April 2005 MATHEMATICAL SCIENCES Number 502

量子重力理論

検証に向けた新たな展開

小玉 英雄

超弦理論を中心として，20世紀末の20年間における量子重力理論の発展は目覚ましいものであったが，その成果の多くは純理論的な色彩の強いもので，実験や観測と直接結び付く検証可能な予言を与えるには至らなかった．しかし，ここ数年間における研究，特に量子重力の非摂動論的効果に関する研究は，宇宙論，ブラックホール物理，加速器実験，宇宙線反応など様々な領域において検証可能な予言を与えつつあり，状況は大きく変化している．本特集では，これら量子重力の非摂動理論およびその検証と関連した研究の最前線を紹介する．

この総論では，個々のトピックの解説に先立ち，理論的にも現象的にも多岐にわたる量子重力研究についての全体像を持ってもらうために，研究の背景と相互の関係について概説する．

1. 量子重力理論の困難

一般相対論は，天体現象から宇宙全体にわたる巨視的なスケールでの重力現象を記述する基礎理論として不動の地位を得ている．しかし，重力源となる物質の量子性が重要となるミクロのスケールでは事情が異なる．Einstein 方程式

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}+\Lambda g_{\mu\nu}=\kappa^2T_{\mu\nu}$$

において（Λ は宇宙定数，$\kappa^2=8\pi G$，光速 $c=1$），ミクロのスケールでは右辺のエネルギー・運動量テンソルは量子論的ゆらぎを持ち，これは左辺を通して時空計量の量子ゆらぎを生み出す．したがって，ミクロの世界での重力相互作用を正しく記述するには，量子化された重力理論，すなわち量子重力理論が必要となる．

重力場が弱く，計量が Minkowski 計量 $\eta_{\mu\nu}$ からわずかにずれているとき，$g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}+\kappa h_{\mu\nu}$ とおいて，$h_{\mu\nu}$ に関して1次近似すると，Einstein 方程式は重力波を表す波動方程式を与える．この線形化された理論は，電磁場の量子化と同じ方法で容易に量子化することができ，重力波は重力子の集まりとして記述される．したがって，例えば物質場が存在しないとき，Einstein 方程式に対応する Einstein–Hilbert 作用積分

$$S_{\mathrm{EH}}=\frac{1}{2\kappa^2}\int d^4x\sqrt{-g}\,(R-2\Lambda) \qquad (1)$$

を $h_{\mu\nu}$ について展開し，3次以上の項をこの重力子の相互作用と見なすことにより，通常の場の理論の方法を用いて重力の摂動論的量子論を構成できることが期待される．ただし，よく知られているように相互作用する場の量子論では粒子の散乱振幅は一般に発散する積分で与えられる．量子電

気力学やゲージ場の理論では，この発散は繰り込み可能で，散乱振幅を直接観測可能なパラメータで表すと有限な表式が得られる．また，これらのパラメータの数は，出発点で用いた作用積分に含まれる質量や相互作用定数の数と一致する．これに対して，今述べた方法で Einstein 理論を量子化すると，繰り込み不可能な発散が現れる．この発散は，理論を拡張して，元の作用積分に $R^2, R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ のような高次の項を無限個付け加えることにより繰り込むことができるが，散乱振幅を有限な表式で表すには無限個のパラメータが必要となる．したがって，有限回の観測で理論のパラメータを確定することができず，理論は予言可能性を失ってしまう．これは重力の量子化における最大の困難であり，それをいかに克服するかが量子重力理論を作る上で最も重要なポイントとなる．

もっとも，量子効果で現れるこれらの補正項はマクロスケールあるいは低エネルギーの現象では無視できると期待される．実際，曲率を簡単に $\mathcal{R}$，対応する時間・空間スケールを L と表すと，$\mathcal{R} \sim 1/L^2$ なので，$\mathcal{R}^n$ に比例する項は作用積分の中で，

$$\kappa^{2n-4}\mathcal{R}^n \sim (L_{\rm pl}/L)^{2(n-1)}\kappa^{-2}R$$

の形で現れる．ここで，$L_{\rm pl}$ は Planck 長

$$L_{\rm pl} = \left(\hbar G/c^3\right)^{1/2} \simeq 10^{-32}{\rm cm}$$

である．したがって，$\mathcal{R}$ の 2 次以上の項は巨視的な現象では無視できる．また，エネルギースケールに換算すると，$L_{\rm pl}$ は Planck エネルギー

$$E_{\rm pl} = \hbar c/L_{\rm pl} \simeq 10^{19}\,{\rm GeV}$$

に対応するので，エネルギーが $E \ll E_{\rm pl}$ となる粒子の相互作用では重力の量子効果は無視できると期待される．このことは，見方を変えると，$L \sim L_{\rm pl}$ や $E \sim E_{\rm pl}$ という極端に小さなスケールの時空構造や超高エネルギー粒子の反応を観測しない限り，重力の量子効果を検出できないことを意味する．これは，量子重力理論の検証が非常に困難であることを示唆している．

