一般相対性理論の数理

小 玉 英 雄　〈高エネルギー加速器研究機構素粒子原子核研究所　hideo.kodama@kek.jp〉

本稿では，特異点と4次元ブラックホールに関連した項目を中心として，その基礎概念と関連する数理的成果の概要を紹介する．取り上げるテーマは，共形的無限遠，ブラックホールについての一般定理，特異点定理，宇宙検閲予想，重力崩壊における臨界現象，Penrose不等式と正エネルギー定理，ブラックホールの一意性定理である．

1.　共形的無限遠

一般相対性理論で現れる計量は，標準的なRiemann幾何学と異なり，時間に対応する方向が負となる不定符号計量となっている．[*1] この違いは，時空の幾何学に因果構造という Riemann幾何学にはない構造をもたらす．この時空の大域的因果構造に関する研究の大きな成果は，「時空の端」に豊かな構造があることを発見したことである．

時空の端は，「無限遠」と後ほど説明する「特異点」の2種類に分類される．無限遠には様々な定義や構成法が存在するが，中でも実用性の高いものが1964年にPenroseにより提案された共形的アプローチである．Weyl変換 $g_{\mu\nu}\to\Omega^2 g_{\mu\nu}$ は，Ω が定数でなくても光円錐の構造を変えない．この点に着目し，時空全体 $(\mathcal{M},g)$ を別の時空 $(\hat{\mathcal{M}},\hat{g})$ の有界領域に共形写像 $f\colon\mathcal{M}\to\hat{\mathcal{M}}$，すなわち

$$\mathrm{C1}\colon\ \hat{g}_{\mu\nu}=\Omega^2 f_* g_{\mu\nu}\ (\Omega>0)$$

を満たす写像で埋め込むことができれば，[*2] $\mathcal{M}$ の無限遠はその像 $f(\mathcal{M})$ の $\hat{\mathcal{M}}$ での境界 $\partial\mathcal{M}=\overline{f(\mathcal{M})}-f(\mathcal{M})$ として実体化されるというのが，基本的なアイデアである．ただし，無限遠であることを保証するために，次の条件を加える必要がある：

$$\mathrm{C2}\colon\ \partial\mathcal{M}\ \text{上で，}\ \Omega=0\ \text{かつ}\ \mathrm{d}\Omega\neq 0\,.$$

このようにして定義される無限遠は**共形的無限遠**と呼ばれる．

例えば，極座標表示での4次元Minkowski計量 $\mathrm{d}s^2=-\mathrm{d}t^2+\mathrm{d}r^2+r^2\mathrm{d}\Omega_2^2$ は，

$$\frac{t-r}{2}=\tan\frac{\eta-\chi}{2},\quad \frac{t+r}{2}=\tan\frac{\eta+\chi}{2} \tag{1}$$

と座標変換すると

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}s^2=\Omega^{-2}\widehat{\mathrm{d}s}^2\colon\ \widehat{\mathrm{d}s}^2=-\mathrm{d}\eta^2+\mathrm{d}\chi^2+\sin^2\chi\,\mathrm{d}\Omega_2^2\,,\\ &\Omega=\cos\left(\frac{\eta-\chi}{2}\right)\cos\left(\frac{\eta+\chi}{2}\right)\end{aligned} \tag{2}$$

と表される．ここで，$\widehat{\mathrm{d}s}^2$ はちょうど，静的Einstein宇宙 $\hat{\mathcal{M}}\cong\mathbb{R}\times S^3$ の計量と一致するので，[*3] この変換により，Minkowski時空全体が静的Einstein宇宙のコンパクト領域 $\chi-\pi\le\eta\le\pi-\chi\,(\chi\ge 0)$ に埋め込まれ，その境界で $\Omega=0$ となる（図1の右）．ただし，$\mathrm{d}\Omega\neq 0$ となるのは，$\chi\neq 0$，π の部分なので，角度座標も考慮すると，$\partial\mathcal{M}$ は，それぞれが $\mathbb{R}\times S^2$ に同相な2つの光的超曲面 $\mathscr{I}^{\pm}$ からなり，**光的無限遠**と呼ばれる（図1）．また，$(\eta,\chi)=(\pm\pi,\pi)$ に対応する2点 $i^{\pm}$ は**時間的無限遠点**と呼ばれる．[*4]

以上の共形埋め込みにおいて，角度座標が一定に対応する2次元部分を図示したものはしばしば**Penrose図式**と呼ばれる．[*5]

定曲率時空[*6]であるde Sitter時空 dS^4 や反de Sitter時空 AdS^4 も，Minkowski時空と局所的に共形なので，同じく静的Einstein宇宙の部分領域に共形的に埋め込むことができる．それにより得られるPenrose図式が図2の右2つである．上の座標系を用いると，de Sitter時空 dS^4 は $|\eta|<\pi/2$ の円筒領域に，反de Sitter時空 AdS^4 は $0\le\chi<\pi/2$ に埋め込まれる．したがって，$\mathrm{dS}^4\cong\mathbb{R}\times S^3$ で，その境界は S^3 に同相な2つの空間的面 $\mathscr{I}^{\pm}$ からなる．一方，$\mathrm{AdS}^4\cong\mathbb{R}\times D^3$ なので，そ

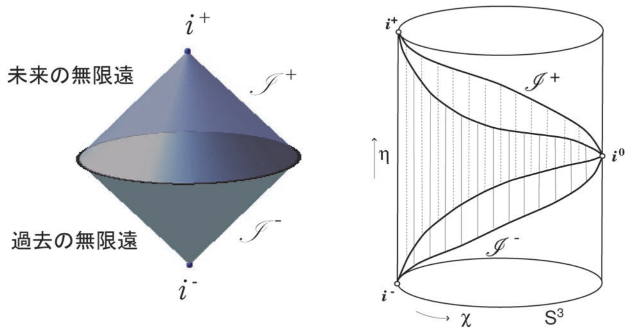

図1　Minkowski時空の無限遠と静的Einstein宇宙への埋め込み．

*1 本稿では，時空計量の符号は［−, +, +, ⋯］とし，自然単位系 $c=\hbar=1$ を用いる．

*2 f_*g は，f が長さを保つとして，g から $\hat{\mathcal{M}}$ に誘導される計量である．

*3 Einsteinは，宇宙膨張を止めるために宇宙定数 Λ を導入し，この解を得た．4次元時空の場合，物質のエネルギー密度を ρ として，$\Lambda=4\pi G\rho=$ 一定の関係が成立する．

