Rice-Mele model まとめ

9/1 1+1 dim Minkowski massive Dirac fermion を lattice に載せる

$$S=\int d^2x\left\{\bar\Psi i\not\partial\Psi-\bar\Psi M\Psi\right\}$$

$\eta^{\mu\nu}=\begin{pmatrix}1&\\&-1\end{pmatrix}$　$\gamma^0=\sigma_3=\begin{pmatrix}1&\\&-1\end{pmatrix}$, $\gamma^1=i\sigma_2=\begin{pmatrix}&1\\-1&\end{pmatrix}$

$\gamma_5=\gamma^0\gamma^1=\begin{pmatrix}&1\\1&\end{pmatrix}=\sigma_1$　(Dirac表示)

$M=\begin{pmatrix}\alpha&i\beta\\i\beta&\alpha\end{pmatrix}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$　　$\Psi=\begin{pmatrix}\chi_1\\\chi_2\end{pmatrix}$ と書いて、χで action を書く

$(\chi_1,\chi_2\in\mathbb{C})$

$$=\int d^2x\left\{i\Psi^\dagger\partial_0\Psi+i\bar\Psi\gamma^1\partial_1\Psi-\bar\Psi\underbrace{M}_{=\begin{pmatrix}\alpha&i\beta\\i\beta&\alpha\end{pmatrix}}\Psi\right\}$$

$$=\int d^2x\left\{i(\chi_1^\dagger\partial_0\chi_1+\chi_2^\dagger\partial_0\chi_2)+i(\chi_1^\dagger\partial_1\chi_2+\chi_2^\dagger\partial_1\chi_1)-\alpha(\chi_1^\dagger\chi_1-\chi_2^\dagger\chi_2)-i\beta(\chi_1^\dagger\chi_2-\chi_2^\dagger\chi_1)\right\}$$

$$H=p\dot q-\mathcal{L}=i\Psi^\dagger\partial_0\Psi-\left\{i\Psi^\dagger\partial_0\Psi+i\bar\Psi\gamma^1\partial_1\Psi-\bar\Psi M\Psi\right\}=-i\bar\Psi\gamma^1\partial_1\Psi+\bar\Psi M\Psi$$

$p=\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot q}=i\Psi^\dagger$

$$=-i(\chi_1^\dagger\partial_1\chi_2+\chi_2^\dagger\partial_1\chi_1)+\alpha(\chi_1^\dagger\chi_1-\chi_2^\dagger\chi_2)+i\beta(\chi_1^\dagger\chi_2-\chi_2^\dagger\chi_1)\quad\text{— ⊛}$$

◦離散化 (cf. Banks-Susskind-Kogut '76)

$$H=-\frac{i}{2a}\sum_n\left[\varphi^\dagger(n+1)\varphi(n)-\varphi^\dagger(n)\varphi(n+1)\right]\quad(1)$$

が連続極限で⊛の kinetic 項になる事を check.

$$\begin{cases}\chi_1\to\varphi(n) & n:\text{even}\\ \chi_2\to\varphi(n) & n:\text{odd}\end{cases}\quad(2)$$ と対応させる.

$\{\varphi^\dagger(m),\varphi(n)\}=\delta_{m,n}$
$\{\varphi(m),\varphi(n)\}=0$

EOM (Heisenberg eq.)は、

$$\dot\varphi(n)=i[H,\varphi(n)]$$

$$=\frac{1}{2a}\sum_m\Big\{\underbrace{\varphi^\dagger(m+1)\varphi(m)\varphi(n)}_{\substack{=-\varphi^\dagger(m+1)\varphi(n)\varphi(m)\\=+\varphi(n)\varphi^\dagger(m+1)\varphi(m)-\delta_{n,m+1}\varphi(m)}}-\underbrace{\varphi^\dagger(m)\varphi(m+1)\varphi(n)}_{=\varphi^\dagger(m)\varphi(n)\varphi(m+1)=-\varphi(n)\varphi^\dagger(m)\varphi(m+1)+\delta_{m,n}\varphi(m+1)}-\left(\varphi(n)\varphi^\dagger(m+1)\varphi(m)-\varphi(n)\varphi^\dagger(m)\varphi(m+1)\right)\Big\}$$

$$=\frac{1}{2a}\left(\varphi(n+1)-\varphi(n-1)\right)\quad(3)$$

連続極限で、微分になっている

⊛の kinetic の EOM は、$\dot\chi_1=i[H,\chi_1]=\partial_1\chi_2$, $\dot\chi_2=i[H,\chi_2]=\partial_1\chi_1$　(4)

(2)の対応関係を元に(3)をχで読み替えると、
n:even で、$\dot\chi_1=\partial_1\chi_2$
n:odd で、$\dot\chi_2=\partial_1\chi_1$
よって、(4)と一致する.

