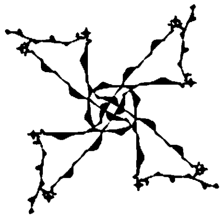
時空
実在か戦略か？



小玉 英雄

時間空間の概念は，人類の長い歴史の中で大きく変遷してきたが，その流れは大まかには「戦略としての時間空間から実体としての時空へ」と要約される．本稿では，相対的時間空間と絶対的時間空間の間で揺れ動きながら，この大きな流れに沿って発展した物理学における時間空間概念の展開を，ガリレオ・ニュートンの時代以降に限って見てみよう．

1. ニュートン理論における時間空間概念

ニュートン（Isaac Newton, 1642–1727）はガリレオ（Galileo Galilei, 1564–1642）の功績を足場として，近代物理学の基礎を築いたが，2人の時間・空間に対する捉え方はかなり異なっているように思われる．

物理学におけるガリレオの最大の貢献は，慣性の法則の発見であるが，ニュートンによる運動法則の定式化（ニュートン力学）は，この慣性の法則を第1法則として取り入れており，すべての定式化の基礎としている．

ニュートンの運動の3法則

第1法則（慣性の法則） 質点は，力を受けない限り，速度を保つ．

第2法則（運動方程式） 質点の加速度 $a = dv/dt$ は，質点に作用する力 $\boldsymbol{F}$ に比例し，その質量 m に反比例する．比例係数は1とすることができ，$ma = \boldsymbol{F}$.

第3法則（作用反作用の法則） 2つの質点の間に力が働くとき，質点1に働く力 $\boldsymbol{F}_1$ と質点2に働く力 $\boldsymbol{F}_2$ の間には，$\boldsymbol{F}_1 = -\boldsymbol{F}_2$ の関係が成り立つ．

この3法則のうち，第1法則は第2法則で $\boldsymbol{F} = 0$ とおけば得られるので，一見不要に見えるがそうではない．皆さん，電車に乗ると，電車が減速・加速をするたびに体が前後に加速されることを経験すると思う．力の定義である第2法則によれば，これは，電車を基準にした空間で電車の減速・加速の際に乗客に力が働くことを意味する．しかし，この力は物体間の力に帰着できない．第3法則が示唆するように，ニュートン力学では力は質点間の2体力に還元できるものに限られており，それ以外の力は理論の対象外となる．第1法則はこの対象外の力を排除する役割を果たす．すなわち，すべての相対空間で運動法則が成り立つのではなく，第1法則が成り立つ慣性系と呼ばれる特別の基準系に相対的な空間が存在すること，そして，この特別な相対空間において第2法則により力を定義すれば，力が2体力に帰着される．

それでは，この特別の基準系とはいったいどのようなものであろうか？ また，唯一なのか？ 実証科学の祖であるガリレオは，実験をすべての基礎におき，鋭い洞察力を持っていたが，必ずしもこのような問題に関心があったとは思えない．

これに対し，ニュートンは上に述べた慣性の法則の意義を深く理解していたと思われる．その結果として彼の与えた解答は，**絶対空間・絶対時間**である．その中のどのような物体の影響も受けない，「不動の一様等方な空間」と「絶対的時の流れ」いうものがあると考えたのである．神学の影響もあったと思われるが，彼の力学およびそれに基づく重力理論がケプラー（Johannes Kepler, 1571–1630）による天体の運行法則に基づいていたことも大きいと想像される．コペルニクス（Nicolus Copernicus, 1473–1543）は，プトレマイオス（Κλαύδιοσ Πτολεμαῖοσ, 83 頃–168 頃）の『アルマゲスト』（天文学大全）*1) に集約された地球中心の宇宙観（天動説）から太陽中心の宇宙観（地動説）への転換をもたらした思想家として有名であるが，ニュートンの理論はそれを遙かに超えていた．なぜなら，有限な質量を持つ限り，太陽も惑星からの力の反作用により，加速運動することになるためである．このような状況で，「慣性系」という理想化された系が天体や星々と独立に絶対的なものとしてその背後にあると想定する気持ちはよくわかる．

