

## 1. はじめに

一般相対性理論は、重力を時空の曲がりとして捉え、基礎方程式を Riemann 幾何学の言葉で書くなど、提案当初から、微分幾何学に深く根ざした理論であった。このため、一般相対性理論の登場は、G. Ricci, T. Levi-Civita らがそれまで築き上げてきたテンソル解析という不変式論の一分野を一挙に数学の中心分野へと変化させるほどの影響を数学に与えた。以後も、一般相対性理論の研究は、豊かな数理的成果を上げ続けており、現在でも、大域的微分幾何学を中心として、数学の発展の大きな原動力となっている。本稿では、これらの一般相対性理論の数理的成果の中で特に特筆すべきものをいくつか選び、その概要を紹介し、さらに今後の展望にも触れる。

なお、本稿では、正の固有値が  $p$  個、負の固有値が  $q$  個となる計量をもつ擬 Euclidean 空間を  $E^{p,q}$  と表記する。この記号法では、4次元 Minkowski 時空は  $E^{3,1}$  と表される。また、特に断らない限り、自然単位系  $c = \hbar = 1$  を仮定する。

## 2. ゲージ原理との融合

一般相対性理論の影響で微分幾何学が数学の中心分野へと発展する上で重要な役割を果たしたのが、H. Weyl や E. Cartan である。特に、彼らは、1917年に Levi-Civita が導入した平行移動 (=接続) の概念に着目し、Riemann 幾何学を接続の幾何学として発展させた。これは、無限小解析に基礎をおく微分幾何学と対称性に基礎をおく F. Klein の幾何学という、一見大きく異なる2つの幾何学を融合させるものであった。その申し子として Cartan により導入されたホロノミー群の概念は、その後、微分幾何学の大域的な研究において中心的な役割を果たし、Calabi-Yau 多様体などの特殊ホロノミー群をもつ多様体と超弦理論・M理論の  $N = 1$  局所超対称性をもつコンパクト化の関連など、物理学でも重要な概念となっている。

この接続の概念は、最終的に C. Ehresmann の1950年の論文によりファイバー束を用いて現代的な形で一般的に定式化された。そのすぐ後、Einstein がなくなった1954年には、有名な非可換ゲージ理論のアイデアが C.N. Yang と R. Mills により発表されている。未発表ながら、W. Pauli や内山龍雄も同じ頃、類似のアイデアを得ていたようである。これら2つのアイデアは、その後密接に結びつき、指数定理、アノマーリー理論、Donaldson 理論など豊かな数学と物理の交流を生み出すこととなった。

## 3. なぜ、重力理論が幾何学と結びつくのか？

Einstein は、特殊相対性理論を重力を含む系に拡張する上で、等価原理を基礎においた。等価原理は「任意の時空点において適当な基準系（座標系）を選べばその点において重力を微局的<sup>1</sup>に消去できる」ことを要求するが、この重力が消去された微局所慣性系（無限個存在する）に限定すれば特殊相対性理論が成立することを要請しようというわけである。すると自然な帰結として、「本質的」重力場が存在するとき、有限の広がりをもつ局所慣性系は存在せず、物理法則を一般的な座標系を用いて記述することが要求されるが、この一般座標系では光速はもはや一定でなくなる。そこで、この場所や方向により異なる光速を記述する量が必要となる。

Einstein はそのような量として、微局所慣性系の Minkowski 計量に着目した。特殊相対性理論において中心的な役割を果たすこの計量は、Lorentz 変換で不変であるため、同一時空点 P での微局所慣性座標系  $X_P^a (a = 0, 1, 2, 3, 4)$  の取り方に依存しない。この計量  $ds^2 = \eta_{ab} dX_P^a dX_P^b$  を一般座標系で表すと、

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu; \quad g_{\mu\nu}(P) = \eta_{ab} \frac{\partial X_P^a}{\partial x^\mu} \frac{\partial X_P^b}{\partial x^\nu} \quad (1)$$

により、各時空点での一般的な計量が定義される。その構成法から、各時空点での光の伝搬方向  $(dt, dx^i)$  は  $ds^2 = 0$  により決まるので、計量によって座標速度  $dx^i/dt = vn^i$  が時空点 P と伝搬方向  $n^i$  の関数として一意的に決定される。

重力場が存在する場合の物理法則を、局所的な特殊相対性理論の貼り合わせとして捉える以上の考え方は、Riemann 幾何学を局所的な Euclidean 幾何学の貼り合わせして捉える Riemann の思想を物理学に適用したもので、一般相対性理論が幾何学的色彩を帯びる最大の要因となっている。自由粒子の時空軌跡が上で導入した時空計量に関する測地線となるのも、その現れの一つである。

もちろん、本質的重力場が存在しない Minkowski 時空でも、一般の座標系では見かけ上非自明な計量が現れる。これは（一般に非一様な）加速運動による光速の変化を表すが、重力場をその源と結びつけるには、このような運動学的効果を取り除く方法が必要となる。その一つが、曲率テンソルを用いることである。その基礎となる Riemann 曲率テンソルは、座標系に相対的な重力場の強さを表す Christoffel 記号

$$\Gamma_{\nu\lambda}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} (\partial_\nu g_{\lambda\alpha} + \partial_\lambda g_{\nu\alpha} - \partial_\alpha g_{\nu\lambda}) \quad (2)$$

<sup>1</sup>無限小の領域で成り立つことを以下「微局所的」と呼ぶことにする。

を用いて,

$$R^{\mu}{}_{\nu\lambda\sigma} = \partial_{\lambda}\Gamma^{\mu}_{\sigma\nu} - \partial_{\sigma}\Gamma^{\mu}_{\lambda\nu} + \Gamma^{\mu}_{\lambda\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\sigma\nu} - \Gamma^{\mu}_{\sigma\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\lambda\nu} \quad (3)$$

により定義される 4 階テンソルである.

#### 4. 因果構造

すでに述べたように, Riemann 幾何学は Euclidean 幾何学の局所化として誕生した. このため, 計量は正定値のもののみを考える. これに対して, 一般相対性理論で現れる計量は, Minkowski 計量と同じく, 時間に対応する方向が負となる不定符号計量となっている. この違いは, 時空の幾何学に因果構造という Riemann 幾何学にはない構造をもたらす. この問題は, 1965 年から 1970 年頃にかけて, R. Penrose, R.P. Geroch, E.H. Kronheimer, H.J. Seifert, B. Carter らにより詳しく研究された. その成果は, S.W. Hawking と G.F.R. Ellis による有名な教科書<sup>1)</sup> にまとめられている.

もちろん, 局所的な状況は Minkowski 時空と全く同じで, 条件  $ds^2 = 0$  により決まる各点 P の光円錐により, 点 P の接ベクトル  $V$  は時間的 ( $V \cdot V < 0$ ), 空間的 ( $V \cdot V > 0$ ), 光的 ( $V \cdot V = 0$ ) の 3 つに分類され, さらに時間的ベクトルと光的ベクトルは, 未来向きと過去向きに分類される. これらの分類に対応して, 時空の曲線は各点での接ベクトルの向きにより, 時間的, 光的, 因果的 (=時間的ないし光的), 空間的などと分類される.

しかし, 大域的な観点からは, 多様な新たな構造が現れる. その一つが, 因果律の破れである. 例えば, 負の宇宙定数  $\Lambda = -n(n-1)/(2\ell^2)$  をもつ Einstein 方程式の定常真空解である  $n+1$  次元反 de Sitter 時空

$$\text{adS}^{n+1}: \quad ds^2 = -(r^2 + \ell^2)dt^2 + \frac{dr^2}{r^2 + \ell^2} + r^2 d\Omega_{n-1}^2 \quad (4)$$

は, 写像

$$(T, S) = (r^2 + \ell^2)^{1/2}(\cos t, \sin t), \quad X^i = r\Omega^i$$

( $\Omega \cdot \Omega = 1$ ) により, 計量  $ds^2 = -dT^2 - dS^2 + dX_1^2 + \dots + dX_n^2$  をもつ  $(n+2)$  次元擬 Euclidean 空間  $E^{n,2}$  の中に, 2 次曲面

$$\Sigma: -T^2 - S^2 + X_1^2 + \dots + X_n^2 = -\ell^2 \quad (5)$$

として埋め込むことができる. この時空では  $X^i = \text{一定}$  となる閉曲線が至るところ時間的となる. すなわち, 未来向きに出た曲線が有限な時間で過去から元の時空点に戻ってくる. この様な曲線は時間的閉曲線と呼ばれるが, 明らかに因果律を破っている. この例は, 普遍被覆空間を考えることにより因果律の破れをなくすることができるが, 一般相対性理論では, このような位相的处理では取り除けない因果的閉曲線がしばしば現れる. この点に着目し, どのよ

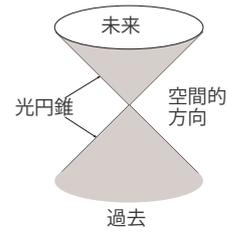


図 1: 局所的な因果構造

うな状況で因果的閉曲線が現れるのか, また因果律の破れた領域 (タイムマシン) を生成する方法はないかなどの問題を積極的に研究する分野もあるが<sup>2, 3, 4)</sup>, 多くの研究では, これらの因果律の破れが現れないこと (因果性条件) を前提として要請することが多い.

最もよく用いられる条件は, Cauchy 面の存在である. 正確にはこの条件は次のように, 定義される. まず, 時空  $\mathcal{M}$  内の超曲面  $\Sigma$  に対し, その点を通過するすべての延長不可能な過去向き因果的曲線が  $\Sigma$  と交わるような点の全体  $D^+(\Sigma)$  を未来の依存領域という. 同様に, 過去向きの代わりに未来向きの曲線を考えることにより, 過去の依存領域  $D^-(\Sigma)$  が定義される.  $\mathcal{M} = D(\Sigma) \equiv D^+(\Sigma) \cup D^-(\Sigma)$  となるとき,  $\Sigma$  を  $\mathcal{M}$  の Cauchy 面と呼ぶ. Cauchy 面の存在する時空は,  $\mathbb{R} \times \Sigma$  と同相になり, 因果的には非常に単純な構造を持つ. 以下, Cauchy 面の存在するとき, 時空は大域的に双曲的 (globally hyperbolic) であるということにする.

#### 5. 時空の端

時空の大域的因果構造に関する研究の大きな成果は, 「時空の端」に豊かな構造があることを発見したことである. もちろん, 時空の「端点」なるものは実在しないが, 集合論的に仮想端点を定義することができる.

それを説明するために, いくつか記号を用意する. まず, 時空  $\mathcal{M}$  において, 集合  $S$  の点から未来向きの時間的曲線により到達できる点の全体を  $I^+(S)$ , 因果的曲線により到達できる点の全体を  $J^+(S)$  と表す. また, 未来向きを過去向きに変えた場合の集合を  $I^-(S)$ ,  $J^-(S)$  と表す. これらは,  $S$  の因果的 (時間的) 未来および因果的 (時間的) 過去の大域的バージョンである. 特に,  $S$  が一点  $p$  からなるとき,  $J^+(p) - I^+(p)$  と  $J^-(p) - I^-(p)$  は, それぞれ,  $p$  の未来の光円錐と過去の光円錐に相当する.

$W = I^-(S)$  は,  $I^-(W) \subset W$  という条件を満たす開集合であるが, この条件を満たす開集合は過去集合と呼ばれる. 過去集合の中で,  $I^-(p)$  は, 2 つの異なる過去集合の和として表すことができないという特徴をもつ. この特徴をもつ

<sup>2</sup>興味深い例としては, Thorne らの提案したブラックホール連星を用いたタイムマシンがある<sup>5)</sup>. この例では, ブラックホールが内部でワームホールによりつながることにより, 時間的閉曲線を生み出しているが, この構造を安定に保つには負のエネルギーを持った物質が必要となる.

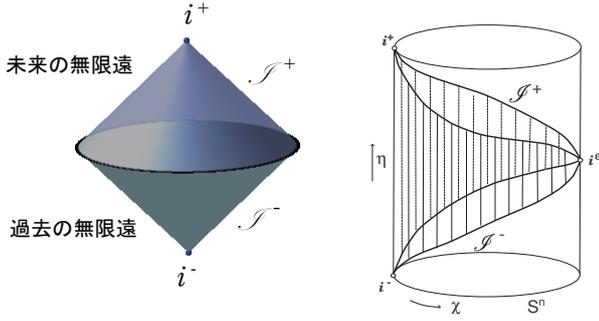


図 2: Minkowski 時空の無限遠と静的 Einstein 宇宙への埋め込み

集合を既約過去集合 (indecomposable past set) と呼ぶ。既約過去集合は、時空点を集合の因果的性質で特徴づけるものであるが、一般に、適当な時空  $p$  を用いて  $W \subset I^-(p)$  と表されないもの (終端既約過去集合) が存在する。このような既約過去集合に仮想的な「頂点」を付与して、それを時空の (未来の) 端点と見なそうというのが基本的なアイデアである。一般に、すべての終端既約過去集合  $W$  は、適当な未来に延長不可能な時間的曲線  $\gamma$  を用いて  $W = I^-(\gamma)$  と表されることが示される<sup>1)</sup>。同様に、未来集合、既約未来集合を用いると、時空の過去の端点が定義される。

例えば、4次元 Minkowski 時空  $\mathcal{M}$  での端点を持たない時間的直線  $\gamma$  に対して、 $W = I^-(\gamma)$  は常に時空全体と一致するので終端既約過去集合となり、時空の時間的未來の端点  $i^+$  を定義する。また、原点を通過する未来に端点を持たない光的直線  $\gamma$  に対して、 $W = I^-(\gamma)$  は原点を通過する時刻と光線の方向で一意的に決まるので、対応する未來の端点の全体  $\mathcal{I}^+$  は 3次元面  $\mathbb{R} \times S^2$  と同相になる。これらは全体として、未來の無限遠を定義する。同様に、既約未来集合より、時間的過去の端点  $i^-$ 、過去の光的無限遠  $\mathcal{I}^-$  が定義される (図 2 左)。

## 6. 共形的無限遠

このような無限遠の構成法は、Minkowski 時空では比較的容易に実行できるが、より複雑な時空では実用的でない。実は、より実用的な無限遠の構成法が、すでに 1964 年に Penrose により提案されていた<sup>6)</sup>。Weyl 変換  $g_{\mu\nu} \rightarrow \Omega^2 g_{\mu\nu}$  は、 $\Omega$  が定数でなくても光円錐の構造を変えない。この点に着目し、時空全体  $(\mathcal{M}, g)$  を別の時空  $(\hat{\mathcal{M}}, \hat{g})$  の有界領域に共形写像  $f: \mathcal{M} \rightarrow \hat{\mathcal{M}}$ 、すなわち

$$C1: \hat{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 f_* g_{\mu\nu} \quad (\Omega > 0)$$

