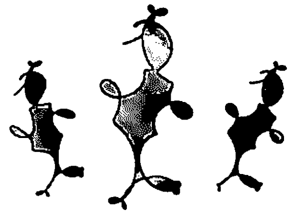
なぜ4次元か？

相対論と時空



小玉　英雄

1. はじめに

28年前，佐藤文隆先生の指示で，岩波書店の『科学』に時空の次元についての短い記事を書いたことがあります．当時まだ大学院生だった私にはかなり荷の重いテーマで4次元時空の特殊性についていろいろ思いつくことを列挙してみましたが，当然ながら「時空の4次元性の起源を明らかにする」などと言うことはできず，次のように結論するしかありませんでした[1]．「おそらく，なんらかの形で4次元からのずれが生じる階層の発見によって初めて，われわれの時空が4次元である理由を真に理解することができるであろう．」

初めての超対称性をもつ高次元重力理論として11次元超重力理論が作られたばかりで[2]，まだそれと通常の4次元理論との関連が全く不明であった当時としては，これはやむを得ないかもしれません．しかし，それから約30年が経過した現在，状況は大きく変わっています．特に，重力を含むすべての相互作用に対する整合的な統一理論として登場した超弦理論が10次元時空でのみ整合的な理論となるという事実は，物理学における時空の次元の問題の位置づけを大きく変化させました[*1]．もしこの整合的な次元が4だったら，4次元性の起源の問題は非常に満足のゆく形で解決されたことになったでしょう．しかし，実際は違いました．我々は，現在の宇宙が4次元時空でよく記述されることを「説明しないといけない」ことになったのです．

このような時空次元の問題の新たな展開を生み出した弦理論・M理論およびそれに密接に関連した事柄については本特集の他の解説を読んで頂くことにして，本稿では古典論の枠内で時空の4次元性と密接に関連すると思われる重力理論の特質や現象を紹介します．

2. ケプラー運動と次元

重力が次元にどのように依存するかを見るために，まず，Newton（ニュートン）の重力理論と運動法則を一般次元に拡張し，Kepler（ケプラー）運動が次元にどのように依存するか調べてみます．出発点は，Gauss（ガウス）の法則です．この法則は，任意の閉じた面上で，重力加速度の面に垂直な成分の大きさを積分すると，面内に含まれる質量と重力定数の積に比例するというものです．非相対論的な近似では，この法則は任意の次元で成り立つと考えられます．その理由は，次節で説明することにします．n 次元空間内で原点に置かれた質量 M の質点を考え，その周りの半径 r の球面にGaussの法則を適用すると，球面上の重力加

*1) 正確には，時空計量以外の場が自明となる D 次元Minkowski時空上で超弦理論が整合的であるとすると，$D=10$ が要求されます．この条件を課さなければ，10次元以外の次元でも整合的な超弦理論（非臨界弦理論）が存在します．また，2次元時空上の量子場の理論という側面を重視すると，弦理論はある条件を満たす共形場の理論と見なされ，自然な時空的な解釈を与えることのできないものも存在します．

速度 g に対して，$r^{n-1}g = kM$ が得られます．ここで，k は比例係数です．これより，質量 m の粒子に働く重力の強さ F_g は，外向きを正として

$$F_g = -\frac{kmM}{r^{n-1}} \tag{1}$$

となります．

この重力場中で半径 r の円運動する粒子を考えると，この粒子には重力以外に（慣性力として）遠心力 F_c が働きます．この遠心力は，円運動の加速度と質量 m の積ですから，次元によらず常に mv^2/r となります．ここで，v は粒子の速度です．保存量である角運動量 $L = mrv$ で表すと

$$F_c = \frac{L^2}{mr^3} \tag{2}$$

となります．これらより，角運動量が与えられたとき，円運動する粒子に対する有効力 $F = F_g + F_c$ は，有効ポテンシャル

$$\phi = -\frac{kmM}{(n-2)r^{n-2}} + \frac{L^2}{2mr^2} \tag{3}$$

を用いて $F = -d\phi/dr$ と表されますから，円軌道の半径は ϕ が極値を取る r の値として決まります．ただし，$n = 2$ のときは，第 1 項を $kmM \log r$ で置き換えます．また，円運動以外の一般の運動の場合には，粒子の動径方向の速度を $\dot{r}$，全エネルギーを E として，

