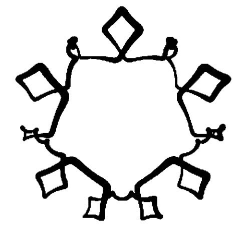
群と相対性理論



小玉 英雄

相対性理論は，自然法則の記述において特別な基準系が存在しないことを基本原理（相対性原理）とする法則記述の体系である[1]．現実の世界では，異なる基準系に関する物理量の値は観測により対応が付くため，相対性原理は，この対応付けを表す物理量の変換に対して，自然法則が不変であることを要求することになり，法則の構造を強く規定する．この異なる基準系間での物理量の変換は，数学的には，物理量の空間における変換として表現され，その全体は群をなす．

一般相対性理論では，この変換群は時空多様体 M の微分同相変換の全体の作る無限次元群 $\mathrm{Diff}(M)$ となり，法則の不変性は共変性と呼ばれる．これは，一般にこの変換により時空構造が見かけ上変化するためである．しかし，時空が対称性をもつと，$\mathrm{Diff}(M)$ の有限次元部分群 G に対して時空計量が不変となる．この群 G が十分大きいと，時空構造は強く規定され，その上での物理法則に豊かな構造が現れる．例えば，特殊相対性理論は，この G が Poincaré 群となる場合に相当する．本稿では，このような高い対称性をもつ時空の構造，特に等長変換群と時空の無限境界の共形変換群の対応について詳しく解説する．

1. 光速不変性と共形 Killing ベクトル

特殊相対性理論は，慣性系に限定された相対性原理と（慣性系での）光速の不変性を基本原理とする理論体系である．この理論では，光速不変性が慣性系を決定する判定基準を与える．光速を c とすると，時空点 $(t_0, \boldsymbol{x}_0)$ を光源とする光波面の方程式は，$\Delta x^0 = c\Delta t = c(t - t_0)$, $\Delta \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0$ を用いて

$$\Delta s^2 := \Delta \boldsymbol{x}^2 - c^2 \Delta t^2 = \eta_{ab} \Delta x^a \Delta x^b = 0$$

と表される*1)．ここで，η_{ab} は，空間の次元を n, I_n を n 次の単位行列とするとき，定数行列

$$(\eta_{ab}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$$

で与えられる．x^a が x_0^a に近づいた極限では，上の式は次の無限小バージョンに帰着する：

$$ds^2 \equiv \eta_{ab} dx^a dx^b = 0. \qquad (1)$$

光速不変性は，慣性系の間の座標変換がこの光波面の方程式を不変にすることを要求する（図 1）．この変換を一般に，$x'^a = f^a(x)$ とおくと，無限小バージョンの光波面の方程式の不変性は

$$ds'^2 \equiv \eta_{ab} \Lambda^a{}_c \Lambda^b{}_d dx^c dx^d = e^{2\Omega(x)} ds^2. \qquad (2)$$

すなわち，

$$\eta_{ab} \Lambda^a{}_c \Lambda^b{}_d = e^{2\Omega(x)} \eta_{cd} \qquad (3)$$

と表される．ここで，$\Omega(x)$ は f^a により決まる未知の関数，$\Lambda^a{}_c$ は行列関数

*1) 以下，「同一の項に同じ記号の上付き添え字と下付添え字が現れた場合は，その添え字について和を取る」という Einstein の和の規約を用いる．

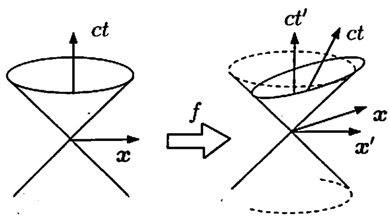


図 1　光速を保つ変換．

$$\Lambda^a{}_c := \frac{\partial f^a(x)}{\partial x^c}$$

である．この条件を満たす変換の全体の作る群は一般に Lie 群 G となる．G は位相的に連結でなく，単位元 (=恒等変換) を含む連結成分を G_0 とすると，G_0 と適当な有限離散部分群 Γ の半直積 $G \cong G_0 \rtimes \Gamma$ と同型となる．

