話題

時空の次元数について

小玉英雄

空間がなぜ3次元であるかということは，人類が自然のもつ秩序を理解しようとする試みを始めて以来常に最も大きくかつ基本的な問題の一つであった．Aristoteles を筆頭とするギリシャ・ローマの哲学者達もこの問題を解決しようと試みたが，結局3次元性の意味を明確にしたにすぎなかった[1]．それからの長い暗黒時代の後に，Newton が初めて自然の法則性を抽出して，それにコンパクトな数学的表現を与えることに成功したが，彼もこの問題に対しては無力であった．彼にとって空間は絶対的な容器にすぎず，また彼の法則の構造は，すべての現象をその絶対空間における質点の運動の問題に分解しようとするものであったために，空間の次元数はアプリオリな仮定であり説明の対象となりえないものであった[1]．

この問題に新たな進展をもたらしたのは，場の物理学の誕生と発展である．Faraday, Maxwell, Hertz らによって定式化された電磁場の理論は，本質的に新しい要素を内在的に含んでいた．この要素の意味を初めて正しく理解し，われわれをより深い時空認識へと導いたのが Einstein であった．彼は，場の概念を基礎として時間・空間の概念を再分析することにより，内在する物質の従う物理法則と時間・空間の構造とが不可分の関係にあることを特殊相対性理論として定式化し，さらに重力の問題の分析を通して，時空と物質のダイナミクスとしての一般相対性理論へと結晶させた．一方，今世紀における物質の構造の研究は，古典物理とは全く異質な量子物理を生み出し，微視的世界の豊かな構造をあばき出した．今世紀におけるこの二つの大きな理論的成果は，われわれの時空が4次元であることについて何か教えてくれるであろうか．

特殊相対性理論

特殊相対性理論における時空の次元の影響は，Lorentz 群の構造と波の伝播の性質の問題に集約される．Lorentz 群については，次元依存性は本質的にその部分群である回転群の問題に帰着されてしまう．空間の次元が2のとき，この群は Abel 群になってしまい，その表現は連続な実数によって特徴づけられる[2]．これは，スピンが連続な実数値をとりうることを意味する．一方，空間の次元が4次以上のとき，回転群の表現は3次元のときのように1個の離散的なパラメータによって分類することはできず，スピンの構造は複雑になる[2]．また，角運動量は本質的にテンソル量になってしまい，同様の理由によって，電場はいぜんとしてベクトル量であるが磁場はもはやベクトル的にとらえることができなくなる．磁場-電場対称性，磁力線などの概念は意味を失う．われわれの空間が3次元でなかったら，Faraday は電磁場の法則を発見できなかったかもしれない．

Weyl は，この回転群の構造の大きな次元依存性に深い意味を見出そうとしている[3]．確かに，この問題が素粒子のスピンの構造と不可分の関係にあることは興味深い．実際，曲がった時空においてスピノール場を定義しようとすると，Fermi 粒子はそれ自身で，背景の時空と独立な固有の Lorentz 枠の存在を要求することがわかる[4]．これは素粒子の内部構造としてのスピンの問題の解明が，逆に，その外部世界の空間の構造の問題への手掛りを与える可能性を示唆しているように思われる．しかし，現在の段階では，電子にスピン以外の内部構造はみとめられておらず[5]，また，Bose 粒子の存在と役割について深い理解をもたらした統一ゲージ理論[6]などの場の理論も，Fermi 粒子に関してはそのアプリオリな存在を仮定しており，われわれはこの問題に対して無力である．

ところで，特殊相対性理論の発見の契機となった電磁場の法則は，Lorentz 不変性以外に，時間・空間の長さのスケールの変換に対する不変性をもっている．実は，さらに各点ごとでの独立なスケールの変換——共形変換に対しても不変であることがわかる[3]．この性質はスピン1で質量が0の場，特にゲージ場に共通の性質であるが，4次元でのみ成立するものである[7]．一般に，物理法則が共形変換に対して不変であることは，長さとか時間間隔の絶対的な値が意味を失い，物理法則がすべてのスケールにわたって本質的に等質的であることを意味する．実際は，われわれの世界はこのような構造をもっていない．それは，特に重力と質量の存在がこの不変性を破るためである．質量の問題は，われわれの世界のスケールを決めているのが微視的な法則であることを意味している．一方，重力については，この共形不変性との関係が重力の量子化の問題と深く関連していることが指摘されているが[8]，現在の段階では，この不変性の深い意

味についてはまだ十分わかっていない.

