量子重力理論

小玉英雄

素粒子相互作用の統一理論の構築と宇宙の初期における進化の研究という一見非常にかけはなれた二つの分野の発展を背景として，量子論の枠組に適合した重力理論を作ろうという試みが近年急速に注目を集めるようになった．本稿では，この量子重力理論の研究の背景と現状，及びその問題点について解説する．

§1. 量子重力理論はなぜ必要か

1.1 古典的動機

量子重力理論を作ろうとする試みは，一般相対論の誕生後間もない，特殊相対論的量子力学である場の量子論という理論形式の発見当時から存在していた．それは今世紀における物理学の基本的な理論形式の発展の構造から見れば自然な成りゆきと言える（第1表参照）．しかしこの試みは長い間大きな進展を見なかった．その理由としては二つのものが考えられる．

第一の理由は何といってもこの問題のむずかしさである．詳しくは以下で追って明らかにするが，場の量子論の誕生後約60年たった現在でも，量子重力理論は依然として完全にはほど遠いことからも，そのむずかしさはうかがい知れると思う．

第二の理由は，量子重力理論に特有の効果が当分実験や観測にはかからず，現実的には重要でないであろうという認識にある．このような効果が重要となると予想されるのは，素粒子レベルのミクロの世界である．ところが，素粒子間に働く重力は電磁力に比べて $Gm_p^2/e^2=\alpha^{-1}(m_p/M_{Pl})^2 \lesssim 10^{-36}$ (G は重力定数，m_p は陽子の質量，M_{Pl} はプランク質量 $(G/\hbar c)^{1/2} \simeq 10^{-5}$ g, α は微細構造定数) 程度と無視できるほど小さい．もちろん非常に高エネルギーの現象では非線形効果により重力の効果が重要となる可能性はある．その一つの目やすは，粒子の量子論的な広がりを表わすドゥ・ブローイー (de Broglie) 波長 $\hbar c/E$ (E は粒子のエネルギー) と重力の非線形性が重要となる典型的な長さであるシュヴァルツシルト半径$=GE/c^4$ とが一致するエネルギ

第1表　物理学の理論形式の発展の構造．

		電磁相互作用 ⇓	重力相互作用 ⇓	
古典論：	ニュートン力学 →	特殊相対論 →	一般相対論	
	↓	↓	↓	⇐ 物理量の離散性と不確定性関係
量子論：	非相対論的量子力学 →	場の量子論 →	?量子重力理論?	

東京大学理学部物理学教室
113 東京都文京区本郷 7-3-1

$-E \simeq E_{Pl} = M_{Pl}c^2 \simeq 10^{19}$ GeV で与えられる．E_{Pl} は現在の加速器技術でも当分到達できそうにない．

もちろん純理論的な面から見ると，量子重力理論の建設に対する積極的な理由がなかったわけではない．特に，重力の量子効果が，プランク長 $L_{Pl} = \hbar/M_{Pl}c \simeq 10^{-33}$ cm 以下のスケールでは時空構造の大きなゆらぎを生み出すことによって，粒子間の力が近距離で限りなく大きくなることに帰因する場の量子論特有の紫外発散をうまく取り除いてくれるのではないかという考えは，長い間多くの人々を魅了しつづけてきた．[1] 実際，部分的にこの考えを支持する結果も得られているが，[2] 技術的困難のために現在まで大きな進展はない．

1.2 現代的動機

量子重力理論に対する最近の急速な関心の高まりの原因は，以上のような古典的動機に加えて，近年の物理学の新たな展開によってもたらされた次の点にある．

1) 素粒子相互作用の統一理論の発展

近年の素粒子論における最大の成果は，ワインバーグ・サラム理論及び量子色力学に代表される，素粒子相互作用のゲージ理論による記述の成功である．この成功は，自然界の重力を除くすべての相互作用を一種類のゲージ相互作用によって記述しようという大統一理論 (GUT) を生み出した．[3] GUT の大きな特徴は，$M_{GUT} \gtrsim 10^{16}$ GeV という非常に高いエネルギースケールで相互作用の統一が起こることを予言している点にある．M_{GUT} はもはや M_{Pl} に比べてさほど小さくないために，GUT の研究にとっては重力の量子効果が必ずしも無視できなくなる．

この問題は，超重力統一理論 (SUGRA GUT)[4] や超弦理論 (SST)[5] などの重力を含む完全な統一理論を作ろうとする試みではさらに重要となる．これらの超統一理論では，重力を不可分な部分として含むために，量子効果の研究はそのまま量子重力理論の建設につながる．特に，量子論的に矛盾のないSSTを作るためにはゲージ群が非常に限定されるという最近の結果は，[6] 矛盾のない量子重力理論の建設が同時に重力以外の基本相互作用の構造を規定ないし限定する可能性を示唆している．この点は現代における量子重力理論の必要性に対する最大の根拠となっている．

2) 宇宙スケールの現象における重力の量子効果の役割

量子重力理論の必要性を多くの人々に認識させたもう一つの大きな要因は，Hawking によるブラックホールの量子論的蒸発という現象の発見である．[7] Hawking の研究は，古典的なブラックホール時空における物質量子場の研究に基づくものであるが，ブラックホールの蒸発過程を詳しく調べるためには量子場の時空構造への反作用を考慮することが必要であり，そこでは重力の量子効果が重要な役割を果たすようになる．[8]

ブラックホールの蒸発はもう一つやっかいな問題を引き起こす．ブラックホールの起源となる天体の重力崩壊では必ず，重力が限りなく強くなり古典的な時空構造の破綻する時空の特異点が生み出される．[9] 通常この時空の特異点は horizon と呼ばれる光の一方通行面で外界から隔離されると期待されるが（宇宙検閲仮定[10]），ブラックホールの蒸発はこの特異点を再びむき出しにしてしまう[11]（裸の特異点）．裸の特異点の外界への影響は古典論の範囲では予測不可能である．