2. 正準量子重力

現在，量子重力理論を作る試みとして，大きく異なる 2 つのアプローチが存在する．その一つは，Einstein 理論の正準量子化を出発点として，非摂動論的な方法で重力の量子論を作る試みである．その基本的なアイデアは，重力の量子効果が重要となるスケールでは時空構造のゆらぎが大きいため摂動論による扱いは不可能で，この大きなゆらぎあるいは時空構造の量子性を正しく考慮すれば，摂動論で現れた発散は実際には現れないだろうというものである．

このアプローチでは，まず，時空を時間一定面に相当する空間的超曲面の系列に分解する（3＋1 分解）．時間 t に対応する空間面 Σ_t の計量を $q(t) = \{q_{ij}(t, x)\}$ として，計量は

$$ds^2 = -N^2dt^2 + q_{ij}(dx^i + N^i dt)(dx^j + N^j dt)$$

と表される．このとき，簡単のため真空の場合を考えると，Einstein–Hilbert 作用積分は

$$S_{\rm EH} = \int d^4x \left[\dot{q}_{ij}p^{ij} - N^i\mathcal{H}_i(q,p) - N\mathcal{H}_\perp(q,p)\right] \qquad (2)$$

と書き換えられる．ここで，p^{ij} は q_{ij} の Σ_t に垂直な方向に沿う時間変化率（外部曲率 K_{ij}）に比例した量である．また，n^μ を Σ_t の単位法ベクトル，$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - Rg_{\mu\nu}/2$ として，

$$\mathcal{H}_i = G_{\mu i}n^\mu, \quad \mathcal{H}_\perp = G_{\mu\nu}n^\mu n^\nu$$

である．したがって，Einstein 方程式は $q(t)$ およびそれに正準共役な量 $p(t) = \left\{p^{ij}(t, x)\right\}$ に対する正準方程式として表される．ただし，座標自由度に対応する N と N^i は任意なので，その変分より拘束条件 $\mathcal{H}_i = 0$ および $\mathcal{H}_\perp = 0$ が現れる．

通常，この系の量子論では，Dirac に従って，これらの拘束条件は状態ベクトル Φ に対する量子拘束条件として表される：

$$ベクトル型拘束条件：\mathcal{H}_i\Phi = 0, \qquad (3a)$$

$$スカラ型拘束条件：\mathcal{H}_\perp\Phi = 0. \qquad (3b)$$

古典論では，$\int d^3xL^i\mathcal{H}_i$ はベクトル場 L^i に対応する Σ_t の無限小変換を生成するので，対応する量子拘束条件は Φ が空間の微分同相変換で不変であることを表す．また，系の Hamiltonian H は $\mathcal{H}_\perp$ と $\mathcal{H}_i$ の線形結合となるので，量子拘束条件の下で，Schrödinger 方程式 $i\partial_t\Phi = H\Phi$ は自明となり，Φ は t に依存しない．したがって，量子拘束条件のみが残ることになる．Φ を q 空間上の汎関数として表示した場合の $\mathcal{H}_\perp\Phi = 0$ は，しばしば **Wheeler–De Witt 方程式**と呼ばれる．

1980 年代には，以上の定式化を宇宙全体に適用することにより量子宇宙論の研究が盛んに行われ，「無からの宇宙創生」(A. Vilenkin) や宇宙の無境界波動関数 (J. Hartle と S.W. Hawking) など様々な興味深いアイデアが提案された[1]．しかし，これらの議論は検証可能な明確な予言を与えるには至らなかった．それにはいくつかの理由があるが，量子拘束条件を一般的に解くことができないため，q 空間を有限自由度に簡約したミニスーパースペースやその摂動に議論が限定されていたこともその一つである．

3. ループ量子重力

このような状況で，正準量子化から出発して真に非摂動的な量子重力の定式化を与えようとしたのが，現在ループ量子重力理論と呼ばれているアプローチである[2]．その原点となったのは，重力の正準理論に対する **Ashtekar 形式**である．

この理論形式では，計量ではなく対応する共変微分の接続係数を基本的な変数と見なす．まず，$e_I = (e^i_I)$ $(i = 1, 2, 3)$ を計量 q_{ij} に対する Σ_t 上の正規直交基底，$\theta^I = \theta^I_i dx^i$ をその双対基底 ($\theta^I(e_J) = \delta^I_J$) とする．このとき，$q_{ij} = \theta^I_i\theta_{Ij}$ (内部添え字 $I, J, \cdots$ は δ_{IJ} で上げ下げ) より，

$$\tilde{e}^i_I = \frac{1}{\kappa^2}\sqrt{q}e^i_I,$$

$$P^I_i = -\frac{2\kappa^2}{\sqrt{q}}\left(\theta^I_j p^{ij} - p^j_j\theta^I_i\right) \equiv K_{ij}e^{Ij}$$

