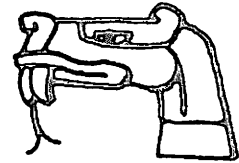


# スピンネットワーク理論



小玉 英雄

Penrose は 1970 年頃、スピノール量の代数計算を図式を用いて見通しよく行う方法を考案し、その過程で空間の幾何学や時空の物理学が純粋に組み合わせ的問題に還元される可能性に気づいた。その基礎となったのが、スピンネットワークと呼ばれる色つきグラフである<sup>1,2)</sup>。この解説では、この Penrose のアイデアの概要とその最近における展開を紹介する。

ロックの位置の移動や端子を結ぶ曲線の変形などの位相的な自由度を除いて、元の単項テンソル式とこの図式は 1 対 1 の対応関係にある。この図式を抽象テンソル図式と呼ぶことにする<sup>3)</sup>。

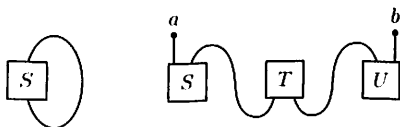
Lorentz 群  $SO_+(3, 1)$  の普遍被覆群が  $SL(2, \mathbb{C})$  となるので、4 次元スピノールは、 $SL(2, \mathbb{C})$  行列を変換行列とする 2 次元テンソルで表される (Weyl 表示)。これらの中で、 $U \in SL(2, \mathbb{C})$  により  $\phi^A \mapsto U^A_B \phi^B$  ( $\psi_A \mapsto (U^{-1})^B_A \psi_B$ ) に従って変換する 2 成分スピノールを左巻き反変 (共変) 基本スピノールという。また、これらの式で  $U$  を複素共役  $\bar{U}$  に置き換えた変換則に従う 2 成分スピノールを右巻きスピノールという。一般のスピノールはこれらのテンソル積となる。以下、左巻き成分のみを持つスピノール (カイラルスピノール) に話を限ることにする。

## 1. バイノール

スピンネットワーク理論の骨格をなすのは、バイノール計算法と呼ぶ図式計算法である<sup>1,2)</sup>。その出発点となるアイデアは、 $n$  次元空間における様々な階数のテンソルの積とその添え字に関する縮約からできる単項テンソル式に、次のような方法で図式を対応させることである。まず、構成要素となっているテンソル  $T_{k \dots l}^{i \dots j}$  に、各上添え字と下添え字に対応する上向きと下向きの端子を持った図形を対応させる：

$$T_{k \dots l}^{i \dots j} \mapsto \begin{array}{c} \boxed{\text{T}} \\ \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \\ \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \end{array}$$

さらに、縮約する上添え字と下添え字に対応する端子を曲線で結ぶ。このようにすると、単項テンソル式の自由な添え字の数だけ自由端子を持つ図式ができる。例えば、テンソル式  $S_i^j, S^{ai} T_{ij} U^{jb}$  に対する図式は次のようになる：



テンソルブロックの向きを変えないことにすると、ブ

Weyl 表示を用いると、上で述べた方法でスピノール代数式の図式表現を構成することができる。ただし、カイラルスピノールに対しては、 $\delta_B^A$  と 2 次元 Levi-Civita テンソル

$$(\epsilon_{AB}) = (\epsilon^{AB}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

が基本的な不変スピノールとなり、 $SL(2, \mathbb{C})$  の行列  $U$  に対する恒等式  $U \epsilon U = \epsilon$  より、スピノールの添え字の上げ下げを  $\epsilon$  を用いて行うことができる： $\psi_A = \epsilon_{AB} \psi^B$ ,  $\psi^A = \psi_B \epsilon^{BA}$ 。そこで、これらの添え字の上げ下げを図式を用いて単純に表現するために、 $\epsilon$  テンソルに特別なテンソルブロックを付与する代わりに、図式との対応規則を次のように修正する：

- i)  $i \epsilon_{AB} \mapsto A \frown B$ ,  $i \epsilon^{AB} \mapsto A \smile B$
- ii)  $-\delta_B^A \delta_D^C \mapsto \overset{A}{\underset{B}{\times}} \overset{C}{\underset{D}{\times}}$

ここで、 $i$  は虚数単位  $\sqrt{-1}$  を表す。第 2 の規則は、

図式で端子を結ぶ曲線が全体で  $k$  個の交点を持つ場合、その図式の表すテンソル式を元の規則で得られるテンソル式の  $(-1)^k$  倍とすることを意味する。すると、Levi-Civita テンソルの関係式

$$\epsilon_{AC}\epsilon^{CB} = -\delta_A^B$$

より次のような図式関係式が成り立つので、図式の端子を結ぶ曲線の連続変形に対して、図式の値は不変となる：

$$A \cup B = \int_A^B, \quad A \cap B = A \cup B, \quad A \times B = A \cup B$$

Penrose は、この新しい規則によるスピノールの図式表現を、バイノールと名づけた。

バイノールではいくつかの自明でない関係式が成り立つ。まず、閉じた閉曲線のバイノール値は、そのねじれ方によらず  $i\epsilon^{AB}i\epsilon_{AB} = -2$  となる：

$$\bigcirc = \infty = \bigcirc = -2.$$

通常の抽象テンソル図式では、閉じた閉曲線は単位行列  $\delta_j^j$  のトレースとなるので、その値は次元  $n$  となる。したがって、形式的にはバイノールは‘負の次元’のテンソルを表す。さらに、2次元 Levi-Civita テンソルの恒等式

$$\epsilon^{AB}\epsilon_{CD} = \delta_C^A\delta_D^B - \delta_D^A\delta_C^B$$

より、次の図式関係式が成り立つ：

$$\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} + \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagdown \\ \diagup \quad \diagup \end{array} = 0.$$