このような局所的な現象と並んで，宇宙の初期の構造という大域的な問題でも重力の量子効果が重要となる可能性がある．一般相対論に従うと，我々の宇宙は有限な時間の過去に“無限の高密度の一点”から生まれたことになる．この宇宙誕生の時点では時空の曲率は無限に大きくなり（宇宙の初期特異点），時空構造に対する古典的記述は正当でなくなると考えられる．宇宙の初期特異点は，天体の重力崩壊のように horizon によってかくされることはないので，その構造は以後の宇宙進化，ひいては現在の宇宙の構造へ重要な影響を及ぼすことが予想される．

もちろん宇宙進化の過程で宇宙初期の情報が失われてしまう場合には，初期特異点の近傍の構造は観測不可能となる．実際，物質の量子効果[12]や，スカラー場のエネルギーの特異な振舞によって引き起こされる宇宙の指数関数的膨張の時代（宇宙のインフレーション）[13] の存在によって，宇宙初期の情報の一部ないしすべてが失われてしまう可能性が指摘されてきた．しかし最近の研究は，これらの効果がプランク時 $t \sim t_{Pl} = \hbar/M_{Pl}c^2 \simeq 10^{-43}$ s の頃に重要となり，やはり宇宙の初期特異点の近傍での重力の量子効果が重要であることを示唆している．[14,15]

§2. 現時点での主なアプローチ

2.1 準古典近似

量子重力理論の建設は量子論と一般相対論を融合す

ることを要求するが，それは必ずしも直ちに重力場を量子化することを意味するとは限らない.[16] また，最終的に重力場の量子化が必要であるとしても，重力場がさほど強くない場合には，物質の量子論的振舞への重力の効果を研究する上では，重力，したがって時空を古典的に扱うことがよい近似を与えると予想される．このような考え方に基づいて生み出されたアプローチが準古典近似に基づく曲がった時空における場の量子論である.[17]

このアプローチでは，重力場の物質量子場への作用は，一般共変性を指導原理として，ミンコフスキー(Minkowski)時空における場の方程式と交換関係を，曲がった時空へ一般化することにより決定される．一方，物質量子場の時空構造への反作用は，量子論的なエネルギー運動量テンソル $\hat{T}_{\mu\nu}$ の期待値を重力の源と見なすことにより決定される：

$$G_{\mu\nu}[g]=(8\pi G/c^4)\langle\hat{T}_{\mu\nu}\rangle:\quad G_{\mu\nu}\equiv R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R+\Lambda g_{\mu\nu}\,. \qquad (1)$$

曲がった時空における場の量子論は，量子場の反作用を無視した範囲では，膨張宇宙における粒子生成[18]やブラックホールの蒸発など様々な興味深い成果を生み出したが，反作用の研究が進むにつれて準古典近似の持つ困難が次々と明らかにされた．

1)　零点振動のせいで $\langle\hat{T}_{\mu\nu}\rangle$ はそのままでは発散しているため，正則化とくり込みが必要となる．ところがくり込みによってラグランジアンに付け加わる補正項は曲率テンソルの2次式となるので，アインシュタイン方程式は計量の4階微分方程式となってしまう.[19] この方程式に従うとミンコフスキー時空自体が不安定となってしまうことが示される.[20]

2)　正則化によって得られたエネルギー運動量テンソル $\hat{T}^{\rm reg}_{\mu\nu}$ は古典的な $T_{\mu\nu}$ と構造が大きく異なっているために方程式(1)がそもそも意味のある解を持つかどうか明らかでない．

3)　準古典近似では計量の量子状態への依存性が非線形であるために，量子論の基本原理である重ね合わせの原理が破れてしまう.[21] このことは，準古典近似の利用を注意深く行わねばならないことを意味すると同時に，通常の量子力学の枠内で重力場を古典的に扱う定式化の原理的困難を表わしている.[16]

このように，準古典近似に基づくアプローチはかえって重力場の量子化の必要性を強調する結果となった．

2.2　重力場の量子化

重力場を量子化する方法としてまず思いつく方法は正準量子化の方法である．しかし，この方法を重力場に適用しようとすると直ちに困難に直面する．計量テンソルの一部 $g_{0\mu}$ に対する正準共役運動量が零となってしまうのである．したがって通常の正準量子化の方法はそのままでは適用できない．もちろんこの種の問題は重力場特有のものではなく，すでに電磁場の量子化で経験しているもので，系のもつゲージ不変性，今の場合は一般座標変換に対する不変性の結果，変数の一部が力学的意味を失っているために生じたものである．

この問題に対処する方法としては現在大まかに分けて三つのアプローチが存在する．以下それらの概略を紹介しよう．

1)　<u>汎関数積分を用いた共変的定式化</u>

電磁場の場合の経験によれば，上記の困難を処理するには，ラグランジアンにゲージ不変性を破る項を付け加えればよい．実際，たとえば

$$\mathscr{L}\to\mathscr{L}'=\mathscr{L}+\mathscr{L}_{\rm GF}:\ \mathscr{L}_{\rm GF}=\frac{1}{\kappa^2}(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu})_{,\nu}b_\mu \qquad (2)$$

とすると(但し，全微分項を加えて $g_{\mu\nu}$ の2階微分の項を取り除いておく)，

$$\frac{\partial\mathscr{L}'}{\partial\dot{g}_{0\mu}}=-\sqrt{-g}\,g^{00}g^{\mu\nu}b_\nu \qquad (3)$$

となって補助場 b_μ に $g_{0\mu}$ の共役運動量の役割を荷なわせることができる．但しこの方法では $\mathscr{L}_{\rm GF}$ によって余分に付け加わった自由度を状態空間を制限することによって取り除かねばならない．そこで電磁場の場合に出会わなかった新たな問題が生じる．

