アインシュタインの特殊相対性理論

空間的に離れた2点の同時性の問題

小玉 英雄

特殊相対性理論は，次の2つの基本要請を満たす物理法則の全体を記述する枠組みである：

> **特殊相対性理論の公理**
> **特殊相対性原理**：すべての慣性系で物理法則は同じ表式で表される．
> **光速不変性**：すべての慣性系で真空中の光速は方向によらず同じである．

この理論は，最初，1905年にアインシュタインにより「運動する物体の電気力学」として発表されたが[1)]，これは，当時知られていた自然界の力ないし相互作用が，電磁相互作用と重力相互作用のみであったことに起因する．実際，現在では，重力を除くすべての相互作用を記述する理論形式として用いられている．

特殊相対性理論の要請は，一見，さほど強力には見えない．しかし，結果として，ニュートン理論の基礎となっていた時間空間の概念を大きく変革することになった．その最大の要因は，ニュートン理論には存在しない2番目の光速不変性の要請にある．本稿では，この要請がもたらした時間空間概念の変革について，同時性の問題を中心として解説する．

1．時計の同期化と慣性座標系

特殊相対性理論の公理では，「慣性系」がキーワードとなっているが，その定義は与えられていない．この状況は，ニュートン理論と似ている．実際，ニュートンの運動法則は，次の公理で与えられるが，これらの法則がどのような基準系で成り立つのかが書かれていない．

> **ニュートン力学の公理**
> **第1法則**（慣性の法則）質点は，力を受けない限り，速度を保つ．
> **第2法則**（運動方程式）質点の加速度を $\boldsymbol{a}$，質量を m，質点に作用する力を $\boldsymbol{F}$ とすると き，$m\boldsymbol{a}=\boldsymbol{F}$.
> **第3法則**（作用反作用の法則）2つの質点の間に力は，向きが反対で同じ大きさをもつ．

しかし，よく見てみると，実は，第1法則がこれらの法則が成り立つ基準系を間接的に指定していることに気づく．実際，ある基準系でこの法則が成り立つとき，それに対して加速する基準系ではもはやこの法則が成り立たないのは明らかである．すなわち，残りの2法則は，慣性の法則が成り立つ基準系である慣性系，より正確にはそれに付随する慣性座標系において成立するということになる．

この観点から特殊相対性理論の公理を見ると，慣性の法則の代わりに，光速不変性の要請が慣性座標系を定義していることが分かる．そこで，アインシュタインは光速不変性が具体的に慣性座標系の関係をどのように規定するかを詳しく調べ，ニュートン物理とは大きく異なる時空概念に到達

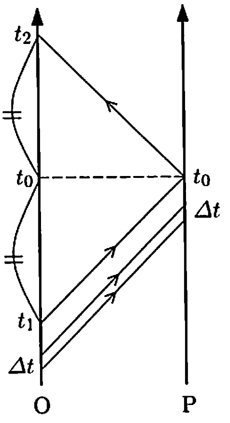

図 1　時計の同期化．

したのである．この研究において，徹底した実証主義者である彼は，まず出発点として，光速不変性に基づいて慣性座標系を実際に構成する方法を考えた[*1)1)]．

物理法則を記述する座標系は時間座標と空間座標からなり，通常，両者は性質の異なるものとして扱われる，まず，時間座標は時計の読みにより決定されるが，一個の時計だけではその位置での時間しか決まらない．したがって，任意の点における時間座標を定義するには，原理的には，空間の各点で時計を用意する必要がある．さらに，これらの時計は「正しい」時計で，その進みや時刻の原点が揃っていないといけない．この揃った時計を用意する操作を**時計の同期化**と呼ぶ．

この同期化は原理的には次の方法で実現される（図 1 参照）．まず，時間の進みの同期は，空間の原点 O に一個「正しい」時計（標準時計）を用意し，それを基準にして光により他の時計に時報を送ることにより行う．次に，原点以外の時計間で時報を交換し，進みが合っているかどうかを確認する．相対的に運動している時計では，この際に進みが合わなくなる．したがって，この操作で，標準時計に対して相対的に静止した時計の集団が選ばれる．次に，時刻の原点の調節であるが，これは，原点にある標準時計から送られた時報を各点の時計から送り返してもらうことにより実現される．すなわち，時計 O から時刻 t_1 に出た信号が，時計 P にその時刻で t_0 に届き，それを送り返した信号が t_2 に原点に戻るとき，$(t_1+t_2)/2=t_0$ となるように時計 P の時刻の原点を調節するのである．この操作を，すべての時計の組で行い，矛盾がないかを確認する．