連結部分 G_0 は次のようにして決定される．まず，恒等変換に近い変換（無限小変換）$\delta x^a = f^a(x) - x^a = \xi^a$ を考えると，(3) は

$$\partial_a \xi_b + \partial_b \xi_a = 2\omega \eta_{ab}, \quad \omega = \frac{1}{n+1}\partial_a \xi^a \quad (4)$$

となる ($\xi_a = \eta_{ab}\xi^b$)．この方程式は（Minkowski 時空の）共形 **Killing 方程式**と呼ばれる．

この方程式を直接一般的に解くことも可能であるが，ここでは $n \geq 2$ として，少し違ったアプローチで完全解を求める．そのため，まず，ξ が x^a の 2 次以下の多項式であるとして，解を求める．

$$\xi^a = c^a + \lambda^a{}_b x^b + \frac{1}{2}\sigma^a{}_{bc} x^b x^c$$

を (4) に代入すると，定数係数 $\lambda^a{}_b$ と $\sigma^a{}_{bc}$ に対する分離した同次線形方程式

$$\lambda_{ab} + \lambda_{ba} = \frac{2}{n+1}\lambda^c{}_c \eta_{ab},$$

$$\sigma_{abc} + \sigma_{bac} = \frac{2}{n+1}\sigma^d{}_{dc}\eta_{ab}$$

を得る．第 1 式の一般解は，容易に求まり，

$$\lambda_{ab} = d\eta_{ab} + \omega_{ab}, \quad \omega_{ab} = -\omega_{ba}$$

となる．また，$\sigma^d{}_{dc} = l_c$ とおくと，第 2 式の一般解は

$$\sigma^a{}_{bc} = \frac{1}{n+1}\left(l_b \delta^a_c + l_c \delta^a_b - l^a \eta_{bc}\right)$$

で与えられる．これらは全体で，$(n+2)(n+3)/2$ 個の線形独立な解を与える．ところが，次節で示すように，$n \geq 2$ のとき，これは (4) の持ち得る線形独立な解の最大数と一致する．したがって，$n \geq 2$ のとき，すべての解を求めたことが保証される．

2. Minkowski 時空の共形変換と Poincaré 群

1 節で求めた無限小変換の全体は，閉じた Lie 代数を成す．したがって，Lie 群の一般論に従うと，これらは連結 Lie 群 G_0 の普遍被覆群を一意的に定義する．実際，ベクトル場 P_a, M_{ab}, S, Q_a を

$$P_a = \partial_a, \quad M_{ab} = x_b \partial_a - x_a \partial_b, \quad (5a)$$

$$S = x^a \partial_a, \quad Q_a = x_a x \cdot \partial - \frac{1}{2}x^2 \partial_a \quad (5b)$$

により定義すると，今求めた無限小変換は

$$\delta x^a \partial_a = c^a P_a + \frac{1}{2}\omega^{ab} M_{ab} + dS + \frac{2}{n+1} l^a Q_a$$

と表され，代数的に閉じた交換関係を与える：

$$\begin{aligned}
&[M_{ab}, M_{cd}] = 2\eta_{a[d} M_{c]b} - 2\eta_{b[d} M_{c]a},\\
&[M_{ab}, P_c] = 2\eta_{a[c} P_{b]}, \quad [M_{ab}, Q_c] = 2\eta_{c[a} Q_{b]},\\
&[S, P_a] = -P_a, \quad [S, Q_a] = Q_a, \quad [S, M_{ab}] = 0,\\
&[P_a, P_b] = 0, \quad [Q_a, Q_b] = 0,\\
&[P_a, Q_b] = \eta_{ab} S + M_{ab}. \qquad (6)
\end{aligned}$$

この Lie 代数に対応する連結 Lie 群は $SO_0(n+1,2)$ と局所同型となる．ここで，$SO(p,q)$ は，非正値計量

$$I_{p,q} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$$

をもつ空間 $E^{p,q}$ の特殊直交変換の全体が作る群

$$SO(p,q) := \left\{ V \in SL(p+q, \mathbb{R}) \,\middle|\, {}^T V I_{p,q} V = I_{p,q} \right\},$$