しかし，この絶対空間・絶対時間という概念は，ニュートンが自ら定式化した法則により無意味化されることになる．すでに述べたように，ニュートン理論では，力は 2 体力に帰着されるので，一般に質点 i に対する運動方程式は，並進不変性（空間の一様性）より，次のように表される：

$$m_i \boldsymbol{a}_i = \sum_j \boldsymbol{F}_{ij}(\boldsymbol{r}_{ij}), \quad \boldsymbol{r}_{ij} = \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j. \tag{1}$$

この方程式は，時間の原点の変更，空間並進，空間回転に加えて次の**特殊ガリレイ変換**

$$\begin{aligned} &t' = t, \quad \boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - t\boldsymbol{v}_0, \\ &\boldsymbol{F}'_{ij}(\Delta \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{F}_{ij}(\Delta \boldsymbol{r}) \end{aligned} \tag{2}$$

に対して不変となる（$\boldsymbol{v}_0$ は定数ベクトル）．実際，加速度 $\boldsymbol{a}_i = d^2\boldsymbol{r}_i/dt^2$ と相対位置ベクトル $\boldsymbol{r}_{ij}$ はこの変換で不変で，また，2 粒子の衝突による速度変化 $\Delta \boldsymbol{v}_i$ がこの変換で不変なので，第 3 法則から導かれる全運動量保存則 $m_i \Delta \boldsymbol{v}_i + m_j \Delta \boldsymbol{v}_j = 0$ より，粒子間の質量比も変換で不変となる．第 2 法則を力の定義とみる立場からは，この変換で力の法則が不変となる．一般に，時間推進・反転，空間並進・回転・反転，特殊ガリレイ変換の任意の組合せを**（一般）ガリレイ変換**という．

*1) 『アルマゲスト』は，単に天動説という学説についての書ではなく，古代からプトレマイオスの時代までに人々が目視によって得た天体の運行に関する経験的知識を整理総大成した偉大な実用の書であり，この書の登場によりそれ以前の関連する文献はほとんど破棄されたと言われている．

この結果は，ガリレイ変換で結ばれる基準系あるいはそれに相対的な時間空間では，全く同じ物理法則が成り立ち，実証科学の観点からは対等であることを意味する（**ガリレオの相対性原理**）．上記のガリレイ変換は，元の基準系に対して速度 $\boldsymbol{v}_0$ で等速直線運動する基準系への変換となっており，$\boldsymbol{v}_0$ は任意なので，結局，無限個の慣性系が存在することになる．ニュートンの想定した絶対空間をその中で実験により特定することは不可能となる．

このように，対等な空間が無限個あるという奇妙な事態になってしまったが，時間空間が自然現象およびその法則を数理的に表現するための手段，あるいは戦略であるという観点からは，これは重大な問題ではない．まず，ガリレオの相対性原理は，慣性系での法則がガリレイ変換に対して不変であることを意味している．すなわち，ガリレイ不変性は慣性系における法則の形を強く制限する．実は，この不変性をたよりに原理的には慣性系を探すことが可能となる．もちろん，真の慣性系を見つけることは非常に困難であるが，実用的には必要な精度でニュートンの法則が成り立つ近似的な慣性系を見つけることができる*2)．

2. 特殊相対性理論における時空概念

このような純粋に戦略としての時間空間の概念に大きな変更を迫ったのが，場の概念の登場，特に電磁気学の発達である．19 世紀に入り，ファラ

*2) ニュートン理論は，相対性理論と異なり，重力を特別扱いしていない．このため，例えば自由落下するエレベータは局所的にも慣性系でない．ニュートン理論での慣性系は，現代の観点からは，本質的に近似的概念である．