◦mass term に関する op. の check

$\bar\Psi(M)\Psi=\alpha\bar\Psi\Psi+i\beta\bar\Psi\gamma_5\Psi$ より、$\bar\Psi\Psi$ と $\bar\Psi\gamma_5\Psi$ を $\varphi(n)$ で書けば良い.

・$\bar\Psi\Psi=\chi_1^\dagger\chi_1-\chi_2^\dagger\chi_2\to(-1)^n\varphi^\dagger(n)\varphi(n)$　(5)

・$\bar\Psi\gamma_5\Psi=\chi_1^\dagger\chi_2-\chi_2^\dagger\chi_1\to(-1)^n\{\varphi^\dagger(n)\varphi(n+1)-\varphi^\dagger(n+1)\varphi(n)\}$　(6)

n:even (2と置く) で $\varphi^\dagger(2)\varphi(3)-\varphi^\dagger(3)\varphi(2)\to\chi_1^\dagger\chi_2-\chi_2^\dagger\chi_1$
n:odd (1と置く) で、$(-1)(\varphi^\dagger(1)\varphi(2)-\varphi^\dagger(2)\varphi(1))\to\chi_1^\dagger\chi_2-\chi_2^\dagger\chi_1$
よって, O.K.

(1), (5), (6) より、(*)を $\varphi(n)$ を用いて書き換えると、

$$H = \int dx'\, \mathcal{H} = \int dx' \left\{ -i\left(\chi_1^\dagger \partial_1 \chi_2 + \chi_2^\dagger \partial_1 \chi_1\right) + \alpha\left(\chi_1^\dagger \chi_1 - \chi_2^\dagger \chi_2\right) + i\beta\left(\chi_1^\dagger \chi_2 - \chi_2^\dagger \chi_1\right) \right\}$$

↓ 離散化

$$H = \sum_n \left[-\frac{i}{2a}\left(\varphi^\dagger_{(n+1)} \varphi_{(n)} - \varphi^\dagger_{(n)} \varphi_{(n+1)}\right) + \alpha(-1)^n \varphi^\dagger_{(n)} \varphi_{(n)} - i\beta(-1)^n \left(\varphi^\dagger_{(n+1)} \varphi_{(n)} - \varphi^\dagger_{(n)} \varphi_{(n+1)}\right) \right] \tag{7}$$

これが、staggeredで離散化したfree fermion

・Rice-Mele model

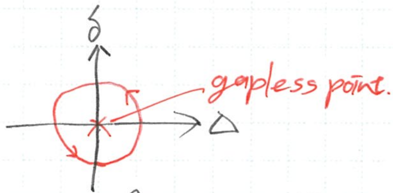
Hamiltonianは、

$$H = \sum_j \left[\left(\frac{t}{2} + (-1)^j \frac{\delta}{2}\right)\left(c_j^\dagger c_{j+1} + h.c.\right) + \Delta(-1)^j c_j^\dagger c_j \right] \tag{8}$$

(8)で、c_j と $\varphi(n)$ を対応させると、(7)式と比較して、

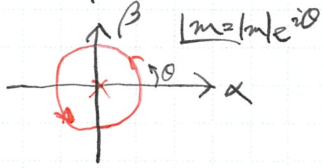
$$\frac{t}{2} \leftrightarrow \frac{i}{2a}, \quad \frac{\delta}{2} \leftrightarrow i\beta, \quad \Delta \leftrightarrow \alpha \tag{9}$$

の対応関係が読み取れる



R-Mは δ-Δ 平面で原点を囲む閉経路を取るとpumpするが、

これは(7)式での α-β 平面に対応



右図の赤線の経路は、cpxの phase θ を、$\theta : 0 \to 2\pi$ と1周させる事に対応する

→ free fermion の mass を $\theta : 0 \to 2\pi$ と phase 1周分回すと、U(1) charge がpumpされる.