

一般相対性理論における数理的諸問題

名古屋大学大学院理学研究科多元数理

2015年5月18日-20日

小玉 英雄

KEK 素粒子原子核研究所

理論センター

理論宇宙物理グループ

Copyright Hideo Kodama 2015/5/**

目次

第 1 章 一般相対論の基礎	1
1.1 重力と接続	1
1.1.1 接続の概念	1
1.1.2 等価原理と微局所慣性系	2
1.2 重力場の方程式	3
1.3 初期値問題	5
1.3.1 発展方程式	5
1.3.2 拘束条件	6
第 2 章 時空の因果構造と時空境界	7
2.1 因果構造	7
2.2 時空の端	11
2.3 共形的無限遠	12
2.4 Weyl テンソル	15
第 3 章 ブラックホール	17
3.1 いくつかの例	17
3.1.1 Schwarzschild(-Tanghelini) BH	17
3.1.2 Reissner-Nordstrøm BH	21
3.1.3 Kerr-Newman BH	23
3.2 ブラックホールの一般的定義	26
3.3 測地線束方程式	27
3.3.1 Jacobi 方程式	28
3.3.2 弧長の 2 次変分	29
3.3.3 時間的測地線束	31
3.3.4 光的測地線束	32
3.3.5 Raychaudhuri 方程式	33
3.4 一般的な諸定理	34

3.5	静的ブラックホールの一意性	36
3.5.1	Israel の一意性定理 (4次元)	36
3.5.2	一般次元における一意性定理	37
3.6	4次元回転ブラックホールの一意性	39
3.6.1	回転ブラックホールの剛性定理	39
3.6.2	Ernst 形式	39
3.6.3	一意性定理	40
第4章	時空特異点	42
4.1	特異点の定義	42
4.2	特異点定理	43
4.3	特異点強度	45
4.4	宇宙検閲予想	46
第5章	時空構造の安定性	49
5.1	正エネルギー定理	49
5.1.1	諸定義	50
5.1.2	正エネルギー定理	51
5.2	Penrose 不等式	53
5.2.1	Penrose 不等式	54
5.2.2	Riemann-Penrose 不等式	55
5.3	*摂動論	57
5.3.1	一般摂動方程式	57
5.3.2	ワープ積型背景時空での摂動	58
5.3.3	Tensor Perturbation	61
5.3.4	Vector Perturbation	63
5.3.5	Scalar Perturbation	65
5.3.6	静的ブラックホールの摂動	68
5.3.7	Gregory-Laflamme 不安定	69
5.3.8	回転ブラックホールの摂動	69
第6章	*高次元ブラックホール	71
6.1	剛性定理	71
6.1.1	帰結	72
6.2	ホライズン曲率定理	74
6.3	位相検閲定理	79
6.4	ホライズンの位相	81
6.4.1	5次元ブラックホール	81
6.4.2	6次元以上の時空のブラックホール	83
6.5	*Black fold	85

付録A 時空の幾何学	86
A.1 Weyl 変換	86
A.2 時空の分解	86
A.2.1 接続の分解	87
A.2.2 曲率の分解	88
A.2.3 Einstein 方程式の分解	90
A.3 初期値問題に対する O'Murchandha-York の方法	91
A.4 時空の摂動	92
A.4.1 計量・接続・曲率	93
A.4.2 Einstein 方程式	93
A.4.3 摂動の $(m+n)$ 分解	94
付録B 厳密解	97
B.1 回転球形ブラックホール解	97
B.1.1 GLPP 解	97
B.1.2 単純 GLPP 解	101
B.2 ブラックリング解	108
B.2.1 Emparan-Reall 解	108
B.2.2 Pomeransky-Senkov 解	113
B.2.3 双極子型ブラックリング解	114
付録C 3次元多様体	117
C.1 2次元面の一意化定理	117
C.2 光的座標系	118
C.3 極大幾何学	120
C.4 Seifert fibre space	121
C.4.1 Twisted torus	121
C.4.2 Seifert Fibre Space	122
C.5 極大幾何	125
C.5.1 E^3	125
C.5.2 $\text{Nil} \cong \text{Bianchi-II group}$	125
C.5.3 $\text{Sol} \cong \text{Bianchi VI}_0 \text{ group}$	126
C.5.4 $H^2 \times E^1 \cong \text{Bianchi III group}$	126
C.5.5 $\widetilde{\text{SL}}_2\mathbb{R} \cong \text{Bianchi VIII group}$	127
付録D 微分多様体	129
D.1 スピン構造とスピン多様体	129

付録E 幾何学不等式	131
E.1 Sobolev 不等式	131
E.2 山辺の問題	134
E.3 山辺タイプと位相	136

1

一般相対論の基礎

§1.1

重力と接続

1.1.1 接続の概念

- 平行移動 (=接続) の概念 [Levi-Civita 1917]
- 接続の幾何学としての Riemann 幾何学: 無限小解析に基づく微分幾何学 + 対称性に基礎をおく F. Klein の幾何学 [Weyl H, Cartan E]
- ホロノミー群の概念 [Cartan E]
 - ⇒ 微分幾何学の大域的な研究, Calabi-Yau 多様体などの特殊ホロノミー群をもつ多様体と超弦理論・M理論の $N = 1$ 局所超対称性をもつコンパクト化の関連
- 接続の概念のファイバー束による現代的定式化 [Ehresmann 1950]
- 非可換ゲージ理論のアイデア [C.N. Yang と R. Mills 1954]

未発表ながら, W. Pauli や内山龍雄も同じ頃, 類似のアイデアを得ていたようである.

接続 + 非可換ゲージ場 ⇒ 指数定理, アノーマリー理論, Donaldson 理論

1.1.2 等価原理と微局所慣性系

- 等価原理

「任意の時空点において適当な基準系（座標系）を選べばその点において重力を微局所的¹に消去できる」

- 対応原理

「重力が消去された微局所慣性系（無限個存在する）に限定すれば特殊相対性理論が成立する」

- 一般座標系

「本質的」重力場が存在するとき、有限の広がりをもつ局所慣性系は存在せず、物理法則を一般的な座標系を用いて記述することが要求される。

- 時空計量

この一般座標系では光速はもはや一定でなくなる。そこで、この場所や方向により異なる光速を記述する量が必要となる。Einsteinはそのような量として、微局所慣性系のMinkowski計量に着目した。特殊相対性理論において中心的な役割を果たすこの計量は、Lorentz変換で不変であるため、同一時空点Pでの微局所慣性座標系 $X_P^a (a = 0, 1, 2, 3, 4)$ の取り方に依存しない。この計量 $ds^2 = \eta_{ab} dX_P^a dX_P^b$ を一般座標系で表すと、

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu; \quad g_{\mu\nu}(P) = \eta_{ab} \frac{\partial X_P^a}{\partial x^\mu} \frac{\partial X_P^b}{\partial x^\nu} \quad (1.1.1)$$

により、各時空点での一般的な計量が定義される。その構成法から、各時空点での光の伝搬方向 (dt, dx^i) は $ds^2 = 0$ により決まるので、計量によって座標速度 $dx^i/dt = vn^i$ が時空点Pと伝搬方向 n^i の関数として一意的に決定される。

- 重力場=接続

重力場が存在する場合の物理法則を、局所的な特殊相対性理論の貼り合わせとして捉える以上の考え方は、Riemann幾何学を局所的なEuclidean幾何学の貼り合わせして捉えるRiemannの思想と同じものである。

Christoffel 記号

$$\Gamma_{\nu\lambda}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} (\partial_\nu g_{\lambda\alpha} + \partial_\lambda g_{\nu\alpha} - \partial_\alpha g_{\nu\lambda}) \quad (1.1.2)$$

¹無限小の領域で成り立つことを以下「微局所的」と呼ぶことにする。

平行移動

$$\delta^\parallel V^\mu = -\Gamma_{\nu\lambda}^\mu dx^\nu V^\lambda \quad (1.1.3)$$

