 2$ 理論の双対性を用いることにより、弱結合で議論することが可能になる。

section 4.6 で議論した非繰り込み定理により Baryonic Branch は形を変えないが、クーロン branch は量子補正を受ける。一般に、クーロン branch はインスタントンアノマリーで $U(1)_R$ が $Z_{N_c-\widetilde{N}_c}$ $(\widetilde{N_c} \equiv N_f - N_c)$ に破れることが知られている。[6]
この $Z_{N_c-\widetilde{N}_c}$ により一般に特異点が分裂してしまう。ところが、Baryonic Branch は形を変えないので Baryonic Branch root は 1 つしかないはずである。よって、Baryonic Branch root のクーロン branch での座標は $Z_{N_c-\widetilde{N}_c}$ 固定点でなければならない、即ち、ゲージ群に含まれる Weyl 群の自由度を除いて

$$\begin{aligned} \Phi_{bb} &= (\overbrace{0, \cdots, 0}^{\widetilde{N}_c}, \varphi\omega, \cdots, \varphi\omega^{N_c-\widetilde{N_c}}) \\ \omega &= e^{\frac{2\pi i}{N_c-\widetilde{N_c}}} \end{aligned} \tag{4. 73}$$

でなければならない。ただし、φ は任意の実数。この Φ_{bb} は確かに $tr\ \Phi_{bb} = 0$ を満たしている。
massless の系を考えると、このときの有効理論は、ゲージ $SU(\widetilde{N_c}) \times U(1)^{N_c-\widetilde{N_c}}$ N_f massless フレーバーであると思われる。
実際、次のように特異点から少しずらしてみるとわかる。

$$\Phi = \Phi_{bb} + \delta\Phi \tag{4. 74}$$

ただし

$$\delta\Phi = (\phi_i, \cdots, \phi_{\widetilde{N_c}}, \underbrace{0, \cdots, 0}_{N_c-\widetilde{N_c}}) \quad \sum \phi = 0 \tag{4. 75}$$

[6] section 2.7 では $N_c = 2, N_f = 0$ で、確かに Z_4 に破れている

とする。ここで、φ を ϕ, x に比べて大きいとすると、(4. 71) は

$$y^2 = \varphi^{2N_c-\widetilde{N_c}} \prod_a^{\widetilde{N_c}} (x-\phi_a)^2 + 4\Lambda^{N_c-\widetilde{N_c}} x^{N_f} \tag{4. 76}$$

と変形される。これは (4. 71) と比較して、ゲージ群 $SU(\widetilde{N_c})$ N_f massless フレーバー理論になっていることが読み取れる。
今、$N_f < 2N_c$ の範囲を考えているので、$N_f > 2\widetilde{N_c}$ となり、これは IR free であるから、低エネルギーでは弱結合となっている。本来、Baryonic Branch root は強結合領域であるが、双対な描像で見ているから弱結合になっているのである。
そのため低エネルギーでこの理論は量子補正を受けないと考えられる。ところが、これだけだと、section 4.3.2 で示した低エネルギーの neutral Hyper multiplets 数 $\mathcal{H}$ に一致しないので、microscopic 理論と同じ低エネルギー理論を記述しない。量子補正以外で microsopic 理論と同じ低エネルギー有効理論になるためには、他に massless 粒子がでてきて有効理論を補正している必要がある。
その massless 粒子はゲージの $U(1)$ 部分に charge している massless singlet hyper multiplets 、つまり、モノポールであると考えられる。

このような描像を満たす点が実際に存在することを以下で示し、それが microscopic 理論同じ低エネルギー理論を導くことを次節以降で確かめていくことにする。

Φ の真空期待値 (4. 73) に対して $\varphi = \Lambda$ とすると、curve(4. 71) は

$$y^2 = x^{2\widetilde{N_c}} (x^{N_c-\widetilde{N_c}} + \Lambda^{N_c-\widetilde{N_c}})^2 \tag{4. 77}$$

となる。
この curve より 相互局所性 (リーマン面の零点が 2 個くっつくと、1 つのモノポールが massless になること) を仮定すると、$N_c - \widetilde{N_c}$ 個の各ゲージ $U(1)$ に charge しているモノポールが massless になっていることがわかる。

4.7.3 ゲージ群の $U(1)$ の部分に対する charge Part 1

ゲージ群 $SU(\widetilde{N_c})$ N_f フレーバーのゲージ群の $U(1)^{N_c-\widetilde{N_c}}$ 部分に対する charge を求める。以下、このフレーバーを magnetic クォークと呼ぶことにする。

まず、モノポールの周期を $\alpha_i \quad i = 1, \ldots, N_c - \widetilde{N_c}$ とする。
次に、magnetic クォークの周期は、ゲージ $SU(\widetilde{N_c})$ の縮退している $2\widetilde{N_c}$ 個のリーマン面の零点に対して、小さい $\delta\Phi$ を加えて $SU(\widetilde{N_c}) \to U(1)^{\widetilde{N_c}-1}$ に破って縮退を解いたときに、その $\widetilde{N_c}$ 個の周期 $\gamma_\alpha \quad \alpha = 1, \ldots, \widetilde{N_c}$ とする。ただし、γ_α は互いに交わらないように