デー (Michael Faraday, 1791–1867)，マクスウェル (James Clerk Maxwell, 1831–1879)，ヘルツ (Heinrich Rudolf Hertz, 1857–1894) らの努力により，それまで独立と思われていた静電気，磁気，光学など様々な電磁気現象・法則が電磁場の概念により統一された．これにより，ニュートンが前提とした質点間の力という枠組みに収まらない力が登場し，ニュートン力学に基づいてすべての自然法則を統一的に記述するという力学的自然観が危機に直面した．このような状況で，当時のほとんどの物理学者がエーテル (ether*3)) という新たな実体を導入することにより，力学的自然観を救おうとした．音波を空気などの媒質の振動として記述するのと同様に，電磁波をエーテルという新たな実体の振動として力学的に記述しようと試みたのである．

エーテルは，一見何もない真空に特別の基準系が存在することを意味し，絶対空間が実体として再登場したことになる．当然，ニュートン力学の持っていたガリレイ不変性は，破れることになる．実際，真空中のマクスウェル方程式

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0, \quad \frac{1}{c^2}\partial_t \boldsymbol{E} = \nabla \times \boldsymbol{B},$$
$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \quad \partial_t \boldsymbol{B} = -\nabla \times \boldsymbol{E} \tag{3}$$

より，波動方程式

$$\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{E} - c^2 \triangle \boldsymbol{E} = 0 \tag{4}$$

が導かれるが，これは電磁波が真空中を光速 c で伝わることを示している．この伝播速度はガリレイ変換で不変でない．例えば，平面波 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{e}\exp[-i(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})]$ ($\boldsymbol{k} = \omega \boldsymbol{n}/c$, $\boldsymbol{n}$ は伝搬方向の単位ベクトル) を考えると，ガリレイ変換で力と電荷，したがって電場は不変でないといけないので，慣性系 $(t', \boldsymbol{r}')$ では

$$\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{e}\exp\left[-i(\omega' t' - \boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}')\right];$$
$$\omega' = \omega - \boldsymbol{v}_0 \cdot \boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{k}' = \boldsymbol{k} \tag{5}$$

となる．これより，波の群速度 $\boldsymbol{v} = \nabla_{\boldsymbol{k}}\omega$ は

$$\boldsymbol{v} = c\boldsymbol{n} \to \boldsymbol{v}' = c\boldsymbol{n} - \boldsymbol{v}_0 \tag{6}$$

と変換する．この変換則は質点の速度の単純加法則と一致し，電磁波の伝播速度を測ることにより，基準系のエーテルに対する運動を検知できることを示している．

この考え方に基づき，物体 (媒質) や地球のエーテルに対する運動を検知しようとする様々な実験が行われたが，それらは，ことごとく，静止エーテル理論の予言と合わないものであった．この結果を受けて，物体の近傍ではエーテルが部分的に引きずられる，電磁波の振動数ごとにエーテルが存在するなど，様々なエーテル理論の修正が積み重ねられ，次第にエーテルは絶対的な基準系としての地位を失っていった．このエーテル理論の失敗を決定的としたのが，よく知られているマイケルソン (Albert A. Michelson, 1853–1931)・モーリー (Edward W. Morley, 1838–1923) の干渉実験である．この実験は，地球のエーテルに対する運動速度 v を真空中の光速 c との比について 2 次の精度で測ろうとしたものであるが，結果は，地球に対する真空中の光速は地球の運動の影響を受けないというものであった．

このようにエーテル理論が破綻する中，時間空間を純戦略的な観点から再構築したのがアインシュタイン (Albert Einstein, 1879–1955) である．彼は，慣性系という法則記述の上で特別の役割をする基準系があり，それらがすべて対等であるという相対性原理の考え方は踏襲しつつ，慣性系に付随する時間空間座標の変換則を実験事実のみに基づく操作的方法で決定することを提案した．具体的には，エーテル理論を破綻させた実験事実である**光速不変性**を基礎に据え，標準時計と光による時間情報の交換のみで慣性系に付随する標準的な時間空間座標系を操作的に定義したのである (**特殊相対性理論**)．その結果，2 つの慣性座標系の間の変換は，2 点の時間差を $\varDelta t$，位置ベクトルの差を $\varDelta \boldsymbol{r}$ として，光波面の方程式

