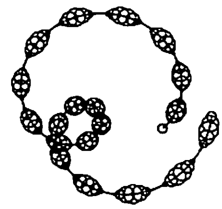
時空の対称性



小玉 英雄

現在の宇宙は大きなスケールで見ると，非常に良い精度で一様等方である．すなわち，特別の空間的位置や方向が存在しない．また，恒星や惑星などの安定した天体の作る重力場は，他の天体の影響が無視できる領域では良い精度で軸対称であることが多い．重力場を時空の構造として記述する一般相対性理論では，これらの状況は宇宙や天体の周りの時空構造が特別の対称性をもつことを意味する．もちろん，これらの対称性は近似的なものであるが，それが厳密に成り立つとして得られるモデルは，現実の現象に対する有用な近似モデルとなる．また，その安定性の研究は，これらの対称性の力学的な起源を明らかにするのに役立つ．本稿では，このような視点から，宇宙モデルとブラックホールを中心として，一般相対性理論の枠内で時空のもち得る対称性とその役割について解説する．

1. 等長変換と Killing ベクトル

まず最初に，時空が対称性をもつということの意味について説明しておこう．よく知られているように，一般相対性理論はどのような局所的な観測者から見ても法則が同じ表式で表されるように作られている．これは一般相対性原理あるいは一般共変性の要請と呼ばれる．ただし，これは法則のもつ対称性であって，特定の現象を位置や運動状態の異なる観測者が観測すると当然，その結果は一般に観測者ごとに異なる．例えば，太陽の位置を地球上の異なる場所で観測すると，その地平線からの傾きは場所ごとに異なる．不変なのは法則であって，個々の現象を観測した結果ではない．しかし，ある特別の現象に対して，一部の異なる観測者が同じ結果を得ることがあり得る．このような場合，この現象は特別の対称性をもつと言える．例えば，地上に静止した観測者が重力加速度を測定すると，その結果は近似的に場所に依らず同じ値を与える．これは，地球の重力場が近似的に球対称であることを意味している．ただし，エレベーターに乗った観測者に対する重力加速度の値は，それと大きく異なる．したがって，対称性を問題にするとき，観測者を限定することが大切で，その限定の仕方が対称性の種類に対応する．

時空の構造に限定すると，この状況は数学的に次のように表現される．まず，時空を多様体に置き換えると，各観測者はその（局所的な）座標系に対応する．このとき，観測情報は座標ごとに決まる幾何学量（座標で表された長さや角度など）の組が取る値として表されるので，観測結果の比較は，異なる座標系の同じ座標値の点を対応させる多様体の変換に置き換えられる．この変換により，幾何学量の値が変わらないなら，時空はこの変換に対する対称性をもつとする．したがって，時空の対称性の全体は時空の変換のある集合となる．このような 2 つの変換の結合は再び観測情報を不変にするので，この集合は群をなす．例えば，この集合が空間回転の全体からなるとき，時空は球対称であると言い，対応する変換群は特殊直交変換群 $SO(3)$ で与えられる．

時空の構造を規定する最も基本的な幾何学量は，計量テンソル $g_{\mu\nu}$ である．この計量テンソルを不変にする変換は等長変換，その全体が作る群は等長変換群と呼ばれる．等長変換群は，Lie 群となることが知られている．すなわち，この群は各要素が有限個の連続なパラメーターで表される群（連結部分群）と離散的な群との積となる．このパラメーターの数は Lie 群の次元と呼ばれる．いま，この連結部分群の単位元（恒等変換）に近い変換，すなわち無限小変換 $x^\mu \to x^\mu + \epsilon\xi^\mu$（$\epsilon$ は微小量）を考えると，計量テンソルは

$$g_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu} + \epsilon(\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu)$$

と変換することが示される．ここで，∇_μ は計量 $g_{\mu\nu}$ に対応する共変微分である．したがって，計量がこの変換で不変である条件は，

$$\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = 0 \tag{1}$$

と表される．この方程式は Killing 方程式，その解は Killing ベクトルと呼ばれる．線形独立な Killing ベクトルの数は，等長変換群の次元と一致する．