する。
すると、全ての特異点を囲んだものは

$$\sum_i \alpha_i + \sum_\alpha \gamma_\alpha = 0 \tag{4. 78}$$

を満たす。
ところが、これより、$\sum \gamma_\alpha = -\sum \alpha_i \neq 0$ であるから、γ_α という周期は、$SU(\widetilde{N_c})$ のカルタン部分の charge のトレースレスに反する。
正しく規格化された周期は

$$\beta_\alpha = \gamma_\alpha + \frac{1}{\widetilde{N_c}} \sum_i \alpha_i \tag{4. 79}$$

となる。これは確かに $\sum \beta_\alpha = 0$ を満たす。
従って、フレーバーの周期は $SU(\widetilde{N_c})$ のカルタン部分の $U(1)^{\widetilde{N_c}-1}$ に正しく charge した β_α を用いて

$$\gamma_\alpha = \beta_\alpha - \frac{1}{\widetilde{N_c}} \sum_i \alpha_i \tag{4. 80}$$

となる。
ここで、モノポールの各ゲージ $U(1)^{N_c-\widetilde{N_c}}$ に対する charge を -1 と規格化すると、magnetic クォークは全てのゲージ $U(1)^{N_c-\widetilde{N_c}}$ に対して charge $\frac{1}{\widetilde{N_c}}$ を持っていることがわかる。

まとめると、magnetic クォークを q、各モノポールを e_i と書くと、Baryonic Branch root の有効理論はゲージに対して次のように charge している。

	$SU(\widetilde{N_c})$	$U(1)_1$	$\cdots$	$U(1)_{N_c-\widetilde{N_c}}$
$N_f \times q$	$\widetilde{N_c}$	$\frac{1}{\widetilde{N_c}}$	$\cdots$	$\frac{1}{\widetilde{N_c}}$
e_1	1	-1	$\cdots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$e_{N_c-\widetilde{N_c}}$	1	0	$\cdots$	-1

(4. 81)

4.7.4 ゲージ群の $U(1)$ の部分に対する charge Part 2

magnetic クォークの $U(1)^{N_c-\widetilde{N_c}}$ に対する charge を $N_f = 2N_c$ のスケール不変理論から $N_f < 2N_c$ に破り、それに双対変換を施すことによって求める。前節の方法では途中に相互局所性などのいくつかの仮定をおいたので、この節での結果との無矛盾性で、その正当性のチェックできる。

$N_f = 2N_c$ のとき、双対変換は (4. 69) で与えられていた。

$$\begin{pmatrix} m_i & \to & \tilde{m}_i & = & m_i - 2m_s \\ m_s & \to & \tilde{m}_s & = & -m_s \end{pmatrix}$$

ただし、$m_s = \frac{1}{N_f}\sum m_i$

まず、M より大きい質量のクォークは低エネルギーに効いてこないとして、$N_c - \widetilde{N_c}$ $(= 2N_c - N_f)$ フレーバーに次のように大きい質量を与えて、N_f フレーバーの理論に破る。

$$m_i = (\underbrace{Mx_i}_{N_c-\widetilde{N_c}} : \underbrace{0}_{N_f}) \qquad x_i > 1 \tag{4. 82}$$

この質量に対して双対変換をしてやると

$$m_i \to \tilde{m}_i = (\underbrace{Mx_i - \frac{M}{N_c}\sum x}_{N_c-\widetilde{N_c}} : \underbrace{-\frac{M}{N_c}\sum x}_{N_f}) \tag{4. 83}$$

となる。
次に、ゲージ群 $SU(\widetilde{N_c}) \times U(1)^{N_c-\widetilde{N_c}}$ N_f magnetic クォーク $\bigoplus$ $(N_c - \widetilde{N_c})$ モノポール にするためには、(4. 12) より、$\mathcal{N} = 2$ Vector superfield Φ が次の真空期待値をとればよいことがわかる。ただし、m はフレーバー対称性、Φ はゲージ群で変換されている事に注意する。

$$\Phi = (\underbrace{-Mx_i + \frac{M}{N_c}\sum x}_{N_c-\widetilde{N_c}} : \underbrace{\frac{M}{N_c}\sum x}_{\widetilde{N_c}}) \tag{4. 84}$$

これは確かに $tr\ \Phi = 0$ を満たす。
また、このように Φ の値によって、$N_c - \widetilde{N_c}$ singlets が massless になるということは、この singlets がモノポールであるという描像が正しいという事を意味している。
$N_f = 2N_c$ ではスケール不変なので、この Φ は量子補正は受けないと考えられる。
従って、各ゲージ $U(1)$ に対して モノポールの charge を -1 と規格化すると、元のゲージ $SU(N_c)$ の生成子のトレースレスより、magnetic クォークは各ゲージ $U(1)$ に対して charge $\frac{1}{N_c}$ を持たなければならないことがわかる。
これは、前節の結果と一致している。

4.7.5 magnetic クォークの $U(1)_B$ charge

magnetic クォークの $U(1)_B$ charge も $N_f = 2N_c$ スケール不変理論から出発して求めることが出来る。モノポールの $U(1)_B$ charge は 0 である。

magnetic クォークの $U(1)_B$ charge を求めるために、まず m_s の意味について考えよう。
一般に、質量 m^i_j は $m^i_j = m'_s\delta^i_j + m_A T^i_j$ と展開できる。ただし、$tr\ T^i_j = 0$