これはバイノール関係式と呼ばれ、バイノール計算法で非常に重要な役割を果たす。

これを見るために、いくつか新しい記法を導入する。まず、 $n$  個の Kronecker  $\delta$  のテンソル積に対応する  $n$  本の平行する線分の束を、1本の線分の横に添え字  $n$  を添えて表す：

$$\left| n = \underbrace{\dots}_n \right.$$

さらに、これを添え字について対称化した  $(n, n)$  型混合スピノールを

$$\sum_{\alpha} \delta_{B\alpha(1)}^{A_1} \dots \delta_{B\alpha(n)}^{A_n} \mapsto \uparrow^n$$

と表す。線分の各交差点は  $(-1)$  の因子を伴うので、

バイノール表示ではこの対称化は反対称化として表される。例えば、

$$\uparrow^2 = \parallel - \chi$$

これらの定義と上記のバイノール関係式を用いると、

$$\begin{aligned} n \bigcirc &= \frac{1}{(n-1)!} \begin{array}{c} \uparrow^{n-1} \\ \bigcirc \end{array} \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \left\{ \begin{array}{c} \uparrow^{n-1} \\ \bigcirc \end{array} \begin{array}{c} \uparrow^1 \\ \bigcirc \end{array} \right\} \\ &\quad - \frac{(n-1)^2}{(n-1)!} \begin{array}{c} \uparrow^{n-2} \\ \bigcirc \end{array} \\ &= -(n+1) \begin{array}{c} \uparrow^{n-1} \\ \bigcirc \end{array} \end{aligned}$$

より

$$\begin{array}{c} \uparrow^n \\ \bigcirc \end{array} = (-1)^n (n+1)!$$

および

$$\begin{array}{c} \uparrow^a \\ \bigcirc^b \end{array} = (-1)^b \frac{(a+b+1)!}{(a+1)!} \uparrow^a$$

を得る。第2の式の比例係数は、両辺のトレース、すなわち自由端子を線分で結んでできる閉バイノールの値の比より決まる。さらに、これらの式を用いると、少し長い計算の後、次式を得る：

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & c \\ \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\ a & b & c \end{array} \\ \bigcirc \end{array} = (-1)^{a+b+c} a!b!c!(a+b+c+1)!$$

これらの式を直接、テンソル式から求めるのは容易でない。

## 2. 角運動量合成則

3次元回転群  $SO(3)$  (正確にはその普遍被覆群  $SU(2)$ ) の既約線形表現は、よく知られているように、非負半整数の値を取る角運動量  $j$  で分類され、各表現  $\rho_j$  の表現空間は  $(2j+1)$  次元となる。さらに、2つの既約表現  $\rho_{j_1}, \rho_{j_2}$  のテンソル積として得られる  $(2j_1+1)(2j_2+1)$  次元表現を既約表現に分解すると、角運動量  $j_3$  の値が  $|j_1-j_2|, |j_1-j_2|+1, \dots, j_1+j_2$  となる表現がちょうど1個ずつ得られる。したがって、可能な  $j_1, j_2, j_3$  の組み合わせは次の条件で完全に決

定される：

$$\begin{aligned} j_1 + j_2 + j_3 & \text{は非負整数,} \\ 0 \leq 2j_1, 2j_2, 2j_3 & \leq j_1 + j_2 + j_3. \end{aligned} \quad (1)$$

$\rho_j$  の正規直交基底を、量子力学の習慣に従って  $|jm\rangle$  と表すと、既約分解で得られる表現  $\rho_{j_3}$  の基底は、 $\rho_{j_1} \otimes \rho_{j_2}$  の基底  $|j_1 m_1; j_2 m_2\rangle = |j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle$  と Clebsch-Gordan 係数  $C(j_1 j_2 m_1 m_2 | j_3)$  を用いて

$$|j_3 m_3\rangle = \sum_{m_1+m_2=m_3} C(j_1 j_2 m_1 m_2 | j_3) |j_1 m_1; j_2 m_2\rangle$$

と表される。この式と  $|j_3(-m_3)\rangle$  のテンソル積を取り  $m_3$  について和を取ると、

$$\begin{aligned} & \sum_{m_3} (-1)^{-m_3} |j_3(-m_3)\rangle \otimes |j_3 m_3\rangle \\ &= \sum_{m_1+m_2+m_3=0} (-1)^{-m_3} C(j_1 j_2 m_1 m_2 | j_3) \\ & \quad \times |j_1 m_1; j_2 m_2; j_3 m_3\rangle \end{aligned} \quad (2)$$

が得られるが、この式の左辺は  $SO(3)$  の変換に対して不変となることが、基底の変換則より示される。すなわち、左辺は角運動量ゼロの表現を与える。

この関係式を 3 次元スピノール、すなわち 4 次元 Weyl スピノールの変換行列を  $SU(2)$  ( $\subset SL(2, \mathbb{C})$ ) に制限したスピノールを用いて表してみよう。  $n$  階のスピノールは角運動量  $1/2$  の表現の  $n$  個のテンソル積に対応するので、角運動量演算子  $J_a$  の  $n$  階スピノールへの作用は Pauli 行列  $\sigma_a$  を用いて