特殊相対性理論の公理が成り立ち，かつ時間空間が均一である限り，以上の操作により整合的に同期化された時計の集団が定義され，各時計が「空間点」を定義されるはずである．逆に，この同期化ができない場合，特殊相対性理論は成り立たないことになる．実際，一般相対性理論では，重力場が存在すると時間空間が不均一となり，このような時計の同期は失敗する．例えば，非回転的な天体の作る静的重力場中では，上の同期操作は可能であるが，同期された異なる点の時計を同じ点に持ってくると，両者の進みは一致しない．これは，重力赤方偏移のためで，この場合には同期化された時間空間座標において物理法則の空間的一様性が破れることになる．また，回転する天体の作る重力場中では，時間の進みの同期化は可能であるが，時刻の原点を整合的に同期化することはできない[2)]．すなわち，同時性の概念は大域的にはそもそも存在しない．

次に，空間座標（の差）は空間的距離ないし長さと対応する．空間を時計の集団として仮想的に実体化すると，各時計にラベル (x,y,z) を与えることにより空間座標が定義される．そして異なる時計の座標差 $(\Delta x,\Delta y,\Delta z)$ を用いてそれらの距離を $\Delta l=(\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2)^{1/2}$ により定義すると，それから導かれる幾何学はユークリッド幾何学となる．ただし，ここでの空間座標の取り方はほぼ任意に近い．しかし，光速不変性を要求すると，座標系は非常に制限される．実際，光速の値を c と表すと，空間の 2 点 P と Q の空間的距離 Δl は，上で述べた時計の同期化の下で，点 P から送られた光の信号が点 Q に届くのに要する時間 Δt を用いて，$\Delta l=c\Delta t$ と表される．したがって，任意の 2 点間の距離が決まるので，この距離が上記のユークリッド距離と一致することを要求すると，

*1）以下，特に断らない限り，光は真空中で伝播するものとする．

空間座標系 (x, y, z) は回転，反転と並進の自由度を除いて一意的に決まる．すなわち，光速不変性が成り立つなら，時計と光信号のみで長さを定義することができ，物差しは不要となる．この観点から，現在の国際単位系では，光速の値は測定値ではなく，固定された定数 $c = 299,792,458$[m/s] となっており，1 秒 (s) は Cs^{133} 原子のスペクトルにより物理的に定義されているが[*2]，1 m は 1 秒間に真空中で光の走る距離 ÷ c と定義されている．

以上見てきたように，光速不変性の要請は，(原理的にではあるが) 操作的に慣性座標系を選別することを可能にするが，この操作的定義は，特殊相対性理論では時間の概念が局所的であることを示している．すなわち，各事象の起きた時間は，その事象の起きた場所にある時計でのみ計測可能であり，空間的に異なる位置で起きた事象の発生時刻の比較は，最終的に，時計の同期化に相当する光信号の交換によって初めて可能となる．この時間の局所性は，特殊相対性理論により記述される現象の理解において大変重要となる．

2. ローレンツ変換

光速不変性は，異なる慣性座標系での光速が一致することを要求するが，この要求は異なる慣性座標系間の変換則をほぼ一意的に決定する．

慣性座標系 S:$(x^a; a = 0, 1, 2, 3) = (ct, x, y, z) = (ct, \boldsymbol{r})$ において，点 $(ct_0, \boldsymbol{r}_0)$ を通過する光波面の軌跡は，$(\Delta x^0, \Delta \boldsymbol{r}) = (c(t - t_0), \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)$ を用いて

$$\Delta s^2 := \eta_{ab} \Delta x^a \Delta x^b = 0 \qquad (1)$$

と表される[*3]．ここで，η_{ab} は次の対角型行列の成分である：

$$(\eta_{ab}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

この光波面の伝播を別の慣性座標系 S':$(ct', \boldsymbol{r}')$ で記述すると，$(\Delta x'^0, \Delta \boldsymbol{r}') = (c(t' - t'_0), \boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}'_0)$ を用いて

$$\Delta s'^2 := \eta_{ab} \Delta x'^a \Delta x'^b = 0 \qquad (3)$$

と表される．2 つの座標系の間の変換則を一般に $x'^a = x'^a(x)$ と表すとき，$\Delta x^a \to 0$ の極限で 2 つの方程式が同値になる条件は，

$$\eta_{cd} \frac{\partial x'^c}{\partial x^a} \frac{\partial x'^d}{\partial x^b} = \sigma(x) \eta_{ab} \qquad (4)$$