を満たす写像で埋め込むことができれば、 $\mathcal{M}$  の無限遠はその像  $f(\mathcal{M})$  の  $\hat{\mathcal{M}}$  での境界  $\partial\mathcal{M} = \overline{f(\mathcal{M})} - f(\mathcal{M})$  として実体化されるというのが、基本的なアイデアである。ただし、無限遠であることを保証するために、次の条件を加える必要がある：

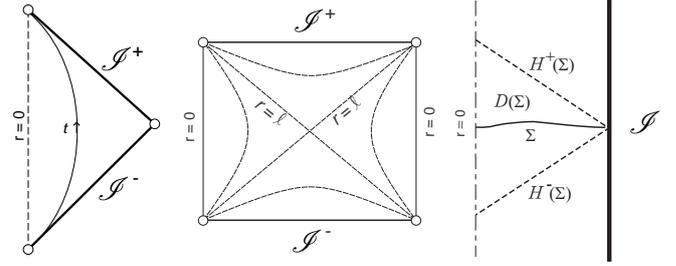


図 3 定曲率時空の Penrose 図式。左から順に、Minkowski 時空、de Sitter 時空、反 de Sitter 時空。

C2:  $\partial\mathcal{M}$  上で、 $\Omega = 0$  かつ  $d\Omega \neq 0$ 。

このようにして定義される無限遠は共形的無限遠と呼ばれる。

例えば、極座標表示での  $(n+1)$  次元 Minkowski 計量  $ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega_{n-1}^2$  は、

$$\frac{t-r}{2} = \tan \frac{\eta-\chi}{2}, \quad \frac{t+r}{2} = \tan \frac{\eta+\chi}{2} \quad (6)$$

と座標変換すると

$$ds^2 = \Omega^{-2} \hat{ds}^2 : \hat{ds}^2 = -d\eta^2 + d\chi^2 + \sin^2 \chi d\Omega_{n-1}^2, \\ \Omega = \cos\left(\frac{\eta-\chi}{2}\right) \cos\left(\frac{\eta+\chi}{2}\right) \quad (7)$$

と表される。ここで、 $\hat{ds}^2$  はちょうど、静的 Einstein 宇宙  $\hat{\mathcal{M}} \cong \mathbb{R} \times S^n$  の計量と一致するので<sup>3)</sup>、この変換により、Minkowski 時空全体が静的 Einstein 宇宙のコンパクト領域  $\chi - \pi \leq \eta \leq \pi - \chi$  ( $\chi \geq 0$ ) に埋め込まれ、その境界で  $\Omega = 0$  となる (図 2 の右)。ただし、 $d\Omega \neq 0$  となるのは、 $\chi \neq 0, \pi$  の部分なので、角度座標も考慮すると、 $\partial\mathcal{M}$  は、それぞれ  $\mathbb{R} \times S^{n-1}$  に同相な 2 つの連結成分からなる。これらは、ちょうど、終端既約因果集合により抽象的に定義した光的無限遠  $\mathcal{I}^\pm$  (図 2) に対応する。また、 $(\eta, \chi) = (\pm\pi, \pi)$  が時間的無限遠点  $i^\pm$  を実現する。

この埋め込みでは、 $f(\mathcal{M})$  の境界として、 $(\eta, \chi) = (0, \pi)$  に対応するもう余分な点  $i^0$  が現れる。この点は、時空内部から (漸近的に) 空間的曲線でしか到達できないので、上で定義した因果境界には含まれないので、空間的無限遠点と呼ばれる。ただし、この点は共形埋め込みでは  $d\Omega = 0$  となる特異点なので、その姿は埋め込みに依存する。

以上の共形埋め込みにおいて、角度座標が一定に対応する 2次元部分を図示したものはしばしば Penrose 図式と呼ばれる。図 3 の左端の図が、Minkowski 時空の Penrose 図式である。もとの  $(n+1)$  次元時空は、この 2次元図を底空間として、その各点に場所に依存した半径の球面  $S^{n-1}$  をファイバーとして付与したファイバー空間と見なされる。

定曲率時空である de Sitter 時空  $dS^{n+1}$  や反 de Sitter 時空  $adS^{n+1}$  も、Minkowski 時空と局所的に共形なので、同

<sup>3)</sup>Einstein は、宇宙膨張を止めるために宇宙定数を導入し、この解を得た。4次元時空の場合、 $\Lambda = 4\pi G\rho =$  一定の関係が成立する。

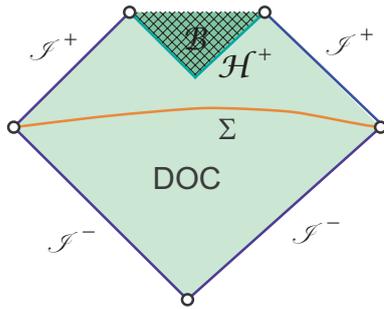


図 4: 漸近的に平坦なブラックホール時空の 2 次元断面

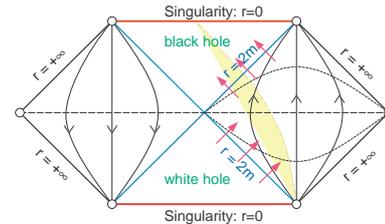


図 5: Schwarzschild ブラックホールの極大 Penrose 図式

じく静的 Einstein 宇宙の部分領域に共形的に埋め込むことができる。それにより得られる Penrose 図式が図 3 の右 2 つである。上の座標系を用いると、de Sitter 時空  $dS^{n+1}$  は  $|\eta| < \pi/2$  に、反 de Sitter 時空  $adS^{n+1}$  は  $0 \leq \chi < \pi/2$  に埋め込まれる。したがって、 $dS^{n+1} \cong \mathbb{R} \times S^n$  で、その境界は  $S^n$  に同相な 2 つの空間的面  $\mathcal{I}^\pm$  からなる。一方、 $adS^{n+1} \cong \mathbb{R} \times D^n$  なので、その境界は  $\mathbb{R} \times S^{n-1}$  に同相な時間的面  $\mathcal{I}$  となる。

Penrose による共形的無限遠の定義の優れたところは、無限遠の構造やその近傍の漸近構造の解析を具体的にを行うことが可能となったことである。例えば、上で定曲率時空の場合に見た宇宙定数の符号と無限遠の構造の対応は、実は一般的であることが示される。特に、宇宙定数が負の場合は、物質（場）が十分局在している場合、無限遠は常に時間的な超曲面（と 2 個の時間的無限遠点  $i^\pm$ ）となる。これは、この時空に Cauchy 面が存在せず、未来の時間発展を決定するには、初期面での情報以外に、境界にあたる無限遠  $\mathcal{I}$  での境界条件が必要となることを意味している。この構造は、近年盛んに研究されている adS/CFT 対応や類似の双対性の議論の基礎となっている（詳細については、本特集の大栗氏の解説参照）。

この無限遠構造の一般的分類に基づいて、共形無限遠の構造が、Minkowski 時空、de Sitter 時空、反 de Sitter 時空の無限遠と同一の構造を持つ時空は、それぞれ漸近的に平坦、漸近的に de Sitter 的、漸近的に反 de Sitter 的であるという。

## 7. ブラックホール

この無限遠の定義を基礎として、ブラックホールが定義される。まず、2 つの光的無限遠をもつ漸近的に平坦な時空  $\mathcal{M}$  では、天体から十分離れた観測者に情報が伝わる時空領域は  $J^-(\mathcal{I}^+, \hat{\mathcal{M}})$  と一致するので、その外は観測者には見えない時空領域となる。そこで、この領域のうち  $\mathcal{I}^-$  から影響の及ぶ部分  $\mathcal{B} = (\mathcal{M} - J^-(\mathcal{I}^+, \hat{\mathcal{M}})) \cap J^+(\mathcal{I}^-, \hat{\mathcal{M}})$  をブラックホール領域、その境界  $\mathcal{H}^+ = \dot{J}^-(\mathcal{I}^+, \hat{\mathcal{M}}) \cap J^+(\mathcal{I}^-, \hat{\mathcal{M}})$  を未来の事象の地平線（以下ホライズン）と定義する（図 4）。また、 $\mathcal{I}^+$  から観測可能でかつ  $\mathcal{I}^-$  からの情報が

伝わる領域  $J^-(\mathcal{I}^+, \hat{\mathcal{M}}) \cap J^+(\mathcal{I}^-, \hat{\mathcal{M}})$  は DOC (domain of outer communication) と呼ばれる。ブラックホールが重力崩壊で作られる場合には、外部に特異点がなければ  $\text{DOC} = J^-(\mathcal{I}^+, \hat{\mathcal{M}})$  となるが、解析的に極大に拡張された Schwarzschild 解の表す時空では、ホワイトホール領域が存在し  $\mathcal{M} - J^+(\mathcal{I}^-, \hat{\mathcal{M}}) \neq \emptyset$  となるので、DOC は  $J^-(\mathcal{I}^+, \hat{\mathcal{M}})$  の一部となる（図 5）。実際の天体の重力崩壊では、この図の橙色の部分が星の内部と対応し、その左側の領域は存在しない。

ブラックホールは、1965 年に銀河 1 個分の明るさをもつ点状天体 QSO が発見され、その活動源の最有力候補として宇宙における実在性が高まって以降、重力崩壊の終状態の問題と共に数理的な側面からも活発に研究されるようになった。この研究で非常に重要な役割を果たしたのが、測地線束方程式、すなわち近傍の測地線間の相対運動を記述する方程式である。

空間的 2 次元面を通過する光的測地線の集まりが織りなす 3 次元の超曲面を  $\mathcal{N}$  とする。基準となる測地線  $\gamma$  を一つ選ぶとき、 $\mathcal{N}$  の中で  $\gamma$  の近傍の 2 次元測地線集合の垂直断面積  $A$  は、次の Raychaudhuri 方程式に従う：

$$\frac{d}{dv} \theta + \frac{1}{2} \theta^2 = -R_{\mu\nu} k^\mu k^\nu - 2\sigma^2 + 2\omega^2. \quad (8)$$

ここで、 $v$  はアフィンパラメータ、 $k^\mu = dx^\mu/dv$  は各測地線の接ベクトル、 $\theta = (dA/dv)/A = \nabla_\mu k^\mu$  は面積増大率、 $2\sigma^2 = \nabla_{[\mu} k_{\nu]} \nabla^{\mu} k^{\nu]} - (1/2)\theta^2$  と  $2\omega^2 = \nabla_{[\mu} k_{\nu]} \nabla^{\mu} k^{\nu]}$  は、それぞれ垂直断面の等積的な形状の変形率および回転率を表す。特に、光的測地線束が同じ点を通過する場合や空間的 2 次元面に直交する場合には、 $\mathcal{N}$  は光的超曲面で、 $\omega = 0$  となる。

Raychaudhuri 方程式において、物理法則が関与するのは  $R_{\mu\nu} k^\mu k^\nu$  の項のみであり、この項が正なら、光線間の相対距離は光波面の面積が減少する側に加速される。そこで、任意の光的ベクトルに対して  $R_{\mu\nu} k^\mu k^\nu \geq 0$  となるとき、光収束条件が成り立つという。これは重力が引力として作用することを意味する。Einstein 方程式が成り立つとき、この条件は  $T_{\mu\nu} k^\mu k^\nu \geq 0$  となり、エネルギー運動量テンソル  $T_\nu^\mu$  が固有値  $[-\rho, P_1, P_2, P_3]$  を持つ時には  $\rho + P_I \geq 0$  ( $I = 1, 2, 3$ ) と同等となる。

Minkowski 時空では、閉じた空間的 2 次元面を垂直に通

過する光線束は外向きのものと内向きのものが存在し、対応する面積増大率  $\theta$  は前者では正、後者では負となる。しかし、強い重力源を囲む 2 次元面ではいずれも負、すなわち外向きに「広がる」光波面の面積も減少することが起きる。このような 2 次元面は捕捉面捕捉面 (trapped surface) と呼ばれる。

ブラックホールの境界であるホライズンは未来の無限遠を基準として定義されるため、無限の未来までの情報に依存する大域的な概念で、原理的には有限な時刻での観測では決まらない。しかし、上の Raychaudhuri 方程式を用いると、この判定問題を緩和してくれる次の有名な定理が得られる<sup>1)</sup>:

**【定理 7.1】** 漸近的に平坦で大域的に双曲的時空  $\mathcal{M} = D(\Sigma)$  において、光的収束条件が成り立ち、DOC に特異点がないとすると、閉捕捉面はホライズンの中に含まれる。 □

捕捉面の概念は局所的なので、この定理は、ブラックホールの存在を局所的に判定する方法を提供する。

2 次元面  $\mathcal{S}$  に垂直な光的測地線束が収束的、すなわち  $\theta < 0$  となっているとき、Raychaudhuri 方程式より、含まれる測地線  $\gamma$  が完備なら、有限な  $v$  で  $\theta = -\infty$  となることが示される。この点は、 $\mathcal{S}$  の  $\gamma$  にそう共役点と呼ばれる。共役点は、 $\gamma$  の無限小近傍の測地線が一点に集まる点であるが、 $\gamma$  のこの点より先の部分は  $I^+(\mathcal{S})$  に含まれることが示される。この事実が上の定理の証明の味噌となるが、同様の論理でホライズンを織りなす光的測地線が常に  $\hat{J}^-(\mathcal{S}^+, \hat{M})$  の境界にとどまり共役点を持たないことより、次のホライズンの面積増大則が示される<sup>1)</sup>:

**【定理 7.2 (ブラックホール面積増大則)】** ホライズン上および外に特異点がなく、光的収束条件が成り立つなら、ブラックホールの面積は決して減少しない。 □

この定理は、ブラックホール熱力学においてブラックホール面積にエントロピーとしての解釈を与える根拠の一つとなっている。また、ホライズンを生成する光的測地線が終点を持たないことから、ブラックホールの位相変化についての次の有名な定理が容易に導かれる<sup>1)</sup>:

**【定理 7.3 (ブラックホール不分裂定理)】** ホライズン上および DOC に特異点がないなら、ブラックホールは合体はできるが分裂はしない。 □

## 8. 特異点定理

もう一度、因果的集合による時空の端の議論に戻ると、一般に、終端既約過去集合にはこれまで議論した無限遠とは異なるタイプのものが存在する。例えば、Minkowski 時空  $E^{n,1}$  から時空の原点  $O$  を除いた時空  $\mathcal{M} = E^{n,1} - \{O\}$ 、