である．$SO_0(p,q)$ はその単位元を含む連結成分で，$SO(p,q) \cong SO_0(p,q) \rtimes \mathbb{Z}_2$ ($pq \neq 0$) である．$I_{p,q}$ に相当する計量テンソルを η_{AB} と書くと，$SO(p,q)$ の Lie 代数の交換関係は，条件 $(p+q)(p+q-1)/2$ 個の基底 $M_{\mathrm{AB}} = -M_{\mathrm{BA}}$ $(\mathrm{A}, \mathrm{B} = 1, \cdots, p+q)$ を用いて

$$[M_{\mathrm{AB}}, M_{\mathrm{CD}}] = 2\eta_{\mathrm{A[D}}M_{\mathrm{C]B}} - 2\eta_{\mathrm{B[D}}M_{\mathrm{C]A}} \tag{7}$$

と表される．

実際，$E^{n+1,2}$ の計量を座標の 1 次変換により

$$ds^2 = \eta_{\mathrm{AB}}dx^{\mathrm{A}}dx^{\mathrm{B}} = \eta_{ab}dx^a dx^b + 2dx^+ dx^-$$

と変換し，交換関係 (7) において

$$M_{+-} = S, \quad M_{+a} = P_a, \quad M_{-a} = Q_a$$

とおくと，交換関係 (6) が得られることが容易に確かめられる．

ただし，これは抽象群 $SO_0(n+1,2)$ のすべての元に対し，光速不変性の要請を満たす変換が実際に存在することを意味するわけではない．これを見るために，Lie 代数の元に対応する無限小変換 ξ^a が与えられると，それに対応する 1 径数変換群 Φ_s が ξ^a の軌道を求めることにより定まることを用いる．すなわち，常微分方程式

$$\frac{dx^a(s)}{ds} = \xi^a(x(s)), \quad x(0) = x_0$$

の解を用いて，$\Phi_s(x_0) = x(s)$ により，変換 $\Phi_s: x_0 \mapsto x(s)$ を定義すると，パラメータ s の任意の値に対して解が存在する場合には，Φ_s は s を加法的パラメータとする 1 次元群となり，自然に Lie 代数に対応する Lie 変換群の部分群と見なすことができる（文献 1) の §8.2 参照）：

$$\Phi_0 = \mathrm{id}, \quad \Phi_{s_1} \circ \Phi_{s_2} = \Phi_{s_1+s_2}.$$

この方法で，$l^a Q_a$ に対応する変換を求めると，

$$x^a = \frac{x_0^a - \frac{s}{2}x_0^2 l^a}{\frac{s^2}{4}l^2 x_0^2 - s x_0 \cdot l + 1}$$

となる．この変換は，$s(\neq 0)$ をどのようにとっても，分母がゼロとなり特異となる x_0 が存在することが容易に確かめられる．すなわち，時空全体で定義された変換にはならない．したがって，異なる基準型を結びつける変換と見なすことはできない．

この変換を除いた残りの無限小変換は，時空全体で定義された正則な変換群を与える．まず，P_a と M_{ab} は，明らかに **Poincaré** 変換

$$x'^a = \Lambda^a{}_b x^b + c^a$$

の無限小変換と対応する ($\delta\Lambda^a{}_b = \omega^a{}_b$)．ここで，$\Lambda = (\Lambda^a{}_b)$ は (3) で $\Omega \equiv 0$ とおいた条件式を満たす定数行列である．明らかに，c^a の全体は**並進群** $\mathbb{R}^4$ を成し，1 次変換 Λ の全体は **Lorentz 群** $O(n,1)$ となる．変換群全体は，これらの半直積 $O(n,1) \rtimes \mathbb{R}^4$ と同型となり，**Poincaré 群**ないし**非同次 Lorentz 群**と呼ばれる．

一方，無限小変換 S は明らかに，すべての座標を一定倍にスケールする変換 $x'^a = \lambda x^a \quad (\lambda > 0)$ を生成する．物理法則がこの変換で不変とすると，自然法則は質量などの特別のスケールを基本定数として持つことができなくなくなる．このため，特殊相対性理論では，この変換を慣性系の変換に含めず，Poincaré 群を基本的な変換群とする．