共変微分

$$\nabla_X V = X^\nu (\partial_\nu V^\mu + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu V^\lambda). \quad (1.1.4)$$

• Riemann 接続

等価原理と Riemann 接続： 微局所慣性系において $\Gamma = 0$ を要求すると、接続は Riemann 接続となる。

曲率テンソル： もちろん、本質的重力場が存在しない Minkowski 時空でも、一般の座標系では見かけ上非自明な計量が現れる。これは（一般に非一様な）加速運動による光速の変化を表すが、重力場をその源と結びつけるには、この様な運動学的効果を取り除く方法が必要となる。その一つが、曲率テンソルを用いることである。

$$R^\mu{}_{\nu\lambda\sigma} = \partial_\lambda \Gamma_{\sigma\nu}^\mu - \partial_\sigma \Gamma_{\lambda\nu}^\mu + \Gamma_{\lambda\alpha}^\mu \Gamma_{\sigma\nu}^\alpha - \Gamma_{\sigma\alpha}^\mu \Gamma_{\lambda\nu}^\alpha \quad (1.1.5)$$

§1.2

重力場の方程式

Einstein 方程式 作用積分

$$S = S_G + S_M; \quad (1.2.1)$$

$$S_G = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^D x \sqrt{g} (R - 2\Lambda). \quad (1.2.2)$$

より

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu} \quad (1.2.3)$$

ここで、

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}, \quad R_{\mu\nu} = R^\alpha{}_{\mu\alpha\nu}, \quad (1.2.4)$$

$$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma_{\nu\beta}^\alpha - \partial_\nu \Gamma_{\mu\beta}^\alpha + \Gamma_{\mu\gamma}^\alpha \Gamma_{\nu\beta}^\gamma - \Gamma_{\nu\gamma}^\alpha \Gamma_{\mu\beta}^\gamma, \quad (1.2.5)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\partial_\mu g_{\nu\beta} + \partial_\nu g_{\mu\beta} - \partial_\beta g_{\mu\nu}). \quad (1.2.6)$$

また、

$$T^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{g}} \frac{\delta S_M}{\delta g_{\mu\nu}}. \quad (1.2.7)$$

特徴

- 一般共変性 (微分同相不変性, 座標変換不変性)
- 縮約 Bianchi 恒等式

$$\nabla^\nu G_{\mu\nu} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla^\nu T_{\mu\nu} = 0 \quad (1.2.8)$$

運動方程式 圧力がゼロの流体に対して

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu. \quad (1.2.9)$$

この系に対する保存則は

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = u^\mu \nabla_\nu (\rho u^\nu) + \rho u^\nu \nabla_\nu u^\mu \quad (1.2.10)$$

より

$$\nabla_\nu (\rho u^\mu) = 0, \quad u^\nu \nabla_\nu u^\mu = 0. \quad (1.2.11)$$

この第2式は、構成粒子が測地線に沿って運動することを示している：

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \dot{x}^\nu \dot{x}^\lambda = 0. \quad (1.2.12)$$

§1.3

初期値問題

1.3.1 発展方程式

$(d+1)$ 分解

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + q_{ij}(dx^i + \beta^i dt)(dx^j + \beta^j dt) \quad (1.3.1)$$

とおくと,

$$n = \frac{1}{N}T; \quad T = \partial_t - \beta^i \partial_i \quad (1.3.2)$$

に対して,

$$\mathcal{L}_T q_{ij} = \partial_t q_{ij} - D_i \beta_j - D_j \beta_i, \quad (1.3.3a)$$

$$\mathcal{L}_T K_j^i = \partial_t K_j^i - D_\beta K_j^i - K_l^i D_j \beta^l + K_j^l D_l \beta^i. \quad (1.3.3b)$$

発展方程式

$$\frac{1}{N} \mathcal{L}_T q_{ij} = -2K_{ij}, \quad (1.3.4a)$$

$$\frac{1}{N} \mathcal{L}_T K_{ij} = R_{ij}(q) - 2K_i^l K_{jl} + K K_{ij} - \frac{1}{N} D_i D_j N - S_{ij}, \quad (1.3.4b)$$

ここで,

$$S_{ij} = T_{ij} - \frac{1}{d} q^{kl} T_{kl} q_{ij}. \quad (1.3.5)$$

K_{ij} を

$$K_j^i = \hat{K}_j^i + \frac{K_s}{d} \delta_j^i \quad (1.3.6)$$

によりトレース K_s と \hat{K}_j^i に分解すると,

$$\frac{1}{N} \mathcal{L}_T q_{ij} = -2q_{ik} \left(\hat{K}_j^k + \frac{K_s}{d} \delta_j^k \right), \quad (1.3.7a)$$

$$\frac{1}{N} \partial_T K_s = \frac{1}{2} K_s^2 + \frac{d}{2(d-1)} \hat{K}^2 + \frac{d-2}{2(d-1)} {}^d R - \frac{\Delta N}{N} + \frac{\kappa^2}{d-1} q^{lm} T_{lm}, \quad (1.3.7b)$$

$$\frac{1}{N} \mathcal{L}_T \hat{K}_j^i = K \hat{K}_j^i + {}^d R_j^i - \frac{{}^d R_l^i}{d} \delta_j^i - \frac{1}{N} \left(D^i D_j N - \frac{\Delta N}{d} \delta_j^i \right) - \kappa^2 q^{ik} S_{kj}. \quad (1.3.7c)$$

1.3.2 拘束条件

(q_{ij}, K_{ij}) の初期条件に対して,

$$R(q) - K_{ij}K^{ij} + K_s^2 = 16\pi G\rho, \quad (1.3.8a)$$

$$D_j K_i^j - D_i K_s = -8\pi G S_i \quad (1.3.8b)$$

K_s と \hat{K} で表すと,

$${}^d R + \frac{d-1}{d} K_s^2 - \hat{K}^2 = 2\kappa^2 \rho \quad (\rho = T_{nn}), \quad (1.3.9a)$$

$$D_j \hat{K}_i^j - \frac{d-1}{d} D_i K_s = -\kappa^2 S_i \quad (S_i = T_{ni}). \quad (1.3.9b)$$

縮約 Bianchi 方程式より,

$$E_{\mu\nu} := G_{\mu\nu} - \kappa^2 T_{\mu\nu} \quad (1.3.10)$$

に対して,

$$\partial_t E_{nn} = E_{\mu\nu}, \partial_i E_{\mu\nu} \text{ の式,}$$

$$\partial_t E_{ni} = E_{\mu\nu}, \partial_i E_{\mu\nu} \text{ の式,}$$

より, $E_{ij} = 0$ が常に満たされ, ある時刻で拘束条件 $E_{nn} = 0, E_{ni} = 0$ が満たされれば, 任意の時刻で拘束条件が満たされる. したがって, 拘束条件は初期値に対する制限と見なされる.