$J_{\pm} := J_1 \pm iJ_2 \mapsto \bigoplus \frac{1}{2}(\sigma_1 \pm i\sigma_2)$ ,  $J_3 \mapsto \bigoplus \frac{1}{2}\sigma_3$  で与えられる。これより、 $n$  階の対称スピノールの全体がちょうど最大角運動量  $j = n/2$  に対応する既約表現に従って変換し、その正規直交基底が

$$|jm\rangle \mapsto S(jm) := \frac{1}{\sqrt{(2j)!r!s!}} \text{Sym} \left( \left( \otimes^r \mathbf{u} \right) \otimes \left( \otimes^s \mathbf{d} \right) \right)$$

で与えられることがわかる。ここで、 $\mathbf{u}, \mathbf{d}$  はそれぞれ成分  $(1, 0), (0, 1)$  を持つ基本スピノール、 $r, s$  は  $r + s = 2j, r - s = 2m$  より決まる非負整数、 $\text{Sym}$  は添え字についての対称化である。すなわち、 $S(jm)$  は  $r$  個の添え字が 0、 $s$  個の添え字が 1 のときのみゼロと異なる成分を持つ  $n$  階対称スピノールである。また、スピノールの内積は  $SU(2)$  不変な正形式  $(\phi, \psi) = \bar{\phi}^A \psi^A$  で与えられるものとする。

(2) 式において各  $|jm\rangle$  をこれらの対称スピノールで置き換え  $(-1)^{j_3}$  を両辺にかけると、

$$\begin{aligned} T(j_1 j_2 j_3) &= \sum_{m_1+m_2+m_3=0} C(j_1 j_2 m_1 m_2 | j_3) \\ & \times (-1)^{j_3-m_3} S(j_1 m_1) \otimes S(j_2 m_2) \otimes S(j_3 m_3) \end{aligned}$$

を得る。この式の左辺は  $2(j_1 + j_2 + j_3)$  階の反変スピノールとなるが、上で述べたことより、この量は  $SU(2)$  変換で不変となる。ところが、 $SU(2)$  変換で不変な反変スピノールは 2 階の  $\epsilon$  テンソルの積で表されるので、結局、 $T$  は対称性より次のように定数  $K$  を除いて一意に決まってしまう：

$$\begin{aligned} T^{A_1 \dots A_{2j_1} B_1 \dots B_{2j_2} C_1 \dots C_{2j_3}} &= K \text{Sym}_A \text{Sym}_B \\ & \text{Sym}_C \left[ \epsilon^{A_1 C_1} \dots \epsilon^{A_b C_b} \epsilon^{A_{b+1} B_1} \dots \epsilon^{A_{b+c} B_c} \right. \\ & \quad \left. \times \epsilon^{B_{c+1} C_{b+1}} \dots \epsilon^{B_{c+a} C_{b+a}} \right] \end{aligned}$$

ただし、 $a, b, c$  は

$$2j_1 = b + c, \quad 2j_2 = c + a, \quad 2j_3 = a + b$$

により決まる非負の整数である。非負整数となることは、(1) により保証される。

このスピノール  $T(j_1 j_2 j_3)$  はバイノールにより簡潔に表現できる。まず、後の便宜のため、 $T$  を次の図式で表す：

$$T(j_1 j_2 j_3) \mapsto K (-i)^{j_1+j_2+j_3} \begin{array}{c} |2j_1 \\ \bullet \\ / \quad \backslash \\ 2j_2 \quad 2j_3 \end{array}$$

すると、上記の  $\epsilon$  テンソルによる表式より

$$\begin{array}{c} |2j_1 \\ \bullet \\ / \quad \backslash \\ 2j_2 \quad 2j_3 \end{array} = \begin{array}{c} |2j_1 \\ \bullet \\ / \quad \backslash \\ \begin{array}{ccc} c & & b \\ \bullet & & \bullet \\ / \quad \backslash & & / \quad \backslash \\ a & & a \end{array} \\ 2j_2 \quad 2j_3 \end{array} \quad (3)$$

が成り立つことがわかる。特に、 $T$  の内積  $(*, *)$  に関するノルムが 1 であることはバイノール図式で

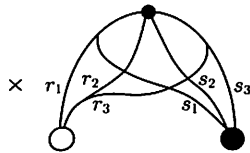
$$1 = |K|^2 (-1)^{j_1+j_2+j_3} \begin{array}{c} 2j_1 \\ \bullet \\ |2j_2 \\ \bullet \\ |2j_3 \end{array}$$

と表され、本質的でない位相を除いて  $K$  の値が決まる。実際、右辺のバイノールは、第 1 節で計算したバイノールを用いて次のように表されることが容易に示される：

$$\begin{array}{c} 2j_1 \\ \bullet \\ |2j_2 \\ \bullet \\ |2j_3 \end{array} = (a+b)!(b+c)!(c+a)! \begin{array}{c} c \\ \bullet \\ \begin{array}{cc} a & b \\ \bullet & \bullet \\ / \quad \backslash & / \quad \backslash \\ a & a \end{array} \\ c \end{array}$$

さらに、異なる  $m$  の値に対する  $S(jm)$  が互いに直交することに注意すると、 $T(j_1 j_2 j_3)$  の表式より、Clebsch-Gordan 係数ないし  $3j$  シンボルに対する次のバイノール表示

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} := \frac{C(j_1 j_2 m_1 m_2 | j_3)}{(-1)^{j_1+j_2-m_3} \sqrt{2j_3+1}} \\ = \pm \frac{(-1)^{s_1 r_2 + s_1 s_3 + s_2 s_3} (-i)^{j_1+j_2+j_3}}{[r_1! r_2! r_3! s_1! s_2! s_3! a! b! c! (a+b+c+1)!]^{1/2}}$$