*4 時間的無限遠点や空間的無限遠点（図1の i^0）は，一般に $\mathrm{d}\Omega=0$ となるので，共形的無限遠には含まれないが，後述のB. Schmidtによるフレームバンドル完備化法[1)]では自然に現れる．

*5 図2の左端が，Minkowski時空のPenrose図式である．もとの4次元時空は，この2次元図を底空間として，その各点に場所に依存した半径の球面 S^2 をファイバーとして付与したファイバー空間と見なされる．

*6 2次元的断面での曲率が断面の取り方によらず一定となる時空．

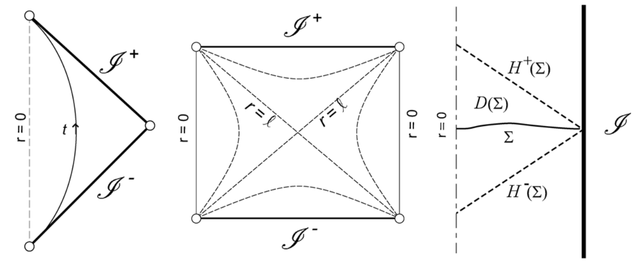

図2　定曲率時空のPenrose図式．左から順に，Minkowski時空，de Sitter時空，反de Sitter時空．

の境界は$\mathbb{R}\times S^2$に同相な時間的面$\mathscr{I}$となる．

Penroseによる共形的無限遠の定義の優れたところは，無限遠の構造やその近傍の漸近構造の解析を具体的に行うことを可能にしたことである．例えば，上で定曲率時空の場合に見た宇宙定数の符号と無限遠の構造の対応は，実は一般的であることが示される．特に，宇宙定数が負の場合は，物質（場）が十分局在している場合，無限遠は常に時間的な超曲面（と2個の時間的無限遠点$i^{\pm}$）となる．これは，この時空にCauchy面[*7]が存在せず，未来の時間発展を決定するには，初期面Σでの情報以外に，境界にあたる無限遠$\mathscr{I}$での境界条件が必要となることを意味している．この構造は，近年盛んに研究されているAdS/CFT対応[2]や類似の双対性の議論の基礎となっている．

この無限遠構造の一般的分類に基づいて，共形無限遠の構造が，Minkowski時空，de Sitter時空，反de Sitter時空の無限遠と同一の構造をもつ時空は，それぞれ**漸近的に平坦**，**漸近的にde Sitter的**，**漸近的に反de Sitter的**であるという．

2. ブラックホール

この無限遠の定義を基礎として，**ブラックホール**（以下，BHと略記）が定義される．まず，いくつか記号を定義する．Sを任意の集合として，Sから集合M内の未来向きの因果的（＝時間的ないし光的）曲線で到達できる点の全体を$J^+(S, M)$，時間的曲線で到達できる点の全体を$I^+(S, M)$と表す．過去向きの曲線により，同様に$J^-(S, M)$，$I^-(S, M)$が定義される．

この表記のもとで，2つの光的無限遠をもつ漸近的に平坦な時空$\mathcal{M}$において，天体から十分離れた観測者に情報が伝わる時空領域を$J^-(\mathscr{I}^+, \hat{\mathcal{M}})$と同一視すると，その外は観測者には見えない時空領域となる．そこで，この領域のうち$\mathscr{I}^-$から影響の及ぶ部分$\mathcal{B}=(\mathcal{M}-J^-(\mathscr{I}^+, \hat{\mathcal{M}}))\cap J^+(\mathscr{I}^-, \hat{\mathcal{M}})$をブラックホール領域，その境界$\mathcal{H}^+=\dot{J}^-(\mathscr{I}^+, \hat{\mathcal{M}})\cap J^+(\mathscr{I}^-, \hat{\mathcal{M}})$を未来の事象の地平線（以下ホライズン）と定義する（図3）．また，$\mathscr{I}^+$から観測可能でかつ$\mathscr{I}^-$からの情報が伝わる領域$J^-(\mathscr{I}^+, \hat{\mathcal{M}})\cap J^+(\mathscr{I}^-, \hat{\mathcal{M}})$はDOC（domain of outer communication）と呼ばれる．

BHや特異点の研究で非常に重要な役割を果たしたのが，

*7　時空領域において，任意の延長不可能な時間的ないし光的曲線が必ず超曲面Σと交わるとき，ΣをCauchy面という．

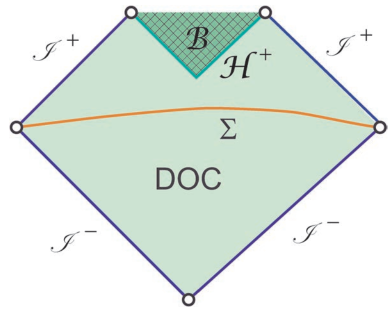

図3　漸近的に平坦なブラックホール時空の2次元断面．

測地線束方程式，すなわち近傍の測地線間の相対運動を記述する方程式である．空間的2次元面を通過する光的測地線の集まりが織りなす3次元の超曲面を$\mathcal{N}$とする．基準となる測地線γを一つ選ぶとき，$\mathcal{N}$の中でγの近傍の2次元的測地線集合の垂直断面積Aは，$R_{\mu\nu}$をRicci曲率テンソルとするとき，次の**Raychaudhuri方程式**に従う：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}\theta+\frac{1}{2}\theta^2=-R_{\mu\nu}k^\mu k^\nu-2\sigma^2+2\omega^2 . \qquad (3)$$

ここで，$k^\mu=\mathrm{d}x^\mu/\mathrm{d}v$は各測地線の接ベクトル，$v$はアフィンパラメータ[*8]を，$\theta=(\mathrm{d}A/\mathrm{d}v)/A=\nabla_\mu k^\mu$は面積増大率，$2\sigma^2=\nabla_{(\mu}k_{\nu)}\nabla^\mu k^\nu-(1/2)\theta^2$と$2\omega^2=\nabla_{[\mu}k_{\nu]}\nabla^\mu k^\nu$は，それぞれ垂直断面の等積的な形状の変形率および回転率を表す．特に，光的測地線束が同じ点を通過する場合や空間的2次元面に直交する場合には，$\mathcal{N}$は光的超曲面で，$\omega=0$となる．