となる．ここで，$\sigma(x)$ は正の任意関数である．

この条件を満たす変換のうち，時間空間全体で定義される正則な変換は，σ が定数のときにのみ存在し，次の 1 次変換で表されることが示される[3]：

$$x'^a = \sigma(\Lambda^a{}_b x^b + A^a). \qquad (5)$$

ここで，$\Lambda = (\Lambda^a{}_b)$ は次の条件を満たす行列である：

$$\eta_{ab} \Lambda^a{}_c \Lambda^b{}_d = \eta_{cd}. \qquad (6)$$

この変換で $\sigma = 1$ とおいたものは，一般ローレンツ変換ないしポアンカレ変換と呼ばれる．

この一般式では，ローレンツ変換がどのような構造をしているのか分かりづらい．そこで，この変換が t と空間座標の 1 成分 x のみの間の変換となる場合 (特殊ローレンツ変換) について，その表式を具体的に求めてみよう．このとき，$(\Lambda^a{}_b)$ $(a, b = 2, 3)$ は 2 次の単位行列となるので，(6) は

$$(\Lambda^0{}_0)^2 - (\Lambda^1{}_0)^2 = 1, \quad \Lambda^0{}_0 \Lambda^0{}_1 = \Lambda^1{}_0 \Lambda^1{}_1,$$
$$(\Lambda^1{}_1)^2 - (\Lambda^0{}_1)^2 = 1$$

となる．この一般解は，

$$\Lambda^0{}_0 = \epsilon_0 \cosh\lambda, \quad \Lambda^0{}_1 = -\epsilon_0 \sinh\lambda,$$
$$\Lambda^1{}_0 = -\epsilon_1 \sinh\lambda, \quad \Lambda^1{}_1 = \epsilon_1 \cosh\lambda$$

で与えられる．ここで，$\epsilon_0, \epsilon_1 = \pm 1$ で，λ は任意定数である．座標表示では，

$$ct' = \epsilon_0 \gamma(ct - \beta x) + A^0, \qquad (7a)$$
$$x' = \epsilon_1 \gamma(x - \beta ct) + A^1, \qquad (7b)$$
$$y' = y + A^2, \quad z' = z + A^3. \qquad (7c)$$

ここで，$\beta = \tanh\lambda$ で，γ は β を用いて

*2) $1\,s = Cs^{133}$ 原子の基底状態超微細構造準位間遷移により放射される電波の周期 × 9,192,631,770.

*3) 以下，同じ項で 2 度現れる添え字についてはその添え字の動く範囲について和を取るというアインシュタインの和の規約を用い，和の記号を省略する．

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{8}$$

で与えられる．慣性座標系 S′ の原点 $x' = 0$ は，慣性座標系 S から見ると，$x = \beta ct + \text{const.}$ と表されるので，β は S′ の S に対する速度 v を用いて，$\beta = v/c$ と表されることがわかる．A^0, A^1 は明らかに，座標系 S′ の原点の自由度を表す．また，符号 ϵ_0, ϵ_1 は，それぞれ，時間と空間の向きと対応する．

相対速度ベクトルと座標軸の関係が一般の場合のローレンツ変換は，適当な空間座標軸の回転により，この特殊な場合に帰着される．具体的な表式は，慣性座標系 S′ の慣性座標系 S に対する速度ベクトル $\boldsymbol{v} = c\boldsymbol{\beta}$ と空間座標の回転・反転を表す直交行列 R を用いて次式で与えられる[2]：

$$ct' = \epsilon_0\gamma(ct - \boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{r}) + A^0, \tag{9a}$$

$$\boldsymbol{r} = R\left(\boldsymbol{r} + \frac{\gamma^2}{1+\gamma}(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{\beta} - \gamma\boldsymbol{v}t\right) + \boldsymbol{A}. \tag{9b}$$