次に波の伝播の問題を考えてみよう．よく知られているように，この問題に関しては，偶数次元と奇数次元とでは大きな差が現われる[3][9]．奇数次元の時空では，HUYGENSの原理が成立せず，その結果，粒子から放出された波のもつ運動量は空間にたまってしまい，粒子は自分が過去に放出した波と相互作用することになる．したがって，一般に粒子系の時間発展はその系の過去の全歴史に依存してしまい，因果構造が複雑になる．偶数次元ではHUYGENSの原理は成立し，このような困難はおこらないが，6次元以上になるとD'ALEMBERT演算子のGREEN関数の輻射を表わす部分が時間について高階の微分を含むようになるために[10]，別の問題がおこってくる．たとえば，電流j^μによって作られる電磁場のポテンシャルA^μの輻射部分は，LORENTZゲージのもとで，時空の次元をnとするとき，次のように表わされる．

$$A^\mu(t,\boldsymbol{r})\sim C_n\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{n/2-2}\int\frac{j^\mu(t-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|,\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^{n/2-1}}\mathrm{d}\boldsymbol{r}' \tag{1}$$

この時間微分のために，粒子からのエネルギー輻射率は加速度の高階時間微分およびその高次のベキに依存するようになり，粒子から波の形でのエネルギー放出は不活発となる．

一般相対性理論

このように，特殊相対性理論の世界では，次元の変化は定性的に大きな違いをもたらさないが，重力の問題を考慮すると事情が変わってくる．一般相対性理論では，時空の因果構造を記述するメトリック$g_{\mu\nu}$は，EINSTEIN方程式，

$$G_{\mu\nu}[g]\equiv R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R=kT_{\mu\nu} \tag{2}$$

によって物質のエネルギー・ストレステンソル$T_{\mu\nu}$と結びついている[11]．ここで，$R_{\mu\nu}$, RはそれぞれRICCI曲率，RICCIスカラーを表わす．EINSTEIN理論において注目すべきことは，この方程式の左辺の部分が，時空構造がメトリックだけで記述できると仮定するかぎり，不変性と因果性の要請によって一意的に決まってしまうことである[11]．したがって，この方程式は，時空の構造と物質の相互作用を記述する理論として，時空の次元によらない，非常に高い一般性をもっている．そこで，このEINSTEIN方程式を手掛りとして，重力場が4次元以外の時空でどのような振舞いをするか調べてみよう．

時空が2次元の場合，$G_{\mu\nu}\equiv0$となり[12]，物質と時空構造とは完全に分離してしまう．3次元時空では，RIEMANNの曲率テンソルはRICCIテンソル$R_{\mu\nu}$によって完全に表わされ独立な自由度をもたないために[12][15]，物質の存在しない時空領域($T_{\mu\nu}=0$)では曲率テンソルがすべて0となり，時空はその領域でMINKOWSKI的になってしまう．これは重力が接触力的な短距離力となってしまうことを意味し，特にブラックホールを表わす解は存在しない．この状況は，静的な球対称解を調べてみるとよくわかる．遠方でMINKOWSKI的になるという条件のもとで，密度が$\rho(r)$で分布している相互作用のないガスに対する解は次のようになる．

$$\mathrm{d}s^2=-\mathrm{d}t^2+\left[1+2k\int_r^\infty r\rho\,\mathrm{d}r\right]^{-1}\mathrm{d}r^2+r^2\,\mathrm{d}\varphi^2 \tag{3}$$