2. 対称性と保存則

Killing ベクトルは，時空の対称性の物理的役割を考える際に重要な役割を果たす．例えば，自由粒子，すなわち重力以外の影響を受けない粒子の運動方程式は，τ を固有時，$u^\mu = dx^\mu/d\tau$ を 4 元速度ベクトル，m を静止質量，$p^\mu = mu^\mu$ を 4 元運動量ベクトルとするとき，

$$\nabla_u p^\mu \equiv u^\nu \nabla_\nu p^\mu = 0$$

で与えられる．これより，時空が Killing ベクトル ξ^μ をもつとすると，

$$\frac{d}{d\tau}(p \cdot \xi) = mu^\mu u^\nu \nabla_{(\nu}\xi_{\mu)} = 0$$

が成り立つ．ここで，一般に $A \cdot B = A^\mu B_\mu$, $A_{(\mu}B_{\nu)} = (A_\mu B_\nu + A_\nu B_\mu)/2$ である．したがって，$p \cdot \xi$ は保存量となる．すなわち，時空の対称性は保存則と密接に関連している．

例えば，時空構造が時間推進 $t \to t+a$ (a は任意定数) で不変であるとき，時空は定常であると言われる．このとき，対応する Killing ベクトル $\xi = \partial_t$ に対する保存則は，粒子のエネルギー保存則 $E = -p \cdot \xi = -mu_t$ を与える．また，時空が z 軸の周りの回転 $\phi \to \phi + b$ で不変，すわなち軸対称なら，Killing ベクトル $\eta = \partial_\phi$ は角運動量保存則 $L_z = p \cdot \eta = p_\phi$ を与える．同様の議論をエネルギー・運動量テンソルの局所保存則 $\nabla^\nu T_{\mu\nu} = 0$ に適用すると，$T_{\mu\nu}$ が有界な領域の外でゼロとなるとき，

$$\frac{d}{dt}\int_\Sigma d^3x\sqrt{-g}T^t_\nu \xi^\nu = \int_\Sigma d^3x\sqrt{-g}T^{\mu\nu}\nabla_{(\mu}\xi_{\nu)}$$

より，ξ が時間的 Killing ベクトルなら，物質に対する全エネルギーの保存則が得られる．これに対して，定常でない時空ではこのような保存則は存在しない．ただし，無限遠で平坦となる時空では，これに重力場のエネルギーを加えることにより全エネルギーの保存則が成り立つ．

この Killing ベクトルと保存則との対応を用いると，対称性のある時空では，粒子（系）や場の力学的振舞いの研究を，より簡単な次元の低い時空や空間上での力学の研究に帰着することができる．例えば，Schwarzschild ブラックホールの外部の重力場は，t を時間座標，r, θ, ϕ を空間の極座標として，計量

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega^2,$$
$$f(r) = 1 - \frac{2GM}{r} \tag{2}$$

で表される．ここで，M はブラックホールの質量，$d\Omega^2$ は 2 次元単位球面の計量 $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2$ である（以下，光速 $c = 1$ となる単位系を用いる）．この計量は変換 $t \to t + a$ で不変なので，定常である．また，球面の計量および t, r は空間回転に対応する変換で不変なので，時空は球対称でもある．したがって，この重力場中を運動する質量 m の粒子に対して，エネルギー

$$E = -p_t = f(r)m\frac{dt}{d\tau}$$

および角運動量 $\boldsymbol{L}$ の任意の空間方向成分が保存される．このとき，粒子の軌道は $\boldsymbol{L}$ に直交する 2 次元面上を運動することが容易に示されるので，z 軸を $\boldsymbol{L}$ 方向に取ると，軌道は面 $\theta = \pi/2$ に含まれ，

$$L = p_\phi = mr^2\frac{d\phi}{d\tau}$$

が一定となる．さらに，固有時の定義 $d\tau^2 = -ds^2$ より，

$$-f(r)\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + f(r)^{-1}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 = -1$$