が得られる。ただし、 $m_1+m_2+m_3=0$  で、大きな白丸と黒丸はそれぞれ  $(j_1+j_2+j_3)$  階の反変対称スピノール  $\text{Sym}(\otimes u)$ ,  $\text{Sym}(\otimes d)$  を表し、 $2j_k = r_k + s_k$ ,  $2m_k = r_k - s_k$  である。同様に、 $6j$  記号に対するバイノール表示を与えることができる。

### 3. スピン幾何学

前節で見たように、角運動量合成則をバイノールを用いて表すと、3体相互作用に対する Feymann 図式と同様の図式 (3) が現れる。Penrose はこの Feymann 図式とのアナロジーを進めて、いくつかの3個の頂点を非負整数のラベルを持つ線分でつないだ図式を考え、それをスピネットワークと名づけた (図 1)<sup>1)</sup>。ただし、線分に付与された整数は各頂点で条件 (1) を満たすものとする。以下、スピネットワークを SN と略記する。

もちろん SN はそのままでは単なる 2 次元図式にすぎない。しかし、Penrose は、各線分をそれにつけた整数の半分のスピンを持つ粒子と見なし、バイノールを用いて異なる粒子のスピン間の相対角度を定義すると、この平面図式から 3 次元幾何学が自然に現れるこ

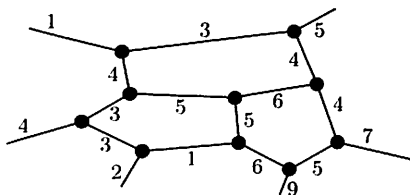


図 1 スピネットワーク

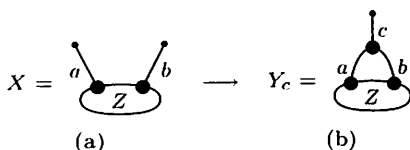


図 2

とを指摘したのである。その基本的な考え方は次の通りである。

まず、一般の SN  $X$  に対して、そのコピー  $X'$  をもう 1 つ用意し、 $X$  と  $X'$  の対応する自由端子を線分で結んでできる SN を  $X \# X'$  と表すことにする。この記法のもとで、 $X$  のノルムを

$$\|X\| := \frac{1}{\prod n!} |\text{val}(X \# X)| = \pm \frac{1}{\prod n!} \text{val}(X \# X)$$

と定義する。ここで、閉 SN  $Y$  (自由端子を持たない SN) に対して、 $\text{val}(Y)$  は  $Y$  をバイノール表示と見なしたときの値で、 $\prod n!$  は各線分の整数ラベル  $n$  に対応する  $n!$  をすべてのラベルについてかけたものである。以下、誤解のない場合には、 $\text{val}(Y)$  を単に  $Y$  と表記する。例えば、

$$\left\| \begin{array}{c} a \\ \diagdown \quad \diagup \\ b \quad c \end{array} \right\| = \frac{(-1)^{(a+b+c)/2}}{a!b!c!} \begin{array}{c} a \\ \diagdown \quad \diagup \\ b \quad c \end{array}$$

である。

次に、SN  $Y_c$  が図 2 (b) のようにラベル  $a, b, c$  を持つ 3 個の頂点と残りの部分  $Z$  からなるとして、この SN を図 2 (a) で表される SN  $X$  の粒子  $a, b$  が相互作用して  $c$  を生み出す反応を表すと見なし、その遷移確率を

$$\Pr(Y_c|X) := \frac{\|Y_c\|}{\|X\|} \left\| \begin{array}{c} c \\ \diagdown \quad \diagup \\ a \quad b \end{array} \right\|$$

で定義する。1 節で与えた公式を用いると  $\sum_c \Pr(Y_c|X) = 1$  が示せるので、この定義は確率解釈と整合的である。

以上の準備のもとに、ラベル  $M, N$  の自由端子を持つ SN  $X$  の粒子  $M$  から放出されたスピン 1/2 の粒子が粒子  $N$  に吸収されるプロセス (図 3 (a)) の確率を

$$\Pr(N \rightarrow N \pm 1) = \frac{1}{2} (1 \pm \cos \theta)$$

と表し、右辺の  $\theta$  を粒子  $M$  と粒子  $N$  のスピンの相対角度と定義する。ただし、 $\theta$  が確定しているためには、測定を繰り返したときその値が変わらないことが必要なので、 $M, N$  が十分大きく、かつもう一度相対角度を計測する実験図 3 (b) を繰り返したとき、2 回目の結果が 1 回目の結果と整合的、すなわち