とおくと，正準形の作用積分 (2) は

$$S = \int d^4x\left(-\tilde{e}^i_I\dot{P}^I_i - M^IG_I - N^i\mathcal{H}_i - N\mathcal{H}_\perp\right)$$

と書き換えられる．ただし，M^I は任意関数，G_I は $G_I = \epsilon_{IJK}\tilde{e}^J_iP^{Ki}$ である．S を M^I で変分すると，拘束条件 $G_I = 0$ が得られる．この拘束条件は $K_{ij} = \theta_{Ii}P^I_j$ が対称テンソルであることを要求する条件となっている．

ここで，$\nabla_i e_I = e_J\,\omega^J{}_{Ii}$ により定義される e_I に関する接続係数 ω_{IJi} を用いて $\Gamma^I_i = \frac{1}{2}\epsilon^{IJK}\omega_{JKi}$ とおくと，

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{e}}^i_I\Gamma^I_i &= \epsilon_{IJK}\left[\partial_t\left(\theta_{Ij}\partial_k e^{Jj}E^{Kk}\right)\right.\\ &\qquad \left.+\partial_k\left(\dot{\theta}_{Ij}e^{Jj}E^{Kk}\right)\right]\end{aligned}$$

が成り立つので，$\dot{\tilde{e}}^i_IP^I_i$ で $\tilde{e}^i_I$ と P^I_i を

$$\tilde{e}^i_i \;\rightarrow\; E^i_I := \gamma^{-1}\tilde{e}^i_I, \tag{4a}$$

$$-P^I_i \;\rightarrow\; A^I_i := \Gamma^I_i - \gamma P^I_i \tag{4b}$$

と置き換えても変分方程式は変化しない．したがって，S_{EH} は結局，

$$S_{\mathrm{H}} = \int d^4x\left(E^i_I\dot{A}^I_i - M^IG_I - N^i\mathcal{H}_i - N\mathcal{H}_\perp\right)$$

と同等であることが分かる．

ここで，γ は定数で，**Immirzi パラメータ**と呼ばれる．もともとの Ashtekar 理論では $\gamma = \pm i$ が採用されていたが，この場合，拘束条件が微分多項式型の単純な表式で与えられるという利点がある一方で，変数が複素数となるため量子化の際に様々な困難が生じた．このため，現在では，γ を実数の理論パラメータとして扱うのが主流である．

この形式で重要な点は，正規直交基底 e_I の局所的な回転

$$\bar{e}^I = O^I{}_Je^J;\quad O = (O^I{}_J) \in SO(3)$$

に対して，$A = A_idx^i; A_i = (\epsilon_{IKJ}A^K_i)$ が $SO(3)$ ゲージ場と同じ変換則

$$\bar{A} = OAO^{-1} + dOO^{-1} \tag{5}$$

に従って変換し，この変換に対して S_{H} が (M^I の適当な変換により) 不変となっていることである．すなわち，重力理論を特殊なゲージ場の理論と見なすことができる．この描像では，E^i_I は電

磁場の電場にあたる．また，G_I は

$$G_I = D_i E^i_I := \partial_i E^i_I + \epsilon_{IJK} A^J_i E^{Ii}$$

と書き換えることができるので，拘束条件 $G_I = 0$ は Gauss の法則に対応する．また，ゲージ理論と同様に，G_I から生成される正準変換は $SO(3)$ ゲージ変換と一致する．

この理論を Dirac 量子化すると，正準量子重力理論の場合の拘束条件 (3a) および (3b) に加えて，

$$\text{ゲージ拘束条件：} G_I \Phi = 0 \tag{6}$$

が現れる．これは，上で述べた G_I の正準理論における役割から，Φ が局所 $SO(3)$ ゲージ変換で不変であることを要求するものとなる．ループ量子重力理論の最大の特徴は，この拘束条件を解くために，ホロノミー変数を利用する点にある．まず，正準変数の対 (E^i_I, A^I_i) において，ゲージ場 A を配位変数，$E = (E^i_I)$ をその共役運動量と見なすと，状態ベクトルは A 空間上の波動関数 $\Phi(A)$ として表される．ここで，接続 A により定義される曲線 $\alpha = (\alpha^i(t))$ $(0 \le t \le 1)$ に沿った平行移動

$$U_\alpha[A] = \lim_{n\to\infty} \prod_{j=0}^{n-1} \left[1 + A_i\left(\alpha(t_j)\right)\dot{\alpha}^i(t_j)\tfrac{1}{n}\right]$$
$$\equiv P_\alpha \exp \int A \quad \in SO(3)$$

$(t_j = j/n)$ は，ゲージ変換 (5) に対して

$$U_\alpha[\bar{A}] = O\left(\alpha(1)\right) U_\alpha[A] O\left(\alpha(0)\right)^{-1}$$

