

修士論文

時空に依存した質量を持つフェルミオンの
カイラルアノマリー

菅野颯人

基礎物理学研究所

概要

場の理論を理解するために、「アノマリー (anomaly)」は重要な概念である。摂動的アノマリーを求める手法として藤川の手法があり、経路積分の積分測度に対する Jacobian としてアノマリーを得る。本論文の前半では、藤川の手法を用いた摂動的アノマリーの導出やその性質についてレビューする。

近年、理論に含まれる結合定数などの「定数」を時空に依存させた場合のアノマリーに関する研究が行われた [1]。本論文ではこれを受け、fermion が入っている系で質量 m が時空に依存する場合の摂動的アノマリーについて調べた [2]。特に $U(N)_L \times U(N)_R$ のカイラル対称性が入っているような系を考え、その系での $U(1)_V$ アノマリーについて計算を行った。通常、質量を dynamical な場であると捉えると Higgs 場に対応するが、Higgs 場を fermion の理論に加えてもカイラルアノマリーは出ないことが知られている。しかし、時空に依存する質量 $m(x)$ の配位として特定の物を考えた場合、新たなアノマリーへの寄与が出るということを示し、更に、この場合のアノマリーは次元に依らず superconnection を使って書くことが出来るということも示す。また、このアノマリーを使った応用例についても議論する。特にこの応用例として、domain wall のような質量 $m(x)$ の配位を考えた場合に、低次元のカイラルアノマリーを導くことを示す。

目次

第 1 章	Introduction	3
1.1	記号の定義	5
第 I 部	準備	10
第 2 章	摂動的アノマリー	11
2.1	藤川の手法	15
2.2	摂動的アノマリーの種類	28
2.3	正則化	31
2.4	応用	35
2.5	指数定理	37
第 3 章	非可換アノマリー	39
3.1	藤川の手法による非可換アノマリーの計算	39
3.2	共変アノマリー	40
3.3	整合アノマリー	41
3.4	共変アノマリーと整合アノマリーの比較	55
第 4 章	トポロジカル項	59
4.1	θ 項	59
4.2	θ 項付き QCD	62
第 5 章	タキオン凝縮	66
5.1	D-brane	66
5.2	タキオン凝縮	67
5.3	タキオン凝縮とフェルミオン	70
第 II 部	本題	71
第 6 章	準備	72
6.1	Superconnection	72

6.2	Higgs 場を加えた場合のアノマリー	75
第 7 章	質量項を加えた場合のアノマリー	76
7.1	作用の構成	76
7.2	偶数次元のアノマリー	77
7.3	奇数次元のアノマリー	78
7.4	応用	80
第 8 章	まとめ	85
付録 A	藤川の手法による計算の詳細	87
A.1	偶数次元	87
A.2	奇数次元	95
参考文献		99

第 1 章

Introduction

場の理論を理解するために、「アノマリー (anomaly)」は重要な概念である。アノマリーとは、古典的な作用には存在する対称性が量子論に移行した時に破れてしまう現象であり、量子論を考えることで初めて見える性質である。

アノマリーは特に低エネルギー有効理論 (low energy Effective Field Theorey、以下 EFT) を考える際に有用である。EFT は場の理論を考える際には重要な概念である。場の理論は考えるエネルギースケールによって理論の性質が変化する。これはある 1 つの理論を考え、繰り込み群変換によって異なるエネルギースケールに移る場合に、理論に含まれる結合定数が変化することによって起きる。そのため、あるエネルギースケールでは結合定数が小さく摂動論的に解くことが可能な理論であっても、異なるエネルギー領域では摂動論が使えず解析的に解くことが難しくなる場合がある。このような場合でも、摂動的に解析が出来ないエネルギー領域ではそのエネルギー領域での物理を再現するような新たな理論を元の理論とは異なる場を用いて近似的に考え、その新たな理論を摂動的に扱うことで物理を調べることがあり、そのような理論を EFT と呼ぶ。EFT はある特定のエネルギースケールのみで現象を説明出来れば良いため、繰り込み可能性は要請しない。一方でその分理論に含まれるパラメータが多くなり、理論の形を決めるのが難しくなる。例えば、私達の棲む世界は標準模型が成り立っていることは知られているが、Planck スケール程度の高エネルギーで弦理論が存在すると考えると、標準模型は何か他の理論の EFT になっていると考えることが出来る。また、標準模型の中でも強い力を記述する QCD は作用の形は分かっており高エネルギーでは摂動的に計算が可能だが、低エネルギーでは閉じ込めが起こってしまい理論の解析が難しい。QCD の低エネルギーでの解析には格子 QCD という手法が用いられ、スーパーコンピュータを用いた大規模な数値計算がなされている。この QCD では、chiral Lagrangian を用いたモデルがハドロンの低エネルギーでの性質を再現する、摂動論的に計算可能なモデルとして古くから研究されており、このモデルも QCD の EFT になっていると言える。このように高エネルギーの理論が分かっているても低エネルギーでの理論の振る舞いが未解明である場合も多く、このような系の例として QCD の他にも物性系などが挙げられる。このように、場の理論の特に低エネルギーでの振る舞いを理解するためには EFT について情報を得る必要がある。アノマリーは、高エネルギーの理論が分かっている場合の EFT の解析で特に強力な手法を提供する。

EFT の解析にはアノマリーの中でも特に「't Hooft アノマリー」という種類のアノマリーが用いられる。't Hooft アノマリーは繰り込み群不変であるという性質を持つため、繰り込み群変換で繋がる理論であればエネルギースケールに依らずに同じアノマリーを示す。更に、同じ系を記述する理論であれば低エネルギーの自由度のみを使って書かれる EFT でもその't Hooft アノマリーを再現可能である。そのため、高エネルギーでの理論が分かっている場合、高エネルギーの理論での't Hooft アノマリーを調べることで、そのアノマリーを低エネルギーでも再現しなくてはならないという条件から EFT の形を大きく制限することが可能になる。この手法を't Hooft アノマリーマッチングと呼び、近年特に場の理論の解析で広く応用されている [3]。

また、EFT の解析以外の場面でもアノマリーは重要な役割を果たす。例えば、「ゲージアノマリー」という種類のアノマリーは理論の無矛盾性を議論する際に重要になる。ゲージアノマリーがある理論はアノマリーによって理論のユニタリ性が破れてしまうため問題であり、そのため理論を考える際にはゲージアノマリーが存在しないことが要請される。これは理論を決める際に大きな制限になっており、弦理論や標準模型はこのゲージアノマリーがないという条件を満たすように作られている。特に超弦理論が 10 次元でのみ成立するのはこのアノマリーの議論によって決まる。

実験的にもアノマリーは重要な概念であり、 $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ の崩壊はアノマリーの寄与によって起こる。また、標準模型はアノマリーによってバリオン数・レプトン数が保存しないため、宇宙論に於いて物質を生成する際にも重要な効果になっている。

アノマリーには摂動的なアノマリーと非摂動的なアノマリーがあるが、特に摂動的アノマリーは古くから研究されている。摂動的アノマリーを求める手法として、三角ダイアグラムで知られる Feynman ダイアグラムのループ計算をする手法と、藤川の手法として知られる経路積分の Jacobian を計算する手法 [4, 5] の 2 通りが知られている。本研究ではこのうち藤川の手法を用いて、摂動的アノマリーの計算を行った。

近年、理論に含まれる結合定数などの「定数」を時空に依存させた場合のアノマリーに関する研究が行われた [1]。本論文ではこれを受け、fermion が入っている系で質量 m が時空に依存する場合の摂動的アノマリーについて調べた [2]。特に $U(N)_L \times U(N)_R$ のカイラル対称性が入っているような系を考え、その系での't Hooft アノマリーについて計算を行った。通常、質量を dynamical な場であると捉えると Higgs 場に対応するが、Higgs 場を fermion の理論に加えてもカイラルアノマリーは出ないことが知られており、これは Higgs 場を含んだカイラルな理論である標準模型にアノマリーが存在しないことにも関連する。しかし、時空に依存する質量 $m(x)$ の配位として特定の物を考えた場合、新たなアノマリーへの寄与が出るということを示し、更に、この場合のアノマリーは次元に依らず superconnection を使って書くことが出来るということも示す。また、このアノマリーを使った応用例についても議論する。特にこの応用例として、domain wall のような質量 $m(x)$ の配位を考えた場合に、低次元のカイラルアノマリーを導くことを示す。fermion の理論に domain wall mass を入れた系のアノマリーは [6] で議論されているが、本研究の結果との関係も議論する。

第 I 部では、本論での議論に必要な内容や、本論を議論する上で必ずしも必要ではないが関連

する話題をレビューする。第 2 章ではアノマリーの基本的な性質を見る。最初に藤川の手法の最も簡単な場合についての計算を行い、アノマリーの種類について見る。第 3 章では非可換な対称性に対するアノマリーを計算し、共変アノマリーと整合アノマリーという 2 種類のアノマリーの違いについて見る。アノマリーはトポロジカルな量であり、トポロジカルな場の理論とも関係する。第 4 章ではトポロジカルな場の理論について簡単に見る。本研究は場の理論に関する研究だが、弦理論では似たような現象が知られている。第 5 章では弦理論でのタキオン凝縮という現象について見る。

第 II 部では研究内容の詳細を紹介する。第 6 章で計算に必要な道具を準備した後、第 7 章で本研究の内容を議論する。また、応用例についても見る。付録 A では第 7 章で省略した、計算の詳細について見る。

始めに、第 1 章の後半で、本論文で使う記号の定義を議論する。

1.1 記号の定義

本論文で使用する convention を記しておく。

平坦時空の場合の計量は、 d 次元 Minkowski 計量の場合、以下のように時間部分を -1 、空間部分を $+1$ にした計量を用いる。

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (1.1.1)$$

本論文での多くの計算は Euclid 計量で行われている。その場合、Euclid 計量として全て $+1$ の物を用いる。

$$\eta_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (1.1.2)$$

どちらの計量の場合でも添字は $\mu = 0, \dots, d-1$ を走るとし、Minkowski 計量の場合は $\mu = 0$ を時間成分に対応させる。

$U(N)$ 変換の生成子を T^a と書き、[7] に従ってこの T^a は以下の式を満たすとする。

$$\text{tr}[T_a T_b] = \frac{1}{2} \delta_{ab} \quad (1.1.3)$$

この群の構造定数 f^{abc} は以下のように定義される。

$$[T_a, T_b] = i f_{abc} T_c \quad (1.1.4)$$

$$i f_{abc} = 2 \text{tr}([T_a, T_b] T_c) \quad (1.1.5)$$

1.1.1 γ 行列

γ 行列の計算等は主に [7] を参考にしたが、Minkowski 計量の符号が違うので注意。

本論文では γ 行列は一貫してカイラル表示を採用し、Euclidean の場合に以下のように定義する。

$$\begin{aligned}
\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} &= 2\eta^{\mu\nu} = 2\delta^{\mu\nu}, \gamma^{\mu\dagger} = \gamma^\mu, \\
\gamma^0 \gamma^1 \dots \gamma^{d-1} &\equiv i^{\frac{d}{2}} \gamma_5 \\
\gamma^\mu &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \sigma^{\mu\dagger} & 0 \end{pmatrix}, \gamma_5 = (-i)^{\frac{d}{2}} \gamma^0 \gamma^1 \dots \gamma^{d-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\
P_\pm &= \frac{1 \pm \gamma_5}{2}, P_+ \psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_L \\ 0 \end{pmatrix}, \\
P_- \psi &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_R \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{1.1.6}$$

次元 d が偶数の場合、 γ 行列は $2^{d/2} \times 2^{d/2}$ 行列になる。 d が奇数の場合、 $d-1$ 次元 γ 行列を用いる。 γ_5 は一般に次元 d が偶数の場合にのみ定義される。ここで、 $P_\pm$ は射影演算子で、偶数次元の時にのみ γ_5 を用いて定義され、Dirac スピノルに作用させるとカイラリティが $+$ 、 $-$ の成分を取り出すような行列になっている。

σ^μ は以下の代数を満たす。偶数次元の場合、 $2^{d/2-1} \times 2^{d/2-1}$ 行列になる。

$$\sigma^{\mu\dagger} \sigma^\nu + \sigma^{\nu\dagger} \sigma^\mu = \sigma^\mu \sigma^{\nu\dagger} + \sigma^\nu \sigma^{\mu\dagger} = 2\eta^{\mu\nu} = 2\delta^{\mu\nu} \tag{1.1.7}$$

4 次元の場合、 σ^μ は 4 成分化した Pauli 行列で、以下のように定義する。

$$\sigma^\mu = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, -i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, -i \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, -i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \tag{1.1.8}$$

Minkowski の場合、(1.1.1) 式の計量の場合の γ 行列をカイラル表示で書くと、(1.1.6)、(1.1.7) 式と同様に以下のように定義出来る。

$$\begin{aligned}
\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} &= 2\eta^{\mu\nu}, \\
\gamma^{i\dagger} &= \gamma^i \text{ (for } i = 1, \dots, d-1), \gamma^{0\dagger} = -\gamma^0, \\
\gamma^\mu &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}, \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^{i\dagger} & 0 \end{pmatrix}, \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^0 \\ -\sigma^{0\dagger} & 0 \end{pmatrix}, \\
\gamma_5 &\equiv i(-i)^{\frac{d}{2}} \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \dots \gamma^{d-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\
\bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu + \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu &= \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu + \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu = 2\eta^{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{1.1.9}$$

4 次元の場合、 σ^μ は以下の通り。

$$\begin{aligned}
\sigma^\mu &= \left\{ i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, -i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, -i \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, -i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \\
\bar{\sigma}^\mu &= \left\{ i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, i \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}
\end{aligned} \tag{1.1.10}$$

1.1.2 Euclid 化

特にアノマリーの議論では、理論を Euclid 化して計算する場合が多くある。ここでは convention の確認の一環として、本論文で用いる Euclid 化の手続きについて記しておく。

計量は上で定義した通り。時間方向のみ回転させるので、Euclid 化の手続きでは基本的には以下の変換を行えば良い。

$$\begin{array}{ccc} \textit{Minkowski} & \rightarrow & \textit{Euclidean} \\ t & \rightarrow & \tau = it \end{array} \quad (1.1.11)$$

Euclid 化により積分測度は以下のように変換する。

$$\begin{array}{ccc} \textit{Minkowski} & \rightarrow & \textit{Euclidean} \\ d^4x = dt d^3x & \rightarrow & d^4\tilde{x} = d\tau d^3x = i d^4x \end{array} \quad (1.1.12)$$

よって、例えばスカラー場の理論は以下のように変換すると分かる。

$$\begin{array}{ccc} \textit{Minkowski} & \rightarrow & \textit{Euclidean} \\ S_L = - \int d^4x \left\{ \frac{\eta^{\mu\nu}}{2} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \right\} & \rightarrow & S_E = \int d^4\tilde{x} \left\{ \frac{\delta^{\mu\nu}}{2} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \right\} \\ & & = \frac{i}{2} \int d^4x \left\{ \partial_\tau \phi \partial_\tau \phi + \delta^{ij} \partial_i \phi \partial_j \phi \right\} \\ & & = \frac{i}{2} \int d^4x \left\{ -\partial_t \phi \partial_t \phi + \delta^{ij} \partial_i \phi \partial_j \phi \right\} \\ & & = \frac{i}{2} \int d^4x \left\{ \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \right\} \\ & & = -i S_L \end{array} \quad (1.1.13)$$

ここで、各計量での作用の符号は、運動項のうちスカラー場の時間微分の項の符号が + になる、即ち $S \supset + \int \partial_t \phi \partial_t \phi$ を満たすという条件から決まる。この変換により経路積分は以下のように変化する。

$$Z = \int \mathcal{D}\phi e^{iS_L} = \int \mathcal{D}\phi e^{-S_E} \quad (1.1.14)$$

スピノル場の場合はもう少し複雑になる。

一般に、 $SO(d)$ のスピノルと $SO(d-1, 1)$ のスピノルの表現は異なる。時間 n 次元、空間 m 次元の $SO(m, n)$ スピノルは Euclidean (即ち空間成分のみ) の場合では $SO(m-n)$ スピノルと同じ表現を取るため、この観点で見ると Euclid 化は非自明な操作である。[8] の Appendix B を参考に、 $SO(n)$ スピノルの可能な表現を以下に記す。

表 1.1 $SO(n)$ スピノルが取れる条件

$n \bmod 8$	実	Weyl	実かつ Weyl
0	○	自己共役	○
1	○	×	×
2	○	複素	×
3	擬実	×	×
4	擬実	自己共役	×
5	擬実	×	×
6	○	複素	×
7	○	×	×

この表から、偶数次元では Weyl 表現が取れるため、Weyl fermion を 2 つ組んで Dirac fermion を作ることが出来ると分かる。奇数次元では Dirac fermion を Weyl fermion 2 つで書くことは出来ないため、カイラルな表示が出来ない。これは、奇数次元では 4 次元の場合の γ_5 に対応する chirality operator が存在しないことに対応する。

時間 1 次元、空間 $(d-1)$ 次元の Dirac fermion を含む理論を Euclid 化する場合、Minkowski で $SO(d-2)$ 、Euclidean で $SO(d)$ となり偶奇は変わらないため、Euclid 化によって理論はそれ程大きな影響は受けないと考えられる。しかし、次元の偶奇は同じでも 2 次元異なると、取れる fermion の条件が完全には一致しないことには注意。

以上の議論を考慮した上で Euclid 化を行う。簡単のため Dirac fermion が他の場と couple していない場合を考えると、4 次元 Minkowski での fermion の作用は以下ようになる。

$$S = \int d^4x \bar{\psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \psi \equiv \int d^4x \bar{\psi} i \not{\partial} \psi \quad (1.1.15)$$

ここで、 γ 行列は (1.1.9) 式で定義した物であり、 $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$ を満たす。Dirac 共役は $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ であるため、 γ^0 だけ特別扱いされていることに注意。

この作用を Euclid 化すると、 γ 行列として (1.1.6) 式を用いて以下のように書ける。

$$S = \int d^4x \psi^\dagger \gamma^0 i \gamma^\mu \partial_\mu \psi \quad (1.1.16)$$

$$\begin{aligned} &= \int d^4x (\psi_L^\dagger, \psi_R^\dagger) i \begin{pmatrix} \sigma^{\mu\dagger} & 0 \\ 0 & \sigma^\mu \end{pmatrix} \partial_\mu \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \\ &= \int d^4x \left\{ \psi_L^\dagger i \sigma^{\mu\dagger} \partial_\mu \psi_L + \psi_R^\dagger i \sigma^\mu \partial_\mu \psi_R \right\} \end{aligned} \quad (1.1.17)$$

ψ_L, ψ_R のように chirality を L, R の添字で明記している場合、spinor 場として Dirac 場ではなく、行列表記で Dirac 場の半分の大きさになる Weyl 場を用いて書くことにする。そのため、(1.1.17) 式では ψ_L, ψ_R に作用する行列は γ^μ ではなく σ^μ になっている。

この場合の作用は、Euclid 化する前の 4 次元 Minkowski の Lagrangian に対してエルミート性を課しているため、Euclidean に移った後の Lagrangian は必ずしもエルミートになるとは限らな

い。特に、Euclidean では全ての γ 行列はエルミートになるように定義したので、(1.1.16) 式の作用は γ^μ のうち Minkowski での空間成分 (γ^i) に対して反エルミート、時間成分 (γ^0) に対してエルミートになっており、Minkowski で要請した Lagrangian のエルミート性が存在しなくなっている。

4 次元 Euclidean の作用は以下ようになっており、Minkowski を Euclid 化した作用とは少し異なる。

$$S = \int d^4x \chi^\dagger i \gamma^\mu \partial_\mu \psi + h.c. \quad (1.1.18)$$

ここで、 χ は ψ とは独立な場である。 $h.c.$ はエルミート共役を表す。

Euclid 版の作用では Dirac 共役ではなくエルミート共役を用いる必要があるが、その場合のカイラリティの定義は Minkowski の場合とは少し異なり、以下ようになる。

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}, \chi = \begin{pmatrix} \chi_R \\ \chi_L \end{pmatrix}, \chi^\dagger = (\chi_R^\dagger, \chi_L^\dagger) \quad (1.1.19)$$

このように Dirac fermion のカイラリティを定義することで、Euclidean の場合でも作用 (1.1.17) は以下のように左手成分と右手成分の和 (即ち Weyl fermion 2 つ分の理論) として書くことが可能になる。

$$S = \int d^4x \chi^\dagger i \gamma^\mu \partial_\mu \psi + h.c. = \int d^4x \left(\chi_L^\dagger i \sigma^{\mu\dagger} \partial_\mu \psi_L + \chi_R^\dagger i \sigma^\mu \partial_\mu \psi_R \right) + h.c. \quad (1.1.20)$$

4 次元 Euclidean の作用は Minkowski の Lagrangian にエルミート性を課すか、Euclidean で課すかの違いによってこのように 2 種類の作用が考えられる。以下では主に 4 次元 Euclid の作用を用いる。(1.1.18) 式では $\chi^\dagger$ を独立な場として用いたが、以下ではこれを $\bar{\psi}$ と書いて以下のような作用を用いる。

$$S = \int d^4x \bar{\psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \psi \quad (1.1.21)$$

$$= \int d^4x \left(\bar{\psi}_L i \sigma^{\mu\dagger} \partial_\mu \psi_L + \bar{\psi}_R i \sigma^\mu \partial_\mu \psi_R \right) \quad (1.1.22)$$

(1.1.17) 式と (1.1.22) 式を見比べて分かるように、この表記を採用してしまえばどの計量の時に Lagrangian にエルミート性を課するかという違いしかないため、エルミート性に目を瞑ればどちらの場合でもよく似た形の作用になっており、一方で議論すればもう一方の場合の議論に移ることもそれほど難しくはない。本論文では (1.1.21) 式の作用を元に計算する。

以上では 4 次元の場合を議論したが、一般の偶数次元でも同様の議論が可能である。

第 I 部

準備

第 2 章

摂動的アノマリー

「アノマリー (anomaly)」とは、古典的な理論にはある対称性が量子論に移行した時に破れるという現象のことで、「量子異常 (quantum anomaly)」とも呼ばれる。

本章以降で扱うアノマリーは全て「摂動的アノマリー」に分類される物である。Witten の $SU(2)$ アノマリーのような非摂動的アノマリー (global anomaly) はここでは扱わない。

アノマリーは「ゲージアノマリー」と「大域的対称性のアノマリー」に大別され、このうち本論文で主に扱うのは後者である。応用面でも、後に議論する 't Hooft アノマリーマッチングで使われるなど、大域的対称性のアノマリーが重要である。一方前者は理論の無矛盾性を議論する際に重要であり、これは例えば弦理論に対して強い制約を与えている。2.1 節でアノマリーの詳細な計算に入る前に、2.0.1 節以下ではアノマリーの種類について簡単に見た後、アノマリーを計算する際に用いる作用とその作用が持つ対称性について古典的な場合に限って見る。アノマリーの種類については、2.1 節で具体的にアノマリーの計算をした後、2.2 節で具体例を用いて再度見る。

本章では、[7, 9, 10, 11, 12] を参考にした。

2.0.1 ゲージアノマリー

アノマリーのうち、古典論に gauge 対称性があるそれが量子論で破れている場合を「ゲージアノマリー」と呼ぶ。この時、gauge 場は dynamical な場として入っており、作用に gauge 場の運動項があるため空間を伝搬する場合を考えている。この場合に gauge 対称性にアノマリーがあると、理論のユニタリ性や繰り込み可能性を破ってしまうため問題である。

理論にゲージアノマリーがあるかどうかは、場の理論の無矛盾性の確認に使われる。例えば、弦理論では弦の世界面上の 2 次元の場の理論にゲージアノマリーがないという条件から理論が大きく制限され、無矛盾な弦理論が決まる。例として 2 次元世界面上での Weyl アノマリーを考える。弦理論では、2 次元世界面上の計量を gauge 場として入れることで世界面上の Weyl 対称性が (2 次元共形対称性の一部として) gauge 化されている。この 2 次元 Weyl 対称性はアノマリーを持ち、その大きさは世界面上の共形場理論の中心電荷に比例する。弦が伝搬する空間の次元としてボソン弦の場合に 26 次元 (超弦の場合には 10 次元) を取ると、ちょうど弦の位置を表すスカラー場 X^μ と ghost 場の寄与が相殺して中心電荷が 0 となり、アノマリーのない理論となる。このように、ゲージアノマリーの条件から弦理論が定義出来る次元が決まる。

2.0.2 大域的対称性のアノマリー

対称性は大域的 (global) 対称性と局所的 (local) 対称性に分けられ、このうち局所的対称性は gauge 場を導入して大域的対称性を持つ理論を gauge 化することで実現される。理論に gauge 化されていない大域的な対称性が入っている場合、その対称性もアノマリーを持ち得る。この大域的対称性に対するアノマリーは特に応用上重要であり、本論文でも主にこちらを議論する。

大域的対称性のみを持つ理論の場合は理論に gauge 場が入っていないため、以下で議論する藤川の手法を用いてアノマリーを評価する際には背景 gauge 場を入れて対称性を gauge 化して評価する。この時の gauge 場は背景場として入れるだけなので、運動項は持たず空間を伝搬しない。アノマリーの計算で重要なのは、少なくとも本論文で取り扱う範囲に限ると gauge 場が fermion に結合している項なので、gauge 場の運動項はアノマリーを評価する上では寄与しない。そのため、アノマリーを持つ対称性が大域的対称性か局所的対称性かに拘らずどちらの場合も同じアノマリーを出す。しかし、大域的対称性の場合は元々 gauge 場が結合していない理論を考えていたため、このアノマリーの存在は理論のユニタリ性等には効かず、理論にアノマリーがあっても問題にならない。

この大域的対称性のアノマリーのうち、背景ゲージ場を入れることで見えるようになるアノマリーを 't Hooft アノマリーと呼ぶ。これらのアノマリーの具体例は 2.2 節で見る。

2.0.3 $U(1)$ 対称性と gauge 化

本節では、実際に対称性の具体例として、 $U(1)$ 対称性を見る。この第 2 章では特に $U(1)$ 対称性に関するアノマリーに注目する。gauge 群として $U(1)$ 以外を考える場合の一般論は次章で議論する。

ある作用を与えることで理論が決定されるが、この作用を古典的に扱った場合に存在する対称性が量子論に移行した場合でも存在するとは限らない。この破れは次節で藤川の手法を使うことで見るが、ここではそのために古典論を考え、anomalous な $U(1)$ 対称性を持った作用を導入する。

4 次元 (3+1 次元) で、 N_f 個のゼロ質量 Dirac フェルミオンがいる系を考える。自由粒子の場合の作用は、

$$S = \int d^4x \bar{\psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \psi \equiv \int d^4x \bar{\psi} i \not{\partial} \psi \quad (2.0.1)$$

と書ける。また、例えば QCD を考えた場合、fermion は $SU(3)$ adjoint の dynamical な gauge 場と couple しているため、(2.0.1) 式の作用は以下のように変更される。

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x \left\{ \bar{\psi} i \gamma^\mu (\partial_\mu + a_\mu) \psi - \frac{1}{2} \text{tr} [f_{\mu\nu} f^{\mu\nu}] \right\} \\ &\equiv \int d^4x \bar{\psi} i \not{D} \psi - \int d^4x \frac{1}{2} \text{tr} [f_{\mu\nu} f^{\mu\nu}] \end{aligned} \quad (2.0.2)$$

ここで、各記号を以下のように定義する。

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}, \bar{\psi}(x) = \psi^\dagger \gamma^0, D_\mu = (\partial_\mu + a_\mu), \not{D} \equiv \gamma^\mu D_\mu \quad (2.0.3)$$

ここで、 $SU(3)$ gauge 場 a_μ は反エルミートとなるように定義した。通常のエルミートに定義した場合の gauge 場を a'_μ と書き、結合定数 g もあらわに書くと、 $a_\mu = -iga'_\mu$ である。この gauge 場 a_μ から作られる field strength を $f_{\mu\nu}$ と書いた。

作用 (2.0.1) の古典的な対称性を見ると、 $U(1)_V \times U(1)_A$ の大域的なカイラル対称性を持っていると分かる。 $U(1)_V$ と $U(1)_A$ の変換を具体的に書くと、以下ようになる。

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\theta} \psi(x), \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}(x) e^{-i\theta} \quad (U(1)_V) \quad (2.0.4)$$

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\gamma_5 \theta} \psi(x), \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}(x) e^{i\gamma_5 \theta} \quad (U(1)_A) \quad (2.0.5)$$

ここで、 θ は座標に依存しないパラメータであり、この θ の値を全時空で一斉に変化させる変換が大域的な $U(1)_V \times U(1)_A$ 変換である。この変換の下で作用 (2.0.1) が不変であることも容易に分かる。(2.0.5) 式で示した $U(1)_A$ 変換の下での対称性がアノマリーを持つ対称性であり、量子論に行くと破れる。本章では、特にこの $U(1)_A$ 対称性に着目する。

アノマリーの計算をする際には大域的対称性を gauge 化して置くと便利である。そのため、以下のような局所的な $U(1)_V$ と $U(1)_A$ の変換を考える。

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)} \psi(x), \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}(x) e^{-i\alpha(x)} \quad (U(1)_V) \quad (2.0.6)$$

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\gamma_5 \alpha(x)} \psi(x), \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}(x) e^{i\gamma_5 \alpha(x)} \quad (U(1)_A) \quad (2.0.7)$$

作用 (2.0.1) は、微分が $\alpha(x)$ を叩くためこの変換の下で不変ではない。この変換で不変な作用を得るには $U(1)_V$ 、 $U(1)_A$ の gauge 場をそれぞれ導入して gauge 化する必要がある。 $U(1)_V$ の gauge 場を A_μ^V 、 $U(1)_A$ の gauge 場を A_μ^A と書いて背景 gauge 場として入れると、古典的に $U(1)_V \times U(1)_A$ 不変な作用は以下のように書ける。

$$S = \int d^4x \bar{\psi} i \gamma^\mu (\partial_\mu + A_\mu^V + \gamma_5 A_\mu^A) \psi \equiv \int d^4x \bar{\psi} i \not{D} \psi \quad (2.0.8)$$

ここで、 $D_\mu = \partial_\mu + A_\mu^V + \gamma_5 A_\mu^A$ である。

A_μ^V 、 A_μ^A はそれぞれ $U(1)_V$ 、 $U(1)_A$ の adjoint gauge 場であり、 $U(1)_V \times U(1)_A$ 変換で以下のように変換する。

$$A_\mu^V \rightarrow A_\mu^V - i\partial_\mu \alpha(x), \quad A_\mu^A \rightarrow A_\mu^A - i\partial_\mu \alpha(x) \quad (2.0.9)$$

特に QCD のような系を考えたい場合、この作用に (2.0.2) 式のように dynamical な gauge 場を更に加えることも可能で、その場合は以下のような作用になる。

$$S = \int d^4x \left\{ \bar{\psi} i \gamma^\mu (\partial_\mu + a_\mu + A_\mu^V + \gamma_5 A_\mu^A) \psi - \frac{1}{2} \text{tr} [f_{\mu\nu} f^{\mu\nu}] \right\} \quad (2.0.10)$$

このようにして、大域的対称性は背景 gauge 場を入れることで gauge 化でき、局所的な対称性に格上げすることが可能である。アノマリーの計算では、大域的対称性のアノマリーを調べる際にこの背景 gauge 場を導入して gauge 化した理論の gauge アノマリーを調べるという手法が取られることがある。(2.2 節で後述する。)

この背景 gauge 場は運動項を持たないため、空間を伝播するような自由度は持たないことに注意。dynamical な gauge 場は運動項を持つため、空間を伝播することが可能であり、Feynman ダイアグラムでも書ける。

2.0.4 カイラル対称性

作用 (2.0.1) で、fermion が N_f 個 (N_f は flavor 数) 入っている場合を考える。この作用の古典的な対称性を見ると、 $U(1)_V \times U(1)_A$ の大域的な対称性だけでなく N_f 種類の flavor を回す対称性も存在し、 $U(N_f)_L \times U(N_f)_R$ の大域的な対称性 (カイラル対称性) を持っていると分かる。具体的には、以下のような変換の下で作用が不変になる。

$$P_+ \psi(x) = \psi(x)_L \rightarrow e^{i\theta_L} \psi(x)_L, \quad \bar{\psi}(x)_L \rightarrow \bar{\psi}(x)_L e^{-i\theta_L} \quad (U(N_f)_L) \quad (2.0.11)$$

$$P_- \psi(x) = \psi(x)_R \rightarrow e^{i\theta_R} \psi(x)_R, \quad \bar{\psi}(x)_R \rightarrow \bar{\psi}(x)_R e^{-i\theta_R} \quad (U(N_f)_R) \quad (2.0.12)$$

ここで、 $P_\pm$ は (1.1.6) 式で定義した射影演算子である。ここで、 $\theta_L = \sum_a \theta_L^a T^a \in U(N_f)_L$ 、 $\theta_R = \sum_a \theta_R^a T^a \in U(N_f)_R$ それぞれ $U(N_f)_L$ 、 $U(N_f)_R$ の変換パラメータで、 T^a は $U(N_f)$ の変換の生成子である。ここでは flavor の足を明記していないが、flavor 空間に着目すると fermion $\psi(x)$ は N_f 成分を持つベクトルとして振る舞い、 T^a は $N_f \times N_f$ 行列として作用する。

この対称性を gauge 化して局所的対称性に格上げする。 $U(N_f)_L$ gauge 場として A_μ^L 、 $U(N_f)_R$ gauge 場として A_μ^R を背景 gauge 場として入れると作用は以下ようになる。

$$S = \int d^4x \bar{\psi} i \gamma^\mu (\partial_\mu + A_\mu^L P_+ + A_\mu^R P_-) \psi \equiv \int d^4x \bar{\psi} i \not{D} \psi \quad (2.0.13)$$

ここで、 $D_\mu = \partial_\mu + A_\mu^L P_+ + A_\mu^R P_-$ であり、これらの $U(N_f)_L \times U(N_f)_R$ 変換は以下のようになる。

$$\begin{aligned} \psi_L &\rightarrow U_L \psi_L, & \bar{\psi}_L &\rightarrow \bar{\psi}_L U_L^{-1}, \\ \psi_R &\rightarrow U_R \psi_R, & \bar{\psi}_R &\rightarrow \bar{\psi}_R U_R^{-1}, \\ A_\mu^L &\rightarrow U_L A_\mu^L U_L^{-1} + U_L \partial_\mu U_L^{-1}, & A_\mu^R &\rightarrow U_R A_\mu^R U_R^{-1} + U_R \partial_\mu U_R^{-1} \end{aligned} \quad (2.0.14)$$

ここで、 $U_L(x) \in U(N_f)_L$ 、 $U_R(x) \in U(N_f)_R$ のユニタリ行列である。このカイラル対称性は massless QCD でも実際に見られる対称性である。実際の QCD でも quark のうち u, d, s quark については quark mass が QCD のエネルギースケールに比べて小さいため、 $N_f \leq 3$ の場合は近似的に成り立っていると考えられる。

このカイラル対称性を $U(N_f)_L \times U(N_f)_R \simeq SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R \times U(1)_L \times U(1)_R$ と、 $U(1)$ 部分を分離して書き、 $U(1)$ 部分に注目する (通常、QCD の場合などにカイラル対称性と呼ぶのは残りの $SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R$ の部分である。)。パラメータを変換することで $U(1)_L \times U(1)_R \simeq U(1)_V \times U(1)_A$ と組み換えることが可能であり、前節で議論した $U(1)_V \times U(1)_A$ 対称性を考えるとアノマリーに関しては見通しが良くなる。 $U(1)_A$ 対称性はアノマリーを持つため、量子論では対称性として存在しない。このように、アノマリーを持つ $U(1)$ の寄与を分離して残りの $SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R$ を取り出し、カイラル対称性の議論では $SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R$ の部分に注目することが多い。 $(U(1)_V$ 対称性はアノマリーを持たないため量子論でも成り立つ。この対称性は粒子数の保存に対応する。)

因みに、 $U(1)_A$ 部分にはアノマリーがあるがアノマリーがこれで尽きているとは限らず、外場を導入すれば $SU(N_f)$ 部分もアノマリーを持つ可能性がある。一般に、理論に含まれる gauge 場

の種類によってアノマリーの種類が異なり、この区別は 2.2 節で行う。また、 $SU(N)$ のような非可換群のアノマリーについては 3 章で議論する。

第 2 章ではアノマリーとして $U(1)$ 対称性に注目し、次節では $U(1)_A$ にアノマリーがあることを藤川の手法を使って実際に確認する。

2.1 藤川の手法

ここでは、 $U(1)_A$ がアノマリーを持つことを確認する。

摂動的アノマリーの計算には、主に Feynman diagram を用いたループ計算と、経路積分の Jacobian を見る藤川の手法の 2 通りの計算手法が使われる。本論文では、後者の藤川の手法を一貫して採用し、アノマリーを計算する。

2.1.1 準備

アノマリーを計算する際には、metric を Euclidean に変更した方が便利であるため、以下では (2.0.1) 式の作用を Wick 回転して Euclid 化した (4+0) 次元の作用を用いる。1.1.2 節の議論より、gauge 場が couple していない場合の作用は (1.1.16) 式になる。アノマリーを見るためには gauge 場を入れなくてはならないため、ここでは dynamical な gauge 場を入れた (2.0.2) 式の Euclid 計量での作用を考える。Euclidean の作用として (1.1.21) 式を参照すると、求める作用は以下ようになる。

$$\begin{aligned}
S &= \int d^4x \bar{\psi} i \gamma^\mu (\partial_\mu + a_\mu) \psi \\
&= \int d^4x (\bar{\psi}_L, \bar{\psi}_R) i \begin{pmatrix} \sigma^{\mu\dagger} & 0 \\ 0 & \sigma^\mu \end{pmatrix} (\partial_\mu + a_\mu) \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \\
&= \int d^4x \{ \bar{\psi}_L i \sigma^{\mu\dagger} (\partial_\mu + a_\mu) \psi_L + \bar{\psi}_R i \sigma^\mu (\partial_\mu + a_\mu) \psi_R \} \\
&\equiv \int d^4x \bar{\psi} D \psi
\end{aligned} \tag{2.1.1}$$

ここで、 D を Dirac 演算子と呼ぶ。ここで、Dirac 演算子 D はエルミートになるように取った。今の例では単に $D = i\cancel{D} = i\gamma^\mu D_\mu$ であるが、今後一般化する場合を考慮して D という表記を導入した。以下では、特に第 II 部で考えるような状況では Dirac 演算子 D は必ずしも $i\gamma^\mu D_\mu$ を意味しないが、 $\cancel{D}$ の記号は $\cancel{D} \equiv \gamma^\mu D_\mu$ として定義する。アノマリーの計算は gauge 場が dynamical な gauge 場か背景 gauge 場かには依存しないため、ここで入れた gauge 場もどちらの場合を考えても構わない。取り敢えずここでは例として、QCD のような系を念頭に置いて dynamical な gauge 場を入れたとして考えておくことにする。(入れる gauge 場が dynamical か背景かによってアノマリーの計算結果は変わらないが、計算しているアノマリーの種類は変わる。このアノマリーの種類については 2.2 節で議論する。今考えている系を dynamical な gauge 場を入れた場合として考えると、計算しているアノマリーは「ABJ-type アノマリー」になる。)

gauge 場の種類を変えたり、複数の gauge 場を入れたりした場合の拡張も容易であり、このような場合の具体的な議論は 2.1.3 節以降で行う。

(2.1.1) では特に gauge 群を指定せずに gauge 場を加えたが、以下では後に応用しやすいように $U(N)_L \times U(N)_R$ の gauge 場として入れることにする。この仮定により、gauge 場として左右の成分をそれぞれ分けて入れることになり、(2.1.1) 式の作用を以下のように書き換える。

$$\begin{aligned}
S &= \int d^4x \bar{\psi} i \gamma^\mu (\partial_\mu + a_\mu) \psi \\
&= \int d^4x (\bar{\psi}_L, \bar{\psi}_R) i \begin{pmatrix} \sigma^{\mu\dagger} & 0 \\ 0 & \sigma^\mu \end{pmatrix} \left(\partial_\mu + \begin{pmatrix} a_\mu^L & 0 \\ 0 & a_\mu^R \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \\
&= \int d^4x \{ \bar{\psi}_L i \sigma^{\mu\dagger} (\partial_\mu + a_\mu^L) \psi_L + \bar{\psi}_R i \sigma^\mu (\partial_\mu + a_\mu^R) \psi_R \} \\
&\equiv \int d^4x \bar{\psi} D \psi
\end{aligned} \tag{2.1.2}$$

ここで、 a_μ^L が $U(N)_L$ 、 a_μ^R が $U(N)_R$ の gauge 場であり、それぞれ左巻き、右巻きの Weyl fermion ψ_L, ψ_R と結合している。

QCD の場合、dynamical な gauge 場は左右のカイラリティに同じように結合する $SU(3)_V$ の gauge 場が入っている。以下の計算を用いて massless QCD の場合の $U(1)_A$ アノマリーを求める場合、 $a_\mu^L = a_\mu^R$ とすれば作用として (2.0.2) 式を用いていることになり、massless QCD のアノマリーが得られる。

2.1.2 $U(1)_A$ アノマリーの計算

藤川の手法を用いて、 $U(1)_A$ アノマリーを具体的に計算する。このアノマリーの計算には Dirac 演算子の固有値に cut off を入れて正則化する必要がある。始めに正則化について議論した後、具体的に Jacobian を計算してアノマリーを得る。

正則化関数

藤川の手法でアノマリーを計算する場合正則化をする必要があるが、正則化関数の取り方は一意ではなく、その取り方に依存してアノマリーの異なる性質が見える場合がある。以下では heat kernel 型の正則化関数を用いて正則化をする。異なる正則化関数を用いた場合の計算については後の章で扱う。正則化では Dirac 演算子 D の固有値の大きな所を落とす正則化を行うが、以下では後の計算、特に第 II 部で応用するため、Dirac 演算子 D がエルミートではない (即ち D の固有値が実数にならない) 場合にも使用可能な手法を用いる。