$$\varDelta s^2 := -c^2 \varDelta t^2 + \varDelta \boldsymbol{r}^2 = 0 \tag{7}$$

を不変とする変換となり，正則なものは，時間推進，時間反転，空間推進，空間回転，空間反転，特

*3) ギリシャ語で天空上層の空気という意味．

殊ローレンツ（Lorentz）変換

$$ct' = \gamma_0(ct - \boldsymbol{\beta}_0 \cdot \boldsymbol{r}), \tag{8a}$$

$$\boldsymbol{r}' = \gamma_0(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{\beta}_0 ct) \tag{8b}$$

および時間空間座標をすべて定数倍する変換（相似変換）の組合せで与えられる[*4)]（$\boldsymbol{\beta}_0 = \boldsymbol{v}_0/c$, $\gamma_0 = (1-\beta_0^2)^{1/2}$）．これらのうち，相似変換を除く変換は，ポアンカレ(Poincaré)変換または一般ローレンツ変換と呼ばれる．ニュートン理論のガリレイ不変性と同じ理由で，特殊相対性理論では，慣性系での物理法則はポアンカレ変換で不変でなければならない．相似変換は粒子の質量も変化させるので，理論の不変群からは通常，除外される．

特殊ローレンツ変換の最大の特徴は，時間座標が空間座標に依存した変換を受け，変換により時間座標と空間座標が混ざり合うことである．これは，時間と空間が不可分の関係にあることを意味し，時間と空間が一体となった4次元時空という概念を生み出した．この時空概念の中で中心的な役割を果たすのが，ミンコフスキー（Minkowski）計量と呼ばれる時空計量である．この計量は，無限小形式で

$$ds^2 = -c^2dt^2 + d\boldsymbol{r}^2 \tag{9}$$

と表されるが，粒子の時空軌道の接ベクトルに対しては，粒子と共に運動する標準時計の進み（＝固有時）τ により $ds^2 = -c^2d\tau^2$ と表される．したがって，原理的には，計量は基準系やその座標系と独立に決定可能である．さらに，慣性座標系をこの計量が(9)の形に表される座標形として選別することができる．

この時空計量に着目すると，全く対等な無限個の慣性系とそれに付随する相対的時間空間から一つの抽象的な時空を構成することができる．方法は簡単で，互いにポアンカレ変換で結ばれる異なる慣性座標系の2点を同一視するのである．この同一視により一つの慣性座標系で記述される時間空間 $\mathbb{R}^4$ と同型な抽象的時空 $\mathscr{M}^4$ が定義される．さらに，計量 ds^2 はポアンカレ変換で不変なので，この抽象的な時空に計量を定義する．この特殊な計量をもつ抽象時空多様体がミンコフスキー時空である（図1）．ミンコフスキー時空と慣性座標系の関係は，公理的に定義されたユークリッド（Euclid）空間とその直交座標系の関係と同じである．

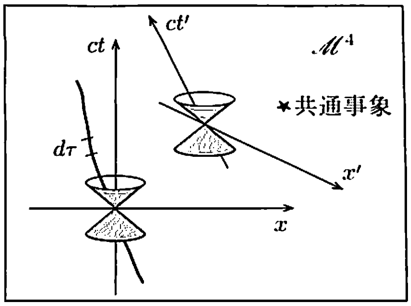


図1　ミンコフスキー時空．

物理的観点からは，抽象時空多様体を時間的空間的に局在した事象の集合体と同一視することがしばしばあるが，量子論では同じ事象をすべての観測者が同時に観測することは原理的な意味でできないので，この同一視は厳密には正しくない．