電磁場の場合には補助場 B が他の成分と分離して自由場の方程式 $\Box B=0$ に従うおかげで，物理的に実現される状態の集合 $\mathscr{S}_{\rm phys}$ を B の正振動数部分 $B^{(+)}$ を用いて

$$B^{(+)}\mathscr{S}_{\rm phys}=0 \qquad (4)$$

という条件で定義すれば，$\mathscr{S}_{\rm phys}$ の上では場の方程式から $\mathscr{L}_{\rm GF}$ の寄与は姿を消し，しかも $\mathscr{S}_{\rm phys}$ 内での S 行列のユニタリ性が成立していた．ところが同じ方法を重力場に適用しようとするとうまくゆかない．それは，補助場 b_μ に対する方程式が $g_{\mu\nu}$ を含み(4)の形の条件が設定できなくなるためである．たとえば(5)の $\mathscr{L}_{\rm GF}$ に対して

$$g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta b_\mu=0 \tag{5}$$

となる．たとえ $t\to\pm\infty$ で $g_{\mu\nu}\to\eta_{\mu\nu}$（ミンコフスキー計量）となる場合でも，$t\to\pm\infty$ での b_μ の正振動数部分が一致しないために (4) の形の条件をユニタリ性をこわさずに設定することは不可能となる．

この困難は摂動論的方法を使ってすでに1963年に Feynman によって指摘されていた．[22] 彼の得た結論は，S 行列のユニタリ性とゲージ不変性を回復するためには，フェルミ統計に従うボース粒子という外線には現れないおばけ粒子のループをファインマン・グラフに加えねばならないというものであった．

この問題は重力のみでなく非可換なゲージ場に共通の困難であることが次第に明らかになるにつれ，S 行列に対するおばけ粒子を含む一般的なファインマン則を作ることが重要な問題となった．この問題は，De Witt の仕事[23]をへて，最終的に Faddeev と Popov により場の理論に対する汎関数積分表示の方法を用いて解決された．[24] 彼らの得た結論は，古典的な場の方程式の解 φ 中での $t\to\pm\infty$ における真空 $|\pm\rangle$ の間の遷移振幅 $\langle+|-\rangle_\varphi$ に対するゲージ不変な次の表式に集約される：

$$\langle+|-\rangle_\varphi\equiv e^{iW[\varphi]}=\int d[\phi]d[b]d[c]d[\bar{c}]\exp\left[i\int d^4x\mathscr{L}''\right], \tag{6}$$

$$\mathscr{L}''=\mathscr{L}[\phi+\varphi]+\mathscr{L}_{GF}[\phi;\varphi]+\mathscr{L}_{FP}[c,\bar{c};\varphi]. \tag{7}$$

$c,\bar{c}$ はおばけ粒子に対応する場，$\mathscr{L}_{FP}$ はそのラグランジアンで，$\mathscr{L}_{GF}$ により完全に決定される．グリーン関数及び S 行列は W を φ について汎関数微分することによって得られる（詳しくは文献25参照）．

2) 作用素を用いた共変的定式化

Faddeev-Popov の表式は，ファインマン則を導く上では完全であり，また理論のゲージ不変性を形式的に示す上では非常に便利なものであるが，数学的に明確に定義できない汎関数積分という表現を用いている点で，厳密な定式化を重んじる人々にとっては不満な点が残っていた．

この不満に対する部分的な解答は九後，小嶋らによって与えられた．[26] 彼らは (7) で与えられるラグランジアンが BRS 変換と呼ばれる特殊な超対称変換（ボース場とフェルミ場を入れ替える変換）に対して不変であることに着目し，この変換に対応する保存量 Q_{BRS} を用いて

$$Q_{BRS}\mathscr{S}_{phys}=0 \tag{8}$$

によって $\mathscr{S}_{phys}$ を選ぶと，ユニタリ性とゲージ不変性を満たす非可換ゲージ場の量子論が構成できることを示した．この方法は中西らによって直ちに重力場に拡張された．[27]

九後-小嶋-中西の定式化は，状態空間とその作用素のみに基づくという点で形式的には満足のゆくものとなっている．しかしこの定式化は，量子重力効果についての具体的な計算においては，今の所，作用素の順序の問題に悩まされない汎関数積分法による定式化を超えていないように思われる．

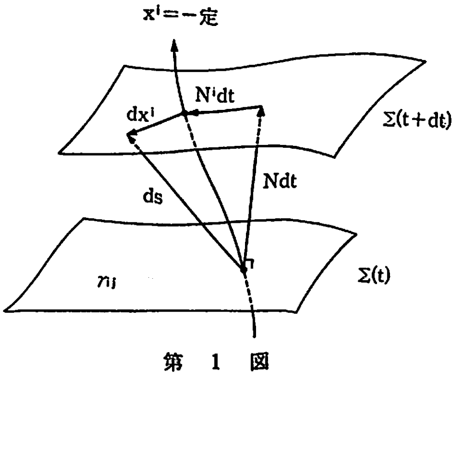
3) superspace を用いた幾何学的定式化

一般相対論では，重力場は時空の構造を記述するという物質場にない特質を持っている．以上の共変的定式化は，散乱理論のように，十分遠方で時空がミンコフスキー時空に近づくような場合をもっぱら対象としており，重力場のもつ幾何学的特質が量子重力理論の中でどのような形で反映されるかを明らかにするのには適していない．このような一般相対論の幾何学的側面に重点を置くのが superspace を用いた定式化である．

この方法は次の式で定義される時空の (3+1) 分解を出発点とする．

$$g_{00}=-N^2+N_kN^k,\quad g_{0i}=N_i,\quad g_{ij}=\gamma_{ij}.\quad (i,j=1\sim3) \tag{9}$$

ここで $N^j=\gamma^{ji}N_i$, $\gamma^{ik}\gamma_{kj}=\delta_j{}^i$ である．N および N_i はそれぞれラプス (lapse) 関数，シフト (shift) ベクトルと呼ばれ，隣り合った時間 $t=$ 一定面 $\Sigma(t)$ の間の距離，および空間座標 $x^i=$ 一定の曲線の方向が $\Sigma(t)$ の法線方向からの どの程度ずれるかを表わしている（第1図参照）．すなわち，時空への座標づけの仕方を表現している．N, N_i, γ_{ij} を用いて重力を含む系のラグラン