Raychaudhuri方程式において，物理法則が関与するのは$R_{\mu\nu}k^\mu k^\nu$の項のみであり，この項が正なら，光線は光波面の面積が減少する側に加速される．そこで，任意の光的ベクトルに対して$R_{\mu\nu}k^\mu k^\nu\geq 0$となるとき，**光的収束条件**が成り立つという．これは重力が引力として作用することを意味する．Einstein方程式が成り立つとき，この条件は$T_{\mu\nu}k^\mu k^\nu\geq 0$となり，エネルギー運動量テンソル$T^\mu_\nu$が固有値$[-\rho, P_1, P_2, P_3]$をもつときには$\rho+P_I\geq 0$ $(I=1, 2, 3)$と同等となる．

Minkowski時空では，閉じた空間的2次元面を垂直に通過する光線束には外向きのものと内向きのものが存在し，対応する面積増大率θは前者では正，後者では負となる．しかし，強い重力源を囲む2次元面ではいずれも負，すなわち外向きに「広がる」光波面の面積も減少することが起きる．このような2次元面は**捕捉面**（trapped surface）と呼ばれる．

Raychaudhuri方程式を用いると，ホライズンが存在するための十分条件を与える次の有名な定理が得られる[1]：

【定理2.1】　漸近的に平坦でCauchy面をもつ時空において，光的収束条件が成り立ち，DOCに特異点がないならば，閉捕捉面はホライズンの中に含まれる．

*8　接ベクトルk^μがその曲線に沿って平行になっているとき，その曲線を測地線，対応するパラメータをアフィンパラメータという．

捕捉面の概念は局所的なので，この定理は，大域的概念であるホライズンの存在を局所的に判定する方法を提供する．

2次元面$\mathcal{T}$に垂直な光的測地線束が収束的，すなわち$\theta<0$となっているとき，Raychaudhuri方程式より，含まれる測地線γが完備なら，有限なvで$\theta=-\infty$となることが示される．この点は，$\mathcal{T}$のγに沿う**共役点**（conjugate point）と呼ばれる．共役点は，γの無限小近傍の測地線が一点に集まる点であるが，γのこの点より先の部分は$I^+(\mathcal{T})$に含まれることが示される．この事実が上の定理の証明の味噌となるが，同様の論理でホライズンを織りなす光的測地線が常に$\dot{J}^-(\mathscr{I}^+, \hat{M})$の境界にとどまり共役点をもてないことより，次のホライズンの面積増大則が示される[1]：

【定理2.2（BH面積増大則）**】** ホライズン上および外に特異点がなく，光的収束条件が成り立つなら，BHの面積は決して減少しない．

この定理は，BH熱力学においてBH面積をエントロピーとして解釈する根拠の一つとなっている．また，ホライズンを生成する光的測地線が終点をもたないことから，BHの位相変化についての次の有名な定理が容易に導かれる[1]：

【定理2.3（BH不分裂定理）**】** ホライズン上およびDOCに特異点がないなら，BHは合体はできるが分裂はしない．

3. 特異点定理

時空の正則点を端点とする曲線は常に延長可能である．したがって，時空に含めることのできない特異点や無限遠点は，その点に近づく延長不可能な曲線γの仮想的端点と見なされる．ただし，同じ特異点に漸近する曲線は無限に存在するので，仮想的な端点は延長不可能な曲線の類$[\gamma]$として定義される．大まかには，この曲線の「長さ」が無限大の場合に**無限遠点**，有限の場合は**特異点**と呼ぶ．「長さ」の正確な定義は本稿では省略する．[*9] なお，時空の部分切除によって生じる非本質的な特異性を避けるため，特異点の議論では，通常，極大な時空に拡張して考える．ただし，一般に，このような拡張は一意的ではない．

圧力もエネルギー密度も非負の一様等方な膨張宇宙解やSchwarzschild解など非自明な厳密解では，ある座標点で曲率が発散する．これらの特異性はその点で時空構造が破綻することを意味するので，その座標点は時空から除外され，今定義した意味での特異点となる．一般相対性理論誕生間もない頃から，これらの時空特異点の発生は，対称性などの特殊性に起因するのか，それとも一般的なものなのかが問題となっていた．この問題に，一般的な解答を与えたのが，1965年から1970年にかけてのGeroch，Penrose，Hawkingらの研究である．

彼らの成果はHawking-Ellisの教科書[1]に4個の特異点定理としてまとめられているが，いずれも，「引力条件，因果性条件（ないしそれに代わるもの），強重力条件の3つの条件が成り立つと，時空が測地的に完備でない」ことを主張する内容になっている．ここで，引力条件とは重力が引力として作用することを保証する条件で，すでに説明した光的収束条件と任意の時間的ベクトルVに対して$R_{\mu\nu}V^\mu V^\nu \geq 0$を要求する**時間的収束条件**（timelike convergence condition）の2種がある．[*10] 前者は後者より弱い条件である．特異点定理はEinstein方程式を仮定しておらず，純粋に幾何学的定理であるが，Einstein方程式を仮定すると，この条件は宇宙項を含めたエネルギー運動量テンソルに対する条件となる．例えば，エネルギー運動量テンソルが対角化可能な場合，時間的収束条件は，エネルギー密度ρと圧力固有値P_Iに対し$\rho+\sum_I P_I \geq 0$かつ$\rho+P_I \geq 0\,(\forall I)$が成り立つことと同等である．逆に，この条件が成り立たないと重力は斥力的になり，インフレーションを引き起こす．

次に，強重力条件は文字通り，重力場が十分強い領域があることを表す条件であるが，大まかには捕捉面ないし**過去向き捕捉点**（past trapped point）の存在を要求する条件となっている．ここで，点Pが過去向きの捕捉点であるとは，Pを頂点として過去向きに広がった光円錐が有限な時間で再び縮み始めるという条件である．

最後に，**測地的に完備**（geodesically complete）とは，すべての測地線がアフィンパラメータに関して無限に延長可能であることを意味する．したがって，例えば，未来向きの時間的測地線に関して完備でない場合には，アフィンパラメータの値が有限であるにもかかわらずそれ以上延ばせない未来向きの時間的測地線γが存在することを意味する．この場合，$[\gamma]$の「終点」は未来の特異点となる．