と変換するので，α が閉曲線のとき，ホロノミー変数 $T_\alpha[A] = \mathrm{Tr}(U_\alpha[A])$ はゲージ不変となり，ゲージ拘束条件を満足する．さらに，すべてのループ α に対して $T_\alpha[A]$ の値が指定されると，A はゲージ自由度を除いて一意的に定まることが示される[3]．したがって，ゲージ拘束条件の任意の解は，ホロノミー変数の（一般に無限個の）線形結合で表される．特に，ゲージ不変な状態ベクトルの空間に適当な内積が定義されているとき，

$$\Psi[\alpha] = \langle T_\alpha | \Phi \rangle$$

により定義されるループ空間上の汎関数によりゲージ拘束条件の解を表すことができる（**ループ表現**）．また，ベクトル型拘束条件は，$\Psi[\alpha]$ がループのなめらかな連続変形（ただし，ループが自分自身と交わる変形は禁止する）により不変となる要請と同等となる．これがループ量子重力という言葉の起源である．

ただし，ホロノミー変数は互いに線形独立でなく，ループ表現には曖昧さがある．この問題は，ホロノミー変数の特別の組み合わせであるスピンネットワーク変数を用いることにより解決され，対応するゲージ不変な状態ベクトルの基底は**スピンネットワーク基底**と呼ばれる[2,4]．このスピンネットワーク基底は，現在，ループ量子重力理論において最も重要な概念となっている．例えば，この基底を用いることにより，面積や体積を表す作用素が構成され，それらが離散的なスペクトルを持つことが示されている．この面積や体積の離散性は，量子重力の非摂動論的効果が産み出す時空の量子性を表すものと考えられ，注目されている．

ループ量子重力理論はまだ発展途上の理論であり，古典論や摂動論的量子論との対応，スカラ拘束条件やダイナミクスの取り扱い，状態解釈など様々な解決すべき問題が存在するが，数理的に豊かな構造を持つ非常に興味深い理論である．また，不完全ながらも，実験や観測にかかる情報を取り出し，理論を検証しようとする試みも始まっている．ブラックホール時空におけるスピンネットワーク状態の境界値問題と面積作用素の関係に注目して，ループ量子重力理論の枠内でブラックホールエントロピーの表式を導き，理論パラメータである Immirzi パラメータを決める試み，ブラックホール基準振動の減衰率と面積作用素の固有値の最小値を関連付ける議論などがその重要な例である（玉置氏の解説参照）．また，ループ量子重力理論の定式化を空間的に一様等方な宇宙モデルに適用して，ミニスーパースペースモデルに基づく量子宇宙論を作る試みが Bojowald を中心とする人々により進められている．この**ループ量子宇宙論**は，計量に基づく正準量子論と異なり，時間が離散化され，宇宙の初期特異点が実質的に回避されるという興味深い特徴を持つ（辻川氏の解説参照）．さらに，これらの研究と比較

すると厳密さを欠くが，観測される超高エネルギー宇宙線の数が理論の予想を超えているという観測を，時空の量子性の効果として説明する試みもある（菅本・渡部氏の解説参照）．

4. 弦理論

量子重力理論に対する正準理論と並ぶもう一つのアプローチは弦理論である．弦理論は，張力が長さによらず一定値 $1/(2\pi\alpha')$ を保つひもの量子論である[5]．ひもはその振動状態により様々なエネルギーや内部角運動量に対応する量子状態を取る．このことに対応して，弦理論は，様々な質量，スピンを持つ素粒子を一つのひもの内部状態の違いとしてまとめて記述する理論となっている．

ひもはちぎれて2つ以上に分裂したり，逆に2つ以上のひもが一つに合体することもできる．これは，粒子の描像で見ると，2つ以上の粒子が相互作用により反応や散乱を起こすことに対応する．この状況を時空全体で眺めると，ひもの軌跡（世界面）は2次元面となり，自由粒子に相当するひもは無限に長いリボンや円筒で，またそれらの相互作用は分岐する面で表される（図1）．ここで，世界面がリボンになるひもは2つの端点を持つ開いたひも（開弦）に，また，円筒となるひもはループ状のひも（閉弦）に対応する．

相互作用を表す分岐した面は，ひもの長さをゼロとした極限を取ると，ちょうど場の量子論で素粒子の散乱振幅を計算する際に用いる Feynman 図式と同じ図式が得られる．弦理論ではこのアナロジーを用いて，分岐する世界面のリボンや円筒にはひもの伝搬関数を，分岐箇所には結合定数 g を付与することにより，ひもあるいはその様々な内部状態に対応する素粒子の散乱振幅を計算する．