このように，特殊相対性理論では，無限個の同等な相対的時間空間をミンコフスキー時空という一つの抽象的時空で置き換えることができるが，それはあくまで自然現象を記述する手段に過ぎず，決してエーテルのような実在ではない．粒子や場の入れ物に過ぎず，内容物の影響を全く受けないからである．

3. 一般相対性理論における時空概念

ニュートン理論では，重力も慣性系において記述されるが，これは問題を引き起こす．なぜなら，「物体に働く重力加速度はその質量に依存しない」という**等価原理**が実験によって確立されているためである．この等価原理を仮定すると，「力が働かない質点は速度を変えない」という慣性系の定義は，重力場中では意味を失う．

そこで，アインシュタインは，慣性系の定義を「重力以外の力を受けない粒子が等速直線運動する基準系」と変更した．これは，重力が慣性系では

*4）局所的には定義されるが，大域的には特異性を持つ変換を許すと，共形変換と呼ばれるより広いクラスの変換で光波面の方程式は不変となる[1)]．

消えることを意味する．もちろん，地球の重力場を考えればわかるように，源をもつ重力場で自由落下する粒子の集団は互いに等速直線運動しない．したがって，この新たな定義では慣性系は微局所的[*5)]にしか存在が保証されない．

この事実よりいくつかの重大な帰結が導かれる．まず，ニュートン理論や特殊相対性理論と異なり，全事象を記述できる特別の基準系は存在しない．したがって，自然現象やその法則の記述には一般的な基準系を用いることが要求され，しかも法則の記述においてどの基準系も同等であるとするのが自然である（**一般相対性原理**）．一方で，各時空点Pの（無限小）近傍では重力の働かない**微局所慣性系**が存在し，そこでは，特殊相対性理論が成り立つ（**等価原理**）．そこで，一般的な基準系での法則の表現を得るには，一般的な基準系と微局所慣性系との関係を与え，それを用いて微局所慣性系での記述を一般的な基準系での記述に翻訳する必要がある．

この関係を与える一つの方法は，微局所慣性座標系 X^a_{P} $(a=0,\cdots,3)$ と一般座標系 x^μ $(\mu=0,\cdots,3)$ の間の座標変換則 $x^\mu=x^\mu(X_{\mathrm{P}})$ を具体的に与えることである．この関係式を用いると，例えば，重力以外の力が働かない粒子の運動方程式

$$\frac{d^2X^a_{\mathrm{P}}}{d\tau^2}=0 \tag{10}$$

は，一般座標系での運動方程式

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}+\Gamma^\mu_{\nu\lambda}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\lambda}{d\tau}=0, \tag{11}$$

$$\Gamma^\mu_{\nu\lambda}(\mathrm{P})=-\frac{\partial X^a_{\mathrm{P}}}{\partial x^\nu}\frac{\partial X^b_{\mathrm{P}}}{\partial x^\lambda}\frac{\partial^2x^\mu}{\partial X^a_{\mathrm{P}}\partial X^b_{\mathrm{P}}} \tag{12}$$

に書き換えられる[*6]．したがって，一般座標系では重力が現れ，その大きさや方向は**接続係数**と呼ばれる64個の成分を持つ量 $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$ で記述される．