3. Riemann 多様体の極大対称性

一般相対性理論では，重力は時空計量

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu$$

で記述され，基準系の変更により消去できない重力場が存在するとき，時空は非自明な構造をもつ．そのような非自明な時空がどのような対称性を持つかは，しばしば重要な物理的意味をもつ．例えば，時空計量を保つ変換（**等長変換**）が存在すると，対応するエネルギーや運動量の保存則が得られる[2)]．また，スケール不変な方程式に従うゼロ質量場に対しては，高々局所的なスケールの変更を除いて計量が保たれる変換

$$\Phi^* g = e^{2\Omega(x)} g \tag{8}$$

が存在すれば，同じく保存則が得られる．この変換は，等長変換を特殊な場合として含み，**共形変換**と呼ばれる．前節で扱った変換は，Minkowski 時空の共形変換にあたる．一般の D 次元 Riemann 多様体でも，共形変換群の単位元を含む連結成分は，**共形 Killing 方程式**

$$\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = 2\omega g_{\mu\nu}, \quad \omega = \frac{1}{D}\nabla_\lambda \xi^\lambda \tag{9}$$

の解である**無限小共形変換**（**共形 Killing ベクト**

ル場）$\delta x^\mu = \xi^\mu$ により生成される．

次元 D が 3 以上のとき，共形 Killing 方程式は常微分方程式に帰着することができる．実際，

$$F_{\mu\nu} = \nabla_{[\mu}\xi_{\nu]}, \quad \omega_\mu = \nabla_\mu \omega$$

とおくと，任意の曲線 C にそって次の方程式が成り立つ：

$$\begin{aligned}
&\nabla_u \xi_\mu = u_\mu \omega + u^\nu F_{\nu\mu}, \\
&\nabla_u F_{\mu\nu} = -R_{\mu\nu\lambda\sigma} u^\lambda \xi^\sigma - 2u_{[\mu}\omega_{\nu]}, \\
&\nabla_u \omega = u^\mu \omega_\mu, \\
&(D-2)\nabla_u \omega_\mu = -\left(2R_{\mu\nu}u^\nu - \frac{R u_\mu}{D-1}\right)\omega \\
&\qquad - \left(u^\nu \nabla_\alpha R_{\mu\nu} - \frac{1}{2(D-1)} u_\mu \nabla_\alpha R\right)\xi^\alpha \\
&\qquad - 2u^\nu R^\alpha_{(\mu} F_{\nu)\alpha}.
\end{aligned}$$

ここで，u は曲線 C の接ベクトルである．曲線 C を $x^\mu(s)$ とパラメータ表示すると，左辺の $u^\mu = dx^\mu/ds$ 方向の共変微分は

$$\nabla_u \xi_\mu = \frac{d\xi_\mu}{ds} - \Gamma^\nu_{\mu\lambda}\xi_\nu u^\lambda$$

のように書けるので，上記の方程式系は，$\xi_\mu(s) = \xi_\mu(x(s))$, $F_{\mu\nu}(s) = F_{\mu\nu}(x(s))$, $\omega(s) = \omega(x(s))$, $\omega_\mu(s) = \omega_\mu(x(s))$ に対する閉じた常微分方程式系と見なすことができる．したがって，適当な点 O を原点として固定し，そこでのこれらの量の値を与えると，O を始点とし勝手な点 P を終点とする曲線に沿ってこの常微分方程式を解くことにより，P での値が決まることになる．ただし，O と P を結ぶ曲線は無限にあり，異なる曲線で求まった P の値が異なる場合には，この初期値に対する解は存在しないことになる．したがって，$D \geq 3$ のとき，(9) の 1 次独立な解の数は，一点 O での初期値の自由度 $D + D(D-1)/2 + 1 + D = (D+1)(D+2)/2$ 以下となる．同様にして，$\omega \equiv 0$ に相当する Killing 方程式の解，すなわち無限小等長変換の独立な解の最大数は，$D \geq 1$ に対し，$D + D(D-1)/2 = D(D+1)/2$ となる．