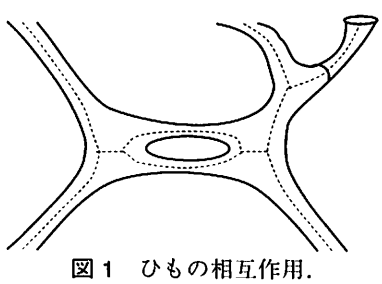

図1　ひもの相互作用．

このように構成された弦理論では，ひもの内部状態に開弦ではゲージ粒子（スピン1，質量ゼロ）が，閉弦では重力子（スピン2，質量ゼロ）が自然に含まれる．弦理論の最大の魅力は，これらの粒子の相互作用が，低エネルギー極限で通常のゲージ相互作用や（Einstein 理論に従う）重力相互作用と一致し，しかも対応する散乱振幅が発散を含まない有限量となることである．Einstein 理論の摂動論的量子化における最大の問題であった発散の問題が全くなくなるわけである．

ただし，犠牲も伴う．それは理論が矛盾なく構成できるのは，ひもの運動する時空が（Minkowski 時空の場合）26次元という高い次元を持つ場合に限られることである．また，これまでに説明した弦理論（ボーズ的弦理論）では，半整数スピンを持つ粒子が得られず，しかも，ひもの最低エネルギー状態は質量の2乗が負のタキオンとなってしまう．これらのうちフェルミ粒子の問題は，ひもの上に2次元的なスピノール場をのせることにより回避される．さらに，この理論が2次元の理論として超対称性を持つように作ると，タキオンを含む一部の状態を相互作用と矛盾しないように捨て去ることができ（GSO 射影），粒子スペクトルと散乱行列が超対称性を持つ理論ができる．このような弦理論は**超弦理論**と呼ばれる．

ただし，超弦理論は，10次元時空でのみ発散や量子異常を含まない整合的な理論となる．これまでに，10次元の整合的な超弦理論として，I-$SO(32)$ 型，IIA 型，IIB 型，ヘテロ-$SO(32)$ 型（以下，HO 型），ヘテロ-$E_8 \times E_8$ 型（以下，HE 型）の5つが知られている[5]．これらのうち，I 型は向きを持たない開弦と閉弦の理論で，開弦の両端に非可換電荷を付与することにより非可換ゲージ自由度を取り入れる理論である．理論の整合性より，このゲージ群は $SO(32)$ に限られる．次の II 型の理論は閉弦のみの理論で，低エネルギーでは本質的に重力相互作用のみを含む．閉弦では，ひもを右回りに進む

波と左回りに進む波は相互作用せず，全体の量子状態はそれぞれの状態の積となる．特に，超弦理論ではそれぞれから質量ゼロ，スピン 1/2 のモード (R–モード) が現れ，GSO 射影の際にこれらのモードに対応するフェルミ粒子のカイラリティを左巻きないし右巻きのいずれかに限定する．この結果，右回りと左回りで異なるカイラリティを残したモデルが IIA 型，同じカイラリティを残したモデルが IIB 型である．残りのヘテロ型理論は，同じく閉弦理論であるが，右回り状態を 10 次元の超弦理論により，左回り状態を 26 次元のボーズ的弦理論により構成した混合型理論で，2 つの理論の違いは含まれる非可換ゲージ理論の違いである．この理論では，26 次元時空として 10 次元 Minkowski 時空と 16 次元トーラスを仮定する．このとき，16 次元部分に対応する振動モードから $SO(32)/\mathbb{Z}_2$ ないし $E_8 \times E_8$ という群の随伴表現に対応する質量ゼロ，スピンゼロの状態が得られる．これと質量ゼロ，スピン 1 の右回り状態の積がこれらの群をゲージ群とするゲージ粒子として振る舞う．これら 5 つの理論に含まれる質量ゼロ粒子の相互作用は，低エネルギーの極限で，対応する 5 種類の 10 次元超重力理論，すなわち一般共変性と超対称性を併せ持つ 10 次元重力理論により記述される．ただし，超重力理論は Minkowski 時空以外の解を持ち，超弦理論を曲がった時空（や自明でない背景場）上に拡張した非摂動的理論と対応している．

5. 双対性，D ブレーン，M 理論

このように，数が少ないとはいえ，複数個の整合的な量子重力理論が存在することは，当初，究極の理論は一意的であろうと予想していた研究者をとまどわせた．しかし，最近の研究で，状況は大きく変化した．その発端は，双対性の発見である．例えば，10 次元 Minkowski 時空において，一つの空間方向を長さ L を単位として周期的に同一視する．このとき時空は 9 次元 Minkowski 時空と円の積空間 $E^{8,1} \times S^1$ となり，その上の超弦理論のスペクトルは一部変更を受ける（S^1 コンパクト化）．この変更を IIA 型と IIB 型に施してみると，両者のスペクトルは $L \to \alpha'/L$ という変換（T 変換）で一致することが分かる．実は，相互作用まで含めて，2 つの理論は完全に対応する．すなわち，S^1 コンパクト化された IIA 型と IIB 型の理論は，理論パラメーターの表示の違いを除いて，同じ理論 II/S^1 となる訳である．（IIA 型を基準に考えると，）$L \to \infty$ の極限でこの理論は元の IIA 型と一致し，$L \to 0$ で元の IIB 型と一致する．このように，2 つの理論が 1 つの理論の異なるパラメータ極限として得られるとき，それらは互いに双対であると言われる．特に，今説明したものは T 双対と呼ばれる．ヘテロ型の 2 つの理論も互いに T 双対であることが示される．