ここで接続係数という名前が用いられるのは次

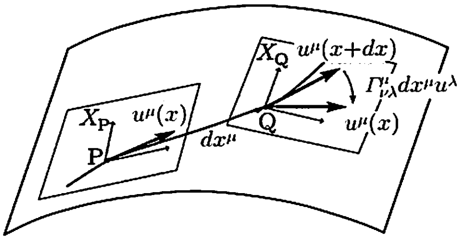


図2　4元速度ベクトル u^μ の平行移動と接続係数．

の理由による．まず，時空の各点では微局所慣性系が存在するが，当然それは無限個あり，互いにポアンカレ変換で移り合う．したがって，特殊相対性理論と同様に，各点で微局所的なミンコフスキー時空を構成することができる．時空を一般座標系を局所座標系としてもつ多様体とみなすとき，微局所ミンコフスキー時空はその接空間に当たる．このとき，(10)は粒子の4元速度ベクトル $U^a=dX^a/d\tau$ が運動と共に平行移動することを表している．しかし，微局所慣性系は無限小の広がりしか持たないので，点Pを通過した粒子はすぐに隣の点Qに移ってしまう．このため，この平行移動を記述するには，点Pでの速度ベクトルが属する微局所ミンコフスキー時空 $\mathscr{M}_{\mathrm{P}}$ と点Qでの微局所ミンコフスキー時空 $\mathscr{M}_{\mathrm{Q}}$ が平行移動によりどのように対応するかを指定することが必要となる．この対応は，点Pの座標を x^μ，点Qの座標を $x^\mu+dx^\mu$，U^a の一般座標成分を $u^\mu=U^a\partial x^\mu/\partial X^a$ として，一般に64個の成分を持つ量 $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$ を用いて次のように表される（図2）：

$$u^\mu(x+dx)-u^\mu(x)=-\Gamma^\mu_{\nu\lambda}dx^\nu u^\lambda. \tag{13}$$

これを $d\tau$ で割って，$d\tau\to 0$ の極限を取れば，(11)が得られる．したがって，$\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$ は，局所ミンコフスキー時空の平行移動による局所慣性系の「接続」の仕方を記述している．

表式(12)より，一般座標変換 $x^\mu\to x'^\mu=x'^\mu(x)$ に対して，接続係数は

$$\begin{aligned}\Gamma'^\mu_{\nu\lambda}&=\Lambda^\mu{}_\alpha(\Lambda^{-1})^\beta{}_\nu(\Lambda^{-1})^\gamma{}_\lambda\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\\&\quad-(\Lambda^{-1})^\alpha{}_\nu(\Lambda^{-1})^\beta{}_\lambda\partial_\alpha\Lambda^\mu{}_\beta\end{aligned} \tag{14}$$

と変換することがわかる．ただし，$\Lambda^\mu{}_\alpha=$

*5) 有限な広がりをもつ場合と区別するために，本稿では，無限小の広がりをもつ場合には，**微局所**という言葉を使うことにする．

*6) 同じ項内で2度現れる添え字については0から3の範囲で和を取るものとする（アインシュタインの規約）．

$\partial x'^{\mu}/\partial x^{\alpha}$．したがって，接続係数はテンソルではない．これは，各点で $\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}=0$ となる微局所慣性系の存在を保証するために不可欠の要素である．

一般座標系での自由粒子の運動方程式 (11) は，導出法より，一般座標系の変換に対してテンソル方程式として振る舞い，形を変えないが，逆に，一般相対性原理に対応して，運動方程式が一般座標の変換に対して形を変えないという**一般共変性**を要請すると，接続係数の変換則 (14) が得られる．したがって，重力場の一般共変的な記述を与えることと，変換則 (14) で結びつく接続係数をすべての一般座標系で与えることとは同等となる．ただし，(12) で与えられる接続は重要な特殊性をもつ．それは，下付の添え字について対称となっている：

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}=\Gamma^{\mu}_{\lambda\nu}. \tag{15}$$

接続係数がこの性質をもつ場合には，各点 P の近傍で適当な局所座標系をとると，点 P での接続係数がすべてゼロとできることが容易に示される．したがって，等価原理を満たすためには，この条件を課す必要がある．

一般座標系を用いて微局所慣性系の配置を記述するもう一つの方法として，時空計量を用いるよりシンプルなアプローチがある．その出発点は，各微局所ミンコフスキー時空のミンコフスキー計量 $\eta=(\eta_{ab})$ である．微局所ミンコフスキー時空を，時空多様体の接空間と見なすと，このミンコフスキー計量は接ベクトルの長さや角度を与え，時空の計量を定義する：

$$\begin{aligned}&ds^2=g_{\mu\nu}(x)dx^{\mu}dx^{\nu};\\&g_{\mu\nu}(x(\mathrm{P}))=\eta_{ab}\partial_{\mu}X^{a}_{\mathrm{P}}\partial_{\nu}X^{b}_{\mathrm{P}}.\end{aligned} \tag{16}$$