$$\frac{m}{2}\dot{r}^2 + \phi(r) = E \tag{4}$$

が成り立ちます．このため，一般の運動に対して，r は $E - \phi(r) \geq 0$ となる範囲に限られます．

まず，時空が 4 次元すなわち $n = 3$ とすると，r が大きいとき引力の重力ポテンシャルが主要部となり，r が小さいときには斥力の遠心力ポテンシャルが主要部となりますから，図 1 のように，有効ポテンシャル ϕ はある半径で最小となります．したがって，この半径が円軌道の半径となり，しかも円運動から少しずれても粒子と中心との距離はゼロでない有限な範囲で振動するだけです（$0 < r_1 \leq r \leq r_2 < \infty$）．すなわち，円運動は安定です．時空の次元が 3 以下でも，定性的に

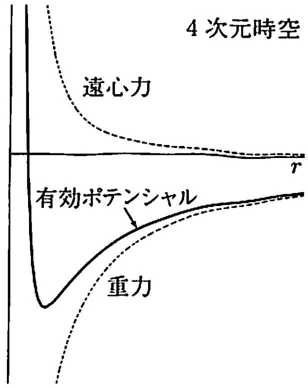


図 1　Kepler 運動の有効ポテンシャル（$D = 4$）．

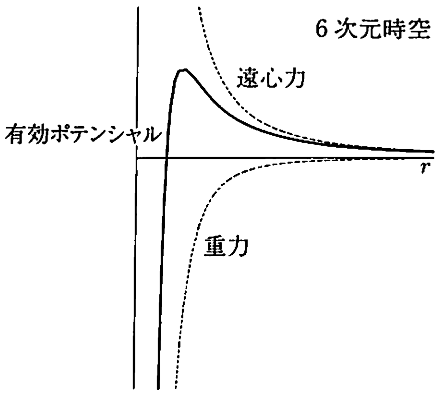


図 2　Kepler 運動の有効ポテンシャル（$D \geq 6$）．

は同じ結果が成り立ちます．

これに対して，$n \geq 5$ のときは，重力ポテンシャルと遠心力ポテンシャルの大小関係が逆転し，図 2 のように有効ポテンシャル ϕ は最大値のみを持つようになります．粒子のエネルギーがこの最大値と一致すれば，運動は円運動となりますが，エネルギーが少しでもこの値からずれると，粒子は中心 $r = 0$ に衝突するか，無限円に飛び去ってしまいます．これは，時空の次元 D が 6 以上では安定な円運動（一般に有界なケプラー運動）は存在しないことを意味します．$n = 4$（$D = 5$）では，さらに状況はひどくなります．この次元では重力ポテンシャルと遠心力ポテンシャルがいずれも $1/r^2$ に比例しますから，ϕ は恒等的にゼロでなければ単調になります．したがって，そもそも円軌道自体が一般に存在しないことになります．いずれにしても，5 次元以上の時空では，太陽系のような

惑星系にあたるものは存在できないのです．

この高次元における Kepler 運動の不安定性は，実はミクロの世界でも重要な意味をもちます．その理由は，電気力が重力と同じ距離依存性をもつためです．このため，電気力で結合した原子に対応するものも存在しません．正確には，原子の安定性は量子力学により生み出されるものですが，量子力学を考慮してもこの不安定性を回避できないことが示されます．

このように，5 次元以上の世界ではすべてのスケールにわたって物質系は非常に不安定となります．これまで，非相対論的な近似で考えてきましたが，相対論的な取扱いをしても結論は変わりません．

3. 重力理論の低エネルギー極限

一般相対性理論はいくつかの基本的要請を満たす最も一般的な理論として構成されています．この点に着目すると，4 次元以外でも重力理論は低エネルギーの極限で一般相対性理論の自然な拡張と一致することが示されます．このことは，S. Weinberg（ワインバーグ）により漸近的安全性の原理（asymptotic safety）と呼ばれました[3]．