$$\Pr(N+1 \rightarrow N+1 \pm 1) \\ \simeq \Pr(N-1 \rightarrow N-1 \pm 1)$$

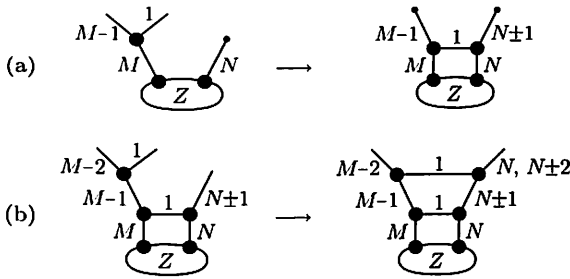


図 3

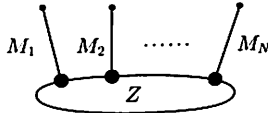


図 4

が成り立つときに、スピンの相対角度は確定していると約束する。

以上の約束のもとで Penrose は次のことを示した：図 4 に示したような、多くの自由端子  $M_1, M_2, \dots$  を持つ一般の SN  $X$  において、すべての組  $M_i, M_j$  に対して上記の整合性条件が満たされているとすると、その相対角度は 3 次元 Euclidean 空間の適当な同じ個数のベクトルのなす角度と同じ関係を満たす。すなわち、2 次元図式の SN は、連結で十分複雑な場合、3 次元 Euclidean 空間の構造を内蔵しているのである。これは、SN において各自由端子に対応する“粒子”はスピンの大きさのみが指定されていて方向が不定であることを考えると非常に不思議に思われる。しかし、SN の背景にあるバイノールの元々の意味を思い起こすと、Penrose の定理の成り立つ理由が明らかとなる。

1 節で説明したように、本来バイノールは  $SU(2)$  に対応する単項テンソル式を図式で表現したものである。したがって、2 節の記述に従うと、 $n$  個の自由端子を持つ SN  $X$  は  $n$  階スピノールで表された  $SO(3)$  の表現空間におけるある状態ベクトル  $\Phi(X)$  に対応する。実は、この対応のもとでは、 $\|\Phi(X)\|^2 = \langle \Phi(X) | \Phi(X) \rangle = |X \# X|$  が成り立ち、上で定義した遷移確率  $\Pr(Y_c | X)$  は、

$$\Pr(Y_c | X) = \frac{|\langle \Phi(Y_c) | \Phi(X) \rangle|^2}{\|\Phi(X)\|^2 \|\Phi(Y_c)\|^2}$$

と表されることが容易に示される。さらに、図 4 に対応する状態を

$$\Phi = \sum_{m_1, m_2, \dots} \phi(m_1, m_2, \dots) \otimes | \frac{M_1}{2} m_1; \frac{M_2}{2} m_2; \dots \rangle$$

と表すと、上記のスピンの相対角度が確定するための整合性条件は、この状態が適当な整数  $\bar{m}_2, \bar{m}_3, \dots$  を用いて

$$\Phi \simeq \sum_{m_1} \phi'(m_1) \otimes U_{m_1} | \frac{M_1}{2} m_1; \frac{M_2}{2} \bar{m}_2; \frac{M_3}{2} \bar{m}_3; \dots \rangle$$

と表されることと同等であることが示される。ここで、 $U_m$  は状態  $| \frac{M_1}{2} m_1 \rangle$  を  $| \frac{M_1}{2} m \rangle$  に写す回転に対応するユニタリ変換である。すなわち、整合性条件は各粒子の spin 間の相対角度が通常の量子力学の意味で確定する条件を SN の言葉で表したのとなっていたのである。

#### 4. スピンネットワーク基底

スピンネットワークは最近、ゲージ理論や量子重力理論へ応用され、注目されている<sup>4,5)</sup>。この節では、その基本的なアイデアを説明する。

まず、ゲージ理論について簡単に復習しておこう。簡単のため、ゲージ群が  $SU(2)$  の場合に話を限ることにする。このとき、ゲージ場のベクトルポテンシャルは 2 次の反エルミート行列に値を持つ 1 形式  $A = A_\mu dx^\mu$  で記述され、その作用積分  $S$  は、その曲率形式  $F = dA + A \wedge A$  を用いて、

$$S = \frac{1}{4} \int_M d^4x \text{Tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu})$$

と表される。この作用積分は、ゲージ群に値を取る任意関数  $U(x) \in SU(2)$  で表されるゲージ変換  $A \rightarrow A' = UAU^{-1} - dUU^{-1}$ ,  $F \rightarrow F' = UFU^{-1}$  に対して不変となっている。

時空  $M$  を時間と空間  $\Sigma = \mathbb{R}^3$  に分解して、作用積分を正準形に書くと、ラグランジアンは

$$L = \int_\Sigma \text{Tr}(\dot{A}_\Sigma \wedge E + A_t \wedge D_\Sigma E) - H$$

となる。ここで、 $A_\Sigma$  は  $A$  の空間部分、 $E = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} F^{ij} dx^k$ ,  $H$  はハミルトニアンである。また、 $D_\Sigma E$  は

$$D_\Sigma E := dE + A_\Sigma \wedge E - E \wedge A_\Sigma$$

で定義される。

この正準形式より、 $A_\Sigma$  と  $E$  が互いに正準共役であることがわかるが、さらに、 $A_t$  に関する変分より、これらの正準変数に対する拘束条件  $D_\Sigma E = 0$  が得られる。この拘束条件とゲージ不変性を考慮すると、ゲージ場  $A_\Sigma$  の配位全体の作る無限次元空間  $\mathcal{A}$  における

ゲージ変換による軌道空間を  $A/G$  として、この理論の古典的相空間がその余接バンドル  $T^*(A/G)$  と同一視できることが示される。これは、この理論を量子化すると、状態空間が  $A/G$  上の 2 乗可積分関数の集合  $L_2(A/G)$  で与えられることを意味している。