が成り立つ．これらより，$dt/d\tau$, $d\phi/d\tau$ を消去すると，

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \left(1 + \frac{L^2}{m^2r^2}\right)f(r) = \left(\frac{E}{m}\right)^2$$

を得る．したがって，Newton 理論の場合と同様，球対称定常重力場中での粒子の運動は保存的な 1 次元運動の問題に帰着される．

3. 高い対称性をもつ空間と時空

すでに述べたように，等長変換群の次元は独立な Killing ベクトルの数で決まるが，その数には実は最大値が存在する．これは，ある 1 点で ξ^μ および

$\nabla_\mu\xi_\nu-\nabla_\nu\xi_\nu$ の値を指定すると，Killing 方程式 (1) の解が一意的に決まってしまうためである[1]．もちろん，このとき解が常に存在する訳ではない．したがって，Killing ベクトルの最大数は，時空ないし空間の次元を n として，$n+n(n-1)/2=n(n+1)/2$ となる．例えば，4 次元時空の場合，その値は 10 である．

この最大数の Killing ベクトルをもつ空間は，すべての次元で，サイズの自由度を別にして，Euclid 空間 E^n，球面 S^n，双曲空間 H^n の 3 種類しか存在しない（正確には単連結性と完備性の仮定の下で）．ここで，n 次元双曲空間 H^n は $n+1$ 次元 Minkowski 時空内の超曲面

$$-T^2+X_1^2+\cdots+X_n^2=-A^2(\text{定数})$$

と等長な空間である．ここで，2 つの空間（時空）が等長とは，それらの間に距離を保つ 1 対 1 対応が存在することを意味する．また，定数 $A>0$ はサイズを表すパラメーターである．これらの空間は，曲率が一様等方的でなので，定曲率空間と呼ばれる．定曲率空間の曲率テンソルは，断面曲率と呼ばれる定数 K を用いて

$$R_{\mu\nu\lambda\sigma}=K(g_{\mu\lambda}g_{\nu\sigma}-g_{\mu\sigma}g_{\nu\lambda})$$

と表される．E^n に対して $K=0$, S^n に対して $K=1/A^2$（A は球面の半径），H^n に対して $K=-1/A^2$ である．逆に，計量がこのように書かれる空間は K の符号に応じて，局所的に E^n, S^n, H^n のいずれかと局所的に等長であることが示される[2]．

同様に，最大の対称性をもつ n 次元時空は，Minkowski 時空 $E^{n-1,1}$，de Sitter 時空 dS^n，反 de Sitter 時空 AdS^n のいずれかと局所的に等長で，定曲率時空と呼ばれる．ここで，n 次元 de Sitter 時空とは，$n+1$ 次元 Minkowski 時空内の時間的超曲面

$$-T^2+X_1^2+\cdots+X_n^2=A^2$$

と等長な時空である．$T=$ 一定に対応するこの時空の空間的断面は $n-1$ 次元球面となるので，dS^n は $\mathbb{R}\times S^{n-1}$ という位相構造をもつ．また，n 次元反 de Sitter 時空は 2 つの時間的方向が存在する $n+1$ 擬 Euclid 空間 $E^{n-1,2}$ 内の超曲面

$$-T_1^2-T_2^2+X_1^2+\cdots+X_{n-1}^2=-A^2$$

と局所的に等長な単連結時空で，$\mathbb{R}^n$ と同じ位相構造をもつ．

これら定曲率時空は，それぞれゼロ，正，負の宇宙項 Λ をもつ（n 次元）真空 Einstein 方程式

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}+\Lambda g_{\mu\nu}=0$$

の最も対称性の高い解となっており，物理的には時空の真空基底状態を表すと解釈されるので，宇宙論や素粒子論の様々な問題で重要な役割を果たす．

物理学で定曲率空間と並んで重要な役割をする高い対称性をもつ時空は，空間的に一様等方な時空である．これは荒っぽく言えば，ある特別の大域的な時間 t（宇宙時間）が定義できて，$t=$ 一定という条件で決まる空間 Σ_t が均質（一様）で特別の方向をもたないような時空である．空間は 3 次元なので，一様性は 3 次元的な平行移動の対称性と対応する．また，等方性は各点の周りの回転なので直交変換 $SO(3)$ と対応する．したがって，一様等方な空間は最大次元である 6 次元の対称性をもつことになり，上に述べたことより，それらは（局所的には）Euclid 空間 E^3，球面 S^3，双曲空間 H^3 に限られる．