$r\geqq R$で$\rho=0$とすると，この領域でメトリックは完全にMINKOWSKI時空のものと一致する．また，どのような密度分布に対しても，$\rho\geqq0$であるかぎり，$r=$const. 面が0になることはない．さらに，この解の表わす時空では，$r=0$を中心とする円の半径と円周の長さの比が，半径を0にした極限でも2πにならず，原点は円錐の頂点の近傍のような特異点となっていることがわかる．このように，一般に3次元時空では，物質の存在する所に特異点が存在することがわかる．このような重力場の挙動は，NEWTONの重力理論と対照的である．NEWTON理論においては，重力ポテンシャルϕは，POISSON方程式$\Delta\phi=k'\rho$に従うが，2次元空間におけるLAPLACE演算子のGREEN関数は$\log r$のような挙動を示すので[13]，重力の影響は非常に遠方まで及び，すべての系は重力的に束縛されてしまう．1次元空間では，この状況はさらにひどくなる．

一方，時空が5次元以上のとき，EINSTEIN理論は4次元のときと定性的に異ならないようにみえる．重力場は，長距離力を表わす静的部分と重力波の自由度を表わす動的部分からなり[11][14]，弱場近似でNEWTON理論を再現する[11]．静的な球対称解は，SCHWARZSCHILD解と同様の構造をもち，一般に重力崩壊はブラックホールを作る．また，重力が普遍的な非常に強い引力であることを表わす特異点定理も，その議論が全く次元に依存しないために，高次元でも成立する[15]．しかし，2体系の挙動を調べてみると大きな相異があることに気づく．この状況はNEWTON近似でみるとわかりやすい．重心系における運動方程式の動径成分は次のようになる．

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2+V_{\mathrm{eff}}=E\qquad V_{\mathrm{eff}}=\frac{l^2}{2r^2}-\frac{\kappa}{r^{n-3}} \tag{4}$$

(4)で与えられるV_{eff}の挙動を調べるとわかるように，$n=4$では，$r\sim0$で遠心力ポテンシャルが重力にうちかつため安定な束縛運動が存在するが，$n\geqq5$では逆に重力の方が強くなるために，エネルギーが負の粒子は，完全

な円運動を除いて，必ず有限な時間内に無限大の速度で原点に衝突してしまう．状況は一般相対性理論でも同じで，重力波の放射を無視しても安定な星系は存在しない．さらにブラックホールは，作用範囲は狭まるものの非常に強い吸収力をもつ天体となり，われわれの宇宙のような安定な束縛運動の存在を背景とするさまざまな階層構造は不可能となるであろう．

量子論

量子論の一つの大きな成果は，原子の安定性を説明することに成功したことである．ところが，上記の重力ポテンシャルの挙動の次元依存性は，COULOMB ポテンシャルが同様の挙動を示すために，原子の安定性にも影響を及ぼすことがわかる．電子の波動関数の動径成分は次の方程式に従う．

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}r^2}+\frac{n-2}{r}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}+\left(E+\frac{\kappa}{r^{n-3}}-\frac{l(l+1)}{r^2}\right)u=0 \quad (5)$$

これより決まるエネルギースペクトルは，$n\geq5$ のとき負のエネルギー領域でも連続で下に有界でない．このことは，$n=4$ のとき，$|E|$ を大きくすることは，r のスケール変換により，ポテンシャルを浅くすることに対応するのに対して，$n\geq6$ では逆にポテンシャルを深くすることに対応することに着目すると容易に理解される．特に $n=5$ では，$|E|$ は r のスケール変換に完全に吸収されてしまう．時空が4次元の場合でも，よく知られているように，中心にある源の電荷が大きくなると真空は不安定となるが[16]，5次元以上での状況はさらにたちの悪いものである．原子は，非相対論の範囲でもフォトンの自然放出に対して不安定であり，PAULI の原理は何の役にも立たない．さらに相対論的に反粒子の効果を考慮すると，中心電荷がどんなに小さくても，電子・陽電子の対生成に対して真空が不安定となる．しかも，波動関数は規格化は可能であるが中心で特異性をもち，中心核との重複が大きいため，非常に核に捕獲されやすくなる．いずれにしても，原子は安定に存在しえなくなる．