m_j^i が対角化されているとすると、これより

$$m_s' = \frac{1}{N_f}\sum_i m_i \tag{4. 85}$$

従って、m_s' は今まで m_s と呼んでいたものであることがわかる。
ここで、質量パラメーター m を大局的対称性を仮想的にゲージ化したときの、バックグラウンド $\mathcal{N}=2$ Vector superfield になっていると考える。すると、m_s は 今見たように singlet であるので、$U(1)_B$ のバックグラウンド場になっていることがわかる。(m_A はフレーバー $SU(N_f)$ の随伴表現のバックグラウンド場である。)
ゲージ群 $U(1)$ に対する $\mathcal{N}=2$ Vector superfield を Ψ と書くと、super potential は

$$\mathcal{W} = \sqrt{2}n_e tr\ \widetilde{Q}\Psi Q \tag{4. 86}$$

で与えられる。このときの $Q(\widetilde{Q})$ の ゲージ群 $U(1)$ に対する charge は $n_e(-n_e)$ となる (Ref [19])。
これを利用すれば、クォーク に小さい質量を与えることによって magnetic クォーク の $U(1)_B$ を読み取ることが出来る。
クォークのバリオン数を 1 に規格化すると、クォークの singlet 質量項は

$$\mathcal{W}_{mass}/\sqrt{2} = m_s tr\ \widetilde{Q}Q \tag{4. 87}$$

となっている。
magnetic クォークの質量は前節と同様にして、次のように求められる。

まず、$N_c - \widetilde{N_c}$ フレーバーに大きい質量を与えて N_f フレーバーに破る。そして、各フレーバーに $m_s = \frac{1}{N_f}\sum_i m_i'$ となるような小さい質量を与える。

$$m_i = (\underbrace{Mx_i}_{N_c-\widetilde{N_c}} : \underbrace{m_i'}_{N_f}) \qquad m_s = \frac{1}{N_f}\sum_i m_i' \tag{4. 88}$$

双対変換 (4. 69) をすると

$$\tilde{m}_i = (\underbrace{Mx_i - \frac{M}{N_c}\sum x - \frac{1}{N_c}\sum m_i'}_{N_c-\widetilde{N_c}} : \underbrace{m_i' - \frac{M}{N_c}\sum x - \frac{1}{N_c}\sum m_i'}_{N_f}) \tag{4. 89}$$

次に、$N_c - \widetilde{N_c}$ の massless モノポールが存在するように Φ を決めると、$tr\ \Phi = 0$ より

$$\Phi = (\underbrace{-Mx_i + \frac{M}{N_c}\sum x + \frac{1}{N_c}\sum m_i'}_{N_c-\widetilde{N_c}} : \underbrace{\frac{M}{N_c}\sum x - \frac{N_c-\widetilde{N_c}}{N_c\widetilde{N_c}}\sum m_i'}_{N_f}) \tag{4. 90}$$

となる事が分かる。このとき magnetic クォークの質量は $\tilde{m}_i$ と Φ より

$$\tilde{m}'_i = m'_i - \frac{1}{\widetilde{N}_c}\sum m'_i \tag{4. 91}$$

となっている。このときの magnetic クォークの singlet mass は

$$\tilde{m}_s = \frac{1}{N_f}\sum \tilde{m}'_i = -\frac{N_c}{\widetilde{N}_c} m_s \tag{4. 92}$$

よって、magnetic クォーク の $U(1)_B$ charge は (4. 86) より $-\frac{N_c}{\widetilde{N}_c}$ と読み取れる。
この charge は section 3.9 に出てきた magnetic クォークの $U(1)_B$ charge に一致している。

4.8 Baryonic Branch root の低エネルギー有効理論

前節までで、Baryonic Branch root の有効理論のすべての対称性に対する変換性がわかった。そのような理論の低エネルギー有効理論が持つモジュライが、 section 非繰り込み定理より補正を受けないであろう 4.3.2 の古典的モジュライに一致していることを確かめる。

これまでに得られた対称性をまとめると、次のようになっている。

	$SU(\widetilde{N}_c)$	$U(1)_1$	$\cdots$	$U(1)_{N_c-\widetilde{N}_c}$	$SU(N_f)$	$U(1)_B$
$N_f \times q$	$\widetilde{N}_c$	$\frac{1}{\widetilde{N}_c}$	$\cdots$	$\frac{1}{\widetilde{N}_c}$	N_f	$-\frac{N_c}{\widetilde{N}_c}$
e_1	1	-1	$\cdots$	0	1	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$e_{N_c-\widetilde{N}_c}$	1	0	$\cdots$	-1	1	0

(4. 93)

この対称性を再現するような super potential は

ϕ を ゲージ $SU(\widetilde{N}_c)$ の Vector superfield
$\psi_k \quad (k = 1, \ldots, N_c - \widetilde{N}_c)$ をゲージ $U(1)$ の Vector superfield
とすると次のようになる。

$$\mathcal{W}/\sqrt{2} = tr(q \cdot \phi \cdot \tilde{q}) + \frac{1}{\widetilde{N}_c} tr(q \cdot \tilde{q}) \sum_k \psi_k - \sum_k \psi_k e_k \tilde{e}_k \tag{4. 94}$$

ただし、'tr' はフレーバーについての和で、'$\cdot$' はゲージについての和を表す。
各係数は、各 charge を正しく持つように決めた。
この super potential に対する flat 条件は D-term より

$$|e_k|^2 - |\tilde{e}_k|^2 = 0 \tag{4. 95}$$

$$tr\ qq^\dagger - tr\ \tilde{q}\tilde{q}^\dagger = \nu' \qquad \nu' \in \mathrm{R} \tag{4. 96}$$

$$[\phi, \phi^\dagger] = 0 \tag{4. 97}$$

F-term より

$$e_k\tilde{e}_k = \rho' \tag{4. 98}$$

$$tr\ q\tilde{q} = \rho' \qquad \rho' \in \mathrm{C} \tag{4. 99}$$

$$\psi_k e_k = \psi_k \tilde{e}_k = 0 \tag{4. 100}$$

$$(\widetilde{N}_c\phi + \sum_k \psi_k)q = \tilde{q}(\widetilde{N}_c\phi + \sum_k \psi_k) = 0 \tag{4. 101}$$