【公式 1.3.1】 任意のベクトル場 V^μ に対して,

$$\nabla_\mu V^\mu = D^i V_i + K(V \cdot n) - n \cdot \nabla_n V. \quad (1.3.11)$$

また, 任意の対称テンソル $T_{\mu\nu}$ に対して,

$$(\nabla_\nu T_\mu^\nu) n^\mu = \partial_n T_{nn} - K T_{nn} + q^{ij} D_i T_{in} - K^{ij} T_{ij}, \quad (1.3.12a)$$

$$(\nabla_\nu T_\mu^\nu) h_i^\mu = -\frac{1}{N} \mathcal{L}_T T_{ni} + K T_{ni} + D^j T_{ij} - \frac{D_j N}{N} T_{nn} + (\nabla_n n^\mu) T_{\mu i}. \quad (1.3.12b)$$

ここで,

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu. \quad (1.3.13)$$

□

2

時空の因果構造と時空境界

§2.1

因果構造

References

- Hawking SW, Ellis GFR (1973): “Large Scale Structures of Spacetime”

【定義 2.1.1 (局所因果構造)】 条件 $ds^2 = 0$ により決まる各点 P の光円錐において、点 P の接ベクトル V は時間的 ($V \cdot V < 0$)、空間的 ($V \cdot V > 0$)、光的 ($V \cdot V = 0$) の3つに分類され、さらに時間的ベクトルと光的ベクトルは、未来向きと過去向きに分類される。これらの分類に対応して、時空の曲線は各点での接ベクトルの向きにより、時間的、光的、因果的 (=時間的ないし光的)、空間的などと分類される。 □

【定義 2.1.2 (大域的な未来と過去)】 時空 \mathcal{M} において、

- 集合 S の点から未来向き (過去向き) の時間的曲線により到達できる点の全体を S の時間的未来 (時間的過去) といい、 $I^+(S)(I^-(S))$ で表す。
- 集合 S の点から未来向き (過去向き) の因果的曲線により到達できる点の全体を S の因果的未来 (因果的過去) といい $J^+(S)(J^-(S))$ と表す。
- 特に、 S が一点 p からなるとき、 $J^+(p) - I^+(p)$ と $J^-(p) - I^-(p)$ は、それぞれ、 p の未来の光円錐と過去の光円錐に相当する

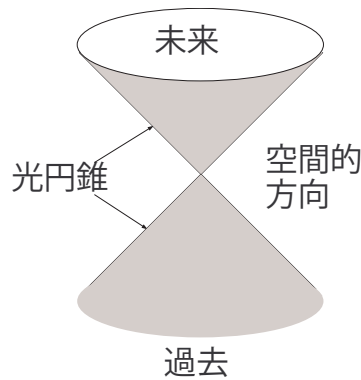


図 2.1: 局所的な因果構造

【命題 2.1.3 (非測地的光的曲線)] 光的曲線は測地線でなければ時間的曲線に変形できる. _____ □

【命題 2.1.4 (因果集合の境界)] $J^\pm(S)$ および $I^\pm(S)$ の境界は光的超曲面となり, 光的測地線で生成される. _____ □

【例 2.1.5 (反 de Sitter 時空における因果律の破れ)]

- $n + 1$ 次元反 de Sitter 時空: 負の宇宙定数

$$\Lambda = -n(n - 1)/(2\ell^2) \tag{2.1.1}$$

をもつ Einstein 方程式の定常真空解

$$\text{adS}^{n+1} : ds^2 = -(r^2 + \ell^2)dt^2 + \frac{dr^2}{r^2 + \ell^2} + r^2 d\Omega_{n-1}^2 \tag{2.1.2}$$

- 擬 Euclidean 空間への埋め込み :

$$(T, S) = (r^2 + \ell^2)^{1/2}(\cos t, \sin t), X^i = r\Omega^i$$

$(\Omega \cdot \Omega = 1)$ により, 計量

$$ds^2 = -dT^2 - dS^2 + dX_1^2 + \dots + dX_n^2 \tag{2.1.3}$$

をもつ $(n + 2)$ 次元擬 Euclidean 空間 $E^{n,2}$ の中に, 2 次曲面

$$\Sigma : -T^2 - S^2 + X_1^2 + \dots + X_n^2 = -\ell^2 \tag{2.1.4}$$

として埋め込むことができる.

- 因果律の破れ : この時空では $X^i = \text{一定}$ となる閉曲線が至るところ時間的となる. すなわち, 未来向きに出た曲線が有限な時間で過去から元の時空点に戻ってくる. この様な曲線は時間的閉曲線と呼ばれるが, 明らかに因果律を破っている.

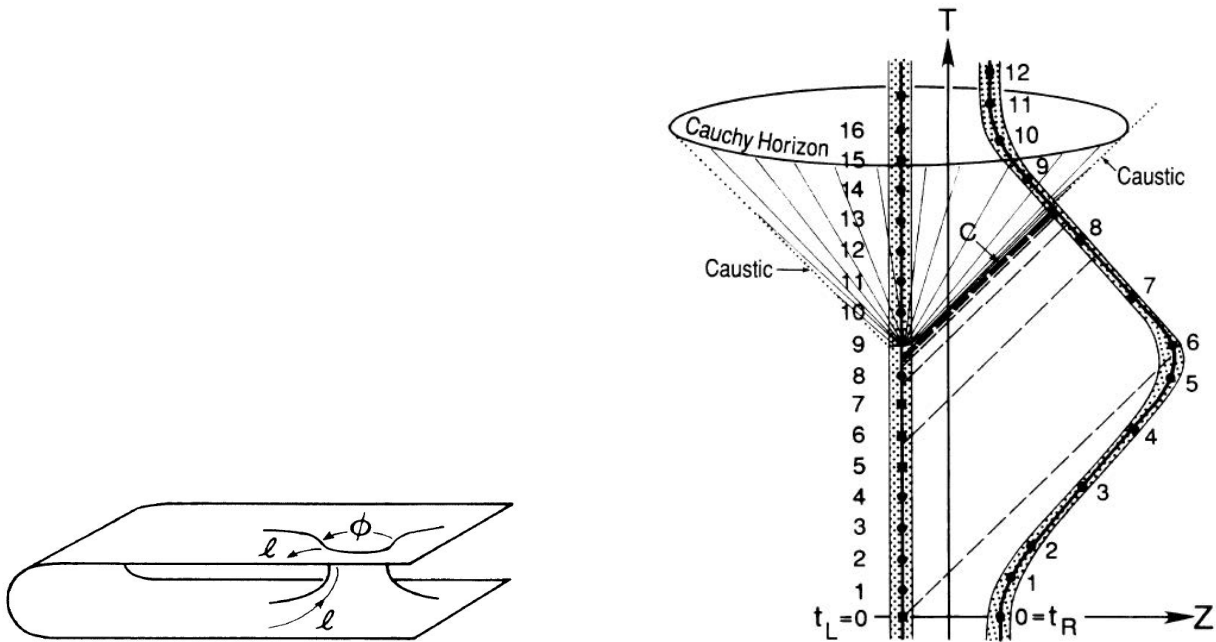


図 2.2: ワームホールによるタイムマシン [Morris M, Thorne KS, Yurtsever U (1988)PRL61, 1446]

□

【注 2.1.6 (タイムマシン)】 この例は、普遍被覆空間を考えることにより因果律の破れをなくすることができるが、一般相対性理論では、このような位相的処理では取り除けない因果的閉曲線がしばしば現れる。この点に着目し、どのような状況で因果的閉曲線が現れるのか、また因果律の破れた領域 (タイムマシン) を生成する方法はないかなどの問題を積極的に研究する分野もある [41, 18, 22].

興味深い例としては、Thorne らの提案したブラックホール連星を用いたタイムマシンがある [24]. この例では、ブラックホールが内部でワームホールによりつながることにより、時間的閉曲線を生み出しているが、この構造を安定に保つには負のエネルギーを持った物質が必要となる。 □

【定義 2.1.7 (大域的雙曲性)】

- 時空 \mathcal{M} 内の超曲面 Σ に対し、その点を通過するすべての延長不可能な過去向き因果的曲線が Σ と交わるような点の全体 $D^+(\Sigma)$ を未来の依存領域という。同様に、過去向きの代わりに未来向きの曲線を考えることにより、過去の依存領域 $D^-(\Sigma)$ が定義される。
- $\mathcal{M} = D(\Sigma) \equiv D^+(\Sigma) \cup D^-(\Sigma)$ となるとき、 Σ を \mathcal{M} の Cauchy 面と呼ぶ。

- Cauchy 面の存在するとき，時空は大域的に双曲的 (globally hyperbolic) であると言う。

□

【定理 2.1.8 (大域的に双曲的時空の構造)】 時空 M が Σ を Cauchy 面としてもつとき， M は $\mathbb{R} \times \Sigma$ と同相になり，因果的には非常に単純な構造を持つ。 □

Proof. M 上の非負の Borel 測度で全時空の測度が 1 となるものを μ とする。

- $D^+(\Sigma)$ 上の関数 t を，各点 $p \in D^+(\Sigma)$ に対して， $J^-(p) \cap D^+(\Sigma)$ の μ に関する体積を対応させる関数とする。
- t は連続な関数で，未来向きの因果的曲線に沿って単調に増大する。
- $t = \text{const}$ 面は，空間的な面 $\Sigma(t)$ を定義する。 ($\Sigma(0) = \Sigma$)
- $D^+(\Sigma)$ 上になめらかな時間的ベクトル場を適当にとると，その積分曲線はすべての $\Sigma(t)$ と一度だけ交わる。よって，全単射 $f: M \rightarrow \mathbb{R} \times \Sigma$ が定義される。
- f は同相写像となることが示される。

Q.E.D.