もちろん、 $A/G$  が無限次元であるので以上の議論はこのままでは役に立たない。その上の波動関数やその内積を具体的に構成して初めて意味のあるものとなる。実は、スピネットワーク (SN) がそのために利用できるのである。それを説明するために、ゲージ場の定義する平行移動について簡単に触れておく。以下、簡単のため、添え字  $\Sigma$  を省略する。勝手な  $\Sigma$  の曲線  $\gamma: x_s$  ( $0 \leq s \leq 1$ ) に対して、変換行列  $V(s)$  を常微分方程式

$$\dot{V}(s) = -A(\dot{x}_s)V(s); \quad V(0) = I \quad (4)$$

の解として定義する ( $\dot{\phantom{x}} = d/ds$ )。このとき、ゲージ変換  $U(x)$  に対して  $V(s)$  は、 $U(x_s)V(s)U(x_0)^{-1}$  と変換するので、ゲージ変換に対して  $\Phi(x) \rightarrow \Phi'(x) = U(x)\Phi(x)$  と変換するベクトル場に対して、 $\Phi''(x_s) := V(s)\Phi(x_0)$  は  $\Phi(x_s)$  と同じ変換則に従う。したがって、 $V(s)$  は曲線  $\gamma$  に沿う平行移動を与える。この平行移動はしばしば

$$V(s) = P_\gamma \exp - \int_\gamma A \\ = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \prod (1 - A(\dot{x}_s)\Delta s)$$

と表記される。ここで、 $P$  は最後の積表示において、 $s$  の大きい項を左におくことを意味する。

さて、空間  $\Sigma$  に埋め込まれた閉じた SN  $S = (\Gamma, c)$  を考える。ここで、 $\Gamma$  は 3 個の頂点のみを持つ閉グラフで、 $c$  はその各辺 (頂点を結ぶ線分)  $e$  に非負整数  $c(e) = 2j_e$  (あるいは、 $SU(2)$  の既約表現  $\rho_{j_e}$ ) を対応させる規則である。 $c$  はグラフの色づけと言われる。これまでに考えた SN との違いは、2 次元ではなく 3 次元空間内のグラフで、その配置が意味を持っていることである。また、各辺は向きづけられているとする。いま、 $\Sigma$  上のゲージ場  $A$  が与えられると、 $\Gamma$  の各辺  $e$  に沿う平行移動を表す行列  $U_e(A) = \rho_{j_e}(P \exp \int_e -A)$  が決まる。この行列を  $S$  の対応する辺に挿入した SN のバイノール値を  $\Psi_S[A]$  とおくと、ゲージ不変な  $A$  の汎関数、すなわち  $A/G$  上の関数が得られる。例えば、

このようにして得られる状態をスピネットワーク状態という。

この構成法では、 $\Psi_S$  が各辺に沿う平行移動を表す群の元を通してのみ  $A$  に依存している： $\Psi_S[A] = F_S\{P \exp \int_e -A\}$ 。ところが、グラフの各辺  $e$  に群の元を勝手に与えたとき、常にその群が平行移動  $P \exp \int_e -A$  となるゲージ場が存在する。そこで、グラフを固定したとき様々な色づけで得られる SN 状態の内積を

$$\langle \Psi_S | \Psi_{S'} \rangle := \int \prod_e dg_e \bar{F}_S\{\{g_e\}\} F_{S'}\{\{g_e\}\}$$

と定義する。ここで、 $dg$  は  $SU(2)$  の不変測度、 $\prod_e dg_e$  は対応する測度の  $\Gamma$  のすべての辺  $e$  についての積である。コンパクト群の既約表現に関する Peter-Weyl の定理より、各既約表現  $\rho_j$  の表現行列の成分は、 $SU(2)$  上の関数として完全な直交系をなし、

$$\int dg (\rho_j(g))_b^a (\bar{\rho}_k(g))_d^c = \frac{1}{2j+1} \delta_{jk} \delta^{ac} \delta_{bd} \quad (5)$$

が成り立つことより、同じ  $\Gamma$  を持つ SN 状態の全体も直交系をなすことが容易に示される： $\langle \Psi_S | \Psi_{S'} \rangle \propto \delta_{S,S'}$ 。この直交関係はグラフが異なる SN へも拡張される。これは、任意の 2 つの (異なるグラフを持つ) SN をその合併をとったグラフに埋め込み、必要なら未定義な色を 0 (すなわちスピゼロの表現) とすることにより実現される。このスピネットワーク基底は、Ashtekar 理論に基づいて量子重力理論を構成する試みにおいて中心的な役割を果たしている<sup>6)</sup>。

## 5. スピフォーム

前節で紹介したスピネットワーク基底は、ゲージ場の量子状態を表現する手法であるが、同じ発想で量子ゲージ場のダイナミクスを記述するには、スピネットワークの 1 次元高いバージョンであるスピフォーム (spin foam) が用いられる。このスピフォームは、位相的場の量子論に対する経路積分表示に厳密な数学的定式化を与える手段として最近注目を集めている<sup>5,7)</sup>。

位相的場の理論の中で最も簡単なものは、BF 理論と呼ばれるものである。この理論は一種のゲージ理論で、ゲージ群  $G$  が  $SU(2)$  の場合、 $n$  次元多様体  $M$  上の  $SU(2)$  ゲージ場  $A$  と  $U \in SU(2)$  に対して  $B \rightarrow UBU^{-1}$  と変換する、行列に値を持つ  $(n-2)$  階反対称場  $B$  を基本変数とし、その作用積分は

$$S_{BF} = \int_M \text{Tr}(B \wedge F)$$

で与えられる。ここで、 $F$  は  $A$  に対する曲率形式である。

この作用積分を正準形に書き直すと、ゲージ場の場合と同様に  $A_\Sigma$  と  $B$  の空間成分  $E = B_\Sigma$  が共役となることがわかるが、拘束条件として、 $D_\Sigma E = 0$  以外に  $F_\Sigma = 0$  という新たな条件が付け加わる。この新たな条件は、局所的には適当なゲージ変換で  $A = 0$  とできることを意味する。これを見るために、固定された基点  $p$  を通る閉曲線  $\gamma$  に沿う平行移動  $h_\gamma = V(1)$  を考える。 $h$  はホロノミーと呼ばれ、その全体はホロノミー群という  $G$  の部分群をなす。ホロノミーは  $\gamma$  の微小な変形  $\delta x$  に対して、微分方程式 (4) より、

$$h_\gamma^{-1} \delta h_\gamma = \oint_\gamma V(s)^{-1} F(\dot{x}, \delta x) U(s) ds \quad (6)$$