第 1 図

ジアンを書き下すと,

$$\mathscr{L}=\frac{\sqrt{-g}}{2\kappa^2}R+\mathscr{L}_{\rm m}$$
$$=N\gamma^{1/2}(K_{ij}K^{ij}-K^2+{}^3R)+\mathscr{L}_{\rm m}+(\text{全微分項}) \quad (10)$$

($\kappa^2=8\pi G$, $\mathscr{L}_{\rm m}$ は物質のラグランジアン)

となる. ここで ${}^3R$ は $\Sigma(t)$ の3次元計量 γ_{ij} に対する曲率スカラー, K_{ij} は $\Sigma(t)$ の第2基本形式

$$K_{ij}=\frac{1}{2N}(N_{i|j}+N_{j|i}-\dot{\gamma}_{ij});\ K^{ij}=\gamma^{ik}\gamma^{jl}K_{kl},\ K=\gamma^{ij}K_{ij} \quad (11)$$

($|$ は γ_{ij} に関する3次元共変微分) である.

まず, N 及び N_i に対する形式的な正準共役運動量 π, π^i を導入し, これと γ_{ij} に対する正準共役運動量 $\pi^{ij}=-\gamma^{1/2}(K^{ij}-\gamma^{ij}K)$ ($\gamma=\det(\gamma_{ij})$) の全体に通常の正準交換関係を課す. 余分な自由度 π, π^i は状態空間を

$$\pi\mathscr{S}_{\rm phys}=0,\quad \pi^i\mathscr{S}_{\rm phys}=0 \quad (12)$$

という条件で $\mathscr{S}_{\rm phys}$ に制限することによって取り除く.

ハミルトニアン H を形式的に

$$H\equiv\int(\dot{N}\pi+\dot{N}_i\pi^i+\dot{\gamma}_{ij}\pi^{ij}+\dot{\Phi}\Pi)\,{\rm d}^3x-\int{\rm d}^3x\,\mathscr{L}$$
$$=\int{\rm d}^3x\,[\dot{N}\pi+\dot{N}_i\pi^i+N\mathscr{H}+N_i\chi^i] \quad (13)$$

によって定義する. ここで Φ と Π は物質場に対する正準変数で $\mathscr{H}$ と χ^i は次式で表わされる:

$$\mathscr{H}\equiv\gamma^{1/2}(K_{ij}K^{ij}-K^2-{}^3R)+\mathscr{H}_{\rm m}, \quad (14)$$
$$\chi^i\equiv-2\pi^{ij}{}_{|j}+\chi_{\rm m}{}^i. \quad (15)$$

(14), (15) において $\mathscr{H}_{\rm m}$, $\chi_{\rm m}{}^i$ は物質場の寄与で一般に γ_{ij}, Φ, Π のみで表わされる.

(12) の条件が H から得られる正準方程式と矛盾しないためには, $\mathscr{S}_{\rm phys}$ をさらに

$$\pi_i\mathscr{S}_{\rm phys}=0\ \rightarrow\ \chi^i\mathscr{S}_{\rm phys}=0, \quad (16)$$
$$\dot{\pi}\mathscr{S}_{\rm phys}=0\ \rightarrow\ \mathscr{H}\mathscr{S}_{\rm phys}=0 \quad (17)$$

によって制限しなければならない. (12), (16), (17) の条件を課すと正準運動方程式は $\mathscr{S}_{\rm phys}$ 上で古典的なアインシュタイン方程式と一致する.

このようにして得られた正準量子論は興味深い特徴をもっている. それは, $\mathscr{S}_{\rm phys}$ に属する状態 $|\Psi\rangle$ に対してシュレーディンガー方程式が

$${\rm i}\frac{\partial}{\partial t}|\Psi\rangle=H|\Psi\rangle=0 \quad (18)$$

となってしまい, シュレーディンガー表示のもとでも状態が時間に依存しなくなってしまうことである. これは, 一般相対論では時間座標が単に形式的なパラメターの意味しかもたないことの反映である. 物理的な時間は系の一部を時計として利用することによって初めて定義される系に内在的なものである (但し漸近的に平坦な時空のように時間が境界条件によって固定されている場合は状況が異なる[23]). したがって, 拘束条件 (12), (16), (17) のみが系の力学的内容を表わすことになる.

これらの条件は, 状態を $N(x), N_i(x), \gamma_{ij}(x), \Phi(x)$ の作る関数空間上の波動関数 $\Psi[N, N_i, \gamma_{ij}, \Phi]$ を用いて表わすと簡単な形で表現される. 対応関係

$$\pi\rightarrow\frac{1}{\rm i}\frac{\delta}{\delta N},\quad \pi^j\rightarrow\frac{1}{\rm i}\frac{\delta}{\delta N_j},\quad \pi^{jk}\rightarrow\frac{1}{\rm i}\frac{\delta}{\delta\gamma_{jk}},\quad \Pi\rightarrow\frac{1}{\rm i}\frac{\delta}{\delta\Phi} \quad (19)$$

に着目すると, 条件 (12) は Ψ が N, N_j に依存しないことを表わしている. さらに空間座標の無限小変換: $x^j\rightarrow x^j+\xi^j$ に対する波動関数の変化が

$$\delta\Psi=\int{\rm d}^3x\,\xi_i\chi^i\Psi \quad (20)$$

と表わされることが示されるので, 条件 (16) は Ψ が空間座標の取り方に依存しないことを意味している. これより Ψ を空間の幾何学的構造 $\mathscr{G}$ 及び Φ の作る空間, すなわち superspace 上の波動関数と見なすことができる. したがって結局, superspace 上の方程式 $\mathscr{H}\Psi=0$, すなわち

$$\left[G_{jkln}\frac{\delta}{\delta\gamma_{jk}}\frac{\delta}{\delta\gamma_{ln}}+\gamma^{1/2}\,{}^3R-\mathscr{H}_{\rm m}\left(\Phi,\ \frac{1}{\rm i}\frac{\delta}{\delta\Phi}\right)\right]\times\Psi[\mathscr{G},\Phi]=0; \quad (21)$$

$$G_{jkln}=\frac{1}{2}\gamma^{-1/2}(\gamma_{jl}\gamma_{kn}+\gamma_{jn}\gamma_{kl}-\gamma_{jk}\gamma_{ln}) \quad (22)$$

のみが力学的な内容をもつ方程式として残ることになる. (21) 式はホイーラー・ドゥウィット (Wheeler-De Witt) 方程式と呼ばれる.