この時空計量が大域的に至るところミンコフスキー計量 η と一致するような大域的慣性座標系が存在するなら，この時空には本質的な重力場は存在せず，特殊相対性理論の世界となる．一方，そのような大域的座標系が存在しないなら，本質的重力場が存在する．

この時空計量による記述と接続による記述の関係は次のようになる．まず，上で導入した接ミンコフスキー時空（＝微局所ミンコフスキー時空）の接続は，通常のミンコフスキー時空での平行移動に対応するので，対応する平行移動はベクトルの長さを保つ．そこで，(13) 式の平行移動でベクトルの長さの 2 乗 $g_{\mu\nu}u^{\mu}u^{\nu}$ が保存される条件を求めると，

$$\nabla_{\lambda}g_{\mu\nu}:=\partial_{\lambda}g_{\mu\nu}-2\Gamma^{\alpha}_{\lambda(\mu}g_{\nu)\alpha}=0 \tag{17}$$

を得る．ところが，この関係式と条件 (15) を組み合わせると，接続係数が計量のみで次の形に決まってしまう（リーマン（Riemann）接続）：

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}=\frac{1}{2}g^{\mu\alpha}\left(\partial_{\nu}g_{\alpha\lambda}+\partial_{\lambda}g_{\alpha\nu}-\partial_{\alpha}g_{\nu\lambda}\right). \tag{18}$$

したがって，接続係数がニュートン理論の重力加速度にあたるので，時空計量はそのポテンシャルに対応する．時空計量を用いると，点 P での微局所慣性座標系は $g_{\mu\nu}(\mathrm{P})=\eta_{\mu\nu}$, $\partial_{\lambda}g_{\mu\nu}(\mathrm{P})=0$ となる局所座標系として特徴付けられる．

このように，一般相対性原理と等価原理を満たし，さらに重力場が時空計量のみで記述される理論を**一般相対性理論**という．一般相対性理論では，それまでの理論と異なり，時空は計量により記述される非自明な構造をもち，しかもその構造は可変となる．その理由は，重力場の方程式の構造に起因する．一般相対性理論では，計量の振舞いは次のアインシュタイン方程式により決定される：

$$R_{\mu\nu}-\tfrac{1}{2}Rg_{\mu\nu}=\kappa^2T_{\mu\nu} \tag{19}$$

ここで，$\kappa^2=8\pi G/c^4$, $T_{\mu\nu}$ は物質のエネルギー運動量テンソル，$R_{\mu\nu}$ と R はリッチ（Ricci）曲率テンソルとスカラ曲率で，リーマン曲率テンソル

$$R^{\mu}{}_{\nu\lambda\sigma}=2\partial_{[\lambda}\Gamma^{\mu}_{\sigma]\nu}+2\Gamma^{\mu}_{[\lambda|\alpha|}\Gamma^{\alpha}_{\sigma]\nu} \tag{20}$$

の縮約により，$R_{\mu\nu}=R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu}$, $R=g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ で定義される．この曲率テンソルは，ミンコフスキー時空に対してはゼロであるが，逆に，ある単連結領域でゼロなら，その領域で $g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}$ となる局所座標系が存在する[2]．すなわち，時空の非自明性（＝非平坦性）を判定する完全な指標となる．したがって，アインシュタイン方程式は，物質のエネルギーが時空構造のひずみを生み出すこと，すな