4. 極大対称空間

等長変換に関して，この許される最大の対称性をもつ空間は**極大対称空間**と呼ばれ，物理学でも非常に重要な役割を果たす．上の議論で $F_{\mu\nu}$ は局所的な回転（Lorentz 変換）を生成するので，それが最大数の $D(D-1)/2$ となるという要請は，空間が各点で等方であることを意味する．また，残り D 個の Killing ベクトルは空間の次元と同じ数の並進の自由度に対応する．したがって，極大対称空間は**一様等方空間**となる．このことを用いると，極大対称空間は Euclid 空間 E^D，球面 S^D，双曲空間 H^D に限られることが容易に示される．

Euclid 空間の等長変換群は，明らかに Euclid 群 $IO(D) \cong O(D) \ltimes \mathbb{R}^D$ である．また**球面** S^D の等長変換群は，$O(D+1)$ となる．これは S^D を Euclid 空間 E^{D+1} に $\delta_{\mathrm{AB}}X^{\mathrm{A}}X^{\mathrm{B}} = R^2$ と埋め込むことができることより分かる．最後に，**双曲空間** H^D は，$D+1$ 次元 Minkowski 時空 $E^{D,1}$ に

$$\eta_{\mathrm{AB}}X^{\mathrm{A}}X^{\mathrm{B}} = -R^2 \quad (X^0 > 0) \qquad (10)$$

と埋め込むことができる[3]（図 2）．これは Lorentz 変換で不変であるので，等長変換群は $O_+(D,1) = \{\Lambda \in O(D,1) \mid \Lambda^0{}_0 > 0\}$ となる．

これら 3 種の空間は大域的性質が大きく異なるが，すべて**共形的に平坦**である．実際，これらの空間の計量は，$D = n+1$ として，極座標表示で

$$\begin{aligned}
ds^2 &= R^2(d\chi^2 + f(\chi)^2 d\Omega_n^2) \\
&= R^2 h^2(r)(dr^2 + r^2 d\Omega_n^2)
\end{aligned}$$

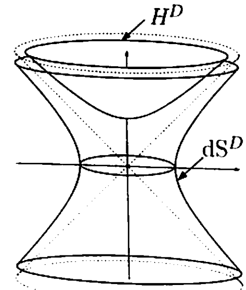


図 2　$E^{D,1}$ に埋め込まれた H^D と dS^D．

と表される．ここで，$d\Omega_n^2$ は n 次元単位球面 S^n の計量，$dr/r = d\chi/f(\chi)$ で，$f(\chi) = \chi\,(E^D)$, $\sin(\chi)\,(S^D)$, $\sinh(\chi)\,(H^D)$ である．これより，明らかに，いずれの空間の計量 g に対しても，適当な写像 Φ が存在して $\Phi^* g = e^{2\Omega} g(E^D)$ が成り立つ．このため，共形 Killing ベクトルの作る Lie 代数は一致する．1 節の議論は Euclid 空間でもそのまま成り立つので，この Lie 代数は $SO(D+1,1)$ の Lie 代数と同型となる．

5. 定曲率空間の共形変換群と漸近対称性

1 節で扱った Minkowski 時空と同様，$SO(D+1,1)$ のうち Euclid 空間では等長変換とスケール変換のみが大域的に正則な変換群として実現される．双曲空間 H^D の場合は，(10) のように $E^{D,1}$ に埋め込むと（簡単のため $R=1$ とする），超曲面としての H^D に接する $E^{D,1}$ のベクトル場

$$\xi^\mu : \delta X^{\mathrm{A}} = l^{\mathrm{A}} - \epsilon(l\cdot X)X^{\mathrm{A}} \ // \ H^D \qquad (\mathrm{A}=0,\cdots,D) \tag{11}$$

$(\epsilon = -1)$ が等長でない無限小共形変換の基底を与える $(\omega = -\epsilon l\cdot X)$．これらは，定数ベクトル l^A が時間的なときは大域的に正則な変換を生成するが，空間的なときは生成された変換は特異点をもつ．