以上の方法の最大の問題は (21) 式を一般に解くことが現実的に不可能な点にある. この困難を処理する一つの可能性について§2.4で少し詳しく述べる.

2.3 発散の問題

前節で見たように, 形式的な定式化という点から見ると量子重力理論の建設はなんとかなりそうに思われる. 実際, 少なくとも無限遠方で時空がミンコフスキー時空に近づく場合には, Faddeev-Popov の汎関数積分表示は重力量子を含む散乱の S 行列に対する完全なファインマン則を与える. しかし, 具体的にファイ

ンマン積分を実行しようとすると直ちに深刻な困難が現れる．

$g_{\mu\nu}$ のかわりに変数

$$\bar{g}^{\mu\nu}=(-g)^{1/2}g^{\mu\nu}\,,\quad \bar{g}_{\mu\nu}=(-g)^{-1/2}g_{\mu\nu} \tag{23}$$

を用いて重力のラグランジアン $\mathscr{L}_{\mathrm{G}}$ を書き下すと，

$$\mathscr{L}_{\mathrm{G}}=\frac{1}{16\kappa^2}[2\bar{g}^{\rho\sigma}\bar{g}_{\lambda\mu}\bar{g}_{\kappa\nu}-\bar{g}^{\rho\sigma}\bar{g}_{\mu\kappa}\bar{g}_{\lambda\nu}-4\delta_\kappa{}^\sigma\delta_\lambda{}^\rho\bar{g}_{\mu\nu}]$$
$$\times\bar{g}^{\mu\kappa}{}_{,\rho}\bar{g}^{\lambda\nu}{}_{,\sigma} \tag{24}$$

となる．ここで

$$\bar{g}^{\mu\nu}=\eta^{\mu\nu}+\kappa\phi^{\mu\nu}\,,$$
$$\bar{g}_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}-\kappa\phi_{\mu\nu}+\kappa^2\phi_{\mu\alpha}\phi_{\nu\beta}\eta^{\alpha\beta}+O(\kappa^3) \tag{25}$$

により摂動変数 $\phi^{\mu\nu}$ を導入すると，ファインマン・グラフの vertex は運動量の2乗 p^2 に比例することがわかる．したがって，V 個の vertex，I 本の内線，L 個のループを持つファインマン・グラフの発散次数は $D=4L+2V-2I$ となる．これより $I=L-V+1$ という関係を使って $D=2(L+1)\,(L\geqq 1)$ を得る．すなわちループを含むファインマン積分はループの数が多くなるほど高い次数の紫外発散を伴う．

紫外発散は量子電磁気学でおなじみのもので，そこではよく知られているようにくり込みという処方によって処理される．すなわち，ラグランジアンに適当な補正項を加えて発散を取り除くわけである．今の場合，ループを L 個含むグラフの発散を取り除くのに必要なゲージ不変な補正項の構造は，次元解析よりある程度決定される．簡単のために最もたちの悪い3体vertexのみを考えると，外線の本数 E は $V=E+2L-2$ という関係を満たすので，必要な補正項は $\sum_E \kappa^{E+2L-2}[(2L+2)$ 個の微分$]\times\phi^E$ すなわち，$\kappa^{L-1}\times$[微分を $(2L+2)$ 個含む曲率テンソルの積から作られたスカラー] という構造をもつ．したがって一般に L が増すにつれ次々と新しい補正項が必要となり，くり込み不可能という結論に達する．

もちろん，発散がグラフの和をとると打ち消し合ってしまう可能性はある．実際，物質と相互作用していない重力場に対しては1ループ発散は打ち消し合うことが示される．[28] しかし物質と相互作用する場合にはもはや一般にこのような打ち消しは起こらないし，重力場だけの場合でも2ループ以上では発散が残る．[29]

このアインシュタイン理論に基づく量子重力理論の発散の困難を克服する試みとして，現在計算法の変更と重力理論（ないし物質場に対する理論）の変更という二つの視点に立つものがある．

第一の視点に立つ最も素朴な試みは，摂動級数をたし上げることによって発散がなくなるのではないかという考えに基づくものである．実際，特殊なグラフの部分和に対しては発散が消えることが示されているが，[2] 技術的困難のために，後ほど述べる $1/N$ 展開の方法を除いてこの方向での試みには大きな進展はない．

第一の観点に立つ他のアプローチはすべて，くり込み不可能な理論を直接扱う新しい枠組みを作ろうとするものである．それらの中で特に，くり込み群の方法を用いて無限個の補正項を持つ理論の中から実質的に有限個の任意定数のみをもつ理論を取り出す処方を与えようとする，Weinberg の asymptotic safety の考え方[30]及び汎関数積分の測度の変更によって有限な摂動論を作ろうとする Klauder の理論[31]は興味深いものである．しかし残念ながら，今の所いずれの方法でもアインシュタイン理論に基づく量子重力理論が彼らの枠組みにおさまるかどうか明らかになっていない．

このようなくり込み不可能な理論の挫折を反映して，最近の努力はもっぱらアインシュタイン理論自体を変更する方向に向けられている．その主要なものを以下並列的に紹介する．