Einstein 理論の基本要請の一つは，重力を時空構造，正確には時空計量 $g_{\mu\nu}$ により記述する点，もう一つは重力の振る舞いを決定する方程式が一般共変性をもつこと，すなわちどのような局所座標系でも方程式が同じ形をもつことです．これらにさらに場の方程式が作用原理より導かれることを要請すると，対応する Lagrange 関数は，時空計量の曲率テンソル $R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}$ から作られるスカラ量でなければならないことになります．たとえば，スカラ曲率 $R = g^{\mu\nu}R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu}$ や $R^{\alpha\beta\mu\nu}R_{\alpha\beta\mu\nu}$ などはそのもっとも簡単な例です．

一般に，このようなスカラ関数には無限の取り方があります．Einstein 理論では，これら無限の候補の中から特別のものを選び出すために，これらの関数が計量の微分多項式で，得られる場の方程式が計量の高々 2 階微分までしか含まず，かつ方程式が半線形，すなわち 2 階微分について線形であることを要請しました．同じ要請を一般次元に適用することも可能ですが，超弦理論など現在の高次元統一理論ではこれらの条件は厳密には満たされず，低エネルギーの極限でのみ成り立ちます．そこで，見方を変えて，低エネルギーの極限でスカラ関数がどのように限定されるかを見ることにします．その基礎となるのは，曲率スカラに含まれる微分の数です．曲率テンソルそのものに対してその数は 2 ですから，一般に曲率テンソルの k 次のスカラ量は $2k$ 個の微分を含みます．また，曲率テンソルの共変微分を含む場合は，その微分の数が加わります．一般に，量子論では微分はエネルギー・運動量ベクトルをかけることに対応しますから，微分を p 個含む項は，エネルギーを E として低エネルギーで E^p と振る舞うことになります．したがって，計量の一価解析的関数で，低エネルギー極限 $E \to 0$ で滑らかとなることを要請すると，Lagrange 関数は曲率およびその共変微分のべき級数に展開されます．

$$\mathscr{L}_g = C_0 + C_1 R + (\boldsymbol{R})^{(4)} + (\boldsymbol{R}, \nabla)^{(6)} + \cdots . \tag{5}$$

ここで，$(\boldsymbol{R}, \nabla)^{(p)}$ は微分を p 個含む曲率およびその微係数のスカラ多項式で，低エネルギーでは E^p に比例して小さくなります．したがって，低エネルギー極限では，3 項目以降を無視しても良い近似を与えます．この近似では，作用積分は

$$S_g = \frac{1}{2\kappa^2}\int d^D x \sqrt{-g}\,(-2\Lambda + R) \tag{6}$$

と表されますが，これは 4 次元では Einstein 理論での Einstein–Hilbert 作用積分と一致します．ここで，κ は Newton 重力定数 G を用いて $\kappa^2 = 8\pi G$ と表される定数，また Λ は宇宙定数です．この結果は，高エネルギーで理論がどのように修正されるかによりません．これが「漸近的安全性」の考え方です．時空の曲がりのスケールを L とすると，$E \sim c\hbar/L$ ですから，上記の低エネルギー極限は曲がりの小さい極限 $L \to \infty$ と対応すること

を注意しておきます*2).

この近似では，重力場の方程式は Einstein 方程式

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu} \tag{7}$$

と一致します．ただし，右辺のエネルギー・運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ は物質に対応する作用積分 S_m より得られます．特に，重力場が弱く，物質の運動エネルギーや計量の時間微分が無視できるという Newton 近似が成り立つとすると，

$$g_{00} = -1 - 2\phi \tag{8}$$

で定義される重力ポテンシャル ϕ はポアソン方程式

$$\triangle\phi \cong \frac{n-2}{n-1}\kappa^2\rho \tag{9}$$

に従います．ここで，ρ は物質のエネルギー密度です．これを空間領域 Σ で積分すれば，Gauss の法則

$$\int_{\partial\Sigma} d\Sigma^i\left(-\partial_i\phi\right) \propto M \tag{10}$$