§2.2

時空の端

時空の大域的因果構造に関する研究の大きな成果は、「時空の端」に豊かな構造があることを発見したことである。もちろん、時空の「端点」なるものは実在しないが、集合論的に仮想端点を定義することができる。

【定義 2.2.1 (過去集合と未来集合)】

1. $I^-(W) \subset W(I^+(W) \subset W)$ と言う条件を満たす開集合は過去集合 (past set)(未来集合 (future set)) と呼ばれる。

例： $W = I^-(S)(I^+(S))$ は過去集合 (未来集合) である。

2. 2つの異なる過去集合の和として表すことができない集合を既約過去集合 (indecomposable past set) と呼ぶ。同様に既約未来集合 (indecomposable future set) が定義される。

例： $I^-(p)$ は既約過去集合。

□

【注 2.2.2 (終端的既約過去 (未来) 集合)】 既約過去集合は、時空点を集合の因果的性質で特徴づけるものであるが、一般に、適当な時空 p を用いて $W \subset I^-(p)$ と表されないもの (終端既約過去集合 (terminal indecomposable past set)) が存在する。このような既約過去集合に仮想的な「頂点」を付与して、それを時空の (未来の) 端点と見なそうというのが基本的なアイデアである。一般に、すべての終端既約過去集合 W は、適当な未来に延長不可能な時間的曲線 γ を用いて $W = I^-(\gamma)$ と表されることが示される [19]。同様に、未来集合、既約未来集合を用いると、時空の過去の端点が定義される。 □

【例 2.2.3 (Minkowski 時空の因果的無限遠)】

1. 4次元 Minkowski 時空 \mathcal{M} での端点を持たない時間的直線 γ に対して、 $W = I^-(\gamma)$ は常に時空全体と一致するので終端既約過去集合となり、時空の時間的将来の端点 i^+ を定義する。
2. 原点を通過する未来に端点を持たない光的直線 γ に対して、 $W = I^-(\gamma)$ は原点を通過する時刻と光線の方向で一意的に決まるので、対応する将来の端点の全体 \mathcal{I}^+ は3次元面 $\mathbb{R} \times S^2$ と同相になる。

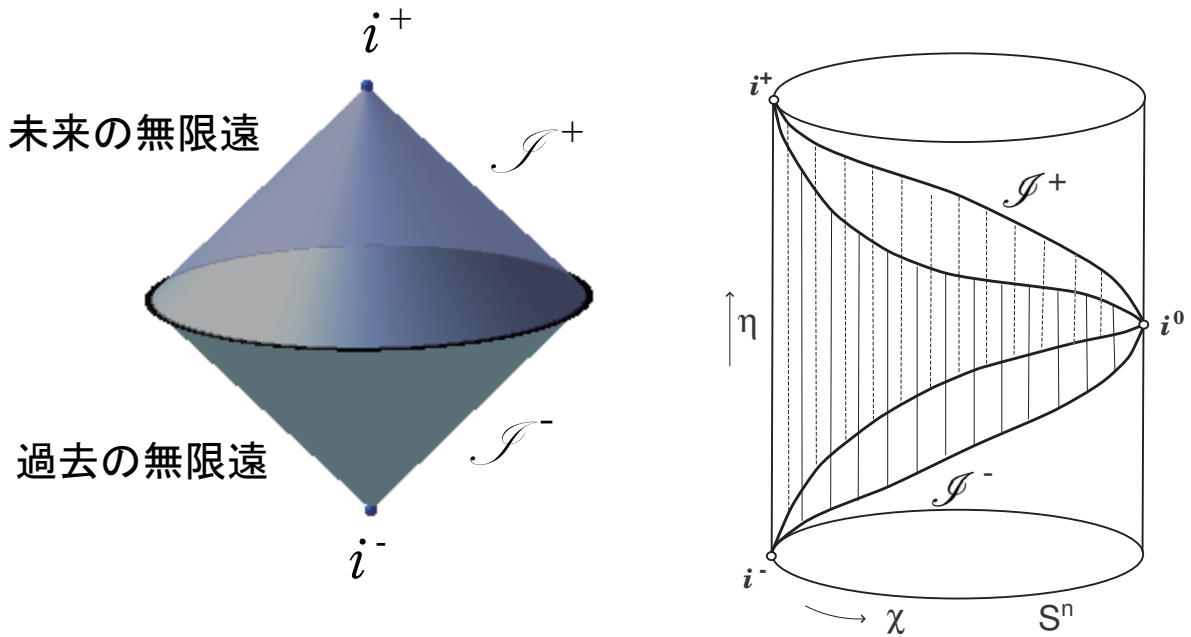


図 2.3: Minkowski 時空の無限遠と静的 Einstein 宇宙への埋め込み

3. これらは全体として，未来の無限遠を定義する．同様に，既約未来集合より，時間的過去の端点 i^- ，過去の光的無限遠 \mathcal{I}^- が定義される（図 2.3 左）．

□

§2.3

共形的無限遠

このような無限遠の構成法は，Minkowski 時空では比較的容易に実行できるが，より複雑な時空では実用的でない．実は，より実用的な無限遠の構成法が，すでに 1964 年に Penrose により提案されていた [30]．

【定義 2.3.1 (共形的無限遠)】 時空全体 (\mathcal{M}, g) を別の時空 $(\hat{\mathcal{M}}, \hat{g})$ の有界領域に共形写像 $f: \mathcal{M} \rightarrow \hat{\mathcal{M}}$ と $\hat{\mathcal{M}}$ 上の C^2 級関数 Ω が存在して，次の条件が満たされるとき， \mathcal{M} の像 $f(\mathcal{M})$ の $\hat{\mathcal{M}}$ での境界 $\partial\mathcal{M} = \overline{f(\mathcal{M})} - f(\mathcal{M})$ を共形的無限遠 (conformal infinity) といい：

C1: $\hat{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 f_* g_{\mu\nu}$ ($\Omega > 0$)

C2: $\partial\mathcal{M}$ 上で， $\Omega = 0$ かつ $d\Omega \neq 0$ ．

□

【例 2.3.2 (Minkowski 時空の共形的無限遠)】 極座標表示での $(n+1)$ 次元 Minkowski 計量

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega_{n-1}^2 \quad (2.3.1)$$

は,

$$\frac{t-r}{2} = \tan \frac{\eta-\chi}{2}, \quad \frac{t+r}{2} = \tan \frac{\eta+\chi}{2} \quad (2.3.2)$$

と座標変換すると

$$\begin{aligned} ds^2 &= \Omega^{-2} \hat{ds}^2 : \hat{ds}^2 = -d\eta^2 + d\chi^2 + \sin^2 \chi d\Omega_{n-1}^2, \\ \Omega &= \cos\left(\frac{\eta-\chi}{2}\right) \cos\left(\frac{\eta+\chi}{2}\right) \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