1)　$R+R^2$ 型理論

準古典近似の所で述べたように，物質量子場の生み出す1ループ発散は R^2 型の補正項を要求する．したがってアインシュタイン理論の最も自然な変更はラグランジアンを

$$\mathscr{L}_{\mathrm{HD}}=\frac{1}{2\kappa^2}R-\Lambda-a\left(R_{\mu\nu}^2-\frac{1}{3}R^2\right)+bR^2 \tag{26}$$

と $R+R^2$ 型に一般化することである．ここで $R_{\mu\nu\lambda\sigma}R^{\mu\nu\lambda\sigma}$ の項が現われないのは，Gauss-Bonet の定理よりこの項が R^2，$R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ 及び全微分型の項の和で表わされるためである．

一見するとこのような項を加えることは，p^4 型の運動量依存性をもつ vertex を生み出すので発散の問題をより深刻にするように見える．しかし，摂動 $g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}+\kappa h_{\mu\nu}$ に対して R^2 型の項から h の2次の項が生じることに着目して，これらの項を Feynman propagator に加えることにすると，実は発散のたちはずっとよくなる．実際，変更された propagator Δ' は単純化すると

$$
\begin{aligned}
\Delta' &= \sim\!\sim\!\sim + \sim\!\sim\!\sim\,\partial^2 \sim\!\sim\!\sim + \sim\!\sim\!\sim\,\partial^2 \sim\!\sim\!\sim\,\partial^2 \sim\!\sim\!\sim + \cdots \\
&= \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^2} fa\kappa^2 p^4 \frac{1}{p^2} + \cdots = \frac{1}{p^2 - fa\kappa^2 p^4} \\
&= \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2 - 1/fa\kappa^2} \qquad (27)
\end{aligned}
$$

となり (f は a/b の関数), Δ' は $p\to\infty$ で $1/p^4$ のように振る舞うようになる．この propagator に基づく摂動論はくり込み可能となることが示される.[32] 但し Δ' は (27) 式の最後の表式からわかるように S 行列のユニタリ性を破る ghost pole を含んでいる．

このユニタリ性の破れは，物質場との相互作用を考慮して propagator をさらに修正することによって解消できることが Tomboulis らによって示されている.[33] 彼らの方法は，重力場と相互作用する N 個の同一種類の物質場を考え，$\kappa^2\to K^2/N$, $a\to\alpha N$, $b\to\beta N$, $\Lambda\to\lambda N$ と置き変えた後，K^2,α,β,λ を固定して完全な propagator を $1/N$ で展開し，その最低次の項 Δ'' を摂動論の出発点とするものである ($1/N$ 展開法)．Δ'' は物質場のループの寄与の結果として，

$$\Delta'' = [p^2 + gK^2p^4 \ln p^2/\mu^2]^{-1}$$

(g は任意定数，μ はくり込み点) (28)

となる．Δ'' は $\Delta''=O(p^{-4})$ $(p^2\to\infty)$ という漸近挙動をもち，しかも ghost pole は実軸から複素 p^2 平面の共役な点にうつるために S 行列のユニタリ性が成立する．

$R+R^2$ 型理論はくり込み可能でユニタリ条件を満たす S 行列を与える点で興味深いが，いくつか問題点も存在する．準古典近似の所で述べたように，R^2 型理論は古典論の範囲で摂動に対して不安定となる．量子論のレベルではこの不安定モードは適当な境界条件を課すことによって取り除かれるが，この条件は未来に対する条件となっているために局所的な因果律を破ってしまう．古典論との対応ではこの問題は深刻となる．

2) 超重力理論

最近の重力を含む統一理論の中で最も注目をあびている理論の一つが超重力理論である (本特集上原の解説参照)．超重力理論はそれの含むスピン3/2の場の個数 N と時空の次元 D でおおまかに分類される．この理論が注目された大きな理由は $N=1$, $D=4$ の理論では超対称性のおかげで重力量子を含むファインマン級数が2ループまで有限となることが見出され,[34] 超重力理論が発散の困難を持たない量子重力理論を与える可能性があると考えられたためである．

しかし，$N=1$, $D=4$ の理論は3ループでは発散をもつ可能性があること，さらに相互作用の統一理論として有望である $D=10$ 理論が1ループレベルでたちの悪い発散を伴っていることなどが明らかとなるにつれ，しだいに旗色が悪くなって来ている.[35]

3) 超弦理論

超重力理論と並んで有望視されているもう一つの理論は，ハドロンに対する dual resonance モデルから生まれた超弦理論である[4] (本特集上原の解説参照)．この理論の最大の特徴は従来の点粒子描像に基づく場の理論を放棄して，ひもという広がりのあるものを基本的な実体と考え，素粒子を10次元 (ないし26次元) の時空の中を運動する一定の張力 $T\sim M_{\rm Pl}^2c^3/\hbar$ をもつひもの振動の量子としてとらえる点にある．このような変更は非常に大胆なものであり簡単には受け入れにくいが，最近の研究は超弦理論がこのような心理的障壁をあえて越えるにたる魅力をもっていることを明らかにしつつある．

その第一の点は，ひもが一点に縮むような低エネルギーの極限で超弦理論がゲージ場を含む $D=10$, $N=2$ (ないし $N=1$) の超重力理論に帰着することである．このことは，超弦理論が重力を含む完全な相互作用の統一理論を与える可能性を示唆している．

第二は，(I 型の理論が) 1ループで有限であり，さらに，高次元理論特有の量子効果によるゲージ不変性や一般共変性の破れ (anomaly)[36] を含まない点である．しかも，このような理論の著しい長所が保証されるのはゲージ群が SO(32) ないし $E_8\times E_8$ という特別な場合に限られる．このゲージ群に対する強い制限は従来の統一理論になかった特徴であり，超弦理論が重力と物質相互作用を非常に有機的に統一したものであることを意味している.[5] さらに，超弦理論は完全に有限な理論ではないかという期待ももたれている．

もちろん超弦理論は提案されて間もない理論であり問題がないわけではない．特に，10次元 (ないし26次元) のうち余分な空間次元をいかにしてコンパクト化して4次元まで落とすかという問題に対して具体的な処方は与えられていない．また超弦理論の記述する重力はひもの運動モードであり，巨視的な重力場との関連が明らかでない．

