

重力場のエネルギーの 符号が決まった

一つの系から最大どれだけエネルギーを取り出すことができるかというのは非常に興味深い問題である。古典的な系では、この問題に対する答は無窮大であることが多い。たとえば半径 R のガス球を考えよう。ニュートン力学の範囲ではこのガス球の質量 M は保存量で、その重力エネルギーは $-kGM^2/R$ (k は密度分布に依存した $o(1)$ の正の数) で与えられる。明らかに半径が小さくなると重力エネルギーはいくらでも小さくなる。したがって、星でおこるように内部エネルギーへの変換を通して重力エネルギーを輻射のエネルギーに変換してやれば、この系からは無窮大のエネルギーを取り出せそうにみえる。

幸か不幸か、このように無限のエネルギーを一つの系から取り出すことが、古典的な一般相対性理論の枠内では不可能であると主張する定理が最近証明された。通常エネルギーの正值定理 (positive energy theorem) (以下 PET と略記する) と呼ばれるこの定理の内容はおおまかには次のように表わされる：

“局所的なエネルギー密度が非負の物質から成る系の、重力エネルギーを含む全エネルギーは非負である”。

この定理は、1957年の WEBER と WHEELER による重力波のエネルギーの研究以来、約 20 年間にわたって多くの相対論研究者の挑戦を退けてきたエネルギーの正值予測に対する肯定的解答である。

この定理の証明に最初に成功したのは、SCHOEN と YAU である。彼らの方法は、それまでの最も主流的なアプローチであった微分幾何的方法に従ったものであるが、関数解析的手法と背理法という高度の数学的手法に大きく依存しているために、その証明の意味は物理学者にとってはあまりわかりやすいものではなかった。このような状況に新たな急展開をもたらしたのが、WITTEN による第 2 の証明法である。彼は、量子超重力 (quantum supergravity) という全く別の視点から古典一般相対性理論をみることにより、全く新しくか

つ物理的に非常に見通しのよい証明法を見出すことに成功したのである。

WITTEN の証明について述べる前に、PET に内在する一般相対性理論特有の問題に触れておく必要がある。その第 1 のものは、一般相対性理論におけるエネルギーの定義の問題である。一般相対性理論において前もって存在するエネルギー概念は、物質のエネルギー・運動量テンソルだけである。時空が時間的に定常 (数学的には時間的なキリング・ベクトルが存在) でないかぎり、物質のエネルギーだけでは保存則を満たさない。これは、エネルギー保存則は物理法則の時間的並進不変性の結果であるという一般定理の現われである。そこで保存則を満たすようにするには重力のエネルギーを付け加えなければならないわけであるが、一般相対性理論では、物質の場合のようなテンソル量としての重力のエネルギー・運動量は存在しない。これは、一般相対性理論では等価原理が成り立ち、重力場は局所的には常に消去可能である結果、重力エネルギーの共変的な局所化が不可能であるためである。

この困難の解決策は、局所的なエネルギーを定義することをあきらめ、全エネルギーの定義可能性だけを考えることである。もちろん全エネルギーに限っても、常に定義できるわけではない。現在のところ、考えている時空が漸近的にミンコフスキー時空ないし反ド・ジッター時空 (負の宇宙項をもつアインシュタイン方程式の真空解で最大の対称性をもつもの) の場合には、満足できる全エネルギーの定義が可能であることがわかっている。当然の結果として、このようにして導入された全エネルギーは、局所的なエネルギー密度の空間積分として表わされるものではなく、時空計量の物質から十分離れた領域における漸近的挙動という非局所的な表式で与えられることになる。したがって PET は、物質のエネルギー密度という局所的な情報とそれと直接関係のない全エネルギーという非局所的な特性とを結びつける定理である。このことが PET の証明が困難であった最大の原因である。