空間的に一様等方な時空は，厳密には，これらいずれかの空間の等長変換群 G が時空全体に等長変換群として作用し，かつその軌道，すなわち各点 p を G の変換 f で動かして得られる点 $f(p)$ の全体が空間的な 3 次元面となるという条件により定義される．この定義と上で述べた荒っぽい定義との違いは，空間の構造だけでなくその時間変化に対しても一様等方を要求している点である．このため，空間的に一様等方な時空の計量は

$$ds^2=-dt^2+a^2(t)d\sigma_K^2$$

と表される．ここで，$d\sigma_K^2$ は断面曲率 K の 3 次元定曲率空間である．この計量は Robertson–Walker 計量，各時刻での空間の大きさを表す $a(t)$ はスケール因子と呼ばれる．

時空が空間的に一様等方なら，物質の分布を表すエネルギー・運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ も G で不変でなければならないことが，Einstein 方程式より導かれる．このため $T_{\mu\nu}$ は，時間のみに依存するエネルギー密度 ρ と圧力 P を用いて

$$T_{tt}=\rho(t),\quad T_{ti}=0,\quad T^i_j=P(t)\delta^i_j$$

と表される．このことを考慮すると，Einstein 方程式は $a(t)$ と $\rho(t)$ に対する常微分方程式系

$$\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2=\frac{8\pi G}{3}\rho-\frac{K}{a^2},$$

$$\dot\rho=-3(\rho+P)\frac{\dot a}{a}$$

と同等であることが示される．物質の状態方程式，す

なわち P と ρ の関係が与えられると第2式より ρ が a の関数として定まるので，それを第1式に代入することにより，a に関する閉じた1階常微分方程式が得られる．例えば，$P=0, K=0$ なら，$\rho \propto 1/a^3$ より，$a \propto t^{2/3}$ となる．

現在の宇宙は観測より，銀河を超えるスケールで平均すると良い精度で一様等方であることが知られているので，これらの方程式は実際の宇宙の大きなスケールでの振舞いをよく記述する．宇宙の構造がこのような単純な方程式で記述されることは驚きである．現在，この宇宙の一様等方性は宇宙誕生時でのインフレーションと呼ばれる加速膨張の結果であると考えられており，それを強く指示する観測も存在する．

4. 空間の位相と対称性

空間の対称性はその位相構造と密接に関連している．例として，向き付け可能な2次元閉曲面を考えて見よう．これら面の位相は，よく知られているように Euler 数 χ により完全に分類される．例えば，球面 S^2 では $\chi=2$，トーラス T^2 では $\chi=0$，g 個のトーラスを接着（連結和）してできる面 $\mathscr{F}_g$ では $\chi=2-2g$ である（g は種数と呼ばれる）．これらの曲面上の計量がどのような対称性をもち得るかを見るために，可能な極大の対称性をもつものはどのようなものかを考えてみよう．その際1つのヒントとなるのは，単連結完備な定曲率曲面は2次元球面，Euclid 平面 E^2，双曲面 H^2 のいずれかであるという事実である．明らかに，E^2 において2つの一次独立なベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の整数倍の線形結合 $m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}$ だけ位置が異なる点を同一視すると，平坦なトーラス $T^2=E^2/\mathbb{Z}^2$ が得られる．また，H^2 の等長変換群 $O_+(2,1) \cong SL(2,\mathbb{R})$（時間の向きを保つ3次元 Lorentz 変換の全体）に含まれる適当な離散部分群を Γ_g として，Γ_g の同じ軌道に属する点を同一視することにより得られる面 H^2/Γ_g は $\mathscr{F}_g$ $(g \geq 2)$ と同相となることが示される[3]．したがって，球面，トーラス，$\mathscr{F}_g$ $(g \geq 2)$ はそれぞれ異なる定曲率曲面と局所的に等長な構造をもち得ることが分かる．