これに対して，球面 S^D の場合には状況が異なる．この場合には，(11) において $\epsilon = 1$ とおいたベクトル場が非等長的な無限小共形変換の基底を与える．これらの無限小変換は常に正則な大域的変換を生成する．これを確かめるには，例えば l^{A} が E^{D+1} における球面の北極向きの単位ベクトル $(l^{\mathrm{A}}) = (0.\cdots,0,c)$ の場合を調べればよい．他の場合は回転によりこの場合に帰着される．この l^{A} に対するベクトル場 (11) は，球面上で北極と南極を結ぶ大円に沿っており，北極からの天頂角を θ とすると，対応する軌道の方程式は単に $d\theta/ds = -c\sin\theta$ となる．この解は θ のみの変換

$$\tan(\theta/2) = e^{-cs}\tan(\theta_0/2)$$

となり，任意の $s>0$ で大域的に正則となる．

ここで，慧眼な読者は，球面 S^D の共形変換群 $O(D+1,1)$ がなぜ 1 次元高い双曲空間 H^{D+1} の等長変換群と一致しているのか不思議に思うに違いない．実はこれには理由がある．ポイントとなるのは，双曲空間 H^{D+1} の無限遠が球面 S^D と同一視できることにある．

双曲空間 H^{D+1} の同次座標系 X^{A} を

$$X^a = \sinh(\chi\phi(\Omega))\Omega^a \quad (a=1,\cdots,D+1),$$
$$X^0 = \cosh(\chi\phi(\Omega))$$

と表すと，$\Omega^a(\Omega^2=1)$ を無限遠球 S^D の座標系と見なすことができる．ここで，$\phi(\Omega)$ は Ω のなめらかな関数である．明らかに，ϕ を定数にとっても，この無限遠球の計量は一意的には定まらず定数倍の自由度が残る．また，ϕ が一般の関数のとき，$\chi=$ 一定面の計量は単位球面と共形的となる．このため，H^{D+1} の等長変換は一般に無限遠球の共形変換を誘導する．実は今の場合，この対応が H^{D+1} の等長変換群と S^D の共形変換群の同型対応を与える．実際，$\phi=1$ となる標準的な対応では，$O(D+1,1)$ の部分群 $O(D+1)$ はそのまま，S^D の等長変換群と対応する．さらに，ブーストに当たる無限小変換

$$M_{0a} = X_a\partial_0 - X_0\partial_a \quad (a=1,\cdots,D+1) \tag{12}$$

は，E^{D+1} に埋め込まれた無限遠球面 (Ω^a) において，無限小変換

$$l^a M_{0a} \mapsto l^a - (l\cdot\Omega)\Omega^a \tag{13}$$

を誘導することが確かめられる．これは，ちょうど S^D の非等長的共形 Killing ベクトルと対応する．

6. 反 de Sitter 時空の漸近対称性

極大対称空間と同様に，**極大対称時空**も 3 つのタイプ，Minkowski 時空 $E^{n,1}$，**de Sitter 時空** dS^D，**反 de Sitter 時空** adS^D に限られる．これらは，一様等方なので**定曲率時空**となり，λ を定数として，曲率テンソルが

$$R_{\mu\nu\lambda\sigma} = \lambda(g_{\mu\lambda}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\lambda}).$$

と表される．Minkowski 時空は $\lambda=0$，de Sitter 時空は $\lambda>0$，反 de Sitter 時空は $\lambda<0$ に当たる．Einstein 方程式を用いると，λ は宇宙定数 Λ と次の関係にある：

$$\Lambda=\frac{(D-1)(D-2)}{2}\lambda.$$

de Sitter 時空は $E^{D,1}$ に，反 de Sitter 時空は $E^{D-1,2}$ に 2 次超曲面として等長的に埋め込むことができる[3] (図 2)[*2]：

$$\eta_{\mathrm{AB}}X^{\mathrm{A}}X^{\mathrm{B}}=\epsilon\ell^2(=1/\lambda). \qquad (14)$$

dS^D に対して $\epsilon=1$，adS^D に対して $\epsilon=-1$ である．これより，等長変換群がそれぞれ，$O(D,1)$ および $O(D-1,2)$ となることが分かる．また，計量が局所的に

$$ds^2=\ell^2[-d\tau^2+\tilde{f}(\tau)^2d\sigma^2]$$

と表されるので，de Sitter 時空も反 de Sitter 時空も局所的に共形的に平坦である．ここで，$d\sigma^2$ は単位双曲空間 H^{D-1} の計量，$\tilde{f}$ は，

$$\tilde{f}(\tau)=\begin{cases}\tau & ;E^{D-1,1},\\ \sinh\tau & ;\mathrm{dS}^D,\\ \cos\tau & ;\mathrm{adS}^D.\end{cases}$$