と表される. ここで, \hat{ds}^2 はちょうど, 静的 Einstein 宇宙 $\hat{\mathcal{M}} \cong \mathbb{R} \times S^n$ の計量と一致するので¹, この変換により, Minkowski 時空全体が静的 Einstein 宇宙のコンパクト領域

$$\chi - \pi \leq \eta \leq \pi - \chi (\chi \geq 0) \quad (2.3.4)$$

に埋め込まれ, その境界で $\Omega = 0$ となる (図 2.3 の右). ただし, $d\Omega \neq 0$ となるのは, $\chi \neq 0, \pi$ の部分なので, 角度座標も考慮すると, $\partial\hat{\mathcal{M}}$ は, それぞれ $\mathbb{R} \times S^{n-1}$ に同相な 2 つの連結成分からなる. これらは, ちょうど, 終端既約因果集合により抽象的に定義した光的無限遠 \mathcal{I}^\pm (図 2.3) に対応する. また, $(\eta, \chi) = (\pm\pi, 0)$ が時間的無限遠点 i^\pm を実現する. □

【注 2.3.3 (空間的無限遠)】 この埋め込みでは, $f(\hat{\mathcal{M}})$ の境界として, $(\eta, \chi) = (0, \pi)$ に対応するもう余分な点 i^0 が現れる. この点は, 時空内部から (漸近的に) 空間的曲線でしか到達できないので, 上で定義した因果境界には含まれないので, 空間的無限遠点 (spatially infinity) と呼ばれる. ただし, この点は共形埋め込みでは $d\Omega = 0$ となる特異点なので, その姿は埋め込みに依存する. □

【注 2.3.4 (Penrose 図式)】

1. Minkowski 時空の共形埋め込みにおいて, 角度座標が一定に対応する 2 次元部分を図示したものはしばしば **Penrose 図式** と呼ばれる. 図 2.4 の左端の図が, Minkowski 時空の Penrose 図式である. もとの $(n+1)$ 次元時空は, この 2 次元図を底空間として, その各点に場所に依存した半径の球面 S^{n-1} をファイバーとして付与したファイバー空間と見なされる.
2. 定曲率時空である de Sitter 時空 dS^{n+1} Minkowski 時空と局所的に共形なので, 同じく静的 Einstein 宇宙の部分領域に共形的に埋め込むことができる:

$$\begin{aligned} g(dS^{n+1}) &= -dt^2 + \ell^2 \cosh^2(t/\ell) g(S^n) \\ &= \frac{\ell^2}{\cos^2 \eta} [-d\eta^2 + g(S^n)]; \quad \sinh(t/\ell) = \tan \eta, \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

¹Einstein は, 宇宙膨張を止めるために宇宙定数を導入し, この解を得た. 4 次元時空の場合, $\Lambda = 4\pi G\rho = \text{一定}$ の関係が成立する.

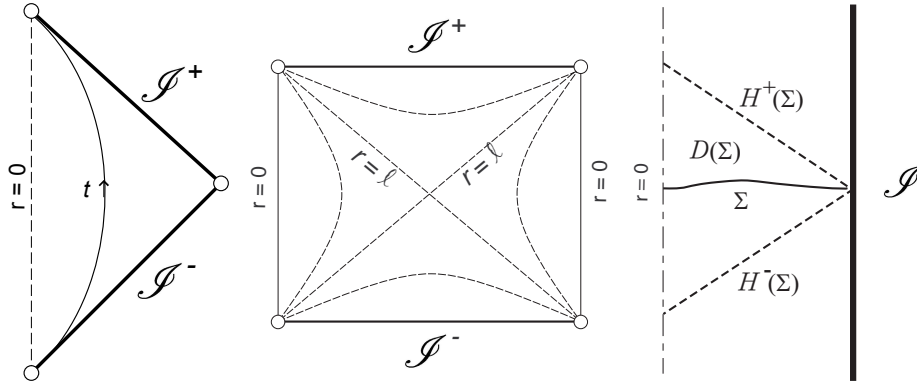


図 2.4: 定曲率時空の Penrose 図式. 左から順に, Minkowski 時空, de Sitter 時空, 反 de Sitter 時空.

de Sitter 時空 dS^{n+1} の像は $|\eta| < \pi/2$ に対応するので, Penrose 図式は図 2.4 の真ん中となる. これより, $dS^{n+1} \approx \mathbb{R} \times S^n$ で, その境界は S^n に同相な 2 つの空間的面 \mathcal{I}^\pm からなる.

3. 定曲率時空の反 de Sitter 時空 adS^{n+1} も, 静的 Einstein 宇宙の部分領域に共形的に埋め込むことができる:

$$\begin{aligned} g(adS^{n+1}) &= -\cosh^2 \xi dt^2 + \ell^2 (d\xi^2 + \sinh^2 \xi g(S^{n-1})) \\ &= \frac{\ell^2}{\cos^2 \chi} [-d\eta^2 + g(S^n)]; \quad \eta = t/\ell, \quad \tanh \frac{\xi}{2} = \tan \frac{\chi}{2} \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

反 de Sitter 時空 adS^{n+1} の像は, $0 \leq \chi < \pi/2$ となる. これより $adS^{n+1} \approx \mathbb{R} \times D^n$ なので, その境界は $\mathbb{R} \times S^{n-1}$ に同相な時間的面 \mathcal{I} となる.

□

【公式 2.3.5 (曲率テンソルの変換)】 Weyl 変換

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \hat{g}_{\mu\nu} = e^{2\Phi} g_{\mu\nu} \quad (2.3.7)$$

に対して, Christoffel シンボルおよび曲率テンソルは次のように変換する:

$$\hat{\Gamma}_{\nu\lambda}^\mu = \Gamma_{\nu\lambda}^\mu + \nabla_\nu \Phi \delta_\lambda^\mu + \nabla_\lambda \Phi \delta_\nu^\mu - \nabla^\mu \Phi g_{\nu\lambda}, \quad (2.3.8)$$

$$\begin{aligned} \hat{R}^\mu{}_{\nu\lambda\sigma} &= R^\mu{}_{\nu\lambda\sigma} + 2\delta_{[\sigma}^\mu \nabla_{\lambda]} \nabla_{\nu]} \Phi - 2g_{\nu[\sigma} \nabla_{\lambda]} \nabla^\mu \Phi \\ &\quad - 2\nabla_\nu \Phi \nabla_{[\lambda} \Phi \delta_{\sigma]}^\mu + 2\nabla^\mu \Phi \nabla_{[\lambda} \Phi g_{\sigma]\nu} - 2(\nabla\Phi)^2 \delta_{[\lambda}^\mu g_{\sigma]\nu}, \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

$$\begin{aligned} \hat{R}_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} \nabla^2 \Phi - (n-2) \nabla_\mu \nabla_\nu \Phi \\ &\quad + (n-2) \nabla_\mu \Phi \nabla_\nu \Phi - (n-2) (\nabla\Phi)^2 g_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

$$e^{2\Phi} \hat{R} = R - 2(n-1) \nabla^2 \Phi - (n-1)(n-2) (\nabla\Phi)^2. \quad (2.3.11)$$

□

【定理 2.3.6 (共形無限遠の構造と宇宙定数の対応)】 物質 (場) のエネルギー運動量テンソルが無限遠でゼロに近づくとき, 共形的無限遠の計量構造は宇宙定数のみで次の様に決定される:

- i) $\Lambda = 0$: \mathcal{I} は光的超曲面.
- ii) $\Lambda > 0$: \mathcal{I} は空間的超曲面.
- iii) $\Lambda < 0$: \mathcal{I} は時間的超曲面.

特に, $\Lambda < 0$ のとき, 時空に Cauchy 面が存在せず, 未来の時間発展を決定するには, 初期面での情報以外に, 境界にあたる無限遠 \mathcal{I} での境界条件が必要となる.