藤川の手法で用いる正則化関数として、Dirac 演算子 D の固有値 λ_n と cut off Λ の関数として以下の関数を用いる。

$$f\left(\frac{\lambda_n^2}{\Lambda^2}\right) \tag{2.1.3}$$

この関数は以下の性質を満たせば良い。

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0, \quad f(x=0) = 1, \quad x \frac{d}{dx} f(x)|_{x=0} = x \frac{d}{dx} f(x)|_{x=\infty} = 0 \tag{2.1.4}$$

Dirac 演算子 D がエルミートである場合、固有値 λ_n が実数になるので $\lambda_n^2 \geq 0$ を満たし、(2.1.3) 式は正則化関数として機能する。しかし、Dirac 演算子 D がエルミートではない場合は

λ_n が実数にならず、(2.1.3) 式をそのまま正則化関数として使うことは出来ない。

Dirac 演算子 D がエルミートではない場合の対処法として、 D の固有値ではなくエルミートな演算子である $D^\dagger D$ 、 $DD^\dagger$ の固有値を cut off に使う方法がある。この手法は共変的正則化と呼ばれる (正則化に関する詳細は第 3 章で議論する)。以下の計算は [9] を参照している。

$D^\dagger D$ 、 $DD^\dagger$ の固有値の関係について知るため、 $D^\dagger D$ 、 $DD^\dagger$ をそれぞれの固有関数で展開することを考える。固有関数 ϕ_n, φ_n を以下のように定義。

$$D^\dagger D \phi_n(x) = \lambda_n^2 \phi_n(x), \quad (\phi_m^\dagger, \phi_n) = \int d^4x \phi_m^\dagger(x) \phi_n(x) = \delta_{m,n} \quad (2.1.5)$$

$$DD^\dagger \varphi_n(x) = \lambda_n^2 \varphi_n(x), \quad (\varphi_m^\dagger, \varphi_n) = \int d^4x \varphi_m^\dagger(x) \varphi_n(x) = \delta_{m,n} \quad (2.1.6)$$

ここで、 $D^\dagger D$ 、 $DD^\dagger$ の固有値を λ_n^2 として定義した。 $D^\dagger D$ 、 $DD^\dagger$ はそれぞれエルミートなので、その固有値 λ_n^2 は実である。

$D^\dagger D$ の 0 固有値と D の 0 固有値は 1 対 1 対応し、 $DD^\dagger$ の 0 固有値と $D^\dagger$ の 0 固有値も同様に 1 対 1 対応する。この固有関数 ϕ_n に D と $D^\dagger D$ をそれぞれ作用させると、

$$D \phi_n = 0 \quad \Rightarrow \quad D^\dagger D \phi_n = 0 \quad (2.1.7)$$

$$D^\dagger D \phi_n = 0 \quad \Rightarrow \quad (D \phi_n, D \phi_n) = 0 \quad \Rightarrow \quad D \phi_n = 0 \quad (2.1.8)$$

よって、 $D^\dagger D$ の 0 固有値と D の 0 固有値が 1 対 1 対応することが示せた。 $DD^\dagger$ の 0 固有値と $D^\dagger$ の 0 固有値も同様に 1 対 1 対応することが示せる。

また、固有関数 ϕ_n と φ_n には $\lambda_n \neq 0$ の場合に以下の関係性がある。

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\lambda_n} D \phi_n(x) \quad (2.1.9)$$

これは、以下のように示せる。

$$DD^\dagger(D \phi_n) = D(D^\dagger D) \phi_n = D(\lambda_n^2 \phi_n) = \lambda_n^2 (D \phi_n)$$

(2.1.9) 式の $1/\lambda_n$ の係数は (2.1.5)、(2.1.6) 式の規格化条件により決まる。これにより、 $D^\dagger D$ と $DD^\dagger$ は 0 でない固有値を全て共有していることが分かる。以上の議論から、Dirac 演算子 D がエルミートではない場合でも、(2.1.3) 式の正則化関数を用いて λ_n^2 を $D^\dagger D$ 及び $DD^\dagger$ の固有値として扱えば正則化が可能である。

以下の計算では、正則化関数 f として以下の関数を用いる。

$$f\left(\frac{\lambda_n^2}{\Lambda^2}\right) = e^{-\frac{\lambda_n^2}{\Lambda^2}} \quad (2.1.10)$$

この正則化関数を用いることを heat kernel 正則化と呼ぶ。

(2.1.3) 式の正則化関数を使うには演算子 $D^\dagger D$ 、 $DD^\dagger$ の固有値 λ_n^2 が 0 以上でないとならない。この固有値の正定値性 (正確には半正定値性) も以下のように示すことが出来る。

$$\lambda_n^2 = \int d^4x \phi_n^\dagger(x) D^\dagger D \phi_n(x) = \int d^4x |D \phi_n|^2 \geq 0 \quad (2.1.11)$$

$DD^\dagger$ についても φ_n を使って同様に示すことが可能。よって、Dirac 演算子がエルミートではない場合でも $D^\dagger D$ 、 $DD^\dagger$ を用いて正則化し、藤川の手法を用いることが可能である。

Jacobian の計算

$U(1)_A$ 変換による積分測度の Jacobian を計算すれば良い。

作用中の場 $\psi, \bar{\psi}$ を ϕ, φ で展開する。

$$\psi(x) = \sum_n a_n \phi_n(x), \quad \bar{\psi}(x) = \sum_n \bar{b}_n \varphi_n^\dagger(x) \quad (2.1.12)$$

これは作用を見ると分かり、Dirac operator D は ψ に作用し、Lagrangian の $\dagger$ を取ると $D^\dagger$ が $\bar{\psi}^\dagger$ に作用することから決まる。 $\bar{\psi}$ は ψ と独立な場であることを再度注意する。(2.1.12) 式中の係数 $a_n, \bar{b}_n$ は $\psi, \bar{\psi}$ が fermion であることを反映して grassmann 数である。

これらの関係式を用いて作用 (2.1.2) を書き換えると、

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x \bar{\psi}(x) D \psi(x) \\ &= \int d^4x \sum_{m,n} \bar{b}_m \varphi_m^\dagger(x) D a_n \phi_n(x) \\ &= \int d^4x \sum_{m,n} \bar{b}_m \varphi_m^\dagger a_n (\lambda_n \varphi_n) \\ &= \sum_{m,n} \bar{b}_m a_n \lambda_n \delta_{m,n} \\ &= \sum_n \lambda_n \bar{b}_n a_n \quad (\lambda_n > 0) \end{aligned} \quad (2.1.13)$$

途中の変形で (2.1.9) 式を使った。

path integral measure も書き換えると、

$$\mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} = \prod_n da_n d\bar{b}_n \quad (2.1.14)$$

(2.0.7) 式の局所 $U(1)_A$ 変換の下で、この path integral measure は以下のように変化。

$$\begin{aligned} a_n \rightarrow a'_n &= (\phi_n^\dagger, \psi') = (\phi_n^\dagger, e^{i\alpha(x)\gamma_5} \psi) \\ &\simeq \int d^4x \phi_n^\dagger (1 + i\alpha(x)\gamma_5) \sum_m a_m \phi_m \\ &= \sum_m \left(\delta_{n,m} + i \int d^4x \alpha(x) \phi_n^\dagger(x) \gamma_5 \phi_m(x) \right) a_m \equiv \sum_m M_{nm}^a a_m \end{aligned} \quad (2.1.15)$$

$$\begin{aligned} \bar{b}_n \rightarrow \bar{b}'_n &= (\bar{\psi}', \varphi_n) = (\bar{\psi} e^{i\alpha(x)\gamma_5}, \varphi_n) \\ &\simeq \int d^4x \sum_m \bar{b}_m \varphi_m^\dagger (1 + i\alpha(x)\gamma_5) \varphi_n \\ &= \sum_m \bar{b}_m \left(\delta_{n,m} + i \int d^4x \alpha(x) \varphi_m^\dagger(x) \gamma_5 \varphi_n(x) \right) \equiv \sum_m \bar{b}_m M_{mn}^b \end{aligned} \quad (2.1.16)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi} &\rightarrow \mathcal{D}\psi'\mathcal{D}\bar{\psi}' = \mathcal{J}\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi} \\
&= \prod_n da'_n d\bar{b}'_n = \prod_n (\det[M_{nm}^a])^{-1} (\det[M_{mn}^b])^{-1} da_n d\bar{b}_n \\
&= \prod_n \mathcal{J} da_n d\bar{b}_n
\end{aligned} \tag{2.1.17}$$

この Jacobian $\mathcal{J}$ を計算する。以下の公式を使って計算すると、

$$\det[1 + \epsilon X] = e^{\epsilon \text{Tr}[X] - \mathcal{O}(\epsilon^2)} \tag{2.1.18}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{J} &= \left(\det \left[\delta_{n,m} + i \int d^4x \alpha(x) \phi_n^\dagger(x) \gamma_5 \phi_m(x) \right] \right)^{-1} \left(\det \left[\delta_{n,m} + i \int d^4x \alpha(x) \varphi_n^\dagger(x) \gamma_5 \varphi_m(x) \right] \right)^{-1} \\
&\simeq \exp \left[-i \int d^4x \sum_n \alpha(x) \phi_n^\dagger(x) \gamma_5 \phi_n(x) \right] \exp \left[-i \int d^4x \sum_n \alpha(x) \varphi_n^\dagger(x) \gamma_5 \varphi_n(x) \right] \\
&= \exp \left[- \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_n^N i \int d^4x \alpha(x) \left\{ \phi_n^\dagger(x) \gamma_5 \phi_n(x) + \varphi_n^\dagger(x) \gamma_5 \varphi_n(x) \right\} \right] \\
&= \exp \left[- \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \sum_n^\infty i \int d^4x \alpha(x) \left\{ \phi_n^\dagger(x) \gamma_5 e^{-\frac{\lambda_n^2}{\Lambda^2}} \phi_n(x) + \varphi_n^\dagger(x) \gamma_5 e^{-\frac{\lambda_n^2}{\Lambda^2}} \varphi_n(x) \right\} \right] \\
&\equiv \exp \left[-i \int d^4x \alpha(x) \mathcal{A}(x) \right]
\end{aligned} \tag{2.1.19}$$

anomaly の計算

以下では、(2.1.19) 式で定義した $\mathcal{A}(x)$ を計算する。

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(x) &= \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \sum_n^\infty \left\{ \phi_n^\dagger(x) \gamma_5 e^{-\frac{\lambda_n^2}{\Lambda^2}} \phi_n(x) + \varphi_n^\dagger(x) \gamma_5 e^{-\frac{\lambda_n^2}{\Lambda^2}} \varphi_n(x) \right\} \\
&= \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \sum_n^\infty \left\{ \text{Tr} \left[\phi_n^\dagger(x) \gamma_5 e^{-\frac{D^\dagger D}{\Lambda^2}} \phi_n(x) \right] + \text{Tr} \left[\varphi_n^\dagger(x) \gamma_5 e^{-\frac{D D^\dagger}{\Lambda^2}} \varphi_n(x) \right] \right\} \\
&= \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \lim_{y \rightarrow x} \sum_n^\infty \left\{ \text{Tr} \left[\gamma_5 e^{-\frac{D^\dagger D}{\Lambda^2}} \phi_n(x) \phi_n^\dagger(y) \right] + \text{Tr} \left[\gamma_5 e^{-\frac{D D^\dagger}{\Lambda^2}} \varphi_n(x) \varphi_n^\dagger(y) \right] \right\}
\end{aligned} \tag{2.1.20}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \lim_{y \rightarrow x} \left\{ \text{Tr} \left[\gamma_5 e^{-\frac{D^\dagger D}{\Lambda^2}} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik(x-y)} \mathbf{1}_{4 \times 4} \right] + \text{Tr} \left[\gamma_5 e^{-\frac{D D^\dagger}{\Lambda^2}} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik(x-y)} \mathbf{1}_{4 \times 4} \right] \right\} \\
&= \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\gamma_5 e^{-ikx} \left\{ e^{-\frac{D^\dagger D}{\Lambda^2}} + e^{-\frac{D D^\dagger}{\Lambda^2}} \right\} e^{ikx} \right]
\end{aligned} \tag{2.1.21}$$

途中、(2.1.20) 式の所で完全系を $\{\phi_n \phi_n^\dagger\}$ から $\{e^{ik(x-y)}\}$ に置き換えた。これは、 Tr を取ったことで (spinor の足について scalar だったので spinor の足について Tr を取っても変わらない) 完全系 $\sum_n \{\phi_n \phi_n^\dagger\}$ の形で書けるようになり、これは $1 = \sum_n |n\rangle \langle n|$ より好きな完全系に置き換えて良いので簡単な平面波を選んだことによる。

(2.1.21) 式の計算を進めるため、以下の式変形を利用する。

$$\begin{aligned}
D^\dagger D &= (i\gamma^\mu D_\mu)^\dagger (i\gamma^\nu D_\nu) = -iD_\mu^\dagger \gamma^\mu \cdot i\gamma^\nu D_\nu \\
&= -\gamma^\mu \gamma^\nu D_\mu D_\nu \\
&= -\left(\frac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] + \frac{1}{2}\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}\right) D_\mu D_\nu \\
&= -\frac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] D_\mu D_\nu - \frac{1}{2}\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} D_\mu D_\nu \\
&= -\frac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \left(\frac{1}{2}[D_\mu, D_\nu] + \frac{1}{2}\{D_\mu, D_\nu\}\right) - \frac{1}{2}(2\eta^{\mu\nu}) D_\mu D_\nu \\
&= -\eta^{\mu\nu} D_\mu D_\nu - \frac{1}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu][D_\mu, D_\nu] \\
&= -\eta^{\mu\nu} D_\mu D_\nu - \frac{1}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu} \\
&= -\eta^{\mu\nu} (D_\mu^L D_\nu^L P_+ + D_\mu^R D_\nu^R P_-) - \frac{1}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] (F_{\mu\nu}^L P_+ + F_{\mu\nu}^R P_-) \tag{2.1.22}
\end{aligned}$$

ここで、(2.1.2) 式より、共変微分 D_μ は以下のようにになっている。

$$\begin{aligned}
D_\mu &= \partial_\mu + \begin{pmatrix} a_\mu^L & 0 \\ 0 & a_\mu^R \end{pmatrix} \\
D_\mu^L &= \partial_\mu + a_\mu^L \\
D_\mu^R &= \partial_\mu + a_\mu^R \\
F_{\mu\nu}^L &\equiv [D_\mu^L, D_\nu^L] = \partial_\mu a_\nu^L - \partial_\nu a_\mu^L + [a_\mu^L, a_\nu^L] \\
F_{\mu\nu}^R &\equiv [D_\mu^R, D_\nu^R] = \partial_\mu a_\nu^R - \partial_\nu a_\mu^R + [a_\mu^R, a_\nu^R] \tag{2.1.23}
\end{aligned}$$

ここで、 $F_{\mu\nu}$ は field strength である。

$DD^\dagger$ についても同様に計算出来て、以下のようになる。

$$\begin{aligned}
DD^\dagger &= (i\gamma^\mu D_\mu)(i\gamma^\nu D_\nu)^\dagger = i\gamma^\mu D_\mu (-iD_\nu^\dagger \gamma^\nu) \\
&= -\gamma^\mu \gamma^\nu \bar{D}_\mu \bar{D}_\nu \\
&= -\eta^{\mu\nu} (D_\mu^L D_\nu^L P_- + D_\mu^R D_\nu^R P_+) - \frac{1}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] (F_{\mu\nu}^L P_- + F_{\mu\nu}^R P_+) \tag{2.1.24}
\end{aligned}$$

ここで、 $\bar{D}_\mu$ を以下のように定義した。

$$\bar{D}_\mu \equiv \partial_\mu + \begin{pmatrix} A_\mu^R & 0 \\ 0 & A_\mu^L \end{pmatrix} \tag{2.1.25}$$

(2.1.22)、(2.1.24) 式を使って (2.1.21) 式中の $D^\dagger D$ と $DD^\dagger$ を展開して計算する。

$$e^{-ikx} D_\mu e^{ikx} = D_\mu + ik_\mu \tag{2.1.26}$$

という関係が成立するので、(2.1.21) 式の $\mathcal{A}$ を計算すると以下ようになる。

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(x) &= \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\gamma_5 e^{-ikx} \left\{ e^{-\frac{D^\dagger D}{\Lambda^2}} + e^{-\frac{D D^\dagger}{\Lambda^2}} \right\} e^{ikx} \right] \\
&= \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\gamma_5 \left(\exp \left\{ -\frac{1}{\Lambda^2} \left[-\eta^{\mu\nu} ((D_\mu^L + ik_\mu)(D_\nu^L + ik_\nu)P_+ \right. \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + (D_\mu^R + ik_\mu)(D_\nu^R + ik_\nu)P_- \right) - \frac{1}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] (F_{\mu\nu}^L P_+ + F_{\mu\nu}^R P_-) \right] \right\} \right. \\
&\quad \left. + \exp \left\{ -\frac{1}{\Lambda^2} \left[-\eta^{\mu\nu} ((D_\mu^L + ik_\mu)(D_\nu^L + ik_\nu)P_- + (D_\mu^R + ik_\mu)(D_\nu^R + ik_\nu)P_+) \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. - \frac{1}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] (F_{\mu\nu}^L P_- + F_{\mu\nu}^R P_+) \right] \right\} \right) \right] \\
&= \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \Lambda^4 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-k_\mu k^\mu} \text{Tr} \left[\gamma_5 \left(\exp \left\{ \frac{1}{\Lambda^2} \left[\eta^{\mu\nu} D_\mu^L D_\nu^L P_+ + D_\mu^R D_\nu^R P_- \right. \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \frac{1}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] (F_{\mu\nu}^L P_+ + F_{\mu\nu}^R P_-) \right] + \frac{1}{\Lambda} \left[2i\eta^{\mu\nu} k_\mu (D_\nu^L P_+ + D_\nu^R P_-) \right] \right\} \right. \\
&\quad \left. + \exp \left\{ \frac{1}{\Lambda^2} \left[\eta^{\mu\nu} D_\mu^L D_\nu^L P_- + D_\mu^R D_\nu^R P_+ + \frac{1}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] (F_{\mu\nu}^L P_- + F_{\mu\nu}^R P_+) \right] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{\Lambda} \left[2i\eta^{\mu\nu} k_\mu (D_\nu^L P_- + D_\nu^R P_+) \right] \right\} \right) \right] \\
&= \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \Lambda^4 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-k_\mu k^\mu} \text{Tr} \left[\gamma_5 \left(\exp \left\{ \left[\frac{1}{\Lambda^2} \eta^{\mu\nu} D_\mu^L D_\nu^L + \frac{1}{\Lambda^2} \frac{1}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu}^L \right. \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \frac{1}{\Lambda} 2i\eta^{\mu\nu} k_\mu D_\nu^L \right] P_+ + \left[\frac{1}{\Lambda^2} \eta^{\mu\nu} D_\mu^R D_\nu^R + \frac{1}{\Lambda^2} \frac{1}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu}^R + \frac{1}{\Lambda} 2i\eta^{\mu\nu} k_\mu D_\nu^R \right] P_- \right\} \right. \\
&\quad \left. + \exp \left\{ \left[\frac{1}{\Lambda^2} \eta^{\mu\nu} D_\mu^L D_\nu^L + \frac{1}{\Lambda^2} \frac{1}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu}^L + \frac{1}{\Lambda} 2i\eta^{\mu\nu} k_\mu D_\nu^L \right] P_- \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left[\frac{1}{\Lambda^2} \eta^{\mu\nu} D_\mu^R D_\nu^R + \frac{1}{\Lambda^2} \frac{1}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu}^R + \frac{1}{\Lambda} 2i\eta^{\mu\nu} k_\mu D_\nu^R \right] P_+ \right\} \right) \right] \quad (2.1.27)
\end{aligned}$$

ここで、(2.1.27) 式の $\exp$ の肩にある P_+ 部分と P_- 部分は、それぞれ $P_\pm$ を除いた部分が γ_5 と可換であるため、 $P_+ P_- = 0$ より可換である。そのため $\exp$ を $1/\Lambda$ のべきで展開することが可能であり、(2.1.27) 式を以下のように展開する。

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(x) &= \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \Lambda^4 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-k_\mu k^\mu} \text{Tr} \left[\gamma_5 \left(\sum_{n=1}^4 \frac{1}{n!} \left\{ \left[\frac{1}{\Lambda^2} \eta^{\mu\nu} D_\mu^L D_\nu^L + \frac{1}{\Lambda^2} \frac{1}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu}^L \right. \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \frac{1}{\Lambda} 2i\eta^{\mu\nu} k_\mu D_\nu^L \right] P_+ + \left[\frac{1}{\Lambda^2} \eta^{\mu\nu} D_\mu^R D_\nu^R + \frac{1}{\Lambda^2} \frac{1}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu}^R + \frac{1}{\Lambda} 2i\eta^{\mu\nu} k_\mu D_\nu^R \right] P_- \right\}^n \right. \\
&\quad \left. + \sum_{n=1}^4 \frac{1}{n!} \left\{ \left[\frac{1}{\Lambda^2} \eta^{\mu\nu} D_\mu^L D_\nu^L + \frac{1}{\Lambda^2} \frac{1}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu}^L + \frac{1}{\Lambda} 2i\eta^{\mu\nu} k_\mu D_\nu^L \right] P_- \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left[\frac{1}{\Lambda^2} \eta^{\mu\nu} D_\mu^R D_\nu^R + \frac{1}{\Lambda^2} \frac{1}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu}^R + \frac{1}{\Lambda} 2i\eta^{\mu\nu} k_\mu D_\nu^R \right] P_+ \right\}^n \right) \right] + \mathcal{O} \left(\frac{1}{\Lambda} \right) \quad (2.1.28)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \Lambda^4 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-k_\mu k^\mu} \text{Tr} \left[\gamma_5 \frac{1}{2} \left(\left\{ \frac{1}{\Lambda^2} \frac{1}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu}^L \right\}^2 P_+ \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left\{ \frac{1}{\Lambda^2} \frac{1}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu}^R \right\}^2 P_- + \left\{ \frac{1}{\Lambda^2} \frac{1}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu}^L \right\}^2 P_- \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left\{ \frac{1}{\Lambda^2} \frac{1}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu}^R \right\}^2 P_+ \right) \right] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda}\right) \\
&= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-k_\mu k^\mu} \text{Tr} \left[\gamma_5 \frac{1}{2} \left(\left\{ \frac{1}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu}^L \right\}^2 + \left\{ \frac{1}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu}^R \right\}^2 \right) \right] \\
&= \frac{\pi^2}{(2\pi)^4} \frac{1}{32} \left\{ \text{Tr} [\gamma_5 [\gamma^\mu, \gamma^\nu] [\gamma^\rho, \gamma^\sigma]] \text{tr} [F_{\mu\nu}^L F_{\rho\sigma}^L] + \text{Tr} [\gamma_5 [\gamma^\mu, \gamma^\nu] [\gamma^\rho, \gamma^\sigma]] \text{tr} [F_{\mu\nu}^R F_{\rho\sigma}^R] \right\} \\
&= -\frac{1}{32\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left\{ \text{tr} [F_{\mu\nu}^L F_{\rho\sigma}^L] + \text{tr} [F_{\mu\nu}^R F_{\rho\sigma}^R] \right\} \tag{2.1.29}
\end{aligned}$$

(2.1.28) 式で、 γ 行列に対してトレースを取るときは γ_5 と一緒にトレースを取るため、 γ_5 に掛かる部分が γ_5 に比例する形にならない限り γ 行列が残ってしまうためトレースレスになることを利用して大半の項を落とした。((1.1.6) 式より、 γ 行列のトレースを取ると 0 になる。)

最後の等号で以下の変形を用いた。

$$\begin{aligned}
\text{Tr} [\gamma_5 [\gamma^\mu, \gamma^\nu] [\gamma^\rho, \gamma^\sigma]] F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} &= \text{Tr} [\gamma_5 (\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma - \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\sigma - \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma^\rho + \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma^\rho)] F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} \\
&= 4 \text{Tr} [\gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma] F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} \\
&= 4 \text{Tr} [\gamma_5 (-1) \gamma_5 \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}] F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} \\
&= -16 \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} \tag{2.1.30}
\end{aligned}$$

以上の計算より、作用 (2.1.2) の $U(1)_A$ アノマリーとして (2.1.29) 式を得た。

この結果を用いて massless QCD の場合のアノマリーを求めるには、結合している dynamical な gauge 場を $SU(3)_V$ の gauge 場にすれば良い。(2.1.2) 式で $a_\mu^L = a_\mu^R$ として作用を (2.1.1) 式にすれば良いので、その場合のアノマリーは (2.1.29) 式で $F^L = F^R$ とすれば良い。よって、(2.1.1) 式の作用の $U(1)_A$ アノマリーは以下ようになる。

$$\begin{aligned}
\ln \mathcal{J} &= -i \int d^4 x \alpha(x) \mathcal{A} \\
&= i \int d^4 x \alpha(x) \frac{1}{16\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{tr} [F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}] \tag{2.1.31}
\end{aligned}$$

2.1.3 複数の gauge 場が結合している場合

(2.0.10) 式や (2.0.13) 式のような、複数の gauge 場が結合している場合の $U(1)_A$ アノマリーも同様に計算可能である。計算過程を見ると分かるように、結合している gauge 場が dynamical な gauge 場か背景 gauge 場かには結果は依存せず、アノマリーの計算をする上では区別せずに結果を得られる。結果は Dirac 演算子に含まれる gauge 場を用いて field strength $F_{\mu\nu}$ を作れば良いだけである。例えば (2.0.10) 式の作用の $U(1)_A$ アノマリーは、以下の関係式を用いて作用に含まれる gauge 場を $U(1)_V \times U(1)_A$ から $U(1)_L \times U(1)_R$ に組み換えると 2.1.2 節の計算がそのまま

使える。

$$A_\mu^L = A_\mu^V + A_\mu^A \quad (2.1.32)$$

$$A_\mu^R = A_\mu^V - A_\mu^A \quad (2.1.33)$$

$$A_\mu^V = \frac{1}{2}(A_\mu^L + A_\mu^R) \quad (2.1.34)$$

$$A_\mu^A = \frac{1}{2}(A_\mu^L - A_\mu^R) \quad (2.1.35)$$

この $U(1)_L \times U(1)_R$ の背景 gauge 場 A_μ^L 、 A_μ^R を使って作用を書くと以下ようになる。

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x \bar{\psi} i \gamma^\mu (\partial_\mu + a_\mu + A_\mu^V + \gamma_5 A_\mu^A) \psi \\ &= \int d^4x \bar{\psi} i \gamma^\mu \left(\partial_\mu + a_\mu + \frac{1}{2}(A_\mu^L + A_\mu^R) + \gamma_5 \frac{1}{2}(A_\mu^L - A_\mu^R) \right) \psi \\ &= \int d^4x \bar{\psi} i \gamma^\mu (\partial_\mu + a_\mu + A_\mu^L P_+ + A_\mu^R P_-) \psi \end{aligned} \quad (2.1.36)$$

$$= \int d^4x (\bar{\psi}_L, \bar{\psi}_R) i \begin{pmatrix} \sigma^{\mu\dagger} & 0 \\ 0 & \sigma^\mu \end{pmatrix} \left(\partial_\mu + \begin{pmatrix} a_\mu & 0 \\ 0 & a_\mu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_\mu^L & 0 \\ 0 & A_\mu^R \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \quad (2.1.37)$$

(2.1.36) 式から分かるように、 $A_\mu^V + \gamma_5 A_\mu^A$ の形が入っていた gauge 場は $A_\mu^L P_+ + A_\mu^R P_-$ の形で書け、この理論のアノマリーは (3.1.37) 式が (2.1.2) 式と似た形になっていることから分かるように 2.1.2 節と同様に計算可能である。

よって、(2.1.36) 式の作用で書ける理論の $U(1)_A$ アノマリーは以下ようになる。

$$\begin{aligned} \ln \mathcal{J} &= -i \int d^4x \alpha(x) \mathcal{A} \\ &= i \int d^4x \alpha(x) \frac{1}{32\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \{ \text{tr} [f_{\mu\nu} f_{\rho\sigma}] + F_{\mu\nu}^L F_{\rho\sigma}^L + F_{\mu\nu}^R F_{\rho\sigma}^R \} \end{aligned} \quad (2.1.38)$$

ここで、 a_μ で作られる field strength を $f_{\mu\nu}$ 、 A_μ^L 、 A_μ^R で作られる field strength をそれぞれ $F_{\mu\nu}^L$ 、 $F_{\mu\nu}^R$ で書いた。

2.1.4 $U(1)_V$ アノマリー

今までは $U(1)$ 対称性として $U(1)_A$ を考えて来たが、 $U(1)_V$ 対称性の方を考えることも可能である。しかし、良く考える QCD のような系では $U(1)_V$ はアノマリーを持たないことを見る。

2.1.2 節で扱った作用 (2.1.2) を用いて $U(1)_V$ のアノマリーを計算する。基本的には 2.1.2 節と同じ手順で計算可能だが、考える変換が $U(1)_V$ に変わったため (2.1.15) 式以下が変更を受け、以下ようになる。

(2.0.6) 式の局所的な $U(1)_V$ 変換の下で、path integral measure は以下のように変化。

$$\begin{aligned} a_n \rightarrow a'_n &= (\phi_n^\dagger, \psi') = (\phi_n^\dagger, e^{i\alpha(x)} \psi) \\ &\simeq \int d^4x \phi_n^\dagger (1 + i\alpha(x)) \sum_m a_m \phi_m \\ &= \sum_m \left(\delta_{n,m} + i \int d^4x \alpha(x) \phi_n^\dagger(x) \phi_m(x) \right) a_m \equiv \sum_m M_{nm}^a a_m \end{aligned} \quad (2.1.39)$$

$$\begin{aligned}
\overline{b}_n \rightarrow \quad \overline{b}'_n &= (\bar{\psi}', \varphi_n) = (\bar{\psi}e^{-i\alpha(x)}, \varphi_n) \\
&\simeq \int d^4x \sum_m \overline{b}_m \varphi_m^\dagger (1 - i\alpha(x)) \varphi_n \\
&= \sum_m \overline{b}_m \left(\delta_{n,m} - i \int d^4x \alpha(x) \varphi_m^\dagger(x) \varphi_n(x) \right) \equiv \sum_m \overline{b}_m M_{mn}^b \quad (2.1.40)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \rightarrow \quad \mathcal{D}\psi' \mathcal{D}\bar{\psi}' &= \mathcal{J} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \\
&= \prod_n da'_n d\overline{b}'_n = \prod_n (\det[M_{nm}^a])^{-1} (\det[M_{mn}^b])^{-1} da_n d\overline{b}_n \\
&= \prod_n \mathcal{J} da_n d\overline{b}_n \quad (2.1.41)
\end{aligned}$$

この Jacobian $\mathcal{J}$ を計算する。以下の公式を使って計算すると、

$$\det[1 + \epsilon X] = e^{\epsilon \text{Tr}[X] - \mathcal{O}(\epsilon^2)} \quad (2.1.42)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{J} &= \left(\det \left[\delta_{n,m} + i \int d^4x \alpha(x) \phi_n^\dagger(x) \phi_m(x) \right] \right)^{-1} \left(\det \left[\delta_{n,m} - i \int d^4x \alpha(x) \varphi_m^\dagger(x) \varphi_n(x) \right] \right)^{-1} \\
&\simeq \exp \left[-i \int d^4x \sum_n \alpha(x) \phi_n^\dagger(x) \phi_n(x) \right] \exp \left[i \int d^4x \sum_n \alpha(x) \varphi_n^\dagger(x) \varphi_n(x) \right] \\
&= \exp \left[- \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_n^N i \int d^4x \alpha(x) \{ \phi_n^\dagger(x) \phi_n(x) - \varphi_n^\dagger(x) \varphi_n(x) \} \right] \\
&= \exp \left[- \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \sum_n^\infty i \int d^4x \alpha(x) \left\{ \phi_n^\dagger(x) e^{-\frac{\lambda_n^2}{\Lambda^2}} \phi_n(x) - \varphi_n^\dagger(x) e^{-\frac{\lambda_n^2}{\Lambda^2}} \varphi_n(x) \right\} \right] \\
&\equiv \exp \left[-i \int d^4x \alpha(x) \mathcal{A}(x) \right] \quad (2.1.43)
\end{aligned}$$

(2.1.19) 式と (2.1.43) 式の違いに注意して、以下 2.1.2 節の計算を追うと、最終的にアノマリーは以下のように得られる。

$$\begin{aligned}
\ln \mathcal{J} &= -i \int d^4x \alpha(x) \mathcal{A} \\
&= i \int d^4x \alpha(x) \frac{1}{32\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \{ \text{tr} [F_{\mu\nu}^L F_{\rho\sigma}^L] - \text{tr} [F_{\mu\nu}^R F_{\rho\sigma}^R] \} \quad (2.1.44)
\end{aligned}$$

この結果を用いて 2.1.2 節と同様に massless QCD の場合のアノマリーを求める。結合している dynamical な gauge 場を $SU(3)_V$ の gauge 場にすれば良いので、 $a_\mu^L = a_\mu^R$ として計算する。その場合のアノマリーは $F^L = F^R$ とすれば良いので、 $U(1)_V$ アノマリーは以下ようになる。

$$\begin{aligned}
\ln \mathcal{J} &= -i \int d^4x \alpha(x) \mathcal{A} \\
&= i \int d^4x \alpha(x) \frac{1}{32\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \{ \text{tr} [F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}] - \text{tr} [F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}] \} \\
&= 0 \quad (2.1.45)
\end{aligned}$$

よって、QCD のような、gauge 場が vector 的に結合した理論では $U(1)_V$ アノマリーは出ない。

2.1.5 カレント保存とアノマリーの関係

古典論に於いて、何らかの大域的対称性がある場合、Noether の定理よりその対称性に対応する保存 charge と保存カレントが定義出来る。アノマリーは古典論では存在した対称性が量子論に移行すると破れているという現象であるため、大域的対称性に対しては「カレント保存則の破れ」として見ることも可能である。以下では、保存カレントとアノマリーの関係について見る。

2.1.2 節で扱ったセットアップで考える。作用は (2.1.2) 式であり、 $U(1)_A$ 対称性に対するアノマリーを考える。ここで、 $U(1)_A$ 対称性は gauge 化されていないとし、(2.1.2) 式の gauge 場は $U(1)_A$ の gauge 場を含まないとする。藤川の手法を用いてアノマリーを計算した結果が (2.1.29) 式である。

(2.1.2) 式の作用で、(2.0.5) 式の大域的 $U(1)_A$ 対称性に対する保存カレントを考える。無限小 $U(1)_A$ 変換を考えて、以下のように $\delta\psi$ を定義する。

$$\psi \rightarrow e^{i\gamma_5\theta}\psi \simeq (1 + i\gamma_5\theta)\psi \equiv \psi + \theta\delta\psi \quad (2.1.46)$$

Noether の定理より、保存カレントは以下のように定義出来る。

$$\begin{aligned} j_5^\mu &= - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi(x))} \delta\psi(x) \\ &= - \bar{\psi} i\gamma^\mu i\gamma_5 \psi \\ &= \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi \end{aligned} \quad (2.1.47)$$

このカレントは古典論では以下の保存則を満たす。

$$\partial_\mu j_5^\mu = \partial_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi) = 0 \quad (2.1.48)$$

このカレントは作用 (2.1.2) に対して (2.0.7) 式の局所的な $U(1)_A$ 変換をしてみると以下のように出て来る。

$$\begin{aligned} S &\rightarrow S' = \int d^4x \bar{\psi} e^{i\gamma_5\alpha(x)} D e^{i\gamma_5\alpha(x)} \psi \\ &= S + \int d^4x \bar{\psi} e^{i\gamma_5\alpha(x)} i\gamma^\mu (\partial_\mu e^{i\gamma_5\alpha(x)}) \psi \\ &= S - \int d^4x \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 (\partial_\mu \alpha(x)) \psi \\ &= S - \int d^4x (\partial_\mu \alpha(x)) j_5^\mu \\ &= S + \int d^4x \alpha(x) \partial_\mu j_5^\mu \end{aligned} \quad (2.1.49)$$

ここで、最後の等号では部分積分をし、表面項を落とした。ここで行った局所的 $U(1)_A$ 変換は Dirac 場のみに対する変換であることに注意。

以上の議論を元に、経路積分を行う。以下の議論では gauge 場の経路積分は本質的でないため考えない。これは、アノマリーの議論で gauge 場を dynamical な場として入れるか背景場として

入れるかで違いがないことに対応する。作用 (2.1.2) に対応する分配関数は以下ようになる。

$$\begin{aligned} Z[a_\mu^L, a_\mu^R] &= \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{-S} \\ &= \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{-\int d^4x \bar{\psi} D\psi} \end{aligned} \quad (2.1.50)$$

この分配関数の中の、Dirac 場のみに対して局所的な $U(1)_A$ 変換を行う。ここで、Dirac 場のみに対する $U(1)_A$ 変換は経路積分の積分変数 $\psi, \bar{\psi}$ の変換になるため、経路積分を考える場合は単なる積分変数の置き換えになり、変換前後で同じ分配関数を計算していることに注意。2.1.2 節の議論より、経路積分の積分測度の部分から Jacobian が出る。また、上の (2.1.49) 式の議論より作用も変更を受けるので、以下ようになる。

$$\begin{aligned} Z[a_\mu^L, a_\mu^R] &= \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{-\int d^4x \bar{\psi} D\psi} \\ &= \int \mathcal{D}\psi' \mathcal{D}\bar{\psi}' e^{-\int d^4x \bar{\psi}' D\psi'} = Z' \\ &= \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{J} e^{-S - \int d^4x \alpha(x) \partial_\mu j_5^\mu} \\ &= \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{-i \int d^4x \alpha(x) \mathcal{A}} e^{-S - \int d^4x \alpha(x) \partial_\mu j_5^\mu} \\ &= \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{-S} e^{-\int d^4x \alpha(x) (i\mathcal{A} + \partial_\mu j_5^\mu)} \\ &\simeq \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{-S} \left\{ 1 - \int d^4x \alpha(x) (i\mathcal{A}Z + \partial_\mu j_5^\mu) \right\} \end{aligned} \quad (2.1.51)$$

$$\begin{aligned} &= Z - \int d^4x \alpha(x) \left(i\mathcal{A}Z + \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{-S} \partial_\mu j_5^\mu \right) \\ &= Z \left\{ 1 - \int d^4x \alpha(x) (i\mathcal{A} + \langle \partial_\mu j_5^\mu \rangle) \right\} \end{aligned} \quad (2.1.52)$$

ここで、(2.1.51) 式では $\mathcal{A}$ が fermion ψ に依存せず gauge 場 a_μ のみで書けるため、経路積分されない量になっているので経路積分の外に出した。よって、この議論に矛盾がないようにするためには、任意の α による $U(1)_A$ 変換で $Z = Z'$ が成立するようにする必要があるので、以下の関係式が得られる。

$$\begin{aligned} i\mathcal{A} + \langle \partial_\mu j_5^\mu \rangle &= 0 \\ \langle \partial_\mu j_5^\mu \rangle &= -i\mathcal{A} \\ &= \frac{i}{32\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left\{ \text{tr} [F_{\mu\nu}^L F_{\rho\sigma}^L] + \text{tr} [F_{\mu\nu}^R F_{\rho\sigma}^R] \right\} \end{aligned} \quad (2.1.53)$$

2.1.2 節と同様に massless QCD に対応する、dynamical な gauge 場が vector 型では入っている場合の計算をすると、 $a_\mu^L = a_\mu^R$ として以下ようになる。

$$\begin{aligned} \langle \partial_\mu j_5^\mu \rangle &= -i\mathcal{A} \\ &= i \frac{1}{16\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{tr} [F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}] \end{aligned} \quad (2.1.54)$$

以上の議論より、古典論では保存するカレントが量子論ではアノマリーによって保存しなくなる場合がある。言い方を変えると、アノマリーはカレント保存則の破れとして理解される。実験的にもこのカレント保存則の破れとして観測される。

2.1.6 $U(1)_L$ アノマリー

第3章では $U(N)_L$ 変換に対するアノマリーを計算するが、ここではそのための準備として $U(1)_L$ 変換に対するアノマリーを考えておく。2.1.2 節と 2.1.4 節の計算を使えば同様の計算で求められる。

$U(1)_L$ 変換は以下のような変換である。

$$P_+ \psi(x) = \psi_L(x) \rightarrow e^{i\theta_L} \psi_L(x), \quad \bar{\psi}_L(x) \rightarrow \bar{\psi}_L(x) e^{-i\theta_L} \quad (2.1.55)$$

$$P_- \psi(x) = \psi_R(x) \rightarrow \psi_R(x), \quad \bar{\psi}_R(x) \rightarrow \bar{\psi}_R(x) \quad (2.1.56)$$

つまり、 ψ_L だけ位相を回し ψ_R に対しては位相を回さないような変換になっている。

これを Dirac 場と gauge 場に対する局所 $U(1)_L$ 変換として書くと以下のようなになる。

$$\begin{aligned} \psi(x) &\rightarrow e^{i\alpha P_+} \psi(x), \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}(x) e^{-i\alpha P_-} \\ A_\mu^L &\rightarrow e^{i\alpha} A_\mu^L e^{-i\alpha} + e^{i\alpha} \partial_\mu e^{-i\alpha}, \quad A_\mu^R \rightarrow A_\mu^R \end{aligned} \quad (2.1.57)$$

ここで、 α は $U(1)_L$ のパラメータ。

この変換の下で積分測度の変換を考えると、

$$\begin{aligned} a_n \rightarrow a'_n &= (\phi_n^\dagger, \psi') = (\phi_n^\dagger, e^{i\alpha(x)P_+} \psi) \\ &\simeq \int d^4x \phi_n^\dagger (1 + i\alpha(x)P_+) \sum_m a_m \phi_m \\ &= \sum_m \left(\delta_{n,m} + i \int d^4x \alpha(x) \phi_n^\dagger(x) P_+ \phi_m(x) \right) a_m \equiv \sum_m M_{nm}^a a_m \end{aligned} \quad (2.1.58)$$

$$\begin{aligned} \bar{b}_n \rightarrow \bar{b}'_n &= (\bar{\psi}', \varphi_n) = (\bar{\psi} e^{-i\alpha(x)P_-}, \varphi_n) \\ &\simeq \int d^4x \sum_m \bar{b}_m \varphi_m^\dagger (1 - i\alpha(x)P_-) \varphi_n \\ &= \sum_m \bar{b}_m \left(\delta_{n,m} - i \int d^4x \alpha(x) \varphi_m^\dagger(x) P_- \varphi_n(x) \right) \equiv \sum_m \bar{b}_m M_{mn}^b \end{aligned} \quad (2.1.59)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} &\rightarrow \mathcal{D}\psi' \mathcal{D}\bar{\psi}' = \mathcal{J} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \\ &= \prod_n da'_n d\bar{b}'_n = \prod_n (\det[M_{nm}^a])^{-1} (\det[M_{mn}^b])^{-1} da_n d\bar{b}_n \\ &= \prod_n \mathcal{J} da_n d\bar{b}_n \end{aligned} \quad (2.1.60)$$

この Jacobian $\mathcal{J}$ を計算すると、

$$\begin{aligned}
\mathcal{J} &= \left(\det \left[\delta_{n,m} + i \int d^4x \alpha(x) \phi_n^\dagger(x) P_+ \phi_m(x) \right] \right)^{-1} \left(\det \left[\delta_{n,m} - i \int d^4x \alpha(x) \varphi_m^\dagger(x) P_- \varphi_n(x) \right] \right)^{-1} \\
&\simeq \exp \left[-i \int d^4x \sum_n \alpha(x) \phi_n^\dagger(x) P_+ \phi_n(x) \right] \exp \left[i \int d^4x \sum_n \alpha(x) \varphi_n^\dagger(x) P_- \varphi_n(x) \right] \\
&= \exp \left[- \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_n^N i \int d^4x \alpha(x) \left\{ \phi_n^\dagger(x) P_+ \phi_n(x) - \varphi_n^\dagger(x) P_- \varphi_n(x) \right\} \right] \\
&= \exp \left[- \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \sum_n^\infty i \int d^4x \alpha(x) \left\{ \phi_n^\dagger(x) P_+ e^{-\frac{\lambda_n^2}{\Lambda^2}} \phi_n(x) - \varphi_n^\dagger(x) P_- e^{-\frac{\lambda_n^2}{\Lambda^2}} \varphi_n(x) \right\} \right] \\
&= \exp \left[- \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \sum_n^\infty i \int d^4x \alpha(x) \left(\frac{1}{2} \left\{ \phi_n^\dagger(x) e^{-\frac{\lambda_n^2}{\Lambda^2}} \phi_n(x) - \varphi_n^\dagger(x) e^{-\frac{\lambda_n^2}{\Lambda^2}} \varphi_n(x) \right\} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{2} \left\{ \phi_n^\dagger(x) \gamma_5 e^{-\frac{\lambda_n^2}{\Lambda^2}} \phi_n(x) + \varphi_n^\dagger(x) \gamma_5 e^{-\frac{\lambda_n^2}{\Lambda^2}} \varphi_n(x) \right\} \right) \right] \\
&\equiv \exp \left[-i \int d^4x \alpha(x) \mathcal{A}(x) \right] \tag{2.1.61}
\end{aligned}$$

この Jacobian の形から分かるように、アノマリーは $U(1)_V$ の寄与と $U(1)_A$ の寄与を $\frac{1}{2}$ ずつ足せば良い。よって、以下のようになる。

$$\begin{aligned}
\ln \mathcal{J} &= -i \int d^4x \alpha(x) \mathcal{A} \\
&= i \int d^4x \alpha(x) \frac{1}{32\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \frac{1}{2} \left\{ \text{tr} [F_{\mu\nu}^L F_{\rho\sigma}^L] - \text{tr} [F_{\mu\nu}^R F_{\rho\sigma}^R] \right. \\
&\quad \left. + \text{tr} [F_{\mu\nu}^L F_{\rho\sigma}^L] + \text{tr} [F_{\mu\nu}^R F_{\rho\sigma}^R] \right\} \\
&= i \int d^4x \alpha(x) \frac{1}{32\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{tr} [F_{\mu\nu}^L F_{\rho\sigma}^L] \tag{2.1.62}
\end{aligned}$$

2.2 摂動のアノマリーの種類

2.1.2 節の計算では、アノマリーを持つ対称性として $U(1)_A$ を考え、gauge 場として $U(N)_L \times U(N)_R$ の gauge 場を入れた場合を考えた。2.1.3 節で他の gauge 場を入れた場合の $U(1)_A$ アノマリーについても計算したため、以下では 2 章の最初に導入したアノマリーの種類分けを具体例を用いて見る。アノマリーの分類は、アノマリーを持つ対称性と理論に結合している gauge 場の種類で決まるが、以下の例ではアノマリーを持つ対称性として $U(1)_A$ を考えた場合について見る。更に、大域的対称性のアノマリーの中でも、背景 gauge 場を用いてアノマリーを考えた場合に 't Hooft アノマリーと呼ばれるクラスを定義出来ることを示す。

2.2.1 ゲージアノマリー

2.1.2 節でアノマリーを計算した $U(1)_A$ は、例えば QCD のような系では大域的対称性なので、アノマリーがあっても問題はない。以下では例として、この $U(1)_A$ 対称性が gauge 対称性である

場合を考えてみる。

2.1.2 節の計算を元に gauge アノマリーの場合の例を作る場合、dynamical な gauge 場として $U(1)_A$ の gauge 場を結合させれば良い。 $U(1)_A$ の gauge 場を結合させた作用は、(2.0.8) 式を参照すると以下のように書ける。

$$S = \int d^4x \left\{ \bar{\psi} i \gamma^\mu (\partial_\mu + \gamma_5 a_\mu^A) \psi - \frac{1}{2} f_{\mu\nu}^A f^{A\mu\nu} \right\} \quad (2.2.1)$$

ここで、 $f_{\mu\nu}^A$ は $U(1)_A$ の gauge 場 a_μ^A で書いた field strength である。(2.1.34)、(2.1.35) 式を見ると、この作用は (2.1.2) 式で $a^L = -a^R$ とした物であると分かる。

この理論のアノマリーを求めるには、アノマリーの議論では gauge 場が dynamical かどうかは関係しないことから、2.1.3 節に従えば良い。(2.1.38) 式で a_μ と A_μ^V を 0 にしたものが (2.2.1) 式のアノマリーに対応するので、(2.1.38) 式を以下のように書き換える。

$$\begin{aligned} \ln \mathcal{J} &= i \int d^4x \alpha(x) \frac{1}{32\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left\{ \text{tr} [f_{\mu\nu} f_{\rho\sigma}] + F_{\mu\nu}^L F_{\rho\sigma}^L + F_{\mu\nu}^R F_{\rho\sigma}^R \right\} \\ &= i \int d^4x \alpha(x) \frac{1}{32\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left\{ \text{tr} [f_{\mu\nu} f_{\rho\sigma}] + \partial_\mu A_\nu^L \partial_\rho A_\sigma^L + \partial_\mu A_\nu^R \partial_\rho A_\sigma^R \right\} \\ &= i \int d^4x \alpha(x) \frac{1}{32\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left\{ \text{tr} [f_{\mu\nu} f_{\rho\sigma}] + \partial_\mu (A_\nu^V + A_\nu^A) \partial_\rho (A_\sigma^V + A_\sigma^A) \right. \\ &\quad \left. + \partial_\mu (A_\nu^V - A_\nu^A) \partial_\rho (A_\sigma^V - A_\sigma^A) \right\} \\ &= i \int d^4x \alpha(x) \frac{1}{32\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left\{ \text{tr} [f_{\mu\nu} f_{\rho\sigma}] + 2\partial_\mu A_\nu^V \partial_\rho A_\sigma^V + 2\partial_\mu A_\nu^A \partial_\rho A_\sigma^A \right\} \\ &= i \int d^4x \alpha(x) \frac{1}{32\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left\{ \text{tr} [f_{\mu\nu} f_{\rho\sigma}] + 2F_{\mu\nu}^V F_{\rho\sigma}^V + 2F_{\mu\nu}^A F_{\rho\sigma}^A \right\} \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

欲しいアノマリーはここで a_μ, A_μ^V を 0 として落とし、 A_μ^A を a_μ^A としたものである。以上の議論より、(2.2.1) 式の作用が持つ $U(1)_A$ アノマリーは以下のように書ける。

$$\ln \mathcal{J} = i \int d^4x \alpha(x) \frac{1}{16\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} f_{\mu\nu}^A f_{\rho\sigma}^A \quad (2.2.3)$$

このアノマリーは dynamical な gauge 場を用いて gauge 化された対称性 (ここでは $U(1)_A$) のアノマリーなので、gauge アノマリーである。2.0.1 節で議論したように、gauge アノマリーは理論のユニタリ性を破ってしまうなどの問題があるため、この議論から得られる結論は「大域的 $U(1)_A$ 対称性は量子論では gauge 化出来ない」となる。

2.2.2 ABJ-type アノマリー

2.1.2 節では dynamical な gauge 場として $U(N)_L \times U(N)_R$ の gauge 場を入れた場合の $U(1)_A$ アノマリーを計算した。もし理論に gauge 場が結合していないとすると、(2.0.1) 式のような作用を考えることになり、Dirac 演算子に gauge 場が入っていないため (2.1.29) 式の field strength も 0 になり、アノマリーは見えない。

2.1.2 節の計算で、 $a_\mu^L = a_\mu^R$ として $U(N_C)_V$ の dynamical な gauge 場 a_μ^V が理論に結合してい

る場合を考える。即ち、以下のような作用で与えられる理論を考えてみる。

$$S = \int d^4x \left\{ \bar{\psi} i \gamma^\mu (\partial_\mu + a_\mu^V) \psi - \frac{1}{2} \text{tr} [f_{\mu\nu}^V f^{V\mu\nu}] \right\} \quad (2.2.4)$$

この系は $U(N)_L \times U(N)_R$ の大域的対称性を持つ。これは、 $SU(3)_V$ の dynamical な gauge 場が結合しており、 $U(N)_L \times U(N)_R$ の大域的なカイラル対称性を (近似的に) 持つ QCD のような系に対応する。この系を古典的に考えると、 $U(N)_L \times U(N)_R$ の部分群として $U(1)_A$ の大域的対称性を持つ。この系の $U(1)_A$ アノマリーは、2.1.2 節の計算で gauge 場を a_μ^V に変更すれば良いだけなので、以下のように書ける。

$$\ln \mathcal{J} = i \int d^4x \alpha(x) \frac{1}{16\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} f_{\mu\nu}^V f_{\rho\sigma}^V \quad (2.2.5)$$

ここで、アノマリーを持つ対称性は $U(1)_A$ だが、(2.2.5) 式のアノマリーの表式に含まれる gauge 場は $U(N_C)_V$ の dynamical な gauge 場である。ここで計算したアノマリーを持つ対称性と、アノマリーの表式に含まれる gauge 場が gauge 化している対称性が対応していないことに注意。言い換えると、アノマリーを持つ対称性に関係しなくても、何らかの gauge 場が理論に結合してさえいればアノマリーが見える可能性がある。

このように、大域的対称性を持つアノマリーは、dynamical な gauge 場を理論に結合させることで初めて見えるようになる。歴史的には摂動的アノマリーはこの場合で初めて計算され、最初に計算した Adler, Bell, Jackiw の名前を取って以下では「ABJ-type アノマリー」と呼ぶ。

ABJ-type アノマリーを見る場合には、理論に何か dynamical な gauge 場が結合していれば良く、その gauge 場が gauge 化している対称性が何であるかは問わない。

2.2.3 't Hooft アノマリー

大域的対称性を持つアノマリーを dynamical な gauge 場がない状態でも見るために、アノマリーを持つ対称性に対応する背景 gauge 場を入れ、大域的対称性を gauge 化して局所的対称性に格上げしてその gauge アノマリーを見るという手法がある。古典的な作用に対する gauge 化の手続きは 2.0.3 節で見た通り。このように、背景 gauge 場を導入することで見えるようになるアノマリーを「't Hooft アノマリー」と呼ぶ。

以下では、2.1.2 節で計算した $U(1)_A$ アノマリーの例を用いて 't Hooft アノマリーを見る。(2.0.1) 式のように gauge 場が結合していない系を考えると dynamical な gauge 場が結合していないため ABJ-type アノマリーは存在しないが、't Hooft アノマリーを見るため $U(1)_A$ の背景 gauge 場 A_μ^A を結合させた以下のような作用を考える。

$$S = \int d^4x \bar{\psi} i \gamma^\mu (\partial_\mu + \gamma_5 A_\mu^A) \psi \quad (2.2.6)$$

この作用を用いてアノマリーを計算すると背景 gauge 場を用いて field strength が書けるため、アノマリーは以下のようになる。

$$\ln \mathcal{J} = i \int d^4x \alpha(x) \frac{1}{16\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}^A F_{\rho\sigma}^A \quad (2.2.7)$$

これは (2.2.3) 式と形は同じだが、入っている gauge 場が背景 gauge 場であるという違いがある。このアノマリーが't Hooft アノマリーである。

't Hooft アノマリーは、繰り込み群不変であるという良い性質を性質を持っている。これは高エネルギー理論が持つアノマリーを低エネルギー有効理論 (EFT) も再現しなくてはならないという意味であり、この性質を用いて EFT の形に大きく制限をかけることが出来る。これは't Hooft アノマリーマッチングと呼ばれる手法で、広く応用されている。

2.3 正則化

前節では heat kernel 正則化により正則化を行ったが、これでは上手くいかない場合がある。heat kernel 正則化に代わる有効な正則化として、Pauli-Villars 正則化 (以下 PV 正則化) が広く用いられている。本節では PV 正則化を導入し、heat kernel 正則化との相違点を議論する。

2.3.1 正則化関数

始めに、藤川の手法に於ける正則化の一般論について議論する。2.1.2 節の始めで示した通り、藤川の手法で用いる正則化関数は以下のような一般形で書ける。

$$f\left(\frac{\lambda_n^2}{\Lambda^2}\right) \quad (2.3.1)$$

この関数が満たすべき性質は、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0, f(x=0) = 1, x \frac{d}{dx} f(x)|_{x=0} = x \frac{d}{dx} f(x)|_{x=\infty} = 0 \quad (2.3.2)$$

であり、これを満たしている関数であれば何を使っても良かった。ここで、 $x = \lambda_n^2/\Lambda^2$ である。2.1.2 節ではこの関数 $f(x)$ の具体形として

$$f(x) = e^{-x} \quad (2.3.3)$$

を用いた。この (2.3.3) 式の正則化関数を用いた正則化を heat kernel 正則化と呼び、広く使われる。

正則化関数として異なる関数を用いることも可能で、例えば以下の関数もよく用いられる。

$$f(x) = \frac{1}{1+x} \quad (2.3.4)$$

x に λ_n^2/M^2 を代入し、(2.3.1) 式に対応する形で具体形を書くと、以下のようになる。

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\lambda_n^2}{M^2}\right) &= \frac{1}{1 + \frac{\lambda_n^2}{M^2}} \\ &= \frac{M^2}{M^2 + \lambda_n^2} \\ &= \frac{M^2}{M^2 - \not{p}^2} \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

ここで、 M が (2.3.1) 式での Λ に対応する cut-off である。この正則化関数を用いて正則化する手法を PV 正則化と呼ぶ。

2.3.2 Pauli-Villars 正則化

この PV 正則化を用いてアノマリーを計算する。考える作用は、vector 型の gauge 場を結合させた以下の作用である。((2.0.2) 式と同様の作用になっているがここでは gauge 場の gauge 群までは指定しない。)

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x \bar{\psi} i \gamma^\mu (\partial_\mu + a_\mu) \psi \\ &= \int d^4x \bar{\psi} i \not{D} \psi \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

PV 正則化でアノマリーを計算した場合、以下の関係式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \langle \partial_\mu j_5^\mu \rangle &= -i\mathcal{A} \\ &= -2iM \text{Tr} \left[\gamma_5 \frac{1}{\not{D} + M} \right] \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

$$= \frac{i}{16\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{tr} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} \quad (2.3.8)$$

PV 正則化とは元々、作用に PV mass M を持った PV 場を導入した理論を考え、 $M \rightarrow \infty$ の極限を取るという正則化のことであった。(2.3.6) 式に PV 場を加えた作用を書くと以下のようになる。

$$S = \int d^4x \bar{\psi} i \not{D} \psi + \bar{\phi} (i \not{D} - M) \phi \quad (2.3.9)$$

ここで、 ϕ は PV 場と呼ばれる場で、Bose 的な spinor 場 (即ち非物理的な場) である。 $M \rightarrow \infty$ の極限を取れば PV 場は無限に重くなり、理論には効かなくなる。このように質量を持った粒子を理論に導入すると、この質量項が古典的な $U(1)_A$ 対称性を破ってしまうため、古典的に $U(1)_A$ カレントが保存しなくなる。以下では、2.1.5 節のカレント保存の議論を今の場合の PV 正則化した作用 (2.3.9) に適用することを考え、(2.3.5) 式の正則化関数を用いることが PV 正則化に対応することを見る。作用 (2.3.9) を局所 $U(1)_A$ 変換すると、以下のようになる。

$$\begin{aligned} S \rightarrow S' &= \int d^4x \left\{ \bar{\psi} i \gamma^\mu e^{-i\gamma_5 \alpha(x)} D_\mu e^{i\gamma_5 \alpha(x)} \psi + \bar{\phi} i \gamma^\mu e^{-i\gamma_5 \alpha(x)} D_\mu e^{i\gamma_5 \alpha(x)} \phi - \bar{\phi} e^{2i\gamma_5 \alpha(x)} M \phi \right\} \\ &= S - \int d^4x \left\{ \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 (\partial_\mu \alpha(x)) \psi + \bar{\phi} \gamma^\mu \gamma_5 (\partial_\mu \alpha(x)) \phi + 2i\alpha(x) \bar{\phi} \gamma_5 M \phi \right\} \\ &= S - \int d^4x \left\{ (\partial_\mu \alpha(x)) j_5^\mu + 2i\alpha(x) \bar{\phi} \gamma_5 M \phi \right\} \\ &= S + \int d^4x \alpha(x) \left\{ \partial_\mu j_5^\mu - 2i\bar{\phi} \gamma_5 M \phi \right\} \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

ここで、axial カレントを以下のように定義した。

$$j_5^\mu \equiv \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi + \bar{\phi} \gamma^\mu \gamma_5 \phi \quad (2.3.11)$$

カレントが保存しなくなる代わりに、経路積分を考えた時に出る Jacobian は 1 になる。これは fermion ψ と boson ϕ で Jacobian の寄与がちょうど相殺するためである。分配関数を考え、その

$U(1)_A$ 変換を考えると以下のようになる。

$$\begin{aligned}
Z &= \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\bar{\phi} e^{-S} \\
&= \int \mathcal{D}\psi' \mathcal{D}\bar{\psi}' \mathcal{D}\phi' \mathcal{D}\bar{\phi}' e^{-S'} = Z' \\
&= \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{J} \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\bar{\phi} \mathcal{J}^{-1} \exp \left\{ -S - \int d^4x \alpha(x) \left(\partial_\mu j_5^\mu - 2i\bar{\phi}\gamma_5 M\phi \right) \right\} \\
&\simeq Z \left\{ 1 - \int d^4x \alpha(x) \left(\langle \partial_\mu j_5^\mu \rangle - \langle 2i\bar{\phi}\gamma_5 M\phi \rangle \right) \right\}
\end{aligned} \tag{2.3.12}$$

以上の議論から、カレント保存の破れは以下のように書ける。

$$\begin{aligned}
\langle \partial_\mu j_5^\mu \rangle &= 2iM \langle \bar{\phi}\gamma_5\phi \rangle \\
&= -2iM \text{Tr} \left[\gamma_5 \frac{1}{\not{D} + M} \right]
\end{aligned} \tag{2.3.13}$$

よって、以上の議論から (2.3.7) 式が成立する。

以下では、(2.3.7) 式が (2.3.8) 式と等しいことを示す。(2.3.7) 式のうち以下の部分を計算する。

$$\begin{aligned}
M \text{Tr} \left[\gamma_5 \frac{1}{\not{D} + M} \right] &= M \text{Tr} \left[\gamma_5 (\not{D} - M) \frac{1}{(\not{D} + M)(\not{D} - M)} \right] \\
&= \text{Tr} \left[\gamma_5 \left(1 - \frac{\not{D}}{M} \right) \frac{1}{1 - \frac{\not{D}^2}{M^2}} \right] \\
&= \text{Tr} \left[\gamma_5 \frac{1}{1 - \frac{\not{D}^2}{M^2}} \right] = \text{Tr} \left[\gamma_5 f \left(-\frac{\not{D}^2}{M^2} \right) \right] \\
&= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\gamma_5 e^{-ikx} f \left(-\frac{\not{D}^2}{M^2} \right) e^{ikx} \right] \\
&= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\gamma_5 f \left(-\frac{1}{M^2} \left\{ \eta^{\mu\nu} (ik_\mu + D_\mu)(ik_\nu + D_\nu) + \frac{1}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu} \right\} \right) \right]
\end{aligned} \tag{2.3.14}$$

$$\begin{aligned}
&= M^4 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\gamma_5 f \left(k_\mu k^\mu - \frac{\not{D}^2}{M^2} \right) \right] \\
&\simeq M^4 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\gamma_5 \left(f(k_\mu k^\mu) - \frac{1}{1!} \frac{\not{D}^2}{M^2} f'(k_\mu k^\mu) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{2!} \left(\frac{\not{D}^2}{M^2} \right)^2 f''(k_\mu k^\mu) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{M^5} \right) \right) \right] \\
&= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\gamma_5 \left(\frac{1}{2!} \left(\frac{1}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu} \right)^2 f''(k_\mu k^\mu) \right) \right] + \mathcal{O} \left(\frac{1}{M} \right) \\
&= \frac{1}{16\pi^2} \text{Tr} \left[\gamma_5 \left(\frac{1}{32} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] [\gamma^\rho, \gamma^\sigma] F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} \right) \right] + \mathcal{O} \left(\frac{1}{M} \right)
\end{aligned} \tag{2.3.15}$$

$$= -\frac{1}{32\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{tr} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} \tag{2.3.16}$$

(2.3.14) 式で以下の変形を用いた。

$$\begin{aligned}
\not{D}^2 &= \gamma^\mu \gamma^\nu D_\mu D_\nu \\
&= \left(\frac{1}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] + \frac{1}{2} \{ \gamma^\mu, \gamma^\nu \} \right) D_\mu D_\nu \\
&= \frac{1}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] D_\mu D_\nu + \frac{1}{2} \{ \gamma^\mu, \gamma^\nu \} D_\mu D_\nu \\
&= \frac{1}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \left(\frac{1}{2} [D_\mu, D_\nu] + \frac{1}{2} \{ D_\mu, D_\nu \} \right) + \frac{1}{2} (2\eta^{\mu\nu}) D_\mu D_\nu \\
&= \eta^{\mu\nu} D_\mu D_\nu + \frac{1}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] [D_\mu, D_\nu] \\
&= \eta^{\mu\nu} D_\mu D_\nu + \frac{1}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{2.3.17}$$

(2.3.15) 式で以下の変形を用いた。

$$\begin{aligned}
\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} f''(k_\mu k^\mu) &= \frac{1}{16\pi^4} \int d^4 k f''(k_\mu k^\mu) \\
&= \frac{1}{16\pi^4} \int r^3 dr d\Omega_3 f''(r^2) \\
&= \frac{2\pi^2}{16\pi^4} \int_{s=0}^{s=\infty} \frac{1}{2} s ds f''(s) \\
&= \frac{1}{16\pi^2} \left(s f'(s) \Big|_{s=0}^{s=\infty} - \int_{s=0}^{s=\infty} ds f'(s) \right) \\
&= \frac{1}{16\pi^2} (0 - f(s) \Big|_{s=0}^{s=\infty}) = \frac{1}{16\pi^2} f(0) \\
&= \frac{1}{16\pi^2}
\end{aligned} \tag{2.3.18}$$

ここで、 r は k を極座標表示した時の動径方向の座標であり、 $s = r^2$ と定義した。

以上の計算より、(2.3.8) 式が成り立つと分かる。この議論から、(2.3.5) 式の正則化関数が、(2.3.9) 式の意味での PV 正則化と等価であることが分かる。

2.3.3 heat kernel 正則化との比較

この Pauli-Villars 正則化では、PV mass M を 2 乗せずに使うため、PV mass の符号の区別が可能になる。この mass の符号は domain wall mass のような物を考える場合には重要になるため、PV 正則化が良く使われる。

(2.3.5) 式の PV 正則化の正則化関数を $1/M$ で展開すると、以下のように書ける。

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{\lambda_n^2}{M^2}\right) &= \frac{1}{1 - \frac{\not{D}^2}{M^2}} \\
&= 1 - \frac{\not{D}^2}{M^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{M^3}\right)
\end{aligned} \tag{2.3.19}$$

これを見ると明らかなように、PV 正則化では正則化に $D^\dagger D, DD^\dagger$ ではなく D^2 を使っているため、Dirac 演算子 D がエルミートではない場合は注意が必要である。3.3 節でこのような、エル

ミートではない D に対して D^2 を使って正則化する方法を導入するが、その正則化によって得たアノマリーは共変アノマリーではない。

このように、PV 正則化は共变的正則化とは少し異なるため、PV 正則化で得たアノマリーが共変正則化で得られるアノマリーと一致しているとは必ずしも言えない。これは一般に異なる手法で正則化してアノマリーを計算した場合にも言え、これらの異なる正則化で得たアノマリーどうしとの関係については 3 章で少し議論する。

2.4 応用

本題とは余り関係しないが、摂動的アノマリーが重要な役割を担う現象について具体例を幾つか挙げる。特にカイラルアノマリーに着目し、歴史的に重要且つ有名な物を紹介する。

2.4.1 $U(1)_A$ 問題

前述の通り、massless QCD には古典的には $U(N_f)_L \times U(N_f)_R \simeq SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R \times U(1)_V \times U(1)_A$ の対称性があった。この対称性は自発的対称性の破れ (spontaneous symmetry breaking、以下 SSB) の機構により $SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R \rightarrow SU(N_f)$ と破れている。この機構を実現するモデルとして、Nambu-Jona-Lasinio model が有名である。SSB により対称性が破れた部分には、対応する massless の Nambu-Goldstone boson (以下 NG boson) が作られ、QCD の場合にはこれはパイオンに対応する (NG boson のことをパイオンと呼ぶ場合もある。)。例えば $N_f = 2$ の場合は、u quark と d quark のみから作られる meson を考えれば良いが、この場合は SSB で破れた対称性である $SU(2)$ の自由度に対応して 3 つの NG boson が作られ、これが $\pi^\pm, \pi^0$ の 3 つの meson に対応している。(QCD の有効作用として chiral Lagrangian を用いて見ると分かりやすいが、ここでは詳細には立ち入らず、対称性のみに着目して議論する。具体例は後述。)

このカイラル対称性のうち古典的な対称性にのみ注目し、SSB が $U(N_f)_L \times U(N_f)_R \rightarrow U(N_f)$ と起きていると考ええると NG boson の数が実験と合わなくなってしまう。歴史的には $N_f = 3$ の場合で問題が提起されたので、例として $N_f = 3$ の場合を考えてみる。SSB で破れた対称性を $U(3)$ と考えると、自由度は 9 なので NG boson も 9 個出来る筈である。しかし、実験でパイオンに対応する粒子を見てみると、 $\pi^\pm, \pi^0, K^\pm, K^0, \bar{K}^0, \eta$ の 8 つの meson は質量が比較的小さいため NG boson と解釈しても良さそうだが、もう 1 つの NG boson の候補である η' meson は質量が 958MeV と核子並に重く、quark mass が 0 である場合に massless になる NG boson として解釈するには重すぎる。この問題が $U(1)_A$ 問題と呼ばれる物である。

これは古典的な対称性にのみ注目して $U(3) \simeq SU(3) \times U(1)$ を SSB によって破れた対称性であると考えたため起こる問題である。実際は $U(N_f)_L \times U(N_f)_R \simeq SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R \times U(1)_V \times U(1)_A$ のカイラル対称性のうち $U(1)_A$ 部分がアノマリーで破れているため、SSB する前に理論が持つ対称性は $SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R \times U(1)_V$ である。これが SSB して $U(N_f) \simeq SU(N_f) \times U(1)$ に破れたとすると、破れた部分は $U(N_f)$ ではなく $SU(N_f)$ になり、 $N_f = 3$ の場合、生じる NG boson は $SU(3)$ に対応する 8 つのみである。これは η' が NG boson ではないことを意味し、 η'

が NG boson としては重すぎるという実験事実とも整合する。 $U(1)_A$ アノマリーをきちんと考慮することで、 η' の問題は解決した。

この例から分かるように、古典的な対称性のみならずアノマリーの寄与まできちんと考慮して理論の対称性を決めることが重要である。

Chiral Lagrangian

NG boson として生じるパイオンの理論として chiral Lagrangian が有名である。ここではその概略を紹介する。詳細は文献 [7] の 9 章を参照。

アノマリーは繰り込み不変な量であるため、理論のエネルギースケールに依らずに存在する。そのため、アノマリーの解析のために低エネルギー有効理論 (low energy effective field theory, effective field theory を以下 EFT と省略) を考えることは有用な手法であり、しばしば EFT を用いて議論される。アノマリーがエネルギースケールを選ばないことを利用して、特に massless の自由度のみに着目した EFT を考えることは有用である。

具体例として QCD に注目する。QCD は低エネルギーでは強結合であり QCD そのものの解析は難しい。しかし、その EFT として chiral Lagrangian が古くから考えられており、低エネルギーでの QCD の振る舞いを良く再現する。chiral Lagrangian はカイラル対称性の SSB により生じた NG boson であるパイオンの有効作用である。以下では massless QCD を考えることにして、パイオンが厳密に massless である場合を考える。 $N_f = 3$ の場合の EFT の作用は以下のように入力される。(有効作用を Γ で書く。)

$$\Gamma = \int d^4x \frac{f_\pi^2}{4} \text{tr}[D^\mu U^{-1} D_\mu U] \quad (2.4.1)$$

$$D_\mu U = \partial_\mu U + A_\mu^R U - U A_\mu^L, U = e^{\frac{2i\pi}{f_\pi}} \in SU(3), \pi = \sum_{a=1}^8 \pi^a \frac{\lambda^a}{2} \quad (2.4.2)$$

ここで、この理論には gauge 場として $SU(3)_L \times SU(3)_R$ の gauge 場が入っており、左手成分、右手成分がそれぞれ A^L, A^R に対応する。それぞれ $SU(3)_{adj.}$ の gauge 場である。 π^a がパイオンであり、 $N_f = 3$ の場合は $\pi^\pm, \pi^0, K^\pm, K^0, \bar{K}^0, \eta$ の各 meson に対応する。 λ^a は $SU(3)$ の Lie 代数の生成子である 3×3 の Gell-Mann 行列であり、行列の各成分は u, d, s の各 flavor に対応する。この Gell-Mann 行列と各 NG boson の対応を見ると π^a の各成分と各粒子との対応が付く。Gell-Mann 行列の成分を具体的に書くと、以下のようになっていることが分かる。

$$\begin{aligned} \pi &= \sum_{a=1}^8 \pi^a \frac{\lambda^a}{2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta}{\sqrt{6}} & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta}{\sqrt{6}} & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & -\frac{2\eta}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

η' meson は $U(1)$ part に相当するため、この行列表示では対角成分に入り、 $SU(3)$ の生成子であ

る Gell-Mann 行列では表示できない。(2.4.3) 式と同様の表示で書くと、以下のようになる。

$$\eta' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{\eta'}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\eta'}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\eta'}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \quad (2.4.4)$$

実は、ここで与えた作用 (2.4.1) は EFT としては不十分であり、アノマリーによる寄与が入っていないため例えば $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ のような崩壊が記述できていない。chiral Lagrangian に於けるアノマリーの寄与は WZW 項として知られる。

2.4.2 標準模型に於ける粒子数保存

標準模型 (Standard model) では baryon 数 B と lepton 数 L はそれぞれ保存せず、 $B - L$ のみが保存量である。これは宇宙論に於ける baryon 数生成の機構などで重要になる事実であり、現象論的に重要である。

標準模型では、lepton のみに対する大域的な $U(1)_l$ 変換と quark のみに対する大域的な $U(1)_b$ 変換はどちらも古典的な対称性として存在し、そのため古典的にはそれぞれの粒子数は保存する。しかしこれらの大域的 $U(1)$ 対称性はアノマリーを持ち、量子効果によって粒子数が保存しなくなってしまう。ところが、これらの $U(1)_l$ と $U(1)_b$ を同時に逆位相で回す変換、即ち $B - L$ が粒子数となるような $U(1)_{b-l}$ 変換を考えると、 $U(1)_l$ と $U(1)_b$ のアノマリーが相殺し、全体としてアノマリーがない変換になる。よって、標準模型を量子的に考えた場合、 $U(1)_{b-l}$ のみが対称性として存在し、対応する粒子数として $B - L$ が保存する。

2.5 指数定理

ここまで、摂動的アノマリーを具体的に計算して来た。このアノマリーは物理に限らず数学でも重要な概念である。以下では 2.1.2 節での計算を微分形式を用いて書き換え、数学との関係について議論する。ここでは、特に Atiyah-Singer の指数定理 (以下、AS 指数定理) について見る。

2.5.1 微分形式

アノマリーは微分形式を用いて書くと見通しが良くなる。これは (2.1.29) 式で時空の足 $\mu, \nu, \dots$ を反対称テンソル $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ で潰していることから分かる。

以下のように微分形式での記法を導入する。

$$A = A_\mu dx^\mu \quad (2.5.1)$$

$$F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \quad (2.5.2)$$

$$AdA = A_\mu \partial_\nu A_\rho dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho \quad (2.5.3)$$

$$d(AdA) = \partial_\sigma (A_\mu \partial_\nu A_\rho) dx^\sigma \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho \quad (2.5.4)$$

これを用いて (2.1.29) 式のアノマリーを書き換えると、以下ようになる。

$$\begin{aligned}\int d^4x \mathcal{A}(x) &= \int d^4x \frac{1}{32\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \{ \text{tr} [F_{\mu\nu}^L F_{\rho\sigma}^L] + \text{tr} [F_{\mu\nu}^R F_{\rho\sigma}^R] \} \\ &= \frac{1}{8\pi^2} \int \text{tr} [F^L \wedge F^L + F^R \wedge F^R]\end{aligned}\quad (2.5.5)$$

2.5.2 Atiyah-Singer の指数定理

Dirac 演算子として $\not{D}$ を考える。gauge 場は以下のように入っているとする。

$$\not{D} = \gamma^\mu (\partial_\mu + A_\mu) \quad (2.5.6)$$

gauge 場の gauge 群は指定しない。

AS 指数定理は Dirac 演算子 $\not{D}$ を考えた時に、対応する指数を決めており、以下のような物である。

$$\text{Ind} \not{D} = \int \text{ch}(F) \quad (2.5.7)$$

ここで、 $\text{ch}(F)$ は Chern 指標と呼ばれる物で、4 次元 Euclidean の場合は以下のようになっている。

$$\begin{aligned}\text{ch}(F) &= \left(\frac{i}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{2} \text{tr} F \wedge F \\ &= \left(\frac{i}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{8} d^4x \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{tr} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} \\ &= -\frac{1}{32\pi^2} d^4x \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{tr} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}\end{aligned}\quad (2.5.8)$$

この表式は 2.1.2 節で計算した $U(1)_A$ アノマリーで $\alpha = 1$ としたものの半分になっていると分かる。

この関係から、AS 指数は以下のように $U(1)$ アノマリーと対応する。

$$\text{Ind} \not{D} = -\frac{1}{32\pi^2} \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{tr} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} \quad (2.5.9)$$

この式は (2.1.29) 式にあるようなアノマリー $\mathcal{A}(x)$ を積分した形に対応し、 $\ln \mathcal{J}$ でパラメータ $\alpha(x)$ を $\alpha = 1$ と固定した物になっている。

AS 指数は整数値を取ることが知られており、そのため $U(1)$ アノマリーの寄与も整数値で書ける。この辺りの性質については 4 章でトポロジカル項を見る際に議論する。

この AS 指数定理は偶数次元で成り立つ。一般に、 d 次元の場合 (d は偶数) の Chern 指標は以下のように書ける。

$$\text{ch}(F) = \left(\frac{i}{2\pi} \right)^{\frac{d}{2}} \text{tr} [e^F] \Big|_{d\text{-form}} \quad (2.5.10)$$

ここで、右下の $d\text{-form}$ は $\exp(F)$ を展開して $d\text{-form}$ 部分を取り出すという意味である。よって、 d 次元の指数定理は以下のように書ける。

$$\text{Ind} \not{D} = \left(\frac{i}{2\pi} \right)^{\frac{d}{2}} \int \text{tr} [e^F] \Big|_{d\text{-form}} \in \mathbb{Z} \quad (2.5.11)$$

第 3 章

非可換アノマリー

前章では $U(1)$ 部分のアノマリーに注目して計算を行った。実はアノマリーを持つ群は $U(1)$ には限らず、一般に non-abelian の場合にもアノマリーは存在する。本章では、この non-abelian の場合のアノマリーも考え、一般の群 G に対する摂動のアノマリーを扱う。

アノマリーを持つ群 G として単純群を考えると、群 G が $U(1)$ の場合のアノマリーは Chern 指標を使って書けたが、non-abelian の場合のアノマリーの表式は $U(1)$ の場合とは少し異なる形になる。しかし、非可換の場合のアノマリーも基本的には藤川の手法を用いて $U(1)$ の場合とほぼ同様に計算出来ることを 3.1 節で見る。

一般にアノマリーには、「共変アノマリー (covariant anomaly)」と「整合アノマリー (consistent anomaly)」という 2 種類の表式がある。本章では、この 2 種類のアノマリーの違いについて議論することが主な目的である。3.2 節以降では、3.1 節で計算した例を元にこの 2 種類のアノマリーの違いについて見る。

本章の議論は基本的に [7, 9, 10] に従う。また、[13] も参考にした。

3.1 藤川の手法による非可換アノマリーの計算

非可換群に対しても、藤川の手法を使うことで $U(1)$ の場合と同じような手続きでアノマリーを計算することが可能である。基本的には (2.0.6) 式中の $U(1)$ 変換のパラメータ $\alpha(x)$ を非可換群 G に値を取るように変更するだけで、後は $U(1)$ の時と同様に計算することが出来る。

例えば、 $U(N)_L \times U(N)_R$ の対称性を持った理論に対して、 $U(N)_L$ 変換に対するアノマリーを計算する。ここでは $U(N)_L$ を扱うが、一度計算してしまえば例えば $U(N)_V$ 変換などに対するアノマリーも同様に求められる。作用は (2.1.2) 式と同じ形の以下の式を用いるが、入れる gauge 場は $U(N)_L \times U(N)_R$ の背景 gauge 場として A_μ^L と A_μ^R を入れる。

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x \bar{\psi} i \gamma^\mu (\partial_\mu + A_\mu) \psi \\ &= \int d^4x (\bar{\psi}_L, \bar{\psi}_R) i \begin{pmatrix} \sigma^{\mu\dagger} & 0 \\ 0 & \sigma^\mu \end{pmatrix} \left(\partial_\mu + \begin{pmatrix} A_\mu^L & 0 \\ 0 & A_\mu^R \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \\ &= \int d^4x \bar{\psi}_L i \sigma^{\mu\dagger} (\partial_\mu + A_\mu^L) \psi_L + \bar{\psi}_R i \sigma^\mu (\partial_\mu + A_\mu^R) \psi_R \end{aligned}$$

$$\equiv \int d^4x \bar{\psi} D \psi \quad (3.1.1)$$

2章でも言及した通り 2.1.2 節の計算は背景 gauge 場が結合した場合に対しても同様に計算が可能である。今は $U(N)_L$ 変換を考えるので、変換のパラメータは $U(N)_L$ に値を取る、行列の形になる。2.1.6 節の計算を $\alpha = \alpha^a T^a$ (T^a は $U(N)_L$ 群の生成子) が非可換であるとして計算を追うと、結局アノマリーは以下のように変更を受けると分かる。

$$\begin{aligned} \ln \mathcal{J} &= -i \int d^4x \alpha^a(x) \mathcal{A}^a \\ &= i \int d^4x \alpha^a(x) \frac{1}{32\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{tr} [T^a F_{\mu\nu}^L F_{\rho\sigma}^L] \\ &= i \int d^4x \frac{1}{32\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{tr} [\alpha(x) F_{\mu\nu}^L F_{\rho\sigma}^L] \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

ここで、 $F_{\mu\nu}$ は $U(N)$ の背景 gauge 場 A_μ から作られる field strength で、以下のようになっている。

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^L &\equiv [D_\mu^L, D_\nu^L] = \partial_\mu A_\nu^L - \partial_\nu A_\mu^L + [A_\mu^L, A_\nu^L] \\ F_{\mu\nu}^R &\equiv [D_\mu^R, D_\nu^R] = \partial_\mu A_\nu^R - \partial_\nu A_\mu^R + [A_\mu^R, A_\nu^R] \end{aligned}$$

3.2 共変アノマリー

前節の計算で求めたアノマリーは、「covariant anomaly」という種類のアノマリーである。以下ではこれを「共変アノマリー」と呼ぶ。

共変アノマリーを計算していたのは、2章で選択した正則化が「共変的正則化」と呼ばれるものであったことに由来する。2.1.2 節では、Dirac 演算子 D がエルミートでない場合にも一般化出来るように、正則化関数 (2.1.10) 式内の固有値を $D^\dagger D$ と $DD^\dagger$ を用いて表し、 $D^\dagger D$ と $DD^\dagger$ の固有関数をそれぞれ (2.1.5)、(2.1.6) 式で導入し、これらを用いて計算した。このように、正則化関数として (2.1.10) 式を用いた場合、この固有値を $D^\dagger D$ と $DD^\dagger$ を用いて表すことで以下のような正則化関数を用いるような正則化を「共変的正則化」と呼び、この正則化からは共変アノマリーが計算される。

$$f\left(\frac{\lambda_n^2}{\Lambda^2}\right) = \left\{ f\left(\frac{D^\dagger D}{\Lambda^2}\right), f\left(\frac{DD^\dagger}{\Lambda^2}\right) \right\} = \left\{ \exp\left(-\frac{D^\dagger D}{\Lambda^2}\right), \exp\left(-\frac{DD^\dagger}{\Lambda^2}\right) \right\} \quad (3.2.1)$$

3.2.1 カレント保存則の破れ

2.1.5 節で、アノマリーを「カレント保存則の破れ」として理解した。このカレントを non-abelian の場合に対しても定義する。この節では共変アノマリーに関するカレント保存則の破れについて見る。

共変カレントを以下のように定義する。

$$j_a^{(cov)\mu} = \left\langle \frac{\delta S}{\delta A_\mu^a} \right\rangle \quad (3.2.2)$$

この共変カレントを使って、共変アノマリーは以下のように理解出来る。

$$\partial_\mu j_a^{(cov)\mu} \neq 0 \quad (3.2.3)$$

(2.1.54) 式と比較すると、この表式では共変カレント $j^{(cov)}$ は既に VEV(真空期待値) を取った後の形で定義されていることに注意。

(3.1.2) 式のアノマリーは共変アノマリーであり、(3.1.1) 式の作用の持つ $U(N)_L$ の共変アノマリーによるカレント非保存は以下のように書ける。

$$\begin{aligned} D_\mu j_a^{(cov)\mu} &= -i\mathcal{A}^a \\ &= i\frac{1}{32\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{tr} [T^a F_{\mu\nu}^L F_{\rho\sigma}^L] \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

3.3 整合アノマリー

covariant アノマリー以外に、「consistent anomaly」と呼ばれる表式も存在し、こちらの方が良く使われている。以下、これを「整合アノマリー」と呼ぶ。covariant アノマリーと consistent アノマリーの違いは、藤川の手法でアノマリーを計算する際には正則化関数の取り方の違いに対応する。

ここでは、始めに異なる正則化関数を用いることで藤川の手法で整合アノマリーを導出し、その性質を見る。その後、整合アノマリーの性質として Wess-Zumino 無矛盾性条件等を見る。

3.3.1 異なる正則化によるアノマリーの計算

以下では、3.1 節と同様に (3.1.1) 式の作用から出発して $U(N)_L$ アノマリーを導出する。

計算上は正則化を少し変えるだけだが、結果として得るアノマリーは (3.1.2) 式の共変アノマリーとは異なる形になり、整合アノマリーを得ることになる。

以下では 2.1.2 節とほぼ同じ手順でアノマリーを計算して行く。2.1.6 節では $U(1)_L$ アノマリーを計算していたが、以下で計算するのは $U(N)_L$ アノマリーであり、計算内容は 3.1 節に対応する物であることに注意。以下の計算は [7] を参照した。

正則化関数

ここでは正則化関数として (2.1.3) 式と同じ形のものをを用いるが、この $f(\lambda_n^2/\Lambda^2)$ の中の固有値 λ_n をエルミートに定義した Dirac 演算子 D の固有値とする正則化を行う。(3.1.1) 式中の Dirac 演算子 D はそのままではエルミートではないため、少し変更を加える必要がある。まず、理論に含まれる gauge 場を $U(N)_L \times U(N)_R$ から組み換え、作用を以下の様に変換する。

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x \bar{\psi} D \psi \\ &= \int d^4x \bar{\psi}_L i\sigma^{\mu\dagger} (\partial_\mu + A_\mu^L) \psi_L + \bar{\psi}_R i\sigma^\mu (\partial_\mu + A_\mu^R) \psi_R \\ &= \int d^4x \bar{\psi} i\gamma^\mu (\partial_\mu + A_\mu^L) P_+ \psi + \bar{\psi} i\gamma^\mu (\partial_\mu + A_\mu^R) P_- \psi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int d^4x \bar{\psi} i \not{D}^L P_+ \psi + \bar{\psi} i \not{D}^R P_- \psi \\
&= \int d^4x \bar{\psi} i \gamma^\mu \left\{ \partial_\mu + \frac{1}{2} (A_\mu^L + A_\mu^R) + \frac{1}{2} \gamma_5 (A_\mu^L - A_\mu^R) \right\} \psi \\
&\equiv \int d^4x \bar{\psi} i \gamma^\mu \{ \partial_\mu + V_\mu + \gamma_5 A_\mu \} \psi
\end{aligned} \tag{3.3.1}$$

ここで、 V_μ は $U(N)_V$ の gauge 場である。 A_μ は対応する gauge 群はなく (“ $U(N)_A$ ” という群はない)、単に $A_\mu \equiv \frac{1}{2} (A_\mu^L - A_\mu^R)$ として定義した。(今までの書き方に従うと A_μ^V 、 A_μ^A と書いた方が自然だが、以下の計算では省略して V_μ 、 A_μ と書く。)

こう書くと、Dirac 演算子 D がエルミートではないことが明白になる。gauge 場が全て (最初に定義した通り) 反エルミートだと思つと、 $D^\dagger$ は以下の様に書ける。

$$\begin{aligned}
D^\dagger &= -i \{ \partial_\mu + V_\mu + \gamma_5 A_\mu \}^\dagger \gamma^{\mu\dagger} \\
&= -i \{ -\partial_\mu - V_\mu - \gamma_5 A_\mu \} \gamma^\mu \\
&= i \gamma^\mu \{ \partial_\mu + V_\mu - \gamma_5 A_\mu \} \\
&\neq D
\end{aligned} \tag{3.3.2}$$

よって、ちょうど A_μ の項の存在が D のエルミート性を破っていると分かる。この節で用いる正則化は、エルミートな Dirac 演算子に対してのみ適用可能であるため、(3.3.2) 式の Dirac 演算子が無理やりエルミートに定義する。即ち、今まで反エルミートとして扱ってきた $U(N)_A$ の gauge 場 A_μ をエルミートとして定義してしまうことで Dirac 演算子 D 全体をエルミートにする。即ち、以下の様に再定義する。

$$A_\mu^\dagger = A_\mu \tag{3.3.3}$$

$$L_\mu \equiv A_\mu^L = (V_\mu + A_\mu) \quad L_\mu^\dagger = (V_\mu + A_\mu)^\dagger = -V_\mu + A_\mu = -R_\mu \tag{3.3.4}$$

$$R_\mu \equiv A_\mu^R = (V_\mu - A_\mu) \quad R_\mu^\dagger = (V_\mu - A_\mu)^\dagger = -V_\mu - A_\mu = -L_\mu \tag{3.3.5}$$

ここで、(表記の問題だが、) V_μ 、 A_μ に倣って L_μ 、 R_μ を定義した。

ここでの (3.3.3) 式の再定義の意味は、「物理的には反エルミートである A_μ (結合定数等を明記すると $A_\mu = -igA'_\mu$ と書けたことに注意) をエルミートだと思ってアノマリーの計算を行い、結果を得た後最後に反エルミートに戻す」という、Euclid 化の時間方向と似たような手続きを行うという物である。この (3.3.3) 式の再定義は純粋に計算上の問題であることに注意。共変アノマリーの計算では、(3.2.1) 式のような正則化関数で正則化することにより、Dirac 演算子 D がエルミートではない場合でも問題なく正則化出来るようになっていたためこのような問題は生じない。

このようにして新たにエルミートな Dirac 演算子を以下のように得た。

$$D = i \gamma^\mu \{ \partial_\mu + V_\mu + \gamma_5 A_\mu \} \tag{3.3.6}$$

$$\begin{aligned}
D^\dagger &= -i \{ \partial_\mu + V_\mu + \gamma_5 A_\mu \}^\dagger \gamma^{\mu\dagger} \\
&= -i \gamma^\mu \{ -\partial_\mu - V_\mu - \gamma_5 A_\mu \} \\
&= i \gamma^\mu \{ \partial_\mu + V_\mu + \gamma_5 A_\mu \} \\
&= D
\end{aligned} \tag{3.3.7}$$

この Dirac 演算子を用いて以下のように正則化関数を定義する。これは共変アノマリーの場合 (3.2.1) 式に対応する物である。

$$f\left(\frac{\lambda_n^2}{\Lambda^2}\right) = f\left(\frac{D^2}{\Lambda^2}\right) = \exp\left(-\frac{D^2}{\Lambda^2}\right) \quad (3.3.8)$$

ここで、 λ_n はエルミートな演算子である Dirac 演算子 D の固有値であり、 D のエルミート性から λ_n は実数になるため $\lambda_n^2 \geq 0$ が成り立つ。この (3.3.8) 式を用いて正則化を行い、アノマリーを計算した場合、整合アノマリーが導出されることを以下で見る。

Jacobian の計算

エルミートな Dirac 演算子 D の固有関数を以下のように定義。

$$D\phi_n(x) = \lambda_n \phi_n(x) \quad (3.3.9)$$

$$(\phi_m^\dagger, \phi_n) = \int d^4x \phi_m^\dagger(x) \phi_n(x) = \delta_{m,n} \quad (3.3.10)$$

この固有関数 ϕ を用いて $\psi, \bar{\psi}$ を展開する。

$$\psi(x) = \sum_n a_n \phi_n(x), \quad \bar{\psi}(x) = \sum_n \bar{b}_n \phi_n^\dagger(x) \quad (3.3.11)$$

以下は 2.1.2 節と同様の計算で Jacobian を求めれば良い。考えている変換が $U(N)_L$ であるため、変換が non-abelian になっていることに注意。結局、Jacobian は 2.1.6 節の計算で $\phi = \varphi$ とした物とほぼ同じになり、以下ようになる。

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= \left(\det \left[\delta_{n,m} + i \int d^4x \alpha^a(x) \phi_n^\dagger(x) P_+ T^a \phi_m(x) \right] \right)^{-1} \\ &\quad \cdot \left(\det \left[\delta_{n,m} - i \int d^4x \alpha^a(x) \phi_n^\dagger(x) P_- T^a \phi_m(x) \right] \right)^{-1} \\ &\simeq \exp \left[-i \int d^4x \sum_n \alpha^a(x) \phi_n^\dagger(x) P_+ T^a \phi_n(x) + i \int d^4x \sum_n \alpha^a(x) \phi_n^\dagger(x) P_- T^a \phi_n(x) \right] \\ &= \exp \left[- \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \sum_n i \int d^4x \alpha^a(x) \left\{ \phi_n^\dagger(x) P_+ T^a e^{-\frac{\lambda_n^2}{\Lambda^2}} \phi_n(x) - \phi_n^\dagger(x) P_- T^a e^{-\frac{\lambda_n^2}{\Lambda^2}} \phi_n(x) \right\} \right] \\ &= \exp \left[- \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \sum_n i \int d^4x \alpha^a(x) \phi_n^\dagger(x) \gamma_5 T^a e^{-\frac{\lambda_n^2}{\Lambda^2}} \phi_n(x) \right] \\ &\equiv \exp \left[-i \int d^4x \alpha^a(x) \mathcal{A}^a(x) \right] \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

anomaly の計算

以下では (3.3.12) 式で定義した $\mathcal{A}^a$ を計算する。以下では T^a を明示的に書く代わりに $\alpha = \alpha^a T^a$ を入れておくことにする。

$$\alpha^a \mathcal{A}^a(x) = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \sum_n \int d^4x \alpha^a(x) \phi_n^\dagger(x) \gamma_5 T^a e^{-\frac{\lambda_n^2}{\Lambda^2}} \phi_n(x)$$

$$= \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\alpha \gamma_5 e^{-ikx} e^{-\frac{D^2}{\Lambda^2}} e^{ikx} \right] \quad (3.3.13)$$

以下のように $-D^2$ を変形する。

$$\begin{aligned} -D^2 &= -(i\not{D})^2 = \not{D}^2 \\ &= \gamma^\mu D_\mu \gamma^\nu D_\nu \\ &= \gamma^\mu (D_\mu^L P_+ + D_\mu^R P_-) \gamma^\nu (D_\nu^L P_+ + D_\nu^R P_-) \\ &= \gamma^\mu \gamma^\nu (D_\mu^L P_- + D_\mu^R P_+) (D_\nu^L P_+ + D_\nu^R P_-) \\ &= \gamma^\mu \gamma^\nu (D_\mu^L D_\nu^R P_- + D_\mu^R D_\nu^L P_+) \end{aligned} \quad (3.3.14)$$

ここで、(3.3.4)、(3.3.5) 式の定義より以下の関係が成り立つ。

$$D_\mu^L = \partial_\mu + L_\mu \quad (D_\mu^L)^\dagger = -\partial_\mu - R_\mu = -D_\mu^R \quad (3.3.15)$$

$$D_\mu^R = \partial_\mu + R_\mu \quad (D_\mu^R)^\dagger = -\partial_\mu - L_\mu = -D_\mu^L \quad (3.3.16)$$

(3.3.14) 式を用いて (3.3.13) 式を変形する。

$$\begin{aligned} \alpha^a \mathcal{A}^a(x) &= \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\alpha \gamma_5 e^{-ikx} e^{-\frac{D^2}{\Lambda^2}} e^{ikx} \right] \\ &= \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\alpha (P_+ - P_-) e^{-ikx} \exp \left\{ \frac{1}{\Lambda^2} \gamma^\mu \gamma^\nu (D_\mu^L D_\nu^R P_- + D_\mu^R D_\nu^L P_+) \right\} e^{ikx} \right] \\ &= \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\alpha P_+ e^{-ikx} \exp \left\{ \frac{1}{\Lambda^2} \gamma^\mu \gamma^\nu (D_\mu^L D_\nu^R P_- + D_\mu^R D_\nu^L P_+) \right\} e^{ikx} \right. \\ &\quad \left. - \alpha P_- e^{-ikx} \exp \left\{ \frac{1}{\Lambda^2} \gamma^\mu \gamma^\nu (D_\mu^L D_\nu^R P_- + D_\mu^R D_\nu^L P_+) \right\} e^{ikx} \right] \\ &= \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\alpha P_+ e^{-ikx} \exp \left\{ \frac{1}{\Lambda^2} \gamma^\mu \gamma^\nu D_\mu^R D_\nu^L \right\} e^{ikx} \right. \\ &\quad \left. - \alpha P_- e^{-ikx} \exp \left\{ \frac{1}{\Lambda^2} \gamma^\mu \gamma^\nu D_\mu^L D_\nu^R \right\} e^{ikx} \right] \\ &= \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\alpha e^{-ikx} \left(\exp \left\{ \frac{1}{\Lambda^2} \gamma^\mu \gamma^\nu D_\mu^R D_\nu^L \right\} - \exp \left\{ \frac{1}{\Lambda^2} \gamma^\mu \gamma^\nu D_\mu^L D_\nu^R \right\} \right) e^{ikx} \right. \\ &\quad \left. + \alpha \gamma_5 e^{-ikx} \left(\exp \left\{ \frac{1}{\Lambda^2} \gamma^\mu \gamma^\nu D_\mu^R D_\nu^L \right\} + \exp \left\{ \frac{1}{\Lambda^2} \gamma^\mu \gamma^\nu D_\mu^L D_\nu^R \right\} \right) e^{ikx} \right] \\ &= \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\alpha \gamma_5 e^{-ikx} \left(\exp \left\{ \frac{1}{\Lambda^2} \gamma^\mu \gamma^\nu D_\mu^R D_\nu^L \right\} + \exp \left\{ \frac{1}{\Lambda^2} \gamma^\mu \gamma^\nu D_\mu^L D_\nu^R \right\} \right) e^{ikx} \right] \end{aligned} \quad (3.3.17)$$

ここで、 $D_\mu^R D_\nu^L$ と $D_\mu^L D_\nu^R$ を計算すると、それぞれに含まれている微分 ∂_μ が更に右側にある関数

にも作用することに注意して、

$$\begin{aligned} D_\mu^R D_\nu^L &= (\partial_\mu + R_\mu)(\partial_\nu + L_\nu) \\ &= \partial_\mu \partial_\nu + \partial_\mu L_\nu + R_\mu \partial_\nu + R_\mu L_\nu \end{aligned} \quad (3.3.18)$$

$$\begin{aligned} D_\mu^L D_\nu^R &= (\partial_\mu + L_\mu)(\partial_\nu + R_\nu) \\ &= \partial_\mu \partial_\nu + \partial_\mu R_\nu + L_\mu \partial_\nu + L_\mu R_\nu \end{aligned} \quad (3.3.19)$$

この結果を (3.3.17) 式に代入すると、微分 ∂_μ が完全系として導入した平面波 e^{ikx} に作用して ik_μ を落とす。この寄与を考慮してもう少し計算すると以下ようになる。

$$\begin{aligned} e^{-ikx} (\gamma^\mu \gamma^\nu D_\mu^R D_\nu^L) e^{ikx} &= e^{-ikx} \left\{ \frac{1}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] + \frac{1}{2} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \right\} (\partial_\mu \partial_\nu + \partial_\mu L_\nu + R_\mu \partial_\nu + R_\mu L_\nu) e^{ikx} \\ &= \eta^{\mu\nu} \{ (\partial_\mu + ik_\mu)(\partial_\nu + ik_\nu) + (\partial_\mu + ik_\mu)L_\nu + R_\mu(\partial_\nu + ik_\nu) + R_\mu L_\nu \} \\ &\quad + \frac{1}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \{ (\partial_\mu + ik_\mu)L_\nu + R_\mu(\partial_\nu + ik_\nu) + R_\mu L_\nu \} \\ &= \eta^{\mu\nu} \{ \partial_\mu \partial_\nu + 2ik_\mu \partial_\nu - k_\mu k_\nu + ik_\mu(L_\nu + R_\nu) + \partial_\mu L_\nu + R_\mu \partial_\nu + R_\mu L_\nu \} \\ &\quad + \frac{1}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \{ \partial_\mu L_\nu + R_\mu \partial_\nu + ik_\mu(L_\nu - R_\nu) + R_\mu L_\nu \} \end{aligned} \quad (3.3.20)$$

$D_\mu^L D_\nu^R$ の方も (3.3.20) 式で L と R を入れ換えれば良いので以下のようになる。

$$\begin{aligned} e^{-ikx} (\gamma^\mu \gamma^\nu D_\mu^L D_\nu^R) e^{ikx} &= \eta^{\mu\nu} \{ \partial_\mu \partial_\nu + 2ik_\mu \partial_\nu - k_\mu k_\nu + ik_\mu(R_\nu + L_\nu) + \partial_\mu R_\nu + L_\mu \partial_\nu + L_\mu R_\nu \} \\ &\quad + \frac{1}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \{ \partial_\mu R_\nu + L_\mu \partial_\nu + ik_\mu(R_\nu - L_\nu) + L_\mu R_\nu \} \end{aligned} \quad (3.3.21)$$

この計算結果は 2.1.2 節では概ね (2.1.22) 式に対応するが、(3.3.20) 式を見ると gauge 場に作用する微分が未だ更に右側にも作用する形になっており、field strength が構成出来ていないことに注意。(2.1.22) 式では gauge 場部分は全て field strength の形に纏まってくれていたのが計算が楽だったが、ここではそうはなっていないため、以降の計算も少し大変になる。

(3.3.20) 式で field strength が構成出来ない原因を見るには、gauge 場を V と A に戻して書くと分かりやすい。例えば以下の項を見る。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \{ \partial_\mu L_\nu + R_\mu \partial_\nu \} &= \frac{1}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \{ \partial_\mu (V_\nu + A_\nu) + (V_\mu - A_\mu) \partial_\nu \} \\ &= \frac{1}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \{ (\partial_\mu V_\nu) + V_\nu \partial_\mu + V_\mu \partial_\nu + (\partial_\mu A_\nu) + A_\nu \partial_\mu - A_\mu \partial_\nu \} \\ &= \frac{1}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \{ (\partial_\mu V_\nu) - V_\mu \partial_\nu + V_\mu \partial_\nu + (\partial_\mu A_\nu) - A_\mu \partial_\nu - A_\mu \partial_\nu \} \\ &= \frac{1}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \{ (\partial_\mu V_\nu) + (\partial_\mu A_\nu) - 2A_\mu \partial_\nu \} \\ &\sim \frac{1}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \{ F_{\mu\nu}^V + F_{\mu\nu}^A - A_\mu \partial_\nu \} \end{aligned} \quad (3.3.22)$$

最後の $\sim$ は「abelian の場合には、」という意味で使った。(3.3.22) 式から分かる通り、field strength が構成出来ないのは A_μ 部分が原因である。

(3.3.20) 式と (3.3.21) 式を (3.3.17) 式に代入して計算を進めると、以下ようになる。

$$\begin{aligned}
\alpha^a \mathcal{A}^a(x) &= \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\alpha \gamma_5 e^{-ikx} \left(\exp \left\{ \frac{1}{\Lambda^2} \gamma^\mu \gamma^\nu D_\mu^R D_\nu^L \right\} + \exp \left\{ \frac{1}{\Lambda^2} \gamma^\mu \gamma^\nu D_\mu^L D_\nu^R \right\} \right) e^{ikx} \right] \\
&= \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\alpha \gamma_5 \left(\exp \left\{ \frac{1}{\Lambda^2} \left[\eta^{\mu\nu} \{ \partial_\mu \partial_\nu + 2ik_\mu \partial_\nu - k_\mu k_\nu + ik_\mu (L_\nu + R_\nu) \right. \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \partial_\mu L_\nu + R_\mu \partial_\nu + R_\mu L_\nu \right\} + \frac{1}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \{ \partial_\mu L_\nu + R_\mu \partial_\nu + ik_\mu (L_\nu - R_\nu) + R_\mu L_\nu \} \right] \right\} \\
&\quad \left. + \exp \left\{ \frac{1}{\Lambda^2} \left[\eta^{\mu\nu} \{ \partial_\mu \partial_\nu + 2ik_\mu \partial_\nu - k_\mu k_\nu + ik_\mu (R_\nu + L_\nu) + \partial_\mu R_\nu + L_\mu \partial_\nu + L_\mu R_\nu \right. \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \frac{1}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \{ \partial_\mu R_\nu + L_\mu \partial_\nu + ik_\mu (R_\nu - L_\nu) + L_\mu R_\nu \} \right] \right\} \right) \right] \\
&= \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{\Lambda^4}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-k_\mu k^\mu} \text{Tr} \left[\alpha \gamma_5 \left(\exp \left\{ \frac{1}{\Lambda} \eta^{\mu\nu} ik_\mu (2\partial_\nu + L_\nu + R_\nu) \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{\Lambda^2} \eta^{\mu\nu} \{ \partial_\mu \partial_\nu + \partial_\mu L_\nu + R_\mu \partial_\nu + R_\mu L_\nu \} + \frac{1}{\Lambda} \frac{1}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] ik_\mu (L_\nu - R_\nu) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{\Lambda^2} \frac{1}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \{ \partial_\mu L_\nu + R_\mu \partial_\nu + R_\mu L_\nu \} \right\} \right. \\
&\quad \left. + \exp \left\{ \frac{1}{\Lambda} \eta^{\mu\nu} ik_\mu (2\partial_\nu + R_\nu + L_\nu) + \frac{1}{\Lambda^2} \eta^{\mu\nu} \{ \partial_\mu \partial_\nu + \partial_\mu R_\nu + L_\mu \partial_\nu + L_\mu R_\nu \} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{\Lambda} \frac{1}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] ik_\mu (R_\nu - L_\nu) + \frac{1}{\Lambda^2} \frac{1}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \{ \partial_\mu R_\nu + L_\mu \partial_\nu + L_\mu R_\nu \} \right\} \right) \right] \\
&\quad (3.3.23)
\end{aligned}$$

この式中の $\exp$ を $1/\Lambda$ でべき展開することを考える。 γ_5 を掛けてトレースを取るので、残る項は γ^μ が 4 つ以上の偶数個含まれる項のみになる。(3.3.23) 式に含まれる各項を以下のように略記して残る項を求める。

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Lambda} \eta^{\mu\nu} ik_\mu (2\partial_\nu + L_\nu + R_\nu) + \frac{1}{\Lambda^2} \eta^{\mu\nu} \{ \partial_\mu \partial_\nu + \partial_\mu L_\nu + R_\mu \partial_\nu + R_\mu L_\nu \} \\
&+ \frac{1}{\Lambda} \frac{1}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] ik_\mu (L_\nu - R_\nu) + \frac{1}{\Lambda^2} \frac{1}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \{ \partial_\mu L_\nu + R_\mu \partial_\nu + R_\mu L_\nu \} \\
&\equiv \frac{1}{\Lambda} k^\mu W_\mu + \frac{1}{\Lambda^2} X + \frac{1}{2\Lambda} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] k_\mu Y_\nu + \frac{1}{2\Lambda^2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] Z_{\mu\nu} \\
&\equiv A
\end{aligned} \quad (3.3.24)$$

べき展開で考えるべき Λ 依存性とトレースの操作に効く γ^μ 依存性、 k 積分に効く k_μ 依存性を明記して残し、その他の寄与を W, X, Y, Z で略記した。以下の説明で使うため、(3.3.24) 式全体に A と名前を付けておいた。

トレースの操作によって残るのは A^2 以上の項。(3.3.23) 式全体に係数として Λ^4 が掛かっているので、 e^A を展開して出る項のうち $\mathcal{O}(1/\Lambda^5)$ 以上の項は $\Lambda \rightarrow \infty$ の極限で落ちるため効かない。よって、 γ^μ の数が $1/\Lambda$ の数以上にならないと残らないため、 X の項はアノマリーに寄与しない。 W 項は k 積分を実行するとアノマリーに寄与することが分かる。

ここで、 γ^μ の数を見やすくするために、先に k 積分について整理しておく。 k が奇数個含まれる項は奇関数になるため k で積分すると 0 である。積分後に残るのは k を偶数個含む項のみであり、それらの積分をすると以下ようになる。

$$\begin{aligned}\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-k_\mu k^\mu} &= \frac{1}{(2\pi)^4} \pi^2 = \frac{1}{16\pi^2} \\ \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-k_\mu k^\mu} k^\mu k^\nu &= \lim_{a \rightarrow 1} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left(-\frac{\delta^{\mu\nu}}{4} \right) \frac{\partial}{\partial a} e^{-a k_\mu k^\mu} = \frac{1}{16\pi^2} \frac{\delta^{\mu\nu}}{2} \\ \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-k_\mu k^\mu} k^\mu k^\nu k^\rho k^\sigma &= \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{4} (\delta^{\mu\nu} \delta^{\rho\sigma} + \delta^{\mu\rho} \delta^{\nu\sigma} + \delta^{\mu\sigma} \delta^{\nu\rho})\end{aligned}\quad (3.3.25)$$

よって、 k^μ が複数個含まれる項では k があつたところの足を潰すことになる。この k 積分を実行すると $\delta^{\mu\nu}$ が出るため、その影響を見るため以下の式も準備しておく。

$$[\gamma^\mu, \gamma^\alpha] [\gamma^\nu, \gamma^\beta] \delta_{\mu\nu} = -4 [\gamma^\alpha, \gamma^\beta] - 12\delta^{\alpha\beta} \quad (3.3.26)$$

以上で準備した結果を用いて A^n のうちトレースを取った後に $\mathcal{O}(1/\Lambda^4)$ 以内で残る項を求める。以下の計算で $\rightarrow$ は γ_5 を掛けてトレースを取った時に消える項か、 $\mathcal{O}(1/\Lambda^5)$ 以上の項を落とす操作を意味する。今は残る項がどのような項なのかを知るのが目的であるため、 W, X, Y, Z の各項を掛ける順番を気にしないことにする。代わりに、例えば $WX + XW$ のように W と X 1 つずつからなる項が計 2 項ある場合、 $WX|_{2 \text{ 項}}$ のように項数を右下に明記しておく。

$$\begin{aligned}\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-k_\mu k^\mu} A^2 &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-k_\mu k^\mu} \left(\frac{1}{\Lambda} k^\mu W_\mu + \frac{1}{\Lambda^2} X + \frac{1}{2\Lambda} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] k_\mu Y_\nu + \frac{1}{2\Lambda^2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] Z_{\mu\nu} \right)^2 \\ &\rightarrow \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-k_\mu k^\mu} \left(\frac{1}{2\Lambda} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] k_\mu Y_\nu + \frac{1}{2\Lambda^2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] Z_{\mu\nu} \right)^2 \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{8\Lambda^2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] [\gamma^\rho, \gamma^\sigma] \delta^{\mu\rho} Y_\nu Y_\sigma + \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{4\Lambda^4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] [\gamma^\rho, \gamma^\sigma] Z_{\mu\nu} Z_{\rho\sigma} \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{8\Lambda^2} (-4 [\gamma^\nu, \gamma^\sigma] - 12\delta^{\nu\sigma}) Y_\nu Y_\sigma + \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{4\Lambda^4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] [\gamma^\rho, \gamma^\sigma] Z_{\mu\nu} Z_{\rho\sigma} \\ &\rightarrow \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{4\Lambda^4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] [\gamma^\rho, \gamma^\sigma] Z_{\mu\nu} Z_{\rho\sigma}\end{aligned}\quad (3.3.27)$$

$$\begin{aligned}\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-k_\mu k^\mu} A^3 &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-k_\mu k^\mu} \left(\frac{1}{\Lambda} k^\mu W_\mu + \frac{1}{\Lambda^2} X + \frac{1}{2\Lambda} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] k_\mu Y_\nu + \frac{1}{2\Lambda^2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] Z_{\mu\nu} \right)^3 \\ &\rightarrow \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-k_\mu k^\mu} \left(\frac{1}{4\Lambda^4} k^\alpha W_\alpha [\gamma^\mu, \gamma^\nu] [\gamma^\rho, \gamma^\sigma] k_\mu Y_\nu Z_{\rho\sigma} \Big|_{3! \text{ 項}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{8\Lambda^4} [\gamma^\alpha, \gamma^\mu] [\gamma^\beta, \gamma^\nu] [\gamma^\rho, \gamma^\sigma] k_\alpha k_\beta Y_\mu Y_\nu Z_{\rho\sigma} \Big|_{3 \text{ 項}} \right) \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \left(\frac{1}{8\Lambda^4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] [\gamma^\rho, \gamma^\sigma] W_\mu Y_\nu Z_{\rho\sigma} \Big|_{3! \text{ 項}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{16\Lambda^4} (-4 [\gamma^\mu, \gamma^\nu] - 12\delta^{\mu\nu}) [\gamma^\rho, \gamma^\sigma] Y_\mu Y_\nu Z_{\rho\sigma} \Big|_{3 \text{ 項}} \right) \\ &\rightarrow \frac{1}{16\pi^2} \left(\frac{1}{8\Lambda^4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] [\gamma^\rho, \gamma^\sigma] W_\mu Y_\nu Z_{\rho\sigma} \Big|_{3! \text{ 項}} \right.\end{aligned}$$

$$- \frac{1}{4\Lambda^4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] [\gamma^\rho, \gamma^\sigma] Y_\mu Y_\nu Z_{\rho\sigma} \Big|_{3 \text{ 項}} \Big) \quad (3.3.28)$$

以上の (3.3.27)、(3.3.28) 式で残った 3 項はアノマリーに寄与する。

A^4 項にもアノマリーに寄与する可能性がある項が存在し、以下のようにになっている。 A^5 以上の項は全て $\mathcal{O}(1/\Lambda^5)$ 以上の項しか存在しないため $\Lambda \rightarrow \infty$ の極限で落ち、アノマリーには効かない。

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-k_\mu k^\mu} A^4 &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-k_\mu k^\mu} \left(\frac{1}{\Lambda} k^\mu W_\mu + \frac{1}{\Lambda^2} X + \frac{1}{2\Lambda} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] k_\mu Y_\nu + \frac{1}{2\Lambda^2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] Z_{\mu\nu} \right)^4 \\ &\rightarrow \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-k_\mu k^\mu} \left(\frac{1}{4\Lambda^4} [\gamma^\alpha, \gamma^\mu] [\gamma^\beta, \gamma^\nu] k_\alpha k_\beta k^\gamma k^\delta W_\gamma W_\delta Y_\mu Y_\nu \Big|_{6 \text{ 項}} \right. \\ &\quad + \frac{1}{8\Lambda^4} [\gamma^\beta, \gamma^\mu] [\gamma^\gamma, \gamma^\nu] [\gamma^\delta, \gamma^\rho] k_\alpha k_\beta k_\gamma k_\delta W_\alpha Y_\mu Y_\nu Y_\rho \Big|_{4 \text{ 項}} \\ &\quad \left. + \frac{1}{16\Lambda^4} [\gamma^\alpha, \gamma^\mu] [\gamma^\beta, \gamma^\nu] [\gamma^\gamma, \gamma^\rho] [\gamma^\delta, \gamma^\sigma] k_\alpha k_\beta k_\gamma k_\delta Y_\mu Y_\nu Y_\rho Y_\sigma \Big|_{4 \text{ 項}} \right) \end{aligned} \quad (3.3.29)$$

この (3.3.29) 式を評価する。以下では第 1 項から順に k 積分を評価して行く。(先に結論を書いて置くと、最終的には全ての項がアノマリーには効かないことが示される。)

第 1 項は以下のような項である。

$$\begin{aligned} &\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-k_\mu k^\mu} \frac{1}{4\Lambda^4} [\gamma^\alpha, \gamma^\mu] [\gamma^\beta, \gamma^\nu] k_\alpha k_\beta k^\gamma k^\delta W_\gamma W_\delta Y_\mu Y_\nu \Big|_{6 \text{ 項}} \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{16\Lambda^4} [\gamma^\alpha, \gamma^\mu] [\gamma^\beta, \gamma^\nu] (\delta^{\alpha\beta} \delta^{\gamma\delta} + \delta^{\alpha\gamma} \delta^{\beta\delta} + \delta^{\alpha\delta} \delta^{\beta\gamma}) W_\gamma W_\delta Y_\mu Y_\nu \Big|_{6 \text{ 項}} \\ &\rightarrow \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{16\Lambda^4} ([\gamma^\gamma, \gamma^\mu] [\gamma^\delta, \gamma^\nu] + [\gamma^\delta, \gamma^\mu] [\gamma^\gamma, \gamma^\nu]) W_\gamma W_\delta Y_\mu Y_\nu \Big|_{6 \text{ 項}} \end{aligned} \quad (3.3.30)$$

今は Euclidean なので、途中で添字の上下は気にしていないところがある。(以下同様)

ここで、(2.3.10) 式を見ると以下の関係式が成り立つことが分かる。

$$\text{Tr}[\gamma_5 [\gamma^\mu, \gamma^\nu] [\gamma^\rho, \gamma^\sigma]] = -16\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \quad (3.3.31)$$

この (3.3.31) 式から、 $\text{Tr}[\gamma_5$ を演算する場合は $[\gamma^\mu, \gamma^\nu] [\gamma^\rho, \gamma^\sigma]$ の添字は全て反対称であると思って良いと分かる。この関係を使うと (3.3.30) 式の計算を進めることが出来て、以下のようになる。

$$\begin{aligned} &\text{Tr} \left[\gamma_5 \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{16\Lambda^4} ([\gamma^\gamma, \gamma^\mu] [\gamma^\delta, \gamma^\nu] + [\gamma^\delta, \gamma^\mu] [\gamma^\gamma, \gamma^\nu]) W_\gamma W_\delta Y_\mu Y_\nu \right] \Big|_{6 \text{ 項}} \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{\Lambda^4} (\epsilon^{\gamma\mu\delta\nu} + \epsilon^{\delta\mu\gamma\nu}) W_\gamma W_\delta Y_\mu Y_\nu \Big|_{6 \text{ 項}} \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{\Lambda^4} (\epsilon^{\gamma\mu\delta\nu} - \epsilon^{\gamma\mu\delta\nu}) W_\gamma W_\delta Y_\mu Y_\nu \Big|_{6 \text{ 項}} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.3.32)$$

よって、この項は落ちる。

次に、第 2 項を見る。

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-k_\mu k^\mu} \frac{1}{8\Lambda^4} [\gamma^\beta, \gamma^\mu][\gamma^\gamma, \gamma^\nu][\gamma^\delta, \gamma^\rho] k^\alpha k_\beta k_\gamma k_\delta W_\alpha Y_\mu Y_\nu Y_\rho \Big|_{4 \text{ 項}} \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{32\Lambda^4} [\gamma^\beta, \gamma^\mu][\gamma^\gamma, \gamma^\nu][\gamma^\delta, \gamma^\rho] (\delta^{\alpha\beta} \delta^{\gamma\delta} + \delta^{\alpha\gamma} \delta^{\beta\delta} + \delta^{\alpha\delta} \delta^{\beta\gamma}) W_\alpha Y_\mu Y_\nu Y_\rho \Big|_{4 \text{ 項}} \end{aligned} \quad (3.3.33)$$

ここで、今計算したいのは (3.3.23) 式であり、(3.3.24) 式以下ではこのうちの $D_\mu^R D_\nu^L$ が含まれる方の項のみを計算していた。前述の通り $D_\mu^L D_\nu^R$ 部分を計算するには L と R を逆にするだけで良い。(3.3.23) 式を見ると、 $D_\mu^R D_\nu^L$ 項と $D_\mu^L D_\nu^R$ 項はそれぞれ $\exp$ を展開した後で足し合わせる必要がある。そのため、(3.3.24) 式以下の計算で L と R を逆にした時に符号が変わる項は $D_\mu^L D_\nu^R$ 部分と相殺し、アノマリーには効かないと分かる。 W, X, Y, Z の各項が L と R の交換でどのように変化するかを考えるため、(3.3.24) 式を見返して W, X, Y, Z の具体形を思い出すと、以下のようになっていると分かる。

$$W_\mu = i(2\partial_\mu + L_\mu + R_\mu) \quad (3.3.34)$$

$$X = \eta^{\mu\nu} (\partial_\mu \partial_\nu + \partial_\mu L_\nu + R_\mu \partial_\nu + R_\mu L_\nu) \quad (3.3.35)$$

$$Y_\mu = i(L_\mu - R_\mu) \quad (3.3.36)$$

$$Z_{\mu\nu} = \partial_\mu L_\nu + R_\mu \partial_\nu + R_\mu L_\nu \quad (3.3.37)$$

よって、 X と Z は L と R の交換で大きく変化してしまうが、 W は L と R の交換で不変な形、 Y は L と R の交換で符号が変わるだけ、という構造になっていると分かる。このことから、 W と Y のみからなる項では $D_\mu^R D_\nu^L$ 項を計算するだけで $D_\mu^L D_\nu^R$ 項の寄与も計算でき、特に W と Y のみを含みかつ Y を奇数個含む項は相殺してアノマリーには効かない。(3.3.33) 式を見ると W と Y のみを含み、かつ Y を 3 個含むためこの項は $D_\mu^L D_\nu^R$ の寄与と相殺すると分かる。よって、第 2 項もアノマリーには効かない。

最後に、第 3 項を見る。

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-k_\mu k^\mu} \frac{1}{16\Lambda^4} [\gamma^\alpha, \gamma^\mu][\gamma^\beta, \gamma^\nu][\gamma^\gamma, \gamma^\rho][\gamma^\delta, \gamma^\sigma] k_\alpha k_\beta k_\gamma k_\delta Y_\mu Y_\nu Y_\rho Y_\sigma \Big|_{4 \text{ 項}} \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{16\Lambda^4} [\gamma^\alpha, \gamma^\mu][\gamma^\beta, \gamma^\nu][\gamma^\gamma, \gamma^\rho][\gamma^\delta, \gamma^\sigma] (\delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} + \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma}) Y_\mu Y_\nu Y_\rho Y_\sigma \Big|_{4 \text{ 項}} \end{aligned} \quad (3.3.38)$$

以下の公式を使ってこの計算を進める。

$$\begin{aligned} & [\gamma^\mu, \gamma^\nu][\gamma^\rho, \gamma^\sigma] - [\gamma^\rho, \gamma^\sigma][\gamma^\mu, \gamma^\nu] \\ &= -4(\delta^{\nu\rho}[\gamma^\mu, \gamma^\sigma] - \delta^{\mu\rho}[\gamma^\nu, \gamma^\sigma] + \delta^{\mu\sigma}[\gamma^\nu, \gamma^\rho] - \delta^{\nu\sigma}[\gamma^\mu, \gamma^\rho]) \end{aligned} \quad (3.3.39)$$

この式は以下のような計算によって得られる。

$$\gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\mu \gamma^\nu = \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma - 2\gamma^\mu \gamma^\sigma \delta^{\nu\rho} + 2\gamma^\mu \gamma^\rho \delta^{\nu\sigma} - 2\gamma^\sigma \gamma^\nu \delta^{\mu\rho} + 2\gamma^\rho \gamma^\nu \delta^{\mu\sigma} \quad (3.3.40)$$

$$\begin{aligned} [\gamma^\rho, \gamma^\sigma][\gamma^\mu, \gamma^\nu] &= \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\mu \\ &= [\gamma^\mu, \gamma^\nu][\gamma^\rho, \gamma^\sigma] \\ &\quad + 2(-2\gamma^\mu \gamma^\sigma \delta^{\nu\rho} + 2\gamma^\mu \gamma^\rho \delta^{\nu\sigma} - 2\gamma^\sigma \gamma^\nu \delta^{\mu\rho} + 2\gamma^\rho \gamma^\nu \delta^{\mu\sigma}) \\ &\quad - 2(-2\gamma^\nu \gamma^\sigma \delta^{\mu\rho} + 2\gamma^\nu \gamma^\rho \delta^{\mu\sigma} - 2\gamma^\sigma \gamma^\mu \delta^{\nu\rho} + 2\gamma^\rho \gamma^\mu \delta^{\nu\sigma}) \\ &= [\gamma^\mu, \gamma^\nu][\gamma^\rho, \gamma^\sigma] \\ &\quad + 4(-[\gamma^\mu, \gamma^\sigma]\delta^{\nu\rho} + [\gamma^\mu, \gamma^\rho]\delta^{\nu\sigma} - [\gamma^\sigma, \gamma^\nu]\delta^{\mu\rho} + [\gamma^\rho, \gamma^\nu]\delta^{\mu\sigma}) \end{aligned} \quad (3.3.41)$$

(3.3.26) 式と (3.3.39) 式を使って (3.3.38) 式の $[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ の積の部分を実行すると、以下のようになる。

$$\begin{aligned} &\text{Tr}[\gamma_5[\gamma^\alpha, \gamma^\mu][\gamma^\beta, \gamma^\nu][\gamma^\gamma, \gamma^\rho][\gamma^\delta, \gamma^\sigma](\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} + \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma})] \\ &= \text{Tr}[\gamma_5(-4[\gamma^\mu, \gamma^\nu] - 12\delta^{\mu\nu})(-4[\gamma^\rho, \gamma^\sigma] - 12\delta^{\rho\sigma})] \\ &\quad - \text{Tr}[\gamma_5[\gamma^\alpha, \gamma^\mu][\gamma^\gamma, \gamma^\rho][\gamma^\beta, \gamma^\nu][\gamma^\delta, \gamma^\sigma]\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta}] \\ &\quad + \text{Tr}[\gamma_5[\gamma^\alpha, \gamma^\mu](-4)(\delta^{\nu\gamma}[\gamma^\beta, \gamma^\rho] - \delta^{\beta\gamma}[\gamma^\nu, \gamma^\rho] + \delta^{\beta\rho}[\gamma^\nu, \gamma^\gamma] - \delta^{\nu\rho}[\gamma^\beta, \gamma^\gamma])[\gamma^\delta, \gamma^\sigma]\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta}] \\ &\quad + \text{Tr}[\gamma_5(-4[\gamma^\sigma, \gamma^\mu] - 12\delta^{\sigma\mu})(-4[\gamma^\nu, \gamma^\rho] - 12\delta^{\nu\rho})] \\ &= 16\text{Tr}[\gamma_5[\gamma^\mu, \gamma^\nu][\gamma^\rho, \gamma^\sigma]] \\ &\quad - \text{Tr}[\gamma_5(-4[\gamma^\mu, \gamma^\rho] - 12\delta^{\mu\rho})(-4[\gamma^\nu, \gamma^\sigma] - 12\delta^{\nu\sigma})] \\ &\quad - 4\text{Tr}[\gamma_5([\gamma^\nu, \gamma^\mu](-4[\gamma^\rho, \gamma^\sigma] - 12\delta^{\rho\sigma}) - [\gamma^\alpha, \gamma^\mu][\gamma^\nu, \gamma^\rho][\gamma^\delta, \gamma^\sigma]\delta^{\alpha\delta} \\ &\quad + (4[\gamma^\mu, \gamma^\nu] + 12\delta^{\mu\nu})[\gamma^\rho, \gamma^\sigma] - \delta^{\nu\rho}(4[\gamma^\mu, \gamma^\beta] + 12\delta^{\mu\beta})[\gamma^\delta, \gamma^\sigma]\delta_{\beta\delta})] \\ &\quad + 16\text{Tr}[\gamma_5[\gamma^\sigma, \gamma^\mu][\gamma^\nu, \gamma^\rho]] \\ &= -(16)^2(\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} - \epsilon^{\mu\rho\nu\sigma} + \epsilon^{\sigma\mu\nu\rho}) \\ &\quad - 4\text{Tr}[\gamma_5(-4[\gamma^\nu, \gamma^\mu][\gamma^\rho, \gamma^\sigma] - (-4[\gamma^\sigma, \gamma^\mu] - 12\delta^{\sigma\mu})[\gamma^\nu, \gamma^\rho] + 4[\gamma^\mu, \gamma^\nu][\gamma^\rho, \gamma^\sigma])] \\ &= -(16)^2(\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} + \epsilon^{\mu\rho\nu\sigma} - \epsilon^{\nu\mu\rho\sigma}) \\ &\quad + (16)^2(-\epsilon^{\nu\mu\rho\sigma} + \epsilon^{\sigma\mu\nu\rho} + \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.3.42)$$

よって、第 3 項もアノマリーには効かない。

以上の計算から、(3.3.29) 式はアノマリーに寄与しないことが分かった。

よって、以下では (3.3.27)、(3.3.28) 式を計算してアノマリーを求める。これらの式は既にべき展開した後の表式なので、 $D_\mu^L D_\nu^R$ 部分からの寄与を求めて足すことが出来る。(3.3.37) 式で定義した $Z_{\mu\nu}$ を以下では $Z_{\mu\nu}^L$ と書くことにして、 $D_\mu^L D_\nu^R$ 部分から出る Z 項を $Z_{\mu\nu}^R$ と書く。(3.3.23) 式をべき展開し、 γ 行列に対するトレースも実行してしまった物を W, Y, Z^L, Z^R を使って書くと以下のようになる。

$$\begin{aligned} \alpha^a \mathcal{A}^a(x) &= \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{\Lambda^4}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-k_\mu k^\mu} \text{Tr} \left[\alpha \gamma_5 \left(\exp \left\{ \frac{1}{\Lambda} k^\mu W_\mu + \frac{1}{\Lambda^2} X^L + \frac{1}{2\Lambda} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] k_\mu Y_\nu \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + \frac{1}{2\Lambda^2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] Z_{\mu\nu}^L \right\} + \exp \left\{ \frac{1}{\Lambda} k^\mu W_\mu + \frac{1}{\Lambda^2} X^R - \frac{1}{2\Lambda} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] k_\mu Y_\nu \right. \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2\Lambda^2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] Z_{\mu\nu}^R \Big\} \Bigg) \Bigg] \\
& = \frac{-1}{2\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{tr} \left[\alpha \left(\frac{1}{2!} \frac{1}{4} (Z_{\mu\nu}^L Z_{\rho\sigma}^L + Z_{\mu\nu}^R Z_{\rho\sigma}^R) \right. \right. \\
& \quad + \frac{1}{3!} \frac{1}{8} \left\{ (W_\mu Y_\nu Z_{\rho\sigma}^L + Y_\nu W_\mu Z_{\rho\sigma}^L + Y_\nu Z_{\rho\sigma}^L W_\mu + Z_{\mu\nu}^L W_\rho Y_\sigma + W_\rho Z_{\mu\nu}^L Y_\sigma + Z_{\mu\nu}^L Y_\sigma W_\rho) \right. \\
& \quad - (W_\mu Y_\nu Z_{\rho\sigma}^R + Y_\nu W_\mu Z_{\rho\sigma}^R + Y_\nu Z_{\rho\sigma}^R W_\mu + Z_{\mu\nu}^R W_\rho Y_\sigma + W_\rho Z_{\mu\nu}^R Y_\sigma + Z_{\mu\nu}^R Y_\sigma W_\rho) \Big\} \\
& \quad - \frac{1}{3!} \frac{1}{4} \left\{ (Y_\mu Y_\nu Z_{\rho\sigma}^L - Y_\mu Z_{\nu\rho}^L Y_\sigma + Z_{\mu\nu}^L Y_\rho Y_\sigma) \right. \\
& \quad \left. \left. + (Y_\mu Y_\nu Z_{\rho\sigma}^R - Y_\mu Z_{\nu\rho}^R Y_\sigma + Z_{\mu\nu}^R Y_\rho Y_\sigma) \right\} \right) \Bigg] \\
& = \frac{-1}{96\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{tr} \left[\alpha \left(6 (Z_{\mu\nu}^L Z_{\rho\sigma}^L + Z_{\mu\nu}^R Z_{\rho\sigma}^R) \right. \right. \\
& \quad + (W_\mu Y_\nu Z_{\rho\sigma}^L - Y_\mu W_\nu Z_{\rho\sigma}^L - Y_\mu Z_{\nu\rho}^L W_\sigma + Z_{\mu\nu}^L W_\rho Y_\sigma + W_\mu Z_{\nu\rho}^L Y_\sigma - Z_{\mu\nu}^L Y_\rho W_\sigma) \\
& \quad - (W_\mu Y_\nu Z_{\rho\sigma}^R - Y_\mu W_\nu Z_{\rho\sigma}^R - Y_\mu Z_{\nu\rho}^R W_\sigma + Z_{\mu\nu}^R W_\rho Y_\sigma + W_\mu Z_{\nu\rho}^R Y_\sigma - Z_{\mu\nu}^R Y_\rho W_\sigma) \\
& \quad - 2 (Y_\mu Y_\nu Z_{\rho\sigma}^L - Y_\mu Z_{\nu\rho}^L Y_\sigma + Z_{\mu\nu}^L Y_\rho Y_\sigma) \\
& \quad \left. \left. - 2 (Y_\mu Y_\nu Z_{\rho\sigma}^R - Y_\mu Z_{\nu\rho}^R Y_\sigma + Z_{\mu\nu}^R Y_\rho Y_\sigma) \right) \right] \tag{3.3.43}
\end{aligned}$$

この中で、 W と Z は微分演算子であることに注意。

以下では、(3.3.43) 式の各項を具体的に計算し、gauge 場 L_μ, R_μ を使って表記する。最初に、左巻きの gauge 場 L のみを含む項について計算する。 R のみを含む項は L を R に置き換えるだけなので直ぐに得られる。(3.3.43) 式の各項から L のみを含む項を取り出す。(以下では $\rightarrow$ を「 L のみを含む項を取り出す」という意味で使う。)

$$\begin{aligned}
\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (Z_{\mu\nu}^L Z_{\rho\sigma}^L + Z_{\mu\nu}^R Z_{\rho\sigma}^R) &= \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (\partial_\mu L_\nu + R_\mu \partial_\nu + R_\mu L_\nu) (\partial_\rho L_\sigma + R_\rho \partial_\sigma + R_\rho L_\sigma) \\
&\quad + \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (\partial_\mu R_\nu + L_\mu \partial_\nu + L_\mu R_\nu) (\partial_\rho R_\sigma + L_\rho \partial_\sigma + L_\rho R_\sigma) \\
&\rightarrow \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (\partial_\mu L_\nu \partial_\rho L_\sigma + L_\mu \partial_\nu L_\rho \partial_\sigma) \tag{3.3.44}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (W_\mu Y_\nu Z_{\rho\sigma}^L - Y_\mu W_\nu Z_{\rho\sigma}^L - Y_\mu Z_{\nu\rho}^L W_\sigma + Z_{\mu\nu}^L W_\rho Y_\sigma + W_\mu Z_{\nu\rho}^L Y_\sigma - Z_{\mu\nu}^L Y_\rho W_\sigma) \\
& \rightarrow -2\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (\partial_\mu L_\nu \partial_\rho L_\sigma - L_\mu \partial_\nu \partial_\rho L_\sigma - L_\mu \partial_\nu L_\rho \partial_\sigma + \partial_\mu L_\nu \partial_\rho L_\sigma + \partial_\mu \partial_\nu L_\rho L_\sigma - \partial_\mu L_\nu L_\rho \partial_\sigma) \\
& \quad - \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (L_\mu L_\nu \partial_\rho L_\sigma - L_\mu L_\nu \partial_\rho L_\sigma - L_\mu \partial_\nu L_\rho L_\sigma + \partial_\mu L_\nu L_\rho L_\sigma + L_\mu \partial_\nu L_\rho L_\sigma - \partial_\mu L_\nu L_\rho L_\sigma) \\
& = -2\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (2\partial_\mu L_\nu \partial_\rho L_\sigma - L_\mu \partial_\nu \partial_\rho L_\sigma - L_\mu \partial_\nu L_\rho \partial_\sigma + \partial_\mu \partial_\nu L_\rho L_\sigma - \partial_\mu L_\nu L_\rho \partial_\sigma) \tag{3.3.45}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (W_\mu Y_\nu Z_{\rho\sigma}^R - Y_\mu W_\nu Z_{\rho\sigma}^R - Y_\mu Z_{\nu\rho}^R W_\sigma + Z_{\mu\nu}^R W_\rho Y_\sigma + W_\mu Z_{\nu\rho}^R Y_\sigma - Z_{\mu\nu}^R Y_\rho W_\sigma) \\
& \rightarrow 2\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (\partial_\mu L_\nu L_\rho \partial_\sigma - L_\mu \partial_\nu L_\rho \partial_\sigma - L_\mu L_\nu \partial_\rho \partial_\sigma + L_\mu \partial_\nu \partial_\rho L_\sigma + \partial_\mu L_\nu \partial_\rho L_\sigma - L_\mu \partial_\nu L_\rho \partial_\sigma) \\
& \quad \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (L_\mu L_\nu L_\rho \partial_\sigma - L_\mu L_\nu L_\rho \partial_\sigma - L_\mu L_\nu \partial_\rho L_\sigma + L_\mu \partial_\nu L_\rho L_\sigma + L_\mu L_\nu \partial_\rho L_\sigma - L_\mu \partial_\nu L_\rho L_\sigma) \\
& = 2\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (\partial_\mu L_\nu L_\rho \partial_\sigma - 2L_\mu \partial_\nu L_\rho \partial_\sigma - L_\mu L_\nu \partial_\rho \partial_\sigma + L_\mu \partial_\nu \partial_\rho L_\sigma + \partial_\mu L_\nu \partial_\rho L_\sigma) \tag{3.3.46}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (Y_\mu Y_\nu Z_{\rho\sigma}^L - Y_\mu Z_{\nu\rho}^L Y_\sigma + Z_{\mu\nu}^L Y_\rho Y_\sigma + Y_\mu Y_\nu Z_{\rho\sigma}^R - Y_\mu Z_{\nu\rho}^R Y_\sigma + Z_{\mu\nu}^R Y_\rho Y_\sigma) \\
& \rightarrow 2\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (L_\mu L_\nu \partial_\rho L_\sigma - L_\mu \partial_\nu L_\rho L_\sigma + \partial_\mu L_\nu L_\rho L_\sigma + L_\mu L_\nu L_\rho \partial_\sigma - L_\mu L_\nu \partial_\rho L_\sigma + L_\mu \partial_\nu L_\rho L_\sigma) \\
& = 2\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (\partial_\mu L_\nu L_\rho L_\sigma + L_\mu L_\nu L_\rho \partial_\sigma) \\
& = 2\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (\partial_\mu (L_\nu L_\rho L_\sigma) + L_\nu L_\rho L_\sigma \partial_\mu + L_\mu L_\nu L_\rho \partial_\sigma) \\
& = 2\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu (L_\nu L_\rho L_\sigma)
\end{aligned} \tag{3.3.47}$$

このままでは (3.3.47) 式を除いて微分 ∂_μ が直ぐ右にある場以外にも作用する、微分演算子の形である。例えば、今のままでは $\partial_\mu L_\nu = \partial_\mu (L_\nu) + L_\nu \partial_\mu$ の意味で書いている。この微分を (通常良く用いる表記と同様の) 直ぐ右にある場のみの作用する形になるように、即ち $\partial'_\mu L_\nu \equiv \partial_\mu (L_\nu)$ の意味になるように書き換える。ここで、 ∂_μ と区別するために ∂'_μ を「直ぐ右の場のみを微分する演算子」として定義した。(3.3.44)、(3.3.45)、(3.3.46) 式の寄与を足し上げた物を以下で計算する。

$$\begin{aligned}
& \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} 6 (Z_{\mu\nu}^L Z_{\rho\sigma}^L + Z_{\mu\nu}^R Z_{\rho\sigma}^R) \\
& + (W_\mu Y_\nu Z_{\rho\sigma}^L - Y_\mu W_\nu Z_{\rho\sigma}^L - Y_\mu Z_{\nu\rho}^L W_\sigma + Z_{\mu\nu}^L W_\rho Y_\sigma + W_\mu Z_{\nu\rho}^L Y_\sigma - Z_{\mu\nu}^L Y_\rho W_\sigma) \\
& - (W_\mu Y_\nu Z_{\rho\sigma}^R - Y_\mu W_\nu Z_{\rho\sigma}^R - Y_\mu Z_{\nu\rho}^R W_\sigma + Z_{\mu\nu}^R W_\rho Y_\sigma + W_\mu Z_{\nu\rho}^R Y_\sigma - Z_{\mu\nu}^R Y_\rho W_\sigma) \\
& \rightarrow 2\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left\{ 3(\partial_\mu L_\nu \partial_\rho L_\sigma + L_\mu \partial_\nu L_\rho \partial_\sigma) \right. \\
& \quad - (2\partial_\mu L_\nu \partial_\rho L_\sigma - L_\mu \partial_\nu \partial_\rho L_\sigma - L_\mu \partial_\nu L_\rho \partial_\sigma + \partial_\mu \partial_\nu L_\rho L_\sigma - \partial_\mu L_\nu L_\rho \partial_\sigma) \\
& \quad \left. + (\partial_\mu L_\nu L_\rho \partial_\sigma - 2L_\mu \partial_\nu L_\rho \partial_\sigma - L_\mu L_\nu \partial_\rho \partial_\sigma + L_\mu \partial_\nu \partial_\rho L_\sigma + \partial_\mu L_\nu \partial_\rho L_\sigma) \right\} \\
& = 2\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left\{ 2\partial_\mu L_\nu \partial_\rho L_\sigma + 2L_\mu \partial_\nu L_\rho \partial_\sigma + 2L_\mu \partial_\nu \partial_\rho L_\sigma + 2\partial_\mu L_\nu L_\rho \partial_\sigma \right. \\
& \quad \left. + \partial_\mu \partial_\nu L_\rho L_\sigma - L_\mu L_\nu \partial_\rho \partial_\sigma \right\} \\
& = 2\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left\{ 2(\partial'_\mu L_\nu \partial'_\rho L_\sigma + L_\nu \partial'_\rho L_\sigma \partial'_\mu + \partial'_\mu L_\nu L_\sigma \partial'_\rho + L_\nu \partial'_\mu L_\sigma \partial'_\rho) \right. \\
& \quad + L_\mu \partial'_\nu L_\rho \partial'_\sigma + L_\mu \partial'_\rho L_\sigma \partial'_\nu + L_\mu \partial'_\nu L_\sigma \partial'_\rho + \partial'_\mu L_\nu L_\rho \partial'_\sigma + L_\nu \partial'_\mu L_\rho \partial'_\sigma) \\
& \quad \left. + \partial'_\nu L_\rho \partial'_\mu L_\sigma + \partial'_\nu L_\rho L_\sigma \partial'_\mu + \partial'_\mu L_\rho \partial'_\nu L_\sigma + \partial'_\mu L_\rho L_\sigma \partial'_\nu + L_\rho \partial'_\mu L_\sigma \partial'_\nu + L_\rho \partial'_\nu L_\sigma \partial'_\mu \right\} \\
& = 4\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial'_\mu L_\nu \partial'_\rho L_\sigma
\end{aligned} \tag{3.3.48}$$

よって結局、(3.3.43) 式から L のみを含む項を取り出すと以下のようなになる。

$$\begin{aligned}
\alpha^a \mathcal{A}^a(x) &= \frac{-1}{96\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{tr} \left[\alpha \left(6 (Z_{\mu\nu}^L Z_{\rho\sigma}^L + Z_{\mu\nu}^R Z_{\rho\sigma}^R) \right. \right. \\
& \quad + (W_\mu Y_\nu Z_{\rho\sigma}^L - Y_\mu W_\nu Z_{\rho\sigma}^L - Y_\mu Z_{\nu\rho}^L W_\sigma + Z_{\mu\nu}^L W_\rho Y_\sigma + W_\mu Z_{\nu\rho}^L Y_\sigma - Z_{\mu\nu}^L Y_\rho W_\sigma) \\
& \quad - (W_\mu Y_\nu Z_{\rho\sigma}^R - Y_\mu W_\nu Z_{\rho\sigma}^R - Y_\mu Z_{\nu\rho}^R W_\sigma + Z_{\mu\nu}^R W_\rho Y_\sigma + W_\mu Z_{\nu\rho}^R Y_\sigma - Z_{\mu\nu}^R Y_\rho W_\sigma) \\
& \quad - 2 (Y_\mu Y_\nu Z_{\rho\sigma}^L - Y_\mu Z_{\nu\rho}^L Y_\sigma + Z_{\mu\nu}^L Y_\rho Y_\sigma) \\
& \quad \left. \left. - 2 (Y_\mu Y_\nu Z_{\rho\sigma}^R - Y_\mu Z_{\nu\rho}^R Y_\sigma + Z_{\mu\nu}^R Y_\rho Y_\sigma) \right) \right] \\
& \rightarrow \frac{-1}{96\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{tr} \left[\alpha \left(4\partial'_\mu L_\nu \partial'_\rho L_\sigma + 2\partial'_\mu (L_\nu L_\rho L_\sigma) \right) \right] \\
& = \frac{-1}{24\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{tr} \left[\alpha \left(\partial'_\mu L_\nu \partial'_\rho L_\sigma + \frac{1}{2} \partial'_\mu (L_\nu L_\rho L_\sigma) \right) \right]
\end{aligned}$$

$$= \frac{-1}{24\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{tr} \left[\alpha \partial'_\mu \left(L_\nu \partial'_\rho L_\sigma + \frac{1}{2} (L_\nu L_\rho L_\sigma) \right) \right] \quad (3.3.49)$$

ここで、 ∂'_μ と書いていた微分を“通常の”記法である ∂_μ に書き換えて、(勿論この ∂_μ は直ぐ右の場のみを微分するという意味である)

$$\alpha^a \mathcal{A}^a(x) \rightarrow \frac{-1}{24\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{tr} \left[\alpha \partial_\mu \left(L_\nu \partial_\rho L_\sigma + \frac{1}{2} (L_\nu L_\rho L_\sigma) \right) \right] \quad (3.3.50)$$

R のみを含む項も上の計算で L と R を置き換えるだけで良いので全く同様に計算出来て、以下のようになる。

$$\alpha^a \mathcal{A}^a(x) \rightarrow \frac{-1}{24\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{tr} \left[\alpha \partial_\mu \left(R_\nu \partial_\rho R_\sigma + \frac{1}{2} (R_\nu R_\rho R_\sigma) \right) \right] \quad (3.3.51)$$

最後に、 L と R を両方含む項について計算する必要があるが、以降の議論ではそれほど重要ではないため計算を省略する。

3.3.2 整合アノマリー

前節の計算で求めたアノマリーは、共変アノマリーとは明らかに異なる形をしている。このアノマリーは「整合アノマリー」と呼ばれる種類のアノマリーで、共変アノマリーのように field strength で書くことが出来ず、一見扱うのが大変そうである。しかし、整合アノマリー特有の良い性質もあり、共変アノマリー以上に広く用いられている形式である。

例として左巻きの gauge 場のみが結合した理論で考える。(3.3.50) 式で見たように、整合アノマリーは以下のように書ける。

$$\begin{aligned} \ln \mathcal{J} &= -i \int d^4x \alpha^a \mathcal{A}^a(x) \\ &= i \int d^4x \frac{1}{24\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{tr} \left[\alpha \partial_\mu \left(L_\nu \partial_\rho L_\sigma + \frac{1}{2} (L_\nu L_\rho L_\sigma) \right) \right] \end{aligned} \quad (3.3.52)$$

これと比較するために共変アノマリーを以下のように書く。(3.1.2) 式より、 $U(1)_L$ アノマリーの場合に、

$$\begin{aligned} \ln \mathcal{J} &= i \int d^4x \frac{1}{32\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{tr} [\alpha(x) F_{\mu\nu}^L F_{\rho\sigma}^L] \\ &= i \int d^4x \frac{1}{32\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{tr} \left[\alpha \partial_\mu \left(L_\nu \partial_\rho L_\sigma + \frac{2}{3} (L_\nu L_\rho L_\sigma) \right) \right] \end{aligned} \quad (3.3.53)$$

ここで、最後のイコールが成り立つのは α が abelian で $\text{tr} [F_{\mu\nu}^L F_{\rho\sigma}^L]$ という形が作れる場合に限ることに注意。こう書くと比較しやすく、整合アノマリーと共変アノマリーの違いは、「全体の係数」と「第2項 L^3 の係数」であり、このうち後者は gauge 場が non-abelian の場合にしか効かない。逆に言うと、アノマリーを持つ群と gauge 場が全て abelian の場合でも全体の係数分の違いは存在する。もし Dirac 演算子 D が (A_μ をエルミートとして見做す、と言うような操作をしなくても) エルミートである場合、 $D^\dagger D = D^2$ となるため前節で計算した正則化と共変アノマリー

を計算した時の正則化が一致するが、2.1.2 節の計算結果を見るとその係数から計算していたアノマリーが共変アノマリーであったことが分かる。これは gauge 場がベクトルの結合している物のみの場合に一般に言えて、 $D^\dagger D = D^2$ の場合に藤川の手法で $\exp(-D^2/\Lambda^2)$ の正則化を用いて計算して得られるアノマリーは共変アノマリーである。

共変アノマリーは field strength を使って書けたことから分かるように gauge 不変な形をしているが、整合アノマリーは (3.3.52) 式から分かるように gauge 不変な形をしていない。

3.3.3 Wess-Zumino 無矛盾性条件

整合アノマリーは「Wess-Zumino 無矛盾性条件」(以下、WZ 条件) という条件式を満たす。整合アノマリーの「整合 (consistent)」は、この WZ 条件を満たすという性質に由来する。

以下では gauge アノマリーを考える。パラメータ ξ で有効作用 Γ を gauge 変換した時、gauge アノマリーの寄与によって有効作用 Γ が変換を受け、以下のように書ける。

$$\delta_\xi \Gamma = \langle \ln \mathcal{J} \rangle \equiv \mathcal{A}_\xi \quad (3.3.54)$$

ここで、 $\mathcal{A}_\xi$ はパラメータ ξ で変換した時のアノマリー (を x 積分した物) である。 δ_ξ はパラメータ ξ による無限小 gauge 変換で、以下のように書ける。

$$\delta_\xi = f^{abc} \xi^b \frac{\delta}{\delta \xi^c} \quad (3.3.55)$$

WZ 条件は以下のように書ける。

$$\delta_\xi \mathcal{A}_\eta - \delta_\eta \mathcal{A}_\xi = \mathcal{A}_{[\eta, \xi]} \quad (3.3.56)$$

整合アノマリーは、この WZ 条件を満たす範囲であれば変形出来る自由度を持っている。特に、整合アノマリーに局所項を gauge 変換したような項を加えても WZ 条件を破らない。例えば局所項を X と書くと、これは以下のように示せる。

$$\delta_\xi (\mathcal{A}_\eta + \delta_\eta X) - \delta_\eta (\mathcal{A}_\xi + \delta_\xi X) = \mathcal{A}_{[\eta, \xi]} + (\delta_\xi \delta_\eta X - \delta_\eta \delta_\xi X) = \mathcal{A}_{[\eta, \xi]} \quad (3.3.57)$$

3.3.4 カレント保存則の破れ

アノマリーを「カレント保存則の破れ」として理解する場合、共変アノマリーと整合アノマリーは形が異なるため、一見するとカレント保存の破れの大きさが違って見える。しかしこの理解は正しくなく、共変アノマリーと整合アノマリーで異なるカレントを見ていると捉えるのが正解である。整合アノマリーに対応するカレントを整合カレントと呼び、以下のように定義する。

$$j_a^{(con)\mu} = \frac{\delta \Gamma}{\delta A_\mu^a} \quad (3.3.58)$$

ここで、 Γ は有効作用である。これを共形カレントの定義 (3.2.2) と比べると、ほぼ同じようにも見えるが違いがある。

整合カレントは以下の関係式を満たす。

$$\frac{\delta}{\delta A_\mu^a} j_a^{(con)\nu} - \frac{\delta}{\delta A_\nu^a} j_a^{(con)\mu} = 0 \quad (3.3.59)$$

整合カレントに関するカレント保存則の破れは整合アノマリーを使って以下のように書ける。
(3.3.50) 式より、

$$\begin{aligned} D_\mu j_a^{(con)\mu} &= -i\mathcal{A}^a \\ &= \frac{i}{24\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{tr} \left[T^a \partial_\mu \left(L_\nu \partial_\rho L_\sigma + \frac{1}{2} (L_\nu L_\rho L_\sigma) \right) \right] \end{aligned} \quad (3.3.60)$$

この式は共変アノマリーの場合の (3.2.4) 式に対応する。

3.4 共変アノマリーと整合アノマリーの比較

ここまでで、「共変アノマリー」「整合アノマリー」の2種類のアノマリーの表式を導入した。これらは全く異なる表式にも見えるが、実は互いに移り変わることが可能である。

以下では、これらの違いについてまとめた後、両者の関係性について見る。

ここでは、[13, 14, 15] を参考にした。

3.4.1 藤川の手法における正則化

axial な gauge 場が理論に含まれる場合、藤川の手法で用いる正則化を変えることで共変アノマリーと整合アノマリーをそれぞれ得ることが出来た。正則化に使う関数は、それぞれ以下のような関数だった。

共変アノマリー

$$\exp \left(-\frac{D^\dagger D}{\Lambda^2} \right), \exp \left(-\frac{DD^\dagger}{\Lambda^2} \right) \quad (3.4.1)$$

ここで、 $D^\dagger D$ と $DD^\dagger$ の固有値はそれぞれ正の実数になることが示せるため、Dirac 演算子 D がエルミートではない場合でもこの関数で正則化が可能。

整合アノマリー

$$\exp \left(-\frac{D^2}{\Lambda^2} \right) = \exp \left(\frac{\not{D}^2}{\Lambda^2} \right) \quad (3.4.2)$$

ここで、この関数で正則化するためには Dirac 演算子 D の固有値が実数である必要があったため、 D はエルミート演算子である必要がある。axial な gauge 場 A_μ が入っている場合は元々反エルミートに定義された A_μ を「エルミートに再定義」することで D をエルミートにする必要があった。

3.4.2 カレントの定義

アノマリーを「カレント保存則の破れ」として見た時、共変アノマリーと整合アノマリーでは異なるカレントを見ていることに対応した。

共変アノマリー

共変カレントは以下のように定義された。

$$j_a^{(cov)\mu} = \left\langle \frac{\delta S}{\delta A_\mu^a} \right\rangle \quad (3.4.3)$$

共変カレントは gauge 変換に対して共变的に振る舞う。即ち、以下の関係式を満たす。

$$\begin{aligned} \delta_\xi j_a^{(cov)\mu} &= -if^{abc}\xi_b \left\langle \frac{\delta S}{\delta A_\mu^c} \right\rangle \\ &= -if^{abc}\xi_b j_c^{(cov)\mu} \\ &= [j^{(cov)\mu}, \xi]_a \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

整合アノマリー

整合カレントは以下のように定義された。

$$j_a^{(con)\mu} = \frac{\delta \Gamma}{\delta A_\mu^a} \quad (3.4.5)$$

整合カレントは gauge 変換に対して整合的に振る舞う。即ち、以下の式を満たす。

$$\frac{\delta}{\delta A_\mu^a} j_a^{(con)\nu} - \frac{\delta}{\delta A_\nu^a} j_a^{(con)\mu} = 0 \quad (3.4.6)$$

3.4.3 Bardeen-Zumino 多項式

共形カレントと整合カレントは一致しない。

$$j_a^{(cov)\mu} = \left\langle \frac{\delta S}{\delta A_\mu^a} \right\rangle \neq \frac{\delta \Gamma}{\delta A_\mu^a} = j_a^{(con)\mu} \quad (3.4.7)$$

しかし、これらのカレントの差は「Bardeen-Zumino 多項式」(以下 BZ 多項式)[16] を用いて表すことが出来る。BZ 多項式 $\mathcal{P}_a^\mu$ は整合アノマリー $\mathcal{A}_{(con)}^a$ を用いて以下のように定義される。

$$\begin{aligned} \delta_\xi \mathcal{P}_a^\mu(x) &= -if^{abc}\xi_b \mathcal{P}_c^\mu(x) - \int d^d y \xi_b(y) \frac{\delta}{\delta A_\mu^a(x)} \mathcal{A}_{(con)}^b(y) \\ &= [\mathcal{P}^\mu, \xi]_a - \int d^d y \xi_b(y) \frac{\delta}{\delta A_\mu^a(x)} \mathcal{A}_{(con)}^b(y) \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

これは、整合カレントの gauge 変換性を見ることで決められる。整合カレントの gauge 変換は以下の関係を満たす。

$$\delta_\xi j_a^{(con)\mu} = -if^{abc}\xi_b j_c^{(con)\mu} + \int d^d y \xi_b(y) \frac{\delta}{\delta A_\mu^a(x)} \mathcal{A}_{(con)}^b(y) \quad (3.4.9)$$

この第 2 項のおつりの部分を消去することで共変カレントを構成することが出来るため、gauge 変換で (3.4.9) 式第 2 項を出すような多項式を加えれば整合カレントを共変カレントに変換することが可能である。この要請から BZ 多項式の形が (3.4.8) 式のように決まり、共変カレントと整合カレントは BZ 多項式を介して以下の関係にある。

$$j_a^{(cov)\mu} = j_a^{(con)\mu} + \mathcal{P}_a^\mu \quad (3.4.10)$$

例えば、2.1.2 節で計算したような vector 的に gauge 場が結合している 4 次元の理論の $U(N)_A$ アノマリーを見る場合、BZ 多項式は以下のような形で書ける。

$$\mathcal{P}_a^\mu = -\frac{i}{48\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{tr} \left[T^a (A_\nu F_{\rho\sigma} + F_{\nu\rho} A_\sigma - A_\nu A_\rho A_\sigma) \right] \quad (3.4.11)$$

この BZ 多項式で共変アノマリーと整合アノマリーが結び付くことも以下のように確認出来る。(3.4.10) 式より、アノマリーの差は BZ 多項式の微分に対応する。即ち、

$$D_\mu j_a^{(cov)\mu} - D_\mu j_a^{(con)\mu} = D_\mu \mathcal{P}_a^\mu \quad (3.4.12)$$

この式の左辺を計算すると、以下のようになる。

$$\begin{aligned} D_\mu j_a^{(cov)\mu} - D_\mu j_a^{(con)\mu} &= i \frac{1}{32\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{tr} [T^a F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}] \\ &\quad - i \frac{1}{24\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{tr} \left[T^a \partial_\mu \left(A_\nu \partial_\rho A_\sigma + \frac{1}{2} A_\nu A_\rho A_\sigma \right) \right] \\ &= i \frac{1}{32\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{tr} \left[T^a (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]) (\partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho + [A_\rho, A_\sigma]) \right] \\ &\quad - i \frac{1}{24\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{tr} \left[T^a \partial_\mu \left(A_\nu \partial_\rho A_\sigma + \frac{1}{2} A_\nu A_\rho A_\sigma \right) \right] \\ &= \frac{i}{48\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left\{ \partial_\mu \text{tr} \left[T^a (A_\nu F_{\rho\sigma} + F_{\nu\rho} A_\sigma - A_\nu A_\rho A_\sigma) \right] \right. \\ &\quad \left. + \text{tr} \left[[T^a, A_\mu] (A_\nu F_{\rho\sigma} + F_{\nu\rho} A_\sigma - A_\nu A_\rho A_\sigma) \right] \right\} \\ &= \frac{i}{48\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} D_\mu \text{tr} \left[T^a (A_\nu F_{\rho\sigma} + F_{\nu\rho} A_\sigma - A_\nu A_\rho A_\sigma) \right] \\ &= D_\mu \mathcal{P}_a^\mu \end{aligned} \quad (3.4.13)$$

3.4.4 Wess-Zumino 無矛盾性条件

3.3.3 節で整合アノマリーに対して成立する WZ 条件を導入した。実は似たような条件式を共変アノマリーに対しても構成することが可能である。

共変アノマリー

共変アノマリーに対する WZ 条件 (「共変アノマリー条件」と呼ぶ) は以下のように書ける。

$$\delta_{\xi}\mathcal{A}_{\eta} - \delta_{\eta}\mathcal{A}_{\xi} = 2\mathcal{A}_{[\eta,\xi]} \quad (3.4.14)$$

WZ 条件と比べると、右辺が 2 倍ずれていることが分かる。

整合アノマリー

整合アノマリーは WZ 条件を満たす。WZ 条件は以下のような関係式であった。

$$\delta_{\xi}\mathcal{A}_{\eta} - \delta_{\eta}\mathcal{A}_{\xi} = \mathcal{A}_{[\eta,\xi]} \quad (3.4.15)$$

第 4 章

トポロジカル項

この章では、トポロジカル項を含む場の理論について解説する。特に、 θ 項に注目し、アノマリーとの関係について見る。

4.1 θ 項

AS 指数定理より、4 次元での Dirac operator の指数は以下のように書けた。

$$\text{Ind} \not{D} = \left(\frac{i}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{2} \int \text{tr} [F \wedge F] \quad (4.1.1)$$

この $F \wedge F$ という項はトポロジカルな性質を持つ項である。

この $\int F \wedge F$ という項を作用に加える事を考えてみる。 F は gauge 場のみから作られるので、この項は Dirac operator がいない場合、即ち、fermion がいない場合にも考えることができる。始めに、gauge 場のみから成る作用として Yang-Mills 作用を考える。この Yang-Mills 作用に以下のような項を加える。(ここでは、始めに平坦な Minkowski 時空の場合で考えることにする。)

$$-\frac{\theta}{8\pi^2} \int \text{tr} [F \wedge F] = -\frac{\theta}{32\pi^2} \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} \quad (4.1.2)$$

ここで、 θ はパラメータである。この (4.1.2) 式で書かれる項を θ 項と呼ぶ。

θ 項を加えた 4 次元 $SU(N)$ Yang-Mills 理論の作用は、(結合定数 g まで explicit に書くと、)

$$S_{YM} = -\frac{1}{g^2} \int \text{tr} [F \wedge *F] - \frac{\theta}{8\pi^2} \int \text{tr} [F \wedge F] \quad (4.1.3)$$

$$= -\frac{1}{2g^2} \int d^4x \text{tr} [F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}] - \frac{\theta}{32\pi^2} \int d^4x \text{tr} [\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}] \quad (4.1.4)$$

ここで、 tr は $SU(N)$ の足に対するトレースである。

(4.1.1) 式は 4 次元に限らず一般の偶数次元で定義可能である事を考えると、(4.1.2) 式の θ 項も同様に一般の偶数次元で定義可能であると分かる。一般の d 次元の θ 項は以下のように書ける。 $(d$ は偶数)

$$S_\theta = \theta \int \text{tr} e^{\frac{i}{2\pi} F} \Big|_{d\text{-form}} \quad (4.1.5)$$

本節では、この θ 項の性質について見て行く。

計算メモ ($g \neq 1$ の場合の結合定数の扱い)

結合定数を $g \neq 1$ としてちゃんと入れた場合の扱いについて書いておく。共変微分を以下のよう

$$D_\mu = \partial_\mu - iga_\mu = \partial_\mu + A_\mu \quad (4.1.6)$$

ここで、 a_μ がエルミートになるように定義した gauge 場で、 A_μ は反エルミートである。field strength は a で書いた時に自然になるように定義した物を f 、 A で書いたときに自然になるように定義した物を F と書くと、

$$\begin{aligned} f_{\mu\nu} &= \frac{i}{g} [D_\mu, D_\nu] \\ &= \partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu - ig[a_\mu, a_\nu] \\ &= \frac{i}{g} \{ \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] \} \\ &= \frac{i}{g} F_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

よって、 f を使って Yang-Mills 作用を書き、その後 F に書き直せば $-1/g^2$ が作用全体に掛かる係数として出る。ここで、 F は g に依存しないため、 F で作用を書いて仕舞えば g 依存性は作用の係数としてしか効かない、即ち古典的な運動方程式には効かないことに注意。

θ 項の係数は、 θ 項が $S_\theta = -in\theta(n \in \mathbb{Z})$ を満たす、即ち θ が 2π 周期性を持つようにすることで決まる。 θ の 2π 周期性については後で詳しく議論する。 $D_\mu = \partial_\mu + A_\mu$ と書いた場合に結合定数を含まない形で F が書けるため、 $S_\theta \propto \int F \wedge F$ の形で書けば θ 項に結合定数 g が入らず、 $n \in \mathbb{Z}$ を満たすことが可能になる。(4.1.1) 式の index の定義も参照すると、4次元の場合の θ 項は以下のように決めれば良いと分かる。

$$\begin{aligned} S_\theta &= \theta \left(\frac{i}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{2} \int \text{tr} [F \wedge F] \\ &= -\frac{\theta}{8\pi^2} \int \text{tr} [F \wedge F] \\ &= -\frac{\theta}{32\pi^2} \int d^4x \text{tr} [\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}] \\ &= \frac{\theta g^2}{32\pi^2} \int d^4x \text{tr} [\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} f_{\mu\nu} f_{\rho\sigma}] \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

4次元 θ 項付きの Yang-Mills 作用を Minkowski の場合で書くと、それぞれ f と F で書くと以下のように書ける。

$$\begin{aligned} S_{YM} &= \frac{1}{2} \int d^4x \text{tr} [f_{\mu\nu} f^{\mu\nu}] + \frac{\theta g^2}{32\pi^2} \int d^4x \text{tr} [\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} f_{\mu\nu} f_{\rho\sigma}] \\ &= -\frac{1}{2g^2} \int d^4x \text{tr} [F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}] - \frac{\theta}{32\pi^2} \int d^4x \text{tr} [\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}] \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

本論文では、基本的にここで F と書いた方の notation を採用する。

4.1.1 4次元 θ 項

θ 項の具体的な例として、4次元の場合を考える。以下では、簡単のため Euclidean の場合を考える。(4.1.2) 式の 4次元 θ 項を Euclid 化すると、以下のようになる。

$$S_\theta^{(4D)} = \frac{i\theta}{8\pi^2} \int \text{tr} [F \wedge F] = \frac{i\theta}{32\pi^2} \int d^4x \text{tr} [\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}] \quad (4.1.10)$$

θ 項の重要な性質の一つとして、全微分で書けることが挙げられる。これは以下のように分かる。

$$\frac{i\theta}{32\pi^2} \int d^4x \text{tr} [\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}] = \frac{i\theta}{64\pi^2} \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}^a F_{\rho\sigma}^a \quad (4.1.11)$$

$$= \frac{i\theta}{64\pi^2} \int d^4x \partial_\mu \left\{ \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left(A_\nu^a F_{\rho\sigma}^a + \frac{1}{3} g f_{abc} A_\nu^a A_\rho^b A_\sigma^c \right) \right\} \quad (4.1.12)$$

$$= \frac{i\theta}{64\pi^2} \int d^4x \partial_\mu K^\mu \quad (4.1.13)$$

よって、 K^μ の全微分の形で書けるため、古典的には運動方程式に効かないトポロジカルな項である。この性質は微分形式で書くともっと簡単に見ることが出来る。

$$\frac{i\theta}{8\pi^2} \int \text{tr} [F \wedge F] = \frac{i\theta}{8\pi^2} \int \text{tr} \left[d \left(AdA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A \right) \right] \quad (4.1.14)$$

微分形式で書くとこのように式変形可能である。よって、全微分で書けることは明らか。

4.1.2 θ の 2π 周期性

θ 項の係数は θ で書かれるが、これはこの係数が 2π 周期性を持つ事に由来する。ここでは、この θ の値域が (閉多様体上の理論を考えた場合に限り) $[0, 2\pi)$ であることを示す。

ここでは (特に理由はないが) Euclidean の場合で考える。閉多様体上の Dirac operator を考えた場合、その index は整数値を返した。(4.1.5) 式から分かるように θ 項も index と同じ形で書けるため、閉多様体上での理論を考える場合、作用は整数値を返す。そのため、積分を実行した後の作用は、

$$S_\theta = -i\theta \int \text{tr} e^{\frac{i}{2\pi} F} = -in\theta \quad (4.1.15)$$

と書ける。ここで $n \in \mathbb{Z}$ である。

閉多様体上で、 θ 項付きの理論の分配関数を考える。作用を $S = S_\theta + S_{\text{other}}$ と θ 項部分だけ分けて考えると、

$$\begin{aligned} Z &= \int \mathcal{D}A \mathcal{D}(\text{ghosts}) \mathcal{D}(\text{other fields}) e^{-S} \\ &= \int \mathcal{D}A \mathcal{D}(\text{ghosts}) \mathcal{D}(\text{other fields}) e^{-S_{\text{other}}} e^{-S_\theta} \\ &= Z_{\text{other}} e^{in\theta} \end{aligned} \quad (4.1.16)$$

となり、 θ 項は分配関数の phase としてのみ効くと分かる。ここで、閉多様体上の n は整数であるため $\theta \sim \theta + 2\pi$ が成立する。

この議論は考える空間が閉多様体でない場合には $n \in \mathbb{Z}$ が保証されないため成立しない。しかし、通常 (Euclidean の) 場の理論で考える $\mathbb{R}^4$ 上の理論でも、無限遠で場の値が 0 になるという条件を課す場合には全空間での積分を実行した時に $n \in \mathbb{Z}$ の条件が実現出来るため $\theta \sim \theta + 2\pi$ である。一般に、gauge 場がある有限の領域のみで値を持つ場合、その領域での積分が実行できれば $n \in \mathbb{Z}$ が実現可能だが、例えば境界のある多様体を考えた場合や、gauge 場が無限遠でも値を持つ場合などでは成立しない。

ここで、 $n \in \mathbb{Z}$ を考えたが、この n をインスタントン数と呼ぶ。

4.2 θ 項付き QCD

QCD に θ 項を加えた場合の物理について見る。特に、fermion を加えることで前節で見た Yang-Mills 理論の場合とは異なる振る舞いを示す場合に注目する。

前節で見たように、基本的には θ 項は Dirac operator の index と同じ形をしているため fermion が入った場合でも自然に定義出来る。この index はアノマリーの議論から出た表式であるため、QCD では θ 項と fermion のアノマリーが強く関係する。

本節では全て Euclidean の場合で議論する。

4.2.1 カイラル対称性がある場合

理論にカイラル対称性がある場合、即ち fermion が massless の場合を考える。例として 4 次元の理論を考え、カイラル対称性として $SU(N_f) \times SU(N_f)$ 、gauge 対称性として $SU(N_C)$ を課した場合を考えると、作用は以下のように書ける。

$$S = \int d^4x \left\{ \bar{\psi} i \not{D} \psi - \frac{1}{2g^2} \text{tr} [F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}] + \frac{i\theta}{32\pi^2} \text{tr} [\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}] \right\} \quad (4.2.1)$$

理論に入っている gauge 場は $SU(N_C)$ の gauge 場のみである。共変微分は $D_\mu = \partial_\mu + A_\mu$ である。

この議論は一般の偶数次元にも拡張可能である。(奇数次元ではカイラル対称性がなく、 θ 項も定義出来ないため同様の議論は出来ない。) d 次元の場合に同様に考えると、fermion と gauge 場の運動項はそのまま d 次元に拡張出来るので θ 項のみに注意すれば良く、以下のようなになる。

$$S = \int d^d x \left\{ \bar{\psi} i \not{D} \psi - \frac{1}{2g^2} \text{tr} [F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}] \right\} - \theta \int \text{tr} \left[e^{\frac{i}{2\pi} F} \right] \Big|_{d\text{-form}} \quad (4.2.2)$$

θ 項の物理的意味を見るために、この理論で、fermion に対する $U(1)_A$ 変換を考える。ここで、この $U(1)_A$ は gauge 化されていないため $SU(N_C)$ gauge 場は変換を受けない。作用は古典的には大域的な $U(1)_A$ 対称性を持つが、アノマリーで破れている。アノマリーの計算は 2.1.2 節に従う。fermion 部分以外からはアノマリーは出ないので、 $U(1)_A$ 変換によって以下のようなアノマ

リーが得られる。

$$\begin{aligned}
\ln \mathcal{J} &= -i \int d^4x \alpha \mathcal{A} \\
&= -i \int \alpha \left(\frac{i}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{2} \text{tr} [F \wedge F] \\
&= \frac{i}{32\pi^2} \int d^4x \alpha \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{tr} [F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}]
\end{aligned} \tag{4.2.3}$$

この形は θ 項と同じであることに注意。

ここで、(4.2.2) 式の作用に対して分配関数を考え、(2.1.52) 式のように Dirac 場のみに対して大域的な $U(1)_A$ 変換をすることを考える。これは経路積分の積分変数の置き換えであり、この変換の下で分配関数は変わらないことが要請される。分配関数は $U(1)_A$ アノマリーによって位相が変化を受ける。(今は局所変換を考えていないためカレントは出ない。)

$$\begin{aligned}
Z &= \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}A e^{-S} \\
&= \int \mathcal{D}\psi' \mathcal{D}\bar{\psi}' \mathcal{D}A e^{-S'} = Z' \\
&= \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{J} \mathcal{D}A e^{-S} \\
&= \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}A e^{-S} e^{-i \int d^4x \alpha \mathcal{A}} \\
&= \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}A \exp \left\{ - \int d^4x \left\{ \bar{\psi} i \not{D} \psi - \frac{1}{2g^2} \text{tr} [F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}] + \frac{i\theta}{32\pi^2} \text{tr} [\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}] \right\} \right. \\
&\quad \left. + \frac{i}{32\pi^2} \int d^4x N_f \alpha \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{tr} [F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}] \right\} \\
&= \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}A \exp \left\{ - \int d^4x \left\{ \bar{\psi} i \not{D} \psi - \frac{1}{2g^2} \text{tr} [F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}] + \frac{i(\theta + N_f \alpha)}{32\pi^2} \text{tr} [\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}] \right\} \right\}
\end{aligned} \tag{4.2.4}$$

よって、 $U(1)_A$ 変換によって θ 項の位相が回され、 $\theta \rightarrow \theta + N_f \alpha$ と変化した。ここで、 N_f の係数は fermion が N_f 個あることに由来する。このように、大域的 $U(1)_A$ 変換をすることでアノマリーを通して θ の値を変化させることが出来ることを見た。(4.2.4) 式の変換後の分配関数は元の分配関数と一致しなくてはならないという条件から、元の θ が係数として入った θ 項と、変換後の $\theta + \alpha$ が係数の θ 項は同じ理論を表さなくてはならない。この $U(1)_A$ 変換の位相 α は変換の際に自由に決めることが出来ることから、 θ 項の係数がどんな値であっても同じ理論になっている、即ち θ 項に物理的な意味がなくなってしまうということが分かる。

以上の議論より、カイラル対称性がある場合の QCD では θ 項は物理的な意味を持たないことが分かった。

4.2.2 fermion mass を加えた場合

fermion に質量項を加えてカイラル対称性を破ると、理論の θ 依存性は回復する。しかし fermion の質量と θ はそれぞれ完全に独立なパラメータにはならない。

前節と同様に gauge 対称性として $SU(N_C)$ を課した場合を考えると、作用は以下のように書ける。

$$S = \int d^4x \left\{ \bar{\psi}(i\mathcal{D} + M)\psi - \frac{1}{2g^2} \text{tr}[F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}] + \frac{i\theta}{32\pi^2} \text{tr}[\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}] \right\} \quad (4.2.5)$$

理論に入っている gauge 場は $SU(N_C)$ の gauge 場のみである。共変微分は $D_\mu = \partial_\mu + A_\mu$ である。新しく、fermion の質量 M を加えた。質量項が入っているため、今の場合は作用にカイラル対称性はない。ここで、より一般的な場合を考えるため、質量 M として複素数を取るような場合を仮定しておく。複素質量は以下のように定義される。

$$M = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m^* \end{pmatrix} = mP_+ + m^*P_- \quad (4.2.6)$$

ここで、 m は複素数を取るパラメータである。この質量を入れた質量項は以下のように書ける。

$$\begin{aligned} \bar{\psi}M\psi &= \bar{\psi}_R m \psi_L + \bar{\psi}_L m^* \psi_R \\ &= (\bar{\psi}M\psi)^\dagger \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

よって、複素質量 M を (4.2.6) 式のように入れることで作用のエルミート性が保たれることが分かる。

ここで、(4.2.4) 式と同様の大域的 $U(1)_A$ 変換をすることを考える。今は質量項が入っているため、作用に大域的 $U(1)_A$ 対称性は存在しない。しかし、Dirac 場のみに対して変換を行うことを考えると、経路積分では積分変数の置き換えでしかないため同様に議論出来る。

始めに、作用 (4.2.5) が大域的 $U(1)_A$ 変換によってどのように変換されるかを見る。質量項がない場合の作用 (4.2.1) は大域的 $U(1)_A$ 対称性を持っていたため、質量項の変換性だけを考えれば良い。質量項は大域的 $U(1)_A$ 変換で以下のように変換を受ける。

$$\begin{aligned} S \supset \int d^4x \bar{\psi}M\psi &\rightarrow \int d^4x \bar{\psi}'M\psi' = \int d^4x \bar{\psi}e^{i\alpha\gamma_5} M e^{i\alpha\gamma_5} \psi \\ &= \int d^4x \bar{\psi} \begin{pmatrix} me^{2i\alpha} & 0 \\ 0 & m^*e^{-2i\alpha} \end{pmatrix} \psi \\ &\equiv \int d^4x \bar{\psi} \begin{pmatrix} m' & 0 \\ 0 & m'^* \end{pmatrix} \psi \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

よって、質量 m の位相が $2i\alpha$ 回転する。

分配関数を考え、(4.2.4) 式と同様の変換を行うと、以下のようになる。質量項は fermion の bilinear の形をしているので経路積分は実行出来て、Gauss 積分のようになることを使うと、質量の位相の変化によって分配関数は位相分の変換を受ける。

$$\begin{aligned} Z &\rightarrow Z' \\ &= Ze^{2iN_f\alpha} \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

ここで、分配関数に新たに加わった位相は、変換後の質量項を Gauss 積分した値を変換前の質量項を Gauss 積分した値で割ったために出てきた。 θ 項は分配関数の位相という意味を持っていた

ことを思い出すと、この質量項の位相の変化による分配関数の位相の変化は θ と関係が付き、 θ 項が $-in\theta$ と書けたことから、 $\theta \rightarrow \theta - 2N_f\alpha$ と変換を受けたと理解することが出来る。よって、 θ の値を質量の位相の変化分 α と関係づけることが出来、「質量 m の位相を α 変化させる」ことは「 θ を $\theta - N_f\alpha$ に変化させる」ことと等価である。よって、質量 m の位相と θ は独立なパラメータではない。

この変換性より、質量 m と θ の自由度は合わせて実 2 自由度分であると分かった。この自由度を反映したパラメータは、 $m^{N_f}e^{i\theta}$ と書ける。よって、質量項のある fermion が入っている QCD では m と θ は独立なパラメータではなく、 $m^{N_f}e^{i\theta}$ がパラメータになっている。

第 5 章

タキオン凝縮

今までは単に場の理論に関する議論のみを行って来たが、本章では少し話題を変えて、弦理論に於ける「タキオン凝縮」という現象を扱う。アノマリーは場の理論の一般論で扱われる物であり、場の理論に於けるアノマリーを扱うためにわざわざ弦理論を考える必要はないが、本章で扱うタキオン凝縮は第 II 部で扱う内容に大きな関連があるため、予め議論しておく。

5.0.1 タキオン

タキオン (tachyon) 場とは、質量項に含まれる質量パラメータの 2 乗の値が負 (即ち $m^2 < 0$) である場のことで、Higgs 場のように不安定なポテンシャルを持つ。例えば、超対称性の入らないボソン弦の理論は 26 次元の理論として定式化されるが、タキオンが現れてしまうため通常は考えず、超対称性を導入した 10 次元の超弦理論を用いる。超弦理論では弦の励起にタキオンモードが現れず、もっとも軽い状態を massless にすることが可能だが、以下で説明する D-brane を考えると超弦理論でもタキオンモードが現れる場合がある。

以下では、10 次元 (9+1 次元) で定義された超弦理論のみを考える。超弦理論にもいくつか種類があるが、ここでは特に type IIA、IIB 理論に注目する。

5.1 D-brane

弦理論には開弦と閉弦の 2 種類が存在する。このうち開弦は端を持ち、D-brane とは「開弦が端を持てる空間」として定義される。即ち開弦は D-brane 上に「張り付いた」物として記述され、D-brane が広がらない方向には閉弦のみが動き回ることが出来る。D-brane は 10 次元時空中の部分空間として記述され、時間 1 次元、空間 p 次元の $(p+1)$ 次元方向に広がった D-brane を Dp -brane と呼ぶ。D-brane は BPS D-brane と non-BPS D-brane に大別され、このうち non-BPS D-brane にはタキオンが存在し、不安定である。

5.1.1 BPS D-brane

type IIA 理論には p が偶数、type IIB 理論には p が奇数の Dp-brane が BPS D-brane として存在し、残りは non-BPS D-brane となる。BPS D-brane は RR charge を持ち、電荷保存則により安定に存在することが出来る。D-brane を用いて場の理論を構成しようとする時も通常は BPS D-brane のみを用いて brane 配位を作り、その上の開弦により記述される場の理論を考える。一方、non-BPS D-brane は RR charge を持たない。更に、D-brane 上の開弦の励起を見ると、もっとも軽い状態が $m^2 < 0$ のタキオンになっているため、不安定な物として扱われる。通常は non-BPS D-brane は直ぐに崩壊してしまうと考えられるため例えば D-brane 上の場の理論を考える時などには扱わないが、この non-BPS D-brane 上のタキオンについて後述するタキオン凝縮を考えると BPS D-brane を作ることが可能である。

更に、D-brane を複数枚組み合わせることで様々な理論を作ることが可能であるが、non-BPS system の代表的な例として $D\bar{D}$ system が挙げられる。これは N 枚の BPS Dp-brane と $\bar{N}$ 枚の反 Dp-brane が同一点に重なった状態の事で、D-brane と反 D-brane にそれぞれ端を持つ開弦にタキオンモードが現れる。ここで、反 D-brane とは、D-brane と逆符号の RR charge を持つ D-brane の事で、 $\bar{D}$ -brane と呼ぶ。

5.1.2 D-brane 上の gauge 場

D-brane に端を持つ弦を考えると、その弦の励起モードから様々な場が作られる。弦理論の定数 α' が十分に大きいと考えると、弦の振動モードのうち励起状態は十分質量が重く、低エネルギーの物理には効かないと考えられるため、無視出来る。低エネルギー極限でも残るのは 0 質量モード (とタキオンモード) で、以下ではこの 0 質量モードから出る場を考える。1 枚の BPS Dp-brane を考えると、この Dp-brane に両端を持つ開弦が考えられる。この開弦の 0 質量モードを見ると、Dp-brane 上、即ち $p+1$ 次元時空上に局在した $U(1)$ の gauge 場 A_μ が存在する。ここで、 $\mu = 0, 1, \dots, p$ である。 N 枚の BPS Dp-brane が重なっている状態を考えると、弦の端を N 枚の D-brane のうちのどれに取るかという自由度が存在する。これは Dp-brane 上の 0 質量モードとして得られる gauge 場の gauge 群が、1 枚の時に $U(1)$ だったものが N 枚になると $U(N)$ になることが対応し、そのためこの系からは $d+1$ 次元場の $U(N)$ の gauge 場が得られる。

5.2 タキオン凝縮

D-brane 上にタキオンが存在する理論、即ち non-BPS system に於いて、タキオン場がポテンシャルの底に落ちることで 0 ではない値を取る現象が起こる。この現象はタキオン凝縮と呼ばれる。この現象を使って、ある特定のタキオンの配位を考えた場合に新たな D-brane を作ることが出来る。以下では、non-BPS system の中でも特に $D\bar{D}$ system の場合にこのタキオン凝縮を見る。

この節では、[17, 18, 19, 20] を参考にした。

5.2.1 タキオンポテンシャル

タキオン $T(x)$ として実スカラー場がいるような、ある non-BPS 系を考える。タキオンのポテンシャル $V(T)$ の形として、下図のような物を考える。

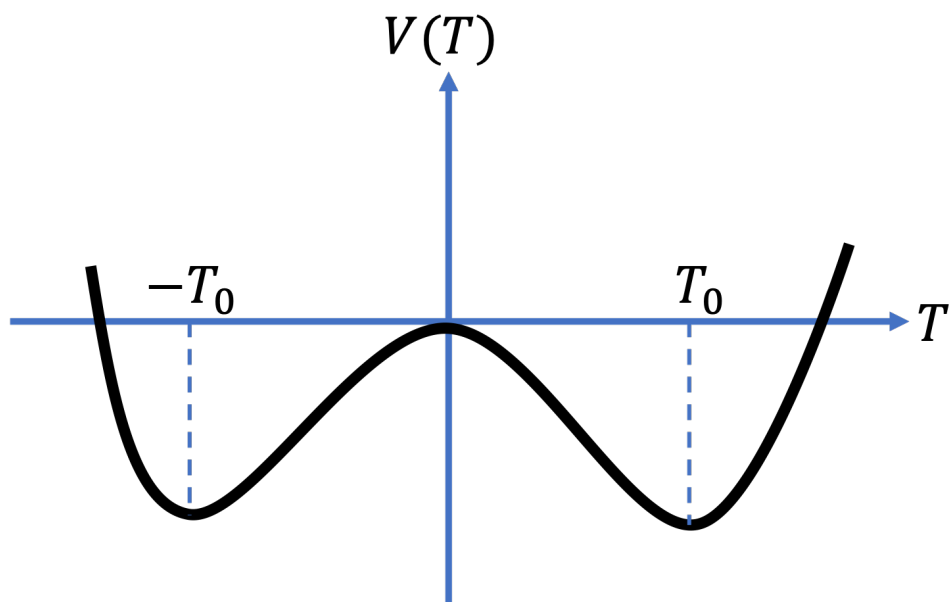


図 5.1 タキオンポテンシャル

このポテンシャルは最小値を $\pm T_0$ で取るようになっており、 $T=0$ は不安定な点である。このようなポテンシャルの下でタキオンが取り得る配位として、全ての x で $T(x) = \pm T_0$ と取る以外に、図 5.2 のような kink 解が考えられる。

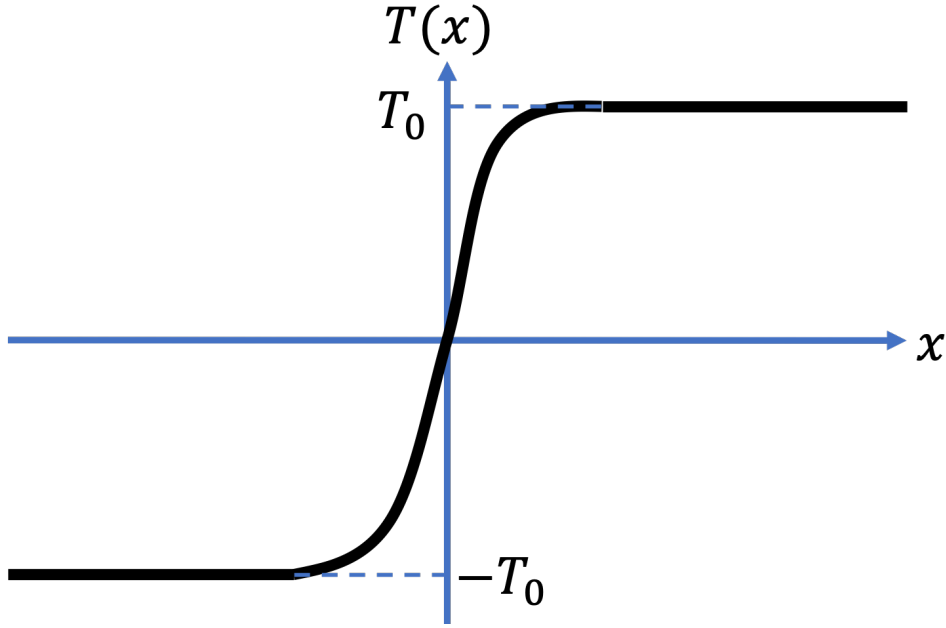


図 5.2 タキオン場の配位

この kink 解の存在がタキオン凝縮を起こすために必要である。

今、例として図 5.1 のようなポテンシャルを考えた。kink 解が存在するには、このポテンシャルの具体型が重要な訳ではなく、 $T = 0$ で極大値を取り、 $T = \pm T_0$ で極小値を取るようなポテンシャルであれば何でも良い。

non-BPS state として具体的に $D\bar{D}$ system を考える。この $D\bar{D}$ system のタキオンは複素スカラー場になる。この場合のタキオン場のポテンシャルは具体的に解析されており、以下の関数型となることが知られている。

$$V(T) = e^{-T^\dagger T} \quad (5.2.1)$$

このようなポテンシャルの下では $|T| = \infty$ がエネルギーが最低の点となり、図 5.1 の $\pm T_0$ に対応する。このポテンシャルの下で kink 解を考える。

5.2.2 $D\bar{D}$ system

non-BPS system である $D\bar{D}$ system を考え、タキオンポテンシャルとして (5.2.1) 式を考える。この時、kink 解として図 5.2 式のような解が考えられる。以下では、図 5.2 のように全空間で定数ではない値を取るタキオン解が、複数の方向で実現されている場合を考える。Dp-brane と反 Dp-brane が存在している場合、タキオンは $p+1$ 次元方向の場である。例として、この場合にタキオン解として $(p+1$ 次元のうち)2 次元方向が図 5.2 のような配位を取る場合を考える。タキオンがこのような一様でない配位を取る方向を x^I と書いて、今の場合は $I = 1, 2$ を走るとする。

この時、 $D\bar{D}$ system は D(p-2)-brane になったと解釈出来る。

これは、 I 方向を考えると $x^I = 0$ 付近で $T = 0$ を取るため、 I 方向を考えても $x^I = 0$ 付近にはタキオンが存在しないと考えられる。そのためこの領域であれば開弦が存在することが可能

であり、開弦が $x^I = 0$ 近傍の $p-1$ 次元に局在していることから、この領域に $D(p-2)$ -brane が存在すると解釈することが可能なためである。このようにして、タキオンが一様でない値を取るような解を取ることで、そのような解を取っている方向の次元だけ小さくなった D-brane が $D\bar{D}$ system から得られる。

I 方向は一般に $p+1$ 次元まで取ることが可能であり、その場合のタキオン解は以下のように書ける。

$$T(x) = u \sum_{I=1}^n \Gamma^I x^I \quad (5.2.2)$$

ここで、タキオンが非一様な値を取る方向を $1, \dots, n$ 方向とした。 Γ は n 次元 γ 行列の一部で、 n 次元 γ 行列とは以下のような関係にある。

$$\gamma^I = \begin{pmatrix} 0 & \Gamma^I \\ \Gamma^{I\dagger} & 0 \end{pmatrix} \quad (n = \text{even}) \quad (5.2.3)$$

ここで、 n が偶数の場合のみを考えた。これは、BPS Dp-brane から出発した場合に $D\bar{D}$ system から BPS D-brane を作るためには、新たに作られた $D(p-n)$ -brane が BPS 状態になっている必要があるため、type IIA, IIB のどちらの理論を考えた場合でも n が偶数である必要があるからである。

non-BPS D-brane を考えた場合にも同様の議論が可能であり、タキオン凝縮を通して BPS D-brane を作ることが出来る。

5.3 タキオン凝縮とフェルミオン

ここまでのタキオン凝縮の議論では $D\bar{D}$ system を考えたが、この $D\bar{D}$ system に新たに違う方向の Dq-brane を加えると、 $D\bar{D}$ の D-brane と新たに加えた Dq-brane との間を結ぶ開弦から fermion の自由度が得られる。

この系で $D\bar{D}$ system に対してタキオン凝縮を起こすと、残った $D(p-n)$ -brane と加えた Dq-brane からなる系となり、これらの D-brane 間の開弦を考えることで fermion の自由度を取り出すことが可能である。実際にどのような理論が考えられるかはどのような brane 配位を取ることが可能であるかによって決まる。

第 7 章で議論する系は、D-brane 的に見るとこのような系であると解釈することが可能である。

第Ⅱ部

本題

第 6 章

準備

ここからは本論文の後半部分であり、研究本体の内容である。

作用に質量項を加えても、アノマリーは変化しない。更に、質量 m を時空に依存する場 (Higgs 場) に置き換えてもアノマリーに寄与せず、これは fermion の理論に Higgs 場を加えてもアノマリーは変更を受けないことを意味する。しかし、この質量 m を時空に依存させ、かつその質量 m の値が無遠慮で発散しているような場合にアノマリーに寄与することを示す。

始めに、本研究の主要部分であるアノマリーの計算に入る前に必要な道具を準備する。アノマリーの計算自体は第 I 部で準備した物を用いる。

6.1 Superconnection

始めに、後の計算で使うため「superconnection」を定義する。superconnection は [21] で導入された。ここでは以下で (「物理的に」) 使うために簡単な導入に留め、数学的な詳細には立ち入らない。数学的な詳細は原論文 [21] や数学の教科書 [22] 等を参照。

以下では、一般に d 次元の理論を考える。(1.1.6) 式から、次元 d の偶奇によって γ_5 が定義出来るかが異なり、それによって γ_5 を使った射影演算子 $P_{\pm} = (1 \pm \gamma_5)/2$ を使って定義される chirality が定義出来るかが決まる。(1.1.6) 式で、 d 次元の場合でも chirality を決める γ 行列を γ_5 と呼んでいることに注意。偶数次元では γ_5 が定義出来るため chirality が定義可能だが、奇数次元には γ_5 が存在しないため chirality の区別はない。以下では次元の偶奇によって場合分けして考える。

6.1.1 偶数次元

$U(N)_L \times U(N)_R$ の gauge 場を考える。微分形式で書くと 1-形式になり、それぞれ A_L, A_R と書く。この gauge 場 $U(N)_L \times U(N)_R$ の変換性は以下の通り。

$$A_L \rightarrow U_L A_L U_L^{-1} + U_L dU_L^{-1}, \quad A_R \rightarrow U_R A_R U_R^{-1} + U_R dU_R^{-1} \quad (6.1.1)$$

この gauge 場を使った field strength は以下のように書ける。

$$F^L = dA_L + A_L^2, \quad F^L = \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^L dx^\mu dx^\nu = \frac{1}{2} (\partial_\mu A_\nu^L - \partial_\nu A_\mu^L + [A_\mu^L, A_\nu^L]) dx^\mu dx^\nu \quad (6.1.2)$$

$$F^R = dA_R + A_R^2, \quad F^R = \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^R dx^\mu dx^\nu = \frac{1}{2} (\partial_\mu A_\nu^R - \partial_\nu A_\mu^R + [A_\mu^R, A_\nu^R]) dx^\mu dx^\nu \quad (6.1.3)$$

この $U(N)_L \times U(N)_R$ の gauge 場に加え、 $U(N)_L \times U(N)_R$ で以下のように変換するスカラー場 T が入っているような理論を考える。

$$T \rightarrow U_R T U_L^{-1}, \quad T^\dagger \rightarrow U_L T^\dagger U_R^{-1} \quad (6.1.4)$$

これは、例えば標準模型で $SU(2) \times U(1)$ の gauge 対称性を持った理論を考えた時、Higgs 場を持つような変換性に対応する。 T はスカラー場だが、(6.1.4) 式の変換性を持つので $U(N)_L \times U(N)_R$ の足を持つ ($N \times N$ の) 行列になっている。 T はスカラー場であり、微分形式で 0-形式になる。

この gauge 場 A_L, A_R とスカラー場 T をまとめたものとして、superconnection $\mathcal{A}$ を以下のように定義する。

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A_L & iT^\dagger \\ iT & A_R \end{pmatrix} \quad (6.1.5)$$

今、共変微分 D は $D = d + A$ と定義しているので、gauge 場 A_L, A_R は反エルミートである。

ここで、(6.1.5) 式の行列表示は以下の意味で用いることにする。

$$\mathcal{A} = A_L e^+ + A_R e^- + iT^\dagger \sigma^+ + iT \sigma^- = \begin{pmatrix} A_L & iT^\dagger \\ iT & A_R \end{pmatrix} \quad (6.1.6)$$

ここで、 $e^\pm$ と $\sigma^\pm$ は以下のように定義した。

$$e^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.1.7)$$

この中で、 $\sigma^\pm$ と dx^μ (1-form A の中に含まれている) を fermionic に扱うとする。即ち、 $\sigma^\pm$ と 1-form gauge 場はそれぞれ反可換である。 $(dx^\mu$ を反可換に扱うのは、微分形式で書いた場合に wedge 積を反対称に取ることに対応している。ここでは、更にこれに加えて $\sigma^\pm$ も反可換に扱うことを要請する。)

この superconnection を用いて field strength を定義すると、以下のようになる。

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &\equiv d\mathcal{A} + \mathcal{A}^2 \\ &= \begin{pmatrix} F^L - T^\dagger T & iDT^\dagger \\ iDT & F^R - TT^\dagger \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.1.8)$$

ここで、 DT は T の共変微分であり、以下のように定義した。

$$DT \equiv dT + A_R T - T A_L = (\partial_\mu T + A_\mu^R T - T A_\mu^L) dx^\mu \quad (6.1.9)$$

$$DT^\dagger \equiv dT^\dagger + A_L T^\dagger - T^\dagger A_R = (\partial_\mu T^\dagger + A_\mu^L T^\dagger - T^\dagger A_\mu^R) dx^\mu \quad (6.1.10)$$

これは T の $U(N)_L \times U(N)_R$ の下での変換性 (6.1.4) 式から決まる。

更に、この superconnection に対して supertrace という操作を定義する。supertrace は偶数次元では以下のように定義される。

$$\text{Str} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \text{tr}(a) - \text{tr}(d) \quad (6.1.11)$$

この supertrace を用いると、field strength(6.1.6) を用いて Chern 指標を書くことが出来て、以下のようになる。

$$\text{ch}(\mathcal{F}) = \sum_{k \geq 0} \left(\frac{i}{2\pi} \right)^{\frac{k}{2}} \text{Str}(e^{\mathcal{F}})|_{k\text{-form}} \quad (6.1.12)$$

右下の $|_{k\text{-form}}$ は「 k -形式部分を取り出す」という意味で、欲しい「 k -形式」になる項を Taylor 展開して全て取り出せば良い。

6.1.2 奇数次元

奇数次元では $U(N)$ の対称性を考える。基本的には、偶数次元の時に $A_L = A_R$ 、 $T = T^\dagger$ とした物を考えれば良い。

$U(N)$ の gauge 場を考える。微分形式で書くと 1-形式になり、 A と書く。 $U(N)$ の変換性は以下の通り。

$$A \rightarrow UAU^{-1} + U dU^{-1} \quad (6.1.13)$$

スカラー場 T の変換性は以下の通り。

$$T \rightarrow UTU^{-1} \quad (6.1.14)$$

superconnection も偶数次元で導入した物を元に $A_L = A_R$ 、 $T = T^\dagger$ とすれば良いので、以下のようになる。

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & iT \\ iT & A \end{pmatrix} \quad (6.1.15)$$

ここでも、行列表示は偶数次元の場合と同じ意味で用いており、(6.1.7) 式で定義した $\sigma^\pm$ と dx^μ は fermionic に扱う。この superconnection を用いた field strength は以下のようになる。

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &\equiv d\mathcal{A} + \mathcal{A}^2 \\ &= \begin{pmatrix} F - T^2 & iDT \\ iDT & F - T^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.1.16)$$

ここで、 DT は T の共変微分であり、以下のように定義した。

$$DT \equiv dT + AT - TA = dT + [A, T] = (\partial_\mu T + A_\mu T - TA_\mu) dx^\mu \quad (6.1.17)$$

supertrace は奇数次元では以下のように定義される。

$$i^{\frac{3}{2}} \text{Str} \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \sqrt{2} \text{tr}(b) \quad (6.1.18)$$

左辺の $i^{\frac{3}{2}}$ の位相と右辺の $\sqrt{2}$ の係数は後の表記を偶数次元の場合と統一的に扱えるようにするために付けている。詳細は付録 A の具体的な計算を参照。

Chern 指標は偶数次元の時と同じ形で、以下のようになる。

$$\text{ch}(\mathcal{F}) = \sum_{k \geq 0} \left(\frac{i}{2\pi} \right)^{\frac{k}{2}} \text{Str}(e^{\mathcal{F}})|_{k\text{-form}} \quad (6.1.19)$$

6.2 Higgs 場を加えた場合のアノマリー

標準模型はカイラルな理論であるためアノマリーを持ち得る。しかし、標準模型に含まれる Higgs 場がアノマリーに寄与しないことは、共変アノマリーの計算によって簡単に確認出来る。ここでは詳細は計算しないが、付録 A にある計算を、 m が Higgs 場であると思って場の値が発散しないような場合に実行すれば簡単に導出出来る。

第 7 章

質量項を加えた場合のアノマリー

Higgs 場を加えてもアノマリーには寄与しない。しかし、それは Higgs 場が $1/\Lambda$ 展開で落としたからであり、この展開で落ちない、値が発散するような場合を考えればアノマリーに寄与する可能性がある。このような“場”を“時空に依存する質量 $m(x)$ ”として考え、アノマリーを計算する。

時空に依存する質量が使われる例としては、格子 QCD で 0 質量の chiral fermion を定式化する際に用いられる「domain wall fermion」などがある。理論に「時空に依存する定数」が含まれる場合のアノマリーの解析は [1] で行われた。また、domain wall fermion が入っている系に対するアノマリーの計算は [6] で議論されている。

7.1 作用の構成

第 I 部で議論した物と同様に、fermion の作用を考える。第 I 部では主に 4 次元の場合を議論したが、ここでは一般次元の場合に議論を拡張し、偶数次元と奇数次元の場合に分けて考える。第 1 章で議論したように、 γ 行列は次元の偶奇によって性質が異なり、偶数次元では γ_5 が定義できるため chirality が定義可能だが ((1.1.6) 式で、 d 次元の場合でも chirality を決める γ 行列を γ_5 と呼んでいる)、奇数次元では γ_5 に対応する行列を定義出来ないため chirality もない。このような、次元の偶奇による扱いの違いを考慮しながら d 次元の fermion の作用を考える。アノマリーを計算する、時空に依存する質量 $M(x)$ が入った d 次元 Euclidean の作用は以下のように書ける。

$$\begin{aligned} S &= \int d^d x \bar{\psi}(x) \{i\gamma^\mu (\partial_\mu + A_\mu) + M(x)\} \psi(x) \\ &= \int d^d x \bar{\psi}(x) (i\not{D} + M(x)) \psi(x) \\ &= \int d^d x \bar{\psi}(x) D \psi(x) \end{aligned} \tag{7.1.1}$$

7.1.1 偶数次元の作用

偶数次元の場合、(7.1.1) 式中的場は以下のように書ける。

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}, \bar{\psi}(x) = (\bar{\psi}_R, \bar{\psi}_L)$$

$$D_\mu = (\partial_\mu + A_\mu), A_\mu(x) = \begin{pmatrix} A_\mu^L & 0 \\ 0 & A_\mu^R \end{pmatrix}, M(x) = \begin{pmatrix} im(x) & 0 \\ 0 & im^\dagger(x) \end{pmatrix} \quad (7.1.2)$$

$$D = (i\not{D} + M) = i \begin{pmatrix} m(x) & \not{D}^R \\ \not{D}^L & m^\dagger(x) \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} m(x) & \sigma^\mu D_\mu^R \\ \sigma^{\mu\dagger} D_\mu^L & m^\dagger(x) \end{pmatrix}$$

ここで、gauge 場 A_μ は $U(N)_L \times U(N)_R$ の背景 gauge 場として入れた。時空に依存する質量 $m(x)$ も $U(N)_L \times U(N)_R$ 変換の下で以下のような変換性を持たせた。そのため作用全体で $U(N)_L \times U(N)_R$ 対称性が gauge 化されており、局所 $U(N)_L \times U(N)_R$ 変換に対して不変になっている。

$$\begin{aligned} \psi_L &\rightarrow U_L \psi_L, & \bar{\psi}_L &\rightarrow \bar{\psi}_L U_L^{-1}, & \psi_R &\rightarrow U_R \psi_R, & \bar{\psi}_R &\rightarrow \bar{\psi}_R U_R^{-1} \\ A_L &\rightarrow U_L A_L U_L^{-1} + U_L dU_L^{-1}, & A_R &\rightarrow U_R A_R U_R^{-1} + U_R dU_R^{-1} \\ m &\rightarrow U_R m U_L^{-1}, & m^\dagger &\rightarrow U_L m^\dagger U_R^{-1} \end{aligned} \quad (7.1.3)$$

ここで、 $U_L(x) \in U(N)_L, U_R(x) \in U(N)_R$ である。

この表式を用いて (7.1.1) 式の作用を chirality で分解して書くと、以下ようになる。

$$\begin{aligned} S &= \int d^d x \bar{\psi}(x) D \psi(x) \\ &= \int d^d x (\bar{\psi}_R, \bar{\psi}_L) i \begin{pmatrix} m(x) & \not{D}^R \\ \not{D}^L & m^\dagger(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \\ &= \int d^d x i \left\{ \bar{\psi}_L \not{D}^L \psi_L + \bar{\psi}_R \not{D}^R \psi_R + \bar{\psi}_R m(x) \psi_L + \bar{\psi}_L m^\dagger(x) \psi_R \right\} \end{aligned} \quad (7.1.4)$$

7.1.2 奇数次元の作用

奇数次元の場合、chirality がないため、gauge 場 A_μ として $U(N)$ の背景 gauge 場を入れる。奇数次元の場合は作用 (7.1.1) をそのまま使う。

$$\begin{aligned} S &= \int d^d x \bar{\psi}(x) \{ i\gamma^\mu (\partial_\mu + A_\mu) + M(x) \} \psi(x) \\ &= \int d^d x \bar{\psi}(x) D \psi(x) \end{aligned} \quad (7.1.5)$$

各場の変換性は以下の通り。

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow U \psi, & \bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi} U^{-1} \\ A &\rightarrow U A U^{-1} + U dU^{-1}, & M &\rightarrow U M U^{-1} \end{aligned} \quad (7.1.6)$$

偶数次元の場合と同様に質量 $M(x)$ に $U(N)$ の下での変換性を持たせて、作用全体を局所 $U(N)$ 変換の下で不変にしている。

7.2 偶数次元のアノマリー

偶数次元の場合に (7.1.1) 式の作用で与えられる理論の $U(1)_V$ アノマリーを計算する。4次元の場合の $U(1)_V$ アノマリーは 2.1.4 節で計算し、 $U(N)_L \times U(N)_R$ の gauge 場が結合している場合のアノマリーは (2.1.44) 式のようになった。

今考えるのは $U(1)_V$ アノマリーなので、(7.1.3) 式で $U_L = U_R = e^{i\alpha(x)}$ とした変換を考える。即ち、以下のような変換になる。

$$\begin{aligned}\psi_L &\rightarrow e^{i\alpha(x)}\psi_L, \quad \bar{\psi}_L \rightarrow \bar{\psi}_L e^{-i\alpha(x)}, \quad \psi_R \rightarrow e^{i\alpha(x)}\psi_R, \quad \bar{\psi}_R \rightarrow \bar{\psi}_R e^{-i\alpha(x)} \\ A_L &\rightarrow A_L - id\alpha, \quad A_R \rightarrow A_R - id\alpha \\ m &\rightarrow m, \quad m^\dagger \rightarrow m^\dagger\end{aligned}\tag{7.2.1}$$

また、 $U(N)_V$ アノマリーも同様に計算可能で、結果は付録 A に載せてある。

計算の手順は 2.1.4 節と基本的には変わらないが、質量 $M(x)$ の寄与が加わる。計算の詳細は付録 A に載せたので、そちらを参照。ここでは結果を引用して先へ進む。

$U(1)_V$ アノマリーの計算結果は以下ようになる。(A.1.19) 式より、

$$\begin{aligned}\ln \mathcal{J} &= -i \left(\frac{i}{2\pi} \right)^{\frac{d}{2}} \int \alpha(x) \text{Str} \left[\exp \begin{pmatrix} F^L - \tilde{m}^\dagger \tilde{m} & (D\tilde{m})^\dagger \\ D\tilde{m} & F^R - \tilde{m} \tilde{m}^\dagger \end{pmatrix} \right] \Big|_{d\text{-form}} \\ &= -i \left(\frac{i}{2\pi} \right)^{\frac{d}{2}} \int \alpha(x) \text{Str} [e^{\mathcal{F}}] \Big|_{d\text{-form}}\end{aligned}\tag{7.2.2}$$

ここで、 $\tilde{m} = m/\Lambda$ であり、 $\Lambda \rightarrow \infty$ の極限で $\tilde{m} \rightarrow 0$ と落ちない時にのみこのアノマリーに m の寄与が入る。 $\tilde{m} = 0$ と取れば通常の $U(N)_L \times U(N)_R$ の gauge 場が入った理論の持つ $U(1)_V$ アノマリーと一致する。特に、4次元の場合は (7.2.2) 式で $\tilde{m} = 0$ とした物は (2.1.44) 式と一致する。

この計算でアノマリーに質量 m の寄与が入るためには、 m/Λ が $\Lambda \rightarrow \infty$ で 0 にならないことが重要である。そのような例として、例えば質量 $M(x)$ が以下のような座標依存性を持つ場合を考える。

$$m(x^I) \rightarrow \infty \ (x^I \rightarrow \infty), \quad m(x^I) \rightarrow -\infty \ (x^I \rightarrow -\infty)\tag{7.2.3}$$

ここで、 x^I は d 次元の座標 x^μ のうちの一部の方向であるとした。このように、無限遠で $m \rightarrow \infty$ と質量が発散しているような場合には $\tilde{m} \rightarrow \infty$ が実現でき、(7.2.1) 式のようにアノマリーに $\tilde{m}$ の寄与が残る。

第 2 章で AS 指数定理を考えた時に Chern 指標を導入したが、今の場合も $\mathcal{F}$ に対して Chern 指標を導入することが可能である。(2.5.10) 式に従って、以下のように定義する。

$$\text{ch}(\mathcal{F}) \equiv \left(\frac{i}{2\pi} \right)^{\frac{d}{2}} \alpha(x) \text{Str} [e^{\mathcal{F}}] \Big|_{d\text{-form}}\tag{7.2.4}$$

これを用いると、 $U(1)_V$ アノマリーは以下のように書ける。

$$\ln \mathcal{J} = -i \int \alpha(x) \text{ch}(\mathcal{F})\tag{7.2.5}$$

7.3 奇数次元のアノマリー

奇数次元の場合に (7.1.1) 式の作用で与えられる理論の $U(1)$ アノマリーを計算する。2 章では 4 次元の場合の計算しかしていないため奇数次元の例は計算していないが、基本的な手順は偶数次

元の場合と同じである。偶数次元で $U(N)_L \times U(N)_R$ の gauge 場が入っていた場合の計算と比較すると、奇数次元では偶数次元の gauge 場を元に $A_\mu^L = A_\mu^R$ として $U(N)_V$ 部分を取り出せば良い。そのため、4 次元で $U(N)_V$ の gauge 場のみが結合している場合に $U(1)_V$ アノマリーはなかったという結果 (2.1.45) を思い出すと、奇数次元の場合の $U(N)$ アノマリーも通常の場合はないことが分かる。

$U(1)$ 変換は、(7.1.6) 式で $U = e^{i\alpha(x)}$ とすれば良いので、以下のような変換になる。

$$\begin{aligned}\psi &\rightarrow e^{i\alpha(x)}\psi, \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}e^{-i\alpha(x)} \\ A &\rightarrow A - i d\alpha, \quad M \rightarrow M\end{aligned}\tag{7.3.1}$$

また、偶数次元の時と同様に $U(N)$ アノマリーも容易に計算でき、付録 A にその結果を載せてある。

計算手順は偶数次元の場合とほぼ同じである。奇数次元の場合は $U(N)$ アノマリーは質量 M が 0 の場合は存在しないが、今の場合にアノマリーを計算すると 0 ではない寄与があると分かる。計算の詳細は付録 A に載せたので、そちらを参照。

$U(1)$ アノマリーの計算結果は以下ようになる。

$$\begin{aligned}\ln \mathcal{J} &= -i \left(\frac{i}{2\pi} \right)^{\frac{d}{2}} \int \alpha(x) \text{Str} \left[\exp \left(\begin{array}{cc} F - \tilde{m}^\dagger \tilde{m} & (D\tilde{m})^\dagger \\ D\tilde{m} & F - \tilde{m}\tilde{m}^\dagger \end{array} \right) \right] \Big|_{d\text{-form}} \\ &= -i \left(\frac{i}{2\pi} \right)^{\frac{d}{2}} \int \alpha(x) \text{Str} [e^{\mathcal{F}}] \Big|_{d\text{-form}}\end{aligned}\tag{7.3.2}$$

ここで、 $im = M$ 、 $\tilde{m} = m/\Lambda$ である。このように、supertrace を使って書くと偶数次元の場合の $U(1)_V$ アノマリーの結果に一致する。奇数次元の場合は、 $\tilde{m} = 0$ とするとアノマリーは 0 になり、 M が入っていない場合のアノマリーを再現する。

奇数次元の場合でも、アノマリーに質量 m の寄与が入るためには、 $\tilde{m} = m/\Lambda$ が $\Lambda \rightarrow \infty$ の極限で 0 にならないことが必要である。この条件さえ満たす質量 m を使えば、後はアノマリーの計算結果 (2.3.2) が偶数次元の場合と同じ形になるため、偶数次元の場合と同様に議論可能である。

奇数次元でも (2.3.2) 式を見れば分かるように偶数次元の場合と同様に Chern 指標を導入することが可能である。今の場合も $\mathcal{F}$ に対して Chern 指標を導入することが可能である。Chern 指標は以下のように定義する。

$$\text{ch}(\mathcal{F}) \equiv \left(\frac{i}{2\pi} \right)^{\frac{d}{2}} \alpha(x) \text{Str} [e^{\mathcal{F}}] \Big|_{d\text{-form}}\tag{7.3.3}$$

$U(1)$ アノマリーは以下のように書ける。

$$\ln \mathcal{J} = -i \int \alpha(x) \text{ch}(\mathcal{F})\tag{7.3.4}$$

7.4 応用

以上の結果から、(2.1.1) 式の作用はアノマリーを持ち、次元の偶奇に拘らず supertrace を用いて以下のように書けると分かった。(奇数次元の場合は $F^L = F^R$ とすれば良い。)

$$\begin{aligned}\ln \mathcal{J} &= -i \left(\frac{i}{2\pi} \right)^{\frac{d}{2}} \int \alpha(x) \text{Str} \left[\exp \left(\begin{array}{cc} F^L - \tilde{m}^\dagger \tilde{m} & (D\tilde{m})^\dagger \\ D\tilde{m} & F^R - \tilde{m} \tilde{m}^\dagger \end{array} \right) \right] \Big|_{d\text{-form}} \\ &= -i \left(\frac{i}{2\pi} \right)^{\frac{d}{2}} \int \alpha(x) \text{Str} [e^{\mathcal{F}}] \Big|_{d\text{-form}}\end{aligned}\quad (7.4.1)$$

このアノマリーを導くには、 $\tilde{m} = m/\Lambda$ が $\Lambda \rightarrow \infty$ の極限で 0 にならないことが必要であった。この条件を満たす m の配位として、(2.2.3) 式のような場合が考えられる。以下では、具体的に m の配位を考える。

7.4.1 1次元方向に m が値を持つ場合

次元 d が奇数の場合を考える。 $d = 2r + 1$ ($r \in \mathbb{Z}$) とする。この時、質量 $m(x)$ の配位として以下のようなもの考える。

$$m(y) = uy \mathbf{1}_{N \times N} \quad (7.4.2)$$

ここで、 $\mathbf{1}_{N \times N}$ は $U(N)$ の足に対する $N \times N$ の単位行列で、 y は $2r + 1$ 番目の座標、即ち $y = x^{\mu=2r}$ である。 u は実数値を取るパラメータである。

この場合にアノマリー $\ln \mathcal{J}$ を計算すると以下ようになる。基本的には、(A.2.7) 式の計算を辿って (7.4.2) 式を代入すれば良い。

$$\begin{aligned}\ln \mathcal{J} &= -i \left(\frac{i}{2\pi} \right)^{\frac{d}{2}} \int \alpha(x) \text{Str} [e^{\mathcal{F}}] \Big|_{d\text{-form}} \\ &= -i \left(\frac{i}{2\pi} \right)^{\frac{d}{2}} \int \alpha(x) \text{Str} \left[\exp \left(\begin{array}{cc} F - \tilde{m}^\dagger \tilde{m} & (D\tilde{m})^\dagger \\ D\tilde{m} & F - \tilde{m} \tilde{m}^\dagger \end{array} \right) \right] \Big|_{d\text{-form}} \\ &= -i \left(\frac{i}{2\pi} \right)^{\frac{d}{2}} \int \alpha(x) \text{tr} \left[-i\sqrt{2i} \left\{ \frac{1}{\left(\frac{d+1}{2}\right)!} ((D\tilde{m}) \wedge F \wedge F \cdots + \cdots) \right\} e^{-\tilde{m}^\dagger \tilde{m}} \right] \\ &= -i \left(\frac{i}{2\pi} \right)^{\frac{d}{2}} \int \alpha(x) \text{tr} \left[-i \frac{u}{\Lambda} \sqrt{2i} \frac{1}{\left(\frac{r}{2}\right)!} (dy \wedge F \wedge F \cdots + \cdots) e^{-\frac{u^2}{\Lambda^2} y^2} \right] \\ &= -i \left(\frac{i}{2\pi} \right)^r \frac{u}{\sqrt{\pi}\Lambda} \int \alpha(x) dy e^{-\frac{u^2}{\Lambda^2} y^2} \text{tr} [e^F] \Big|_{2r\text{-form}}\end{aligned}\quad (7.4.3)$$

ここで、 F と α が y に依存しないと仮定して y 積分を実行すると、以下ようになる。

$$\ln \mathcal{J} = -i \left(\frac{i}{2\pi} \right)^r \frac{u}{|u|} \int \alpha(x) \text{tr} [e^F] \Big|_{2r\text{-form}} \quad (7.4.4)$$

これをみると分かるように、 y 積分を実行して仕舞えば Λ 依存性は消えてしまい、このアノマリーは $\Lambda \rightarrow \infty$ の極限を取った後でも残る寄与である。

この結果を得るためには、 $|u|$ が $\Lambda \rightarrow \infty$ で $|u| \rightarrow \infty$ と振る舞うと考えると、 $|u| \rightarrow \infty$ の極限を取った形で書いても良い。 $|u| \rightarrow \infty$ の極限で $e^{-\frac{u^2}{\Lambda^2} y^2}$ は δ 関数的に振る舞うため、以下のように書き換えられる。

$$\lim_{|u| \rightarrow \infty} \text{Str} [e^{\mathcal{F}}] = \text{sgn}(u) \left(\frac{i}{2\pi} \right)^{-\frac{1}{2}} dy \delta(y) \text{tr} [e^F] \quad (7.4.5)$$

(7.4.2) 式で $m \propto y$ という仮定をしたが、この結果を得るためには m が y のどのような関数で書けるのかは重要ではなく、単に $y \rightarrow \pm\infty$ での m の漸近的な振る舞いが $m \rightarrow \pm\infty$ を満たすような、(7.4.2) 式と同様の振る舞いをすれば十分である。

ここで、(7.4.4) 式を見ると、このアノマリーは $2r$ 次元 ($d-1$ 次元、偶数次元) のフェルミオンの持つアノマリーと一致していることが示せる。以下ではこれを示す。

m が y 方向にしか依存していない場合、 $2r$ 次元のアノマリーは以下のように書けた。

$$\begin{aligned} \ln \mathcal{J} &= -i \left(\frac{i}{2\pi} \right)^{\frac{d}{2}} \int \alpha(x) \text{Str} \left[\exp \begin{pmatrix} F^L - \tilde{m}^\dagger \tilde{m} & (D\tilde{m})^\dagger \\ D\tilde{m} & F^R - \tilde{m} \tilde{m}^\dagger \end{pmatrix} \right] \Big|_{2r\text{-form}} \\ &= -i \left(\frac{i}{2\pi} \right)^r \int \alpha(x) \text{tr} \left[\left\{ \frac{1}{r!} \left((F^L)^r - (F^R)^r \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{(r+1)!} \left(D\tilde{m} \wedge (D\tilde{m})^\dagger \wedge F^R \wedge \dots + \dots \right) + \dots \right\} e^{-\tilde{m}^\dagger \tilde{m}} \right] \\ &= -i \left(\frac{i}{2\pi} \right)^r \int \alpha(x) \text{tr} \left[\frac{1}{r!} \left((F^L)^r - (F^R)^r \right) \right] \end{aligned} \quad (7.4.6)$$

最後の等号では、(7.4.2) 式より m が y 方向にしか依存せず、 y 積分を実行後の (7.4.6) 式では $dm = 0$ が成立することを使った。よって、(7.4.6) 式には m を含む項は残らず、 $m = 0$ とした場合の $U(1)_V$ アノマリーになっている。 $2r$ 次元は偶数次元なので chirality が存在し、field strength が F^L と F^R の2種類存在する。これを (7.4.4) 式から得るには、(7.4.4) 式で $u > 0$ の時に $F = F^L$ 、 $u < 0$ の時に $F = F^R$ になっていると解釈すれば良い。よって、(7.4.4) 式は $2r$ 次元のアノマリー (7.4.6) と一致し、 u の符号の取り方に依って異なる chirality の gauge 場で書かれるアノマリーを得られると分かった。

このアノマリー (7.4.4) を、 $y = 0$ の $2r$ 次元面に局在した massless fermion によるアノマリーであると解釈する。

Domain wall との比較

この質量 $m(x)$ の配位は、例えば5次元時空で1次元方向に domain wall mass を入れた場合に対応するような物である。以下では、5次元 ($d = 5$) の場合に注目して domain wall fermion を考えた場合との比較を行う。

(7.4.6) 式のアノマリーを $m = 0$ の4次元面に局在する massless fermion のアノマリーと解釈したが、domain wall mass を考えた場合にもこのような4次元面に局在する massless fermion が得られる。このような系のアノマリーは Callan と Harvey により [6] で議論されているが、そこでは domain wall mass を考えた場合に $m = 0$ の面に局在する Weyl fermion の持つアノマリーは bulk、即ち domain wall mass が0ではない値を取る方向のアノマリーの寄与 (正確には bulk

の Chern-Simons 項の gauge 変換による寄与) と相殺すると議論されている。(7.4.6) 式ではアノマリーが生じているため、今回得られた結果は [6] の結果とは一致しない。これは矛盾ではなく、考えている系の違いに由来する。

[6] では gauge 場として無限遠で 0 になるような場合を考えていたが、(7.4.6) 式のアノマリーの計算では gauge 場が y 方向に依存しないと仮定して y 積分を実行し、(7.4.4) 式を得ていたため、gauge 場は y 方向の無限遠でも 0 にならず、 y 方向について定数として残る。そのため、部分積分を実行する際に表面項の寄与が生じ、bulk のアノマリー (正確には bulk の Chern-Simons 項の gauge 変換) を計算すると $y = 0$ の寄与と $y = \infty$ の寄与が相殺して 0 になり、 $y = 0$ に現れる Weyl fermion のアノマリーが得られると理解出来る。

7.4.2 2次元方向に m が値を持つ場合

7.4.1 節と似たような場合として、今度は m が 2 次元方向に依存している場合を考える。 d 次元 ($d = 2r + 2, r \in \mathbb{Z}$) の場合を考え、質量 $m(x)$ の配位として以下のような物を考える。

$$m(z) = uz \mathbf{1}_{N \times N} \quad (7.4.7)$$

ここで、 $z = x^{\mu=2r} + ix^{\mu=2r+1}$ の 2 次元方向の座標で、 u は複素数のパラメータである。以下では、簡単のため $A_{2r} = A_{2r+1} = 0$ とし、 $\alpha(x)$ と A_μ は $2r, 2r + 1$ 方向には依存しないとして計算を進める。

この $m(x)$ の配位の場合にアノマリー $\ln \mathcal{J}$ を計算すると以下ようになる。(A.1.20) 式に (7.4.7) 式を代入すれば良いので、

$$\begin{aligned} \ln \mathcal{J} &= -i \left(\frac{i}{2\pi} \right)^{\frac{d}{2}} \int \alpha(x) \text{Str} [e^{\mathcal{F}}] \\ &= -i \left(\frac{i}{2\pi} \right)^{\frac{d}{2}} \int \alpha(x) \text{Str} \left[\exp \begin{pmatrix} F^L - \tilde{m}^\dagger \tilde{m} & (D\tilde{m})^\dagger \\ D\tilde{m} & F^R - \tilde{m} \tilde{m}^\dagger \end{pmatrix} \right] \\ &= -i \left(\frac{i}{2\pi} \right)^{\frac{d}{2}} \int \alpha(x) \text{tr} \left[\left\{ \frac{1}{(r+1)!} \left(F^L \wedge F^L \wedge \dots - F^R \wedge F^R \wedge \dots \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{(r+2)!} \left((D\tilde{m})^\dagger \wedge D\tilde{m} \wedge F^L \wedge \dots - D\tilde{m} \wedge (D\tilde{m})^\dagger \wedge F^R \wedge \dots + \dots \right) + \dots \right\} e^{-\tilde{m}^\dagger \tilde{m}} \right] \\ &= -i \left(\frac{i}{2\pi} \right)^{\frac{d}{2}} \int \alpha(x) \text{tr} \left[\left\{ \frac{|u|^2}{\Lambda^2} \frac{1}{(r+2)!} \left((dz)^\dagger \wedge dz \wedge (F^L)^r - dz \wedge (dz)^\dagger \wedge (F^R)^r \right) + \dots \right\} e^{-\frac{|u|^2}{\Lambda^2} |z|^2} \right] \\ &= -i \left(\frac{i}{2\pi} \right)^{\frac{d}{2}} \int \alpha(x) \text{tr} \left[\frac{|u|^2}{\Lambda^2} d\bar{z} \wedge dz \left\{ \frac{r+1}{(r+2)!} \left((F^L)^r + (F^R)^r \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{(r+2)!} \sum_n \left((F^L)^n (F^R)^{r-n} + \dots \right) + \dots \left(\text{全部で } (r+2)(r+1) \text{ 項} \right) \right\} e^{-\frac{|u|^2}{\Lambda^2} |z|^2} \right] \end{aligned} \quad (7.4.8)$$

ここで、(7.4.8) 式の第 1 項に注目すると、 $2r$ 次元の $U(1)_A$ アノマリーの形になっていることが分かる。以下では vector 型の gauge 場に注目して、 $A_L = A_R$ として考える。更に計算を進める

と以下のようになる。

$$\begin{aligned}
\ln \mathcal{J} &= -i \left(\frac{i}{2\pi} \right)^{\frac{d}{2}} \int \alpha(x) \text{tr} \left[\frac{|u|^2}{\Lambda^2} d\bar{z} \wedge dz \left\{ \frac{r+1}{(r+2)!} \left((F)^r + (F)^r \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{(r+2)!} \sum_n \left((F)^n (F)^{r-n} + \dots \right) + \dots \left(\text{全部で } (r+2)(r+1) \text{ 項} \right) \right\} \right] e^{-\frac{|u|^2}{\Lambda^2} |z|^2} \\
&= -i \left(\frac{i}{2\pi} \right)^{\frac{d}{2}} \int \alpha(x) \frac{|u|^2}{\Lambda^2} d\bar{z} \wedge dz \frac{1}{r!} \text{tr} \left[(F)^r \right] e^{-\frac{|u|^2}{\Lambda^2} |z|^2} \\
&= -i \left(\frac{i}{2\pi} \right)^r \int \alpha(x) \frac{1}{r!} \text{tr} \left[(F)^r \right] \\
&= -i \left(\frac{i}{2\pi} \right)^r \int \alpha(x) \text{tr} \left[e^F \right] \Big|_{2r\text{-form}} \tag{7.4.9}
\end{aligned}$$

よって、 $2r$ 次元のアノマリーが得られた。これは 7.4.1 節で議論した場合と同様に、最終的に得られた表式 (7.4.9) には m は残っておらず、 $2r$ 次元で $m = 0$ とした場合の $U(1)$ アノマリーの形になっていると分かる。このアノマリー (7.4.9) を、 $z = 0$ の $2r$ 次元面に局在した massless の Weyl fermion の $U(1)$ アノマリーと解釈する。

ここで、2次元の z 積分を実行しているが、 z 積分をしてこの結果を得るには $m(z)$ の関数型の詳細には依らない。7.4.1 節で議論した場合と同様に、 $m(z)$ の $z \rightarrow \infty$ での漸近的な振る舞いが重要で、 $|z| \rightarrow \infty$ で $|m| \rightarrow \infty$ の条件を満たすような関数であれば同様の議論を考えることが可能である。

7.4.3 一般次元への拡張

以上の議論を、 $m(x)$ の値が変化する方向が一般次元の場合にも拡張可能である。この議論をする場合、以下のような質量 $m(x)$ の配位を考えれば良い。

$$m(x) = u \sum_{I=1}^n \Gamma^I x^I \tag{7.4.10}$$

ここで、質量 m の値が変化する方向は $\mu = 1, \dots, n$ 方向とした。 Γ は n 次元 γ 行列の一部で、 n 次元 γ 行列とは以下のような関係にある。

$$\gamma^I = \Gamma^I \quad (n = \text{odd}) \tag{7.4.11}$$

$$\gamma^I = \begin{pmatrix} 0 & \Gamma^I \\ \Gamma^{I\dagger} & 0 \end{pmatrix} \quad (n = \text{even}) \tag{7.4.12}$$

即ち、 n が偶数の時は Γ^I を n 次元 γ 行列で定義し、 n が偶数の時は n 次元 γ 行列の中の σ^I 部分を Γ^I として定義する。(7.4.7) 式も確かにこの条件を満たしていると確認出来る。

また、 $m(x)$ の x 依存性を (2.4.10) 式で決めたが、ここでも m の $x^I \rightarrow \infty$ での漸近的な振る舞いが重要であり、関数 $m(x)$ の具体型には依存しない。

この質量 $m(x)$ の配位 (7.4.10) を用いてアノマリーを計算すると、 $d - n$ 次元の massless fermion に対するアノマリーを得ることが出来る。

この質量 $m(x)$ の配位は、第 5 章で議論したタキオン凝縮で、タキオンが全空間で一様でない値を取る場合の解の形 (5.2.2) と同じ形をしている。7.4 節で行った議論は、5.3 節で少し言及したようにタキオン凝縮の議論と関連付けて考えることが出来るため、タキオン凝縮の議論で知られている結果を応用することが可能である。

以上の議論から、(7.4.10) 式のような質量 m の配位を用いることで低次元の massless fermion のアノマリーが求められると分かった。

第 8 章

まとめ

本論文では、摂動的アノマリーに関して研究を行った。

前半では摂動的アノマリーを中心とする内容に対するレビューを行った。摂動的アノマリーは藤川の手法を用いて計算されるが、正則化の方法が複数存在し、その正則化によって異なる形のアノマリーを得ることを見た。第 2 章では特に「共变的正則化」に着目して正則化を行い、共変アノマリーを得た。第 3 章では、アノマリーは「共変アノマリー」と「整合アノマリー」に分類され、両者は Bardeen-Zumino 多項式を通して移り合うことを見た。また、両者に満たす性質の違いについても見た。第 4 章ではトポロジカル項、特に θ 項の性質について見た。第 5 章では、本研究で使うアイデアとして、タキオン凝縮について見た。このタキオン凝縮の議論でアノマリーに注目すれば、第 7 章、特に 7.4 節の議論に応用できる。

後半では質量 m が無限遠で発散するような場合に対して共変アノマリーを計算した。最初に第 6 章で superconnection を導入し、第 7 章でこの場合のアノマリーが superconnection を用いて書けることを示した。計算は付録 A に示したように多少複雑だが、結果は superconnection で書けるため綺麗な形になる。7.4 節にはこのアノマリーの応用例についても議論し、低次元のアノマリーが導出出来ることを見た。

今後の課題としては、7.4 節の応用例は未だ限られた状況についての計算しか行っていないため、もっと様々な状況に対して計算を行うことが最重要である。特に、7.4 節では最終的に偶次元のアノマリーを得るような場合で計算した。これは奇数次元では 0 質量の場合アノマリーがないためである。しかし、この質量 $m(x)$ の配位を工夫することで奇数次元の場合にも非自明な結論が得られる可能性があり、現在計算を進めている。特に、この計算を応用することで APS 指数定理が得られると考えている。APS 指数定理は最近も新たな議論がなされており [23, 24]、本論文の set up を用いて実現出来れば面白いと考えられる。

謝辞

本修士論文の執筆に当たり、様々な方にお世話になりましたのでこの場をお借りして感謝の意を表したいと思います。

始めに、指導教員である杉本茂樹教授には日頃から丁寧なご指導をさせて頂いており、とても感謝しています。未熟な僕がつまらない質問をしても理解するまで教えて頂き、本当にありがとうございました。

また、同室の九後太一特任教授、Jeong-Hyuck Park 教授には分からない所を教えて頂き、感謝申し上げます。特に九後氏には計算の細かい部分まで教えて頂き、本修士論文を書く上でも非常に勉強になりました。

基礎物理学研究所の皆様には、日頃から公私共にお世話になっており、感謝申し上げます。特に今年度になって QFT study group という自主ジャーナルクラブを立ち上げて以降は、そこに参加している青木慎也教授、寺嶋靖治助教、本多正純助教、塩崎謙助教、谷崎佑弥助教、新居慶太氏、島田英彦氏、伊藤悦子氏、村上耕太郎氏、川平将志君を始めとする皆様には特にお世話になっています。修士論文を書いている間も励ましの言葉を沢山頂きました。また、台湾の国立精華大学の佐藤芳紀氏にも原稿を確認して頂きました。

本論文の作成に当たって、2020 年度に基研で行われた大阪大学の深谷英則助教の集中講義を参考にしました。素晴らしい講義をありがとうございました。

同期の皆様には日頃から些細な質問をしても丁寧に議論して頂き、本論文の主題であるアノマリーに対する理解もそういった議論を通して深めることが出来ました。深く感謝を申し上げます。特に、基礎物理学研究所凝縮系理論の同期の大山修平君、中村大地君とは日常的に様々な議論をしており、その議論を通して多くの学びがありました。また、現在も Polchinski のゼミを続けている理学研究科の福島理君、間仁田侑典君には物理の内容に留まらず研究に必要な様々なことを教えて頂きました。そしてこの 4 人に加え、基礎物理学研究所の大畑宏樹君、理学研究科の高橋卓弥君、樋沢規宏君とは現在でも自主ゼミを続けており、発表練習にも付き合ってくれました。感謝します。皆様のおかげで、研究内容の基礎的な部分に関する理解が大きく深まりました。

学部時代に同期だった、九州大学理学院の谷脇俊介君、藤村啓君、後藤輝一君には今でも議論に付き合ってくれており、僕の理解の至らない所に気付かせてもらっています。特に、谷脇君、藤村君は研究分野が比較的近いこともあり、修士の間も様々なことを教えて頂きました。感謝します。

最後に、今までの生活を支えてくれた家族に心からの感謝を表します。

付録 A

藤川の手法による計算の詳細

この付録 A では、本文で省略した計算の詳細を示す。

基本的には 2.1.4 節の共変アノマリーの計算と同じであるが、質量項が入っているため非自明な寄与が出る。(7.1.1) 式の作用から出発する。作用を再掲すると、

$$\begin{aligned} S &= \int d^d x \bar{\psi}(x) \{i\gamma^\mu (\partial_\mu + A_\mu) + M(x)\} \psi(x) \\ &= \int d^d x \bar{\psi}(x) (i\not{D} + M(x)) \psi(x) \\ &= \int d^d x \bar{\psi}(x) D \psi(x) \end{aligned} \tag{A.0.1}$$

A.1 偶数次元

偶数次元の場合、作用は (7.1.4) 式のように変形できた。Dirac 演算子 D は (7.1.2) 式で定義され、以下のような形をしていた。

$$D \equiv \begin{pmatrix} im & i\sigma^\mu(\partial_\mu - iA_\mu^R) \\ i\sigma^{\mu\dagger}(\partial_\mu - iA_\mu^L) & im^\dagger \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} m & \not{D}_R \\ \not{D}_L & m^\dagger \end{pmatrix} \tag{A.1.1}$$

以下では 2.1.2 節の手順に沿って $U(1)_V$ アノマリーを計算する。

正則化関数

共変アノマリーを計算するため、正則化関数として以下の関数を用いる。

$$f\left(\frac{\lambda_n^2}{\Lambda^2}\right) = e^{-\frac{\lambda_n^2}{\Lambda^2}} = \left\{ e^{-\frac{D^\dagger D}{\Lambda^2}}, e^{-\frac{D D^\dagger}{\Lambda^2}} \right\} \tag{A.1.2}$$

今、Dirac 演算子 D はエルミートではないが、2.1.2 節と同様の議論から固有値 λ_n^2 の正定値性

は保証される。 $D^\dagger D$ と $DD^\dagger$ を計算しておくこと、以下のようになる。

$$D^\dagger D = -i \begin{pmatrix} m^\dagger & \not{D}_L^\dagger \\ \not{D}_R^\dagger & m \end{pmatrix} i \begin{pmatrix} m & \not{D}_R \\ \not{D}_L & m^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \not{D}_L^\dagger \not{D}_L + m^\dagger m & m^\dagger \not{D}_R + \not{D}_L^\dagger m^\dagger \\ \not{D}_R^\dagger m + m \not{D}_L & \not{D}_R^\dagger \not{D}_R + m m^\dagger \end{pmatrix} \quad (\text{A.1.3})$$

$$\begin{aligned} &= (i\gamma^\mu D_\mu + M)^\dagger (i\gamma^\mu D_\mu + M) = (iD_\mu \gamma^\mu + M^\dagger) (i\gamma^\mu D_\mu + M) \\ &= -\gamma^\mu \gamma^\nu D_\mu D_\nu + iD_\mu \gamma^\mu M + iM^\dagger \gamma^\mu D_\mu + M^\dagger M \\ &= -\gamma^\mu \gamma^\nu D_\mu D_\nu - \gamma^\mu \begin{pmatrix} (\partial_\mu m) + A_\mu^R m - mA_\mu^L & 0 \\ 0 & (\partial_\mu m^\dagger) + A_\mu^L m^\dagger - m^\dagger A_\mu^R \end{pmatrix} + M^\dagger M \\ &\equiv -\gamma^\mu \gamma^\nu D_\mu D_\nu - \gamma^\mu \begin{pmatrix} D_\mu m & 0 \\ 0 & D_\mu m^\dagger \end{pmatrix} + M^\dagger M \\ &\equiv -\gamma^\mu \gamma^\nu D_\mu D_\nu - \gamma^\mu D_\mu M + M^\dagger M \\ &= -\eta^{\mu\nu} D_\mu D_\nu - \frac{1}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu} - \gamma^\mu D_\mu M + M^\dagger M \\ &= -\eta^{\mu\nu} (D_\mu^L D_\nu^L P_+ + D_\mu^R D_\nu^R P_-) - \frac{1}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] (F_{\mu\nu}^L P_+ + F_{\mu\nu}^R P_-) \\ &\quad - \gamma^\mu D_\mu m P_+ - \gamma^\mu D_\mu m^\dagger P_- + m^\dagger m P_+ + m m^\dagger P_- \end{aligned} \quad (\text{A.1.4})$$

ここで、今考えている gauge 場は反エルミートに取っているため $A_\mu^\dagger = -A_\mu$ を使った。 M に対する共変微分は以下のように定義した。これは $U(N)_L \times U(N)_R$ の下での M の変換性から決まる。

$$D_\mu M \equiv i \begin{pmatrix} D_\mu m & 0 \\ 0 & D_\mu m^\dagger \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} (\partial_\mu m) + A_\mu^R m - mA_\mu^L & 0 \\ 0 & (\partial_\mu m^\dagger) + A_\mu^L m^\dagger - m^\dagger A_\mu^R \end{pmatrix} \quad (\text{A.1.5})$$

同様に $DD^\dagger$ も計算して、

$$DD^\dagger = i \begin{pmatrix} m & \not{D}_R \\ \not{D}_L & m^\dagger \end{pmatrix} (-i) \begin{pmatrix} m^\dagger & \not{D}_L^\dagger \\ \not{D}_R^\dagger & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \not{D}_R \not{D}_R^\dagger + m m^\dagger & m \not{D}_L^\dagger + \not{D}_R m \\ \not{D}_L m^\dagger + m^\dagger \not{D}_R^\dagger & \not{D}_L \not{D}_L^\dagger + m^\dagger m \end{pmatrix} \quad (\text{A.1.6})$$

$$\begin{aligned} &= (i\gamma^\mu D_\mu + M) (i\gamma^\mu D_\mu + M)^\dagger = (i\gamma^\mu D_\mu + M) (iD_\mu \gamma^\mu + M^\dagger) \\ &= -\gamma^\mu \gamma^\nu \bar{D}_\mu \bar{D}_\nu + i\gamma^\mu D_\mu M^\dagger + iM D_\mu \gamma^\mu + M M^\dagger \\ &= -\gamma^\mu \gamma^\nu \bar{D}_\mu \bar{D}_\nu + \gamma^\mu \begin{pmatrix} (\partial_\mu m^\dagger) + A_\mu^L m^\dagger - m^\dagger A_\mu^R & 0 \\ 0 & (\partial_\mu m) + A_\mu^R m - mA_\mu^L \end{pmatrix} + M M^\dagger \\ &= -\gamma^\mu \gamma^\nu \bar{D}_\mu \bar{D}_\nu + \gamma^\mu \begin{pmatrix} D_\mu m^\dagger & 0 \\ 0 & D_\mu m \end{pmatrix} + M M^\dagger \\ &\equiv -\gamma^\mu \gamma^\nu \bar{D}_\mu \bar{D}_\nu + \gamma^\mu D_\mu M^\dagger + M M^\dagger \\ &= -\eta^{\mu\nu} \bar{D}_\mu \bar{D}_\nu - \frac{1}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \bar{F}_{\mu\nu} + \gamma^\mu \overline{D_\mu M} + M M^\dagger \\ &= -\eta^{\mu\nu} (D_\mu^L D_\nu^L P_- + D_\mu^R D_\nu^R P_+) - \frac{1}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] (F_{\mu\nu}^L P_- + F_{\mu\nu}^R P_+) \\ &\quad + \gamma^\mu D_\mu m P_- + \gamma^\mu D_\mu m^\dagger P_+ + m^\dagger m P_- + m m^\dagger P_+ \end{aligned} \quad (\text{A.1.7})$$

ここで、 $\bar{D}_\mu$ は以下のように定義した。「 D_μ の対角成分を入れ換える」という意味で使っている。

$$\bar{D}_\mu \equiv \partial_\mu + \begin{pmatrix} A_\mu^R & 0 \\ 0 & A_\mu^L \end{pmatrix} \quad (\text{A.1.8})$$

同様に、 $\overline{D_\mu M}$ も $D_\mu M$ の対角成分を上下入れ換えた物、という意味で使った。

$D^\dagger D$ 、 $DD^\dagger$ の固有値と固有関数を 2.1.2 節と同様に以下のように定義する。

$$\begin{aligned} D^\dagger D \phi_n(x) &= \lambda_n^2 \phi_n(x), \quad (\phi_m^\dagger, \phi_n) = \int d^d x \phi_m^\dagger(x) \phi_n(x) = \delta_{m,n}, \\ DD^\dagger \varphi_n(x) &= \lambda_n^2 \varphi_n(x), \quad (\varphi_m^\dagger, \varphi_n) = \int d^d x \varphi_m^\dagger(x) \varphi_n(x) = \delta_{m,n}, \\ \varphi_n(x) &= \frac{1}{\lambda_n} D \phi_n(x). \end{aligned} \quad (\text{A.1.9})$$

Jacobian の計算

$U(1)_V$ 変換の下での経路積分の積分測度の変化を見る。

Dirac 場 $\psi, \bar{\psi}$ を以下のように展開。

$$\psi(x) = \sum_n a_n \phi_n(x), \quad \bar{\psi}(x) = \sum_n \bar{b}_n \varphi_n^\dagger(x). \quad (\text{A.1.10})$$

a_n と $\bar{b}_n$ は grassmann 数である。

こっらの関係式を用いて作用 (A.0.1) を書き換えると、以下のようになる。

$$\begin{aligned} S &= \int d^d x \bar{\psi}(x) (i\gamma^\mu D_\mu + M(x)) \psi(x) \\ &= \int d^d x \bar{\psi}(x) D \psi(x) \\ &= \int d^d x \sum_{m,n} \bar{b}_m \varphi_m^\dagger(x) D a_n \phi_n(x) \\ &= \int d^d x \sum_{m,n} \bar{b}_m \varphi_m^\dagger a_n (\lambda_n \varphi_n) \\ &= \sum_{m,n} \bar{b}_m a_n \lambda_n \delta_{m,n} \\ &= \sum_n \lambda_n \bar{b}_n a_n \end{aligned} \quad (\text{A.1.11})$$

ここで、 $\lambda_n > 0$ となるように取った。固有値として λ_n^2 が定義されており、これは正定値であるため $\lambda_n = \sqrt{\lambda_n^2}$ と取れば良い。

$U(1)_V$ 変換は (2.1.39) 式以下と同様に書けて、以下のようになる。

$$\begin{aligned}
a_n \rightarrow a'_n &= (\phi_n^\dagger, \psi') = (\phi_n^\dagger, e^{i\alpha(x)}\psi) \\
&\simeq \int d^d x \phi_n^\dagger (1 + i\alpha(x)) \sum_m a_m \phi_m = \sum_m \left(\delta_{n,m} + i \int d^d x \alpha(x) \phi_n^\dagger(x) \phi_m(x) \right) a_m \\
&\equiv \sum_m M_{nm}^a a_m,
\end{aligned} \tag{A.1.12}$$

$$\begin{aligned}
\bar{b}_n \rightarrow \bar{b}'_n &= (\bar{\psi}', \varphi_n) = (e^{-i\alpha(x)}\bar{\psi}, \varphi_n) \\
&\simeq \int d^d x (1 - i\alpha(x)) \sum_m \bar{b}_m \varphi_m^\dagger \varphi_n = \sum_m \bar{b}_m \left(\delta_{n,m} - i \int d^d x \alpha(x) \varphi_m^\dagger(x) \varphi_n(x) \right) \\
&\equiv \sum_m \bar{b}_m M_{mn}^b.
\end{aligned} \tag{A.1.13}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} &= \prod_n da_n d\bar{b}_n \rightarrow \mathcal{D}\psi' \mathcal{D}\bar{\psi}' = \mathcal{J} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \\
&= \prod_n da'_n d\bar{b}'_n = \prod_n (\det[M_{nm}^a])^{-1} (\det[M_{mn}^b])^{-1} da_n d\bar{b}_n \\
&= \prod_n \mathcal{J} da_n d\bar{b}_n.
\end{aligned} \tag{A.1.14}$$

この Jacobian は (2.1.43) 式と同様で、以下のようになる。

$$\begin{aligned}
\mathcal{J} &= \left(\det \left[\delta_{n,m} + i \int d^d x \alpha(x) \phi_n^\dagger(x) \phi_m(x) \right] \right)^{-1} \left(\det \left[\delta_{n,m} - i \int d^d x \alpha(x) \varphi_m^\dagger(x) \varphi_n(x) \right] \right)^{-1} \\
&\simeq \exp \left[-i \int d^d x \sum_n \alpha(x) \phi_n^\dagger(x) \phi_n(x) \right] \exp \left[i \int d^d x \sum_n \alpha(x) \varphi_n^\dagger(x) \varphi_n(x) \right] \\
&= \exp \left[- \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_n^N i \int d^d x \alpha(x) \{ \phi_n^\dagger(x) \phi_n(x) - \varphi_n^\dagger(x) \varphi_n(x) \} \right] \\
&= \exp \left[- \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \sum_n^\infty i \int d^d x \alpha(x) \left\{ \phi_n^\dagger(x) e^{-\frac{\lambda_n^2}{\Lambda^2}} \phi_n(x) - \varphi_n^\dagger(x) e^{-\frac{\lambda_n^2}{\Lambda^2}} \varphi_n(x) \right\} \right] \\
&\equiv \exp \left[-i \int d^d x \alpha(x) \mathcal{A}(x) \right]
\end{aligned} \tag{A.1.15}$$

anomaly の計算

以下では、(A.1.15) 式の $\mathcal{A}$ を計算する。2.1.2 節と同様の計算だが、質量 $m(x)$ が入っていることに注意する。

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(x) &= \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \sum_n^\infty \left\{ \phi_n^\dagger(x) e^{-\frac{\lambda_n^2}{\Lambda^2}} \phi_n(x) - \varphi_n^\dagger(x) e^{-\frac{\lambda_n^2}{\Lambda^2}} \varphi_n(x) \right\} \\
&= \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \text{Tr} \left[e^{-ikx} \left\{ e^{-\frac{D^\dagger D}{\Lambda^2}} - e^{-\frac{D D^\dagger}{\Lambda^2}} \right\} e^{ikx} \right] \\
&= \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \text{Tr} \left[\exp \left\{ -\frac{1}{\Lambda^2} \left[-\eta^{\mu\nu} ((D_\mu^L + ik_\mu)(D_\nu^L + ik_\nu) P_+ \right. \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (D_\mu^R + ik_\mu)(D_\nu^R + ik_\mu)P_-) - \frac{1}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] (F_{\mu\nu}^L P_+ + F_{\mu\nu}^R P_-) - \gamma^\mu D_\mu m P_+ - \gamma^\mu D_\mu m^\dagger P_- \\
& + m^\dagger m P_+ + m m^\dagger P_- \Big] - \exp \left\{ -\frac{1}{\Lambda^2} \left[-\eta^{\mu\nu} ((D_\mu^L + ik_\mu)(D_\nu^L + ik_\mu)P_- \right. \right. \\
& + (D_\mu^R + ik_\mu)(D_\nu^R + ik_\mu)P_+) - \frac{1}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] (F_{\mu\nu}^L P_- + F_{\mu\nu}^R P_+) + \gamma^\mu D_\mu m P_- + \gamma^\mu D_\mu m^\dagger P_+ \\
& \left. \left. + m^\dagger m P_- + m m^\dagger P_+ \right] \right\} \Big] \\
& = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \Lambda^d \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-k_\mu k^\mu} \text{Tr} \left[\exp \left\{ \frac{1}{\Lambda^2} \left[\eta^{\mu\nu} D_\mu^L D_\nu^L P_+ + D_\mu^R D_\nu^R P_- \right. \right. \right. \\
& + \frac{1}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] (F_{\mu\nu}^L P_+ + F_{\mu\nu}^R P_-) \Big] + \frac{1}{\Lambda} \left[2i\eta^{\mu\nu} k_\mu (D_\nu^L P_+ + D_\nu^R P_-) - \gamma^\mu D_\mu \tilde{m} P_+ \right. \\
& - \gamma^\mu D_\mu \tilde{m}^\dagger P_- \Big] - \left[\tilde{m}^\dagger \tilde{m} P_+ + \tilde{m} \tilde{m}^\dagger P_- \right] \Big\} - \exp \left\{ \frac{1}{\Lambda^2} \left[\eta^{\mu\nu} D_\mu^L D_\nu^L P_- + D_\mu^R D_\nu^R P_+ \right. \right. \\
& + \frac{1}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] (F_{\mu\nu}^L P_- + F_{\mu\nu}^R P_+) \Big] + \frac{1}{\Lambda} \left[2i\eta^{\mu\nu} k_\mu (D_\nu^L P_- + D_\nu^R P_+) + \gamma^\mu D_\mu \tilde{m} P_- \right. \\
& \left. \left. + \gamma^\mu D_\mu \tilde{m}^\dagger P_+ \right] - \left[\tilde{m}^\dagger \tilde{m} P_- + \tilde{m} \tilde{m}^\dagger P_+ \right] \right\} \Big] \\
& = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \Lambda^d \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-k_\mu k^\mu} \text{Tr} \left[\exp \left\{ \left[\frac{1}{\Lambda^2} \eta^{\mu\nu} D_\mu^L D_\nu^L + \frac{1}{\Lambda^2} \frac{1}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu}^L + \frac{1}{\Lambda} 2i\eta^{\mu\nu} k_\mu D_\nu^L \right. \right. \right. \\
& - \tilde{m}^\dagger \tilde{m} \Big] P_+ + \left[\frac{1}{\Lambda^2} \eta^{\mu\nu} D_\mu^R D_\nu^R + \frac{1}{\Lambda^2} \frac{1}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu}^R + \frac{1}{\Lambda} 2i\eta^{\mu\nu} k_\mu D_\nu^R - \tilde{m} \tilde{m}^\dagger \right] P_- \\
& - \frac{1}{\Lambda} \gamma^\mu D_\mu \tilde{m} P_+ - \frac{1}{\Lambda} \gamma^\mu D_\mu \tilde{m}^\dagger P_- \Big\} \\
& - \exp \left\{ \left[\frac{1}{\Lambda^2} \eta^{\mu\nu} D_\mu^L D_\nu^L + \frac{1}{\Lambda^2} \frac{1}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu}^L + \frac{1}{\Lambda} 2i\eta^{\mu\nu} k_\mu D_\nu^L - \tilde{m}^\dagger \tilde{m} \right] P_- \right. \\
& + \left[\frac{1}{\Lambda^2} \eta^{\mu\nu} D_\mu^R D_\nu^R + \frac{1}{\Lambda^2} \frac{1}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu}^R + \frac{1}{\Lambda} 2i\eta^{\mu\nu} k_\mu D_\nu^R - \tilde{m} \tilde{m}^\dagger \right] P_+ \\
& \left. \left. + \frac{1}{\Lambda} \gamma^\mu D_\mu \tilde{m} P_- + \frac{1}{\Lambda} \gamma^\mu D_\mu \tilde{m}^\dagger P_+ \right\} \right] \tag{A.1.16}
\end{aligned}$$

ここで、 $\tilde{m}$ を以下のように定義した。

$$\tilde{m} \equiv \frac{1}{\Lambda} m \tag{A.1.17}$$

通常、例えば $m(x)$ として Higgs 場を入れた場合などは、 $\Lambda \rightarrow \infty$ で $\tilde{m} \rightarrow 0$ より全て落ち、アノマリーには効かない。今は $\Lambda \rightarrow \infty$ の極限で $\tilde{m}$ が 0 にならずに残るような場合を考え、 $\tilde{m}$ のアノマリーに対する寄与を見る。以下では $1/\Lambda$ 展開をするが、 $\tilde{m} \sim \mathcal{O}(1)$ として扱う。

(A.1.16) 式の第 1 項と第 2 項は反対の chirality を持っており、その差を取るときに γ_5 が出て、2.1.2 節で $U(1)_A$ アノマリーを計算した時と同様の $\text{Tr}[\gamma_5$ を掛けるという計算に帰着するため、 γ^μ が入っていない項を落とすことが可能になる。そのため先にトレースを取ると落ちる項を落として、以下のように整理する。

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(x) &= \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \Lambda^d \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-k_\mu k^\mu} \text{Tr} \left[\exp \left\{ \left[\frac{1}{\Lambda^2} \eta^{\mu\nu} D_\mu^L D_\nu^L + \frac{1}{\Lambda^2} \frac{1}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu}^L + \frac{1}{\Lambda} 2i\eta^{\mu\nu} k_\mu D_\nu^L \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \tilde{m}^\dagger \tilde{m} \right] P_+ + \left[\frac{1}{\Lambda^2} \eta^{\mu\nu} D_\mu^R D_\nu^R + \frac{1}{\Lambda^2} \frac{1}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu}^R + \frac{1}{\Lambda} 2i\eta^{\mu\nu} k_\mu D_\nu^R - \tilde{m} \tilde{m}^\dagger \right] P_- \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{\Lambda} \gamma^\mu D_\mu \tilde{m} P_+ - \frac{1}{\Lambda} \gamma^\mu D_\mu \tilde{m}^\dagger P_- \right\} \right. \\
&\quad \left. - \exp \left\{ \left[\frac{1}{\Lambda^2} \eta^{\mu\nu} D_\mu^L D_\nu^L + \frac{1}{\Lambda^2} \frac{1}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu}^L + \frac{1}{\Lambda} 2i\eta^{\mu\nu} k_\mu D_\nu^L - \tilde{m}^\dagger \tilde{m} \right] P_- \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left[\frac{1}{\Lambda^2} \eta^{\mu\nu} D_\mu^R D_\nu^R + \frac{1}{\Lambda^2} \frac{1}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu}^R + \frac{1}{\Lambda} 2i\eta^{\mu\nu} k_\mu D_\nu^R - \tilde{m} \tilde{m}^\dagger \right] P_+ \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{\Lambda} \gamma^\mu D_\mu \tilde{m} P_- + \frac{1}{\Lambda} \gamma^\mu D_\mu \tilde{m}^\dagger P_+ \right\} \right] \\
&\simeq \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \Lambda^d \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-k_\mu k^\mu} \text{Tr} \left[\exp \left\{ \left[\frac{1}{\Lambda^2} \frac{1}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu}^L - \tilde{m}^\dagger \tilde{m} \right] P_+ \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left[\frac{1}{\Lambda^2} \frac{1}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu}^R - \tilde{m} \tilde{m}^\dagger \right] P_- - \frac{1}{\Lambda} \gamma^\mu D_\mu \tilde{m} P_+ - \frac{1}{\Lambda} \gamma^\mu D_\mu \tilde{m}^\dagger P_- \right\} \right. \\
&\quad \left. - \exp \left\{ \left[\frac{1}{\Lambda^2} \frac{1}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu}^L - \tilde{m}^\dagger \tilde{m} \right] P_- + \left[\frac{1}{\Lambda^2} \frac{1}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu}^R - \tilde{m} \tilde{m}^\dagger \right] P_+ \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{\Lambda} \gamma^\mu D_\mu \tilde{m} P_- + \frac{1}{\Lambda} \gamma^\mu D_\mu \tilde{m}^\dagger P_+ \right\} \right] + \mathcal{O} \left(\frac{1}{\Lambda} \right) \\
&\simeq \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{\Lambda^d}{2^d \pi^{\frac{d}{2}}} \text{Tr} \left[\exp \left\{ \left[\frac{1}{\Lambda^2} \frac{1}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu}^L - \tilde{m}^\dagger \tilde{m} \right] P_+ + \left[\frac{1}{\Lambda^2} \frac{1}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu}^R - \tilde{m} \tilde{m}^\dagger \right] P_- \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{\Lambda} \gamma^\mu D_\mu \tilde{m} P_+ - \frac{1}{\Lambda} \gamma^\mu D_\mu \tilde{m}^\dagger P_- \right\} - \exp \left\{ \left[\frac{1}{\Lambda^2} \frac{1}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu}^L - \tilde{m}^\dagger \tilde{m} \right] P_- \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left[\frac{1}{\Lambda^2} \frac{1}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu}^R - \tilde{m} \tilde{m}^\dagger \right] P_+ + \frac{1}{\Lambda} \gamma^\mu D_\mu \tilde{m} P_- + \frac{1}{\Lambda} \gamma^\mu D_\mu \tilde{m}^\dagger P_+ \right\} \right] \quad (\text{A.1.18})
\end{aligned}$$

このアノマリー (A.1.18) は微分形式を使って書くことが出来る。\$\text{Tr}[\gamma_5]\$ の計算で生き残るのは \$\gamma^\mu\$ が \$d\$ 個積を取る項のみで、この \$d\$ 個の足 \$\mu\$ は反対称になっていた。そのため、\$F_{\mu\nu}\$ などの \$\mu\$ の足は全て反対称に潰すことになり、微分形式で書けるようになる。これは \$U(1)_A\$ アノマリーが \$F \wedge F\$ の形で書けたのと同じ理由である。最終的に微分形式で書くことを目指すため、以下では \$x\$ 積分が入った \$\ln \mathcal{J}\$ を計算する。

\$\tilde{m}^\dagger \tilde{m} = \tilde{m} \tilde{m}^\dagger\$ を仮定し、これらは全ての他の場と可換であるとする、

$$\begin{aligned}
\ln \mathcal{J} &= -i \int d^d x \alpha(x) \mathcal{A}(x) \\
&\simeq -i \int d^d x \alpha(x) \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{\Lambda^d}{2^d \pi^{\frac{d}{2}}} \text{Tr} \left[\exp \left\{ \left[\frac{1}{\Lambda^2} \frac{1}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu}^L - \tilde{m}^\dagger \tilde{m} \right] P_+ \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left[\frac{1}{\Lambda^2} \frac{1}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu}^R - \tilde{m} \tilde{m}^\dagger \right] P_- - \frac{1}{\Lambda} \gamma^\mu D_\mu \tilde{m} P_+ - \frac{1}{\Lambda} \gamma^\mu D_\mu \tilde{m}^\dagger P_- \right\} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \exp \left\{ \left[\frac{1}{\Lambda^2} \frac{1}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu}^L - \tilde{m}^\dagger \tilde{m} \right] P_- + \left[\frac{1}{\Lambda^2} \frac{1}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu}^R - \tilde{m} \tilde{m}^\dagger \right] P_+ \right. \\
& \left. + \frac{1}{\Lambda} \gamma^\mu D_\mu \tilde{m} P_- + \frac{1}{\Lambda} \gamma^\mu D_\mu \tilde{m}^\dagger P_+ \right\} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{\Lambda} \right) \\
& = -i \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{\Lambda^d}{2^d \pi^{\frac{d}{2}}} \int d^d x \alpha(x) e^{-\tilde{m}^\dagger \tilde{m}} \text{Tr} \left[\exp \left\{ \left[\frac{1}{\Lambda^2} \frac{1}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu}^L \right] P_+ \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \left[\frac{1}{\Lambda^2} \frac{1}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu}^R \right] P_- - \frac{1}{\Lambda} \gamma^\mu D_\mu \tilde{m} P_+ - \frac{1}{\Lambda} \gamma^\mu D_\mu \tilde{m}^\dagger P_- \right\} \right. \\
& \quad \left. - \exp \left\{ \left[\frac{1}{\Lambda^2} \frac{1}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu}^L \right] P_- + \left[\frac{1}{\Lambda^2} \frac{1}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu}^R \right] P_+ \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{1}{\Lambda} \gamma^\mu D_\mu \tilde{m} P_- + \frac{1}{\Lambda} \gamma^\mu D_\mu \tilde{m}^\dagger P_+ \right\} \right] \\
& = -i \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{\Lambda^d}{2^d \pi^{\frac{d}{2}}} \int d^d x \alpha(x) e^{-\tilde{m}^\dagger \tilde{m}} \text{Tr} \left[\left(1 + \left\{ \frac{1}{4\Lambda^2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu}^L P_+ + \frac{1}{4\Lambda^2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu}^R P_- \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{1}{\Lambda} \gamma^\mu D_\mu \tilde{m} P_+ - \frac{1}{\Lambda} \gamma^\mu D_\mu \tilde{m}^\dagger P_- \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{4\Lambda^2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu}^L P_+ + \frac{1}{4\Lambda^2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu}^R P_- \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{1}{\Lambda} \gamma^\mu D_\mu \tilde{m} P_+ - \frac{1}{\Lambda} \gamma^\mu D_\mu \tilde{m}^\dagger P_- \right\}^2 + \dots \right) \\
& \quad - \left(1 + \left\{ \frac{1}{4\Lambda^2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu}^L P_- + \frac{1}{4\Lambda^2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu}^R P_+ + \frac{1}{\Lambda} \gamma^\mu D_\mu \tilde{m} P_- + \frac{1}{\Lambda} \gamma^\mu D_\mu \tilde{m}^\dagger P_+ \right\} \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{4\Lambda^2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu}^L P_- + \frac{1}{4\Lambda^2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu}^R P_+ + \frac{1}{\Lambda} \gamma^\mu D_\mu \tilde{m} P_- + \frac{1}{\Lambda} \gamma^\mu D_\mu \tilde{m}^\dagger P_+ \right\}^2 + \dots \right) \Big] \\
& = -i \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{\Lambda^d}{2^d \pi^{\frac{d}{2}}} \int d^d x \alpha(x) \text{Tr} \left[\frac{1}{\left(\frac{d}{2}\right)!} \left(\left\{ \frac{1}{4\Lambda^2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu}^L \right\}^{\frac{d}{2}} \gamma_5 - \left\{ \frac{1}{4\Lambda^2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu}^R \right\}^{\frac{d}{2}} \gamma_5 \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{\left(\frac{d}{2}+1\right)!} \left(\frac{1}{\Lambda} \gamma^\mu D_\mu \tilde{m} \frac{1}{\Lambda} \gamma^\nu D_\nu \tilde{m}^\dagger \left\{ \frac{1}{4\Lambda^2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu}^R \right\}^{\frac{d}{2}-1} (-\gamma_5) + \dots \right) + \dots \right] e^{-\tilde{m}^\dagger \tilde{m}} \\
& = -i \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{\Lambda^d}{2^d \pi^{\frac{d}{2}}} \int d^d x \alpha(x) \text{Tr} \left[\gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \dots \frac{1}{\Lambda^d} \left\{ \frac{1}{\left(\frac{d}{2}\right)!} \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{d}{2}} \left(F_{\mu\nu}^L F_{\rho\sigma}^L \dots - F_{\mu\nu}^R F_{\rho\sigma}^R \dots \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{1}{\left(\frac{d}{2}+1\right)!} \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{d}{2}-1} \left(-D_\mu \tilde{m} D_\nu \tilde{m}^\dagger F_{\rho\sigma}^R \dots + \dots \right) + \dots \right\} \right] e^{-\tilde{m}^\dagger \tilde{m}} \\
& = -\frac{i}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int d^d x \alpha(x) \text{tr} \left[i^{\frac{d}{2}} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma\dots} \left\{ \frac{1}{\left(\frac{d}{2}\right)!} \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{d}{2}} \left(F_{\mu\nu}^L F_{\rho\sigma}^L \dots - F_{\mu\nu}^R F_{\rho\sigma}^R \dots \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{1}{\left(\frac{d}{2}+1\right)!} \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{d}{2}-1} \left(-D_\mu \tilde{m} D_\nu \tilde{m}^\dagger F_{\rho\sigma}^R \dots + \dots \right) + \dots \right\} \right] e^{-\tilde{m}^\dagger \tilde{m}} \\
& = -i \left(\frac{i}{2\pi} \right)^{\frac{d}{2}} \int \alpha(x) \text{tr} \left[\left\{ \frac{1}{\left(\frac{d}{2}\right)!} \left(F^L \wedge F^L \wedge \dots - F^R \wedge F^R \wedge \dots \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{1}{\left(\frac{d}{2}+1\right)!} \left(-D\tilde{m} \wedge (D\tilde{m})^\dagger \wedge F^R \wedge \dots + \dots \right) + \dots \right\} \right] e^{-\tilde{m}^\dagger \tilde{m}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -i \left(\frac{i}{2\pi} \right)^{\frac{d}{2}} \int \alpha(x) \text{Str} \left[\left\{ \frac{1}{\left(\frac{d}{2}\right)!} \left(e^+ F^L \wedge F^L \wedge \dots + e^- F^R \wedge F^R \wedge \dots \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{\left(\frac{d}{2}+1\right)!} \left(e^+ (D\tilde{m})^\dagger \wedge D\tilde{m} \wedge F^L \wedge \dots + e^- D\tilde{m} \wedge (D\tilde{m})^\dagger \wedge F^R \wedge \dots + \dots \right) + \dots \right\} \right] e^{-\tilde{m}^\dagger \tilde{m}} \\
&= -i \left(\frac{i}{2\pi} \right)^{\frac{d}{2}} \int \alpha(x) \text{Str} \left[\left\{ \frac{1}{\left(\frac{d}{2}\right)!} \left((e^+ F^L) \wedge (e^+ F^L) \wedge \dots + (e^- F^R) \wedge (e^- F^R) \wedge \dots \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{\left(\frac{d}{2}+1\right)!} \left(\left\{ (D\tilde{m})^\dagger \wedge D\tilde{m} e^+ \right\} \wedge (e^+ F^L) \wedge \dots \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \left\{ D\tilde{m} \wedge (D\tilde{m})^\dagger e^- \right\} \wedge (e^- F^R) \wedge \dots + \dots \right) + \dots \right\} \right] e^{-\tilde{m}^\dagger \tilde{m}} \\
&= -i \left(\frac{i}{2\pi} \right)^{\frac{d}{2}} \int \alpha(x) \text{Str} \left[\left\{ \frac{1}{\left(\frac{d}{2}\right)!} \left((e^+ F^L) \wedge (e^+ F^L) \wedge \dots + (e^- F^R) \wedge (e^- F^R) \wedge \dots \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{\left(\frac{d}{2}+1\right)!} \left(\left\{ (D\tilde{m})^\dagger \wedge D\tilde{m} \sigma^+ \sigma^- \right\} \wedge (e^+ F^L) \wedge \dots \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \left\{ D\tilde{m} \wedge (D\tilde{m})^\dagger \sigma^- \sigma^+ \right\} \wedge (e^- F^R) \wedge \dots + \dots \right) + \dots \right\} \right] e^{-\tilde{m}^\dagger \tilde{m}} \\
&= -i \left(\frac{i}{2\pi} \right)^{\frac{d}{2}} \int \alpha(x) \text{Str} \left[\left\{ \frac{1}{\left(\frac{d}{2}\right)!} \left((e^+ F^L) \wedge (e^+ F^L) \wedge \dots + (e^- F^R) \wedge (e^- F^R) \wedge \dots \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{\left(\frac{d}{2}+1\right)!} \left(\left\{ - (D\tilde{m})^\dagger \sigma^+ \wedge D\tilde{m} \sigma^- \right\} \wedge (e^+ F^L) \wedge \dots \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \left\{ - D\tilde{m} \sigma^- \wedge (D\tilde{m})^\dagger \sigma^+ \right\} \wedge (e^- F^R) \wedge \dots + \dots \right) + \dots \right\} \right] e^{-\tilde{m}^\dagger \tilde{m}} \\
&= -i \left(\frac{i}{2\pi} \right)^{\frac{d}{2}} \int \alpha(x) \text{Str} \left[\left\{ \frac{1}{\left(\frac{d}{2}\right)!} \left((e^+ F^L) \wedge (e^+ F^L) \wedge \dots + (e^- F^R) \wedge (e^- F^R) \wedge \dots \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{\left(\frac{d}{2}+1\right)!} \left(\left\{ i(D\tilde{m})^\dagger \sigma^+ \wedge iD\tilde{m} \sigma^- \right\} \wedge (e^+ F^L) \wedge \dots \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \left\{ iD\tilde{m} \sigma^- \wedge i(D\tilde{m})^\dagger \sigma^+ \right\} \wedge (e^- F^R) \wedge \dots + \dots \right) + \dots \right\} \right] e^{-\tilde{m}^\dagger \tilde{m}} \\
&= -i \left(\frac{i}{2\pi} \right)^{\frac{d}{2}} \int \alpha(x) \text{Str} \left[\exp \begin{pmatrix} F^L - \tilde{m}^\dagger \tilde{m} & i(D\tilde{m})^\dagger \\ iD\tilde{m} & F^R - \tilde{m} \tilde{m}^\dagger \end{pmatrix} \right] \tag{A.1.19}
\end{aligned}$$

$$\equiv -i \left(\frac{i}{2\pi} \right)^{\frac{d}{2}} \int \alpha(x) \text{Str} [e^{\mathcal{F}}] \tag{A.1.20}$$

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} F^L - \tilde{m}^\dagger \tilde{m} & i(D\tilde{m})^\dagger \\ iD\tilde{m} & F^R - \tilde{m} \tilde{m}^\dagger \end{pmatrix} \tag{A.1.21}$$

Str は supertrace である。(A.1.19) 式の行列表示は、6.1.1 節で定義した $e^\pm$ 、 $\sigma^\pm$ を行列表示した場合の表記である。

ここで、(A.1.19) 式を見ると $\tilde{m}$ が入っていると分かる。しかし、 $\tilde{m} = m/\Lambda$ と定義したため $\tilde{m}$ の中に理論の cut-off として入れた Λ が入ってしまっている。 Λ は cut-off として入れただけなの

で、計算結果は $\Lambda \rightarrow \infty$ の極限を取り切った形として得られ、 Λ には依存しないはずである。実は、 $\tilde{m}$ は x 積分を実行してしまえば $\ln \mathcal{J}$ の中に残らないということを示すことが出来る。

3章の非可換アノマリーの場合の計算を思い出すと、 $U(1)_L$ アノマリーを求めた後に $U(N)_L$ アノマリーを求めるのは、パラメータ α を $U(N)_L$ のパラメータに変更すれば良いだけで良く、すぐに求められた。今の場合も同様に、 $U(1)_V$ アノマリーの表式 (A.1.20) から $U(N)_V$ アノマリーを求めるのは容易に出来る。 $U(N)_V$ のアノマリーは以下ようになる。

$$\ln \mathcal{J} = -i \left(\frac{i}{2\pi} \right)^{\frac{d}{2}} \int \text{Str} [\alpha(x) e^{\mathcal{F}}] \quad (\text{A.1.22})$$

ここで、 $\alpha = \alpha^a T^a$ は $U(N)_V$ のパラメータである。

同様に、背景 gauge 場を入れた $U(N)_L \times U(N)_R$ の対称性に対する 't Hooft アノマリーを求めることも可能である。この場合、変換パラメータ $\alpha(x)$ を $U(N)_L \times U(N)_R$ のパラメータにすれば良く、以下のように定義する。

$$\alpha(x) = \begin{pmatrix} \alpha_L(x) & 0 \\ 0 & \alpha_R(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_L^a T^a & 0 \\ 0 & \alpha_R^a T^a \end{pmatrix} \quad (\text{A.1.23})$$

ここで、 T^a は $U(N)$ の generator である。この $\alpha(x)$ を用いて $U(N)_L \times U(N)_R$ のアノマリーを書くと、以下ようになる。

$$\ln \mathcal{J} = -i \left(\frac{i}{2\pi} \right)^{\frac{d}{2}} \int \text{Str} [\alpha(x) e^{\mathcal{F}}] \quad (\text{A.1.24})$$

A.2 奇数次元

偶数次元の場合、 $U(N)_L \times U(N)_R$ 対称性を持った作用の $U(1)_V$ アノマリーを見出した。奇数次元、即ち d が奇数の場合は作用が持つ対称性は $U(N)$ だが、この理論が $U(1)$ アノマリーを持つことを見る。

計算は偶数次元の場合とほぼ同様に出来るが、chirality がないことに注意する。

Dirac 演算子 D は以下のような物である。

$$D = i\gamma^\mu D_\mu + M \quad (\text{A.2.1})$$

共変アノマリーを求めるため、 $D^\dagger D$ と $DD^\dagger$ を計算する。

$$\begin{aligned} D^\dagger D &= (i\gamma^\mu D_\mu + M)^\dagger (i\gamma^\mu D_\mu + M) \\ &= -\gamma^\mu \gamma^\nu D_\mu D_\nu + i\gamma^\mu D_\mu M + iM^\dagger \gamma^\mu D_\mu + M^\dagger M \\ &= -\eta^{\mu\nu} D_\mu D_\nu - \frac{1}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu} + i\gamma^\mu D_\mu M + iM^\dagger \gamma^\mu D_\mu + M^\dagger M \\ &= -\eta^{\mu\nu} D_\mu D_\nu - \frac{1}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu} - \gamma^\mu \left\{ (\partial_\mu m) + m \partial_\mu + A_\mu m \right\} + \gamma^\mu \left\{ m \partial_\mu + m A_\mu \right\} + m^\dagger m \\ &= -\eta^{\mu\nu} D_\mu D_\nu - \frac{1}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu} - \gamma^\mu D_\mu m + m^\dagger m \end{aligned} \quad (\text{A.2.2})$$

偶数次元の時と同様に、 $M = im$ として m を定義し、 m がエルミートである、即ち $m^\dagger = m$ を課した。 m に対する共変微分は以下のように定義。

$$D_\mu m \equiv (\partial_\mu m) + A_\mu m - m A_\mu = (\partial_\mu m) + [A_\mu, m] \quad (\text{A.2.3})$$

同様に $DD^\dagger$ も計算して、

$$\begin{aligned} DD^\dagger &= -\gamma^\mu \gamma^\nu D_\mu D_\nu + i\gamma^\mu D_\mu M^\dagger + iM\gamma^\mu D_\mu + MM^\dagger \\ &= -\eta^{\mu\nu} D_\mu D_\nu - \frac{1}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu} + i\gamma^\mu D_\mu M^\dagger + iM\gamma^\mu D_\mu + MM^\dagger \\ &= -\eta^{\mu\nu} D_\mu D_\nu - \frac{1}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu} + \gamma^\mu D_\mu m + mm^\dagger \end{aligned} \quad (\text{A.2.4})$$

(A.2.2)、(A.2.4) 式はそれぞれ偶数次元の時の (A.1.4)、(A.1.7) 式と似た形であることに注意。chirality 分の違いを除けば同じ形である。

これを用いて $\mathcal{A}$ を計算すると以下ようになる。(A.1.16) 式を元にして、適宜 (A.2.2)、(A.2.4) 式を代入すれば良い。

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x) &= \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \text{Tr} \left[e^{-ikx} \left\{ e^{-\frac{D^\dagger D}{\Lambda^2}} - e^{-\frac{D D^\dagger}{\Lambda^2}} \right\} e^{ikx} \right] \\ &= \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \text{Tr} \left[\exp \left\{ \frac{1}{\Lambda^2} \eta^{\mu\nu} (D_\mu + ik_\mu)(D_\nu + ik_\nu) + \frac{1}{4\Lambda^2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{\Lambda} \gamma^\mu (D_\mu + ik_\mu) \tilde{m} - \tilde{m}^\dagger \tilde{m} \right\} - \exp \left\{ \frac{1}{\Lambda^2} \eta^{\mu\nu} (D_\mu + ik_\mu)(D_\nu + ik_\nu) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{4\Lambda^2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu} - \frac{1}{\Lambda} \gamma^\mu (D_\mu + ik_\mu) \tilde{m} - \tilde{m} \tilde{m}^\dagger \right\} \right] \\ &= \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \Lambda^d \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-k_\mu k^\mu} \text{Tr} \left[\exp \left\{ \frac{1}{\Lambda^2} \eta^{\mu\nu} D_\mu D_\nu + \frac{2i}{\Lambda} \eta^{\mu\nu} D_\mu k_\nu + \frac{1}{4\Lambda^2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{\Lambda} \gamma^\mu D_\mu \tilde{m} - \tilde{m}^\dagger \tilde{m} \right\} - \exp \left\{ \frac{1}{\Lambda^2} \eta^{\mu\nu} D_\mu D_\nu + \frac{2i}{\Lambda} \eta^{\mu\nu} D_\mu k_\nu + \frac{1}{4\Lambda^2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{\Lambda} \gamma^\mu D_\mu \tilde{m} - \tilde{m}^\dagger \tilde{m} \right\} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.2.5})$$

偶数次元の時と同様に、 $\tilde{m}$ を以下のように定義した。

$$\tilde{m} \equiv \frac{1}{\Lambda} m \quad (\text{A.2.6})$$

$\frac{1}{\Lambda}$ 展開を実行する。偶数次元の時は射影演算子 $P_\pm$ の差から γ_5 が出たが、奇数次元では射影演算子がないので結果が異なる。(A.2.5) 式を良く見ると、第 1 項と第 2 項で異なるのは $\frac{1}{\Lambda} \gamma^\mu D_\mu \tilde{m}$ 項の符号のみである。よって、 $\frac{1}{\Lambda}$ 展開をした後に残るのは $\frac{1}{\Lambda} \gamma^\mu D_\mu \tilde{m}$ を奇数項含む項のみになる。また、 γ 行列に対するトレースも取るため、トレースを取った後に残るのは γ^μ を d 個以上含む項のみになる。この性質を用いると奇数次元の場合もアノマリーを微分形式を用いて表記することが可能になる。以下では、微分形式で記述するために x 積分も含む $\ln \mathcal{J}$ を計算する。

$$\begin{aligned}
\ln \mathcal{J} &= -i \int d^d x \alpha(x) \mathcal{A}(x) \\
&= -i \int d^d x \alpha(x) \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \Lambda^d \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-k_\mu k^\mu} \text{Tr} \left[\exp \left\{ \frac{1}{\Lambda^2} \eta^{\mu\nu} D_\mu D_\nu \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{2i}{\Lambda} \eta^{\mu\nu} D_\mu k_\nu + \frac{1}{4\Lambda^2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu} + \frac{1}{\Lambda} \gamma^\mu D_\mu \tilde{m} - \tilde{m}^\dagger \tilde{m} \right\} \right. \\
&\quad \left. - \exp \left\{ \frac{1}{\Lambda^2} \eta^{\mu\nu} D_\mu D_\nu + \frac{2i}{\Lambda} \eta^{\mu\nu} D_\mu k_\nu + \frac{1}{4\Lambda^2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu} - \frac{1}{\Lambda} \gamma^\mu D_\mu \tilde{m} - \tilde{m}^\dagger \tilde{m} \right\} \right] \\
&\simeq -i \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{\Lambda^d}{2d\pi^{\frac{d}{2}}} \int d^d x \alpha(x) \text{Tr} \left[\exp \left\{ \frac{1}{4\Lambda^2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu} + \frac{1}{\Lambda} \gamma^\mu D_\mu \tilde{m} - \tilde{m}^\dagger \tilde{m} \right\} \right. \\
&\quad \left. - \exp \left\{ \frac{1}{4\Lambda^2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu} - \frac{1}{\Lambda} \gamma^\mu D_\mu \tilde{m} - \tilde{m}^\dagger \tilde{m} \right\} \right] + \mathcal{O} \left(\frac{1}{\Lambda} \right) \\
&= -i \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{\Lambda^d}{2d\pi^{\frac{d}{2}}} \int d^d x \alpha(x) \text{Tr} \left[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\lambda \dots \frac{2}{\Lambda^d} \left\{ \frac{1}{\left(\frac{d+1}{2}\right)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{d-1}{2}} (D_\mu \tilde{m} F_{\nu\rho} F_{\sigma\lambda} \dots + \dots) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{\left(\frac{d+1}{2} + 1\right)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{d-1}{2}-1} ((D_\mu \tilde{m})(D_\nu \tilde{m})(D_\rho \tilde{m}) F_{\sigma\lambda} \dots + \dots) + \dots \right\} e^{-\tilde{m}^\dagger \tilde{m}} \right] + \mathcal{O} \left(\frac{1}{\Lambda} \right) \\
&= -\frac{i}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int d^d x \alpha(x) \text{tr} \left[\sqrt{2} i^{\frac{d-1}{2}} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma\lambda} \dots \left\{ \frac{1}{\left(\frac{d+1}{2}\right)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{d-1}{2}} ((D_\mu \tilde{m}) F_{\nu\rho} F_{\sigma\lambda} \dots + \dots) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{\left(\frac{d+1}{2} + 1\right)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{d-1}{2}-1} ((D_\mu \tilde{m})(D_\nu \tilde{m})(D_\rho \tilde{m}) F_{\sigma\lambda} \dots + \dots) + \dots \right\} e^{-\tilde{m}^\dagger \tilde{m}} \right] \\
&= -i \left(\frac{i}{2\pi} \right)^{\frac{d}{2}} \int \alpha(x) \text{tr} \left[-i\sqrt{2}i \left\{ \frac{1}{\left(\frac{d+1}{2}\right)!} ((D\tilde{m}) \wedge F \wedge F \dots + \dots) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{\left(\frac{d+1}{2} + 1\right)!} ((D\tilde{m}) \wedge ((D\tilde{m})^\dagger) \wedge (D\tilde{m}) \wedge F \dots + \dots) + \dots \right\} e^{-\tilde{m}^\dagger \tilde{m}} \right] \\
&= -i \left(\frac{i}{2\pi} \right)^{\frac{d}{2}} \int \alpha(x) \text{Str} \left[-i\sqrt{2}i \left\{ \frac{1}{\left(\frac{d+1}{2}\right)!} ((D\tilde{m}) \wedge F \wedge F \dots \sigma^- + \dots) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{\left(\frac{d+1}{2} + 1\right)!} ((D\tilde{m}) \wedge ((D\tilde{m})^\dagger) \wedge (D\tilde{m}) \wedge F \dots \sigma^- + \dots) + \dots \right\} e^{-\tilde{m}^\dagger \tilde{m}} \right] \\
&= -i \left(\frac{i}{2\pi} \right)^{\frac{d}{2}} \int \alpha(x) \text{Str} \left[-\sqrt{2}i \left\{ \frac{1}{\left(\frac{d+1}{2}\right)!} ((iD\tilde{m}\sigma^-) \wedge (e^+ F) \wedge F \dots + \dots) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{\left(\frac{d+1}{2} + 1\right)!} ((iD\tilde{m}\sigma^-) \wedge (i(D\tilde{m})^\dagger \sigma^+) \wedge (iD\tilde{m}\sigma^-) \wedge (e^+ F) \dots + \dots) + \dots \right\} e^{-\tilde{m}^\dagger \tilde{m}} \right] \\
&= -i \left(\frac{i}{2\pi} \right)^{\frac{d}{2}} \int \alpha(x) \text{Str} \left[\exp \left(\begin{array}{cc} F - \tilde{m}^\dagger \tilde{m} & i(D\tilde{m})^\dagger \\ iD\tilde{m} & F - \tilde{m} \tilde{m}^\dagger \end{array} \right) \right] \\
&= -i \left(\frac{i}{2\pi} \right)^{\frac{d}{2}} \int \alpha(x) \text{Str} [e^{\mathcal{F}}] \tag{A.2.7}
\end{aligned}$$

$$\mathcal{F} = \left(\begin{array}{cc} F - \tilde{m}^\dagger \tilde{m} & i(D\tilde{m})^\dagger \\ iD\tilde{m} & F - \tilde{m} \tilde{m}^\dagger \end{array} \right) \tag{A.2.8}$$

ここで、奇数次元の supertrace は以下のように定義されており、係数 $-\sqrt{2i} = i^{-\frac{3}{2}}\sqrt{2}$ は supertrace に書き換える際に吸収されている。

$$i^{\frac{3}{2}} \text{Str} \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \sqrt{2} \text{tr}(b) \quad (\text{A.2.9})$$

以上の計算より、奇数次元でも偶数次元の時と同様にアノマリーが出て、supertrace を使った形で書けることが分かった。

偶数次元の場合と同様に、この議論を $U(N)$ のアノマリーに拡張することは直ぐに出来、 $U(N)$ のアノマリーは以下ようになる。

$$\ln \mathcal{J} = -i \left(\frac{i}{2\pi} \right)^{\frac{d}{2}} \int \text{Str} [\alpha(x) e^{\mathcal{F}}] \quad (\text{A.2.10})$$

ここで、 $\alpha = \alpha^a T^a$ は $U(N)$ のパラメータである。この場合も、 $U(N)$ の背景 gauge 場を入れているため、この $U(N)$ アノマリーは't Hooft アノマリーである。

参考文献

- [1] C. Córdova, D. S. Freed, H. T. Lam and N. Seiberg, “Anomalies in the Space of Coupling Constants and Their Dynamical Applications I,” *SciPost Phys.* **8** (2020) no.1, 001 doi:10.21468/SciPostPhys.8.1.001 [arXiv:1905.09315 [hep-th]].
- [2] H. Kanno and S. Sugimoto, to appear.
- [3] G. ’t Hooft, “Naturalness, chiral symmetry, and spontaneous chiral symmetry breaking,” *NATO Sci. Ser. B* **59** (1980), 135-157 doi:10.1007/978-1-4684-7571-5_9
- [4] K. Fujikawa, “Path Integral Measure for Gauge Invariant Fermion Theories,” *Phys. Rev. Lett.* **42** (1979), 1195-1198
- [5] K. Fujikawa, “Path Integral for Gauge Theories with Fermions,” *Phys. Rev. D* **21** (1980), 2848 [erratum: *Phys. Rev. D* **22** (1980), 1499]
- [6] C. G. Callan, Jr. and J. A. Harvey, “Anomalies and Fermion Zero Modes on Strings and Domain Walls,” *Nucl. Phys. B* **250** (1985) 427.
- [7] 九後 汰一郎, “ゲージ場の量子論 I,II,” 培風館, 1989 年.
- [8] J. Polchinski, “String theory. Vol. 1: An introduction to the bosonic string,” doi:10.1017/CBO9780511816079
J. Polchinski, “String theory. Vol. 2: Superstring theory and beyond,” doi:10.1017/CBO9780511618123
- [9] 藤川 和男, “経路積分と対称性の量子的破れ,” 岩波書店, 2001 年.
K. Fujikawa and H. Suzuki, “Path integrals and quantum anomalies,” Oxford science publications, international series of monographs on physics 122.
- [10] R. A. Bertlmann, “Anomalies in quantum field theory,” Oxford science publications, international series of monographs on physics 91.
- [11] V. P. Nair, “Quantum field theory: A modern perspective,” Springer, New York, USA, 2005.
- [12] Y. Kikuchi, “’t Hooft anomaly, global inconsistency, and some of their applications,” doi:10.14989/doctor.k20902
- [13] 鈴木 博, “カイラルなゲージ理論の正則化,” 1999 年 三者若手夏の学校 講義ノート.
http://www2.yukawa.kyoto-u.ac.jp/~masashi.hamanaka/summer_school.pdf
- [14] H. Banerjee and R. Banerjee, “The Currents and the Anomalies in Chiral Gauge Theories: Dynamical Approach in Higher Dimensions,” *Phys. Lett. B* **174** (1986), 313-318

- [15] H. Banerjee, R. Banerjee and P. Mitra, “Covariant and Consistent Anomalies in Even Dimensional Chiral Gauge Theories,” *Z. Phys. C* **32** (1986), 445
- [16] W. A. Bardeen and B. Zumino, “Consistent and Covariant Anomalies in Gauge and Gravitational Theories,” *Nucl. Phys. B* **244** (1984), 421-453 doi:10.1016/0550-3213(84)90322-5
- [17] A. Sen, “NonBPS states and Branes in string theory,” [arXiv:hep-th/9904207 [hep-th]].
- [18] D. Kutasov, M. Marino and G. W. Moore, “Remarks on tachyon condensation in superstring field theory,” [arXiv:hep-th/0010108 [hep-th]].
- [19] P. Kraus and F. Larsen, “Boundary string field theory of the D anti-D system,” *Phys. Rev. D* **63** (2001), 106004 doi:10.1103/PhysRevD.63.106004 [arXiv:hep-th/0012198 [hep-th]].
- [20] T. Takayanagi, S. Terashima and T. Uesugi, “Brane - anti-brane action from boundary string field theory,” *JHEP* **03** (2001), 019 doi:10.1088/1126-6708/2001/03/019 [arXiv:hep-th/0012210 [hep-th]].
- [21] D. Quillen, “Superconnections and the Chern character,” *Topology* **24** (1985) no.1, 89-95
- [22] N. Berline, E. Getzler, M. Vergne, “Heat Kernels and Dirac Operators,” Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [23] H. Fukaya, T. Onogi and S. Yamaguchi, “Atiyah-Patodi-Singer index from the domain-wall fermion Dirac operator,” *Phys. Rev. D* **96** (2017) no.12, 125004 doi:10.1103/PhysRevD.96.125004 [arXiv:1710.03379 [hep-th]].
- [24] H. Fukaya, M. Furuta, S. Matsuo, T. Onogi, S. Yamaguchi and M. Yamashita, “The Atiyah–Patodi–Singer Index and Domain-Wall Fermion Dirac Operators,” *Commun. Math. Phys.* **380** (2020) no.3, 1295-1311 doi:10.1007/s00220-020-03806-0 [arXiv:1910.01987 [math.DG]].
- [25] J. A. Harvey, “TASI 2003 lectures on anomalies,” [arXiv:hep-th/0509097 [hep-th]].
- [26] A. Bilal, “Lectures on Anomalies,” [arXiv:0802.0634 [hep-th]].
- [27] M. Nakahara, “Geometry, topology and physics,” Taylor & Francis, Boca Raton, USA, 2003.