それでは，同じ位相構造をもつ面が異なる極大対称性をもつことがあり得るであろうか？ この疑問に対する解答は，コンパクト面に対する Gauss–Bonnet の公式[3]

$$\int_{\Sigma} d\mu R = 4\pi\chi(\Sigma)$$

より得られる．ここで，$d\mu$ は計量 $g_{\mu\nu}$ より決まる面積要素 $d^2x\sqrt{g}$, R はスカラ曲率である．計量が断面曲率 K の定曲率曲面のとき，$R=2K$ となるので，この公式は，K の符号が χ の符号で決まることを意味している．したがって，離散的な変換で同一視しても曲率は変化しないことを考慮すると，各面がもち得る極大の（局所的）対称性は，位相構造により一意的に決まることになる．この結果は，2次元曲面の一様化定理と呼ばれる．

ここで，局所的というのは，一部の領域が対称性をもつということではなく，任意の点の近傍が極大対称空間の適当な領域と等長であるという意味である．この局所的という条件は位相構造と極大対称性の対応において重要である．例えば，トーラス $E^2/\mathbb{Z}^2$ は局所的には Euclid 空間でかつ大域的に一様であるが，一般には大域的などのような回転でも不変でない．しかし，同一視で用いるベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ として互いに直交した長さの等しいものを用いると 90 度回転で不変になる．さらに，H^2 から得られるコンパクト面の計量は決して連続な等長変換群をもたない．したがって，大域的な対称性を考えたのでは位相と対称性の対応は不完全となる．

この位相と対称性の対応は3次元閉 Riemann 多様体に拡張される．その出発点となるのが，Thurston の定理である．この定理を述べるために，いくつか用語を導入する必要がある．まず，多様体 $\tilde{M}$ から同じ次元の別の多様体 M への全射 $p:\tilde{M} \to M$ が存在し，M の各点 x の適当な連結近傍 U に対し，その p による逆像が $p^{-1}(U)=\cup_i \tilde{U}_i$ と互いに交わらない開集合 $\tilde{U}_i$ の和となり，$p:\tilde{U}_i \to U$ が微分同相写像となるとき，$\tilde{M}$ を M の被覆多様体と言う．2つの被覆多様体 $(\tilde{M}_1, p_1), (\tilde{M}_2, p_2)$ に対して，微分同相写像 $f:\tilde{M}_1 \to \tilde{M}_2$ が存在して $p_2 \circ f = p_1$ となるとき，これらは同型であると言う．通常，同型な被覆多様体は同一視する．この同一視の下で，任意の多様体は常にただ1つの単連結な被覆多様体をもつことが示される[4]．これは普遍被覆多様体と呼ばれる．M に Riemann 計量が定義されていると，その被覆多様体 $\tilde{M}$ は局所的に M と微分同相なので，p が局所等長写像となるような Riemann 計量が $\tilde{M}$ 上に一意的に定まる．特に，普遍被覆多様体にこのようにして Riemann 計量 $\tilde{g}$ を導入したものを普遍被覆 Riemann 多様体と言う．このとき，もとの Riemann 多様体 (M,g) は $(\tilde{M},\tilde{g})$ の等長変換群の適当な離散的部分群 Γ により $\tilde{M}$ を同

一視して得られる Riemann 多様体 $\tilde{M}/\Gamma$ と等長になることが示される．また，Γ は M の基本群 $\pi_1(M)$ と群として同型となる．例えば，2 次元の場合，T^2 および $\mathscr{F}_g$ の普遍被覆 Riemann 多様体はそれぞれ E^2, H^2 となる．