となる。
今 $N_f > 2\widetilde{N}_c$ なので Higgs branch ($\phi = \psi_k = 0$) では section 4.3.1 のときと本質的に同じで、N_c を $\widetilde{N}_c$ に変えるだけで良い。
$e_k, \tilde{e}_k$ は flat 条件とゲージ $U(1)$ を使うと完全に自由度がなくなる。
magnetic クォークの真空期待値は

$$q = \begin{pmatrix} k_1 & & 0 & & 0 & \\ & \ddots & & \ddots & & \ddots \\ & & k_{\widetilde{N}_c} & & 0 & \end{pmatrix} \tag{4. 102}$$

$${}^t\tilde{q} = \begin{pmatrix} \tilde{k}_1 & & \lambda_1 & & 0 & \\ & \ddots & & \ddots & & \ddots \\ & & \tilde{k}_{\widetilde{N}_c} & & \lambda_{\widetilde{N}_c} & \end{pmatrix} \tag{4. 103}$$

$$k_a\tilde{k}_a = \rho' \quad , \quad \lambda_a^2 = k_a^2 - \frac{|\rho'|^2}{k_a^2} - \nu' \tag{4. 104}$$

$$k_a, \lambda_a, \nu' \in \mathrm{R} \quad , \quad \tilde{k}_a, \rho' \in \mathrm{C}$$

モジュライの次元は

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \underbrace{\widetilde{N}_c}_{k} + \underbrace{2\widetilde{N}_c}_{\tilde{k}} + \underbrace{\widetilde{N}_c}_{\lambda} + \underbrace{1}_{\nu'} + \underbrace{2}_{\rho'} \underbrace{-2\widetilde{N}_c - \widetilde{N}_c}_{(4.104)} \\ &= N_f - N_c + 3 \end{aligned} \tag{4. 105}$$

これは、確かに section 4.3.2 の $\mathcal{P}$ に一致する。
このときゲージ $SU(\widetilde{N}_c) \times U(1)^{N_c - \widetilde{N}_c}$ を完全に壊すので massless neutral hyper multiplets の数は

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \underbrace{N_f\widetilde{N}_c}_{\text{magnetic クォーク}} + \underbrace{N_c - \widetilde{N}_c}_{\text{モノポール}} - dim(SU(\widetilde{N}_c) \times U(1)^{N_c - \widetilde{N}_c}) \\ &= N_f N_c - N_c^2 + 1 \end{aligned} \tag{4. 106}$$

これも、 section 4.3.2 の $\mathcal{H}$ に一致する。このためにモノポールが存在していなければならなかったのである。

次に大局的対称性は $N_f > 2\widetilde{N_c}$ なので、section 4.3.1 のときと同様にして

$$\begin{aligned} SU(N_f) \times U(1)_B &\rightarrow U(N_f - 2\widetilde{N_c}) \times U(1)^{\widetilde{N_c}-1} \\ &= SU(2N_c - N_f) \times U(1)^{N_c - \widetilde{N_c}} \end{aligned} \tag{4. 107}$$

となり、やはり section 4.3.2 に一致する。

従って、この Baryonic Branch root の低エネルギー有効理論は section 4.3.2 で求めたものに一致する。また、非繰り込み定理より Baryonic Branch 側の原点は microscopic 理論そのままであると考えられる。
つまり、これらの 2 つの理論は、同じ点に違う道を通って近づく事によって、異なるゲージ群を持つが、滑らかにつながっていて、$\mathcal{N} = 1$ 双対性の起源となっていると考えられる。

4.9 Breaking to $\mathcal{N} = 1$

$\mathcal{N} = 2$ Vector multiplet に含まれる adjoint Chiral superfield Φ に質量項 $\mathcal{W}_{mass} = \frac{1}{2}\mu tr\Phi^2$ を加えて、$\mathcal{N} = 1$ に破ったときどうなるか調べる。

- microscopic 理論

super potential は

$$\mathcal{W} = \sqrt{2}tr(Q\Phi\widetilde{Q}) + \frac{1}{2}\mu tr\Phi^2 \tag{4. 108}$$

大きい μ に対して Φ を積分すると

$$\mathcal{W} = \frac{1}{\mu}(tr\ (\widetilde{Q} \cdot Q)(\widetilde{Q} \cdot Q) - 2(tr\ \widetilde{Q} \cdot Q)^2) \tag{4. 109}$$

$\mu \rightarrow \infty$ とすると super potential はなくなる。
従って、super potential のない $\mathcal{N} = 1$ ゲージ $SU(N_c)$ N_f フレーバー理論が求まった。

- Baryonic Branch root 有効理論

まず μ は小さいとして、$\mathcal{N} = 2$ 超対称性 の摂動でどのような理論となっているか調べる。
Baryonic Branch root では section 4.7.2 で求めたように量子補正で Φ が真空期待値を持