□

Proof. $(n+1)$ 次元時空の共形埋め込み $\hat{g} = \Omega^2 f_* g$ に対して,

$$f_* R_s = \Omega^2 \hat{R}_s + 2n\Omega \hat{\nabla}^2 \Omega - n(n+1)(\hat{\nabla}\Omega)^2. \quad (2.3.12)$$

ここで, Einstein 方程式

$$\text{Ric} - \frac{1}{2}R_s g + \Lambda g = \kappa^2 \mathbb{T} \quad (2.3.13)$$

より,

$$R_s = \frac{2(n+1)}{n-1}\Lambda - \frac{2\kappa^2}{n-1}T_s \rightarrow \frac{2(n+1)}{n-1}\Lambda. \quad (2.3.14)$$

よって, \mathcal{I} 上で

$$(\hat{\nabla}\Omega)^2 = -\frac{2}{n(n-1)}\Lambda. \quad (2.3.15)$$

Q.E.D.

【定義 2.3.7 (漸近的単純)】 この無限遠構造の一般的分類に基づいて, 共形無限遠の構造が, Minkowski 時空, de Sitter 時空, 反 de Sitter 時空の無限遠と同一の構造を持つ時空は, それぞれ漸近的に平坦, 漸近的に de Sitter 的, 漸近的に反 de Sitter 的であるという. □

 §2.4

Weyl テンソル

【定義 2.4.1 (Weyl テンソル)】 n 次元 (擬) Riemann 多様体 (M, g) の正規直交基底を $e_a = (e_a^\mu)$, $\theta^a = \theta_\mu^a dx^\mu$ とするとき, 曲率形式

$$\mathcal{R}^a{}_b = \frac{1}{2} R^a{}_{b\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.4.1)$$

から

$$\mathcal{C}^{ab} = \mathcal{R}^{ab} - \frac{1}{n-2} (S^a \wedge \theta^b - S^b \wedge \theta^a), \quad (2.4.2a)$$

$$S^a = R^a{}_c \theta^c - \frac{R}{2(n-1)} \theta^a \quad (2.4.2b)$$

により定義されるテンソル $C^\mu{}_{\nu\lambda\sigma}$,

$$\mathcal{C}^a{}_b = \frac{1}{2} \theta_\mu^a e_b^\nu C^\mu{}_{\nu\lambda\sigma} dx^\lambda \wedge dx^\sigma \quad (2.4.3)$$

を Weyl テンソルという. □

【公式 2.4.2 (Weyl 変換)】 Weyl 変換 $\hat{g} = e^{2\Phi} g$ に対して, \mathcal{C}^{ab} と S^a は次のように変換する :

$$\hat{\mathcal{C}}^{ab} = \mathcal{C}^{ab}, \quad (2.4.4a)$$

$$\hat{S}^a \wedge \hat{\theta}^b = S^a \wedge \theta^b + (n-1) [(\nabla^a \Phi \nabla^c \Phi - \nabla^a \nabla_c \Phi) \theta^c - \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 \theta^a] \quad (2.4.4b)$$

□

3

ブラックホール

§3.1

いくつかの例

3.1.1 Schwarzschild(-Tanghelini) BH

計量

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega_n^2; \quad (3.1.1)$$

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r^{n-1}}. \quad (3.1.2)$$

対称性

1. 時間並進 \mathbb{R} : $\xi = \partial_t$
2. 空間回転 $\text{SO}(n+1)$: η_i ($i = 1, 2, 3$)
3. 時間反転 \mathbb{Z}_2 : $t \rightarrow -t$
4. 空間反転 \mathbb{Z}_2 : $\Omega_n \rightarrow -\Omega_n$

Kretschmann 不変量

$$R_{abcd}R^{abcd} = \frac{4n^2(n^2-1)M^2}{r^{2n+2}}. \quad (3.1.3)$$

Future Finkelstein 座標 : (v, r) .

$$r_* = \int \frac{dr}{f(r)}, \tag{3.1.4}$$

$$v = t + r_* \tag{3.1.5}$$

とおくと,

$$ds^2 = 2dvdr - f(r)dv^2 + r^2d\Omega_n^2 \tag{3.1.6}$$

より, 時空は $r > r_H (r_H^{n-1} = 2M)$ から $r > 0$ に解析的に正則に拡張される. $\xi = \partial_t$ とおくと,

$$\xi = \partial_v \tag{3.1.7}$$

より,

$$k = -\partial_r, \quad l = \partial_v + \frac{1}{2}f(r)\partial_r \tag{3.1.8}$$

は, $r > r_H$ において未来向きの null ベクトル :

$$\xi \cdot k = -1, \quad \xi \cdot l = -\frac{1}{2}f(r), \tag{3.1.9}$$

$$k \cdot k = l \cdot l = 0, \quad k \cdot l = -1. \tag{3.1.10}$$

よって, $r = r_H$ 面は $r > r_H$ の領域にとって future null 面 (*future horizon*).

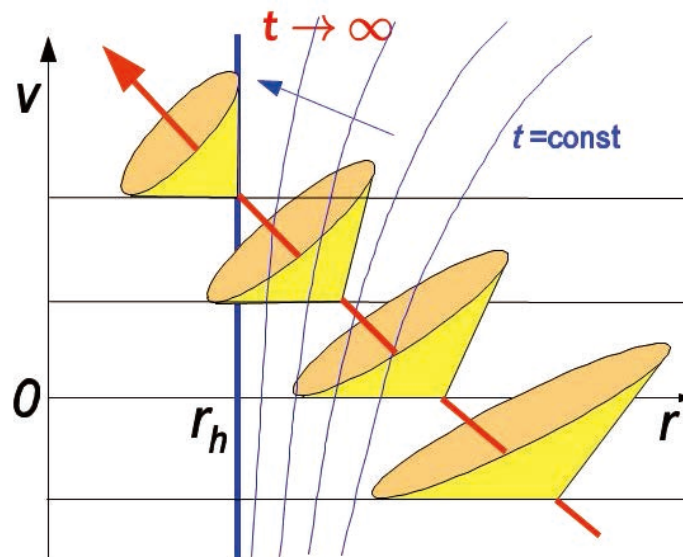


図 3.1: Future Finkelstein 座標

Past Finkelstein 座標 : (u, r) .

$$u = t - r_* \quad (3.1.11)$$

とおくと,

$$ds^2 = -2dudr - f(r)du^2 + r^2d\Omega_n^2 \quad (3.1.12)$$

より, 時空は $r > r_H (r_H^{n-1} = 2M)$ から $r > 0$ に解析的に正則に拡張される.

$$\xi = \partial_u \quad (3.1.13)$$

より,

$$k = \partial_r, \quad l = \partial_u - \frac{1}{2}f(r)\partial_r \quad (3.1.14)$$

は, $r > r_H$ において未来向きの null ベクトル:

$$\xi \cdot k = -1, \quad \xi \cdot l = -\frac{1}{2}f(r), \quad (3.1.15)$$

$$k \cdot k = l \cdot l = 0, \quad k \cdot l = -1. \quad (3.1.16)$$

よって, $r = r_H$ 面は $r > r_H$ の領域にとって past null 面 (*past horizon*).

Szekeres 座標 : (U, V) . 4次元時空 ($n = 2$) において, Null 座標 (u, v) を用いると計量は

$$ds^2 = -f(r)dudv + r^2d\Omega_2^2. \quad (3.1.17)$$

今, $r > r_H = 2M$ において

$$U = -2Me^{-u/4M}, \quad V = 2Me^{v/4M} \quad (3.1.18)$$

とおくと,

$$UV = -2M(r - 2M)e^{r/2M}, \quad (3.1.19)$$

$$|V/U| = e^{t/2M}. \quad (3.1.20)$$

この座標では計量は

$$ds^2 = -\frac{8M}{r}e^{-r/2M}dUdV + r^2d\Omega_2^2, \quad (3.1.21)$$

となり,

$$\frac{d(UV)}{dr} = -re^{r/2M} < 0 \quad (3.1.22)$$

より, 出発点の領域 $U < 0, V > 0$ から $r > 0$ に対応する領域 $UV < 4M^2$ に解析的に拡張される.