さらに，Riemann 多様体 (M, g) の普遍被覆 Riemann 多様体 $(\tilde{M}, \tilde{g})$ が一様，すなわち任意の 2 点が等長な近傍をもつとき，(M, g) は局所一様であると言う．このとき，$(\tilde{M}, \tilde{g})$ の等長変換群は，M 上の局所一様計量 g が局所的に高い対称性をもつほど，大きな群となる．このようにして得られる等長変換群の中で極大となるもの $G_{\max}$ と $\tilde{M}$ の組 $(\tilde{M}, G_{\max})$ を極大幾何構造と呼ぶ．さらに，極大幾何構造のうち，その等長変換群の離散部分群による同一視で閉多様体が得られるものは，コンパクト化可能な極大幾何構造と言う．

以上の準備の下で，次の定理が Thurston により示された[5,6]．

Thurston の定理　3 次元のコンパクト化可能な極大幾何構造は 8 つの幾何構造，E^3, S^3, H^3, $S^2 \times E^1$, $H^2 \times E^1$, Nil, Sol, $\widetilde{SL_2\mathbb{R}}$ のどれかと同型である．さらに，任意の 3 次元局所一様閉 Riemann 多様体 M の普遍被覆 Riemann 多様体の等長変換群は，M の基本群のみで決まるただ 1 つの極大幾何構造に含まれる．

この定理で，Nil は計量

$$ds^2 = Q_1(dx^2 + dy^2) + Q_2(dz + ydx)^2$$

をもつ空間で（Q_1, Q_2 は任意の正定数），4 次元の等長変換群をもつ．また，Sol は計量

$$ds^2 = Q_1(e^{2z}dx^2 + e^{-2z}dy^2) + Q_2dz^2$$

をもつ空間で，3 次元の等長変換群をもつ．最後の $\widetilde{SL_2\mathbb{R}}$ は 2 次元双曲面 H^2 の長さ 1 の接ベクトル全体（単位接バンドル）が作る 3 次元 Riemann 多様体の普遍被覆 Riemann 多様体で，4 次元の等長変換群をもつ．8 つの幾何構造の基礎多様体のうち，$S^3, S^2 \times E^1$ 以外の 6 つは，すべて $\mathbb{R}^3$ と同相である．

Thurston の定理により，局所一様構造を許す 3 次元閉多様体の分類は，8 つの極大幾何構造に含まれる離散部分群の分類に帰着される（この分類は，H^3 の場合を除いて終了しているが，H^3 に関しては未完である）．しかし，任意の 3 次元閉多様体が局所一様構造をもつとは限らないので，この方法ですべての 3 次元閉多様体が分類されるわけではない．しかし，Thurston は次の大胆な予想を提案した[5]．

Thurston 予想　任意のコンパクト 3 次元多様体（境界を持ってもよい）が本質的な円盤，球面ないしトーラスを含む場合はそれに沿って切り開きいくつかの部分に分ける．さらに，これにより得られる多様体が球面境界をもつ場合はそこに球体を貼り付ける．このようにして得られる（境界をもつ）コンパクト多様体には局所一様構造が入る．

この予想で，「本質的」とは大まかには連続変形でつぶれないという条件である（円盤の場合は縁が多様体の境界に含まれるとする）．この予想は，特殊な場合として 3 次元 Poincaré 予想（3 次元ホモトピー球面は球面と同相という予想）を含み，正しければ 3 次元多様体の完全な分類が可能となる．最近，ロシアの G. Parelman がこの Thurston 予想を肯定的に証明したと言われているが，まだその正しさのチェックは終了していないようである．

Thurston の定理は宇宙モデルへの興味深い応用をもつ．すでに述べたように，現在の宇宙は良い精度で空間的に一様等方であるが，宇宙初期では一様等方から大きくずれた構造をもつ可能性がある．このような視点から，一様ではあるが等方でない宇宙モデルは一様等方モデルの最も簡単な一般化として重要な研究対象となっている．このようなモデルは，一様な 3 次元空間の分類を行った Bianchi にちなんで Bianchi モデルとも呼ばれ，I 型から IX 型までの 9 つに分類される[1]．型の違いは，一様性を表す 3 次元変換群の違いと対応する．ただし，VI 型と VII 型は連続なパラメーターをもち，正確には VI_h 型，VII_h 型と表記される．極大対称空間である E^3 は I 型および VII_0 型，S^3 は IX 型，H^3 は V 型および $\mathrm{VII}_h (h \neq 0)$ 型の特殊な場合となっている．