現代の場の理論は，QED の成功に味をしめ，相互作用のくり込み可能性を重視する傾向にあるが，この点でも，よく知られているように，次元を高くすることは状況を悪化させる[17]．実際，5次元以上の時空では，くり込み可能な相互作用は一般に存在しない．特に QED はくり込み不可能となる．これは，高次元では短距離ほど相互作用が複雑になることを意味する．一方，逆に次元を下げると，一般に赤外不安定が生じるが[18]，これは，低次元ではすべての相互作用が非常に遠方まで及ぶようになり，物理系の均一化の傾向が強くなることを意味する．4次元では両方の問題が生じるが，多くの場合，いずれも性質のよいものである．

このような分析を素粒子の構造の問題までおし進めることはできない．それは，一つには，われわれがこの領域で十分満足できる理論をもたないことにある．しかしもっと大きな理由は，このような微小領域では時空の4次元性は経験的に十分確立されているとはいい難く，むしろ時空概念自体の大幅な変更を強いられる可能性があるからである[19]．特に，この領域で重力の果たす役割は未知数である．

以上の簡単な考察からもわかるように，一般相対性理論と量子論とは，われわれの世界が安定でさまざまな階層構造をもつのは，時空が4次元であることと深くかかわっていることを教えてくれる．しかし，結局，現代の物理学も，時空の4次元性をより基本的な原理から説明することはできない．おそらく，なんらかの形で4次元からのずれが生じる階層の発見によって初めて，われわれの時空が4次元である理由を真に理解することができるのであろう．

(Hideo KODAMA 京都大学理学部物理第二教室)

文 献

(1) エル・ヤ・シュテイマン: 空間と時間の物理学, 水戸巌訳, 東京図書 (1967)
(2) M. HAMERMESH: Group Theory and its Applications to Physical Problems, Addison-Wesley (1962)
(3) H. WEYL: Philosophy of Mathematics and Natural Science, Princeton Univ. Press. (1949), 菅原正夫ほか訳, 岩波書店 (1959)
(4) R. PENROSE: 'Structure of Space-Time'' in Battelle Rencontres', C. M. DEWITT & J. A. WHEELER, eds., Benjamin New York (1968); R. GEROCH: J. Math. Phys., 9, 1739 (1968); 11, 343 (1970)
(5) 岡林孝郎: 日本物理学会誌, 24, 181 (1969); 木下東一郎: 日本物理学会誌, 29, 471 (1974)
(6) S. WEINBERG: Rev. Mod. Phys., 46, 255(1974); H. GEORGI & S. L. GLASHOW: Phys. Rev. Let., 32, 438 (1974)
(7) S. DESER et al.: Nucl. Phys., B 111, 45 (1976); M. J. DUFF: Nucl. Phys., B 125, 334 (1977)
(8) F. ENGLERT et al.: Nucl. Phys., B 117, 407 (1976)
(9) 江沢洋: 数理科学, 126, 34 (1973)
(10) I. M. GEL'FAND & G. E. SHILOV: Generalized Functions, vol. 1., Academic Press, New York (1964)
(11) C. W. MISNER et al.: Gravitation, W. H. Freeman and Company (1973)
(12) S. KOBAYASHI & K. NOMIZU: Foundation of Differential Geometry, vol. 1., Interscience, New York (1963)
(13) R. COURANT & D. HILBERT: Method of Mathematical Physics II, Interscience, New York (1962)
(14) R. ARNOWITT et al.: The Dynamics of General Relativity in 'Gravitation: introduction to current research', L. WITTEN, ed., John-Wiley and Sons (1962)
(15) S. W. HAWKING & G. F. R. ELLIS: The Large Scale Structure of Space-Time, Cambridge Univ. Press (1973)
(16) P. A. M. DIRAC: The Principle of Quantum Mechanics, Oxford Univ. Press (1958); Ya. B. ZEL'DOVICH & V. S. POPOV: Sov. Phys.-USPEKHI, 14, 673 (1972)
(17) F. J. DYSON: Phys. Rer., 75, 1736 (1949); N. N. BOGOLIUBOV & D. V. SHIRKOV: Introduction to The Theory of Quantized Fields, Interscience, New York (1959)
(18) 安林布道: 日本物理学会誌, 24, 203 (1969)
(19) 岩波講座 現代物理学の基礎 11, 素粒子論 (1974)