$E^{n,1}$  での既約過去集合  $W = I^-(O)$  は  $\mathcal{M}$  に含まれる既約過去集合でもあるが、 $O$  が  $\mathcal{M}$  に含まれないので、 $W$  は  $\mathcal{M}$  の終端既約過去集合となる。ただし、この集合は「有限な長さ」の曲線  $\gamma$  を用いて  $W = I^-(\gamma)$  と表されるが、無限遠に対応する終端既約過去集合はこのような表示ができない。そこで、終端既約過去集合に対応する時空端点を、それが有限な長さの曲線に到達できるものとできないものに分類し、後者を未来の無限遠点、前者を未来の特異点と呼ぶ。同様に、終端既約未来集合に対して、過去の無限遠点と過去の特異点が定義される。もちろん、今の例は人為的で、穴を埋めれば特異点は消滅する。このような時空の部分切除による特異性を避けるため、特異点の議論では、通常、極大な時空に拡張して考える。ただし、一般に、このような拡張は一意的ではない。

圧力もエネルギー密度も非負の一般等方な膨張宇宙解や Schwarzschild ブラックホール解など非自明な厳密解では、ある座標点で曲率が発散する。これらの特異性はその点で時空構造が破綻することを意味するので、その座標点は時空から排除される。すると、そこは今定義した意味での特異点となる。そこで、一般相対性理論誕生間もない頃から、時空特異点の発生は、対称性などの特殊性に起因するのか、それとも一般的なものなのかが問題となっていた。この問題に、一般的な解答を与えたのが、1965 年から 1970 年にかけての Geroch, Penrose, Hawking らの研究である。

彼らの成果は Hawking-Ellis の教科書<sup>1)</sup> に 4 個の特異点定理としてまとめられているが、いずれも、「引力条件、因果性条件 (ないしそれに代わるもの)、強重力条件の 3 つの条件が成り立つと、時空が測地的に完備でない」ことを主張する内容になっている。ここで、引力条件とは重力が引力として作用することを保証する条件で、すでに説明した光的収束条件と任意の時間的ベクトル  $V$  に対して  $R_{\mu\nu}V^\mu V^\nu \geq 0$  を要求する時間的収束条件 (timelike convergence condition) の 2 種がある<sup>4</sup>。前者は後者より弱い条件である。特異点定理は Einstein 方程式を仮定しておらず、純粋に幾何学的定理であるが、Einstein 方程式を仮定すると、この条件は宇宙項を含めたエネルギー運動量テンソルに対する条件となる。例えば、エネルギー運動量テンソルが対角化可能な場合、時間的収束条件は、エネルギー密度  $\rho$  と圧力固有値  $P_I$  に対し  $\rho + \sum_I P_I \geq 0$  かつ  $\rho + P_I \geq 0 (\forall I)$  が成り立つことと同等である。 $\rho \geq 0$  で圧力が等方的な場合には、2 番目の不等式は 1 番目のものから導かれる。逆に、この条件が成り立たないと重力は斥力的になり、インフレーションなどの加速膨張を引き起こす。

次に、強重力条件は文字通り、重力場が十分強い領域が

<sup>4</sup>ただし、一つの定理では、Ricci テンソルがゼロとなる領域がある場合は、さらに Riemann テンソルの代数的構造が一般的であることを要求する

あることを表す条件であるが、大まかには捕捉面か過去向き捕捉点 (past trapped point) の存在を要求する条件となっている。ここで、点  $P$  が過去向きの捕捉点であるとは、 $P$  から過去向き出た光の光波面の面積が有限な時間（正確にはアフィンパラメータ）で至る所局所的に減少することを意味する。すなわち、 $P$  を頂点として過去向きに広がった光円錐が有限な時間で再び縮み始めるという条件である。

最後に、測地的に完備 (geodesically complete) とは、すべての測地線がアフィンパラメータに関して無限に延長可能であることを意味する。したがって、例えば、未来向きの時間的測地線に関して完備でない場合には、アフィンパラメータの値が有限であるにもかかわらずそれ以上延ばせない未来向きの時間的測地線  $\gamma$  が存在することを意味する。この場合、 $I^-(\gamma)$  は終端型既約過去集合となり、未来の特異点が存在することになる。

例えば、次の定理は、重力崩壊によりブラックホールができると、必ず特異点も生成されることを意味している。ただし、「特異点の場所」については何の情報も与えない。

**【定理 8.1 (Penrose 1965)】** 次の条件が成り立つと、時空は光的測地線に関して完備でない：

- (1) 光的収束条件.
- (2) 非コンパクトな Cauchy 面の存在.
- (3) 閉捕捉面の存在.

□

また、次の定理から、もし宇宙初期でも物質のエネルギー密度や圧力が非負だとすると、我々の宇宙には特異点が存在することが導かれる。ただし、この定理だけからは、それが未来にあるのか過去にあるのかは結論できない。

**【定理 8.2 (Hawking, Penrose 1970)】** 次の条件が成り立つと、時空は時間的ないし光的測地線に関して不完備：

- (1) 時間的収束条件と曲率テンソルに対する一般性条件.
- (2) 時間的閉曲線の非存在.
- (3) 過去向きの捕捉点, 閉捕捉面, 非時間的なコンパクト閉部分多様体のいずれかが存在.

□

これらの定理は、その後、収束条件を測地線に沿う  $R_{\mu\nu}V^{\mu}V^{\nu}$  の積分に対する条件に緩めるなどの拡張がなされた<sup>7, 8)</sup>。

## 9. 特異点の分類

特異点定理は、星の重力崩壊や宇宙初期など重力の強い領域では不可避的に特異点が発生することを示唆するが、それがどのような物理的効果を持つのかについては何の情報も与えない。例えば、一様等方宇宙模型での初期特異点は物質のエネルギー密度や曲率の発散を伴うため、明らかに有害な特異点である。これに対して、反 de Sitter 時空

adS において無限に広がった空間的超曲面  $\Sigma$  を取り、その依存領域を  $\mathcal{M} = D(\Sigma)$  を考えると (図 3 右端の点線を境界とする三角領域)、明らかに  $\Sigma$  は  $\mathcal{M}$  の Cauchy 面となる。実は、この時空  $\mathcal{M}$  は測地的に完備でない。実際、 $\mathcal{M}$  は adS において時間的に有界なので、測地線である原点を通る時間軸は有限な時間で  $\mathcal{M}$  の外に出てしまう。しかし、この曲線と共に運動する観測者には何ら特異なことは起こらない。

そこで、特異点の物理的効果について研究するために、特異点定理の発表以降、特異点の分類についての研究が盛んに行われた。その当時の成果は Ellis と Schimidt による 1977 年のレビュー<sup>9)</sup> および F.J. Tipler, C.J.S. Clarke, Ellis による 1980 年のレビュー<sup>10)</sup> にまとめられている。

これらの研究の出発点となったのは、特異点の概念の厳密化である。これまで、因果の時空境界の「点」を、そこに到達する曲線の長さにより、無限遠点と特異点を区別したが、この際に用いる曲線の長さの定義には、曲線が測地線でない場合には曖昧さがある。実際に、測地的に完備でも、有限加速度をもつ曲線に関しては完備でない時空の例が構成できる<sup>11)</sup>。この問題を解決するため、B. G. Schmidt は一般化されたアフィンパラメータの概念を導入した<sup>12)</sup>。まず、 $v$  をパラメータとする曲線  $\gamma$  に対して、それに沿って平行な擬正規直交基底  $\{E_a\}$  を取り、 $\gamma$  の接ベクトル  $V$  が  $V = V^a E_a$  と成分表示されるとき、この曲線の一般化されたアフィンパラメータを  $\tau = \int^v (\sum_a (V^a)^2)^{1/2} dv$  により定義する。そのうえで、任意の曲線  $\gamma$  がこのパラメータで計って常に無限に延長可能なとき、 $b$ -完備であると定義する。対応して、一般化されたアフィンパラメータが上に有界で延長不可能な曲線  $\gamma$  が存在するとき、この曲線の仮想的な端点を特異点として定義する。このような特異点の全体は、 $b$ -境界と呼ばれる。この場合、2つの延長不可能な曲線が同じ特異点を定義するのはどのような場合か判定する基準が必要となるが、Schmidt は、時空  $(\mathcal{M}, g)$  の擬正規直交基底の全体が作る主束  $O(\mathcal{M})$  を距離空間として完備化することにより、この基準を与えた。紙数の都合で詳細は省略するが、直感的には2つの曲線が漸近的に近づくときには、対応する特異点は一致すると見なす。以下、同じ特異点を定義する曲線の同値類を  $[\gamma]$  と表記する。

このように、特異点をそれに漸近する曲線  $\gamma$  (の同値類) により定義した上で、この曲線に沿って曲率がどのように振る舞うかで特異点の強度を分類する。まず、Riemann 曲率テンソルから作られる適当なスカラー多項式の値が一定値に収束しない (非有界の) とき、 $[\gamma]$  を  $C^0$  級 ( $C^{0-}$  級) スカラー型曲率特異点と呼ぶ。つぎに、 $\gamma$  にそって擬正規直交基底  $E$  を平行移動させるとき、その基底に関する曲率テンソルの成分の中に一定値に収束しない (有界でない) ものがあんなら、 $C^0$  型 ( $C^{0-}$  型) pp 曲率特異点という (pp=parallely

propagating). もちろん、スカラ型曲率特異点は pp 特異点であるが、逆は言えない。これは、時空計量が不定形量であることに起因する。スカラ型でない pp 特異点に対しては、曲線  $\gamma$  に沿って（必ずしも平行でない）うまい擬正規直交基底をとると、その基底に関する曲率テンソルのすべての成分が  $C^0$  級 ( $C^{0-}$  級) となることが示される (Siklos の定理 [S. Siklos 1976, PhD thesis]). したがって、特異性は擬正規直交基底が平行移動により無限の Lorentz ブーストを受けることに起因する。非スカラ型の pp 曲率特異点の例は、平面重力波解や非等方一様宇宙を表す解で知られている<sup>9, 13)</sup>。ただし、これらが一般的な摂動に対して不安定であることから、その発生は一般的でないと予想されている。

最後に、曲率テンソルの pp 成分がすべて  $C^0$  級 ( $C^{0-}$  級) であるにもかかわらず延長不可能な曲線に対応する特異点を準正則特異点 (quasiregular singularity) と呼ぶ。円錐の表面から頂点を除いた 2 次元面は局所的に平坦であるが、円錐の頂点にあたる点は含まれないので、準正則特異点となる。この点を追加すると微分可能な面でなくなるので、単なる空間の拡張で特異性は解消されない。しかし、この面を切り開くと特異性のない 2 次元平面に拡張される。実は、この特徴は準正則特異点に共通するもので、準正則特異点  $[\gamma]$  に対しては、 $\gamma$  の適当な開近傍  $U$  に時空を限定すると、 $\gamma$  が延長可能となる  $U$  の拡張が存在することが示される<sup>14)</sup>。準正則特異点をもつ時空の非自明な例としては、Taub-NUT 時空がある。この時空は正の宇宙項をもつ Einstein 方程式の真空解で、空間が  $S^3$  に同相な  $U(1)$  対称性をもつ非等方膨張宇宙を表し、極大な解析的拡張では、曲率テンソルは一様有界であるが、光的測地線に関して完備でない<sup>1, 15)</sup>。準正則特異点も曲率テンソルが特殊な代数構造を持っているときに発生し、現実の宇宙で発生することはないと考えられているが厳密な証明はない。

## 10. 宇宙検閲仮説

特異点が発生して、それが曲率の発散を伴っているとしても、その影響が我々に届かなければ、現実的な問題を引き起こさない。この期待を表現したのが、Penrose の提唱した宇宙検閲説である。この仮説には 2 つのバージョンがある。一つは、1969 年に発表された弱い宇宙検閲仮説 (WCCH) で<sup>16)</sup>、大まかな内容は、「物質が現実的な状態方程式に従うとき、なめらかな初期条件から Einstein 方程式の解として決まる漸近的に平坦な時空の特異点は一般にブラックホールホライズンで隠される」というものである。数学的には次のように表現される：

【予想 10.1 (弱い宇宙検閲仮説)】 初期条件  $(\Sigma, q)$  から決まる漸近的に平坦な時空解  $(\mathcal{M}, g)$  は一般に次の条件を

満たす：

$$\mathcal{I}^+ \subset \overline{D^+(\Sigma)}, \quad J^+(\Sigma) \cap \overline{J^-(\mathcal{I}^+, \mathcal{M})} \subset D^+(\Sigma).$$

□

2 つめのバージョンは 10 年後に発表された強い宇宙検閲仮説 (SCCH) で<sup>17)</sup>、次の内容をもつ：

【予想 10.2 (強い宇宙検閲仮説)】 物質が現実的な状態方程式に従うとき、なめらかな初期条件に対する Einstein 方程式の解の極大な拡張は、一般に大域的に双曲型時空となる。 □

これらの予想のその後はあまり明るいものではなかった。まず、球対称系について WCCH が詳しく調べられ、特に圧力が無視できる天体の重力崩壊に対しては、ホライズンに隠されない特異点である裸の特異点 (naked singularity) が中心に一般に生成されることが示された。また、有限な圧力を流体の持つ場合でも、必ずしも特異点は隠されない。ただし、これらは球対称性という高い対称性に起因している可能性が否定できない。しかし、非球対称な系の研究は困難で、未だに明確な結論は得られていない<sup>18)</sup>。細長い形状の無衝突ガス系の重力崩壊では、特異点が発生してもそれを取り囲む捕捉面が存在しない例が数値計算により与えられたが<sup>19)</sup>、この数値計算では特定の時間一定面の取り方をしているため、捕捉面の非存在がホライズンの非存在を必ずしも意味せず<sup>20)</sup>、WCCH の破れの明確な例とは言えない。

SCCH についても状況は微妙である。SCCH の破れは、大域的に双曲的でない極大時空  $\mathcal{M}$  が存在することを意味するが、この様な時空では、その極大な大域的に双曲的領域を  $\mathcal{N} = D(\Sigma)$  とおくと、 $\mathcal{N}$  は  $\mathcal{M}$  において境界  $\mathcal{H} = \partial\mathcal{N}$  をもつ。この境界は **Cauchy** ホライズンと呼ばれる。特に、 $\mathcal{H}^+ = \mathcal{H} \cap \partial D^+(\Sigma)$  は未来の Cauchy ホライズンという。解析的に極大に拡張された Reissner-Nordstrom 解や Kerr 解など (13 節参照) 多くの基本的なブラックホール解が Cauchy ホライズンをもつ。したがって、SCCH はこれらの解の Cauchy ホライズンが不安定であることを予想する。