例えば，次の定理は，重力崩壊によりBHができると，必ず特異点も生成されることを意味している．ただし，「特異点の場所」については何の情報も与えない．

【定理3.1（Penrose 1965）**】** 次の条件が成り立つと，時空は光的測地線に関して完備でない：

（1）光的収束条件．

（2）非コンパクトなCauchy面の存在．

（3）閉捕捉面の存在．

また，次の定理から，もし宇宙初期でも物質のエネルギー密度や圧力が非負だとすると，我々の宇宙には特異点が存在することが導かれる．ただし，この定理だけからは，それが未来にあるのか過去にあるのかは結論できない．

【定理3.2（Hawking, Penrose 1970）**】** 次の条件が成り立つと，時空は時間的ないし光的測地線に関して不完備：

[*9] B. Schmidtは，この長さの定義をきちんと与え，フレームバンドル完備化法により曲線の仮想端点としての時空境界を数学的に厳密に構成した．[1]

[*10] ただし，一つの定理では，Ricciテンソルがゼロとなる領域がある場合は，さらにRiemannテンソルの代数的構造が一般的であるという**一般性条件**[1]を要求する．

（1）時間的収束条件と曲率テンソルに対する一般性条件.
（2）時間的閉曲線の非存在.
（3）過去向きの捕捉点，閉捕捉面，非時間的なコンパクト閉部分多様体のいずれかが存在.

これらの定理は，その後，収束条件を測地線に沿う積分条件に緩めるなどの拡張がなされた.

4. 宇宙検閲予想

特異点が発生して，それが曲率の発散を伴っているとしても，その影響が我々に届かなければ，現実的な問題を引き起こさない．この期待を表現したのが，Penroseの提唱した宇宙検閲予想である．この予想には2つのバージョンがある．一つは，1969年に発表された**弱い宇宙検閲**（Weak Cosmic Censorship）予想で，大まかな内容は次のように表現される：

【予想4.1（WCC予想）**】** 物質が現実的な状態方程式に従うとき，なめらかな初期条件からEinstein方程式の解として決まる漸近的に平坦な時空の特異点は一般にBHホライズンで隠される.

2つめのバージョンは10年後に発表された**強い宇宙検閲**（Strong Cosmic Censorship）予想で，次の内容をもつ：

【予想4.2（SCC予想）**】** 物質が現実的な状態方程式に従うとき，なめらかな初期条件に対するEinstein方程式の解の極大な拡張は，一般にCauchy面をもつ時空となる.

これらの予想のその後はあまり明るいものではなかった．まず，球対称系についてWCCが詳しく調べられ，特に圧力が無視できる天体の重力崩壊に対しては一般に，ホライズンに隠されない特異点である**裸の特異点**（naked singularity）が中心に生成されることが示された．また，有限な圧力をもつ流体の場合でも，必ずしも特異点は隠されない．ただし，これらは球対称性という高い対称性に起因している可能性が否定できない．しかし，非球対称な系の研究は困難で，未だに明確な結論は得られていない.[3] 1991年にS. L. ShapiroとS. A. Teukolskyは，細長い形状の無衝突ガス系の重力崩壊において，特異点が発生してもそれを取り囲む捕捉面が存在しない例を数値計算により与えた．しかし，この数値計算では特定の時間一定面の取り方をしているため，捕捉面の非存在がホライズンの非存在を必ずしも意味せず，WCCの破れの明確な例とは言えないことがR. WaldとV. Iyerにより同じ年に指摘されている.

SCC予想についても状況は微妙である．SCCの破れは，極大時空$\mathcal{M}$がCauchy面をもたないことを意味するが，このような時空では，Cauchy面Σをもつ極大な領域を$\mathcal{N}=D(\Sigma)$とおくと，$\mathcal{N}$は$\mathcal{M}$において境界$\mathcal{H}=\partial\mathcal{N}$をもつ．この境界は**Cauchyホライズン**，特に，$\mathcal{H}^+=\mathcal{H}\cap J^+(\Sigma)$は未来のCauchyホライズンと呼ばれる（図2）．解析的に極大に拡張されたReissner-Nordstrom解やKerr解など（7節参照）多くの基本的なBH解がCauchyホライズンをもつ．したがって，SCC予想はこれらの解のCauchyホライズンが不安定であることを予想する.

この問題は様々な側面から研究され，有限エネルギーの摂動により時空の局所質量がCauchyホライズンで発散するという**質量インフレーション**などCauchyホライズンの不安定性を示唆する現象がE. PoissonとW. Israelにより1990年に発見され，その後荷電スカラ場動系の数値計算でも，Cauchyホライズンの一部が空間的スカラ曲率特異点集合に変わることが指摘された．しかし，Cauchyホライズンの一部は光的なまま残り，そこを通過しても物体が有限な変形しか受けない程度の弱い特異性しかもたないことが2002年にL. Burkoらにより示された.

5. 重力崩壊における臨界現象

これに対して，WCCの研究を全く新たな方向に導いた数学的研究がある．それは，D. Christodoulouにより1986年から1999年にかけて行われた球対称なEinstein-KG系（重力場と質量ゼロの自由スカラ場から成る系）の厳密な数学的研究である（その詳細については，文献4, 5参照）．彼は有界変動なクラスの枠内で，真空に近い初期値は必ず正則な散乱解を与えることを示す一方で，漸近的に平坦で裸の特異点をもつ解およびホライズンの発生点が特異となる解の存在を示した．前者は，原点にある特異点を頂点とする未来の光円錐が$\mathscr{I}^+$に達するので裸の特異点をもつ．このとき，この光円錐は特異であるが，曲率は有界でその微分のみが発散するので特異性はマイルドで，時空の光円錐を超えたC^{2-}級での拡張が可能となる．しかし，この拡張を許すと，この解ではWCCもSCCも破れる.

一方，後者の解では，限りなく曲率の大きな領域が観測可能であるという意味ではWCCが破れる．ただし，1999年に彼は，これらすべての特異解が少なくとも1次元的な初期値の摂動に対して不安定であることを示した．すなわち，小さな摂動を加えると，正則解かWCCが成り立つ解に変化するのである．これは数学的な意味で，WCC予想を支持する結果となっている.