つ。$<\phi>=<\psi_k>=0$ とすると

$$\Phi = \Lambda \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \hline & \omega & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega^{N_c-\widetilde{N_c}} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c|ccc} \phi & & & \\ \hline & \psi_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \psi_{N_c-\widetilde{N_c}} \end{array} \right) \tag{4. 110}$$

となっている。
このときの super potential は (4. 94) に質量項 $\mathcal{W}_{mass} = \frac{1}{2}\mu tr\Phi^2$ を加えて

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{bb} = \quad & \sqrt{2}tr(q\cdot\phi\cdot\tilde{q}) + \frac{\sqrt{2}}{\widetilde{N}_c}tr(q\cdot\tilde{q})\sum_k \psi_k - \sqrt{2}\sum_k \psi_k e_k\tilde{e}_k \\ & +\mu(\ \Lambda\sum_k \omega^k\psi_k + \frac{1}{2}tr\ \phi^2 + \frac{1}{2}\sum_k \psi_k^2\ ) \end{aligned} \tag{4. 111}$$

このとき、ϕ と ψ_k の F-term の flat 条件と $\phi=\psi_k=0$ より $e_k\tilde{e}_k \neq 0$ が従う。つまり、モノポール凝縮が起きている。すると、section 2.14 と同様の議論により、$e_k, \tilde{e}_k, \psi_k$ は $\sim\Lambda$ の質量ギャップが起きている。よって低エネルギーでは

$$\mathcal{W}_{bb} = \sqrt{2}tr(q\cdot\tilde{q}) + \frac{\mu}{2}tr\ \phi^2 \tag{4. 112}$$

となる。
ここで、$\mu\to\infty$ とすると、$\mathcal{N}=1$ ゲージ $SU(\widetilde{N}_c)$ N_f フレーバー理論を得る。これは、メソン M を除いて $\mathcal{N}=1$ 超対称性 の双対理論になっている。
従って $\mathcal{N}=1$ 双対性の起源を示すことが出来た。

メソンは non Baryonic Branch root について、ここまでやった議論を繰り返すと現れる。 $\mathcal{N}=1$ に破ると non Baryonic Branch root は特別な真空以外は lift され、残った真空にはメソンが存在している。$\mu\to\infty$ の極限をとると、この真空は Baryonic Branch root にくっつき、Baryonic Branch root にメソンが現れるのでないかと考えられている。(Ref [19])

5　奇妙な $\mathcal{N}=1$ 超対称 双対理論

sction 3 で見たように、ゲージ群 $SU(N_c)$ の Vector like Model は ゲージ $SU(\widetilde{N_c})$ の Vector like Model に双対であると考えられる。このような場合については、section 4 で示したように、$\mathcal{N}=2$ 超対称からの flow でその双対性の起源を探ることが出来た。ところが一方、 Vector-Vector の双対理論となっていない双対性が見つかっている (Ref [24, 25])。これらについては、section 4 の議論と同様の厳密な証明はないが、やはり双対な理論が満たすべき条件

- ゲージアノマリーを持たない。
- 大局的対称性が同じである。
- 独立なゲージ不変パラメーターはお互いの理論で一致している。

を満たしている。
さらに、非自明なチェックとして 'tHooft　 AMC も満たしている。
このような $\mathcal{N}=1$ 双対理論は数多く見つかっているが、ここでは、特に興味のある 2 つの双対性を紹介する。

5.1　$Spin(10)$ と $SU(N_f-5)$

ゲージ群 $Spin(10)$ に対して、N_f 個の Vector(10) 表現と 1 個の Spinor(16) 表現を持つ electric 理論を考える。このとき系の持つ大局的対称性は $SU(N_f)\times U(1)\times U(1)_R$ で、各場の持つ量子数をまとめると

	$G=Spin(10)$	$SU(N_f)$	$U(1)$	$U(1)_R$
Q^i_μ	10	N_f	-1	$1-\frac{8}{N_f+2}$
ψ_α	16	1	$\frac{N_f}{2}$	$1-\frac{8}{N_f+2}$
W	$45(adj)$	1	0	1

(5. 1)

ただし、$i=1,\ldots,N_f$ 、 $\mu=1,\ldots,10$ 、 $\alpha=1,\ldots,16$ のようになっている。

次に、このときのモジュライを記述する独立なゲージ不変パラメーターを求めるのだが、Vector だけのときや section 3 のときに比べると、ゲージ不変オペレーターを作るときに γ 行列がからんでいる点が大きく違っている。これら γ 行列を用いて作られたゲージ不変オペレーターは、 Firtz 変換で互いに変換し得るので、独立なものを見つける際に詳しい解析が必要となる。
今の場合、独立なゲージ不変パラメーターは

$$M^{ij} = Q^i_\mu Q^j_\mu \tag{5. 2}$$

$$Y^i = (\psi^c\gamma^\mu\psi)Q^i_\mu \tag{5. 3}$$

$$B^{i_1\ldots i_5} = (\psi^c\gamma^{\mu_1\ldots\mu_5}\psi)Q^{i_1}_{\mu_1}\cdots Q^{i_5}_{\mu_5} \tag{5. 4}$$

$$b_1^{i_1\ldots i_{10-2n}} = Q^{i_1}\cdots Q^{i_{10-2n}}W^n\epsilon_{\mu_1\ldots\mu_{10}} \tag{5. 5}$$

$$b_2^{i_1\ldots i_{9-2n}} = Q^{i_1}\cdots Q^{i_{9-2n}}W^n(\psi^c\gamma^{\mu_{10}}\psi)\epsilon_{\mu_1\ldots\mu_{10}} \qquad n=0,1,2 \tag{5. 6}$$