T 双対と並んで重要な双対性に，S 双対がある．これは，弦の相互作用定数 g を $1/g$ で置き換える変換（S 変換）に基づいた双対性である．例えば，HO と I–$SO(32)$ は互いに S 双対であると考えられている．その根拠の一つは，これらの理論の低エネルギー極限である 2 つの超重力理論がこの変換に対応する変数の取り替えにより互いに一致することにある．ただし，この変換は例えば I 型理論の弱結合領域（$g \ll 1$）を HO 型理論の強結合領域（$g \gg 1$）に移すので，摂動論的な超弦理論ではその正しさを直接証明することはできない．

この S 双対と T 双対を組み合わせると，5 つの超弦理論のすべてを互いに結び付けることができる（図 2）．このことから，現在では，これらのすべてがより統一的な一つの理論から得られると予想されている[5]．この予想では，この理論はモジュライと呼ばれる連続パラメータにより記述される多くの基底状態を持ち，5 つの超弦理論は異なるモジュライ値に対応する基底状態の周りでの

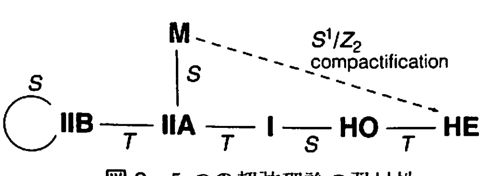

図2　5 つの超弦理論の双対性.

摂動論に対応すると考える．さらに，この理論は10次元ではなく11次元の理論である可能性が指摘されている．その理由は，IIA型理論の強結合極限が11次元の超重力理論を低エネルギー極限として持つ理論（**M理論**）となることを示唆するいくつかの事実が存在することに基づく．IIA型10次元超重力理論が11次元超重力理論のS^1コンパクト化により得られることもその一つである．この予想に基づいて，現在，この究極の統一理論を実際に構成する様々な試みが行われている．**行列モデル**，**非可換幾何学に基づく重力理論**などはその例である（北澤氏の解説参照）．

双対性の研究は，超弦理論の統一予想のみでなく様々な新たな概念を産み出した．その一つが**Dブレーン**という概念である[5]．弦理論では，開弦の2つの端点にはそれらが自由に運動できるという境界条件（Neumann条件）を課す．ところが，この開弦理論に例えばx^9座標に関してT変換を施すと，境界条件がx^9座標が一定という条件（Dirichlet条件）に置き換わる．残りの座標$x^0, \cdots, x^8$は自由である．すなわち，端点の運動が9次元面上に制限された開弦理論が得られる．この面がDブレーンである．

ボーズ的理論で閉弦の交換により2枚のDブレーン間に働く力を計算すると，面が張力$\tau \propto 1/(g\alpha'^{9/2})$を持つとした場合の重力と一致する結果が得られる．また，この面に端点を持つ開弦の面に垂直な方向の振動モードには，この面の振動に対応する質量ゼロモードが含まれる．これらのことから，Dブレーンは一定の張力τを持つ力学的な面と見なすことができる．T変換をさらに別の座標に関して行うと，その回数に応じて様々な次元のDブレーンが得られる．一般に，空間的にp次元（時空的には$p+1$次元）のDブレーンは$\mathrm{D}p$ブレーンと呼ばれる．

Dブレーンは元々の超弦理論には存在しない．しかし，その強結合領域への拡張を含むと考えられる超重力理論では，このDブレーンが重力源となっていると解釈できる様々な古典解（ブラックブレーン解）が存在する（図3）．ブラックホール解もそれらに含まれる．さらに，Dブレーンの量子状態数からそのエントロピーSと質量，電荷の関係を求めると，ちょうど対応するブラックホール解の熱力学公式と一致する結果$S = A/4$が得られる．また，Dブレーンに端点を持つ開弦のブレーンに平行な方向の振動モードは，ブレーン上に局在したゲージ場を産み出す．DブレーンをN枚重ねると，ひもがゼロ質量のまま異なるブレーン上に端点を持つことができるので，このゲージ場は$U(N)$ゲージ場となる．したがって，本来重力相互作用のみのII型理論にDブレーンを加えると，ゲージ相互作用が付け加わる．II型の理論とI型やヘテロ型の理論が双対的になるのはこのおかげであり，弦理論の統一という考え方をより自然なものとする．これらのことから，Dブレーンはひもの非摂動論的凝縮体であり，それらを弦理論に加えることにより，本来摂動論的な弦理論に非摂動論的効果を取り入れることができると考えられる．