が得られます．

4. 低次元重力

ここで，慧眼な読者は，$n = 1, 2$ すなわち時空次元 D が 2 ないし 3 のとき，上で求めた重力ポテンシャルに対する方程式が特異となることに気づくと思います．これは実は Newton 近似のせいではなく，上記の低エネルギー極限で得られる理論自体の特異性によるものです．まず，Riemann 曲率テンソルが次の対称性をもつことに注意します．

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\mu}, \tag{11a}$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha\beta}, \tag{11b}$$

$$R_{\alpha[\mu\nu\lambda]} = 0. \tag{11c}$$

ただし，$[*]$ は添え字についての反対称化を意味します．添え字は $0, 1, \cdots, D-1$ の範囲を動きますから，これより $D = 2$ のとき，曲率テンソルの独立な成分は 1 個のみであることがわかります．このため，曲率テンソルはスカラ曲率 R を用いて

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2}R\left(g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu}\right) \tag{12}$$

と表されます．特に，$R_{\mu\nu} - (1/2)Rg_{\mu\nu} \equiv 0$ となり，Einstein 方程式は重力場に対する方程式ではなく，エネルギー・運動量テンソルに対する拘束条件 $\Lambda g_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu}$ となってしまいます．これは，スカラ曲率密度が $\sqrt{-g}R = \partial_\mu V^\mu$ と表され，その積分が境界値のみに依存するためです．

次に，$D = 3$ のときには，上記の代数的関係式を満たす曲率テンソルの独立な成分の数は，ちょうど Ricci テンソル $R_{\mu\nu}$ の独立な成分の数 $(= 6)$ と一致します．このため，曲率テンソルは Ricci テンソルのみで表されてしまいます：

$$R^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} = 4R^{[\alpha}_{[\mu}\delta^{\beta]}_{\nu]} - R\delta^{\alpha}_{[\mu}\delta^{\beta}_{\nu]}. \tag{13}$$

したがって，Einstein 方程式が成り立つとすると，時空の構造は物質に完全に従属し，重力場の力学的自由度は存在しません．たとえば，真空では時空は宇宙項のみで決まる定曲率時空，すなわち Minkowski 時空，de Sitter 時空，反 de Sitter 時空のいずれかに限られます．

このように，3 次元以下の時空では，低エネルギーで重力は積極的な役割を果たさなくなります．

5. Gregory–Laflamme 不安定

4 次元の起源を探る最も素朴な方法は，時空が

$$M^D = N^d \times K^k \tag{14}$$

と直積に分解されるとして，その安定性を調べることです．ここで N^d は d 次元時空，K^k は k 次

*2) 近年，現在の宇宙が加速膨張をしているという観測結果について様々な解釈が提案されています．その中に，重力理論が長距離スケールで Einstein 理論からずれることが原因であるというものがあります．この考え方に従うモデルの中には，$R = 0$ で発散するようなスカラ曲率の関数 $f(R)$ を Lagrange 関数として提案しているものもあります[4]．このモデルでは厳密な Minkowski 時空は許されませんが，現実の宇宙では厳密にスカラ曲率がゼロとなることはありませんから，直ちに排除されません．しかし，多くの研究者は，詳細な観測との比較により排除される可能性が高いと考えられています．

元空間です．

簡単のため，$\Lambda=0, k=1$ の場合を考えます：$M=N^d\times\mathbb{R}$（ここで $\mathbb{R}$ は Euclid 空間を表す）．このとき，N 上の任意の真空解 $R_{ab}(N)=0$ に対して，単純な直積型計量

$$ds^2(M)=ds^2(N)+ds^2(\mathbb{R}) \tag{15}$$

が M 上の Einstein 方程式を満たすことが容易に示されます．一般に，$g_{ab}(N)$ が平坦(=Minkowski) ならこの解は局所的に平坦となり，安定です．したがって，$d\leq 3$ なら安定です．一方，$d\geq 4$ なら，真空解 N として無限個の非自明なものが存在します．球対称ブラックホール解もその一つで，一般にブラックホール解と $\mathbb{R}$ の直積型の解は，ブラックストリング解と呼ばれます．ブラックストリング解では，ブラックホールホライズンは $S^{d-2}\times\mathbb{R}$ の位相を持っています．（以下，S^n は n 次元球面を表す．）