ただし，ここで新たな展開があった．それは，M. W. Choptuikが1993年に行ったこの系の数値計算による研究である．彼は高精度でこの系の初期値問題を解き，スカラ場のある初期値配位に対して，その振幅を連続的に変えてゆくとき，ある臨界値以下では散乱解，臨界値を超えるとBH解となる場合を詳しく調べた．その結果，振幅が臨界値のときの解がちょうど，Christodoulouが存在を示したホライズンの頂点が特異となる解に対応し，しかもその解が離散的相似性をもつこと，さらに振幅の臨界値からのずれと形成されるBHの質量の対応におけるベキ指数がスカラ場の初期配位の詳細によらないことを発見した．すなわち，一種の臨界現象が起きていたのである.

この結果は，また，対応する解の曲率の最大値が任意の与えられた値を上回るような初期値の集合が初期値空間において「ゼロでない体積をもつ」ことを意味し，厳密な意味の裸の特異点は発生していないものの，物理的な基準からするとWCCが成り立たないことを意味している．その後，物質が異なる様々な系で類似の現象が確認された.[5] 現在では，この現象が起きる理由は，初期値空間において，裸の特異点をもつ解に対応する初期値の集合が余次元1の部分空間となっているためと理解されている．

6. Penrose不等式と正エネルギー定理

WCC予想の研究が生み出したもう一つの興味深い数理的研究として，Penrose不等式がある．Penroseは1969年にWCC予想の反例を作る目的で，光速でつぶれる物質殻によるブラックホール形成を考えた．対応する時空は，この物質殻の軌跡である光的超曲面$\mathcal{N}$で不連続となり，$\mathcal{N}$の過去側はMinkowski時空，$\mathcal{N}$の未来側は一般に重力波を含む曲がった時空となる．この物質殻が十分小さな領域につぶれるような初期配位を取ると，この$\mathcal{N}$の直上に閉捕捉面$\mathcal{T}$が形成される．$\mathcal{N}$の外は真空なので，もし，WCCが成り立つと閉捕捉面は必ずブラックホールホライズンに含まれ，$\mathcal{T}$の面積Aはブラックホール表面積以下となると期待される．ところが，面積増大定理と一意性定理（次節）より，このブラックホール表面積の最終値は全系の重力質量Mに対応するSchwarzschildブラックホールの表面積$16\pi(GM)^2$を超えない．したがって，

$$GM \geq \sqrt{\frac{A}{16\pi}} \tag{4}$$

という不等式が成り立つことが期待される．この不等式は**Penrose不等式**と呼ばれる．

その後，G. W. Gibbonsは，この捕捉面を$\mathcal{N}$を横切ってMinkowski時空側に動かした際の$\mathcal{T}$を通過する光波面の面積増大率の変化量が，物質殻のもつ全エネルギーに比例することを用いると，Penrose不等式がMinkowski時空内の空間的2次元面に関係する幾何学量のみで書かれた不等式

$$\frac{1}{8\pi}\int_{\mathcal{T}} 2\theta \mathrm{d}A \geq \sqrt{\frac{A}{4\pi}} \tag{5}$$

で換えられることに気づき，1984年の論文でこの不等式を**等周不等式**（isoperimetric ineqality）と名付けた．ここで，θは$\mathcal{T}$を通過して広がる光波面の面積増大率である．当初，Gibbonsは，$\mathcal{T}$が3次元Euclid空間に含まれる凸な2次元面のときにのみ，この不等式を証明した．この場合は，2θは$\mathcal{T}$の各点における平均曲率[*11]と一致し，この不等式はMinkowski不等式（1903年）に帰着される．しばらくこの問題に大きな進展はなかったが，Gibbonsはついに1997年に，特別な仮定なしにこの不等式を証明し，さらに一般次元に拡張することに成功した.[6] その理由は，N. S. Trudingerが，Minkowski不等式を任意次元のEuclid空間E^n内の任意の閉超曲面Σに対する次の不等式に拡張することに成功したことによる[7]：

$$\int_{\Sigma} K \mathrm{d}A \geq (n-1)\,\Omega_{n-1}^{1/(n-1)} A^{(n-2)/(n-1)}. \tag{6}$$

ここで，KはΣの平均曲率，Ω_nはn次元単位球面S^nの面積で，等号は$\Sigma = S^{n-1}$のときに成立．このように全く非自明な数学的不等式と対応することは，WCC予想を支持する事実と見なす人が多い．

Penrose不等式はその後，初期値問題における一般的不等式型予想に拡張された.[6] これらの一般形では，Aは漸近的に平坦な初期面(Σ, q)に含まれる最も外側の捕捉面$\mathcal{T}$の面積，Mは初期面でのADM質量[*12]となる．特に，Σのスカラ曲率[*13] $R(\Sigma)$が非負で，Σが全測地的，すなわち解が時間反転不変性をもち，Σがその時間反転の不動面となる場合については，この不等式は**Riemann-Penrose不等式**と呼ばれ詳しい研究がある．この場合，$\mathcal{T}$は最も外側の極小曲面となる．P. S. JangとR. M. Waldは，1977年に**逆平均曲率流**（inverse mean curvature flow）によるこの極小曲面の連続変形を用いた証明を発表した．ここで，逆平均曲率流による変形とは，曲面$\mathcal{F}$をその法ベクトル方向に平均曲率の逆数に比例する「速度」で変形させることを意味する．ポイントは，$R(\Sigma) \geq 0$のとき，Hawking質量と呼ばれる関数$m_{\mathrm{H}}(\mathcal{F}) = (1 - \int_{\mathcal{F}} K^2/16\pi)\sqrt{A(\mathcal{F})/16\pi}$が，この変形に対して単調に増加し，しかも出発点の捕捉面$\mathcal{T}$に対して$m_{\mathrm{H}}(\mathcal{T}) = \sqrt{A/16\pi}$，無限遠の球面に近づくとき$m_{\mathrm{H}}(\mathcal{F}) \to GM$となることである．したがって，逆平均曲率流によって$\mathcal{T}$が無限遠球面に滑らかに変形できる場合には不等式が証明されることになる．