と変化する (以下、添え字  $\Sigma$  を省略する)。したがって、 $F = 0$  の場合、 $h_\gamma$  は  $\gamma$  の連続変形に対して不変で、 $\gamma$  のホモトピー類にのみ依存することがわかる。特に、基点  $p$  を始点とする曲線に沿う平行移動は、 $p$  の近傍ではその終点  $x$  にのみ依存し  $V(x)$  と書ける。この  $V(x)^{-1}$  によるゲージ変換を行うと、 $A$  は局所的にゼロとなる。この結果は、 $DE = 0$  を考慮すると、BF 理論の古典的相空間が、通常有限次元となる空間  $\mathcal{A}_0/G := \text{Hom}(\pi_1(\Sigma), G)/\text{Ad}(G)$  の余接バンドル  $T^*(\mathcal{A}_0/G)$  と同一視できることを意味する。このように、古典的相空間が有限次元となり局所的自由度を持たないことが、位相的場の理論と呼ばれるゆえんである。

以上の準備のもとに、 $G = SU(2)$  として、BF 理論の量子論を考える。例えば、その分配関数  $Z(M)$  は経路積分を用いて形式的に

$$\begin{aligned} Z(M) &= \int \int [dA][dB] e^{i \int_M \text{Tr}(B \wedge F)} \\ &= \int [dA] \prod \delta(F) \end{aligned}$$

と表される。この式に意味を与えるために、次のような方法で経路積分を離散化する。まず、多様体  $M$  の単体分割を  $K$ 、その双対分割を  $K^*$  とする。ここで、双対分割とは、 $K$  の  $n$  単体の重心を 0 双対胞体 (頂点)、それらを結び  $K$  の  $(n-1)$  単体と交わる線分を 1 双対胞体、1 双対単体で囲まれた多角形で  $K$  の  $(n-2)$  単体と交わるものを 2 双対胞体、... として定義される  $M$  の胞体分割である。以下、 $K^*$  の  $p$  双対

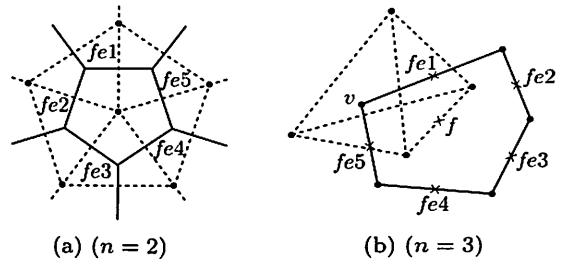


図5 3次元多様体の双対分割とホロノミー

胞体の全体を  $K_p^*$  と表記する。スピンネットワーク状態の議論と同様に、ゲージ場  $A$  が与えられると、各 1 胞体  $e \in K_1^*$  ごとにそれに沿う平行移動を表す群の要素  $g_e$  が定まり、これらの群の要素全体をゲージ場  $A$  の離散化された表現と見なすことができる。特に、各 2 胞体  $f \in K_2^*$  に対して、その辺を  $fe1, \dots, feN$  とすると、 $f$  の周に対応する閉曲線に沿うホロノミー  $h_f$  は  $g_{feN} \cdots g_{fe1}$  で与えられる (図5)。(6) 式より、この元と単位元の差は、曲率  $F$  の面  $f$  方向の成分 (と  $f$  の面積との積) に対応するので、 $\delta(g)$  を単位元に台を持つ群上の  $\delta$  関数とすると、 $\delta(h_f)$  を  $\delta(F)$  の離散化と見なすことができる。したがって、 $Z(M)$  に対する次の離散化された表式を得る。

$$Z_K(M) = \int \prod_{e \in K_1^*} dg_e \prod_{f \in K_2^*} \delta(h_f).$$

ここで、Peter-Weyl の定理より、 $G = SU(2)$  に対する  $\delta(g)$  が  $SU(2)$  の既約表現の列  $\rho_j$  を用いて

$$\delta(g) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \text{Tr}(\rho_{k/2}(g))$$

と展開できることを用いると、 $Z_K(M)$  は

$$Z_K(M) = \sum_c \int \prod_e dg_e \prod_f (c_f + 1) \text{Tr}[\rho_{c_f/2}(h_f)]$$

と書かれる。ここで、 $c_f$  は各 2 双対胞体の非負整数による色づけで、和はすべての面に対する色づけ全体についてとるものとする。

2次元多様体 ( $n=2$ ) の場合、各  $e \in K_1^*$  は常に 2 個の 2 双対胞体の辺となるので、Peter-Weyl の公式 (5) よりすべての面の色は同じ  $k$  となり、 $dg_e$  積分は各 1 双対胞体に  $(k+1)^{-1}$ 、各頂点に  $(k+1)$  の因子を生み出す。したがって、0 双対胞体、1 双対胞体、2 双対胞体の個数を  $N_0, N_1, N_2$  とおくと、Euler の公式より

$$Z_K(M) = \sum_k (k+1)^{N_0 - N_1 + N_2}$$

$$= \sum_k (k+1)^{\chi(M)}$$

となる。ここで、 $\chi(M)$  は  $M$  の Euler 数である。すなわち、 $Z_K(M)$  は単体分割に依存せず、 $M$  の位相だけに依存する。ただし、この和は  $\chi(M) \geq -1$ 、例えば球面 ( $\chi = 2$ ) やトーラス ( $\chi = 0$ ) の場合発散する。