この問題は様々な側面から研究され、有限エネルギーの摂動により時空の局所質量が Cauchy ホライズンで発散するという質量インフレーション<sup>21, 22)</sup> など Cauchy ホライズンの不安定性を示唆する現象が見つかり、その後の数値計算でも、Cauchy ホライズンの一部が空間的スカラ曲率特異点集合に変わることが指摘された。しかし、Cauchy ホライズンの一部は光的なまま残り、そこを通過しても物体が有限な変形しか受けない程度の弱い特異性しかもたないことが示された<sup>23)</sup>。

## 11. 重力崩壊における臨界現象

これに対して, WCCH の研究を全く新たな方向に導いた数学的研究がある. それは, D. Christodoulou により 1986 年から 1999 年にかけて行われた球対称な Einstein-KG 系 (重力場と質量ゼロの自由スカラ場から成る系) の厳密な数学的研究である (その詳細については,<sup>24, 18)</sup> 参照). 彼は有界変動なクラスの枠内で, 真空に近い初期値は必ず正則な散乱解を与えることを示す一方で, 漸近的に平坦で裸の特異点を持つ解および特異点がホライズンの発生点にある解の存在を示した. 前者は, 原点にある特異点を頂点とする未来の光円錐が  $\mathcal{I}^+$  に達するので裸の特異点をもつ. このとき, この光円錐は特異であるが, 曲率は有界でその微分のみが発散するので特異性はマイルドで, 時空の光円錐を超えた  $C^2$ -級での拡張が可能となる. この拡張を許すと, この解では WCC も SCC も破れる. 後者の解は, 微妙なケースであるが, 限りなく曲率の大きな領域が観測可能であるという意味では, WCC が破れる. ただし, 1999 年に彼は, これらすべての特異解が少なくとも 1 次元の初期値の摂動に対して不安定であることを示した. すなわち, 小さな摂動を加えると, 正則解か WCC が成り立つ解に変化するのである. これは数学的な意味で, WCCH を支持する結果となっている.

ただし, ここで新たな展開があった. それは, M.W. Choptuik が行ったこの系の数値計算による研究である<sup>25)</sup>. 彼は高精度でこの系の初期値問題を解き, スカラ場のある初期値配位に対して, その振幅を連続的に変えてゆくと, ある臨界値以下では散乱解, 臨界値を超えるとブラックホール解となる場合を詳しく調べた. その結果, 振幅が臨界値のときの解は, Christodoulou が存在を示したホライズンの頂点の特異となる解に対応し, しかもその解が離散的相似性を持つこと, さらに振幅の臨界値からのずれと形成されるブラックホールの質量の対応する臨界指数がスカラ場の初期配位の詳細によらないことを発見した. すなわち, 一種の臨界現象が起きていたのである. この結果は, 同時に, 厳密な意味での特異点ではないが, 対応する解が任意の与えられた大きさ以上の曲率をもつ初期値の全体が初期値空間において開集合を作ることを意味し, 物理的な基準からすると WCCH が成り立たないことを意味している. その後, 物質が異なる様々な系で類似の現象が確認された<sup>26)</sup>. 現在では, この現象が起きる理由は, 初期値空間の中で裸の特異点をもつ解に対応する初期値の全体が予次元 1 の部分空間となっているためと理解されている.

## 12. Penrose 不等式

WCCH の研究が生み出したもう一つの興味深い数理的な研究として, Penrose 不等式がある. Penrose は 1969 年に

WCCH の反例を作る目的で, 光速でつぶれる物質殻によるブラックホールを考えた<sup>16)</sup>. 対応する時空は, この物質殻の軌跡である光的超曲面  $\mathcal{M}$  で不連続となり,  $\mathcal{M}$  の過去側は Minkowski 時空,  $\mathcal{M}$  の未来は一般に重力波を含む曲がった時空となる. この物質殻が十分小さな領域につぶれる様な初期配位を取ると, この  $\mathcal{M}$  の直上に閉捕捉面  $\mathcal{S}$  が形成される.  $\mathcal{M}$  の外は真空なので, もし, WCC が成り立つと閉捕捉面は必ずブラックホールホライズンに含まれ<sup>1)</sup>,  $\mathcal{S}$  の面積  $A$  はブラックホール表面積以下となると期待される. ところが, ブラックホールの面積増大定理 (次節参照) より, このブラックホール表面積は増大し, その最終値は全系の重力質量  $M$  に対応する Schwarzschild ブラックホールの表面積  $16\pi(GM)^2$  を超えない. したがって,

$$GM \geq \sqrt{\frac{A}{16\pi}} \quad (9)$$

という不等式が成り立つことが期待される. この不等式は **Penrose 不等式** と呼ばれる.

その後, G.W. Gibbons は, この捕捉面を  $\mathcal{M}$  を横切って Minkowski 時空側に動かした際の  $\mathcal{S}$  を通過する光波面の面積増大率の変化量が, 物質殻のもつ全エネルギーに比例することを用いると, Penrose 不等式が Minkowski 時空内の空間的 2 次元面に関係する幾何学量のみで書かれた不等式

$$\frac{1}{8\pi} \int_{\mathcal{S}} 2\theta dA \geq \sqrt{\frac{A}{4\pi}} \quad (10)$$

で換えられることに気づき, この不等式を等周不等式 (isoperimetric inequality) と名付けた<sup>27)</sup>. ここで,  $\theta$  は  $\mathcal{S}$  を通過して広がる光波面の面積増大率である. 当初, Gibbons は,  $\mathcal{S}$  が 3 次元 Euclidean 空間に含まれる凸な 2 次元面ときのみ, この不等式を証明した. この場合は,  $2\theta$  は  $\mathcal{S}$  の各点における平均曲率と一致し, この不等式を Minkowski 不等式 (1903 年) に帰着することができたのである. しばらくこの問題に大きな進展はなかったが, Gibbons はついに 1997 年に, 特別な仮定なしにこの不等式を証明し, さらに一般次元に拡張することに成功した<sup>28)</sup>. その理由は, N.S. Trudinger が, Minkowski 不等式を任意次元の Euclidean 空間  $E^n$  内の任意の閉超曲面  $\Sigma$  に対する次の不等式に拡張することに成功したことによる<sup>29)</sup>:

$$\int_{\Sigma} K dA \geq (n-1)\Omega_{n-1}^{1/(n-1)} A^{\frac{n-2}{n-1}}. \quad (11)$$

ここで,  $K$  は  $\Sigma$  の平均曲率,  $\Omega_n$  は  $n$  次元単位球面  $S^n$  の面積で, 等号は  $\Sigma = S^{n-1}$  のときに成立. このように全く非自明な数学的不等式と対応することは, WCCH を支持する事実と見なす人が多い.

Penrose 不等式はその後, 初期値問題における一般的な不等式型予想に拡張された<sup>30)</sup>. これらの一般形では,  $A$  は漸

近的に平坦な初期面  $(\Sigma, q)$  に含まれる最も外側の捕捉面  $\mathcal{S}$  の面積,  $M$  は初期面での ADM 質量となる. 特に,  $\Sigma$  のスカラー曲率  $R(\Sigma)$  が非負で,  $\Sigma$  が全測地的, すなわち解が時間反転不変性をもち,  $\Sigma$  がその時間反転の不動面となる場合については, この不等式は **Riemann-Penrose 不等式** と呼ばれ詳しい研究がある. この場合,  $\mathcal{S}$  は最も外側の極小曲面となる. P.S. Jang と R.M. Wald は, 1977 年に逆平均曲率流 (inverse mean curvature flow) によるこの極小曲面の連続変形を用いた証明を発表した<sup>31)</sup>. ここで, 逆平均曲率流による変形とは, 曲面  $\mathcal{S}$  をその法ベクトル方向に平均曲率の逆数に比例する「速度」で変形させることを意味する. ポイントは,  $R(\Sigma) \geq 0$  のとき, Hawking 質量と呼ばれる関数  $m_H(\mathcal{S}) = (1 - \int_{\mathcal{S}} K^2/16\pi) \sqrt{A(\mathcal{S})/16\pi}$  が, この変形に対して単調に増加し, しかも出発点の捕捉面  $\mathcal{S}$  に対して  $m_H(\mathcal{S}) = \sqrt{A/16\pi}$ , 無限遠の球面に近づくとき  $m_H(\mathcal{S}) \rightarrow GM$  となることである. したがって, 逆平均曲率流によって  $\mathcal{S}$  が無限遠球面に滑らかに変形できる場合には不等式が証明されることになる.

しかし, 実際には, この変形は一般に特異性を持つ面を含むことが示される. この困難の克服には 20 年以上の歳月を要したが, ついに 2001 年に G. Huisken と T. Ilmanen が不等式の厳密な証明に成功した<sup>32)</sup>. 基本的なアイデアは, 連続な変形をあきらめ, 飛びのある不連続な変形を許すよう一般化することにあった. さらに, 同じ年に, H.L. Bray により全く異なった証明が発表された. 彼の方法は, 極小曲面の面積を保って, 初期値を共形的に Schwarzschild ブラックホールに対応するものに変形するというものであった.

### 13. ブラックホールの一意性

最も単純なブラックホール解はよく知られている Schwarzschild 解で, Einstein 方程式の静的な球対称解である. この解は一般相対性理論が発表された翌年の 1916 年に発見され, 同じ年には電荷を帯びた球対称ブラックホール解である Reissner-Nordstrom 解も発見されている. しかし, この解がブラックホールを表していることが理解されるようになったのは, G. LeMatre がホライズンの概念を導入した 1933 年である. 回転するブラックホール解である Kerr 解が発見されたのはさらにその 30 年後の 1963 年である. このように時間がかかったのは, やはり非線形偏微分方程式系である Einstein 方程式を厳密に解くことが大変難しいことに起因する. 実際, 1965 年には複素解析接続法により回転する電荷を持ったブラックホールを表す Kerr-Newmann 解が発見されているが, その後, Einstein-Maxwell 系に対して, 新たな正則真空ブラックホール解は発見されなかった. 1973 年には有名な富松・佐藤解が発表され世界を驚かせたが, この解は裸の特異性を持っていた.

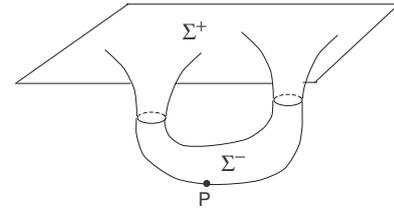


図 6: 静的ブラックホール時空の共形的変形

**静的ブラックホール** この様な状況の下, これらの解以外に正則で漸近的に平坦なブラックホール解がないことを示そうという研究が行われた. 先鞭をつけたのは, W. Israel である. Einstein 方程式の球対称な真空解は静的であり, したがって Schwarzschild 解に限るということを 1923 年に Birkhoff が証明したが (**Birkhoff の定理**), Israel はこの逆, すなわち, 静的なら球対称であることを示そうとした. ここで, 静的とは定常で時間反転に対して不変である (したがって回転していない) ことを意味する. この剛性定理が示せれば直ちに, 静的なブラックホールの一意が導かれる. これまでに得られた最も一般的な静的ブラックホールに対する一意性定理は次のように表される<sup>33)</sup>:

【定理 13.1 (静的ブラックホールの一意性定理)】

Einstein-Maxwell 系において, WCCH を満たす漸近的に平坦で静的なブラックホール解は, ホライズンが非縮退なら Reissner-Nordstrom 解に限られ, 計量は質量  $M$  と電荷  $q = \sqrt{4\pi}Q$  を用いて次のように表される:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega_2^2; \quad f(r) = 1 - \frac{GM}{r} + \frac{GQ^2}{r^2}. \quad (12)$$

また, 縮退している場合は, Majumdar-Papapetrou 解の一つに一致する. □

ただし, 非縮退とは, 無限小等長変換 (Killing ベクトル) のうちホライズン上で光的となるものを  $k$  とするとき,  $\nabla_k k \neq 0$  となることを意味し, Reissner-Nordstrom 解では  $M^2 > Q^2$  に対応する. 逆に退化型ホライズンに対しては  $\nabla_k k = 0$  となり, Killing ベクトルの生成する等長変換のパラメータとホライズンの光的測地線のアフィンパラメータが比例する. 静的真空解の場合,  $M^2 = Q^2$  のとき退化型となるが, そのような解は無数個存在することが知られている (Majumdar-Papapetrou 解)<sup>34)</sup>.

$\xi$  を時間推進の Killing ベクトルとして  $g(\xi, \xi) = -N^2$  とおくと, 静的な解を求める問題は, 時間一定面に対応する 3次元多様体  $\Sigma$  の計量  $q$  と関数  $N$  に対する次の初期値方程式に帰着される:

$$R_{ij}(q) = N^{-1} D_i D_j N, \quad \Delta_q N = 0. \quad (13)$$

ここで,  $D_i$  は  $q$  に関する共変微分,  $R_{ij}(q)$  はその Ricci テ

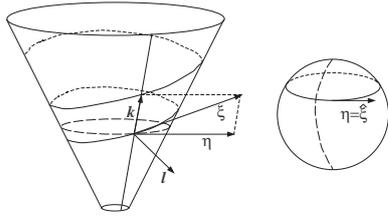


図 7: 回転するブラックホールホライズンと Killing ベクトル

ンソル,  $\Delta_q = D^i D_i$  である. 漸近的に平坦なら, ホライズン  $\partial\Sigma$  で  $N = 0$ , 無限遠で  $N \rightarrow 1$  となる.