Bianchi の分類は，空間が単連結という仮定の下で得られたもので，空間が S^3 となる IX 型以外は空間は $\mathbb{R}^3$ と同相となる．したがって，空間がコンパクトな場合は修正が必要となる．最も自然な修正は，局所的に空間的一様なモデルを考えることである．このとき，Thurston の定理より，可能な空間の局所一様構造は上に述べた極大幾何構造（Thurston 型）のいずれかに含まれることになる．この対応を詳しく見てみると，実は IV 型および $\mathrm{VI}_h (h \neq 0)$ 型はどの Thurston 型にも対応しないことが分かる[7]．すなわち，空間がコンパクトなら，これらの局所一様性は許されない．また，H^3

の商空間と同相な双曲型コンパクト局所一様 Riemann 多様体は全体としてのサイズの自由度を除いて変形の自由度をもたないことが示される（Mostow の剛性定理）．したがって，局所的に V 型ないし $\mathrm{VII}_h (h \neq 0)$ 型の一様性をもつコンパクト空間は，必ず局所的に一様等方となる．このように，位相により時空のもち得る対称性が強く制限されることは興味深い．

5. ブラックホール時空の剛性定理

これまで，時空が多様体としてもち得る対称性を主に幾何学的視点から見てきたが，ここではさらに Einstein 方程式を課すことにより時空の対称性が強く制限されることを，ブラックホールの場合に見てみよう．

Newton 理論では，球対称な星の周りの重力ポテンシャルは，Gauss の法則より星の構造や時間変化に関係なく，中心からの距離 r を用いて $-GM/r$ で与えられる．特に，ポテンシャルは時間に依存しない．同様のことが，一般相対性理論でも成り立つ．すなわち，Einstein 方程式の球対称解は，真空領域では静的で Schwarzschild 解 (2) で与えられる（Birkhoff の定理）[1,8]．すなわち，球対称という空間的対称性から静的という時間的対称性が導かれるのである．ここで，静的とは，解が時間に依らず，かつ時間反転に対して不変であることを意味する．

真空ブラックホール時空の場合には，実はこの逆が成り立つ．すなわち，Einstein 方程式の静的な真空解は，（ホライズン上およびその外で）正則なら球対称となる．ここで，ホライズンとは，無限遠に対して（未来向きに）因果的な影響を及ぼし得る時空領域の境界となる光的面で，ブラックホールの表面に当たる．この定理は，静的時空に対する剛性定理と呼ばれ，最初，ホライズンが連結でその空間的切り口が位相的に球面であるという仮定および他の技術的な仮定の下で 1967 年に W. Israel によって証明された．その後，これらの仮定なしに成り立つことが示されている．また，高々電磁場しか存在しない場合にも同様の定理が成り立つ（ただし，さらにホライズン上で重力加速度 $\kappa \neq 0$ という仮定が必要）[9]．

Birkhoff の定理より，球対称な真空解は Schwarzschild 時空に限られるので，剛性定理より直ちに，静的な正則ブラックホールは Schwarzschild ブラックホールのみであるという一意性定理が得られる．同様に，電荷を帯びた静的正則ブラックホール解は (2) において $f(r) = 1 - 2GM/r + Q^2/r^2$ とおいて得られる Reissner–Nordström 解に限られる（Q は電荷に比例したパラメーター）．

これらの定理において，ホライズン上およびその外で正則，言い換えれば裸の特異点をもたないという仮定は決定的な重要性をもつ．実際，裸の特異点を許すと，無限個の非球対称な解が存在する．