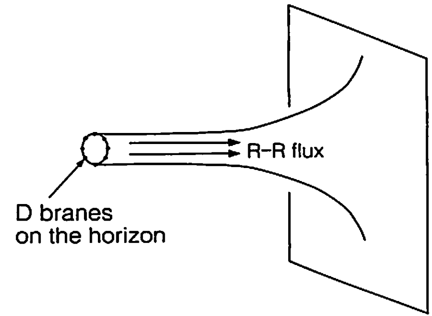

図3　ブラックブレーン解（Dブレーンの空間的広がりは描かれていない）．

このDブレーンの登場は，超弦理論にさらに新たな概念を産み出した．その代表が，**AdS/CFT対応**や**ホログラフィー**である（福間氏の記事参照）．

6. 検証にむけて

これまで見てきたように，ここ10年間の超弦理論の発展は目覚ましく，究極の統一理論の存在を示唆するまでになっている．しかし，それが実際に自然界を記述する理論であることを検証するには，解決すべき様々な問題が存在する．

第1の大きな問題は，これらの理論が高次元の理論である点である．何らかの方法で，低エネルギー現象では時空が4次元となること，すなわち余分な次元（余剰次元）が見えなくなることを説明する必要がある．これは**余剰次元コンパクト化の問題**と呼ばれる．第2の問題は，弦理論が持つ唯一のスケールであるPlanckスケール（$M_{\rm pl}=10^{16}\,{\rm TeV}$）と低エネルギー素粒子現象の標準モデルを特徴付けるスケール（$M_{\rm EW}=1\,{\rm TeV}$）の大きな隔たりである．これは**階層性問題**と呼ばれる．第3の問題は，**宇宙項問題**である．近年の宇宙膨張則の観測およびWMAPによる宇宙背景輻射非等方性の観測により，現在の宇宙が加速膨張していて，宇宙を満たすエネルギーの70%程度が正の宇宙項ないし状態方程式 $P\simeq-\rho(<0)$ を持つ物質（暗黒エネルギー）により担われていることがほぼ確実となった[6]．この観測事実は2つのことを意味する．一つは，現在の宇宙項 Λ がゼロでなく正であること，もう一つはその値がゼロに近いこと，より定量的には $|\Lambda|/\kappa^2=M_\Lambda^4$ により定義される質量スケールと $M_{\rm pl}$ の比が非常に小さな値 $M_\Lambda/M_{\rm pl}\lesssim10^{-31}$ となることである．重力を無視した物理法則では真空のエネルギーに相当する宇宙項の値は観測可能な量でなく任意である．したがって，これら宇宙項に関する2つの観測事実を説明することができるのは，重力を含む統一理論のみである．

WMAPの観測は現在の宇宙項のみでなく，宇宙初期の宇宙項についても重要な情報をもたらした．それは，現在の宇宙の平坦性や宇宙ゆらぎのスペクトルに関するインフレーションモデルの予言を確認したことである．このことにより，重力を含む統一理論は宇宙初期に十分なインフレーションが起きることを自然に説明しなければならないという新たな要請が生じた．これは非常に厳しい要請で，**インフレーション問題**と言える．

これら4つの問題は実は密接に関連している．まず，第1の問題に対する一つのアプローチとして，Kaluza-Kleinの思想に従い，高次元時空が4次元空間 X と余剰次元 $(D-4)$ のコンパクト空間 Y の積として表されると仮定する：

$$ds_D^2=W(y)^2g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu+g_{ab}(y)dy^a dy^b. \tag{7}$$

ここで，W はワープ因子，それが定数でないときにはワープしたコンパクト化と呼ばれる．このとき，空間 Y のサイズを L とすると，粒子の Y 方向の運動量の各成分は $1/L$ 程度の大きさに離散化される．このため，粒子のエネルギー E が $1/L$ と比べて小さいとき，Y 方向の運動量はゼロとなる．これは，粒子の波動関数が Y 方向に一様であること，したがって，Y 方向の構造が検出できないことを意味する．

例えば，M理論の低エネルギー極限である11次元超重力理論では，3階共変反対称テンソル場すなわち3形式 A_3 が理論に含まれる．そこで，その場の強度 $F_4=dA_3$ がちょうど4次元の体積要素 $\Omega(X)$ に比例するとすると，W が定数の解が得られる．これは，**Fruend–Rubin型自発的コンパクト化**と呼ばれる．このとき，L は F_4 の大きさに反比例するので，F_4 を十分大きく取ると余剰次元は低エネルギーで見えなくなる．ただし，大きな問題が生じる．それは，4次元時空が宇宙項 $\Lambda<0$ の真空解に当たる反de Sitter時空となることである．しかも，M_Λ は非常に大きな値 $1/(LL_{\rm pl})^{1/2}$ となる．11次元超重力理論では理論に勝手な宇宙項を加えることが超対称性により禁止されるので，この問題は深刻である．