次に、3次元多様体 ( $n = 3$ ) の場合、各辺は3個の2対胞体の共通辺となるので、積分

$$\int dg(\rho_{j_1}(g))_b^a (\rho_{j_2}(g))_d^c (\rho_{j_3}(g))_f^e$$

を実行すればよい。変換性より、この量は  $(a, c, e)$ 、 $(b, d, f)$  のそれぞれの組について  $SU(2)$  スカラとなるので、その積分値は2節の3価頂点テンソルを用いると  $T(j_1 j_2 j_3)^{ace} T(j_1 j_2 j_3)_{bdf}$  の形になる。すなわち、各辺での積分は2個のスピネットワーク頂点を生み出す。これより、 $Z_K(M)$  に対して次の表式を得る：

$$Z_K(M) = \sum_c \prod_f (c_f + 1) \prod_e \left[ \begin{array}{c} \textcircled{c_2} \\ \textcircled{c_1} \\ \textcircled{c_3} \end{array} \right]^{-1}$$

$$\times \prod_v \begin{array}{c} \bullet \\ \textcircled{c_1} \quad \textcircled{c_3} \\ \textcircled{c_2} \\ \textcircled{c_4} \\ \textcircled{c_5} \\ \bullet \end{array}$$

最後の四面体型スピネットワークの値は  $6j$  記号を用いて表すこともできる。

4次元以上についても同様で、3次元の場合と類似の表式が得られる。これらの表式は、双対分割を通して、各面に色のついた2次元グラフの評価値と見なすことができる。この2次元色つきグラフは、スピネットワークの2次元版という意味でスピフォームと呼ばれる。ただ、3次元以上では、2次元の場合と異なり、色づけについての和のために  $Z_K(M)$  は常に発散する。この発散を処理する方法として、 $SU(2)$  の代わりに有限個しか異なる既約表現を持たない量子群  $SU_q(2)$  を用いることが Turaeev と Viro により提案されている<sup>8)</sup>。この方法は、元の BF 理論で宇宙項を導入することと対応し、さらに宇宙項を持つ BF 理論は、もう1つの典型的な位相的場の理論である3次元 Chern-Simons 理論と密接に関連する<sup>5)</sup>。また、以上のスピフォームモデルによる正則化法は、状態の遷移を表す経路積分へも適用でき、その値は始状態と終状態に対応するスピネットワークをつなぐスピ

フォームの値の和として表現される<sup>5,7)</sup>。さらに、4次元の真空重力理論は Ashtekar 理論を通して、BF 理論にある拘束条件を付加した理論と見なされ、その視点から、スピフォームモデルを用いて量子重力理論を構築する試みも行われている<sup>5,9,10)</sup>。

スピネットワークの考え方は、物理への応用以外に、組み紐(絡み目)に対する不変量の構成にも使われ、絡み目多項式、Yang-Baxter 方程式、量子群など様々な問題で重要な役割を果たしている<sup>3)</sup>。これらのテーマは、Chern-Simons 理論の経路積分を用いて絡み目多項式である Jones 多項式や3次元多様体の不変量を導いた Witten の議論<sup>11)</sup> を通して、位相的場の理論とも結びついている<sup>12)</sup>。

このように、空間や時空の構造を代数的ないし組み合わせ的問題に還元するという Penrose の夢は、その出発点となったスピネットワークの発見から30年を経た現在、大きく花開いている。これらの多岐にわたる最近の発展について詳しく知りたい読者は、参考文献にあげたレビューや本を読んでほしい。

#### 参考文献

- 1) Penrose, R.: Angular momentum: An approach to combinatorial spacetime, in Bastin, T. ed., *Quantum Theory and Beyond*, 151-180, Cambridge Univ. Press (1969).
- 2) Penrose, R.: Applications of negative dimensional tensors, in Welsh, D. ed., *Combinatorial Mathematics and Its Applications*, Academic Press (1971).
- 3) Kauffman, L.: 結び目の数学と物理, 鈴木晋一・河内明夫監訳, 培風館 (1995).
- 4) Smolin, L.: gr-qc/9702030 (1997).
- 5) Baez, J.: gr-qc/9905087 (1999).
- 6) Ashtekar, A. and Lewandowski, J.: Representation theory of analytic holonomy  $C^*$  algebras, in Baez, J. ed., *Knots and quantum gravity*, Oxford University Press, Oxford (1994).
- 7) Miković, A.: gr-qc/0102110.
- 8) Turaeev, V. and Viro, O.: *Topology* **31**, 865 (1992).
- 9) Barrett, J. and Crane, L.: *Class. Quantum Grav.* **17**, 3101-3118 (2000).
- 10) Parez, A. and Rovelli, C.: gr-qc/0006107 (2000).
- 11) Witten, E.: *Comm. Math. Phys.* **121**, 351-399 (1989).
- 12) Turaeev, V.: *Quantum Invariants of Knots and 3-Manifolds*, de Gruyter (1994).

(こだま・ひでお, 京都大学基礎物理学研究所)