
ペンローズの特異点定理と物理学への影響

小玉英雄

2020年のノーベル物理学賞は、数理物理学者のロジャー・ペンローズ（Roger Penrose）と2名の天文学者に与えられた。本解説では、ペンローズの主な受賞理由となった時空特異点研究の背景と内容、およびそれが物理学に与えた影響について簡単に紹介する。

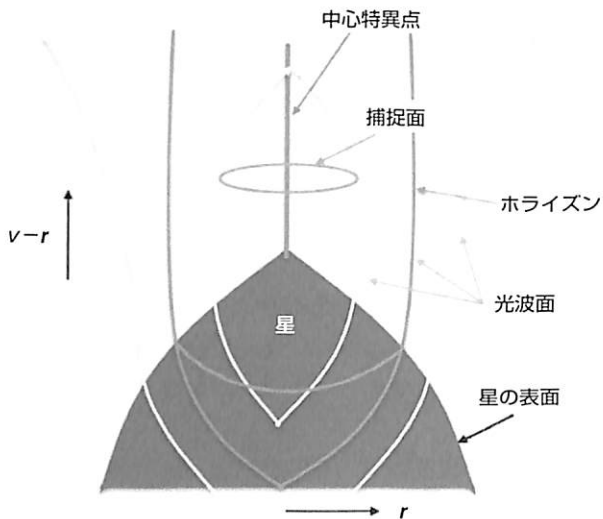
■ 時空特異点とは？

「特異点」(singularity)という言葉は、学術用語としてさまざまな分野で使われるが、多くの場合、それは時間や空間などの特殊な点をさすことが多い。これに対して、ここでとりあげる「時空特異点」は、一般的には、時間・空間（＝時空）の点ではなく、「到達可能な時空の仮想境界」を意味する。具体例で説明しよう。

星は内部圧力と重力のバランスにより一定の半径を保っている。しかし、十分な内部圧力を維持できなくなると重力収縮を始める。収縮による内部圧力の上昇が十分でないと、この収縮は限りなく進むことになる。この現象は「重力崩壊」とよばれる。

とくに、非回転の球対称な天体の重力崩壊では、天体全体が有限な時間で原点 $r=0$ に潰れることになる（図1）。当然、物質密度は原点で発散するが、一般相対性理論では、これは時空曲率が発散し、時空構造が破綻することを意味するので、原点は「中心特異点」とよばれる時空特異点となる。

特異点近傍での光波面のふるまいより、中心特異点は空間的な曲線となっていることがわかる。もちろんこの曲線は正則な時空の一部ではないが、時間的な曲線に沿って有限な時間で到達可能な時空境界となっている。



〈図1〉球対称な星の重力崩壊
 r は星の中心からの距離, v は一般相対論的な遅延時間。

■ 時空特異点定理

球対称重力崩壊以外にも一様等方膨張宇宙の初期特異点など、20世紀中頃までに発見されたアインシュタイン方程式の解の多くは特異点をもっていた。特異点は物理法則が破綻する時空境界であり、その存在は有害であると考えた当時の人々は、これら具体的な解の特異性が、時空の特殊な対称性に起因するのではないかと疑うようになった。

しかし、1950年代になり、この期待を否定する結果がいくつか発表された。とくに、ライチャウドリ (A. K. Raychaudhuri) とコマー (A. Komar) は独立に、重力が引力として働く限り、圧力の無視できるガス雲の体積は、形状によらず、必ず有限な時間でゼロとなることを証明した。これに対して、リフシッツ (E. M. Lifshitz) とハラトニコフ (I. M. Khalatnikov) は、ガス雲の圧力が無視できなければライチャウドリらの結果は成り立たないので、特異点の発生は一般的解では起こらないと主張した。