このように，コンパクト化と宇宙項問題の双方を同時に解決することが困難であるのは，11次元超重力理論に限らず多くの高次元統一理論に共通する問題である．そのことを端的に表したのが，**GibbonsのNo–Go定理**である[7]．まず，計量が(7)の形を持つとする．さらに，D 次元時空のRicci曲率 R_{MN} が任意の時間的ベクトル T に対して強エネルギー条件 $R_{00}=R_{MN}T^MT^N\geq0$ を満たすとする．この仮定は，11次元や10次元の超重力理論では満たされている．このとき，$g_{\mu\nu}$ のRicci曲率 ${}^XR_{00}$ は

$${}^XR_{00}=R_{00}+\frac{1}{4W^4}\triangle_Y W^4 \tag{8}$$

となる．ここで，$\triangle_Y$ は g_{ab} に関するLaplace作

用素である．いま，Y が境界のないコンパクトでなめらかな多様体で W が正則とすると，この式に W^4 をかけて Y 上で積分すると右辺の第 2 項の寄与はゼロとなる．したがって，4 次元曲率に対する強エネルギー条件 ${}^X R_{00} \geq 0$ を得る．ところが，この条件は宇宙膨張の加速度が負またはゼロとなることと同等である．

このNo-Go定理を克服するには，その仮定のどれかを破る必要がある．その一つの方法は，Y としてコンパクトでない多様体または境界を持つ多様体を考えることである．このアイデアに基づくモデルの代表がRandallとSundrumにより提案されたブレーンワールドモデルである[8,9]．このモデルでは，全時空が境界を持つ5次元反de Sitter空間 dS^5 の領域（とコンパクトな内部空間の積）で表され，この時空の境界面（ブレーン）を我々の住む宇宙と見なす．このような解が存在することは，11次元M理論とHE型超弦理論の双対性に関するHořava–Wittenの研究により強く示唆されている[10]．このモデルの興味深い点は，それがワープしたコンパクト化であるため，境界面が2枚の場合，ワープ因子 W を利用して我々の宇宙の重力定数の大きさを保ったまま，高次元の重力定数のエネルギースケールをTeV程度にすることが可能である点である．このようにして生まれたのが**TeV重力理論**である．この理論は，現在計画されている素粒子加速器実験LHCでのミニブラックホール生成など検証可能な興味深い予言を含んでいる（川崎氏の解説参照）．

もう一つの方法は，Dブレーンとフラックスコンパクト化を用いる方法である．II型超弦理論では，閉弦の右回りと左回りのR–モードの積は整数スピンの粒子となりそれに対応する場は**R–R場**と呼ばれる反対称テンソル場で表される．Dブレーンはこの R–R 場の源となる**R–R 電荷**を持つ．この R–R 場を用いると階層性問題を解決するのに十分なワープしたコンパクト化が可能となる．このモデルにさらにDブレーンと $\bar{\mathrm{D}}$ ブレーン（負のR–R電荷を持つDブレーン）を加えることでNo–Go定理の仮定を破り，正の宇宙項が実現される．このアイデアと超弦理論の非摂動的性質に関する様々なアイデアを組み合わせることにより，最初に述べたすべての問題を解決する可能性を秘めたモデルが提案されている（早田・菅野氏の解説参照）．

このように，ループ量子重力理論や超弦理論/M理論により，冒頭に述べた摂動論的Einstein量子重力理論における発散の困難を解消する道が開かれた．さらに，これらの量子重力理論における非摂動的効果の研究は，次元解析ではとうてい困難と思われたこれらの理論の検証を，物理法則の基本的な構造や宇宙スケールの現象についての理論と観測情報を組み合わせることにより可能にしつつある．しかし，新たな問題も生じている．その一つは，フラックスコンパクト化の研究により，低エネルギー理論や宇宙に関する観測事実を説明するモデル（コンパクト化）を含む整合的なモデルが実質的に無限個存在し，それらを特徴付けるパラメータが準連続に密に分布していることが明らかになったことである．特に，理論の整合性だけではこれらのパラメータを決定できない．この問題は，**ランドスケープ問題**と呼ばれている（早田・菅野氏および江口・立川氏の解説参照）．繰り込み不可能性や検証の困難が別の形で再浮上したのである．

参考文献

1) 小玉英雄：数理科学 **476**, 41 (2003).
2) Ashtekar, A. and Lewandowski, J.: *gr-qc/0404018* (2004).
3) Kodama, H.: *Int. J. Mod. Phys. D* **1**, 439 (1993).
4) 小玉英雄：数理科学 **457**, 43 (2001).
5) Polchinski, J.: *String Theory* (Cambridge Univ. Press, 1998).
6) Spergel, D.N., et al.: *Astrophys. J. Supplement* **148**, 175 (2003).
7) Gibbons, G.: *Class. Quantum Grav.* **20**, S321 (2003).
8) Randall, L. and Sundrum, R.: *Phys. Rev. Lett.* **83**, 3370, 4690 (1999).
9) 数理科学 **487** (2004).
10) Hořava, P. and Witten, E.: *Nucl. Phys. B* **475**, 94 (1996).

（こだま・ひでお，京都大学基礎物理学研究所）