しかし，実際には，この変形は一般に特異性をもつ面を含むことが示される．この困難の克服には20年以上の歳月を要したが，ついに2001年にG. HuiskenとT. Ilmanenが不等式の厳密な証明に成功した.[6] 基本的なアイデアは，連続な変形をあきらめ，飛びのある不連続な変形を許すよう一般化することにあった．さらに，同じ年に，H. L. Brayにより全く異なった証明が発表された.[6] 彼の方法は，極小曲面の面積を保って，初期値をSchwarzschildブラックホールに対応するものに共形的に変形するというものであった．

これらPenrose不等式は，時空の安定性を保証する次の正エネルギー定理と密接に関係している：

【定理6.1（ADMエネルギーに関する正エネルギー定理）**】**

4次元Einstein方程式に対する漸近的に平坦で完備な初期値問題において，初期面Σが3次元閉多様体か$\Sigma \cong \mathbb{R}^3 - B$（$B = \sum_i B_i$, B_iは球体，∂Bは見かけのホライズン）に同相で，エネルギー運動量テンソル$T_{\mu\nu}$が支配的エネルギー条件[*14]

[*11] $\mathcal{T}$をその垂直方向に一様に微小変形したときの局所的面積増大率.

[*12] 初期面の空間計量の無限遠における振る舞い$g_{ij} = (1 + (2GM/r))\delta_{ij} + o(1/r)$から決まる質量$M$.

[*13] Ricci曲率のトレース$R = R^{\mu}_{\mu}$.

を満たすとする．このとき，初期値から決まる全系のエネルギーEと運動量$\boldsymbol{P}=(P_i)$は，$E \geq |\boldsymbol{P}|$を満たす（定義については文献8参照）．さらに，等号が成り立つのは，初期値がMinkowski時空に対応する場合のみである．

正エネルギー定理は，最初，初期面の平均曲率がゼロ（極大スライス）でブラックホールがない場合について，極小曲面論の方法でR. SchoenとS. T Yauにより1979年に証明されたが，その後，E. Wittenによりスピノールを用いた証明が1981年に提案され，1983年にはそれを用いてブラックホールが存在する場合に拡張された．さらに，1999年にはJ. Lohkampがスカラ曲率の変形に基づく証明を，2009年にはM. Peirisが山辺の定理とThurstonの幾何学化定理を用いた証明を新たに発表している．一般に，$M=(E^2-\boldsymbol{P}^2)^{1/2}$より，Penrose不等式はブラックホールを含む場合での正エネルギー定理の改良・精密化と言える．

7. BHの一意性

最も単純なBH解はよく知られているScharzschild解で，Einstein方程式の静的な球対称解である．この解は一般相対性理論が発表された1915年に発見され，翌年には電荷を帯びた球対称BH解であるReissner-Nordstrom解も発見されている．回転するBH解であるKerr解が発見されたのはさらにその47年後の1963年である．このように時間がかかったのは，やはり非線形偏微分方程式系であるEinstein方程式を厳密に解くことが大変難しいことに起因する．実際，1965年にはKerr解に複素解析接続法を適用するにより回転する電荷をもったBHを表すKerr-Newmann解が発見されているが，その後，Einstein-Maxwell系に対して，新たな正則真空BH解は発見されなかった．1972年には有名な富松・佐藤解が発表され世界を驚かせたが，この解は裸の特異性をもっていた．

静的BH　このような状況の下，これらの解以外に正則で漸近的に平坦なBH解がないことを示そうという研究が行われた．先鞭をつけたのは，W. Israelである．Einstein方程式の球対称な真空解は静的であり，したがってSchwarschild解に限るということを1923年にBirkhoffが証明したが（**Birkhoffの定理**），Israelはこの逆，すなわち，静的なら球対称であること（剛性定理）を示そうとした．ここで，静的とは定常で時間反転に対して不変である（したがって回転していない）ことを意味する．この剛性定理が示せれば直ちに，静的なBHの一意が導かれる．これまでに得られた最も一般的な静的BHに対する一意性定理は次のように表される[9]：

【定理7.1（静的BHの一意性定理）**】**　Einstein-Maxwell系において，WCCを満たす漸近的に平坦で静的なBH解は，ホライズンが非縮退ならReissner-Nordstrom解に限られ，計量は質量Mと電荷$q=\sqrt{4\pi}Q$を用いて次のように表される：

$$ds^2=-f(r)\,dt^2+\frac{dr^2}{f(r)}+r^2 d\Omega_2^2\,;\quad f(r)=1-\frac{GM}{r}+\frac{GQ^2}{r^2}.$$

また，縮退している場合は，Majumdar-Papapetrou解の一つに一致する．

ここで，ホライズンが縮退しているとは，無限小等長変換のうちホライズン上で光的となるものをkとするとき，$\nabla_k k=0$となることを意味し，Reissner-Nordstrom解では$M^2=Q^2$に対応する．そのような解は無限個存在することが知られている（Majumdar-Papapetrou解）．[9]

ξを時間推進に対応する無限小等長変換（Killingベクトル）として，その大きさを$g(\xi,\xi)=-N^2$とおくとき，静的な解を求める問題は，時間一定面に対応する3次元多様体Σの計量qと関数Nに対する初期値方程式

$$R_{ij}(q)=N^{-1}D_i D_j N\,,\quad \Delta_q N=0\,. \tag{7}$$

に帰着される．ここで，D_iはqに関する共変微分，$R_{ij}(q)$はそのRicciテンソル，$\Delta_q=D^i D_i$である．漸近的に平坦なら，ホライズン$\partial\Sigma$で$N=0$，無限遠で$N\to 1$となる．