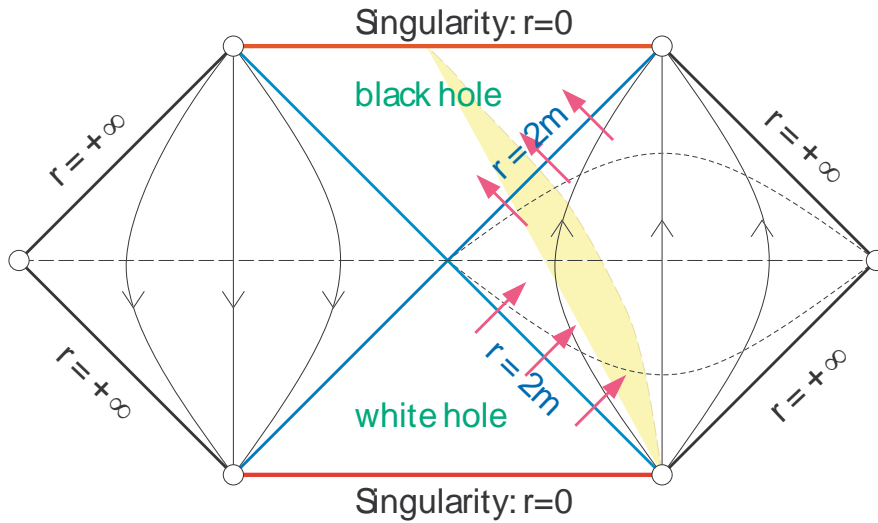


図 3.2: Szekeres 座標

共形図式

$$U = 2M \tan \frac{T - R}{2}, \quad V = 2M \tan \frac{T + R}{2}; \quad (3.1.23)$$

$$|T - R| < \pi, \quad |T + R| < \pi. \quad (3.1.24)$$

とおくと,

$$dU dV = \frac{M^2}{\cos^2 \frac{T-R}{2} \cos^2 \frac{T+R}{2}} (dT^2 - dR^2). \quad (3.1.25)$$

ここで,

$$1 - \frac{UV}{4M^2} = \frac{\cos T}{\cos \frac{T-R}{2} \cos \frac{T+R}{2}} \quad (3.1.26)$$

より, $UV < 4M^2$ は $|T| < \pi/2$ に対応.

Killing ホライズンと特異点 Schwarzschild 時空において, $r = 2M$ 面は時間推進の変換で不変な光的超曲面となっている. この様な面は **Killing** ホライズンという. この面は, t, r 座標による表示では特異であるが, これは座標の特異性である. 一方, $r = 0$ は曲率スカラが発散するので, 曲率特異点となる. Schwarzschild 時空の例では, 曲率特異点は空間的な時空の因果境界となり, しかもホライズンに隠される.

3.1.2 Reissner-Nordström BH

Einstein-Maxwell 系

$$dF = 0, \quad *d*F = -J, \quad (3.1.27a)$$

$$\mathbb{G} + \Lambda g = \kappa^2 \mathbb{T}; \quad T_{\mu\nu} = F_\mu \cdot F_\nu - \frac{1}{2} F \cdot F g_{\mu\nu}. \quad (3.1.27b)$$

RN 解

- 計量

$$g_{\text{RN}} = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 g(S^n); \quad (3.1.28)$$

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r^{n-1}} + \frac{Q^2}{r^{2(n-1)}} - \frac{2\Lambda}{n(n+1)} r^2, \quad (3.1.29)$$

$$M = \frac{8\pi G E}{n \text{vol}(S^n)}, \quad Q^2 = \frac{n}{n-1} \frac{8\pi G q^2}{\text{vol}(S^n)^2}. \quad (3.1.30)$$

- 電磁場

$$F = \phi' dt \wedge dr, \quad A = -\phi(r) dt; \quad \phi = \frac{q}{\text{vol}(S^n) r^{n-1}}, \quad (3.1.31)$$

対称性

1. 時間並進と時間反転: $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}_2$
2. 空間回転と空間反転: $O(n+1)$

ホライズン: $\Lambda = 0$ (漸近平坦) のとき

1. $Q^2 > M^2$ のとき, $f(r) > 0$ でホライズンは存在しない. このため, $r = 0$ の特異点は裸となる.
2. $Q^2 < M^2$ のとき,

$$f(r) = 0 \Rightarrow r^{n-1} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}. \quad (3.1.32)$$

より, 2つの Killing ホライズンが現れる.

3. $Q^2 = M^2$ のとき, ホライズンは

$$r^{n-1} = M \quad (3.1.33)$$

のみとなり, この面以外で ∂_t は至る所時間的となる.