3. 同時性と因果律

特殊ローレンツ変換 (7) を，ニュートン理論における慣性系の変換則であるガリレイ変換

$$t' = t + B^0, \quad x' = x - vt + B^1 \tag{10}$$

を比較すると，いくつかの大きな違いに気づく．まず，ガリレイ変換では，時間座標の差は不変に保たれる．これは，時間が空間と独立した絶対的で大域的な意味を持つことを意味する．これに対して，ローレンツ変換では，時間座標の変換に空間座標が混ざってくる．これは，特殊相対性理論では，時間は局所的でかつ基準系に相対的な概念で，時間と空間が不可分の関係にあることを意味する．

特に，ニュートン理論では絶対的な意味を持っていた同時性の概念は，特殊相対性理論では基準系に相対的な概念となる．実際，慣性系 S′ での 2 つの事象の時間差 $\Delta t'$ は，慣性系 S での対応する時間差 Δt と x 座標の差 Δx を用いて

$$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2}\right) \tag{11}$$

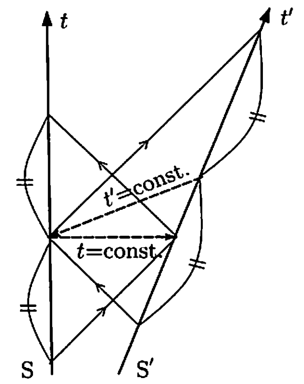

図 2　相対運動する観測者の同時面．

と表される．明らかに，$v \neq 0$ のとき，慣性系 S で同時（$\Delta t = 0$）でも，2 点が空間的に離れていると，$\Delta t' \neq 0$ となり，慣性系 S′ から見ると同時ではなくなる（図 2 参照）．このため，時間座標による未来，過去の区別は，観測者に依存することになり，絶対的な意味を失う．

この結果は，因果律に重大な影響を及ぼす．ニュートン理論では，原因，結果の区別が時間的順序により決まることを自然法則の因果律と見なす．特殊相対性理論では，もはや，この意味での因果律は成立しない．しかし，よく見てみると，少し違った形の因果律が成り立つことが分かる．

これを見るために，ローレンツ変換の式 (9) に戻ろう．この式において，$\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$ は $|\boldsymbol{\beta}| > 1$，すなわち $|\boldsymbol{v}| > c$ となる場合，虚数となり，関係式が意味を失う．これは，相対速度が光速を超える慣性系が存在しないことを意味し，粒子の速度が光速を超えられないことを示唆する．

同じ結論は，粒子の運動量についての考察からも得られる．特殊相対性理論では，粒子の運動に沿った（無限小）時間間隔 dt や（無限小）空間距離 $|d\boldsymbol{r}|$ はローレンツ変換で変化するが，ローレンツ変換の定義より，

$$ds^2 = -c^2dt^2 + d\boldsymbol{r}^2 \tag{12}$$

の値は不変に保たれる．$ds^2 < 0$ のとき，この不変量を用いて $d\tau^2 = -ds^2/c^2$ で定義される（無限小）時間間隔 $d\tau$ は，各瞬間で粒子に対して静

止した標準時計で計った時間間隔と一致し，その積分で定義される時間 τ は粒子の固有時と呼ばれる．この固有時を用いて，

$$u^0 = c\frac{dt}{d\tau} = c\gamma, \quad u^i = \frac{dx^i}{d\tau} = \gamma v^i \qquad (13)$$

で定義される 4 成分ベクトル $(u^a) = (u^0, u^i)$ は，ローレンツ変換に対して 4 次元時空のベクトル (4 元ベクトル) として変換する：

$$u'^a = \Lambda^a{}_b u^b. \qquad (14)$$

粒子が静止しているときの質量 m_0 を不変定数とすると，$p^a = m_0 u^a$ はローレンツ変換に対して 4 元ベクトルとして変換し，速度が小さい極限で，その空間成分はニュートン理論における運動量ベクトルと一致する：