Israelは，この方程式をNを動径座標とするΣの極座標を用いて書き下すことにより，BH表面が連結で，すべての$N=$一定面がなめらかな球面となる場合について，1967年に剛性定理を示すことに成功した．しかし，非縮退でBHが複数ある解はないのか，球面以外の位相をもつBHはないのかなどの問いに答えることはできなかった．これらの問いに予想外の方法で解答を与えたのは，G. L. Bunting，A. K. M. Masood-ul-Alam，P. J. Rubackらで，約20年後であった．証明の概要は次の通りである．まず，彼らは，時間一定面に対応する3次元Riemann多様体(Σ,q)に，ラプス関数Nを用いたWeyl変換$\hat{q}_\pm=\Omega_\pm^2 q$, $\Omega_\pm=(1\pm N)^2/4$を施すと，そのスカラ曲率がゼロに保たれることに着目した．しかも，$\hat{\Sigma}_+=(\Sigma,\hat{q}_+)$と$\hat{\Sigma}_-=(\Sigma,\hat{q}_-)$は，$N=0$となる境界のホライズン$\partial\Sigma$でなめらかにつながり，無限遠で$\Omega_-\to 0$となるので，無限遠に対応する一点を付け加えることにより，$\hat{\Sigma}_-$は滑らかなコンパクト多様体に拡張される．したがって，$\hat{\Sigma}=\hat{\Sigma}_+\cup\hat{\Sigma}_-\cup\{P\}$は，スカラ曲率がゼロかつADM質量がゼロの漸近平坦な滑らかな3次元Riemann多様体となる（図4）．ところが，正エネルギー定理より，このような多様体はEuclid空間に限られる．したがって，もとの(Σ,q)はE^3に共形となる．これは，Bachテンソルと呼ばれる3階テンソルが恒等的にゼロであることを意味するが，Bachテンソルを2乗して得られるスカラ量をNを動径座標とする座標系で書いてみると，この条件は空間が球対称であることを意味することが分かる．

回転するBH　さて，Israelの定理が発表されてから5年後の1972年に，Hawkingは定常で回転するBHは軸対称であるという剛性定理を証明した．[1]　ここで，定常とは，遠方

*14　任意の未来向きの時間的ベクトルV^μに対し$T^\mu{}_\nu V^\nu$が常に過去向きの因果的ベクトルとなるとき，支配的エネルギー条件が成り立つという．

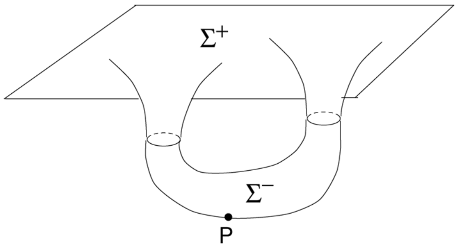

図4　静的BH時空の共形的改変.

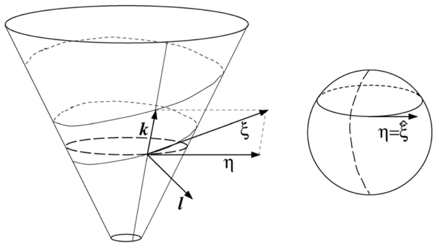

図5　回転するBHホライズンとKillingベクトル.

で時間的となるKillingベクトル$\xi=\partial_t$が存在することを，また，軸対称とは至るところ空間的でS^1（ないし一点）を軌道としてもつKillingベクトル$\eta=\partial_\phi$が存在することを意味する．この剛性定理でポイントとなることは，回転するBHでは，時間推進のKillingベクトルξがホライズン$\mathcal{H}^+$上で空間的となることである（図5）．このことから，断面S^2への射影を利用することにより，$\mathcal{H}^+$上に閉じた軌道をもつ空間的Killingベクトル$\eta=\partial_\phi$（ϕは周期2πの角度座標）で，$\xi+\Omega_h\eta$（Ω_hはBHの回転角速度と呼ばれる定数）が$\mathcal{H}^+$の光的測地線に接するものが存在することが示される．この$\mathcal{H}^+$上のKillingベクトルηを解析的にホライズンの外に拡張することにより，軸対称性が示される．したがって，Hawkingの剛性定理では，時空の解析性およびホライズンの部分多様体としての解析性の仮定が本質的である．しかし，解析性が成り立てば，場の方程式の詳細にはあまり依存しない．

Hawkingの証明では，BHの位相が球面であることも仮定されていた．この仮定の正当化は，20年後の1994年にP. ChruscielとR. Waldにより，次の**位相検閲定理**（topological censorship theorem）[10]を用いて成された．

【定理7.2（位相検閲定理）**】**　漸近的に平坦でCauchy面をもつ時空において光的収束条件が満たされるとき，$\mathscr{I}^-$と$\mathscr{I}^+$をつなぐ任意の因果的曲線は，連続的に無限遠の標準近傍内の曲線に変形できる．

ここで，無限遠の標準近傍とは，Minkowski時空の無限遠の近傍と同相な$\mathscr{I}^+\cup\mathscr{I}^-$の近傍を意味する．この定理は，時空の普遍被覆*15における光的測地線束の振る舞いに帰着することにより容易に証明できるが，非常に強力である．実際，大域的に双曲的な時空における任意の閉曲線は，1点で切り離すことにより，適当な時間的フローに沿った初期面への射影を一定に保って因果的開曲線に連続変形できるので，この定理をBH時空のDOCに適用すると，BHの位相が球面に限られるということが示される：

【定理7.3（4次元BHの位相定理）**】**　漸近的に平坦な時空のDOCがCauchy面をもつとき，光的収束条件が満たされるなら，DOCは単連結である．特に，4次元時空においてBHの各連結成分は2次元球面に同相である．

Hawkingの剛性定理により，定常で回転するBHは軸対称であることは言えるが，これはまだまだ弱い制限で，静的な場合のように，この対称性だけで解が一意的に決まるわけではない．富松佐藤解のように，特異性をもつ「BH解」は無限に存在するのである．ホライズン上および外に特異点がないという正則性の要請（WCC）のもとで解を絞り込む必要がある．この作業で重要な役割を果たしたのが，Ernst形式である（F. Ernst, 1968）．

一般に，4次元時空がKillingベクトルをもつとき，時空をこのベクトル場の軌道の集まり，すなわち3次元Riemann多様体(Σ, q)を底空間としファイバーが1次元のファイバー空間とみなすと，残りの時空計量の情報と電磁場の配位は，**Ernstポテンシャル**と呼ばれる複素関数$\mathcal{E}$と複素電磁ポテンシャルと呼ばれる複素関数Φで完全に決まり，場の方程式は3次元作用積分

$$S=\int_\Sigma *_q\left(R(q)+2\frac{|\mathrm{d}\Phi|^2}{\mathrm{Re}\,\mathcal{E}}-\frac{|\mathrm{d}\mathcal{E}+2\bar{\Phi}\mathrm{d}\Phi|^2}{2(\mathrm{Re}\,\mathcal{E})^2}\right) \tag{8}$$

より得られる変分方程式に帰着することが示される．さらに時空が定常軸対称で2つの可換なKillingベクトルをもつときには，この変分方程式は，2次元面上の2つの場$\mathcal{E}, \Phi$に対する非線形の楕円型方程式系に帰着される．この2次元系への還元は1971年にB. Carterによってなされた．彼はさらに，重力場のみの系では，境界条件のもつ連続パラメータの自由度は，質量M，角運動量Jのみであることを示した．D. C. Robinsonは1974年にこの結果を電磁場が存在する場合に拡張し，連続パラメーターの自由度は，M, Jと電荷Qのみであることを示した．ただし，これらの結果では，Kerr-Newman解以外に別の解の族が存在する可能性を排除できない．重力のみの系に対しては，この問題は，非常に複雑な恒等式を用いることにより，Robinsonにより解決され，Kerr BHが唯一の解であることが証明された．しかし，この恒等式を電磁場が存在する場合に試行錯誤により拡張することは絶望的であった．何かより深い議論に基づく恒等式の導出が切望された．

この希望を見事に叶えたのが，P. O. Mazurである．彼は，Ernst形式での理論が，（3次元重力と結合した）対称空間$\mathcal{M}=\mathrm{SU}(2,1)/S(\mathrm{U}(2)\times\mathrm{U}(1))$上の非線形$\sigma$模型となっていることに着目し，非線形$\sigma$模型の一般論から，1982年にRobinson型の恒等式を導くことに成功した．

このMazur恒等式により，連結なホライズンをもつEin-

*15 すべての位相空間は，普遍被覆と呼ばれる単連結な被覆空間を常に同型を除いて一意的にもつことが知られている．

stein-Maxwell系の漸近的に平坦な正則BH解の一意性が言えたが，BHが複数の連結成分をもつ可能性を明らかにするには，より詳しい境界値問題の研究が必要であった．この問題に大きな進展をもたらしたのは，G. Weinsteinである．彼は，いま説明した非線形σ模型としての定式化が，調和写像と呼ばれるRiemann多様体間の写像の特殊な場合であることに着目し，その成果を用いて1996年に多成分BH系に対する存在と一意性の定理を確立し，一般にN BH解は各BHの質量，電荷，角運動量とBH間の距離を表す$4N-1$個のパラメータで分類されることを示した．[9]

【定理7.4（回転するBHの一意性定理）**】** 4次元Einstein-Maxwell系において，漸近的に平坦で正則な定常BH解のDOCは，Weinstein解のどれかと等長である．特に，ホライズンが連結なら，質量M，角運動量J，電荷QをパラメータとしてもつKerr-Newman解に限られる（表式は省略[1]）．

さらに，電気的に中性のN BHの場合には，Weinstein解は，逆散乱法を用いて1978年にV. A. BelinskiiとV. E. Zhakarovにより構成された$2N$ソリトン解と一致することが，1997年にG. G. Varzuginにより示されている．ただし，$N\geq 2$の多体BH解ではBHがz軸に沿って並ぶが，一般にBH間にz軸上でコーン型特異点が発生する．2012年に，正則な中性の2体BH解が存在しないことがG. NeugebauerとJ. Hennigにより証明されたが，一般の場合については正則なものが存在するかどうかはまだ不明である．*16

Einstein-Maxwell系を超えて　これまで，たかだか電磁場しかない系を考えてきたが，現実の理論には様々な場が登場する．BH一意性定理の骨格ができて以降，これら電磁場以外の場が存在する場合の解についても研究がなされてきたが，まだ十分な分類からはほど遠い状況にある．[9] これまでの結果の大きな特徴は，Einstein-Maxwell系で成立した多くの定理が成り立たなくなることである．例えば，場として電磁場の代わりに非可換ゲージ場を考えると，球対称静的な解に限っても一意性は破れ，Schwarzschild解以外に構造の異なる正則BH解とホライズンをもたないソリトン解が現れる．これらは不安定であることが知られているが，非線形σ模型に高次相互作用を加えたスキルミオン理論や非可換ゲージ場に3重項Higgs場を加えたモデルでは，Schwarzschild解以外の安定BH解が存在する．また，非可換ゲージ場を含む系では，静的だが非球対称な解が存在することを示唆する事実もある．これら最近の結果についてはHeuslerらのレビュー[9]を参照してほしい．

*16 最近，Masood-ul-Alamが非縮退の場合に正則な多体BH解がないことを証明したとする論文を発表している［arXiv: 1407.5381］．

8.　終わりに

以上見てきたように，特異点と4次元BHに限っても，一般相対性理論における数理的研究はたいへん豊かで，現代大域的微分幾何学の主要成果といえるものを多数生み出してきたが，超弦理論の研究を背景にして近年急速に進展した高次元ブラックホールの研究は，高次元には4次元とは比べものにならないほど豊かな世界が広がっていることを示しつつある．これら高次元の探索がどのような成果をもたらすか楽しみである．

参考文献

1）S. Hawking and G. Ellis: *The Large Scale Structure of Space-Time*（Cambridge Univ. Press, 1973）.
2）高柳　匡：『ホログラフィー原理と量子エンタングルメント（SGCライブラリー106）』（サイエンス社，2014）.
3）R. M. Wald: gr-qc/9710068（1997）.
4）D. Christodoulou: Class. Quantum Grav. **16**（1999）A23.
5）C. Gundlach and J. Martín-Garicía: Living Rev. Relativity **10**（2007）5.
6）H. L. Bray and H. L.Chruściel: gr-qc/0312047（2003）.
7）M. Mars: Class. Quantum Grav. **26**（2009）193001.
8）S. Dain: arXiv: 1302.33405（2013）.
9）P. Chruściel, J. Costa and M. Heusler: Living Rev. **15**（2012）7.
10）J. Friedman, K. Schleich and D. Witt: Phys. Rev. Lett. **71**（1993）1486.

著者紹介

小玉英雄氏： 専門は重力理論，宇宙論．近年は，超弦理論アクシオンの引き起こす回転ブラックホールでの増幅反射不安定の非線形ダイナミクスとそれに伴う重力波放出など，宇宙現象による究極理論探査を中心テーマとして研究を行っている．

（2014年7月25日原稿受付）

Mathematical Aspects of General Relativity

Hideo Kodama

abstract: In this article, we overview distinguished mathematical outcomes of general relativity focusing on subjects related to singularity and four-dimensional black holes.

本記事では，本会HPの会員専用ページにおいてサプルメンタルマテリアルを掲載しています．