2.4 量子宇宙論

以上のような摂動論に基づく素粒子論からのアプローチと並んで，幾何学的量子化に基づく研究も最近盛んになってきた．その中で最も興味深いものは，Hawking を中心とした人々による宇宙論を対象とした研究である.[37]

2.2節で触れたように，superspaceを利用した定式化の最大の問題は汎関数微分方程式であるホイーラー・ドゥウィット方程式を一般に解くのが不可能である点にある．この困難を処理する一つの方法は，superspace を有限次元の空間に制限した単純化されたモデル(minisuperspace モデル)を考えることである．

たとえば，空間的に閉じた一様等方宇宙,

$$ds^2=-dt^2+a^2d\sigma_3^2 \qquad (29)$$

($d\sigma_3^2$ は3次元単位球面の計量)とその上の空間的に一様なスカラー場 ϕ を考えると，superspace は2次元空間 (a, ϕ) となり，ホイーラー・ドゥウィット方程式は次のような単純な2階微分方程式となる:

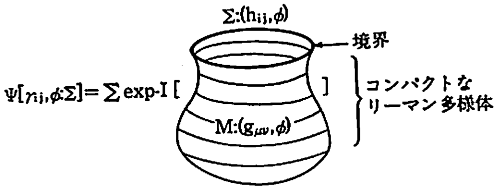
$$\left[a\left(\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial a}\right)^2-a^{-3}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}+a(m^2a^2\phi^2-1)\right]\Psi=0. \qquad (30)$$

ここでスカラー場は質量mの自由場とした．(30)式は波動方程式の形をしており，したがって $a=0$ における初期条件を与えれば Ψ は完全に決まることになる．Ψ は宇宙全体の量子力学的振舞を記述しているので宇宙の波動関数と呼ばれる．

もちろん初期条件としてどのようなものを採用するかは前もって明らかでない．Hawking の出発点はこの初期条件を決めるために，ホイーラー・ドゥウィット方程式の一般解に対する汎関数積分表示

$$\Psi[\gamma_{ij}, \phi;\ \Sigma]=\int_\Gamma d[g_{\mu\nu}]d[\Phi]\exp(-I_G[g_{\mu\nu}] -I_m[\Phi; g_{\mu\nu}]) \qquad (31)$$

を利用しようというものである．ここで，I_G, I_m はそれぞれ重力及び物質場に対するローレンツ時空における作用積分から $it\to\tau$ という形式的な実時間の虚時間による置き変えを行って得られるリーマン時空における作用積分，Σ は γ_{ij}, ϕ の定義されている3次元空間である．また汎関数積分は，Σ を境界としてもつ4次元リーマン多様体 $(M, g_{\mu\nu})$ 及びその上の場 Φ のうち，Σ 上で $g_{ij}=\gamma_{ij}$, $\Phi=\phi$ となるものの適当な集合 Γ 上で行う．ここで重要なことは Γ を一つ与えるごとに(30)式の解が一つ定まることである．明らかにそのようなもののうち最も単純なものは Γ として Σ 以外に境界をもたないようなすべてのリーマン多様体とその上で滑らかな Φ の全体を採用することである(第2図).



第 2 図

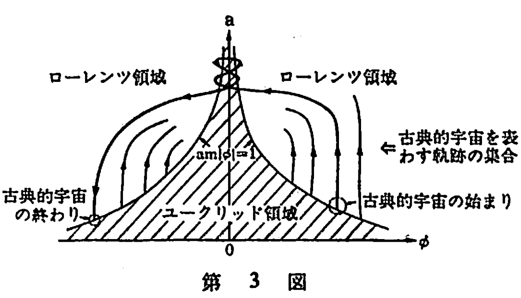
Hawking は，このような Γ によって決まる宇宙の波動関数を(31)式に対する WKB 近似によって求め，それに適当な解釈をほどこすことにより宇宙初期 $a\sim 0$ での時空の振舞を決定した．彼の得た結果は次のように要約される:

1) minisuperspace は宇宙がよい近似で古典的に振る舞う領域(ローレンツ領域: $ma|\phi|\gg 1$)と量子効果の重要となる領域(ユークリッド領域: $ma|\phi|\lesssim 1$)の二つの領域に分けられる．$ma|\phi|\lesssim 1$ では通常の時間は意味を失う．一方 $ma|\phi|>1$ では波動関数は $ma|\phi|\sim 1$ を出発点とする古典的な宇宙モデルの集合と解釈できる(第3図).

2) この集合はすべての可能な古典解を含むわけではなく，特別のクラスを選別しているという意味で上記の Γ の選択は宇宙の初期条件をある程度決定する．特にその大部分は古典的領域の出発点で宇宙のインフレーションを起こす．また同じ方法を非等方一様宇宙モデルに適用すると，宇宙初期での非等方性に対する強い制限が得られる.

3) アインシュタイン理論を $R+R^2$ 型に一般化しても同様の結果が得られる.

もちろん minisuperspace モデルは量子重力理論と



第 3 図

しては非常にあらっぽいものであり，また上記のΓの選択が現実の宇宙に対応しているかどうかは明らかでない．しかし宇宙論の立場から見ると，Hawking の得た結果は非常に魅力的なものである．

§3. まとめ

以上のように量子重力理論に対する摂動論的アプローチと幾何学的アプローチはそれなりに興味深い成果を生み出しつつある．しかし，依然としてその方法自体の特性から来る大きな困難も内包している．

量子重力理論は現実的にはプランク・エネルギー程度の高エネルギーでの重力の量子効果を具体的に決定するものでなくてはいけない．ところが，摂動論的アプローチでは展開パラメターが本質的にE/E_{Pl}となっているために，このような効果を具体的に計算しようとすると摂動級数をたし上げることが必要となる．これは現時点では全く不可能である．また，摂動論的方法では古典論のもつ重力場の幾何学特性がほとんど失われてしまう．さらに，現実の宇宙やブラックホールのような曲がった時空の上では準古典近似を悩ました諸困難が再び顔を出す．