ブラックストリング解で興味深いことは，不安定性を持つことです．たとえば，N が球対称ブラックホール解のとき，そのホライズン半径を r_h として，$\mathbb{R}$ の方向にブラックホールの半径が波長 L で周期的に変動する球対称な摂動を加えます．このとき，L が r_h 程度のある臨界値を超えると，この摂動が時間と共に急速に成長することが示されます．これは，Gregory–Laflamme 不安定と呼ばれます[5]．Gregory–Laflamme 不安定は K が Euclid 空間 $\mathbb{R}^k$ や高次元トーラス $K=T^k$ の場合にも起きます．

Gregory–Laflamme 不安定が起きると時空はどのように変化するのでしょうか？ 一つの可能性は，ホライズン半径が $\mathbb{R}$ 方向に変化する新たな定常解へ移行することです．実際，数値計算により，図 3 に示したような非一様なブラックストリング解の系列が得られています[6]．ただし，この解は $\mathbb{R}$ 方向に周期的な解，言い換えれば $M=N\times S^1$ と表されるもので，S^1 方向の長さを L として，L/r_h を変化させると異なる非一様性をもつ解が得られます．しかし，これらの非一様解は，質量と L を固定したとき，一様解と比べて小さなホラ

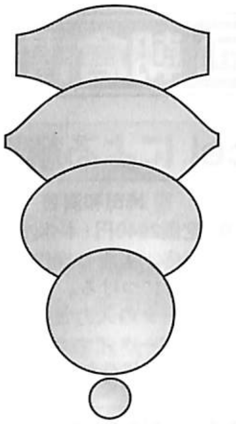


図3　非一様ブラックストリング解.

イズン面積をもつため，ブラックホールの面積増大定理[7]（の一般化）から，Gregory–Laflamme 不安定の終状態ではないと考えられます.

もう一つの可能性は，チューブ状のホライズンが半径 r_h 程度の球状のブラックホールに分裂することです．実際，図に示したように，L/r_h が十分大きいとき，この系ではホライズンが球状のブラックホール解が存在することが数値的に知られています．しかし，チューブ状のホライズンがこのような球状のホライズンに分裂するようなブラックホライズンの位相変化は許されないことが示されます[8].

このように，ブラックストリング解が Gregory–Laflamme 不安定によりどのように変化するかは未だにわかっていません．最終的に時空が余剰次元方向に分裂するような特異な変化を起こす可能性も否定できません．いずれにしても，Gregory–Laflamme 不安定は，5 次元以上の時空が不安定であることを示唆しています.

6. 余剰次元コンパクト化とブレイン，フラックス

これまで見てきたように，重力は 5 次元以上の世界を不安定にする傾向があります．しかし，これだけではミクロスケールで高次元の時空が低エネルギーでは 4 次元に見えることを説明したことになりません．4 次元以外の余分な次元が見えなくなる具体的なメカニズムを与える必要があります.

これは一般に余剰次元コンパクト化の問題と呼ばれ，その解決法として現在 2 つのアプローチがあります．一つは，時空が（少なくとも宇宙の観測領域で）大きな 4 次元時空 X^4 とミクロサイズ ℓ の余剰次元空間 K^k の積 $M = X^4 \times K^k$ に分解されるとするものです．これは Kaluza–Klein コンパクト化と呼ばれています．もう一つは，我々の世界が高次元時空 M の中に埋め込まれたブレインと呼ばれる低次元の部分空間ないし境界 B であるとするものです．これらはブレインワールドモデルと呼ばれています.