$$\beta \ll 1 \implies \boldsymbol{p} \to m_0 \boldsymbol{v}. \qquad (15)$$

また，その時間成分は，同じ極限で

$$\beta \ll 1 \implies cp^0 \to m_0 c^2 + \frac{m_0}{2} v^2 \qquad (16)$$

となる．そこで，一般の運動状態においても，$\boldsymbol{p}$ を運動量，$cp^0 - m_0 c^2$ を運動エネルギーと定義する．このとき，p^a が 4 元ベクトルとして振る舞うので，粒子系における総運動量 $\boldsymbol{P} = \sum \boldsymbol{p}$ の保存則がすべての慣性系で成り立つことより，$P^0 = \sum p^0$ の保存則が得られる．したがって，m_0 が反応で Δm_0 だけ変化すると，$\Delta m_0 c^2$ に相当する運動エネルギーが得られるという有名なアインシュタインの関係式が導かれる．この静止質量のエネルギーと運動エネルギーの総和をエネルギー E と定義すると，$p^0 = E/c$ と表される．

このように定義された粒子の運動量とエネルギーは，静止質量と速度を用いて

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} = \gamma m_0 \boldsymbol{v}, \quad E = mc^2 = \gamma m_0 c^2 \qquad (17)$$

と表される．明らかに，粒子の速度が光速を超えると，γ が虚数となるので，エネルギーや運動量が実数とすると，静止質量も虚数となる．これは，このような粒子が存在するとすると，それは慣性系に対して静止できないことを意味する．このような粒子は，**タキオン**と呼ばれる．

これまで安定なタキオンの存在を示す事実はないので，タキオンが存在しないとすると，光速がすべての粒子の速度の上限となる．すなわち，エネルギーを伴った情報は光速以下の速度でしか伝播しない．そこで，ある時空点 O を基点として，時空においてその点を通過する光線の軌跡の全体が作る光円錐 $C : c^2(\Delta t)^2 = (\Delta \boldsymbol{r})^2$ により，時空を 3 つの領域 $J^+(\mathrm{O}) : c\Delta t \geq |\Delta \boldsymbol{r}|$, $J^-(\mathrm{O}) : c\Delta t \leq -|\Delta \boldsymbol{r}|$, $S(\mathrm{O}) : c^2(\Delta t)^2 < (\Delta \boldsymbol{r})^2$ に分けると，O からの情報は $J^+(\mathrm{O})$ のみに伝わることになる．また，$J^-(\mathrm{O})$ のみが O に影響を与え，$S(\mathrm{O})$ に属する点 P と点 O の間で因果的関係が生まれることはない．光円錐はローレンツ変換で不変なので，この光円錐を基準とした因果関係は，慣性座標系の取り方によらない意味をもつ．したがって，特殊相対性理論でも因果律が成り立つことになる．$J^+(\mathrm{O})$, $J^-(\mathrm{O})$ および $S(\mathrm{O})$ は，それぞれ，時空点 O の**因果的未来**，**因果的過去**，**空間的領域**と呼ばれる (図 3)．

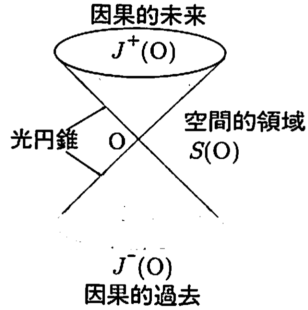

図 3　特殊相対性理論の因果構造．

このように，ニュートン理論では空間的面で表された同時関係が，特殊相対性理論では空間的領域 $S(\mathrm{O})$ に拡大されるが，実は，ニュートン理論の同時面は，光速が無限大となった極限において，$S(\mathrm{O})$ が面につぶれたものと見なすことができる．実際，一般ローレンツ変換 (9) において，$t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}$ を一定にして $c \to \infty$ の極限をとると，ガリレイ変換が得られることが容易に確かめられる．

4. 双子のパラドクス

ローレンツ変換とガリレイ変換のもう一つの大

きな違いは，2つの事象の時間間隔や空間的距離が観測者により変化することである．例えば，変換(7)において，慣性系 S′ の原点に静止した時計の進み $\Delta t'$ は，$\Delta x = v\Delta t$ を用いると，Δt により