一方，幾何学的アプローチはこれらの困難を一部解決するものの，こんどは通常の場の理論との対応づけ，特に粒子描像や時間発展の概念の導入が非常にむずかしい．これはこのアプローチの与える結果の解釈上の困難と密接に結びついている．

このように二つのアプローチは来たるべき理論の部分的側面をとらえているにすぎない．これらに加えていくつかの原理的問題も存在する．完全な量子重力理論では観測者自体が系の一部分となり，外的な古典系は存在しなくなる．これは波束の収縮に代表される，観測に対する通常の量子力学の解釈がそのままでは適用できないことを意味している．またブラックホールの蒸発という現象の存在は，量子重力理論を建設する上で従来の量子力学の基本原理を変更することを要求する可能性があることも指摘されている．[38]

このように量子重力理論はいまだ完成からはほど遠いと言わざるをえない．

文献

1) S. Deser: Rev. Mod. Phys. **29** (1957) 517.
2) C.J. Isham, A. Salam and J. Strathdee: Phys. Rev. D **3** (1971) 1805. B.S. DeWitt: Phys. Rev. Lett. **13** (1964) 114.
3) P. Langacker: Phys. Rep. **72** C (1981) 185.
4) S. Ferrara, J.G. Taylor and P. van Nieuwenhuizen, ed.: *Supergravity '82* (World Scientific, 1983).
5) J.H. Schwarz: Phys. Rep. **89** C (1982) 223. M.B. Green and J.H. Schwarz: Nucl. Phys. B **243** (1984) 475.
6) M.B. Green: Nature **314** (1985) 409.
7) S.W. Hawking: Commun. Math. Phys. **43** (1975) 199.
8) J.W. York, Jr.: Phys. Rev. D **28** (1983) 2929.
9) S.W. Hawking and G.F.R. Ellis: *The Large Scale Structure of Space-Time* (Cambridge Univ. Press, 1973).
10) D. Christodoulou: Commun. Math. Phys. **93** (1984) 171.
11) H. Kodama: Prog. Theor. Phys. **62** (1979) 1434. R.W. Wald: *Quantum Theory of Gravity*, ed. S.M. Christensen (Adam Hilger, 1984) p. 160.
12) Ya. B. Zel'dovich and A.A. Starobinsky: Sov. Phys.-JETP **34** (1972) 1159.
13) K. Sato: Mon. Nat. R. Astron. Soc. **195** (1981) 467. A.H. Guth: Phys. Rev. D **23** (1981) 347.
14) J.B. Hartle: *Quantum Gravity 2*, ed. C.J. Isham, *et al.* (Clarendon Press, 1981) p. 313.
15) 最近の発展については K. Sato: *Cosmology of the Early Universe*, ed. L.Z. Fang and R. Ruffini (World Scientific, 1984) p. 165 及び A.D. Linde: Rep. Prog. Phys. **47** (1984) 925 参照.
16) T.W.B. Kibble: *Quantum Gravity 2* (Clarendon Press, 1981) p. 63.
17) G.W. Gibbons: *General Relativity—An Einstein Centenary Survey*, ed. S.W. Hawking and W. Israel (Cambridge Univ. Press, 1979) p. 639.
18) L. Parker: *Asymptotic Properties of Space-Time*, ed. F.P. Esposito and L. Witten (Plenum, 1976) p. 107.
19) P.C.W. Davies: *General Relativity*, ed. A. Held (Plenum, 1980) Vol. 1, p. 255.
20) G.T. Horowitz: *Quantum Gravity 2* (Clarendon Press, 1981) p. 160.
21) N. Bohr and S. Rosenfeld: K. Dan. Vidensk. Selsk. Mat.-Fys. Medd. **12** (1933) 8.
22) R.P. Feynman: Acta Phys. Pol. **24** (1963) 697.
23) B.S. DeWitt: Phys. Rev. **160** (1967) 113, **162** (1967) 1195, 1239.
24) L.D. Faddeev and V.N. Popov: Phys. Lett. **25** B (1967) 29.
25) E.S. Abers and B.W. Lee: Phys. Rep. **9** C

(1973) 1.

26) T. Kugo and I. Ojima: Prog. Theor. Phys. Suppl. No. 66 (1979) 1.

27) N. Nakanishi: *Gauge Theory and Gravitation*, ed. N. Nakanishi, *et al.* (Springer, 1983) p. 171.

28) G. t'Hooft and M. Veltman: Ann. Inst. Henri Poincaré **20** (1974) 69.

29) S. Deser and P. van Nieuwenhuizen: Phys. Rev. D **10** (1974) 401, 411; Phys. Rev. Lett. **32** (1974) 245.

30) S. Weinberg: *General Relativity—An Einstein Centenary Survey* (Cambridge Univ. Press, 1974) p. 790.

31) J.R. Klauder: Ann. Phys. **117** (1979) 19.

32) K.S. Stelle: Phys. Rev. D **16** (1977) 953.

33) E.T. Tomboulis: *Quantum Theory of Gravity* (Adam Hilger, 1984) p. 251.

34) M. Grisaru: Phys. Lett. B **66** (1977) 75.

35) K.S. Stelle: *Quantum Theory of Gravity* (Adam Hilger, 1984) p. 345.

36) L. Alvarez-Gaumé and E. Witten: Nucl. Phys. B **234** (1983) 269.

37) J. B. Hartle and S. W. Hawking: Phys. Rev. D **28** (1983) 2960. S.W. Hawking: Nucl. Phys. B **239** (1984) 257. S. W. Hawking and J. C. Luttrell: Phys. Lett. **143** B (1984) 83; Nucl. Phys. B **247** (1984) 250.

38) S.W. Hawking: Commun. Math. Phys. **87** (1982) 395; Nucl. Phys. B **244** (1984) 135.