Israel は, この方程式を  $N$  を動径座標とする  $\Sigma$  の極座標を用いて書き下すことにより, ブラックホール表面が連結で, すべての  $N = \text{一定面}$  がなめらかな球面となる場合について, 1967 年に剛性定理を示すことに成功した<sup>35)</sup>. しかし, 非縮退でブラックホールが複数ある解はないのか, 球面以外の位相をもつブラックホールはないのかなどの問いに答えることはできなかった. これらの問いに予想外の方法で解答を与えたのは, G.L. Bunting, A.K.M. Masood-ul-Alam, P.J. Ruback らで, 約 20 年後であった<sup>36, 37, 38)</sup>. 証明の概要は次の通りである. まず, 彼らは, 時間一定面に対応する 3 次元 Riemann 多様体  $(\Sigma, q)$  が, ラプス関数  $N$  を用いた Weyl 変換  $\hat{q}_\pm = \Omega_\pm^2 q, \Omega_\pm = (1 \pm N)^2/4$  を施すと, そのスカラ曲率がゼロに保たれることに着目した. しかも,  $\hat{\Sigma}_+ = (\Sigma, \hat{q}_+)$  と  $\hat{\Sigma}_- = (\Sigma, \hat{q}_-)$  は,  $N = 0$  となる境界のホライズン  $\partial\Sigma$  でなめらかなにつながり, しかも無限遠で  $\Omega_- \rightarrow 0$  となるので,  $\hat{\Sigma}_-$  は 1 点コンパクト化により滑らかな多様体に拡張される. したがって,  $\hat{\Sigma} = \hat{\Sigma}_+ \cup \hat{\Sigma}_- \cup \{P\}$  は, スカラ曲率がゼロかつ ADM 質量がゼロの漸近平坦な滑らかな 3 次元 Riemann 多様体となる (図 6). ところが, 正エネルギー定理 (次節参照) より, このような多様体は Euclidean 空間に限られる. したがって, もとの  $(\Sigma, q)$  は  $E^3$  に共形となる. これは, Bach テンソルと呼ばれる 3 階テンソルが恒等的にゼロであることを意味するが, Bach テンソルを  $N$  を動径座標とする座標系で書いてみると, この条件は空間が球対称であることを意味することが直ちに分かる.

**回転するブラックホール** さて, Israel の定理が発表されてから 5 年後に, Hawking は定常で回転するブラックホールは軸対称であるという剛性定理を証明した<sup>39, 41)</sup>. ここで, 定常とは, 遠方で時間的となる Killing ベクトル  $\xi = \partial_t$  が存在することを, また, 軸対称とは至るところ空間的  $S^1$  (ないし一点) を軌道として持つ Killing ベクトル  $\eta = \partial_\phi$  が存在することを意味する. この剛性定理でポイントとなることは, 回転するブラックホールでは, 時間推進の Killing ベクトル  $\xi$  がホライズン  $\mathcal{H}^+$  上で空間的となることである (図 ??). このため,  $\mathcal{H}^+$  をあるコンパクト面  $\mathcal{N}$  を底空間とし,

光的測地線をファイバーとするファイバー束  $\pi: \mathcal{H}^+ \rightarrow \mathcal{N}$  と見なしたとき,  $\xi$  は  $\mathcal{N}$  に等長変換を誘導する. 底空間  $\mathcal{N}$  はブラックホール表面に対応するので, それが球面と同相と仮定すると,  $\xi$  の軌道は  $S^1$  (ないし一点) となることが示される. この各軌道の  $\pi$  による逆像は, 光的測地線から成る円筒となり,  $\xi$  の軌道はこの円筒に沿った螺旋となる. このことより,  $\mathcal{H}^+$  上に閉じた軌道をもつ空間的 Killing ベクトル  $\eta = \partial_\phi$  ( $\phi$  は周期  $2\pi$  の角度座標) で,  $\xi + \Omega_h \eta$  ( $\Omega_h$  はブラックホールの回転角速度と呼ばれる定数) が  $\mathcal{H}^+$  の光的測地線に接するものが存在することが示される. この  $\mathcal{H}^+$  上の Killing ベクトルを解析的にホライズンの外に拡張することにより, 軸対称性が示される. したがって, Hawking の剛性定理では, 時空の解析性およびホライズンの部分多様体としての解析性の仮定が本質的である. しかし, 解析性が成り立てば, 場の方程式の詳細にはあまり依存しない.

Hawking の証明では, ブラックホールの位相が球面であることも仮定されていた. この仮定の正当化は, 20 年後の 1994 年に P. Chrusciel と R. Wald によりなされた<sup>40)</sup>, その基礎となったのは次の位相検閲定理 (topological censorship theorem)<sup>41)</sup> である.

**【定理 13.2 (位相検閲定理)】** 漸近的に平坦で大域的に双曲的な時空において光的収束条件が満たされるとき,  $\mathcal{I}^-$  と  $\mathcal{I}^+$  をつなぐ任意の因果的曲線は, 連続的に無限遠の標準近傍内の曲線に変形できる. □

ここで, 無限遠の標準近傍とは, Minkowski 時空の無限遠の近傍と同相な  $\mathcal{I}^+ \cup \mathcal{I}^-$  の近傍を意味する. この定理は, 時空の普遍被覆における光的測地線束の振る舞いに帰着することにより容易に証明できるが, 非常に強力である. 実際, 大域的に双曲的な時空における任意の閉曲線は, 1 点で切り離すことにより, 適当な時間的フローに沿った初期面への射影が一致する因果的開曲線に連続変形できるので, この定理をブラックホール時空の DOC に適用すると, ブラックホールの位相が球面に限られるということが示される:

**【定理 13.3 (4 次元ブラックホールの位相定理)】** 漸近的に平坦な時空の DOC が大域的に双曲的で, 光的収束条件が満たされるなら, DOC は単連結である. 特に, 4 次元時空においてブラックホールの各連結成分は 2 次元球面に同相である. □

Hawking の剛性定理により, 定常で回転するブラックホールは軸対称であることは言えるが, これはまだまだ弱い制限で, 静的な場合のように, この対称性だけで解が一意的に決まるわけではない. 富松佐藤解のように, 特異性を持つ「ブラックホール解」は無限に存在するのである. ホライズン上および外に特異点がないという正則性の要請 (WCC) のもとで解を絞り込む必要がある. この作業で重要な役割

を果たしたのが, Ernst 形式である.

一般に, 4次元時空が Killing ベクトル  $\alpha = \partial_u$  を持つとき, 時空をこのベクトル場の軌道の集まり, すなわち 3次元 Riemann 多様体  $(\Sigma, q)$  を底空間しファイバーが 1次元のファイバー空間とみなすと,  $\beta$  を  $\Sigma$  上の 1形式として, 4次元計量  $g$  は  $g = V(du + \beta)^2 + |V|^{-1}q$  と表される. また, この時空での定常な電磁場の電磁テンソル  $F$  は,  $\Sigma$  上の複素関数  $\Phi$  をもちいて,  $\sqrt{GF} = \text{Re}[V^{-1}(1+i*)(d\Phi \wedge \xi)]$  と表されることが示される. これらを用いて,

$$d\mathcal{E} = -dV + i *_q(V^2 d\beta) - 2\bar{\Phi}d\Phi \quad (14)$$

とおくと, Einstein 方程式より右辺が閉形式であることが示されるので, この式により **Ernst** ポテンシャル (と) 呼ばれる複素関数  $\mathcal{E}$  が定義される<sup>42, 43</sup>. 4次元の Einstein 方程式と Maxwell 方程式は, 3次元多様体上の  $\Sigma$  上の計量  $q$ , Ernst ポテンシャル  $\mathcal{E}$  および複素電磁ポテンシャル  $\Phi$  に対する作用積分

$$S = \int_{\Sigma} *_q \left( R(q) - 2 \frac{|d\Phi|^2}{V} - \frac{|d\mathcal{E} + 2\bar{\Phi}d\Phi|^2}{2V^2} \right) \quad (15)$$

より得られる変分方程式に帰着する.

時空が定常軸対称の時には,  $\alpha$  として時間推進の Killing ベクトル  $\partial_t$  を取り  $u = t$  とおくと,  $q = e^{2k}(dz^2 + d\rho^2) + \rho^2 d\phi^2$  と表され, 場の方程式は,  $k$  に対する常微分方程式と, 2次元の  $(\rho, z)$  平面上の 2つの場  $\mathcal{E}, \Phi$  に対する非線形の楕円型方程式系となる. この 2次元系への還元は B. Carter によってなされた<sup>44</sup>. 彼はさらに, 重力場のみの系では, 境界条件のもつ連続パラメータの自由度は, 質量  $M$ , 角運動量  $J$  のみであることを示した. D.C. Robinson はこの結果を電磁場が存在する場合に拡張し, 連続パラメータの自由度は,  $M, J$  と電荷  $Q$  のみであることを示した<sup>45</sup>. ただし, これらの結果では, Kerr-Newman 解以外に別の解の族が存在する可能性を排除できない. 重力のみの系に対しては, この問題は, 非常に複雑な恒等式を用いることにより, Robinson により解決され, Kerr ブラックホールが唯一の解であることが証明された. しかし, この恒等式を電磁場が存在する場合に試行錯誤により拡張することは絶望的であった. 何かより深い議論に基づく恒等式の導出が切望された<sup>46</sup>.

この希望を見事に叶えたのが, P.O. Mazur<sup>47</sup> である. 彼は, Ernst 形式での理論が, (3次元重力と結合した) 非線形  $\sigma$  模型の構造をしていることに着目した. 例えば,  $\alpha$  を空間回転の Killing ベクトル  $\eta$  に取ると,  $V > 0$  なので, 作用積分 (15) は  $SU(2, 1)$  不変性をもし,  $(\mathcal{E}, \Phi)$  は対称空間  $\mathcal{M} = SU(2, 1)/S(U(2) \times U(1))$  と同一視できる. 実際,  $(\mathcal{E}, \Phi)$  を  $SU(2, 1)$  に含まれる正値エルミート行列  $X$  に埋め込むと, これらの場の作用積分は, 行列値 1 形式  $\mathcal{J} = X^{-1}dX$  を

用いて  $\int *_q \text{Tr}(\mathcal{J}^\mu \mathcal{J}_\mu)$  と表される. これより, 場の方程式は  $\nabla \cdot \mathcal{J} = 0$  となり, その 2つの解  $X_{(1)}, X_{(2)}$  に対して,

$$-\Delta_q \text{Tr}\Psi = \text{Tr}(Y^\dagger \cdot Y); \quad Y = X_{(2)}^{1/2} (\mathcal{J}_{(2)} - \mathcal{J}_{(1)}) X_{(1)}^{-1/2} \quad (16)$$

を得る. ここで,  $\Psi := X_{(2)}^{-1} X_{(1)} - I_3$ . 右辺は非負で, 左辺の  $\Sigma$  での積分は境界条件よりゼロとなる. これより, 直ちに 2つの解は一致することと言える.

このように, Mazur 恒等式により, 連結なホライズンをもつ Einstein-Maxwell 系の漸近的に平坦な正則ブラックホール解の一意性が言えたが, ブラックホールが複数の連結成分をもつ可能性を明らかにするには, より詳しい境界値問題の研究が必要であった. この問題に大きな進展をもたらしたのは, G. Weinstein である. 彼は, いま説明した非線形  $\sigma$  模型としての定式化が, 調和写像と呼ばれる Riemann 多様体間の写像の特殊な場合であることに着目し, その成果を用いて多成分ブラックホール系に対する存在と一意性の定理を確立し, 一般に  $N$  ブラックホール解は各ブラックホールの質量, 電荷, 角運動量とブラックホール間の距離を表す  $4N - 1$  個のパラメータで分類されることを示した<sup>48, 33</sup>.

**【定理 13.4 (回転するブラックホールの一意性定理)】** 4次元 Einstein-Maxwell 系において, 漸近的に平坦で正則な定常ブラックホール解の DOC は, Weinstein 解のどれかと等長である. 特に, ホライズンが連結なら, Kerr-Newman 解

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\frac{\Delta \Sigma_2}{\Gamma} dt^2 + \frac{\Gamma \sin^2 \theta}{\Sigma_2} (d\phi - \Omega dt)^2 + \Sigma_2^2 \left( \frac{dr^2}{\Delta} + d\theta^2 \right) \\ \Delta &= r^2 - 2mr + a^2 + e^2, \quad \Sigma_2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \\ \Gamma &= (r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta, \quad \Omega = \frac{a(2mr - e^2)}{\Gamma} \end{aligned} \quad (18)$$

に限られる. ただし,  $m = GM, a = J/M, e^2 = GQ^2$ .  $\square$

さらに, 電氣的に中性の  $N$  ブラックホールの場合には, Weinstein 解は, 逆散乱法を用いて V.A. Belinskii と V.E. Zakharov により構成された  $2N$  ソリトン解<sup>49</sup> と一致することが, G.G. Varzugin により示されている<sup>50</sup>. ただし,  $N \geq 2$  の多体ブラックホール解ではブラックホールが  $z$  軸に沿って並ぶが, 一般にブラックホール間の  $z$  軸上にコーン型特異点が発生する. 最近, 正則な中性の 2体ブラックホール解が存在しないことが証明されたが<sup>51</sup>, 一般の場合については正則なものが存在するかどうかはまだ不明である.