したがって，無限小共形変換の作る Lie 代数はすべての定曲率時空で一致し，1 節で求めた $SO(D,2)$ の Lie 代数と同型となる．ただし，dS^D および adS^D を上記のように $E^{p,q}$ に埋め込むと，非等長的共形 Killing ベクトルは (11) 式と同じ表式で与えられ，その軌道から定義される変換は，

$$X^{\mathrm{A}}=\frac{X_a^{\mathrm{A}}+l^{\mathrm{A}}\left\{\frac{1}{k}\sinh(ks)+\frac{l\cdot X_0}{l^2}(\cosh(ks)-1)\right\}}{\cosh(ks)+\epsilon\frac{l\cdot X_0}{k}\sinh(ks)}.$$

と表される．ここで，$k=\sqrt{\epsilon l^2}$ である．これより，定数ベクトル l^{A} が光的ないし時間的ならこの変換は特異点をもち，大域的な変換とならない．したがって，群 $SO(D,2)$ はどの定曲率時空でも

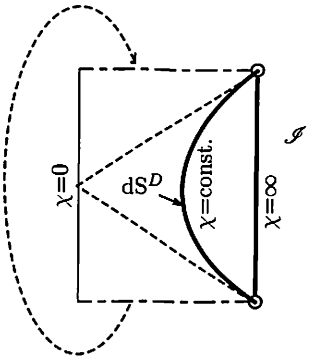


図 3　adS^{D+1} の無限遠境界．

大域的変換群としては実現されない．

しかし，adS^{D+1} の等長変換群 $O(D,2)$ が dS^D の（形式）共形変換群と一致することから予想されるように，H^D の場合に起きた等長変換群と無限遠境界の共形変換群の対応は，反 de Sitter 時空に拡張される．実際，$E^{D,2}$ の計量の符号を $[-1,1,\cdots,1,-1]$ と取り，

$$X^a=\ell\sinh\chi\Omega^a \quad (a=0,\cdots,D),$$
$$X^{D+1}=\ell\cosh\chi$$

とおくと，$\eta_{ab}\Omega^a\Omega^b=1$ となるので，$\chi=$ 一定面は dS^D と共形となり，$\chi\to\infty$ でこの面は無限遠に遠ざかる（図 3）．したがって，adS^{D+1} の無限遠は dS^D と共形となる．さらに，計量の符号が変わる点を除いて，5 節の (12) 式から (13) 式を導く議論がそのまま成り立つ．

このように，反 de Sitter 時空の等長変換群がその無限遠境界と共形同型な 1 次元低い定曲率時空の共形変換群と 1 対 1 に対応することは，$D+1$ 次元反 de Sitter 時空での重力理論と D 次元時空での共形不変な場の量子論が対応するという **adS/CFT 予想**[4]の根拠の一つとなっている．

参考文献

1) 小玉英雄：『相対性理論』（培風館，1997）．
2) 小玉英雄：数理科学 **502**, 27–33 (2005).
3) 小玉英雄，佐藤文隆：『一般相対性理論』（岩波書店，2000）．
4) Maldacena, J.: *Adv. Theor. Math. Phys.* **2**, 231–252 (1998).

（こだま・ひでお，高エネルギー加速器研究機構）

*2) 正確には，このように $E^{D-1,2}$ に埋め込まれた超曲面は $S^1\times\mathbb{R}^{D-1}$ という位相構造をもち，S^1 因子に対応する閉曲線が時間的となる．この因果律の破れは，超曲面の普遍被覆を考えることで解消される．通常，adS^D としてはこの被覆空間 $\widetilde{\mathrm{adS}}^D\cong\mathbb{R}^D$ を考えることが多い．