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma} \tag{18}$$

と表される．これは，慣性系 S に対して速さ v で運動する時計の進みが，S の時計の $1/\gamma$ 倍に遅くなることを意味する．

ただし，この運動する時計の遅れの公式を等速直線運動以外の一般的な運動に適用する際には注意を要する．その代表例が，有名な**双子のパラドクス**である．

地球で生まれ育った双子の兄弟の太郎と次郎のうち，次郎が宇宙旅行に出かけるとする．簡単のため，地球は慣性系でよく近似されるとする．また，次郎は，地球と別の天体の間を等速 v で往復するとする．このとき，太郎を S，次郎を S′ として上の公式を適用すると，出発してから再会するまでに太郎の時計でかかった時間 Δt_{T} と次郎の時計で計った時間 Δt_{J} は，$\Delta t_{\mathrm{J}} = \Delta t_{\mathrm{T}}/\gamma$ の関係で結ばれることになる．常に，$\gamma > 1$ なので，これは，再会したとき，次郎が太郎より若くなることを意味する．一方，行きと帰りのそれぞれでは次郎は太郎に対して等速直線運動しているので，次郎を基準にして考えると，今度は，太郎が次郎に対して一定速度 v で往復運動することになる．したがって，公式より，今度は $\Delta t_{\mathrm{T}} = \Delta t_{\mathrm{J}}/\gamma$ となる．これは，太郎が次郎より若くなることを意味し，矛盾してしまう．

このパラドクスは，次のようにして解消される．図4を見て頂きたい．この図には，次郎が等速直線運動をしているときの同時面が破線で示されている．行きと帰りで運動方向が異なるので，同時面も変化する．その結果，図にあるように，太郎の世界線のうち，次郎の行きと帰りの行程と同時面で対応するのは太い実線で表される部分となる．最初の節で説明した同期化による時刻の大域的定義に基づくと，公式(18)は，時間 t を計る時計を基準として，その同時面により対応する運動する時計の時刻 t' と基準時計の時刻 t の進みの関係を表すものである．したがって，次郎を基準にした場合，$\Delta t_{\mathrm{T}} = \Delta t_{\mathrm{J}}/\gamma$ は，太郎の世界線のうち太線の部分と次郎が計った往復の時間を比較したもので，太郎の時計の経過時間の一部しか見ていないことになる．特殊ローレンツ変換の式より，次郎が天体に到着したときの同時面は，太郎の座標系で $ct = \beta x + \mathrm{const.}$ と表されるので，太郎の世界線のうち次郎の同時面でカバーできない部分での太郎の時間は，$\beta^2 \Delta t_{\mathrm{T}}$ となる．したがって，$\Delta t_{\mathrm{T}} = \Delta t_{\mathrm{J}}/\gamma + \beta^2 \Delta t_{\mathrm{T}}$ の関係が成り立ち，結局，常に慣性系にとどまる太郎を基準にした場合の結果と一致する関係 $\Delta t_{\mathrm{T}} = \gamma \Delta t_{\mathrm{J}}$ が得られる．すなわち，再会したとき次郎が太郎より若くなっているというのが正解であることが分かる．

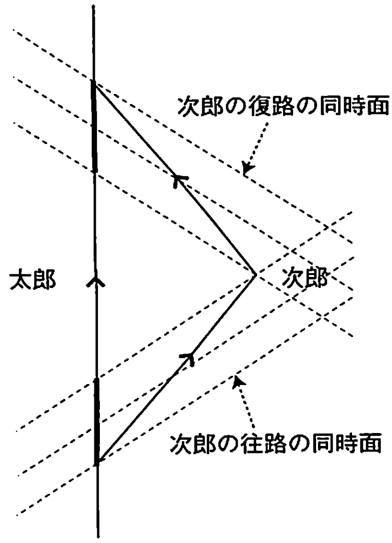

図4　双子のパラドクスにおける時間の比較．

5. 法則の局所性

ニュートン理論と特殊相対性理論における因果構造の違いは，物理法則の記述法に大きな違いを生み出す．まず，情報伝達速度が無限大のニュートン理論では，力も瞬時に伝わるため，粒子間の相互作用は同時刻での粒子間力により表される．ニュートン理論は，本質的に，すべての力が物体・物質を構成する要素的な質点ないし粒子の間の2

体力に還元できることを想定している．第1節にあげたニュートン力学の第3法則（作用反作用の法則）に，そのことが明確に反映されている．したがって，この2体力の振舞いを指定すれば，運動法則と合わせて物理法則が完結する．