それまで想像もできなかったエレガントな数学的考察により、リフシッツら

の主張の間違いを正したのが、一連の特異点定理である。その最初のものが、「ペンローズの特異点定理」で、つぎのような内容をもつ¹⁾。

[Penrose 1965] つぎの条件が満たされるとき、有限なアフィンパラメーターで時空境界に達する未来向きの光線が存在する。

1. コンパクトでない連結なコーシー面の存在
2. 光的収束条件
3. 閉捕捉面の存在

用語を説明しよう。まず、条件1は時空内の任意の点での状態が適当な初期面での初期値により定まり、かつその初期面が無限に広がっていることを意味し、ごく自然な要請である。つぎの「光的収束条件」は、リッチ曲率テンソルの光的ベクトル方向成分がつねに非負であるという条件で、物理的には重力が光に対して引力として働くことを意味する。最後に、「閉捕捉面」とは、つぎのようなものである。まず、時空内の閉じた空間的2次元曲面 \mathcal{S} から同時に光を発すると、外向きに進む光波面と内向きに進む光波面の2枚の光波面が生じる。通常、これらのうち、外向きの光波面の面積は増大し、内向きの光波面の面積は減少する。しかし、曲面 \mathcal{S} が強い重力源を囲んでいると、両方の光波面の面積が減少することが起こる。このとき、曲面 \mathcal{S} を閉捕捉面とよぶ。たとえば、〈図1〉においてリングで表されている2次元球面は閉捕捉面である。

以上より、ペンローズの特異点定理は、重力崩壊により天体が十分小さく潰れ、そのまわりに閉捕捉面ができると、天体の形状によらず、必ず時空特異点が発生することを意味している。その証明は、当時急速に発展した大域微分幾何学的手法を時空に適用した革新的なものであった。その後、ホーキング (S. W. Hawking) は、類似の方法を用いて、宇宙の初期特異点の一般性を結論するいくつかの特異点定理を発表し、さらに1970年にはペンローズと共同で、それまでの諸定理を1つの包括的な定理にまとめ上げた²⁾。

■ 宇宙検閲仮説

時空特異点は、時空構造や物理法則が破綻する時空境界であるが、必ずしも有害とは限らない。たとえば、〈図1〉で示された球対称重力崩壊の場合、強い

重力のため、中心特異点近傍で天体の中心から外向きに広がる光波面は最終的に中心特異点に収束することになる。このため、天体の外の真空領域において半径を一定に保って外向きに進む光波面が生じる。この光波面の軌跡にあたる光的超曲面はホライズンとよばれる。ホライズンの内側の情報は、ホライズン外部の観測者にけっして伝わらないので、ホライズンの内側の領域はブラックホール領域とよばれる。

いずれにしても、〈図1〉のように、発生する時空特異点がホライズンにより外部の観測者から遮閉されれば、観測者が外部にとどまる限り無害である。これに対して、もし「裸の特異点」とよばれる、ホライズンに隠されない特異点が発生すると、古典論のレベルでも非常に危険である。実際、古典論のレベルでブラックホールについて、一意性定理、面積増大定理、不分岐定理、閉捕捉面定理などさまざまな重要な結果が得られているが、じつはこれらはすべて、時空に裸の特異点が存在しないことを前提としている²⁾。したがって、裸の特異点が発生すると、これらすべての定理は成り立たなくなる。

このような状況を受けて、ペンローズは1969年に「現実の系では、一般的な初期条件に対して、裸の特異点は発生しない。すなわち、特異点はホライズンに隠される」という内容の「弱い宇宙検閲仮説」を提案した³⁾。この仮説についてはその後、膨大な研究がなされたが、いまだにその正当化には成功していない。このため、重力崩壊によりつねにブラックホールが形成されるのか、また、ブラックホールが最終的にカーブラックホールに落ち着くのかは、理論的には不明である。

参考文献

- 1) R. Penrose: Phys. Rev. Lett. **14**, 57 (1965).
- 2) S. W. Hawking and G. F. R. Ellis: *The Large Scale Structure of Space-time* (Cambridge Univ. Press, 1973).
- 3) R. Penrose: Riv. Nuovo Cimento **1**, 252 (1969).