だけ存在する。ここで ψ^c は荷電共役である。b_1, b_2 の右辺では、Q, W のゲージの足は省略した。また、このとき、M は対称、B は完全反対称になっていることに注意しておく。

これと双対な magnetic 理論はゲージ群 $SU(N_f-5)$ を持ち、次のような量子数を持つ場を含んでいる (Ref [24])。

	$G=SU(N_f-5)$	$SU(N_f)$	$U(1)$	$U(1)_R$
q	$\overline{N_f-5}$	$\overline{N_f}$	1	$\frac{8}{N_f+2}-\frac{1}{N_f-5}$
q'	N_f-5	1	$-N_f$	$-1+\frac{16}{N_f+2}+\frac{1}{N_f-5}$
s	$\square\square$	1	0	$\frac{2}{N_f-5}$
$\widetilde{W}$	adj	1	0	1
M	1	$\square\square$	-2	$2-\frac{16}{N_f+2}$
Y	1	N_f	N_f-1	$3-\frac{24}{N_f+2}$

(5. 7)

また、この理論は super potential

$$\mathcal{W} = M^{ij}q_i^a s_{ab}q_j^b + det\ s + Y^i q_i^a q'_a \tag{5. 8}$$

を持つ。

ここで、この理論でのゲージ不変オペレーターを考えて見よう。まずは独立なものとして fundamental に現れている singlet M, Y と

$$B^{i_1\ldots i_5} = \epsilon^{i_1\ldots i_5 j_1\ldots j_{N_f-5}}q_{j_1}^{a_1}\cdots q_{j_{N_f-5}}^{a_{N_f-5}}\epsilon_{a_1\ldots a_{N_f-5}} \tag{5. 9}$$

$$b_1^{i_1\ldots i_{10-2n}} = \epsilon^{i_1\ldots i_{10-2n}j_1\ldots j_{N_f-10+2n}}q_{j_1}\cdots q_{j_{N_f-10+2n}}s^{N_f-8+n}\widetilde{W}^{2-n}q'\epsilon^{a_1\ldots a_{N_f-5}} \tag{5. 10}$$

$$b_2^{i_1\ldots i_{9-2n}} = \epsilon^{i_1\ldots i_{9-2n}j_1\ldots j_{N_f-9+2n}}q_{j_1}\cdots q_{j_{N_f-9+2n}}s^{N_f-7+n}\widetilde{W}^{2-n}\epsilon^{a_1\ldots a_{N_f-5}} \qquad n=0,1,2 \tag{5. 11}$$

が考えられる。ただしやはり b_1, b_2 の右辺では、完全反対称テンソル以外のゲージの足は省略した。

実は super potential (5. 8) により、これら以外のゲージ不変オペレーターはうまく独立でなくなり、確かに electric 理論のものと一致している事が確かめられる。また、この 2 つの理論は、'tHooft AMC を満たしており、双対な関係にあると考えられる。

この双対性は section 3 で見たものと比べて、更に奇妙さを増している。ゲージ群が electric 理論では $SO(10)$ なのに対し、 magnetic 理論では $SU(N_f-5)$ という奇妙な対応をしている事に加えて、フレーバー対称性についても、どちらもカイラルな理論になっている。一方、$\mathcal{N}=2$ 理論は Vector like な Model しか記述できないので、少なくとも section 4 で説明したような単純な解析では、この Model の対称性の起源を探る事はできない。

5.2 $Spin(7)$ と $SU(N_f-4)$

次に electric として、ゲージ群 $Spin(7)$ に対して 8 表現の Spinor が N_f 個ある理論を考える。この electric は Vector like Model になっている。
この理論の大局的対称性は $SU(N_f)\times U(1)_R$ で、量子数は

	$G=Spin(7)$	$SU(N_f)$	$U(1)_R$
ψ	8	N_f	$1-\frac{5}{N_f}$
W	$21(adj)$	1	1

(5. 12)

となっている。また、このときの独立なゲージ不変オペレーターは

$$M^{ij} = \psi^{ci}\psi^{j} \tag{5. 13}$$

$$B^{i_1\cdots i_4} = (\psi^{ci_1}\gamma^{\mu}\psi^{i_2})(\psi^{ci_3}\gamma^{\mu}\psi^{i_4})+\frac{2}{3}(\psi^{ci_1}\gamma^{\mu\nu}\psi^{i_2})(\psi^{ci_3}\gamma^{\mu\nu}\psi^{i_4}) \tag{5. 14}$$

で、M は対称、B は完全反対称である。

これと双対な magnetic 理論は、ゲージ群 $SU(N_f-4)$ と大局的対称性 $SU(N_f)\times U(1)_R$ を持ち、

	$G=SU(N_f-4)$	$SU(N_f)$	$U(1)_R$
q	$\overline{N_f-4}$	$\overline{N_f}$	$\frac{5}{N_f}-\frac{1}{N_f-4}$
s	$\square\square$	1	$\frac{2}{N_f-4}$
$\widetilde{W}$	adj	1	1
M	1	$\square\square$	$2-\frac{10}{N_f}$

(5. 15)