これら 2 つのアプローチのいずれでも最大の問題は，なぜ 4 次元の積因子や部分空間が選ばれるのかという点です．弦理論や M 理論に基づく統一理論では，重力を記述する場として計量以外にフォーム場が現れます．これは，通常の 1 次微分形式で記述されるゲージ場を p 次微分形式で記述される場に一般化したもので，どのような場が現れるかは理論に依存します．このフォーム場あるいは対応するフラックスはその次数に応じた部分空間や空間因子を力学的に選ぶ作用があります.

たとえば，11 次元超重力理論は基本テンソル場として，計量以外に 3-形式ゲージ場 $C_{[3]}$ を含んでいます[2]．この場の強度（フラックス）にあたる 4-形式場 $F_{[4]} = dC_{[3]}$ の次数が 4 であることは 4 次元との関係を暗示します．実際，このフラックスが特別の期待値を取るときには，4 次元への Kaluza–Klein 型コンパクト化が実現します．たとえば，$M = X^4 \times K^7$ として，計量が $ds^2 = ds^2(X) + ds^2(K)$ と分解され，$F_{[4]}$ が X 方向成分しか持たないとすると，$\Omega(X)$ を X の体積要素に対応する 4 形式として $F_{[4]} = (1/\ell)\Omega(X)$ となり，K は半径 ℓ の 7 次元球面となることが示されます．これは Freund–Rubin コンパクト化と呼ばれ，4 次元へと自発的にコンパクト化される点が魅力的です．しかし，同時に X が曲率半径 3ℓ の反 de Sitter 時空となることが要求されるため，残念ながら現実的なコンパクト化とはなりません.

電磁場の最も基本的な源が点電荷となるのに対応して，弦理論ではこのようなフォーム場やフラックスの源として，低次元の面（ブレイン）が自然に現れます[9]．それらの中で特にDブレインと呼ばれる面では，面上に束縛された物質場が生じるため，ブレインワールドモデル型のコンパクト化が実現される可能性があります．

このように，現実的な高次元統一理論では，重力相互作用はEinstein理論より豊かな構造をもち，計量以外の場やブレインが大きな役割を果たします．現在の宇宙の4次元性を自然な形で説明するためには，それらの深い理解が不可欠と思われます．

7. 結び

28年前と比べると，時空次元に関係する問題の研究は非常に盛んになり，今や基礎物理における研究の中心テーマと言っても良いほどです．しかし，時空の次元についての理解が大きく進展したとは言えません．むしろ，混迷がより深まったように見えます．特に，弦理論・M理論における異なる次元の理論の間の双対性[9]，AdS/CFT対応[10]，動的な次元変化[11,12]などの様々な驚くべき発見は，時空の次元自体のもつ意味について再考することを要求しているように思われます．

参考文献

1) 小玉英雄：科学 **49**, 240 (1979).
2) Cremmer, E., Julia, B. and Scherk, J.: *Phys. Lett. B* **76**, 409–412 (1978).
3) Weinberg, S.: in *General Relativity: An Einstein Centenary Survey*, S.W. Hawking and W. Israel eds., 790 (CUP, 1979).
4) Copeland, E., Sami, M. and Tsujikawa, S.: *Int. J. Mod. Phys. D* **15**, 1753–936 (2006).
5) Gregory, R. and Laflamme, R.: *Phys. Rev. Lett.* **70**, 2837–2840 (1993).
6) Kudoh, H. and Wiseman, T.: *Phys. Rev. Lett.* **94**, 161102 (2005).
7) Hawking, S. and Ellis, G.: *The Large Scale Structure of Space-time* (CUP, 1973).
8) Horowitz, G.T. and Maeda, K.: *Phys. Rev. Lett.* **87**, 131301:1–4 (2001).
9) Polchinski, J.: *String Theory* (CUP, 1998).
10) Aharony, O., Gubser, S., Maldacena, J., Ooguri, H. and Oz, Y.: *Phys. Rep.* **323**, 183–386 (2000).
11) Green, D., Lawrence, A., McGreevy, J., Morrison, D. and Silverstein, E.: *hep-th/07050550*.
12) Hellerman, S. and Swanson, I.: *hep-th/07050980*.

（こだま・ひでお，高エネルギー加速器研究機構）