**Einstein-Maxwell 系を超えて** これまで, たかだか電磁場しかない系を考えてきたが, 現実の理論には様々な場が登場する. ブラックホール一意性定理の骨格ができて以降, これら電磁場以外の場が存在する場合の解についても研究がなされてきたが, まだ十分な分類からはほど遠い状況にある<sup>33</sup>. これまでの結果の大きな特徴は, Einstein-Maxwell 系

で成立した多くの定理が成り立たなくなることである。例えば、場として電磁場の代わりに非可換ゲージ場を考えると、球対称静的な解に限っても一意性は破れ、Schwarzschild 解以外に構造の異なる正則ブラックホール解とホライズンを持たないソリトン解が現れる<sup>52, 53, 54</sup>。これらは不安定であることが知られているが、非線形  $\sigma$  模型に高次相互作用を加えたスキルミオン場や非可換ゲージ場に 3 重項 Higgs 場を加えたモデルでは、Schwarzschild 解以外の安定ブラックホール解が存在する。また、非可換ゲージ場を含む系では、静的だが非球対称な解が存在することを示唆する事実もある。これら最近の結果については Heusler らのレビュー<sup>33</sup>を参照してほしい。

#### 14. 時空の安定性と正エネルギー定理

ニュートン理論では、重力のポテンシャルエネルギーは負で下限を持たない。このため、重力系は原理的には不安定である。この状況は一般相対性理論でも変わらないのであろうか？一般相対性理論では、このような重力不安定は、時空構造の不安定を産み非常に危険であり、古くから重要な問題となっていた。

この問題に解答を与えたのが、次の正エネルギー定理である<sup>55, 56, 57, 58, 59, 60</sup>。

**【定理 14.1 (ADM エネルギーに関する正エネルギー定理)】**

$(\Sigma, q_{ij}, K_{ij}, \rho, S^i)$  を 4 次元 Einstein 方程式に対する漸近的に平坦で完備な初期値とする。ただし、 $\Sigma$  は 3 次元閉多様体か  $\Sigma \cong \mathbb{R}^3 - B$  ( $B = \sum_i B_i$ ,  $B_i$  は球体) で  $\partial B$  はブラックホール境界とする。このとき、エネルギー運動量テンソルに対して支配的エネルギー条件が成り立てば、全系のエネルギー  $E$  と運動量  $\mathbf{P} = (P_i)$  は次の条件を満たす：

$$E \geq |\mathbf{P}|. \quad (19)$$

さらに、等号が成り立つのは、初期値が Minkowski 時空に対応する場合のみである。□

まず、この定理で用いられている記号の説明をする。一般相対性理論では、初期値問題を取り扱うために、時空を時間一定面に対応する 3 次元多様体の時系列  $\Sigma_t = (\Sigma, q)$  と見なす (3+1) 分解が用いられる：

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + q_{ij}(dx^i + \beta^i)(dx^j + \beta^j) \quad (20)$$

ここで、 $N$  はラプス関数と呼ばれ、 $Ndt$  が  $\Sigma_t$  と  $\Sigma_{t+dt}$  の各点での距離を表す。また、 $\beta^i$  はシフトベクトルと呼ばれ、 $\beta^i dt$  が空間座標一定点の相対変位を表す。すなわち、 $N$  は時間座標の取り方を、 $\beta^i$  は空間座標の取り方を記述する。この分解の元で、Einstein 方程式は、 $q(t) = (q_{ij}(t, x))$  とその共役運動量に対応する  $\Sigma_t$  の外部曲率

$$K_{ij} = (-\partial_t q_{ij} + D_i \beta_j + D_j \beta_i)/(2N) \quad (21)$$

に対する正準発展方程式

$$\frac{1}{N} \mathcal{L}_t q_{ij} = -2K_{ij}, \quad (22a)$$

$$\frac{1}{N} \mathcal{L}_t K_{ij} = R_{ij}(q) - 2K_i^l K_{jl} + K K_{ij} - \frac{1}{N} D_i D_j N - S_{ij}, \quad (22b)$$

と、 $(q_{ij}, K_{ij})$  の初期条件についての拘束条件

$$R(q) - K_{ij} K^{ij} + K^2 = 16\pi G \rho, \quad (23a)$$

$$D_j K_i^j - D_i K = -8\pi G S_i \quad (23b)$$

と同等になる。ここで、 $D_i$  は  $\Sigma$  上の  $q$  に関する共変微分、 $R_{ij}(q), R(q)$  はその Ricci 曲率とスカラー曲率、 $K = K_i^i$ ,  $S_{ij}$  はエネルギー運動量テンソルの 1 次式、 $\rho = T_{tt}$  と  $S_i = T_{ti}$  は物質のエネルギー密度と運動量密度である。また、 $\mathcal{L}_t$  はベクトル  $\partial_t - \beta^i \partial_i$  に沿った Lie 微分である。一般に、この拘束条件を満たす十分滑らかな初期値  $(\Sigma, q_{ij}, K_{ij}, \rho, S^i)$  が与えられると、それを初期値とする Einstein 方程式の解が (局所的には)一意的に存在する。

この拘束条件の漸近的に平坦な解  $(q_{ij}, K_{ij})$  が与えられたとき、ある  $\alpha > 1/2$  に対して、 $\gamma_{ij} = q_{ij} - \delta_{ij} = O(r^{-\alpha})$ ,  $\partial^s \gamma_{ij} = O(r^{-\alpha-s-1})$  ( $1 \leq s \leq 4$ ),  $\partial^s K_{ij} = O(r^{-\alpha-s-1})$  ( $0 \leq s \leq 3$ ) が成り立つとき、全系の質量と運動量が

$$E = \frac{1}{16\pi G} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S(r)} (\partial_j q_{ij} - \partial_i q_{jj}) n^i d\Omega, \quad (24a)$$

$$P_i = \frac{1}{8\pi G} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S(r)} (K_{ik} - K q_{ik}) n^k d\Omega \quad (24b)$$

により曖昧さなく定義される<sup>61</sup>。ここで、 $S(r)$  は漸近的 Descartes 座標に関して半径  $r$  の球面、 $n^i$  はその単位法ベクトル、 $d\Omega$  は面積要素である。

このように定義された  $(E, P_i)$  は、無限遠での Minkowski 時空に関する 4 ベクトルと見なされるので、定理の条件は、Minkowski 時空以外ではこの 4 ベクトルが未来向きの時間的ベクトルであること、特に  $E > 0$  であることを主張している。なお、この条件が満たされるとき、ADM 質量と呼ばれる質量  $M = (E^2 - \mathbf{P}^2)^{1/2}$  が定義され、非負となる。もちろん、物質のエネルギーが負だとこのような結論が成り立つことは期待できない。そこで、物質のエネルギー密度  $\rho$  と運動量密度  $S^i$  も  $(E, P_i)$  と同様の条件を満たすことを要請する。この条件は、エネルギー運動量テンソル  $T_{\mu\nu}$  で表すと、「任意の未来向きの因果的ベクトル  $V^\mu$  に対して  $T_\nu^\mu V^\nu$  が過去向きの因果的ベクトルとなる」という要請となる。この条件は支配的エネルギー条件 (domian energy condition) と呼ばれる。

正エネルギー定理の最初の証明は、R. Schoen と S.-T. Yau により、大域解析学的手法を用いて行われた<sup>55, 56</sup>。彼

らは、エネルギーが負の場合には Gauss 曲率の積分が正で平面の位相を持つ面  $\mathcal{M}$  が存在することを示した上で、それが開曲面に対する R. Finn および A. Huber による開 Riemann 面に対する Gauss-Bonnet の定理と矛盾することを示し、背理法で  $E \geq 0$  および  $E = 0$  なら Minkowski 的であることを示している。この主張は、上記の定理より少し弱いものである。

彼らに続いて、1981 年には E. Witten がスピノール 2 次式に対する恒等式を用いた全く新しい方法で正值性を示した<sup>57)</sup>。本質は同じであるが、彼の方法は、J. Nester により、見通しが良くかつ ADM エネルギーのみでなく光的無限遠上に境界をもつ空間的面に含まれるエネルギーを表す Bondi エネルギーに対しても適用できる形に改良された<sup>58)</sup>。彼らの方法は次の様なものである。まず、4 次元スピノール  $\psi$  の 2 次式で表される次のような 2 階反対称テンソルを考える：

$$E^{\mu\nu} := 2e^{\mu\nu\alpha\beta}(\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\alpha\nabla_\beta\psi - \nabla_\beta\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\alpha\psi). \quad (25)$$

対応する 2 形式の無限遠 2 次元球面  $S_\infty^2 = \partial\Sigma$  での積分は、Stokes の定理より

$$\int_{\partial\Sigma} \frac{1}{2} E^{\mu\nu} dS_{\mu\nu} = \int_\Sigma \nabla_\nu E^{\mu\nu} \hat{t}^\mu d\Sigma. \quad (26)$$

ここで、 $\hat{t}^\mu$  は  $\Sigma$  の未来向きの単位法ベクトル。 $\psi$  が無限遠で定数スピノール  $\psi_0$  に漸近することを要請し、 $V_{(0)}^\mu = \bar{\psi}_0\gamma^\mu\psi_0$  とおくと、左辺は  $16\pi GP_\mu V_{(0)}^\mu$  と表されることが、 $(P_\mu) = (-E, P_i)$  の定義より示される。一方、右辺を計算すると、

$$\hat{t}_\mu \nabla_\nu E^{\mu\nu} = 2\hat{t}_\mu G_\nu^\mu V^\nu, \quad \text{mod}(\mathcal{D}\psi) \quad (27)$$

が得られる。ここで、 $e_I^\mu (I = 1, 2, 3)$  を  $\Sigma$  のベクトル場の正規直交基底、 $\mathcal{D} := \gamma^I \nabla_I^\mu \nabla_\mu$  である。また、 $V = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$  は常に未来向きの時間的ベクトルとなる。したがって、この式の右辺は非負となる。以上より、方程式  $\mathcal{D}\psi = 0$  を満たし無限遠で定数に近づく 4 個の一次独立なスピノール (**Witten** スピノール) が存在すれば、正エネルギー定理が示されたことになる。この存在は、O. Reula らにより証明されている<sup>62, 63, 64)</sup>。また、ブラックホールが存在する場合は、ホライズンからの寄与がゼロとなる境界条件を課すことができることが G.W. Gibbons らにより示されている<sup>65)</sup>。

Witten の方法は単純な上に非常に強力である。例えば、共変微分に宇宙定数や電磁場に依存した変形を施すと、電荷を持つブラックホールが存在する場合の精密化 ( $M \geq |Q|$ ) や、負の宇宙定数がある場合への拡張 ( $J_{04} \geq 0$ ,  $J_{AB} (A, B = 0, \dots, 4)$  は反 de Sitter 群  $SO(3, 2)$  の生成元に対応) が得られる<sup>65)</sup>。ポテンシャルエネルギーが下に非有界となるゲージ化された拡張超重力理論でも漸近的に反 de Sitter 時空

となる場合と同様の正エネルギー定理が成り立つ<sup>66)</sup>。また、最近では、軸対称な初期条件に対し、角運動量を考慮した精密化 ( $M \geq |J|$ ) も得られている<sup>67)</sup>

1999 年には J. Lohkamp がスカラ曲率の変形に基づく証明を、2009 年には M. Peiris が山辺の定理と Thurston の幾何学化定理を用いた証明を新たに発表している。一般に、 $M = (E^2 - P^2)^{1/2}$  より、Penrose 不等式は正エネルギー定理の改良・精密化と言える。

## 15. 高次元への展開

もともと、一般相対性理論は 4 次元世界の理論として作られたものであるが、数理的な観点からは、それを一般次元に拡張することは容易であり、古くから 4 次元に特有でない問題については、一般の次元で研究が行われてきた。また、Weyl 理論や Kaluza-Klein 理論のように、古くから、高次元時空理論のコンパクト化により 4 次元の統一理論を作ろうとする研究があったこともその背景にある。さらに、超弦理論の登場以降は、高次元に特有の現象や特性の研究も盛んになった。

本稿では、これまで特異点とブラックホールを中心に、一般相対性理論に関連した数理的研究成果を紹介してきたが、それらの多くは、次元によらずそのまま成立する。因果構造、無限遠の構造、特異点定理、ブラックホールの一般的性質、Penrose 不等式などがその例である<sup>5)</sup>。これに対して、ブラックホールの分類や一意性の問題については、4 次元と 5 次元以上では全く状況が異なる。

球形のホライズンをもつ高次元ブラックホール 5 次元以上でも、Schwarzschild 解や Reissner-Nordstrom 解の高次元版<sup>69, 70)</sup>に加えて、Kerr ブラックホールに対応する漸近的に平坦な回転ブラックホール解<sup>70)</sup>が古くから知られおり、その宇宙項入りバージョンである漸近的 de Sitter および反 de Sitter な拡張も 2004 年に発見されている<sup>71)</sup>。これらの解は Myers-Perry 解および Gibbons-Lu-Page-Pope 解と呼ばれ、 $2n+1$  次元ないし  $2n+2$  次元では質量以外に空間回転群のランクと同じ  $n$  個の独立な回転パラメータをもち、ホライズンの位相は球面に同相である。しかし、Kerr-Newman 解に対応する電荷を帯びた回転ブラックホールを表す厳密解は、Einstein-Maxwell 理論を単純に高次元化した理論では得られていない。ただし、5 次元の超重力理論から得られる Einstein-Maxwell 型理論では、4 次元の理論には対応物のない **Chern-Simons** 項と呼ばれる新たな項  $A \wedge F \wedge F$  が Lagrangian に現れる。この項を持つ理論では、質量と 2 つの角運動量以外に電荷をもつ回転解が具体的に構成されている<sup>72)</sup>。この解は、極大局所超対称性をもつ 5 次元超重

<sup>5)</sup>ただし、無限遠の構造に関しては、重力波など放射が存在する状況では、奇数次元時空の光的無限遠を Penrose による共形的枠組みで記述することはできないことが指摘されている<sup>68)</sup>。

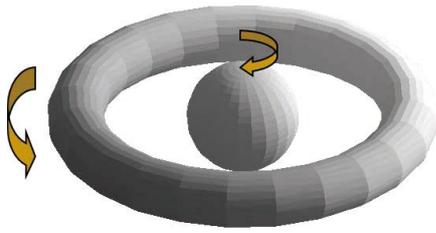


図 8: ブラックサターン

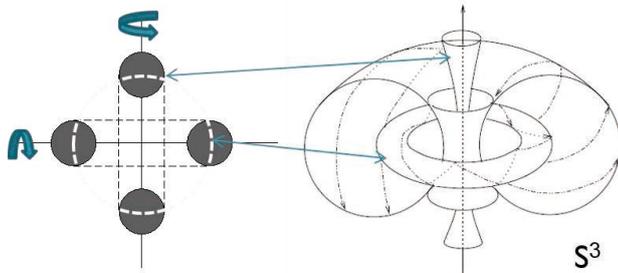


図 9 bicyclic ブラックリングの  $S^3$  による断面と Clifford 分解の対応

力理論が 10 次元超重力理論を 5 次元トーラスでコンパクト化して得られることを利用して得られた。

一般に、10 次元超重力理論を  $(10-D)$  次元トーラスでコンパクト化すると、双対変換不変性という大きな変換群を対称性として持つ  $D$  次元超重力理論が得られる。この変換はブラックホール解の電荷を変化させるので、無電荷ないし少ない電荷を持った解から電荷を持つ解や、非常に多くの電荷をもつ解を構成することができる<sup>73, 74)</sup>。この方法で、10 次元超重力理論のトーラスコンパクト化により得られる次元  $D = 5 \sim 9$  の超重力理論に対して、最も一般的な電荷と回転をもつ漸近的に平坦なブラックホール解が構成されている<sup>75, 76, 77)</sup>。また、4 次元の Kerr-Newman 解も Kerr 解から同様の方法 (Harrison 変換) により導くこともできる<sup>15)6)</sup>。この方法は、5 次元超重力理論において超対称をもつブラックホール解である BMPV 解を構成する際にも用いられ<sup>79)</sup>、ブラックホールエントロピーの D ブレーンを持ちいた微視的説明の議論において重要な役割を果たすとともに adS/CFT 対応などの新たな分野形成へとつながった<sup>80, 7)</sup>。なお、4 次元の縮退 Reissner ブラックホール ( $M = Q$ ) とこの 5 次元 BMPV 解以外に、正則で球形のホライズンを持つ超対称ブラックホール解は知られていない<sup>77)</sup>。