わち物質が時空に作用することを意味する．

さらに，この時空構造のひずみは独自の力学的自由度をもつ．これを見るため，時空計量 $g_{\mu\nu}$ がミンコフスキー計量 $\eta_{\mu\nu}$ からわずかにずれているとして，そのずれを $h_{\mu\nu}=g_{\mu\nu}-\eta_{\mu\nu}$ とおく．このとき，アインシュタイン方程式を $h_{\mu\nu}$ について展開して，1次の項を取り出すと，$\psi_{\mu\nu}=h_{\mu\nu}-h^{\alpha}_{\alpha}\eta_{\mu\nu}/2$ に対して，次の線形摂動方程式を得る[2]：

$$\left[-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\triangle\right]\psi_{\mu\nu}=-2\kappa^2 T_{\mu\nu}. \qquad (21)$$

ただし，一般相対性理論では一般共変性のため，摂動方程式は座標変換と同じ4自由度のゲージ自由度をもつ．このゲージ自由度を制限するため，ここではゲージ条件 $\partial^{\nu}\psi_{\mu\nu}=0$ を課している．

この方程式は電磁波の方程式と同様の波動方程式であり，時空構造のひずみ $h_{\mu\nu}$ が光速で伝搬することを示している（**重力波**）．すなわち，等価原理を満たし一般共変性を持つ理論では，時空はもはや物質を入れるための単なる容器ではなく，動的な実体となるのである．残念ながら，重力波の直接検出にはいまだ成功していないが，連星パルサーの周期変化は一般相対性理論の予言と高い精度で一致しており，重力波の間接的存在証明となっている．また，ビッグバン宇宙論，さらにはインフレーション宇宙論の成功は，時空構造が動的に変化することの明確な証明と言える．

4. 量子論における時空

一般相対性理論やその様々な共変的拡張は，古典的には完全に整合的な重力理論である．しかし，それらの量子論を作ろうとすると，深刻な問題が発生する．まず，時空計量が力学変数となると，粒子の位置にあたる計量と速度にあたるその微分係数の一部が非可換となり，同時に値が確定しなくなる．これは，微局所慣性系が操作的には確定できないことを意味する．

この問題に対する一つのアプローチは，摂動論である．すなわち，量子時空をある古典的な背景時空からの小さなゆらぎとして捉え，そのゆらぎの量子論を作る方法である．このアプローチでは，背景時空は実体ではなく，自然記述の戦略となる．ただし，一般相対性理論は摂動的量子化では繰り込み可能でない．すなわち，量子補正の発散を吸収するには無限個の結合係数を持つ理論に拡張することが必要となる．これは，理論が有限回の実験では確定できず，予言可能性を持たないことを意味する[*7]．

この困難は，一般相対性理論の非摂動論的量子化により解決される可能性は残されている．例えば，アシュテカ（Abhay Ashtekar, 1949–）らはこの立場からループ量子重力理論の研究を推進している[3]．しかし，ゴールからほど遠い状況にある．原因は，古典的な時空描像との対応付けができないことにある．

整合的な重力の量子論を作るもう一つの道として，一般相対性理論とは全く異なった枠組みから出発するアプローチがある．超弦理論はその代表例である[4]．ただし，現時点では，超弦理論は固定された背景時空でのひもの量子論となっており，ひもの運動により重力波を記述することができるが，ひもの状態が時空構造に直接影響を与えることはない．この理論では，整合的なひもの量子論が可能かどうかで，許される背景時空が制限されるのみである．その意味で，時空は完全に戦略的な手段に過ぎない．

量子重力の世界では，時空は再び戦略的存在に戻ってしまうのであろうか？ 究極理論としての整合的量子重力理論を構築するには，この問いにまず答えなければならないであろう．

*7) ホジャバ（Petr Hořava）理論など絶対空間を復活させ一般共変性を破ることにより，摂動論的に繰り込み可能な量子重力理論を作る試みもある．

参考文献

1) 小玉英雄：「群と相対性理論」数理科学 2013 年 7 月号．
2) 小玉英雄：『相対性理論』（培風館，1997）．
3) Ashtekar, A.: *Lect. Notes Phys.* **863**, 31–56 (2013).
4) Polchinski, J.: *String Theory* (Cambridge Univ. Press, 1998).

（こだま・ひでお，高エネルギー加速器研究機構）