PET に内在するもう一つの問題は、物質のエネルギー密度についての条件である。上記の定理



ホットスポット

の表現はこの点で厳密ではない。これは、一般相対性理論ではニュートン理論と違い、エネルギーだけでなく運動量や圧力(一般にはストレス)も重力の源になるため、エネルギー密度の非負値性だけでは全エネルギーの非負値性が保証されないためである。より正確には、“dominant energy condition”と呼ばれる次の条件が必要である：

“物質のエネルギー・運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ は任意の未来向きの時間的ないし光的ベクトル V^μ , W^μ に対して常に $T_{\mu\nu}V^\mu W^\nu \geq 0$ となる”。

さて、WITTEN の証明の非常にすぐれた点は、全エネルギーを直接、物質のエネルギー・運動量テンソルを含む非負の量の空間積分として表わす表式を与えた点にある。この WITTEN の表式の最大の特徴はスピノールの登場である。この古典物理学とは本来無縁のスピノールが古典論で重要な役割を果たすというのはい見非常に不思議にみえる。WITTEN 自身は、スピノールの利用というアイデアを DESER-TEITELBOIM, GRISARU らによる、量子超重力におけるエネルギーの正值性についての考察から得たと述べている。DESER らの議論とは次のようなものである。超重力理論においては、フェルミオンとボソンをまぜる超対称性(supersymmetry)という対称性が存在する。その生成演算子はマヨラナ・スピノール Q_α で表わされる。超対称性の興味深い点は、それを2回くり返すと時空の並進変換が生成されることである。そのために Q_α はハミルトニアン H と次のような関係式で結びついてしまう。

$$H = (8\pi G\hbar)^{-1} \sum_{\alpha=1}^4 \{Q_\alpha, Q_\alpha\}$$

明らかに右辺は非負であり、したがって量子超重力理論では全エネルギーは決して負にならない。ここで $\hbar \rightarrow 0$ の極限をとれば、この結果は古典相対性理論で PET が成立することを示唆する。もっとも、WITTEN 自身は彼の利用したスピノールが Q_α とどのような関係にあるのかを明らかにしなかった。

ごく最近になって、WITTEN の表式の成立は偶然のものではなく、やはり超重力の理論から自然に導かれるものであることが HOROWITZ-STRÖ-

MINGER および DESER によって示された。彼らは、演算子の(反)交換関係のかわりにポアソン括弧(より正確にはディラック括弧)を利用することによって超重力の古典正準理論を構成すると、超対称性変換の変換パラメータがウィッテン・スピノールに対応し、上記の Q_α と H の関係式から全エネルギーに対する WITTEN の表式が自然に導かれることを示したのである。このように、純粋な古典相対性理論の問題にすぎなかったエネルギーの正值性の問題は、WITTEN のアイデアを通して重力場の量子論に対する洞察を与える可能性のある、より深い問題へと発展したのである。

最後に、PET のかくれたもう一つの側面について述べておく。一般に相対性理論では、最初スムーズな時空および物質分布から出発しても、有限の時間の後に物質の密度や時空の曲率が無限大になることがある。実は、“特異点定理”と呼ばれる定理は、このような特異点の発生がむしろ一般的であることを主張している。もちろん、自然界でこのような現象が実際におこっているという徴候はこれまでのところない。この矛盾を解消するために考え出されたものに“宇宙検閲官(cosmic censorship)の仮説”というものがある。これは、シュバルツシルトのブラックホールやカーのブラックホールのように、たとえこのような特異点は発生しても“地平線”によってわれわれの世界から隠されてしまうという仮定である。実は、PET もこの仮定のもとでのみ成立するものなのである。もしわれわれにみえる特異点が発生すると、PET は破れる可能性がある。現在のところ、われわれの世界で“宇宙検閲官の仮説”が成立しているかどうかは全く不明である。むしろ、いくつか特異な場合には反例が存在することが示されている。この検閲官仮説が証明されて初めて、“エネルギーの正值定理”がわれわれの世界の安定性を保証するものになるのである。

(小玉英雄, 東京大学理学部物理学教室)