**ブラックリングと一意性の破れ** 高次元ブラックホールの研究において最も衝撃的であったのは、2001 年における 5 次元におけるブラックリング解の発見である<sup>7)</sup>。この解は、磁場中で加速運動する磁化ブラックホール対を表す 4 次元 DGKT 解<sup>81)</sup> を 5 次元真空解の  $S^1$  による Kaluza-Klein コ

<sup>6)</sup>歴史的には、Kerr-Newman 解は Kerr 解の複素解析接続により得られた<sup>78, 7)</sup>。

ンパクト化と見なして、5 次元に持ち上げ (この操作は酸化と呼ばれる) た上で解析接続することにより得られた漸近的に平坦で正則なブラックホール解であるが、そのホライズンは 3 次元球面ではなく  $S^2 \times S^1$  の位相を持っていた。4 次元ではこれと対応するトーラスの位相をもつホライズンはすでに述べた位相検閲定理により禁止されるが、4 次元空間では  $S^2 \times S^1$  の余空間は単連結なので、5 次元ブラックリングは禁止されない。Emparan-Reall 解は  $S^1$  方向の角運動量のみを持っていたが、2006 年には  $S^2$  方向にも同時に回転するより一般的な解が得られた<sup>7)</sup>。その発見には、三島氏、井口氏、富沢氏ら多くの日本人研究者によるソリトン法の 5 次元への応用に関する研究が本質的な役割を果たした<sup>7, 7, 82, 83)</sup>。さらに、これらの研究は、ブラックサターン (図 8)<sup>84)</sup> や直交 2 リング解 (図??)<sup>85)</sup> など、複数のブラックリングとブラックホールの複合系を表す様々な解の発見につながった<sup>77)</sup>。

これらのブラックリング解の発見は位相以外の点でも驚きをもたらした。それは、漸近的に平坦で正則定常ブラックホール解は質量、角運動量と保存電荷のみで決まるという一意性定理が 5 次元では成り立たないという事実である。まず、Pomeransky-Senkov 解は独立な 3 つのパラメータをもつが、質量と 2 つの角運動量を与えてもそれらのパラメータとして 2 つの解が存在するパラメータ領域が存在する。これらのパラメータ領域では、同時に同じ質量と角運動量をもつ Myers-Perry 解が存在する<sup>77)</sup>。次に、ブラックサターン解では中心のブラックホールと外側のリングが反対向きの角運動量をもち、全系の角運動量がゼロという解が許される<sup>84)</sup>。これは、同じ質量と角運動量をもつ中性のブラックホール解が連続無限個存在することを意味する。

これらの真空ブラックリング解に加えて、2004 年には、5 次元極小重力理論において超対称なブラックリング解が構成され<sup>86)</sup>、4 次元の Majumdar-Papapetrou 解のように、それらを複数重ね合わせた解が自由に作れることも示された<sup>87)</sup>。さらに、付加的なゲージ場を含む 5 次元超重力理論において、上で述べた変換論を用いて、荷電を持つ回転ブラックリング解が構成されたが、この解は、遠方の場の振る舞いで決まる保存電荷以外に、双極電荷と呼ばれる新たな非保存パラメータを含んでいた<sup>88)</sup>。これは、新たなタイプの連続的パラメータを含む一意性の破れの例を与えた。

**Kaluza-Klein ブラックホールとブレーンワールドブラックホール** 4 次元理論が高次元の統一理論から余剰次元のコンパクト化により得られるとすると、余剰次元のサイズ  $L$  は、その振動が励起されるのを防ぐため、現在の実験で到達できるエネルギーに相当する長さより十分小さい必要がある。しかし、依然として、 $L$  が重力の量子性が重要となる Planck スケールより十分大きい可能性はあり、その場

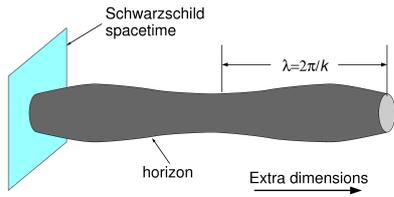


図 10: ブラックストリングの Gregory-Laflamme 不安定

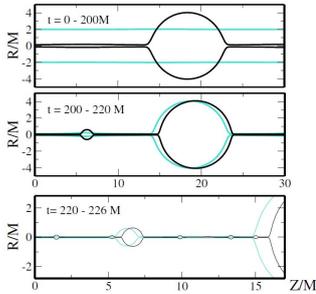


図 11: Gregory-Laflamme 不安定の末路

合、高エネルギー現象において時空の高次元性が見えることになる。この可能性が素粒子理論での階層性問題を解決する方法として取り上げられて以降<sup>7, 89)</sup>, 低エネルギーでは 4 次元ブラックホールに見える高次元ブラックホール、いわゆる Kaluza-Klein ブラックホールの研究が盛んになった。

Kaluza-Klein ブラックホールには 2 つの種類がある。一つは、単に 4 次元ブラックホール時空と平坦な余剰次元  $R^n$  の直積となるブラックブレン解で、ホライズンは  $S^2 \times \mathbb{R}^n$  という位相をもつ。その代表格が  $n=1$  のブラックストリング解であるが、その研究は実に豊かな発展を生み出した。その契機となったのは、R. Gregory と R. Laflamme による Schwarzschild ブラックストリング解の研究である。彼女らは、4 次元時空の観点からは球対称で余剰次元方向に波長  $\lambda$  で周期的に変動する摂動に対するこの解の安定性を調べ (図 10),  $\lambda/M$  ( $M$  はブラックホールの質量) がある臨界値を超えると不安定となること、類似の不安定が一般のブラックブレンでも起きることを発見した (**Gregory-Laflamme 不安定**)<sup>90)</sup>。不安定性が存在すると直ちに問題になるのが、その行き先である。一つの可能性は、もっと安定な別の解がありそれに近づくこと<sup>91)</sup>, もう一つは、特異性をもつ末路である。前者の可能性は、非一様ブラックストリング解や  $\mathbb{R}^4 \times S^1$  に収まる 5 次元の球形ブラックホール解の発見につながったが、ブラックホール熱力学の観点や位相的な障害から、これらが終状態である可能性は否定された<sup>92, 93, 94)</sup>。そこで、後者の可能性を調べるため、高精度の数値シミュレーションが行われた。結果は、まず不安定性により  $S^2 \times \mathbb{R}$  の位相をもつホライズンがくびれ、球形のホライズンが細いひもでつながった状態に移行するが、さらに時間がたつとこのひもにさらにくびれが生じ、最初

と同じ過程が繰り返され、結果的に自己相似的な構造に有限時間で移行するという驚くべきものであった<sup>95)</sup> (図 11)。

もう一つのタイプの Kaluza-Klein ブラックホールは、直積では書けないものである。最もよく知られている例は、5 次元の KK ブラックホールである。まず、4 次元 Euclidean 空間において半径  $r$  一定の球面  $S^3(r)$  を  $S^2$  を基底として  $S^1$  ファイバーするファイバー束と見なす (Hopf-fibring)。このとき、Euclidean 計量は極座標  $(r, \theta, \phi, \psi)$  を用いて、 $ds^2 = dr^2 + r^2\omega^2 + r^2d\Omega_2^2$  と表される。ここで  $\omega$  は  $S^3$  上の不変 1 形式  $\omega = d\psi + \cos\theta d\phi$  である。当然、 $r \rightarrow \infty$  で  $S^1$  の長さは  $r$  に比例して無限に増大する。しかし、 $g_{\psi\psi}$  ( $\omega^2$  の係数) を  $r \rightarrow \infty$  で微小な値に近づく関数  $h(r)^2$  で置き換えると、新たな空間は無遠くでは 4 次元空間を 3 次元 Euclidean 空間にねじれた  $S^1$  でコンパクト化した構造をもつ。この改変を 5 次元の漸近的に平坦なブラックホールに施すことができれば、ホライズン近傍のみが 5 次元的で、ホライズンから十分離れると 4 次元的となる Kaluza-Klein ブラックホールが得られることになる。この様な解は、4 次元から見ると磁場を伴ったブラックホール解となる。Kaluza-Klein ブラックホールの研究は古く、1980 年代に始まっているが<sup>96, 97)</sup>, 2000 年代になり研究が活発になり、5 次元 Einstein-Maxwell 理論や超重力理論での電荷をもつ (多重) 回転ブラックホール解が発見されているが、まだ組織的な研究は成されていない。

高次元理論から 4 次元理論を得る処方として、Kaluza-Klein 型コンパクト化以外に、ブレンワールド模型がある。この模型では、我々の住む 4 次元時空を 5 次元時空の境界と見なすことにより、5 次元の世界の法則と 4 次元の世界の法則を結びつける。よく知られているものとしては、5 次元として adS 型時空を用いる RS 模型<sup>89, 98)</sup>, 5 次元として Minkowski 時空を用いる DGP 模型<sup>99)</sup>, M 理論のヘテロ型コンパクト化に背景をもつ Horava-Witten 模型<sup>100)</sup> がある。このブレンワールド模型でのブラックホールは、5 次元時空でのホライズンが 4 次元ブレン上に境界を持ち、ブレンの変形も同時に解かないといけないため、具体的な解を求めることは大変難しく、未だに 4 次元球対称解ブラックホール解に相当する非回転解さえ解析的には求まっていない。また、数値的に解を探す試みも精力的に行われたが、解の存在について研究者の間で合意ができていない<sup>101, 102, 103)</sup>。

**高次元ブラックホールの不安定性** もう一つ最近の高次元ブラックホール研究がもたらした驚くべき発見は、多様なブラックホールの不安定性である。4 次元ブラックホールについては、Schwarzschild ブラックホール<sup>104)</sup>, Kerr ブラックホール<sup>105)</sup> 共に摂動的に安定であることが古くから知られていた。また、高次元でも、球対称ブラックホールにつ

いては著者らにより安定性が示されている<sup>106)</sup>.

これに対し、回転するブラックホールについては、球形のホライズンをもつブラックホールでも状況が異なる。その原因の一つは、4次元と異なり、6次元以上では2次元面内での回転する単純回転MP解の回転角運動量に上限がない点である。Empanan と Myers は、これらのブラックホールが高速回転でブラックブレンと類似の構造を持つことから、Gregory-Laflamme タイプの不安定性が起きることを予想していた<sup>107)</sup>。O.J.C. Dias らは、不安定性がちょうど発生するパラメータ値では、解の分岐が起きるため、定常的な摂動解が存在することに着目し、Empanan と Myers の予言が正しいことを示すと共に、不安定性が起きる臨界角運動量値と不安定性のパターンを具体的に求めることに成功した<sup>108)</sup>。ただし、彼らの解析は、手法の制限から、回転方向に軸対称な摂動に限られていた。これに対して、吉野氏と柴田氏は、この制限を一挙に取り除き、完全な相対論的数値シミュレーションによりこの問題を研究した<sup>109)</sup>。その結果、彼らは、Dias らの求めた臨界角運動量より小さな角運動量でバーモード不安定が起きることを見いだした。これは、現実的には、Empanan-Myers 型の不安定性は起きないことを意味する。さらに、彼らは、不安定性の進化を追い、最初は成長するものの振幅がある程度大きくなると、非線形性が重要となる前に、重力波放出により不安定性によって生じた変形が減衰し、最終的に臨界角運動量より小さな角運動量のブラックホールに落ち着くことを見いだした。この結果は、不安定性は別の解の系列か特異な終状態に移行することを意味すると信じていた多くの研究者に衝撃を与えた。

## 16. 終わりに

以上見てきたように、一般相対性理論は、特異点とブラックホールというテーマに限っても、この100年間、非常に豊かな数理的成果をもたらしてきた。もちろん、4次元の枠内でもまだまだ未解明の問題も多いが、超弦理論の研究を背景にして近年急速に進化した高次元ブラックホールの研究は、高次元には4次元とは比べものにならないほど豊かな世界が広がっていることを示しつつある。我々は、6次元以上でどのような形状のブラックホールが存在するのかさえ全く知らないのである。

- 1) Hawking, S. and Ellis, G.: *The Large Scale Structure of Space-time* (Cambridge Univ. Press, 1973).
- 2) Tipler, F.: Singularities and causal violation, *Ann. Phys.* **108**, 1–36 (1977).
- 3) Hawking, S.: Chronology protection conjecture, *Phys. Rev. D* **46**, 603–611 (1992).

- 4) Krasnikov, S.: Singularity free WEC respecting time machine, *Class. Quantum Grav.* **15**, 997 (1997).
- 5) Morris, M., Thorne, K. and Yurtsever, U.: Wormholes, time machines, and the weak energy condition, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 1446–1449 (1988).
- 6) Penrose, R.: Conformal treatment of infinity, in DeWitt, C. and DeWitt, B. eds., *Relativity, Groups and Topology*, 1963 Les Houches Lectures, 565–586, New York (1964), Gordon and Breach.
- 7) Tipler, F.: Energy conditions and spacetime singularities, *Phys. Rev. D* **17**, 2521–2528 (1978).
- 8) Borde, A.: Geodesic focusing, energy conditions and singularities, *Class. Quantum Grav.* **4**, 343–356 (1987).
- 9) Ellis, G. and Schmidt, B.: Singular space-times, *Gen. Rel. Grav.* **8**, 915–954 (1977).
- 10) Tipler, F., Clarke, C. and Ellis, G.: Singularities and Horizons — A Review Article, in Held, A. ed., *General Relativity and Gravitation, vol.2*, 97–206, Plenum Press (1980).
- 11) Geroch, R.: What is a singularity in general relativity?, *Ann. Phys.* **48**, 526–540 (1968).
- 12) Schmidt, B.: A new definition of singular points in general relativity, *Gen. Rel. Grav.* **1**, 269–280 (1971).
- 13) Clarke, C.: *The Analysis of Space-Time Singularities* (Cambridge Univ. Press, 1993).
- 14) Clarke, C.: Local extensions in singular space-times, *Comm. Math. Phys.* **32**, 205–214 (1973).
- 15) 佐藤文隆, 小玉英雄: 一般相対性理論 (岩波書店, 2000).
- 16) Penrose, R.: Gravitational collapse: the role of general relativity, *Riv. Nuovo Cimento* **1**, 252–276 (1969).
- 17) Penrose, R.: Singularities and time asymmetry, in Hawking, S. and Israel, W. eds., *General Relativity: An Einstein Centenary Survey*, 531–638, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1979).
- 18) Wald, R. M.: Gravitational Collapse and Cosmic Censorship, *gr-qc/9710068* (1997).
- 19) Shapiro, S. L. and Teukolsky, S. A.: Formation of naked singularities: The violation of cosmic censorship, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 994–997 (1991).