これに対して，特殊相対性理論では光速という情報伝達の上限速度が存在する．このため，粒子Aの状態の変化が別の位置にいる粒子Bに伝わるには距離に比例した時間がかかる．粒子Bが粒子Aの作用で状態が変化すると，その影響がもとの粒子Aに伝わるにはさらに遅れが生じる．このような相互作用の遅延を2体力により記述しようとすると非常に複雑になる．

この問題を解消してくれるのが，場の概念である．すなわち，時空的に広がった新たな実体 $\phi(t,\boldsymbol{r})$ を導入し，粒子間の相互作用を粒子間力ではなく，この新たな実体である場と粒子の局所的な相互作用として記述することにする．この記述方法では，粒子Aの状態変化は，その時空点での場 ϕ の局所的な変動を生み出す．この変動は，場の独自の力学により時空を伝搬し，粒子Bの位置に到達すると，その状態を変化させる．

この方法では，物理法則は，場の粒子に対する作用を記述する力の方程式と，場の変動の粒子による生成と伝搬を記述する場の方程式という完全に局所的な2種類の方程式系で記述されることになる．例えば，荷電粒子系の相互作用を記述するには，電磁場を表す2階反対称テンソル場 F_{ab} を導入し，その電荷 q をもつ粒子に対する作用を

$$\frac{dp^a}{d\tau} = F^a. \quad F^a = \frac{q}{c}F^{ab}u_b \qquad (19)$$

により定義する．ただし，テンソルの添え字の上げ下げは，η_{ab} を用いるものとする．例えば，$u_a = \eta_{ab}u^b$．このとき，F_{ab} は，次のマクスウェル方程式に相当する場の方程式

$$\partial_a F_{bc} + \partial_b F_{ca} + \partial_c F_{ab} = 0, \qquad (20a)$$

$$\partial_b F^{ab} = J^a \qquad (20b)$$

に従う．ここで，$J^a = \sum_\alpha c^{-1} q_\alpha u_\alpha^a \delta^3(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_\alpha)$ は4元電流密度で，∂_a は座標による偏微分 ∂/∂_a を意味する．

この場の方程式の第1式は，よく知られているように，F_{ab} が電磁ポテンシャル A_a を用いて $F_{ab} = \partial_a A_b - \partial_b A_a$ と表されることと同等である．このポテンシャルのゲージ自由度 $A_a \to A_a + \partial_a \lambda$ を，条件 $\partial_a A^a = 0$ により部分的に固定すると，場の方程式の2番目の式は，波動方程式

$$\Box A_a \equiv \left(-\frac{1}{c^2}\partial_t^2 + \triangle\right) A_a = -J_a \qquad (21)$$

に帰着する．この波動方程式の一般解は

$$A_a(t,\boldsymbol{r}) = A_a^{(0)}(t,\boldsymbol{r}) + \frac{1}{4\pi}\int d^3r' \frac{J_a(ct - |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|, \boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \qquad (22)$$

で与えられる[2]．ここで，$A_a^{(0)}$ は $J^a = 0$ の場合の解である．この式の第2項は，電荷の運動の情報が光円錐 $c\Delta t = |\Delta \boldsymbol{r}|$ に沿って伝わることを示しており，上記の力の方程式に代入すると，粒子間の遅延相互作用による記述を与える．

このように，特殊相対性理論では，場はすべての相互作用を局所的な方程式により記述することを可能にするが，それは単に遅延相互作用を局所的な方程式で書くための数学的手段ではない．その理由は，(22)の第1項にある．この項は，電磁場が荷電粒子とは独立な力学自由度を持つことを表している．すなわち，特殊相対性理論では，光速不変性は相互作用の局所性を要求し，最終的にすべての相互作用に新たな力学的実体としての場が対応することになる．理論を量子化すると，これらの場には独自の量子＝粒子が対応するので，結局，すべての自然現象が粒子の生成・消滅と伝搬に帰着されることになる．光速不変性恐るべしである．

参考文献

1) Einstein, A.: Zur Electrodynamik bewegter Körper, *Annalen der Physik* **17**, 891-921 (1905).
2) 小玉英雄：『相対性理論』（培風館，1997）．
3) 小玉英雄：群と相対性理論，「数理科学」**601**, 20-25 (2013).

（こだま・ひでお，高エネルギー加速器研究機構）