のような場と super potential

$$\mathcal{W}=M^{ij}q_i^a s_{ab}q_j^b+det\ s \tag{5. 16}$$

を持つ。また、独立なゲージ不変パラメーターは

$$B^{i_1\cdots i_4}=\epsilon^{i_1\cdots i_4 j_1\cdots j_{N_f-4}}q_{j_1}^{a_1}\cdots q_{i_{N_f-4}}^{a_{N_f-4}}\epsilon_{a_1\cdots a_{N_f-4}} \tag{5. 17}$$

と fundamental に singlet で含まれている M となり、 electric な理論のものと一致している。
また q の charge はこの B を構成するように決めた。
これらの 2 つの理論も 'tHooft AMC を満たすことに加えて、前節で与えた $Spin(10)$ の理論の flow からこの結果を導出できることも確かめられている (Ref [24])。従って、やはり双対な関係にあると考えられる。

この双対性はまた更に奇妙さを増している。なぜなら、electric では Vector like Model であったのに、magnetic は今見たように Chiral Model の双対性になっているからであ

る。
また、このような特徴の他に、$Spin(10)$ あるいは $Spin(7)$ のどちらの場合においても magnetic の理論には singlet や (magnetic) クォークの他に対称テンソル場 s が現れていることが、これらの Model の特徴となっている。実は、他の $Spin$ 群 のときにも同様に、magnetic 理論には 対称テンソル場が現れることが知られており (Ref [26, 27])、この対称テンソル場が $Spin - SU$ 双対性の特徴の 1 つとなっている。

6 議論

$\mathcal{N}=1$ 理論では、前節までに紹介した双対性以外にも、非常に多くの双対性が発見されている。(Ref [11, 28, 29, 30, 31, 32])
特に、(Ref [11]) で論じられているゲージ群が SO 同志の双対性と USp 同志の双対性については 、section 4 の議論とまったく同様にして $\mathcal{N}=2$ 超対称性の立場から起源を探ることがなされている。
しかし、前節のように Vector like Model でなく、しかも、ゲージ群の種類さえも異なるような双対性については、現在のところ起源はわかっていない。このように、まだ起源のわかっていない $\mathcal{N}=1$ 理論の起源について考察する事がこれからの課題となってくる。またこのとき、すべての $\mathcal{N}=1$ の理論の双対性の起源が同じものであるのかどうかを調べていきたい。

以上を動機として、現在, ゲージ群が Spin(10) で 任意の数の Vector(10 表現) と Spinor(16 表現) を場として含む理論の持つ双対性について考察中である。また、前節で述べたように、Spin-SU 双対性となっているなら Symmetric tensor を magnetic な理論が含むという特徴を持っていたため、同時に ゲージ群が $SU(N_c)$ で Symmetric tensor を含む場合も考察している。

ゲージ群を Spin(10) に選んだ理由としては、例外群である E_6 の最大部分群が $Spin(10)\times U(1)$ であること、また SUSY GUT との関連性等が強く挙げられる。GUT の言葉で言えば、Spinor の数がちょうど世代数に対応していると考えられるために、(Ref [24]) と同様に双対性を用いてダイナミカルな超対称性の破れについて議論できるのではないかと考えられるためである。

現在得られている結果としては、electric な理論の ゲージ群が Spin(10) で Vector を n 個、Spinor を m 個を含むとき、理論の持つ対称性と量子数は以下のようになる。

	$G=Spin(10)$	$SU(n)$	$SU(m)$	$U(1)$	$U_R(1)$
Q	10	n	1	-1	$1-\frac{8}{n+2m}$
S	16	1	m	$\frac{n}{2m}$	$1-\frac{8}{n+2m}$

(6. 1)

また、例えば $m=2$ のとき理論の持つ独立なメソン場は以下のものになっている。

$$A \equiv (S\gamma^{\mu}S)(S\gamma^{\mu}S) \tag{6. 2}$$
$$M^2 \equiv Q^{\mu}Q^{\mu} \tag{6. 3}$$
$$Y^1_{\square\!\square} \equiv (S\gamma^{\mu}S)Q^{\mu} \tag{6. 4}$$
$$Y^3 \equiv (S\gamma^{\mu_1\mu_2\mu_3}S)Q^{\mu_1}Q^{\mu_2}Q^{\mu_3} \tag{6. 5}$$
$$Y^4 \equiv (S\gamma^{\mu_1\cdots\mu_5}S)(S\gamma^{\mu_1}S)Q^{\mu_1}\cdots Q^{\mu_4} \tag{6. 6}$$
$$Y^5_{\square\!\square} \equiv (S\gamma^{\mu_1\cdots\mu_5}S)Q^{\mu_1}\cdots Q^{\mu_5} \tag{6. 7}$$

ただし左辺のメソン場についている下付き添え字 □□ は Spinor の 大局的対称性 $SU(2)$ に対して対称になっているという意味であり、何も書いていないものは $SU(2)$ に対して singlet になっているという意味である。また、上付き添え字の数字は、Vector の大局的対称性 $SU(n)$ に対する足の数を表していて、M に対しては対称表現、Y に対しては完全反対称表現になっている。

その他の独立なゲージ不変なオペレーターとしてバリオン場、即ち、ゲージ群の完全反対称テンソルを使ってゲージ不変にしたものが存在する。

現在までの解析では、双対な理論は求まっていないが、特に $n = 6$ のときについては、最近 (Ref [33]) によって自己双対であることが示された。自己双対とは magnetic な理論のゲージ群が electirc な理論のゲージ群と同じものになっているという意味である。ただし、両者が含んでいる singlet 場は異なっている。自己双対になっていると、electric な理論でつくられるゲージ不変なオペレーターは magnetic な理論でも必ず存在しているので、両者でのゲージ不変なオペレーターの比較が容易である。

Spinor が 1 つのときは、magnetic な理論のゲージ群は $SU(n-5)$ であったことから考えると、ゲージ群 Spin(10) の双対な理論は、Spinor の数にも Vector の数にもよっている複雑なものになっていることを示唆している。

最後に、section 4 とは別に Vector like Model に関しては非可換双対性の起源を String の インスタントンモジュライの T-双対性として理解できることが最近 (Ref [34, 35, 36]) によって示されたが、この理解の元で Chiral Model の双対性がどのように理解されるかも、興味深い今後の課題である。

謝辞

この修士論文にとどまらず常日頃から懇切丁寧に指導して下さった国友浩先生に心より感謝致します。また、議論に参加してくださったり、質問に答えてくださった川野輝彦さん、吉田祐介さん、そして太田和俊さんに深く感謝致します。また、吉川圭二先生、糸山浩先生、そして素粒子論研究室の皆様に暖かい励ましや御指導頂いた事を感謝致します。

References

[1] P.A.M.Dirac,*Proc.Roy.Soc.***A133**(1931)60

[2] N.Seiberg and E.Witten,*Nucl.Phys.***B426**(1994)19,hep-th/9407087

[3] N.Seiberg and E.Witten,*Nucl.Phys.***B431**(1994)484,hep-th/940899

[4] E.B.Bogomol'nyi,Sov.J.*Nucl.Phys.***24**(1976)449
M.K.Prasad and C.M.Sommerfield,*Phys.Rev.Lett.***35**(1975)760

[5] E.Witten and D.Olive,*Phys.Lett.***78B**(1978)97

[6] T.Banks,E.Rabinovici,*Nucl.Phys.***B160**(1979)349
E.Fradkin,S.Shenker,*phys.Rev.***D19**(1979)3682

[7] K.Intriligator , N.Seiberg,hep-th/9509066

[8] N.Seiberg,*Nucl.Phys.***B435**(1995)129,hep-th/9411149

[9] D.Mumford and J.Fogarty,*Geometric Invariant Theory.*(Springer,1982).

[10] M.A.Luty and W.Taylor IV,hep-th/9506098,MIT-CTP-2440

[11] N.Seiberg ,*Nucl.Phys.***B435**(1995)129,hep-th/9411149

[12] N.Seiberg ,*Phys.Rev.***D49**(1994)6857,hep-th/9402044

[13] D.Finnel and P.Pouliot,hep-th/9503115

[14] G.'tHooft,Naturalness,Chiral Symmetry,and Spontaneous Chiral Symmetry Breaking in Recent Development inGaouge Theories*Chiral Symmetry,and Spontaneous Chiral Symmetry Breaking in Recent Development inGaouge Theories*(1979 Cargese Lectures)
M.E.Peskin,Chiral Symmetry and Chiral Symmetry Breakin in recent advances in field theory and statistical mechanics(Les Houches,Session,XXXIX,1982)

[15] V.Novikv,M.Shifman,A.Vainshtein and V.Zakharov,*Nucl.Phys.***B229**(1983)381

[16] M.A.Shifman and A.I.Vainshtein and V.Zakharov, *Nucl.Phys.* **B277** (1986)456; *Nucl.Phys.* **B359**(1991)571

[17] M.Flato and C.Fronsdal,*Lett.Math.Phys.***8**(1984)159
V.K.Doberv and V.B.Petkova,*Phys.Lett.***162B**(1985)127

[18] G.Mack,*Comm.Math.Phys***55**(1977)1

[19] P.C.Argyress,M.R.plesser,N.Seiberg ,hep-th/9603042

[20] P.C.Argyress,M.R.plesser,A.E.Faraggi,*Phys.Rev.Lett.***73**(1995)3931,hep-th/9411057

[21] A,Klemm,W.Lerche,S.Theisen and S.Yankielowicz,*Phys.Lett.***344B**(1995)169,hep-th/9411048

[22] P.C.Argyress,M.R.plesser,A.E.Faraggi,*Phys.Rev.Lett.***75**(1995)1699,hep-th/9505100

[23] A.Hanany and Y.Oz,*Nucl.Phys***452**(1995)283,hep-th/9505075

[24] P.Pouliot,M.J.Strassler ,hep-th/9602031
T.Kawano,hep-th/9602035

[25] P.Pouliot,hep-th/9507018

[26] P.Pouliot,M.Strassler,hep-th/9510228

[27] J.Distler,A.Karch,hep-th/9611088

[28] K.Intrilligator,R.G.Leigh,and M.J.Strassler,hep-th/9506148

[29] D.Kutasov,hep-th/9503086

[30] D.Kutasov and A.Schwimmer,hep-th/9505004

[31] M.Berkooz,*Nucl.Phys***B452**(1995)513,hep-th/9505067

[32] K.Intriligator and N.Seiberg , *Nucl.Phys.* **B444**(1995)125, hep-th/9503179

[33] C.Csaki,M.Schmaltz,W.Skiba and J.Terning,hep-th/9701191

[34] S.Katz and C.Vafa,hep-th/9611090

[35] M.Bershadsky,A.Johansen,T.Pantev,V.Sadov and C.Vafa,hep-th/9612052

[36] C.Vafa and B.Zwiebach,hep-th/9701015

[37] J.Wess and J.Bagger,*Supersymmetry and Supergravity*,second edition,Princeton University,1992.