- 20) Wald, R. M. and Iyer, V.: Trapped surfaces in the Schwarzschild geometry and cosmic censorship, *Phys. Rev. D* **44**, R3719–R3772 (1991).
- 21) Poisson, E. and Israel, W.: Internal structure of black holes, *Phys. Rev. D* **41**, 1796–1809 (1990).
- 22) Ori, A.: Inner structure of a charged black hoole: an exact mass-inflation solution, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 789–792 (1991).
- 23) Burko, L.: Survival of the black hole’s Cauchy horizon under non-compact perturbations, *Phys. Rev. D* **66**, 024046 (2002).
- 24) Christodoulou, D.: On the global initial value problem and the issue of singularities, *Class. Quantum Grav.* **16**, A23–35 (1999).
- 25) Choptuik, M.: *Phys. Rev. Lett.* **70**, 9 (1993).
- 26) Gundlach, C. and Martín-García, J.: Critical phenomena in gravitational collapse, *Living Rev. Relativity* **10**, 5 (2007).
- 27) Gibbons, G.: in Willmore, T. and Hitchin, N. eds., *Global Riemmanian Geometry*, Ellis Horwood, Chichester (1984).
- 28) Gibbons, G.: Collapsing Shells and the Isoperimetric Inequality for Black Holes, *Class. Quantum Grav.* **14**, 2905 (1997).
- 29) Trudinger, N.: *Ann. Inst. Henri Poincaré* **11**, 411 (1994).
- 30) Bray, H. L. and Chruściel, H. L.: The Penrose Inequality, *gr-qc/0312047* (2003).
- 31) Jang, P. and Wald, R.: The positive energy conjecture and the cosmic censor hypothesis, *J. Math. Phys.* **18**, 41 (1977).
- 32) Huisken, G. and Ilmanen, T.: The inverse mean curvature ow and the Riemannian Penrose inequality, *J. Diff. Geom.* **59**, 353 (2001).
- 33) Chruściel, P., Costa, J. and Heusler, M.: Stationary black holes: uniqueness and beyond, *Living Reviews* **15**, 7 (2012).
- 34) Heusler, M.: *Black Hole Uniqueness Theorems* (Cambridge Univ. Press, 1996).
- 35) Israel, W.: Event horizon in static vacuum space-times, *Phys. Rev.* **164**, 1776–1779 (1967).
- 36) Bunting, G. and Alam, Masood-ul A.: Nonexistence of multiple black holes in asymptotically Euclidean static vacuum space-time, *Gen. Rel. Grav.* **19**, 147 (1987).
- 37) Ruback, P.: A uniqueness theorem for wormholes in quantum gravity, *Class. Quantum Grav. Lett.* **6**, 21–24 (1989).
- 38) Alam., Masood-ul A.: Uniqueness proof of static charged black holes revisited, *Class. Quantum Grav.* **9**, L53–L55 (1992).
- 39) Hawking, S.: Black holes in general relativity, *Comm. Math. Phys.* **25**, 152–166 (1972).
- 40) Chruściel, P. T. and Wald, R. M.: On the topology of stationary black holes, *Class. Quantum Grav.* **11**, L147–152 (1994).
- 41) Friedman, J., Schleich, K. and Witt, D.: Topological censorship, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 1486–1489 (1993).
- 42) Ernst, F. J.: New formalism of the axially symmetric gravitational field problem, *Phys. Rev.* **167**, 1175 (1968).
- 43) Ernst, F. J.: New formalism of the axially symmetric gravitational field problem II, *Phys. Rev.* **168**, 1415 (1968).
- 44) Carter, B.: An axisymmetric black hole has only two degrees of freedom, *Phys. Rev. Lett.* **26**, 331–333 (1971).
- 45) Robinson, D.: Classification of back holes with electromagnetic fields, *Phys. Rev. D* **10**, 458–460 (1974).
- 46) Carter, B.: The general theory of the mechanical, electromagnetic and thermodynamic properties of black holes, in S.W.Hawking, and Israel, W. eds., *General Relativity: An Einstein centenary survey*, 294–369, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1979).
- 47) Mazur, P. O.: Proof of uniqueness of the Kerr-Newman black hole solution, *J. Phys. A* **15**, 3173–3180 (1982).
- 48) Weinstein, G.: N-Black Hole Stationary and Axially Symmetric Solutions of the Einstein-Maxwell Equations, *Comm. Partial Diff. Eq.* **21**, 1389–1430 (1996).
- 49) Belinsky, V. and Zakharov, V.: Integration of the Einstein Equations by the Inverse Scattering Problem Technique and the Calculation of the Exact

- Soliton Solutions, *Sov. Phys.—JETP* **48**, 985–994 (1978).
- 50) Varzugin, G.: Equilibrium configuration of black holes and the inverse scattering method, *Theor. Math. Phys.* **111**, 667 (1997).
- 51) Neugebauer, G. and Hennig, J.: Stationary two-black-hole configurations: A non-existence proof, *J. Geom. Phys.* **62**, 613–630 (2012).
- 52) Volkov, M. and Gal'tsov, D.: Non-Abelian Einstein-Yang-Mills Black Holes, *Sov. Phys. JETP Lett.* **50**, 346 (1989).
- 53) Bartnik, R. and McKinnon, J.: Particlelike solutions of the Einstein-Yang-Mills equations, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 141–144 (1988).
- 54) Volkov, M. S. and Gal'tsov, D. V.: Gravitating Non-Abelian Solitons and Black Holes with Yang-Mills Fields, *Phys. Reports* **319**, 1–83 (1999).
- 55) Schoen, R. and Yau, S.-T.: On the proof of the positive mass conjecture in general relativity, *Comm. Math. Phys.* **65**, 45–76 (1979).
- 56) Schoen, R. and Yau, S.-T.: Proof of the positive mass theorem. II., *Comm. Math. Phys.* **79**, 231–260 (1981).
- 57) Witten, E.: A new proof of the positive energy theorem, *Comm. Math. Phys.* **80**, 381–402 (1981).
- 58) Nester, J.: A New gravitational energy expression with a simple positivity proof, *Phys. Lett. A* **83**, 241 (1981).
- 59) Ashtekar, A. and Horowitz, : Energy-momentum of isolated systems cannot be null, *Phys. Lett. A* **89**, 181–184 (1982).
- 60) Beig, R. and Chruściel, P.: Killing vectors in asymptotically flat space-times: I. asymptotically translational Killing vectors and the rigid positive energy theorem, *J. Math. Phys.* **37**, 1939 (1996).
- 61) O'Murchadha, N.: How large can a star be ?, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 2466 (1986).
- 62) Reula, O.: Existence theorem for solutions of Witten's equation and nonnegativity of total mass, *J. Math. Phys.* **23**, 810–814 (1982).
- 63) Reula, O. and Tod, K.: Positivity of the Bondi energy, *J. Math. Phys.* **25**, 1004–1008 (1984).
- 64) Parker, T. and Taubes, C.: On Witten's proof of the positive energy theorem, *Comm. Math. Phys.* **84**, 223–238 (1982).
- 65) Gibbons, G., Hawking, S., Horowitz, G. and Perry, M.: Positive Mass Theorems for Black Holes, *Comm. Math. Phys.* **88**, 295 (1983).
- 66) Gibbons, G., Hull, C. and Warner, N.: THE STABILITY OF GAUGED SUPERGRAVITY, *Nucl. Phys. B* **218**, 173–190 (1983).
- 67) Dain, S.: Geometric inequalities for axially symmetric black holes, *Class. Quantum Grav.* **29**, 073001 (2012).
- 68) Hollands, S. and Ishibashi, A.: Asymptotic flatness at null infinity in higher dimensional gravity, *hep-th/0311178* (2003).
- 69) Tangherlini, F. R.: *Nuovo Cimento* **27**, 636 (1963).
- 70) Myers, R. and Perry, M.: Black holes in higher dimensional space-times, *Ann. Phys.* **172**, 304–347 (1986).
- 71) Gibbons, G., Lu, H., Page, D. and Pope, C.: Rotating Black Holes in Higher Dimensions with a Cosmological Constant, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 171102 (2004).
- 72) Cvetič, M. and Youm, D.: General Rotating Five Dimensional Black Holes of Toroidally Compactified Heterotic String, *Nucl. Phys. B* **476**, 118–132 (1996).
- 73) Sen, A.: Black Hole Solutions in Heterotic String Theory on a Torus, *Nucl. Phys. B* **440**, 421–440 (1995).
- 74) Cvetič, M. and Hull, C.: Black holes and U-duality, *Nucl. Phys. B* **480**, 296 (1996).
- 75) Llatas, P.: Black hole solutions in heterotic string theory on a torus, *Phys. Lett. B* **397**, 63 (1997).
- 76) Cvetič, M. and Youm, D.: Near BPS saturated rotating electrically charged black holes as string states, *Nucl. Phys. B* **477**, 449 (1996).
- 77) Emparan, R. and Reall, H.: Black Holes in Higher Dimensions, *Living Rev. Rel* **11**, 6 (2008).
- 78) Newman, E., Couch, E., Chinnapared, K., A., F., Prakash, A. and Torrence, R.: Metric of a rotating charged mass, *J. Math. Phys.* **6**, 918 (1965).

- 79) Breckenridge, J., Myers, R., Peet, A. and Vafa, C.: D-branes and spinning black holes, *Phys. Lett. B* **391**, 93–98 (1997).
- 80) Maldacena, J.: The Large N Limit of Superconformal Field Theories and Supergravity, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2**, 231–252 (1998).
- 81) Dowker, F., Gauntlett, J. P., Giddings, S. B. and Horowitz, G. T.: On pair creation of extremal black holes and Kaluza-Klein monopoles, *Phys. Rev. D* **59**, 2662 (1994).
- 82) Iguchi, H. and Mishima, T.: Solitonic generation of five-dimensional black ring solution, *Phys. Rev. D* **73**, 121501 (2006).
- 83) Tomizawa, S., Iguchi, H. and Mishima, T.: Relationship between solitonic solutions of five-dimensional Einstein equations, *Phys. Rev. D* **74**, 104004 (2006).
- 84) Elvang, H. and Figueras, P.: Black Saturn, *JHEP* **05**, 050 (2007).
- 85) Izumi, K.: Orthogonal black di-ring solution., *Prog. Theor. Phys.* **119**, 757–774 (2008).
- 86) Elvang, H., Emparan, R., Mateos, M. and Reall, H.: A supersymmetric black ring, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 211302 (2004).
- 87) Gauntlett, J. and Gutowski, J.: General Concentric Black Rings, *Phys. Rev. D* **71**, 024033 (2005).
- 88) Elvang, H., Emparan, R., Mateos, D. and Reall, H.: Supersymmetric black rings and three-charge super-tubes, *Phys. Rev. D* **024033** (2004).
- 89) Randall, L. and Sundrum, R.: Out of this world supersymmetry breaking, *Nucl. Phys. B* **557**, 79 (1999).
- 90) Gregory, R. and Laflamme, R.: Black Strings and p-Branes are Unstable, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 2837–2840 (1993).
- 91) Horowitz, G. T. and Maeda, K.: Fate of the black string instability, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 131301:1–4 (2001).
- 92) Kol, B.: The Phase Transition between Caged Black Holes and Black Strings - A Review, *Phys. Rep. C* **422**, 119–65 (2006).
- 93) Harmark, T., Niarchos, V. and Obers, N.: Instabilities of black strings and branes, *Class. Quant. Grav.* **24**, R1–90 (2007).
- 94) Obers, N.: Black Holes in Higher-Dimensional Gravity, *Lect. Notes Phys.* **769**, 211 (2009).
- 95) Lehner, L. and Pretorius, F.: Black Strings, Low Viscosity Fluids, and Violation of Cosmic Censorship, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 101102 (2010).
- 96) Dobiash, P. and Maison, D.: Stationary, spherically symmetric solutions of Jordan’s unified theory of gravity and electromagnetism, *Gen. Rel. Grav.* **14**, 231 (1982).
- 97) Gibbons, G. and Wiltshire, D.: Black Holes in Kaluza-Klein Theory, *Ann. Phys.* **167**, 201–223 (1986).
- 98) Randall, L. and Sundrum, R.: Large mass hierarchy from a small extra dimension, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 3370–3 (1999).
- 99) Dvali, G., Gabadadze, G. and Porrati, M.: 4D gravity on a brane in 5D Minkowski space, *Phys. Lett. B* **485**, 208–14 (2000).
- 100) Horava, P. and Witten, E.: Eleven-dimensional supergravity on a manifold with boundary, *Nucl. Phys. B* **475**, 94 (1996).
- 101) Yoshino, H.: On the existence of a static black hole on a brane, *JHEP* **0901**, 068 (2009).
- 102) Figueras, P.: Braneworld Black Holes, *Springer Proc. Math. Stat.* **60**, 37–53 (2014).
- 103) Abdolrahimi, S., et al.: Spectral methods in general relativity and large Randall-Sundrum II black holes, *JCAP* **1306**, 039 (2013).
- 104) Vishveshwara, C.: Generalization of the Schwarzschild surface to arbitrary static stationary metrics, *J. Math. Phys.* **9**, 1319–1322 (1968).
- 105) Whiting, B.: Mode stability of the Kerr black hole, *J. Math. Phys.* **30**, 1301–1305 (1989).
- 106) Kodama, H.: Perturbations and Stability of Higher-Dimensional Black Holes, *Lect. Notes Phys.* **769**, 427–70 (2007).
- 107) Emparan, R. and Myers, R. C.: Instability of Ultra-Spinning Black Holes, *JHEP* **0309**, 025 (2003).
- 108) Dias, O., Figueras, P., Monteiro, R., Santos, J. and Emparan, R.: Instability and new phases of higher-dimensional rotating black holes, *Phys. Rev. D* **80**, 111701R (2009).

- 109) Shibata, M. and Yoshino, H.: Bar-mode instability of rapidly spinning black hole in higher dimensions: Numerical simulation in general relativity, *Phys. Rev. D* **81**, 104035 (2010).

#### 著者紹介

顔写真

小玉英雄氏: 専門は重力理論, 宇宙論. 特に, 近年は宇宙現象による究極理論探索を中心テーマとして研究を行っている.

(2020年9月15日原稿受付)

#### Mathematical aspects of general relativity

Hideo Kodama

abstract: