Positive Energy Theorem*)

(1983年2月2日受理)

京大・理　小 玉 英 雄

Abstract

本稿では，Positive Energy Theorem の spinor 法による証明をそこに現われる主要概念の解説とともに紹介する。

§ 1. Introduction

全エネルギーに対する下限の存在は物理系の安定性を保証する上で最も基本的な要請である。エネルギーの局所化が可能な対象に対しては，この要請はエネルギー密度に対する下限の存在（多くの場合非負特性）に置き換えられる。したがってそのチェックは容易であり，実際，現実的な対象では多くの場合成立している（物質場，ゲージ場等）。しかし例外も存在する。そのうちで最も重要なものが重力場である。特に Newton の重力理論では実際に重力エネルギーはいくらでも小さな負の値をとりうる。したがって重力崩壊のような重力的カタストロフはエネルギーカタストロフを伴うことになる。

このようなカタストロフが古典的な Einstein の重力理論では起こらないことを主張するのが Positive Energy Theorem である。この主張は，1957年の Weber-Wheeler [1] による重力波のエネルギーの研究以来，様々な特殊例の研究の結果として生まれて来たものである。[2)~11)] しかし，多くの人々の努力にもかかわらず，この主張が一般的に正しいかどうかは長い間不明であった。[12)] ところがここ3，4年の間にこの主張は一挙に一般的な形で肯定的に証明されてしまった。[13)~19)] 本稿では Witten-Nester 及び Ludvigsen-Vickers による Positive Energy Theorem の証明を必要な主要概念の解説とともに紹介する。

Positive Energy Theorem のおおまかな内容は，物質の局所的なエネルギー密度が非負ならば，物質と重力場を合わせた両者の全エネルギーも非負になるということである。ただこの定理には一つ大きな問題がある。それは全エネルギーの定義の問題である。よく知られているように，一般相対性理論では等価原理のために重力場の局所的なエネルギー密度の自然な定義は存在しない。[20)~22)] このため一般的な系に対して全エネルギーを定義することはできない。これに対する重要な例外が，時空が漸近的に平坦な場合である。 Positive Energy Theorem はこのような時空に対してのみ証明されている。したがっ

H. KODAMA; Dept. of Phys., Kyoto Univ.

*) 本稿は，1982年11月25日～27日に東大で開かれた GRG研究会での review talk に基づいている。

て Positive Energy Theorem の適用範囲を明確にする上で，漸近的に平坦な時空の定義及びそのような時空で全エネルギーの定義が可能である理由をはっきりさせておくことは重要である。そこで本稿ではこれらの解説に多くのスペースをさくことにした。

全エネルギーに関するもう一つの問題は，２種類の概念が存在することである。その一つは，時間一定の面内の全エネルギーという通常の定義に対応するもので ADM energy と呼ばれている。[23,24] ADM energy が定義しうるためには，時空が空間的な方向での無限遠 (spatial infinity) において漸近的に平坦であることが必要であり，その値は spatial infinity での重力場の振舞いにより決まる。この意味で ADM energy は spatial infinity から見た系の全エネルギーを表わしている。有限領域の情報は spatial infinity には決して伝わらない。したがって ADM energy は系の保存量となる。ところで，このような保存量としてのエネルギーは，系のダイナミカルな安定性の研究にはあまり役に立たない。実際，有限な領域内のエネルギーは電磁波や重力波などの放出により減少してゆくと考えられ，系のダイナミカルな安定性を保証するには，このような輻射によって無限大のエネルギーが放出されないことを示す必要がある。この輻射によって減少する全エネルギーを表わすのが第２のエネルギー概念であり，Bondi energy と呼ばれている。[25),26)] Bondi energy は輻射にそった無限遠−null infinity −から見た系の全エネルギーを表わしている（図１参照）。Bondi energy は null infinity において漸近的に平坦な時空で定義される。ある条件下では ADM energy は無限の過去における Bondi energy と見なせるが，spatial infinity における漸近的平坦性と null infinity における漸近的平坦性の間の一般的関係はよくわかっていない。[27)]

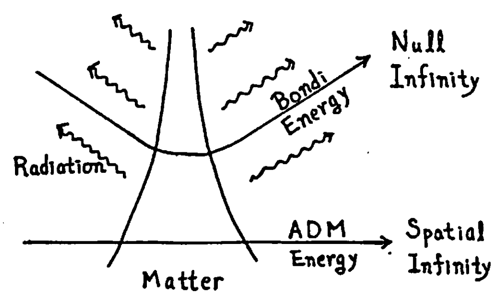

図　1

Positive Energy Theorem には現在いくつかの異なった証明法が存在する。歴史的には，まず Schoen-Yau により ADM energy の正値性が示された。[13)] 彼らの証明は，関数解析的手法と背理法に基づく極度に数学的色彩の強いものであるため，その物理的意味が分りにくいという難点があった。また漸近的平坦性の定義として強すぎる条件を採用したために，十分な一般性をもっていないという欠点も持っていた。[10),12)] このような困難を解消したのが Witten である。彼は，特殊な spinor field をたくみに利用することによって，非常に簡単で見通しのよい証明を Schoen-Yau よりずっと弱い漸近条件のもとで与えうることを示した。[14)] ただ Witten の与えた証明には一箇所重要な技術的間違いがあり，そのままでは完全なものではなかった。この困難は Nester によって Witten の方法を改良することにより解消され，最終的に ADM energy の正値性に対する完全な証明が与えられた。[15)] Witten-Nester の方法はそれまでほとんど進展のなかった Bondi energy の場合に直ちに適用され，Ludvigsen-Vickers,[16)] Horowitz-Perry,[17)] Israel-Nester,[18)] らによってほぼ同時に Bondi energy の正値性の証明が与えられた。一方で，Schoen-Yau は彼らの方法でも Bondi energy の正値性が証明できるこ

とを示した。[19] 本稿で紹介する証明は，Witten に始まる spinor 法に基づくものである。

本稿は大まかに２つの部分からなる。前半の部分（§２，§３）は ADM energy の問題，後半（§４，§５）は Bondi energy の問題にあてられる。それぞれの場合の漸近的平坦性及び全エネルギーの定義は各部分の最初の§で与えられる。ADM energy の正値性の証明（§３）は Witten 及び Nester の論文に，Bondi energy の正値性の証明（§５）は Ludvigsen-Vickers の論文に基づくものである。

§2. Spatial infinity における漸近的平坦性と ADM energy

時空が漸近的に平坦（Asymptotically Flat）であるということは，最も素朴には，適当な座標に対して時空計量 $g_{\mu\nu}^{(*)}$ が Minkowsky 計量 $\eta_{\mu\nu}$ に近づくという条件で表わされる。しかし，全エネルギーを定義したり，物質場の漸近挙動を研究するためにはこのようなゆるい条件では不十分で，$g_{\mu\nu}$ の $\eta_{\mu\nu}$ への近づき方に対する具体的な制限を与えなければならない。このような漸近条件の与え方として２通りの方法が存在する。一つは特別な座標に関する成分表示を利用する古典的方法，もう一つは一般共変性を保った方法である。

第一の方法では，遠方で通常の Minkowsky 座標の役割をする適当な座標 $(x^\mu)=(t, x, y, z)$（以下ＡＦ座標と呼ぶ）の存在を仮定すると，系の全エネルギーが遠限遠での表面積分として表わされるという事実がすべての議論の基礎となっている。一般に，Hilbert Action $\int R\sqrt{-g}\,d^4x$ の一般座標変換に対する不変性より Bianchi の恒等式

$$\nabla_\nu G^{\mu\nu}=0 \quad : \quad G_{\mu\nu}=R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \tag{2-1}$$

から次のような保存則型の恒等式が導かれる。[22]

$$\nabla_\nu(2G_\mu^{\ \nu}V^\mu+\tau^\nu)=0 \tag{2-2}$$

ここで V^μ は任意の vector field，τ^μ は V^μ と $g_{\mu\nu}$ で表わされる pseudo vector field である。(2-2) 式は Einstein 方程式

$$G^\mu_{\ \nu}=8\pi G T^\mu_{\ \nu} \tag{2-3}$$

に注意すると，$(16\pi G)^{-1}\tau^\mu$ を重力場の energy-momentum flux と解釈することにより，系の total energy-momentum flux の保存則を表わしていると見なすことができる。これより total energy-momentum の V^μ 成分 (P, V) に対する次のような定義に導かれる。

$$(P, V)=\frac{1}{16\pi G}\int_\Sigma(2G^\nu_{\ \mu}V^\mu+\tau^\nu)\,d\Sigma_\nu \tag{2-4}$$

---

*) 計量の符号は（＋－－－）とする。また，ギリシャ文字は０～３を，ラテン文字の i，j…は１～３を動くものとする。

ここでΣはかってな Space-like hypersurface である。この定義は，一見共変的でよさそうに見えるが次のような点で不満足なものである。第一に (2−2)の条件だけではτ^{μ}は一意的に定まらず反対称 tensor の発散$\nabla_{\nu}V^{\mu\nu}(V^{\mu\nu}=-V^{\nu\mu})$だけの任意性をもっている。第二に，$V^{\mu}$は全く任意であり，(2−4)式だけでは 4-vector としての total energy-momentum vector P_{μ} を定義できない。これらの任意性は，等価原理のため，重力場の energy-momentum density が共変的に定義できないことを直接反映したものであり，一般の時空で系の total energy が定義できない原因となっている。

漸近的に平坦な時空の重要な特殊性は，total energy-momentum に関する限りこのような任意性が大幅に取り除ける点にある。まず，(2−2)式は superpotential と呼ばれる反対称 tensor $U^{\mu\nu}$を使って次のように表わされる。

$$2G_{\mu}{}^{\nu}V^{\mu}+\tau^{\nu}=\nabla_{\lambda}U^{\nu\lambda} \tag{2−5}$$

これより (2−4)式の右辺はΣの境界 $\partial\Sigma$上の表面積分として表わされる。

$$(P,\ \xi)=\frac{1}{16\pi G}\oint_{\partial\Sigma}U^{\nu\lambda}\frac{1}{2}dS_{\nu\lambda} \tag{2−6}$$

ここで $dS_{\mu\nu}$ は，$\hat{t}^{\mu}$ をΣの future-directed unit normal vector，$\hat{r}^{\mu}$ を $\partial\Sigma$ のΣに接する外向きのunit normal vector として次のように表わされる。

$$dS_{\mu\nu}=\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}dS^{\lambda\sigma}=\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}dx^{\lambda}\wedge dx^{\sigma}=2\hat{t}_{[\mu}\hat{r}_{\nu]}\ dS. \tag{2−7}$$

ここで $\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}$ は

$$\epsilon^{0123}=\sqrt{-g} \tag{2−8}$$

で定義される完全反対称 tensor である。(2−6)式は，Σを時空の complete Cauchy surface とすれば，(P, V)が$U^{\mu\nu}$，従って$g_{\mu\nu}$及びV^{μ}の無限遠での漸近挙動のみに依存していて，有限な点での振舞いによらないことを表わしている。したがって漸近的に平坦な時空では，$g_{\mu\nu}$及びV^{μ}の漸近挙動をAF座標により規定することにより，(2−4)式を使って有限な 4-vector P_{μ}を明確に定義することが可能となる。ただ，この定義には依然としていくつかの任意性が残っている。一つはΣの無限遠への近づき方に関するもの，もう一つは$U^{\mu\nu}$の任意性に関するものである。第一の任意性は単なる不定性ではなく，Introduction で述べたように to·a' energy がどのような無限遠から見るかによって値が異なることを表わしている。本節で問題にしている spatial infinity の場合には，Σが遠方で t = const. 面に一致するようにとるのが自然である。対応する spatial infinity における漸近的平坦性の定義は次のようになる。

定義 1 (Asymptotic flatness at spatial infinity)

時空(M, $g_{\mu\nu}$)が spatial infinity において漸近的平坦であるとは，適当なAF座標$(x^{\mu})=(t,x,y,z)$が存在して，この座標のもとで

$$\begin{cases} g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + O\left(\frac{1}{r}\right) , \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \to \infty \; (t = \mathrm{const.}) \\ g_{\mu\nu,\lambda} = O\left(\frac{1}{r^2}\right) \end{cases} \tag{2-9}$$

となることである。

$U^{\mu\nu}$ が一般に $g_{\mu\nu,\lambda}$ について同次の一次式となるので，条件(2−9)は(2−6)式の右辺が $r \to \infty$ で有限な極限をもつことを保証している。

一方，第2の $U^{\mu\nu}$ の任意性の問題は少しやっかいである。superpotential の具体的表式に関してはこれまで様々なものが提案されている。[28)〜33)] 幸い，それらの大部分は，total energy-momentum に関する限り互いに一致しており，次の2つのタイプに分けられる。[22)] 第一のものは，いわゆる Komar superpotential

$$ {}_{K}U^{\mu\nu} \equiv \cancel{\tfrac{1}{2}}(\nabla^{\mu} V^{\nu} - \nabla^{\nu} V^{\mu}) \tag{2-10}$$

から導かれる ${}_{K}P_{\mu}$ と一致するもの，第2のものは，Landau-Lifshitz superpotential

$$ {}_{L\text{-}L}U^{\mu\nu} = V_{\lambda} \left[(-g)(g^{\lambda\mu} g^{\sigma\nu} - g^{\lambda\nu} g^{\sigma\mu}) \right]_{,\sigma} / \sqrt{-g} \tag{2-11}$$

から導かれる ${}_{L\text{-}L}P_{\mu}$ と一致するものである。${}_{K}P_{\mu}$ と ${}_{L\text{-}L}P_{\mu}$ はよく知られている漸近的に平坦な厳密解 (Schwarzchild 解，Kerr 解，Weyl 解など) に対しては一致するが，一般には互いに一致しない。Positivity の証明が与えられているのは第2の Landau-Lifshitz タイプもので，Arnowitt-Deser-Misrer による重力の正準理論 (ADM formalism)[24)] が与える canonical 4-momentum と一致するので，現在一般に ADM 4-momentum と呼ばれている。

定義2 (ADM 4-momentum)

時空が定義1の意味で spatial infinity において漸近的平坦であるとき，AF座標(x^{μ}) に関する ADM 4-momentum の成分 P_{μ} を次式で定義する。

$$P_{\mu} = -\lim_{r \to \infty} \frac{1}{16\pi G} \oint \delta^{\alpha\beta\sigma}_{\mu\nu\lambda} g^{\nu\delta} \Delta\Gamma^{\lambda}_{\delta\sigma} \frac{1}{2} dS_{\alpha\beta} \tag{2-12}$$

ここで $\Delta\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} \equiv \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} - \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}(\mathrm{flat}) \; (= O(\frac{1}{r^2}))$ は Christoffel symbolの，AF座標によって自然に定義される flat connection に対する Christoffel symbol からのずれを表わすテンソルである。

(2−12) の右辺は座標変換

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu}(x) ; \quad \xi^{\mu} = O\left(\frac{1}{r}\right), \; \xi^{\mu}{}_{,\nu} = O\left(\frac{1}{r^2}\right) \tag{2-13}$$

に対して不変であり，またAF座標の Lorentz 変換に対して P_{μ} は 4-vector として振舞うことに注意する。

以上の方法は，扱いが素朴で高度の数学的議論を必要としないため分りやすいが，特殊なAF座標にお

ける成分表示に基づくため，その定義の幾何学的意味や，異った時空間の関係が分りにくいという欠点をもつ。この欠点を取り除くために，時空の漸近的平坦性の条件や energy-momentum の定義を共変的に与えようとする試みが Geroch や Ashteker らによってなされている。[27),34),35)] この方法の興味深い点は，total energy-momentum vector がほぼ一意的に定義され，しかも様々な異ったアプローチが同一の結果を与えていることである。Null infinity における 4-momentum に対しては，このアプローチは本質的に第一の coordinate method によるものと一致する結果を与えている。(この場合については§4で詳しく紹介する。) ところが Spatial infinity における 4-momentum に対しては，2つのアプローチは一致する結果を与えない。共変的アプローチは具体的には次のような表式を与える。

$$P_\mu = \lim_{r\to\infty} -\frac{1}{8\pi}\int_{t=\mathrm{const.}} r\, C_{\mu\nu\lambda\sigma}\, \hat{r}^\nu \hat{r}^\sigma \hat{t}^\lambda \, dS \qquad (2-14)$$

ここで $C_{\mu\nu\lambda\sigma}$ は Weyl tensor である。Weyl tensor が計量の2次導関数まで含むことに注意すると，(2−14)が一般に(2−12)と一致しないことは明らかである。漸近的に平坦な厳密解に対しては両者が一致する値を与えることから，両者には何らかの関係があるはずであるが，その関係は現在のところ分っていない。興味のある読者は Ashtekar のreview 27)を参照してほしい。

§3 ADM energy の正値性

まず証明する定理の内容を正確に定式化しておく。

定義3 (Dominant Energy Condition)[36)]

物質の energy-momentum tensor $T_{\mu\nu}$ が dominant energy condition を満すとは，任意の non-negative vector V^μ, W^μ に対して

$$T_{\mu\nu} V^\mu W^\nu \geqq 0 \qquad (3-1)$$

が成立していることをいう。ここで non-negative vector とは future-directed な time-like ないし null vector を意味する。

$T_{\mu\nu}$ に対する dominant energy condition は局所的なエネルギー密度の非負値性より強い条件で，十分小さな領域に含まれる物質の energy-momentum vector が非常に non-negative であることを意味していることに注意する。

定理1 (Positivity of ADM energy)

spatial infinity において漸近的に平坦な時空において，$T_{\mu\nu}$ が dominant energy condition を満していれば，ADM 4-momentum P_μ は常に non-negative である。さらに $P_\mu=0$ ならば時空は Minkowsky 時空と一致する。

Witten-Nester によるこの定理の証明では，asymptotically constant spinor と呼ばれる spinor field が重要な役割を演ずる。そこでまず最初に，曲った時空における spinor culculus の基本的な定義をまとめておく。[37),38)] Σ を時空Mの space-like hypersurface, $e^\mu_{\underline{a}}$ ($\underline{a}=\underline{0}, \underline{1}, \underline{2}, \underline{3}$) を

orthonormal tetrad とする。但し，Σ上では $e^{\mu}_{\underline{0}}$ がΣの future-directed unit normal vector $\hat{t}^{\mu}$ に一致し，$e^{\mu}_{\underline{i}}$ がΣに接するようにとることにする。$\gamma^{\underline{a}}$ を通常の γ-matrix として γ^{μ} を次式で定義する。

$$\gamma^{\mu}=e^{\mu}_{\underline{a}}\gamma^{\underline{a}} \tag{3-2}$$

このとき関係式

$$\gamma_{\mu}\gamma_{\nu}+\gamma_{\nu}\gamma_{\mu}=2g_{\mu\nu} \tag{3-3}$$

が成立する。さらに Dirac spinor ϕの共変微分を

$$\begin{cases}\nabla_{\mu}\phi=\partial_{\mu}\phi+\Gamma_{\mu}\phi \\ \nabla_{\mu}\bar{\phi}=\partial_{\mu}\bar{\phi}-\bar{\phi}\Gamma_{\mu}\end{cases} ; \quad \Gamma_{\mu}=\frac{1}{2}\omega_{\mu}{}^{\alpha\beta}S_{\alpha\beta} \tag{3-4}$$

で定義する。ここで

$$S_{\alpha\beta}=\frac{1}{4}[\gamma_{\alpha},\gamma_{\beta}] \tag{3-5}$$

$$\omega_{\mu}{}^{\alpha\beta}=\eta^{\underline{ab}}e^{\beta}_{\underline{a}}\nabla_{\mu}e^{\alpha}_{\underline{b}} \tag{3-6}$$

である。また$\bar{\phi}$は平坦な時空と同様に $\phi^{+}\gamma^{\underline{0}}$ で定義する。漸近的平坦性の定義1より，適当なＡＦ座標のもとで $e^{\mu}_{\underline{a}}$ を次の漸近条件を満たすようにとれることに注意する。

$$\begin{cases}e^{\mu}_{\underline{a}}=\delta^{\mu}_{\underline{a}}+O(\frac{1}{r}) \\ e^{\mu}_{\underline{a},\nu}=O(\frac{1}{r^{2}})\end{cases} \quad (r\to\infty) \tag{3-7}$$

このとき

$$\Gamma_{\mu}=O(\frac{1}{r^{2}}) \tag{3-8}$$

となる。

さて，ここで§2において 4-momentum の成分を covariant に定義するために用いた asymptotically constant vector V^{μ} のspinor分解に対応するDirac spinor を導入する。

定義4（Spatially Asymptotically Constant Spinor）

Dirac spinor ϕが spatially asymptotically constant spinor（以下ＳＡＣＳと呼ぶ）であるとは，適当な constant spinor ϕ_0 が存在して，ϕが次の漸近条件を満すこととする。

$$\begin{cases}\phi=\phi_0+O(\frac{1}{r}) \\ \partial_{\mu}\phi=o(\frac{1}{r})\end{cases} \tag{3-9}$$

次に SACS と ADM 4-momentum を結びつけるために Nester による次のような反対称 tensor $E^{\mu\nu}$ を利用する。[15)]

$$E^{\mu\nu} \equiv 2\,\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}(\bar{\phi}\,\gamma_5\,\gamma_\alpha\,\nabla_\beta\,\phi - \nabla_\beta\,\bar{\phi}\,\gamma_5\,\gamma_\alpha\,\phi) \tag{3-10}$$

ここで $\gamma_5 = \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$。今 space-like hypersurface Σ を定義1の AF 座標に対して，$r\to\infty$ で $t=\mathrm{const}$ に一致するようにとり，$\nabla_\nu E^{\mu\nu}$ の Σ 上での積分を考えると Stokes の定理より次式を得る。

$$\oint_{\partial\Sigma}\frac{1}{2}E^{\mu\nu}\,dS_{\mu\nu} = \int_\Sigma \nabla_\nu\,E^{\mu\nu}\,d\Sigma_\mu \tag{3-11}$$

左辺の表面積分を評価するために，AF座標 (t，x，y，z) により定義される flat connection $\tilde{\nabla}_\mu$ 及び，対応する tetrad field $\tilde{e}^\mu_{\underline{a}}\ (=e^\mu_{\underline{a}} + O(\frac{1}{r}) : r\to\infty)$ を導入する。対応するすべての量に～をつけて表わすことにすると，条件 (3−9) 及び (3−8) 式より

$$E^{\mu\nu}\,dS_{\mu\nu} = \tilde{E}^{\mu\nu}\,d\tilde{S}_{\mu\nu} + \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\,\overline{\phi_0}\,\gamma_5(\gamma_\alpha\,S_{\gamma\delta} + S_{\gamma\delta}\,\gamma_\alpha)\,\Delta\omega_\beta^{\ \gamma\delta}\phi_0\,dS_{\mu\nu} + o(\frac{1}{r^2}) \tag{3-12}$$

と書ける。ここで

$$\Delta\omega_\mu^{\ \nu\lambda} \equiv \omega_\mu^{\ \nu\lambda} - \tilde{\omega}_\mu^{\ \nu\lambda} \tag{3-13}$$

(3−12) 式の右辺の第1項よりの表面積分への寄与は，

$$\begin{aligned}\tilde{E}^{\mu\nu} &= 2\,\tilde{\varepsilon}^{\mu\nu\alpha\beta}(\bar{\phi}_0\,\tilde{\gamma}_5\,\tilde{\gamma}_\alpha\,\tilde{\nabla}_\beta\,\phi - \tilde{\nabla}_\beta\,\bar{\phi}\,\tilde{\gamma}_5\,\tilde{\gamma}_\alpha\,\phi_0)\\ &= 2\,\tilde{\varepsilon}^{\mu\nu\alpha\beta}\,\tilde{\nabla}_\beta(\bar{\phi}_0\,\tilde{\gamma}_5\,\tilde{\gamma}_\alpha\,\phi - \bar{\phi}\,\gamma_5\,\tilde{\gamma}_\alpha\,\phi_0) + o(\frac{1}{r^2})\end{aligned} \tag{3-14}$$

と変形すると，Stokes の定理より 0 となることがわかる。一方，第2項よりの寄与は公式

$$\gamma^\mu S^{\alpha\beta} + S^{\alpha\beta}\gamma^\mu = -\varepsilon^{\mu\alpha\beta\nu}\,\gamma_5\,\gamma_\nu \tag{3-15}$$

を利用すると次のように表わされる。

$$(\bar{\phi}_0\,\gamma^\lambda\,\phi_0)\oint_{\partial\Sigma}(-1)\ \delta^{\mu\nu\beta}_{\gamma\delta\lambda}\,g^{\delta\alpha}\,\Delta\omega_\beta{}^\gamma{}_\alpha\,\frac{1}{2}dS_{\mu\nu} \tag{3-16}$$

(2−12) 式と比較すると，(3−16) 式の積分は $16\pi GP_\lambda$ と一致することが容易に分かる。したがって結局，$V^\mu = \bar{\phi}_0\,\gamma^\mu\,\phi_0$ とおいて

$$\lim_{r\to\infty}\oint_{\partial\Sigma}\frac{1}{2}E^{\mu\nu}\,dS_{\mu\nu} = 16\pi GP_\mu V^\mu \tag{3-17}$$

を得る。Spinor 表示のもとで $\phi = \begin{pmatrix}\xi^A\\ \eta_{\dot{A}}\end{pmatrix}$ とおくとき，$\sigma_{\underline{a}}$ を Pauli matrix として

$$\gamma^{\underline{a}} = \begin{pmatrix}0 & \sigma^{\underline{a}}\\ \sigma_{\underline{a}} & 0\end{pmatrix} \tag{3-18}$$

と表わされることに注意すると

$$\overline{\phi}\,\gamma^{\underline{a}}\phi=\overline{\xi}^{\dot{A}}\,\sigma_{\underline{a}}^{AB}\,\xi^{B}+\overline{\eta}_{A}\,\sigma^{\underline{a}AB}\,\eta_{\dot{B}} \tag{3-19}$$

となる。$\xi^{+}\sigma^{a}\xi$，$\eta^{+}\sigma^{a}\eta$ は常に future-directed null vector となるので（§5参照），(3−19)式は V^{μ} が常に non-negative vector であることを示している。したがって P_{μ} が non-negative vector である条件は，(3−11)式の右辺が非負であることに対応する。

この非負性を示すために，$\nabla_{\nu}E^{\mu\nu}$ を具体的に計算してみる。恒等式

$$[\nabla_{\mu},\nabla_{\nu}]\,\phi=\frac{1}{2}R^{\alpha\beta}_{\mu\nu}S_{\alpha\beta}\,\phi \tag{3-20}$$

$$G^{\alpha}_{\beta}=\frac{1}{4}\,\epsilon^{\alpha\gamma\delta\lambda}\,R^{\mu\nu}_{\gamma\lambda}\,\epsilon_{\delta\mu\nu\beta} \tag{3-21}$$

より次式を得る。

$$\nabla_{\nu}E^{\mu\nu}=2G^{\mu}_{\nu}(\overline{\phi}\,\gamma^{\nu}\,\phi)+4\,\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\,\nabla_{\nu}\overline{\phi}\,\gamma_{5}\gamma_{\alpha}\nabla_{\beta}\,\phi \tag{3-22}$$

さらにこの $\hat{t}_{\mu}$ 成分は(3−15)式より

$$\hat{t}_{\mu}\nabla_{\nu}E^{\mu\nu}=2\,\hat{t}^{\mu}\,G_{\mu\nu}(\overline{\phi}\,\gamma^{\nu}\,\phi)+4\nabla_{\alpha}\overline{\phi}(\gamma^{\underline{0}}S^{\alpha\beta}+S^{\alpha\beta}\gamma^{\underline{0}})\nabla_{\beta}\,\phi \tag{3-23}$$

と表わされる。Einstein 方程式 $G_{\mu\nu}=8\pi GT_{\mu\nu}$ 及び dominant energy condition より(3−23)の右辺の第1項は非負である。$\gamma^{\mu}S^{\alpha\beta}+S^{\alpha\beta}\gamma^{\mu}$ が μ，α，β について完全反対称であること，及び $\nabla_{\alpha}\overline{\phi}=(\nabla_{\alpha}\overline{\phi})^{+}\gamma^{\underline{0}}$ に注意すると，第2項は次のように変形できる。

$$\begin{aligned}4\nabla_{\alpha}\overline{\phi}(\gamma^{\underline{0}}S^{\alpha\beta}+S^{\alpha\beta}\gamma^{\underline{0}})\,\nabla_{\beta}\,\phi&=8(\nabla_{\underline{j}}\,\phi)^{+}S^{\underline{jk}}\,\nabla_{\underline{k}}\,\phi\\&=4\,\delta^{\underline{jk}}(\nabla_{\underline{j}}\,\phi)^{+}\,\nabla_{\underline{k}}\,\phi+4(\nabla_{\underline{j}}\,\phi)^{+}\gamma^{\underline{j}}\gamma^{\underline{k}}\,\nabla_{\underline{k}}\,\phi\end{aligned} \tag{3-24}$$

ここで $\nabla_{\underline{j}}\,\phi=e^{\mu}_{\underline{j}}\nabla_{\mu}\,\phi$。この第1項は明らかに非負である。これより ϕ を次の gauge condition(Witten 方程式)

$$\not{\nabla}\phi\equiv\gamma^{\underline{j}}\,\nabla_{\underline{j}}\,\phi=0 \tag{3-25}$$

を満たすようにとれば，(3−11)の右辺にしたがって $P_{\mu}V^{\mu}$ が非負となることが分かる。したがって，(3−25)式が4個の互いに一次独立なSACSを解としてもつことが示されれば，P_{μ} 自身が non-negative vector であることが証明されたことになる。

Witten 方程式に対するSACS解の存在は次のようにして示される。ϕ_{0} をかってな constant spinor として $\phi=\phi_{0}+\phi_{1}$ とおくと(3−25)式は

$$\not{\nabla}\phi_{1}=-\not{\nabla}\phi_{0}=-\gamma^{\underline{j}}\,\Gamma_{\underline{j}}\,\phi_{0} \tag{3-26}$$

となる。$\Gamma_{\underline{j}}=O\left(\frac{1}{r^{2}}\right)(r\to\infty)$ であることより，(3−26)式は Green 関数法を使って解くことがで

きる。すなわち，方程式

$$\not{D}_x S(x, y) = \delta(x, y) \tag{3-27}$$

の漸近条件 $\lim_{x\to\infty} S(x, y) = 0$ を満す解を使って

$$\phi_1 = -\int d^3y\, S(x, y)\, \gamma^{\underline{i}} \Gamma_{\underline{i}}(y) \phi_0 \tag{3-28}$$

を得る。2階の楕円型作用素 $\not{D}^2$ の Green 関数を $G(x, y)$ とおくと $S(x, y) = \not{D}_x G(x, y)$ となるので，$G(x, y) = O(|x-y|^{-1})(|x-y|\to\infty)$ より $S(x, y) = O(|x-y|^{-2})$ となる。したがって，$\Gamma_{\underline{i}} = O(\frac{1}{r^2})$ より $\phi_1 = O(\frac{1}{r})$，$\partial_j \phi_1 = o(\frac{1}{r})$ が得られる。以上により，任意の constant spinor ϕ_0に対して，Witten 方程式が $\phi\to\phi_0$($r\to\infty$) となる SACS を解としてもつことが示された。前のパラグラフの注意よりこれで定理1の前半が証明されたことになる。

定理1の後半を示すには次のようにすればよい。$P^\mu = 0$とすると上記の証明より $\hat{t}_\mu \nabla_\nu E^{\mu\nu} \equiv 0$，特に$\nabla_{\underline{k}} \phi = 0$が成り立つ。したがって

$$[\nabla_{\underline{j}}, \nabla_{\underline{k}}]\phi = \frac{1}{2} e^\mu_{\underline{j}} e^\nu_{\underline{k}} R_{\mu\nu}{}^{\lambda\sigma} S_{\lambda\sigma} \phi = 0 \tag{3-29}$$

が得られる。Witten 方程式は少なくとも4個の一次独立な解をもつのでこれより

$$e^\mu_{\underline{j}} e^\nu_{\underline{k}} R_{\mu\nu}{}^{\lambda\sigma} = 0 \tag{3-30}$$

となる。ところがΣは有限な領域で任意に変形しうるので，(3−30)は空間的な任意の triad $e^\mu_{\underline{i}}$ に対して成立することになる。よって $R_{\mu\nu}{}^{\lambda\sigma} = 0$，すなわち時空は平坦であることになる。

§4. Null infinity における漸近的平坦性と Bondi energy

(1) Null infinity における漸近的平坦性

null infinity における漸近的平坦性の定義にも，spatial infinity の場合と同様に coordinate method と geometrical method の2通りの方法が存在する。実際，輻射によって減少する全エネルギーとしての Bondi energy の定義を最初に与えた Bondi-van der Burg-Metzner 及び Sachs は第1の方法を利用した。しかし，null infinity の場合には spatial infinity の場合に比べて無限遠の構造はずっと複雑であり，全エネルギーを定義するのに使う hypersurface の無限遠での振舞いを詳しく規定することが必要になる。そのため一貫して特殊な座標の成分表示のみに依存する方法では議論が繁雑で見通しの悪いものとなってしまう。そこで現在では，第2の幾何学的方法が一般に使われている。本稿でもこの共変的定式化を採用することにする。

null infinity における漸近的平坦性の共変的定式化の方法として現在最も広く用いられているのは次の Penrose による conformal technique を利用したものである。

定義5 (Asymptotic Flatness at Null Infinity)[34),39)]

strongly causal, globally hyperbolic で滑らかな計量 $g_{\mu\nu}$ をもつ時空Mが future null infinity で漸近的に平坦であるとは，境界 I をもつ多様体 $\hat{M}$ とその上の滑らかな計量 $\hat{g}_{\mu\nu}$，滑らかな関数 Ω 及び M から $\hat{M}-I$ への微分同型写像が存在して（この写像で対応する点を同一視する）次の性質をもつことである。

1. M上で $\hat{g}_{\mu\nu}=\Omega^2 g_{\mu\nu}$ かつ $\Omega>0$
2. I 上で $\Omega=0$ かつ $\nabla_\mu\Omega\neq 0$
3. $\hat{L}^\mu{}_\nu\equiv R^\mu{}_\nu-\frac{1}{6}R\delta^\mu{}_\nu$ とするとき I の近傍で $\hat{L}^\mu{}_\nu=O(\Omega^2)$ *)
4. Mの任意の maximally extended future directed null geodesics は $\hat{M}$ で I に端点をもつ。

past null infinity で漸近的に平坦な場合も同様に定義される。以下では，特に future null infinity であることを明示したい場合には，I のかわりに $\mathscr{I}^+$ という記号を使う。まず言葉の説明をしておく。strongly causal という条件は時空の各点に対して十分小さな近傍をとれば，そこから出た non-spacelike curve は再びその近傍にもどってくることがないという条件で，おおまかには non-spacelike curve が存在しないことを表わす。一方，globally hyperbolic という条件は，正確な定義は抽象的で分りにくいのでここでは述べないが，意味的には時空に適当な space-like hypersurface Σ (Cauchy surface) が存在して，Σ 上のかってなデータに対して波動方程式の global な解が一意的に存在することを保証する条件である。結果的にこれら２つの条件が成り立つことは，適当な Cauchy surface Σ と時間座標 $t(\in\mathbf{R})$ が存在して時空全体が $\mathbf{R}\times\Sigma$ と同相になることと同等である。[36)]

次に定義の内容について少し解説しておく。４の条件は $\hat{M}$ ではMの null geodesics にそって未来に進むと必ず $\mathscr{I}^+$ に達することを主張している。ところが，条件１及び２はMから見れば $\mathscr{I}^+$ は無限の遠方にあることを意味する。したがって，1, 2, 4 の条件は $\mathscr{I}^+$ がMから見ると null geodesics にそって無限遠にあることを表わしている。さらに，定義５からの直接の帰結として次のような無限遠 I の性質が導かれる。[34),36),39)]

(i) I 上で $\hat{g}^{\mu\nu}\nabla_\mu\Omega\nabla_\nu\Omega=0$。すなわち I は $\hat{M}$ の null hypersurface である。

(ii) I の各 connected component は $\mathbf{R}\times S^2$ と微分同相である。

(iii) I の近傍で $\hat{L}^\mu{}_\nu=O(\Omega^4)$ のとき，$C_{\mu\nu\lambda\sigma}=\hat{C}_{\mu\nu\lambda\sigma}=O(\Omega)$

特に性質(iii)は energy-momentum tensor が遠方で十分急速に０に近づけば，定義５で規定された時空が null infinity I の近傍で漸近的に平坦であることを表わしている。この matter の energy-momentum tensor に対する条件は現実的な例では常に満されている。最後に，Black Hole を表わす時空では定義５の条件４は満たされないことに注意する。これは Horizon が存在するためである。このような場合を含めるためには条件４を次のような少しゆるい条件でおきかえなければならない。[36)]

4.′ 時空Mは４の性質をもつ時空 M′ と I の近傍で一致する。

これまで知られているすべての Black Hole 解はこの条件を満している。

ここで例として Schwarzschild 時空が定義５の意味で null infinity において漸近的に平坦であることを具体的に示しておこう。質量Mの Schwarzschild 時空は次の計量によって与えられる。

---

*) ∧をつけたテンソルの成分は，$\hat{M}$ の I の近傍で正則な座標に関するものとし，添字の上げ下げは $\hat{g}_{\mu\nu}$ で行なう。

$$ds^2=\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2-\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2-r^2(d\theta^2+\sin^2\theta\, d\varphi^2) \tag{4-1}$$

今

$$u=t-r-2M\ln\frac{r-2M}{2M}\ ,\quad x=\frac{1}{r} \tag{4-2}$$

とおくと

$$d\hat{s}^2\equiv r^{-2}ds^2=(1-2Mx)x^2du^2-2du\,dx-(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2) \tag{4-3}$$

となる。$x=0$の近傍で$d\hat{s}^2$は正則であるので，$\hat{M}$を$\{(x,u)\mid 0\leqq x,\ -\infty<u<+\infty\}\times S^2$にとり，その上の計量$\hat{g}_{\mu\nu}$を$d\hat{s}^2$で定義すれば，$\Omega=x=\frac{1}{r}$に対して定義5の1及び2の条件が満されていることは容易にわかる。この例よりΩ^{-1}は通常の空間での適当な基準点からの距離rの役割をすることが分る。またIは$x=0$に対応するので$\mathbf{R}\times S^2$の位相をもつことが直接確かめられる。

このようにPenroseの定義は一応null infinityでの漸近的平坦性の共変的な特徴づけになっていることが分るが，それがよい定義であるためにはさらに，十分多くの時空を含みかつ同時にその定義だけから十分豊富な性質が導かれる程度に強い制限になっているという2つの要請を満していることをチェックしないといけない。今までに知られている漸近的に平坦な厳密解はすべて定義5の条件を満たしていることより第一の要請は満足されている。実際はさらに，Penroseの意味で漸近的に平坦なEinstein方程式の解は無限個存在することが示されている。[40] 一方第2の要請は，時空構造を特徴づける様々な幾何的量のIの近傍での漸近的振舞いが定義5の条件のみから完全に決定されるという事実によって満たされていると言える。この漸近挙動は後ほどのBondiエネルギーの定義及びその正値性の証明において重要な役割を果すのでここで少し詳しく説明しておく。

そのためにまずNewman-Penrose fermalism [41] について簡単に解説しておく。このformalismの特徴はすべての幾何学的量を特殊なtetradに関する成分によって表わす点にある。$\{\mathbf{z}_{\underline{a}}\}=\{l,n,m,\bar{m}\}$をnull tetrad fieldとする。すなわち

$$l^\mu l_\mu=n^\mu n_\mu=m^\mu m_\mu=0,\quad l^\mu n_\mu=1,\quad m^\mu\bar{m}_\mu=-1 \tag{4-2}$$

l^μ，n^μはreal null vectorであるのに対して，m^μはcomplex null vectorであることに注意する。$\bar{m}^\mu$はm^μのcomplex conjugateである。m^μを$m^\mu=m_1^\mu+im_2^\mu$と実部と虚部に分けると，m_1^μとm_2^μは互いに直交するspace-like vectorsとなる。このtetradに対して，各方向の微分作用素を

$$\nabla_a:D=l^\mu\nabla_\mu,\quad \Delta=n^\mu\nabla_\mu,\quad \delta=m^\mu\nabla_\mu,\quad \bar{\delta}=\bar{m}^\mu\nabla_\mu \tag{4-3}$$

で定義すると，connectionはspin coefficientsと呼ばれる12コの複素量によって特徴づけられる(Appendix参照)。またcurvature tensorは，Ricci tensor $R_{\mu\nu}$に対応する10個の複素量$\Phi_{pq}(=\bar{\Phi}_{qp};\ p,q=0,1,2)$，$\Lambda$(これらは以下では必要としないので具体的定義は省略する)，及び

Weyl tensor $C_{\mu\nu\lambda\sigma}$ に対応する5個の複素量$\Phi_X(X=0\sim4)$

$$\Psi_0=-C_{1313},\ \Psi_1=-C_{1213},\ \Psi_2=-\frac{1}{2}(C_{1212}-C_{1234})$$
$$\Psi_3=C_{1224},\ \Psi_4=-C_{2424} \tag{4-4}$$

(ここで $C_{abcd}\equiv z_a^{\mu}z_b^{\nu}z_c^{\lambda}z_d^{\sigma}C_{\mu\nu\lambda\sigma}$)，計15個の量により記述される。

これらの量の null infinity の近傍での漸近挙動を具体的に表現するために，Bondi 座標と呼ばれる座標 (u，r，θ，φ) を次のような方法で導入する。まず u を u＝const. 面が out-going null hypersurface N_u の one-parameter family を与えるようにとる(図2参照)。次に $S(u)\equiv N_u\wedge\mathscr{I}^+(\cong S^2)$として，conformal factor Ωを S(u)に$\hat{g}_{\mu\nu}$から導かれた計量がユークリッド球面と isometric になるように選ぶ。S^2上の Riemann計量は常に互いに conformal equivalent であるのでこれは常に可能である。かってな u_0 に対して $S(u_0)$ 上で通常の球座標 (θ，φ) を選び，それを null infinity $\mathscr{I}^+$及び N_u の null geodesics にそって一定という条件により$\hat{M}$全体に拡張する。r 座標は N_u の out-going null geodesic generators の affine parameter (i e, $k^\mu=\partial x^\mu/\partial r$ に対して，$k^\mu\nabla_\mu k^\nu=0$)に選ぶ。次に Newman-Penrose formalism での null tetrad を $l_\mu=\nabla_\mu u$ として，$n^\mu\perp S_r(u)\equiv N_u\wedge\{r=\mathrm{const.}\}$，$m^\mu /\!/ S_r(u)$ となるように選ぶ。このとき定義5の条件のみから，Weyltensor の成分 Ψ_Xが $\Omega=0$ の近傍 ($r\to\infty$) で次のような漸近挙動をもつことが示される(重力場に対する Peeling-off Theorem)[39]。

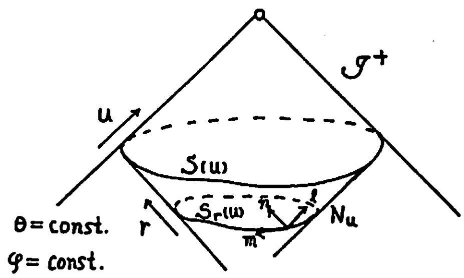

図　2

$$\Psi_X=\Psi_X^0(u,\ \theta,\ \varphi)r^{-5+X}+O(r^{-6+X})\quad (X=0\sim4) \tag{4-5}$$

さらにこれを出発点として Newman-Penrose formalism で表わされた Einstein 方程式を N_u の null geodesic generator にそって解くことにより，spin coefficients の漸近挙動も完全に決定される。[42] 結果を Appendixにまとめておく。これらの漸近公式の重要な特徴は，漸近挙動の主要部が2つの量 $\Psi_2^0(u,\ \theta,\ \varphi)$，$\sigma^0(u,\ \theta,\ \varphi)$ で完全に決定される点である。そこでこれらの量の意味を簡単に調べておく。

Schwarzschild 時空や Kerr 時空は Weyl tensor の代数的構造に基づく Petrov の分類で type D と分類される時空であり，[44]

$$\Psi_0=\Psi_1=\Psi_3=\Psi_4=0,\ \ \Psi_2\neq0\ ;\ \Psi_2^0=M(\ M\text{は質量}\ )$$

という Ψ_X の振舞いで特徴づけられる。[41),43)] Petrov type D の時空は常に time-like Killing をもつことを考慮すると，これより Ψ_2^0 は系の静的な重力質量を表わしていると解釈できる。したがって，残りの量 σ^0 は系の dynamical な情報，特に重力波の情報をになっていることが予想される。[25),26)] weak field 近似のもとで 1 方向に伝わる平面重力波に対して

$$\Psi_0=\Psi_1=\Psi_2=\Psi_3=0,\quad \Psi_4\neq 0$$

となること及び，一般に $\Psi_4^0=-\ddot{\bar{\sigma}}_0$ ($\cdot=\dfrac{\partial}{\partial u}$) と表わされることより (Appendix 参照) この予想が正しいことがわかる。一般に σ は光波面 u＝const. の shear，すなわち光波面の広がり方の異方性の程度を表わしていることを注意しておく。[45)]

(2) BMS group

物理学における保存則の存在は一般に何らかの対称性と結びついている。この視点からみると，一般の時空で total energy-momentum が定義できないのは，平坦な時空のもつ translation invariance が一般には存在しないためである。この点において漸近的に平坦な時空も例外ではない。ただ漸近的に平坦な時空には十分遠方では平坦になるという特殊性がある。したがって十分遠方では translational invariance をもつといえる。この無限遠における対称性の構造を最初に詳しく研究したのはBondi-van der Berg-Metzner[25)]及び Sachs[26)]である。彼らは Bondi 座標間の座標変換の自由度を研究し，この座標変換の全体が興味深い構造をもつ群 (BMS group) をなすこと，そしてこの対称性のおかげで，null infinity で漸近的に平坦な時空において自然な全エネルギーの定義が存在することを明らかにしたのである。(2)及び(3)では共変的定式化の立場から BMS group について解説し，null infinity から見た全エネルギーとしての Bondi エネルギーの定義を与える。以下では conformal factor Ω に対して次の条件を課す。

$$\text{I 上で}\quad \hat{\nabla}_\mu\hat{\nabla}_\nu\Omega=0\quad (\text{Bondi gauge}) \tag{4-6}$$

Ω をこの条件を満すようにとり変えることが常に可能であることは容易に示される。さらに $\hat{n}_\mu=\hat{\nabla}_\mu\Omega$ とおくと Bondi gauge では

$$\hat{n}^\mu\hat{n}_\mu=O(\Omega^2)\ (\Omega\sim 0) \tag{4-7}$$

となることも示される。[34)]

一般に null infinity で漸近的に平坦な時空では $r\to\infty$ で $g_{\mu\nu}-\eta_{\mu\nu}=O(\frac{1}{r})$ である。したがってこのような時空で漸近的な構造を保つ変換は，この変換による計量の変化が $r\to\infty$ で $O(\frac{1}{r})$ の程度になるものとするのが妥当である。そこで時空Mにおける漸近的平坦性を保つ変換を生成する vector field ASF (asymptotic symmetry field) を次のように定義する。

定義 6 (asymptotic symmetry field)[46)]

$\hat{M}$ 上の vector field $\hat{V}^\mu=V^\mu$ が ASF であるとは，$\hat{V}^\mu$ は $\hat{M}$ において I 上で正則な極限をもち，

$$\Omega^2 \mathcal{L}_{\hat{V}}\, g_{\mu\nu} \equiv \mathcal{L}_{\hat{V}} \hat{g}_{\mu\nu} - 2\Omega^{-1} \hat{V}^{\lambda} \hat{n}_{\lambda} \hat{g}_{\mu\nu} \tag{4-8}$$

がＩの近傍で滑らかでかつＩ上で０になることをいう。ここで$\mathcal{L}_V$はＶにそう Lie 微分である。Ｖが Killing vector ならば$\mathcal{L}_V g_{\mu\nu}=0$となる。したがって Killing vector はＡＳＦ であることに注意する。無限遠の対称性という意味では有限な点におけるV^μの振舞いには興味がない。そこでさらにＡＳＦの全体に同値関係

$$V^\mu \sim V^{\mu\prime} \in \{ASF\} \Longleftrightarrow \text{I上で}\ \hat{V}^\mu = \hat{V}^{\mu\prime} \tag{4-9}$$

を導入し，それによる｛ＡＳＦ｝の商集合

$$\{ISF\} \equiv \{ASF\}/\sim$$

を導入すれば，｛ＩＳＦ｝の元は null infinity Ｉの対称変換の generator を表わしていると見なせる。ISF (infinite aymmetry field) の概念は conformal scale Ω のとり変えに対して不変であり，通常の vector field の Bracket product に対して Lie algebra を形成することが容易に示される。この Lie algebra ｛ＩＳＦ｝によって生成される Lie group を BMS group と呼ぶ。

この BMS group の構造を少し詳しく調べてみよう。ＡＳＦに対する定義６の条件は次の条件と同等である。[46]

Ｉの近傍で滑らかな関数$\hat{K}$及び対称 tensor $\hat{X}_{\mu\nu}$が存在して

$$\begin{cases} \hat{V}^\mu \hat{n}_\mu = \Omega \hat{K} & (4\text{-}10) \\ \frac{1}{2}\mathcal{L}_{\hat{V}} \hat{g}_{\mu\nu} \equiv \hat{\nabla}_{(\mu} \hat{V}_{\nu)} = \hat{K}\hat{g}_{\mu\nu} + \Omega \hat{X}_{\mu\nu} & (4\text{-}11) \end{cases}$$

条件(4－10)は$\hat{V}^\mu$がＩ上でＩに接することを表わしている。すなわち$\hat{V}^\mu$はＩの微分同相変換の generator である。また条件(4－11)はこの変換がＩの conformal 変換であることを表わしている。特に(4－11)及びΩに対する gauge condition (4－6) より

$$\mathcal{L}_{\hat{V}} \hat{n}^\mu = -\hat{K}\hat{n}^\mu - \Omega(2\hat{X}^{\mu\nu}\hat{n}_\nu - \nabla^\mu \hat{K}) \tag{4-12}$$

$$\hat{n}^\mu \nabla_\mu \hat{K} = O(\Omega) \tag{4-13}$$

が得られる。(4－12)はV^μによって生成される変換がＩの null geodesic generator を null geodesic generator にうつすこと，(4－13)はこの変換の conformal factor が null geodesic generator にそって一定であることを表わしている。これらより MBS group の元はＩの各 null geodesic generator を自分自身にうつすものと，別の generator にうつすものの２つの type に分ることができる。最初の type のものは supertranslation と呼ばれている。supertranslation はＩ上で null geodesic generator にそって一定である関数αを使って$\hat{V}^\mu=\alpha\hat{n}^\mu-\Omega\hat{\nabla}^\mu\alpha$と表わされるＡＳＦと同値である。これより supertranslation の全体$\mathcal{S}$はS^2上の関数の全体と一対一に対

応し，{ISF}の無限次元 abelian ideal を作ることが容易に分る。この supertranslation の自由度を取り去ると BMS group の構造は非常に単純なものとなる。$\mathscr{S}$は ideal を作るので商集合 BMS group/$\mathscr{S}$ は再び Lie group となる。この元は上で述べたISFの一般的性質より，Iの各null geodesic generator を1点と見なして得られる orbit space $\cong S^2$(Euclid sphere)の conformal transformation となる。このような conformal transformation の全体は Lorentz group と同型であるので[47]結局

$$\text{BMS group}/\mathscr{S} \cong \text{Lorentz group}$$

となることがわかる。すなわち BMS group は Poincaré group を無限次元に拡大した構造をもているのである。

BMS group の重要な特性はその中から通常の translation に対応する4次元の ideal が自然にとり出せる点にある。それを見るために，まず通常の Minkowsky 時空において translationの generator がどのようなISFに対応するか見ておこう。 Bondi 座標において θ，φのかわりに complex coordinate ζ

$$\zeta = e^{i\varphi}\cot\frac{\theta}{2} \tag{4-14}$$

を使うことにすると，

$$u = t - r$$

に対して，x，y，z座標は

$$x = r\frac{\zeta+\bar\zeta}{1+\zeta\bar\zeta}, \quad y = ir\frac{\bar\zeta-\zeta}{1+\zeta\bar\zeta}, \quad z = r\frac{\zeta\bar\zeta-1}{1+\zeta\bar\zeta} \tag{4-15}$$

と表わされる。これより translation

$$t \to t+a, \quad x \to x+b, \quad y \to y+c, \quad z \to z+d \tag{4-16}$$

は u＝const.，$r\to\infty$で

$$\zeta \to \zeta + O(r^{-1})$$

$$u \to n + \frac{1}{1+\zeta\bar\zeta}[a(1+\zeta\bar\zeta)+b(\zeta+\bar\zeta)+iC(\bar\zeta-\zeta)+d(\zeta\bar\zeta-1)+O(r^{-1}) \tag{4-17}$$

と表わされる。したがって$\mathscr{I}^+$上での変換は

$$\zeta \to \zeta$$

$$u \to u + a + b\sin\theta\cos\varphi + c\sin\theta\sin\varphi + d\cos\theta \tag{4-18}$$

となる。すなわち，Minkowsky 時空での translation はI上でαが harmonic functions Y_{00},

$Y_{1m}(m=0,\pm 1)$ の線形結合となるような supertranslation に対応している。このような supertranslation の全体を $\mathcal{T}$ と表わすことにすると，$\mathcal{T}$ は {ISF} の ideal であることがわかる。このことは次のようにして確かめられる。(4－12) より ISF $\hat{V}^\mu$ と supertranslation $\alpha\hat{n}^\mu-\Omega\hat{\nabla}^\mu\alpha$ との bracket は次のような supertranslation になる。

$$\begin{aligned}&[\hat{V},\ \alpha\hat{n}-\Omega\hat{\nabla}\alpha]^\mu\sim\alpha'\hat{n}^\mu-\Omega\hat{\nabla}^\mu\alpha'\\&\alpha'=\hat{V}^\mu\hat{\nabla}_\mu\alpha-K\alpha\end{aligned}\tag{4-19}$$

一般に S^2 の infinitesimal conformal transformation は

$$\delta\zeta=2\zeta\delta p+\delta q-\zeta^2\delta s\ ;\ \delta p,\ \delta q,\ \delta s\in C\tag{4-20}$$

と表わされる。[47] 対応する conformal factor の変化率Kは

$$K=-\frac{1}{1+\zeta\bar{\zeta}}\left[(\zeta\bar{\zeta}-1)(\delta p+\delta\bar{p})+\bar{\zeta}(\delta q+\delta\bar{s})+\zeta(\delta\bar{q}+\delta s)\right]\tag{4-21}$$

これより，$\hat{V}^\mu\hat{\nabla}_\mu\alpha=\frac{\partial\alpha}{\partial\zeta}\delta\zeta+\frac{\partial\alpha}{\partial\bar{\zeta}}\delta\bar{\zeta}$ に注意すると，α が Y_{00}，Y_{1m} したがって $(1+\zeta\bar{\zeta})^{-1}$，$\zeta(1+\zeta\bar{\zeta})^{-1}$，$\bar{\zeta}(1+\zeta\bar{\zeta})^{-1}$，$\zeta\bar{\zeta}(1+\zeta\bar{\zeta})^{-1}$ の線形結合のとき α' も再びこれらの線形結合となることが示される。

以上の考察は Minkowsky 時空という特殊な場合に対するものであるが，無限遠の構造に関する限り一般の漸近的に平坦な時空は Minkowsky 時空と同じ構造をもつはずであるので，上記の結果は任意の漸近的に平坦な時空でも成立することが予想される。実際この予想が正しいことが Sacks によって示された。[48] すなわち，{ISF} は常に唯一の4次元 ideal $\mathcal{T}(\subset\mathcal{S})$ をもち，しかも $\mathcal{T}$ には invariant な方法で Lorentz 計量が導入でき，この計量によって $\mathcal{T}$ は Minkowsky 時空と同型になることが示せるのである。[34] さらに，Bondi 座標のもとでは，$\mathcal{T}$ の元は上記の場合と同様に harmonic function の線形結合として表わされることも示される。この4次元空間 $\mathcal{T}$ が一般の漸近的に平坦な時空において total 4-momentum を定義する際に，通常の Minkowsky 空間の役割をすることになる。

(3) Bondi 4-momentum

通常の Minkowsky 時空では，系の total 4-momentum vector P_μ は translation Killing vector V^μ の全体の作る4次元線形空間の上の functional ；$V^\mu\to P_\mu V^\mu$ と見なすことができる。この視点が，一般の漸近的に平坦な時空で total 4-momentum vector を定義する上での出発点となる。すなわち，total 4-momentum vector P_μ を(2)で導入した {ISF} の ideal $\mathcal{T}$ 上の linear functional として定義しようというわけである。もちろんこの要請だけでは P^μ は決まらない。一つの指導原理は Killing vector が存在する場合を調べてみることにより得られる。Killing vector V^μ をもつ時空では total energy (time translation Killing vector の場合) や total angular momentum (rotational Killing vector の場合) には自然な定義が与えられて，次のような Komar integral

$$\frac{1}{8\pi G}\int_{\partial\Sigma}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}\nabla^{\lambda}V^{\sigma}\,dS^{\mu\nu}=\int_{\Sigma}(T^{\mu}{}_{\nu}-\frac{1}{2}T\,\delta^{\mu}{}_{\nu})V^{\nu}\,d\Sigma_{\mu}$$

で表わされる。これより自然に次のような定義に導かれる。

定義7 (Bondi 4-momentum)

V^{μ} を $\mathscr{T}$ の元に対応するＡＳＦで gauge condition

$$\nabla_{\mu}V^{\mu}=0 \tag{4-22}$$

を満すものとする。このとき，$\mathscr{I}^{+}$ の section $S(u)=\lim_{r\to\infty}S_r(u)$ に関する系の total 4-momentum $P(u)$ の V^{μ} 方向の成分を

$$\eta(P(u),V)=\lim_{r\to\infty}\frac{1}{4\pi G}\int_{S_r(u)}l^{[\mu}n^{\nu]}\,\nabla_{\mu}V_{\nu}\,dS_r \tag{4-23}$$

で定義する。ここで η は前述の $\mathscr{T}$ における Lorentz 計量に関する内積である。

この定義は，Geroch-Winicour によるより一般的な｛ＩＳＦ｝上の functional としての“Linkage”の translation ideal $\mathscr{T}$ への特殊化である。[46]彼らは自然な一般的要請を満たす functionalとしては上記のものが唯一のものであろうと予想している。

上記の定義が well-defined であるためには，$\mathscr{T}$ の各元に対してそれと同値なＡＳＦで gauge condition (4−22) を満たすものが存在すること，(4−23)式の右辺の極限が常に存在すること，及びその値が同値なＡＳＦに対して一致することが示されねばならない。第１及第２の点はＡＳＦを特徴づける条件(4−10)，(4−11)より直ちに導かれる。今 V^{μ} を

$$V^{\mu}=A\,l^{\mu}+Bn^{\mu}+\bar{C}m^{\mu}+C\bar{m}^{\mu} \tag{4-24}$$

と null tetrad を使って表わすと，spin coefficients の漸近挙動 (Appendix) より条件(4−10) (4−11)は次のように表わされる。

$$\begin{cases} A=A_0(u,\theta,\varphi)+A_1r^{-1}+O(r^{-2})\\ B=B_0(u,\theta,\varphi)\qquad\quad +O(r^{-2})\\ C=C_0(u,\theta,\varphi)+C_1r^{-1}+O(r^{-2})\end{cases} \tag{4-25}$$

$$B_0\geqq 0,\quad \dot{B}_0\equiv\frac{\partial B}{\partial u}=0,\quad \eth^2B_0=0,\quad \eth B_0=C_0 \tag{4-26}$$

($\eth$ の定義については Appendix 参照。) $\eth^2B_0=0$ の条件は B_0 が Y_{00}，Y_{1m} の線形結合で表わされることと同値であることに注意する。I 上では $V^{\mu}=B_0n^{\mu}$ となるので一般に A_0，A_1，C_1 及び $O(r^{-2})$ の項は任意である。この任意性を利用して常に $\nabla^{\mu}V_{\mu}=0$ とできることが直接計算で確かめられる。特にに A_0 及び A_1 は次のように表わされる。

$$\begin{cases} A_0=(\eth\bar{\eth}+1)B_0\end{cases}$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
A_1 = {} & (\eth\bar\sigma^0)\eth B_0 + (\bar\eth\sigma^0)\bar\eth B_0 - \frac{1}{2}(\phi_2^0 + \bar\phi_2^0) B_0 \\
& - 2(\Psi_2^0 + \sigma^0\dot{\bar\sigma}^0 + \eth^2\bar\sigma^0) B_0 + \sigma^0\bar\eth\bar C_0 + \bar\sigma^0\eth C_0 \\
& + \sigma^0\eth\bar\sigma^0 C_0 + (\bar\sigma^0\bar\eth\sigma^0)\bar C_0 - \bar\eth C_1 - \eth\bar C_1
\end{aligned}
\right. \tag{4-27}
$$

また(4−25)より(4−23)の右辺の被積分関数が $O(r^{-2})$ の量であることが容易に確められる。

$$
2 l^{[u} n^{\nu]} \nabla_\mu V_\nu = -r^{-2} [2B_0(\Psi_2^0 + \sigma^0\dot{\bar\sigma}^0 + \eth^2\bar\sigma^0) + \bar\eth C_1 + \eth\bar C_1] \tag{4-28}
$$

(4−28)式は C_1 に陽に依存しているがこの項が積分に寄与しないことは

$$
-\oint\bar\eth C_1\, dS = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\, \{\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, C_1) + i\frac{\partial C_1}{\partial\varphi}\} = 0
$$

より分る。したがって(4−23)の gauge independence も成立している。

(4−28)及び Appendix の諸公式を利用すると次のような具体的な表式を得る。

$$
\eta\,(P(u), V) = -\frac{1}{4\pi G}\int_{S(u)} B_0(\Psi_2^0 + \sigma^0\dot{\bar\sigma}^0 + \eth^2\bar\sigma^0)\, d\hat S \tag{4-29}
$$

$$
\frac{d}{du}\eta\,(P(u), V) = -\frac{1}{4\pi G}\int_{S(u)} B_0(|\dot\sigma^0|^2 + \frac{1}{2}T_{\mu\nu}n^\mu n^\nu)\, d\hat S \tag{4-30}
$$

(4−29)式は total energy が "static energy" Ψ_2^0 と "gravitational wave energy" $\sigma^0\dot{\bar\sigma}^0 + \eth^2\bar\sigma^0$ の和となっていることを具体的に表わしている。また(4−30)式は total energy flux が重力波の寄与 $|\dot\sigma_0|^2$ と物質の輻射の flux $T_{\mu\nu}n^\mu n^\nu$ の和であり，total energy は必ず時間 u とともに減少することを示しているが，(4−29)の右辺の正値性は明らかでない。

§5 Bondi energy の正値性

この節では次の定理を証明する。

定理2 (Positivity of Bondi 4-momentum)[16)]

(M, $g_{\mu\nu}$) が次の条件を満たすとする。

(i) null infinity で漸近的に平坦。

(ii) $T_{\mu\nu}$ は dominant energy condition を満たす。

(iii) $\mathscr{J}^+$ の section S は M の中の境界をもつ compact space-like hypersurface Σ と S 及び $\partial\Sigma$ の両者に垂直な null hypersurface N で結ばれる。(図3参照)

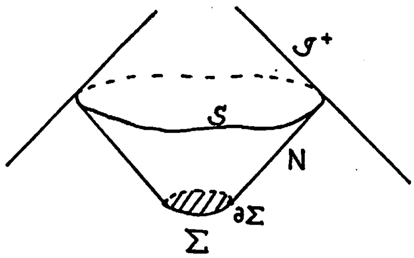

図 3

このとき P(S) は non-negative vector である。 さらに P(S) = 0 ならば時空は平坦である。

証明の基本的方法は定理1と同じである。ただ今の場合，4-component spinor より 2-component spinor を利用する方が便利であるので，まず 2-component spinor (以下単に spinor と呼

ぶ)に対する基本的な公式をまとめておく。[43),47),49)] 変換 SL(2, **C**) の基本表現に従って変換する spinor を $\xi^A (A=0, 1)$, その複素共役表現に従って変換する spinor を $\eta^{A'}(A'=0, 1)$, 対応する共変成分を $\xi_A=\xi^B\varepsilon_{BA}$, $\eta_{A'}=\eta^{B'}\varepsilon_{B'A'}$ と表わすことにする。ここで ε_{AB}, $\varepsilon_{A'B'}$ は反対称 spinorで $\varepsilon_{01}=1$。spinor と vector の対応は次の代数関係を満す混合 vector spinor $\sigma_\mu{}^{AB'}$ により与えられる。

$$\sigma_\mu{}^A{}_{C'}\sigma_\nu{}^{BC'}+\sigma_\nu{}^A{}_{C'}\sigma_\mu{}^{BC'}=g_{\mu\nu}\varepsilon^{AB} \tag{5-1}$$

$\sigma_\mu^{AB'}$ は適当な tetrad $e^\mu_{\underline{a}}$ と Pauli matrix $\sigma_{\underline{a}}^{AB}$ を使って次のように表わされる。

$$\sigma_\mu{}^{AB'}=e^{\underline{a}}_\mu\sigma_{\underline{a}}{}^{AB'}\equiv\frac{1}{\sqrt{2}}e^{a}_\mu\sigma_a{}^{AB} \tag{5-2}$$

一般に任意の vector X^μ には混合 spinor $\chi^{AA'}$ が対応する。

$$X^\mu\rightarrow\chi^{AA'}=X^\mu\sigma_\mu{}^{AA'}(\text{以下 } X^\mu=\chi^{AA'} \text{と書く。}) \tag{5-3}$$

X^μ が real vector ならば $(\chi^{AA'})$ は hermitian matrix になる。また null vector K^μ は適当な spinors ξ^A, $\eta^{A'}$ を使って

$$K^\mu=\xi^A\eta^{A'} \tag{5-4}$$

と分解される。特に K^μ が real null vector ならば $\eta^{A'}=\pm\bar{\xi}^A(\equiv\pm\bar{\xi}^{A'})$ ととることができる。ここで+は future directed の場合, −は past directed の場合に対応する。この null vector の spinor 分解を利用すると, §4で導入した null tetrad $\{l, n, m, \bar{m}\}$ は spinor basis $\{o^A, \iota^A\}$ に分解される。

$$l^\mu=o^A\bar{o}^{A'},\quad n^\mu=\iota^A\bar{\iota}^{A'},\quad m^\mu=o^A\bar{\iota}^{A'},\quad \bar{m}^\mu=\iota^A\bar{o}^{A'} \tag{5-5}$$

ここで

$$o_A\iota^A=-o^A\iota_A=1 \tag{5-6}$$

spinor の共変微分は要請

$$\nabla_\mu\sigma_\nu{}^{AB'}=0,\quad \nabla_\mu\varepsilon^{AB}=0,\quad \nabla_\mu\varepsilon^{A'B'}=0 \tag{5-7}$$

により一意的に決まる。具体的には(3−6)で定義された connection form $\omega_\mu{}^{\alpha\beta}$ 及び Pauli matrix を使って次のように表わされる。

$$\begin{cases}\nabla_\mu\xi^A=\partial_\mu\xi^A+\Gamma_\mu{}^A{}_B\xi^B\\ \nabla_\mu\eta^{A'}=\partial_\mu\eta^{A'}+\bar{\Gamma}_\mu{}^{A'}{}_{B'}\eta^{B'}\end{cases} \tag{5-8}$$

$$\begin{cases} \Gamma_{\mu}{}^{A}{}_{B} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\Gamma_{\mu 0 \underline{j}}\,\sigma_{j}^{AB} - \dfrac{1}{4}\Gamma_{\mu \underline{k}\underline{l}}\,[\sigma_{\underline{k}},\ \sigma_{\underline{l}}]^{AB} \qquad (\underline{j},\ \underline{k},\ \underline{l} = 1,\ 2,\ 3) \\ \bar{\Gamma}_{\mu}{}^{A'}{}_{B'} = \overline{\Gamma_{\mu}{}^{A}{}_{B}} \end{cases} \tag{5-9}$$

spinor 表示で 4-component spinor が $\Psi = \binom{\xi^{A}}{\eta_{A'}}$ と表わされることに注意すると，(3-4) と (5-8) は一致することが確かめられる。spinor basis の共変微分 $i^{1}\bar{i}^{A'}\nabla_{AA'}o^{B}$ ……は Newman-Penrose formalism の spin coefficient を使って表わすことができる。対応を Appendixにまとめておく。

§4で述べたように Bondi 4-momentum を定義するためには $\mathcal{T}$ の元を表わす ASF が必要である。Witten の spinor 法を Bondi 4-momentum の正値性の証明に利用するためには，さらにこの ASFの spinor 分解を行わなければならない。そこで次のような asymptotically constant spinor (ACS) という概念を導入する。

定義 8 (asymptotically constant spinor)[50]

λ^{A} が ACS であるとは，$\lambda^{A} = X o^{A} + Y i^{A}$ とおくとき，X，Y の l^{μ} にそう $r \to \infty$ での漸近挙動が次のようになることをいう。

$$\begin{cases} X = X_{0}(u,\ \theta,\ \varphi) + r^{-1}X_{1}(u,\ \theta,\ \varphi) + O(r^{-2}) + O(r^{-2}) \\ Y = Y_{0}(u,\ \theta,\ \varphi) \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + O(r^{-2}) \end{cases} \tag{5-10}$$

$$\dot{Y}_{0} = 0,\quad \eth Y_{0} = 0,\quad \bar{\eth} Y_{0} = X_{0} \tag{5-11}$$

$\eth Y_{0} = 0$ という条件は適当な複素数 a，b を使って $Y_{0} = a_{1/2}Y_{1/2\,1/2} + b_{1/2}Y_{1/2\,-1/2}$ と表わされることと同等であることが，spin weighted spherical harmonics ${}_{s}Y_{lm}$ ($|s| \leq l$) の完全性と公式

$$\begin{cases} \eth\,{}_{s}Y_{lm} = \left[(l+s+1)\dfrac{(l-s)!}{(l-s-1)!}\right]^{1/2} {}_{s+1}Y_{lm} \qquad |s| \leq l-1 \\ \eth\,{}_{s}Y_{sm} = 0 \end{cases} \tag{5-12}$$

より示される (Appendix 参照)。さらに

$$|Y_{0}|^{2} = \frac{|a|^{2}+|b|^{2}}{2\sqrt{\pi}}Y_{00} + \frac{|b|^{2}-|a|^{2}}{2\sqrt{3}\,\pi}Y_{10} + \frac{ab^{*}}{\sqrt{6}\,\pi}Y_{11} + \frac{a^{*}b}{\sqrt{6}\,\pi}Y_{1-1} \tag{5-13}$$

となることに注意すると，null vector $K^{\mu} = \lambda^{A}\bar{\lambda}^{A'}$ は $\mathcal{T}$ に属する ASF であり，かつ任意の $\mathcal{T}$ の元は a，b を適当にとることによりこの vector と同値になることがわかる。

この ACS を使って次のような反対称 tensor $F_{\mu\nu}$ を定義する。

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \phi_{AB}\,\epsilon_{A'B'} + \epsilon_{AB}\,\bar{\phi}_{A'B'} \\ \phi_{AB} &= \frac{1}{2}\left[\lambda_{(A}\nabla_{B)}{}^{C'}\bar{\lambda}_{C'} - \bar{\lambda}_{C'}\nabla^{C'}{}_{(A}\lambda_{B)}\right] \end{aligned} \tag{5-14}$$

ここで

$$\nabla_{AB'}=\sigma^{\mu}{}_{AB'}\,\nabla_{\mu} \tag{5-15}$$

である。公式[43)]

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\sigma_{\alpha AA'}\sigma_{\beta BB'}\sigma_{\gamma CC'}\sigma_{\delta DD'}$$
$$=4\,i\,[\varepsilon_{AC}\varepsilon_{A'C'}\varepsilon_{BD}\varepsilon_{B'D'}-\varepsilon_{AD}\varepsilon_{A'D'}\varepsilon_{BC}\varepsilon_{B'C'}] \tag{5-16}$$

及び γ-matrix の spinor 表示

$$\gamma^{5}=\sqrt{-g}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \tag{5-17}$$

$$(\gamma_{\mu}\sigma^{\mu}_{AA'})\begin{pmatrix}\xi^{B}\\ \eta_{C'}\end{pmatrix}=\sqrt{2}\begin{pmatrix}\delta^{B}_{A}\bar{\eta}_{A'}\\ \varepsilon_{C'A'}\xi_{A}\end{pmatrix} \tag{5-18}$$

を利用すると，$\phi=\begin{pmatrix}\lambda^{A}\\ 0\end{pmatrix}$ ないし $\phi=\begin{pmatrix}0\\ \bar{\lambda}_{A'}\end{pmatrix}$ に対して $F_{\mu\nu}$ は§3で利用した Nester tensor $E_{\mu\nu}$ の定数倍であることが分る。

$$F_{\mu\nu}=4\sqrt{2}\,E_{\mu\nu} \tag{5-19}$$

さて，ACS及び spin coefficients の $r\to\infty$ での漸近挙動を利用すると，公式(4−29)より§3の(3−17)に対応する次の公式を容易に示すことができる。($B_0=|Y_0|^2$ となることに注意。)

$$\lim_{\substack{r\to\infty\\ u=\mathrm{cost.}}}\frac{1}{4\pi G}\int_{s_r(u)}F_{\mu\nu}\,l^{\mu}n^{\nu}\,ds_r=\eta(P(u),K) \tag{5-20}$$

したがって定理2の証明すなわち(5−20)の右辺の非負値性は定理1の場合と同じ手続きで行うことができる。まず Stokes の定理より

$$\begin{aligned}4\pi G\eta(P,K)&=\lim_{r\to\infty}\int_{s_r}l^{\mu}n^{\nu}F_{\mu\nu}\,ds_r\\ &=\lim_{r\to\infty}\frac{1}{2}\int_{s_r}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}F^{\lambda\sigma}\,ds^{\mu\nu}\\ &=\int_{N}\nabla^{\nu}F_{\mu\nu}\,d\Sigma^{\mu}+\int_{\Sigma}\nabla^{\nu}F_{\mu\nu}\,d\Sigma^{\nu}\end{aligned} \tag{5-21}$$

$\phi=\begin{pmatrix}0\\ \bar{\lambda}_{A'}\end{pmatrix}$ に対して

$$\bar{\phi}\gamma^{\mu}\phi=\sqrt{2}\,\sigma^{\mu}{}_{AA'}\lambda^{A}\bar{\lambda}^{A'}=\sqrt{2}\,K^{\mu} \tag{5-22}$$

となること及び(5−19)式に注意すると，(3−22)より $\nabla^{\nu}F_{\mu\nu}$ は次のように表わされる。

$$\nabla^{\nu}F_{\mu\nu}=\frac{1}{2}G_{\mu\nu}V^{\nu}+\frac{1}{2}\left[(\nabla_{A'}{}^{B}\bar{\lambda}_{C'})\nabla^{C'}_{(A}\lambda_{B)}-(\nabla_{A'}{}^{B}\lambda_{(A})\nabla^{C'}_{B)}\bar{\lambda}_{C'}+\text{complex conj.}\right] \tag{5-23}$$

(5−21) の第1項の null surface N 上の積分は (5−23) 及び Einstein 方程式より次のようになる。

$$\int_N l^\mu \nabla^\nu F_{\mu\nu}\, dN = 4\pi G \int T_{\mu\nu}\, l^\mu K^\nu\, dN$$
$$+\frac{1}{2}\int_N o^A \bar{o}^{A'} \left[(\nabla_{A'}{}^B \bar{\lambda}_{C'}) \nabla^{C'}_{(A} \lambda_{B)} - (\nabla_{A'}{}^B \lambda_{(A}) \nabla^{C'}_{B)} \bar{\lambda}_{C'} + \text{c.c.} \right] dN \tag{5−24}$$

この第1項は dominant energy condition より非負である。

$$P = o^A \delta \lambda_A,\quad Q = o^A \bar{\delta} \lambda_A,\quad R = o^A D \lambda_A,\quad S = i^A D \lambda_A,\quad T = i^A \delta \lambda_A \tag{5−25}$$

とおくと，第2項は次のように表わされる。

$$|P|^2 - |Q|^2 - (\bar{T}R + T\bar{R}) + \bar{S}Q + S\bar{Q} \tag{5−26}$$

λ^A は (5−10) (5−11) の条件を満す限り任意であるので，さらに次のような gauge condition を課すことによりその任意性を制限することにする。

$$D\lambda^A = nQ\,o^A \tag{5−27}$$

ここで n は任意の数である。このとき (5−26) は

$$|P|^2 + (2n-1)|Q|^2$$

となり，$n \geqq \frac{1}{2}$ ととれば非負にできることがわかる。したがって (5−24) の右辺が非負であることを示すには，(5−27) の条件が強すぎないことを示せばよい。$\lambda^A = X o^A + Y i^A$ とおくと (5−27) は次の条件と同等である。

$$\begin{cases} DX = -n\bar{\delta}Y + n\rho X + (n\alpha - \pi)Y \\ DY = 0 \end{cases} \tag{5−28}$$

$D = l^\mu \nabla_\mu = \partial/\partial r$ であることに注意すると，まず第2式より $Y \equiv Y_0(u, \theta, \varphi)$ となり，(5−28) は X に対する N の null geodesic generator にそう常微分方程式となることがわかる。spin coefficients の漸近挙動より (5−28) の第1式が λ^A に対する漸近条件と矛盾しないことが容易に示される。したがって n の任意性を除いて，各 Y_0 に対して λ^A が条件 (5−27) により一意的に決まることがわかる。

次に spacelike surface Σ 上の積分の非負値性を示す。(5−23) より Σ の future-directed unit normal を $\hat{t}^\mu$ として

$$\int_\Sigma \nabla^\nu F_{\mu\nu}\, d\Sigma^\mu = 4\pi G \int_\Sigma \hat{t}^\mu K^\nu T_{\mu\nu}\, d\Sigma$$
$$+\frac{1}{2}\int_\Sigma t^{AA'} \left[(\nabla_{A'}{}^B \bar{\lambda}_C) \nabla^{C'}_{(A} \lambda_{B)} - (\nabla_{A'}{}^B \lambda_{(A}) \nabla^{C'}_{B)} \bar{\lambda}_{C'} + \text{c.c.} \right] d\Sigma \tag{5−29}$$

第1項は dominant energy condition より非負である。ここで λ^A に対して gauge condition

$$D_{AA'}\lambda^A = 0 : D_\mu = h_\mu{}^\nu \nabla_\nu ,\quad h_\mu{}^\nu = \delta_\mu{}^\nu - \hat{t}_\mu \hat{t}^\nu \tag{5-30}$$

を課すと，(5−29) の第2項は次のようになる。

$$\begin{aligned} &-\int_\Sigma h^{\mu\nu}\hat{t}^{AA'}(D_\mu \lambda_A)(D_\nu \bar{\lambda}_{A'})\, d\Sigma \\ &= \int_\Sigma \hat{t}^{AA'} \varphi_{\underline{i}A} \overline{\varphi_{\underline{i}A'}}\, d\Sigma \end{aligned} \tag{5-31}$$

ここで $\varphi_{\underline{i}}^A \equiv e_{\underline{i}}^\mu D_\mu \lambda^A$。$\hat{t}^\mu$ が future directed timelike vector であるので $t^{AA'}$ は正値 hermite 形式である。したがって (5−31) は非負である。残るは gauge condition (5−30) の解の存在である。まず (5−30) 式が Witten 方程式 (3−25) の 2-component spinor 表示になっていることに注意する。これより (5−30) 式は § 3 と同様に Green 関数を使って解くことができる。境界条件は，(5−27) の条件によって $\partial\Sigma = \partial N - S$ 上で n の任意性を除いて Y_0 により完全に決定されている。したがって，Witten 方程式が楕円型の偏微分方程式であることより，各 Y_0 ごとに (5−30) の解が一意的に存在する。以上により $\eta(P(u), K)$ が非負であることが示された。定理の後半は，gauge condition (5−27) (5−30) の解が Y_0 の自由度に従って4次元的自由度をもつことより § 3 の証明と全く同様にして示される。

最後に定理の精密化についていくつか注意しておく。その一つは，Bondi 4-momentum の場合には，P_μ が null vector という条件から $P_\mu = 0$，したがって時空が平坦であることが示されることである。証明については Ashteker & Horowitz 51) を参照してほしい。このような定理は ADM 4-momentum の場合には成立しない。ADM 4-momentum が null vector となる時空としてどのようなものが存在するかは Witten の論文14) に詳しく述べられている。第2の注意は，定理2における特殊な面 $NU\Sigma$ の存在に関するものである。このような面の存在は必ずしも必要でないことが Horowitz-Perry によって示されている。[17]

§ 6　Final Remark

以上で示したように，一般相対性理論特有の概念的なむずかしさを別にすれば，Spinor 法による Positive Energy Theorem の証明は予想外に単純で見通しのよいものである。この事実はその主役である asymptotically constant spinor というものが単なる技術的な道具を越えた意味をもっていることを示唆しているように思われる。この点で，Witten の idea が Deser-Teitelboim[52] 及び Grisaru による，Supersymmetric な量子系の Hamiltonian の正値性と Positive Energy Theorem の関連についての考察に根ざすものであることは興味深い。

現在ではすでに Positive Energy Theorem の様々な応用の研究も進められている。特に Schoen-Yau によって Positive Energy Theorem から重力の量子論における Action の正値性[54] が導かれることが示されている。[55] これらについては原論文を参照していただきたい。

Acknowledgement

Newman-Penrose formalismについて色々教えていただいた佐々木節氏及び，本稿を書くことを進めて下さった佐藤文隆教授に感謝します。

Appendix

(1) Spin coefficients の定義[41)]

a \ [b, c]	[1, 2]	[1, 3]	[1, 4]	[2, 3]	[2, 4]	[3, 4]
D 1	$\varepsilon+\bar{\varepsilon}$	κ	$\bar{\kappa}$	$-\bar{\pi}$	$-\pi$	$\bar{\varepsilon}-\varepsilon$
Δ 2	$\gamma+\bar{\gamma}$	τ	$\bar{\tau}$	$-\bar{\nu}$	$-\nu$	$\bar{\gamma}-\gamma$
δ 3	$\beta+\bar{\alpha}$	σ	$\bar{\rho}$	$-\bar{\lambda}$	$-\mu$	$\bar{\alpha}-\beta$
$\bar{\delta}$ 4	$\alpha+\bar{\beta}$	ρ	$\bar{\sigma}$	$-\bar{\mu}$	$-\lambda$	$\bar{\beta}-\alpha$

$$\mathbf{z}_a^{\mu}:\ \mathbf{z}_1^{\mu}=l^{\mu},\quad \mathbf{z}_2^{\mu}=n^{\mu},\quad \mathbf{z}_3^{\mu}=m^{\mu},\quad \mathbf{z}_4^{\mu}=\bar{m}^{\mu}$$

$$\gamma_{cba}\equiv \mathbf{z}_b^{\mu}\nabla_a \mathbf{z}_{c\mu}=-\gamma_{bca}$$

$<\gamma_{cba}$ の表$>$

$\underline{AB}'$ \ $\underline{CD}$	(0, 0)	(0, 1)	(1, 1)
D 00′	κ	ε	π
Δ 11′	τ	γ	ν
δ 01′	σ	β	μ
$\underline{\bar{\delta}}$ 10′	ρ	α	λ

$$\zeta_{\underline{A}}^{B}:\ \zeta_{\underline{0}}^{A}=o^{A},\quad \zeta_{\underline{1}}^{A}=\iota^{A}$$

$$\Gamma_{\underline{AB}'\underline{CD}}\equiv \zeta_{\underline{A}}^{P}\bar{\zeta}_{\underline{B}'}^{Q}\zeta_{\underline{D}}^{S}\nabla_{PQ}\zeta_{\underline{C}}^{R}=\Gamma_{\underline{AB}'\underline{DC}}$$

$<\Gamma_{\underline{AB}'\underline{CD}}$ の表$>$

(2) Spin coefficients の漸近挙動[42)]

Bondi 座標では微分作用素 ∇_a は次のように表わされる。

$$\begin{cases} D=\partial/\partial r \\ \Delta=\partial/\partial u+(U+\omega\bar{\omega})\,\partial/\partial r+(X^{I}-\bar{\omega}\xi^{I}-\omega\bar{\xi}^{I})\,\partial/\partial x^{I} \\ \delta=\xi^{I}\,\partial/\partial x^{I},\quad \bar{\delta}=\bar{\xi}^{I}\,\partial/\partial x^{I} \end{cases}$$

ここで $I=1,2\,;\ x^1=\theta,\ x^2=\varphi$

このとき，∇_a 及び Spin-coefficients は次のような漸近挙動 ($r\to\infty$) をもつ。

$$\begin{cases} \Delta=\partial/\partial u-\partial/\partial r-r^{-2}\left[(\eth\bar{\sigma}^0)\delta+(\eth\sigma^0)\bar{\delta}\right]+O(r^{-3}) \\ \xi^1=r^{-1}-\sigma^0 r^{-2}+|\sigma^0|^2 r^{-3}+O(r^{-4}) \\ -i\sin\theta\,\xi^2=r^{-1}+\sigma^0 r^{-2}+|\sigma^0|^2 r^{-3}+O(r^{-4}) \end{cases}$$

$$\rho=-r^{-1}+O(r^{-3}),\qquad \alpha=\alpha^0 r^{-1}+(\bar{\alpha}^0\bar{\sigma}^0-\eth\bar{\sigma}^0)r^{-2}+O(r^{-3})$$

$$\sigma=\sigma^0 r^{-2}+O(r^{-4}),\qquad \beta=-\bar{\alpha}^0 r^{-1}-\sigma^0\alpha^0 r^{-2}+O(r^{-3})$$

$$\tau=-(\bar{\eth}\sigma^0)r^{-2}+O(r^{-3}),\qquad \gamma=\left(\alpha^0\bar{\eth}\sigma^0-\bar{\alpha}^0\eth\bar{\sigma}^0-\frac{1}{2}\Psi_2^0\right)r^{-2}+O(r^{-3})$$

$$\kappa=0,\qquad \varepsilon=0$$

$$\lambda=O(r^{-1}),\qquad \nu=O(r^{-1})$$

$$\mu=-r^{-1}-(\Psi_2^0+\sigma^0\dot{\bar{\sigma}}^0+\eth^2\bar{\sigma}^0)r^{-2}+O(r^{-3})$$

$$\pi=-(\eth\bar{\sigma}^0)r^{-2}+O(r^{-3})$$

ここで

$$\alpha^0=-\frac{1}{2}\cot\theta$$

また微分作用素 $\eth$ は次のように定義される。[47]

η が spin weight s の量であるとき，すなわち spacelike vector $\mathrm{Re}(m^\mu)$, $\mathrm{Im}(m^\mu)$ の回転 $m^\mu\to e^{i\vartheta}m^\mu$ に対して η が $\eta\to e^{is\vartheta}\eta$ と変換されるとき，

$$\eth\eta=-\sin^s\theta\left[\partial/\partial\theta+(i/\sin\theta)\partial/\partial\varphi\right](\sin^{-s}\theta\,\eta)$$

$$\bar{\eth}\eta=-\sin^{-s}\theta\left[\partial/\partial\theta-(i/\sin\theta)\partial/\partial\varphi\right](\sin^{s}\theta\,\eta)$$

$\eth\eta$ 及び $\bar{\eth}\eta$ はそれぞれ spin weight $s+1$, $s-1$ の量になる。また $\eth$ と $\bar{\eth}$ は次の交換関係を満す。

$$(\bar{\eth}\eth-\eth\bar{\eth})\eta=2s\eta$$

(3) Ψ_X^0 と σ^0 の関係[42]

$$\Psi_4^0=-\ddot{\bar{\sigma}}_0$$

$$\bar{\Psi}_3^0=\eth\dot{\bar{\sigma}}^0$$

$$\Psi_2^0-\bar{\Psi}_2^0=\bar{\eth}^2\sigma^0-\eth^2\bar{\sigma}^0+\bar{\sigma}^0\dot{\sigma}^0-\sigma^0\dot{\bar{\sigma}}^0$$

$$\dot{\Psi}_2^0=-\eth^2\dot{\bar{\sigma}}^0-\sigma^0\ddot{\bar{\sigma}}^0$$

$$\dot{\Psi}_1^0=-\eth\Psi_2^0+2\sigma^0\eth\dot{\bar{\sigma}}^0$$

$$\dot{\Psi}^0_0 = -\eth \Psi^0_1 + 3\,\sigma^0 \Psi^0_2$$

(4) spin-weighted spherical harmonics[47)]

ζを(4−14)式で定義される complex angular coordinate とするとき，spin-weighted spherical harmonics ${}_sY_{lm}(\theta, \varphi)$ は次式で定義される。

$$ {}_sY_{lm} = \frac{a_{lm}}{[(l-s)!(l+s)!]^{1/2}} (1+\zeta\bar{\zeta})^{-l} \sum_p \binom{l-s}{p} \binom{l+s}{p+s-m} \zeta^p (-\bar{\zeta})^{p+s-m} $$

$$ a_{lm} = (-1)^{l-m} [(l+m)!(l-m)!(2l+1)/4\pi]^{1/2} $$

${}_sY_{lm}$ は次のような性質をもつ。

$$ {}_s\bar{Y}_{lm} = (-1)^{m+s}\,{}_{-s}Y_{l-m} $$

$$ \eth\,{}_sY_{lm} = [(l-s)(l+s+1)]^{1/2}\,{}_{s+1}Y_{lm} $$

$$ \bar{\eth}\,{}_sY_{lm} = -[(l+s)(l-s+1)]^{1/2}\,{}_{s-1}Y_{lm} $$

$$ \bar{\eth}\eth\,{}_sY_{lm} = -(l-s)(l+s+1)\,{}_sY_{lm} $$

${}_sY_{lm}$ は各 $s(l \geqq s)$ に対して完全系をなす。したがって spin weight s の量は ${}_sY_{lm}$ で級数に展開できる。

References

1) J. Weber and J. A. Wheeler, Rev. Mod. Phys. **29** (1957), 509.

2) H. Araki, Ann. Phys. (N.Y.) 7 (1959), 456.

D. Brill, Ann. Phys. (N.Y.) 7 (1959), 466.

R. Arnowitt, S. Deser and C. Misner, Ann. Phys. (N.Y.) **11** (1960), 116.

3) D. Brill and S. Deser, Ann Phys. (N.Y.) **50** (1968), 548.

D. Brill, S. Deser and L. Faddeev, Phys. Lett **26A** (1968), 538.

4) C. Leibovitz and W. Israel, Phys. Rev. **D1** (1970), 3226.

C. Misner, in astrophysics and general relativity, M. Chretien, S. Deser and J. Goldstein (ed.) New York, Gordon and Breach, 1971.

5) R. Geroch, Ann. N.Y. Acad. Sci. **224** (1973), 108; Proc. Symp. Pure Math. **27** (1975), 401.

6) N. O'Murchadha and J. W. York, Jr., Phys. Rev. **D10** (1974), 2345.

7) P. S. Jang, J. Math. Phys. **17** (1976), 141.

8) Y. Choquet-Bruhat and J. Marsden, C. R. Acad. Sci. **282** (1976), 609; Comm. Math. Phys.

51 (1976), 283.

9) P. S. Jang, J. Math. Phys. **19** (1978), 1155.

10) P. S. Jang, Comm. Math. Phys. **69** (1979), 257.

11) R. Geroch and G. T. Horowitz, Ann. Phys. **117** (1979), 1.

12) D. R. Brill and P. S. Jang, in General Relativity and Gravitation, A. Held (ed.), Plenum Press, 1980.

13) P. Schoen and S. T. Yau, Comm. Math. Phys. **65** (1979), 45; Phys. Rev. Lett. **43** (1979), 1457.

14) E. Witten, Comm. Math. Phys. **80** (1981), 381.

15) J. M. Nester, Phys. Lett. **83A** (1981), 241.

16) M. Ludvigsen and J. A. Vickers, J. Phys. **A14** (1981), L389; J. Phys. **A15** (1982), L. 67.

17) G. T. Horowitz and M. J. Perry, Phys. Rev. Lett. **48** (1982), 371.

18) W. Israel and J. M. Nester, Phys. Lett. **85A** (1981), 259.

19) R. Schoen and S. T. Yau, Phys. Rev. Lett. **48** (1982), 369.

20) A. Trautman, in Gravitation, L. Witten (ed.), John Wiley and Sons, N.Y., 1962.

21) C. Misner, K. S. Thorne and J. A. Wheeler, Gravitation, W. H. Freeman, 1973.

22) J. N. Goldberg, in General Relativity and Gravitation, A. Held (ed.), Plenum Press, 1980.

23) R. Arnowitt, S. Deser and C. W. Misner, Phys. Rev. **117** (1960), 1515; **118** (1960), 1100; **121** (1961), 1556; **122** (1961), 997.

24) R. Arnowitt, S. Deser and C. W. Misner, in Gravitation an introduction to current research, L. Witten (ed.), N.Y., Wiley, 1962.

25) H. Bondi, M. G. J. van der Burg and A. W. K. Metzner, Proc. Roy. Soc. **A269** (1962), 21.

26) R. Sachs, Proc. Roy. Soc. **A270** (1962), 103.

27) A. Ashtekar, in General Relativity and Gravitation, A. Held (ed.), Plenum Press, 1980.

28) A. Einstein, Sitzungsber. Preuss. Acad. Wiss. Phys. Math. Kl. **42** (1916), 1111.

29) L. Landau and E. Lifshitz, The Classical Theory of Fields, Addison Wesley Publishing Company, 1951.

30) A. Papapetrou, Proc. Roy. Irish. Acad. **A52** (1948), 11,
S. N. Gupta, Phys. Rev. **96** (1954), 1683.

31) C. Møller, Ann. Phys. **4** (1958), 347.

32) J. N. Goldberg, Phys. Rev. **111** (1958), 315.

33) P. A. M. Dirac, Phys. Rev. Lett. **2** (1959), 368.

34) R. Geroch, in Asymptotic Structure of Space-Time, F. P. Esposito and L. Witten (eds.), Plenum Press, N.Y., 1977.

35) P. Sommers, J. Math. Phys. **19** (1978), 549.

36) S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, The Large Scale Structure of Space-Time, Cambridge Univ. Press, 1973.

37) V. I. Ogievetskii and I. V. Polubarinov, Sov. Phys. JETP **21** (1965), 1093.

38) F. W. Hehl, P. von der Heyde and G. D. Kerlick, Rev. Mod. Phys. **48** (1976), 393.

39) R. Penrose, Phys. Rev. Lett. **10** (1963), 66; Proc. R. Soc. **A284** (1965), 159.

40) H. Friedrichs, "On the existence of analytic null asymptotically flat solutions of Einstein's vacuum equations", preprint (1981).

41) E. Newman and R. Penrose, J. Math. Phys. **3** (1962), 566.

42) E. T. Newman and T. W. J. Unti, J. Math. Phys. **3** (1962), 891.

43) R. Penrose, Ann. Phys. **10** (1960), 171.

44) J. Ehlers and W. Kundt, in Gravitation; an introduction to current research, L. Witten (ed.), N.Y., Wiley, 1962.

45) R. Sachs, Proc. Roy. Soc. **A264** (1961), 309.

46) R. Geroch and J. Winicour, J. Mach. Phys. **22** (1981), 803.

47) M. Carmeli, Group Theory and General Relativity, McGraw-Hill Inc., 1977.

48) R. Sachs, Phys. Rev. **128** (1962), 2851.

49) W. L. Bade and H. Jehle, Rev. Mod. Phys. **25** (1953), 714.

50) M. Walker, "On the positivity of total gravitational energy at retarded times", Lectures at the 1982 Les Houches summer school on gravitational radiation.

51) A. Ashtekar and G. T. Horowitz, "Energy momentum of isolated systems cannot be null", preprint 1982.

52) S. Deser and C. Teitelboim, Phys. Rev. Lett. **39** (1977), 249.

53) M. Grisaru, Phys. Lett. **73B** (1978), 207.

54) G. W. Gibbons, S. W. Hawking and M. J. Perry, Nucl. Phys. **B138** (1978), 141.
S. W. Hawking, Phys. Rev. **D18** (1978), 1747.
D. N. Page, Phys. Rev. **D18** (1978), 2733.
G. W. Gibbons and C. N. Pope, Comm. Math. Phys. **66** (1979), 267.

55) P. Schoen and S. T. Yau, Phys. Rev. Lett. **42** (1979), 547.

D. Kramers, H. Stephani, E. Herlt, M. MacCallum &
Exact Solutions of Einstein's Field Equations
(Cambridge Univ Press 1980)