球対称な場合と違い，軸対称性のみを仮定したのでは，時空の定常性は言えない．これは，天体の軸対称な変形は一般に重力波を生み出すためである．しかし，その逆は成り立つ．すなわち，定常な時空は，計量がホライズン上およびその外で解析的正則でホライズンが位相的に連結なら軸対称となることが示される．これは定常時空に対する剛性定理と呼ばれ，最初 1972 年に S.W. Hawking により大筋が示され[10]，完全な証明は最終的に 1999 年に P. Chruściel により与えられた[11]．この剛性定理を用いると，定常な正則真空回転ブラックホール解はホライズンが連結なら Kerr 解に限られることが示される．また，高々電磁場しか存在しない場合は Kerr 解に電荷をもたせた Kerr–Newman 解に限られる．これらは回転ブラックホールの一意性定理と呼ばれている[9]．

ブラックホールは星の重力崩壊により生成される．このようなブラックホールは十分時間がたつと定常状態に落ち着くと期待される．したがって，裸の特異点が発生しなければ（宇宙検閲仮説），一意性定理より最終的には Kerr ブラックホール（非回転なら Schwarzschild ブラックホール）が生み出されることになる．実際，Kerr ブラックホール時空に小さな摂動を与えても，それらは重力波として無限遠に伝搬し，時空の構造は次第に定常状態に近づくことも示される．これは終状態がブラックホールの質量，角運動量（および電荷）のみで決まることを意味し，実際に宇宙に存在するブラックホールが引き起こす現象の研究において重要な役割を果たしている．

ただし，この帰結は宇宙検閲仮説の下でのみ成り立つことには注意を要する．この仮説が一般的に成り立つかどうかは未だに分かっていない．

6. 終わりに

この解説では，主に 4 次元時空の等長変換により表される対称性を中心に見てきたが，物理学ではより一般の対称性も重要な役割を果たす．その一つは，共形

変換，すなわち計量が $g_{\mu\nu} \to e^{2\Omega(x)} g_{\mu\nu}$ とスケールするような時空の変換に対する不変性である．この共形不変性は弦理論や重力崩壊に伴う臨界現象など様々な問題で重要な役割を果たす．

また，時空の変換群をフェルミ粒子とボーズ粒子を入れ替える変換を含むように拡張した（局所）超対称変換群は，超弦理論やそれに基づく統一理論の研究において中心的な役割を果たしている．これら研究は時空がミクロのスケールで高次元である可能性を示唆しており，それに伴って高次元時空の対称性およびその物理的役割の研究も重要となっている．しかし，高次元時空の構造は低次元に比べて遥かに複雑で，多くの未解決な問題が存在する．例えば，高次元では，ブラックホール時空の剛性定理に相当する定理が成り立つかどうか不明である．また，例えば5次元では，ホライズンが3次元球面の位相をもつブラックホール以外に $S^2 \times S^1$ の位相をもつ回転ブラックホール解（ブラックリング解）が存在し，回転ブラックホールに対する一意性定理が破れることが知られている[12)]．6次元以上ではさらに多様なブラックホールが存在する可能性がある．高次元時空の研究は，非常に豊かな成果を生み出す可能性を秘めている．

参考文献

1) 小玉英雄，佐藤文隆：『一般相対性理論』（岩波書店，2000）．
2) Kobayashi, S. and Nomizu, K.: *Foundations of Differential Geometry I, II* (Interscience Pub., 1963).
3) 河野俊丈：『曲面の幾何構造とモジュライ』（日本評論社，1997）．
4) 横田一郎：『群と位相』（裳華房，1971）．
5) Thurston, W.: *Bull. Amer. Math. Soc.* **6**, 357–381 (1982).
6) Scott, P.: *Bull. London Math. Soc.* **15**, 401–487 (1983).
7) Kodama, H.: *Prog. Theor. Phys.* **99**, 173–236 (1998).
8) 小玉英雄：『相対性理論』（培風館，1997）．
9) Heusler, M.: *Black Hole Uniqueness Theorems* (Cambridge Univ. Press, 1996).
10) Hawking, S. and Ellis, G.: *The Large Scale Structure of Space-time* (Cambridge Univ. Press, 1973).
11) Chruściel, P.T.: *Class. Quantum Grav.* **16**, 661–687 (1999).
12) Emparan, R. and Reall, H.S.: *Phys. Rev. Lett.* **88**, 101101 (2002).

（こだま・ひでお，京都大学基礎物理学研究所）