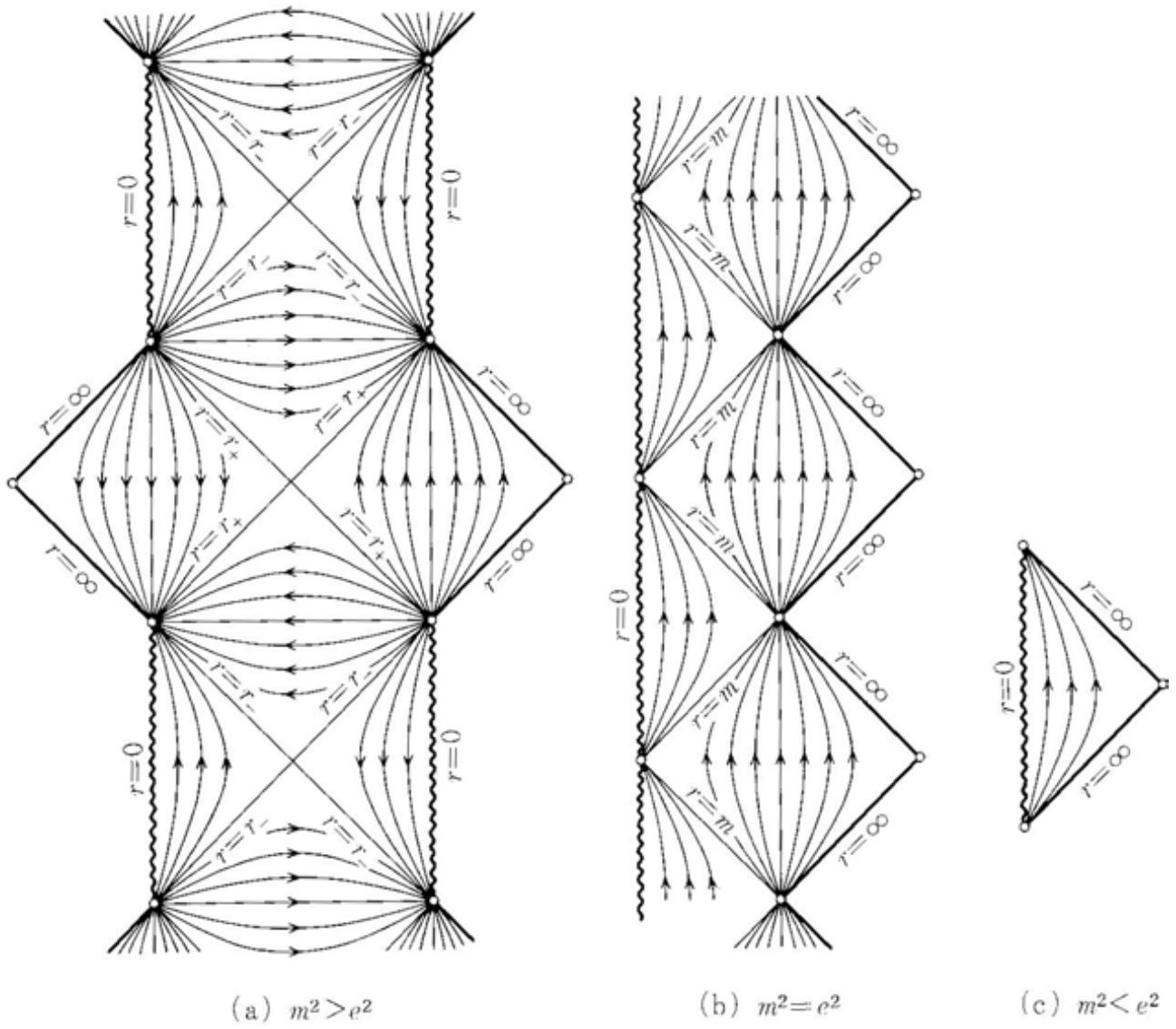


図 3.3: RN BH の Penrose 図式

表面重力 ホライズンに接し、そこで光的となる Killing ベクトル k に対し、

$$\nabla_k k = \kappa k \quad (3.1.34)$$

Killing 方程式

$$\nabla_\mu k_\nu + \nabla_\nu k_\mu = 0 \quad (3.1.35)$$

より、この式は

$$d(k^2) = -2\kappa k_* \quad (3.1.36)$$

と変形される。

RN 解の場合、

$$k^2 = -f \Rightarrow d(k^2) = -f' dr, \quad (3.1.37a)$$

$$k_* = -f dt = -f(dt + dr/f) + dr = dr - f dv \quad (3.1.37b)$$

より、

$$\kappa = \frac{1}{2}f'. \quad (3.1.38)$$

明らかに、 $Q^2 < M^2$ のとき $f' \neq 0$ だが、 $Q^2 = M^2$ のとき、

$$\nabla_k k = 0 \Leftrightarrow \kappa = 0 \quad (3.1.39)$$

すなわち、ホライズンが縮退する。

3.1.3 Kerr-Newman BH

Kerr-Newman 解

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\frac{\Delta \Sigma^2}{\Gamma} dt^2 + \frac{\Gamma \sin^2 \theta}{\Sigma^2} (d\phi - \Omega dt)^2 + \Sigma^2 \left(\frac{dr^2}{\Delta} + d\theta^2 \right) \\ &= -\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma^2} dt^2 - \frac{2a(2Mr - Q^2)}{\Sigma^2} \sin^2 \theta d\phi dt \\ &\quad + \sin^2 \theta \frac{\Gamma}{\Sigma^2} d\phi^2 + \Sigma^2 \left(\frac{dr^2}{\Delta} + d\theta^2 \right) \end{aligned} \quad (3.1.40)$$

と表される [40, 47]. ここで、

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2, \quad (3.1.41a)$$

$$\Sigma^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad (3.1.41b)$$

$$\Gamma = (r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta, \quad (3.1.41c)$$

$$\Omega = \frac{a(2Mr - Q^2)}{\Gamma}, \quad (3.1.41d)$$

ホライズン : Killing ホライズンは

$$\xi \cdot \xi \eta \cdot \eta - (\xi \cdot \eta)^2 \equiv -\Delta \sin^2 \theta = 0 \quad (3.1.42)$$

で与えられる. この方程式は, $a^2 + Q^2 < M^2$ のとき2つの解 $r = r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}$ をもつ. これらの解は, $a^2 + Q^2 = M^2$ の時一致する. (縮退型ホライズン). さらに $a^2 + Q^2 > M^2$ の時には解が存在しない. 分岐型ホライズンが存在するとき, ホライズン近傍で計量が正則となる座標系は,

$$du_{\pm} = dt \pm \frac{2Mr - Q^2}{\Delta} dt, \quad d\phi_{\pm} = d\phi \pm \frac{dr}{\Delta}. \quad (3.1.43)$$

この座標系を用いると, 計量は

$$ds^2 = -\frac{\Sigma^2}{\Gamma} [\Delta du_{\pm}^2 \mp 2(2Mr - Q^2) du_{\pm} dr + (\Sigma^2 + 2Mr - Q^2) dr^2] \\ + \frac{\Gamma \sin^2 \theta}{\Sigma^2} \left(d\phi_{\pm} - \Omega du_{\pm} \mp \frac{\Sigma^2 + 2Mr - Q^2}{\Gamma} dr d\phi_{\pm} \right)^2 + \Sigma^2 d\theta^2 \quad (3.1.44)$$

エルゴ領域 Killing ホライズンは, 無限赤方偏移面

$$g_{tt} = \Delta - a^2 \sin^2 \theta = 0 \quad (3.1.45)$$

とは一致しない. このため, ホライズンの外に, $g_{tt} > 0$ となる領域が現れる. この領域はエルゴ領域と呼ばれる.

特異点 ホライズンに対応する見かけの特異点を除くと, 計量は $\Sigma^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta = 0$, i.e. $r = 0, \theta = \pi/2$ に曲率特異点をもつ. $\theta = \pi/2$ 平面に沿ってこの特異点に近づくと

$$g_{\phi\phi} \rightarrow a^2 + \frac{a^2(2Mr - Q^2)}{r^2} \quad (3.1.46)$$

となるので, この特異点はリング状で, その周りの長さは無限大となる. また, $Q^2 \neq 0$ のときには, このリングは閉じた時間的曲線となる. $a^2 + Q^2 > M^2$ では, このリング状特異点は裸の特異点となる.

Penrose 過程 エルゴ領域では, 無限遠に対する粒子のエネルギー $E = -p \cdot \xi$ が負となることが可能となる. このため, 外部からこの領域に入射した粒子が $E > 0$ および $E < 0$ の2粒子に分裂し, $E < 0$ の粒子がブラックホールに吸収されると, 結果的にブラックホールからエネルギーを取り出すことができる. いま, Kerr BH に対して, BH の回転角速度を

$$\Omega_H := \Omega(r_+) = \frac{a}{2Mr_+} \quad (3.1.47)$$

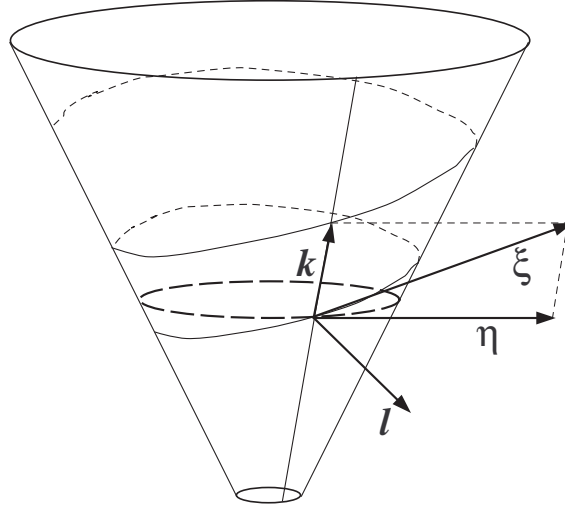


図 3.4: 回転ブラックホールのホライズン

により定義し,

$$k := \xi + \Omega_H \eta \quad (3.1.48)$$

とおくと, k はホライズン上で光的な Killing ベクトルとなる. BH に吸収される粒子の 4 元運動量を p とすると

$$p \cdot k \leq 0 \Rightarrow E > \Omega_H L \quad (3.1.49)$$

が成り立つ. この不等式をブラックホールの質量および角運動量に対する式として書くと,

$$0 < dM - \Omega_H dJ = \frac{\kappa}{8\pi G} dA; \quad \kappa = \frac{\sqrt{M^2 - a^2}}{r_+^2 + a^2}, \quad A = 4\pi(r_+^2 + a^2) \quad (3.1.50)$$

となる. すなわち, ブラックホールの面積は必ず増大する. したがって, Penrose 過程により Kerr BH が全角運動量を失うと, 後に残される BH の質量は,

$$M_{\text{IR}} := \frac{1}{2} \sqrt{M} (\sqrt{M - a} + \sqrt{M + a}) \quad (3.1.51)$$

で定義される簡約質量以上となる.

BH 熱力学 Kerr-Newman BH の面積 A , 質量 M , 角運動量 J , 電荷 Q の間には

$$\frac{\kappa c^2}{8\pi G} dA = dM c^2 - \Omega_H dJ - \Phi_H dQ \quad (3.1.52)$$

の関係がある. ここで, κ は BH の表面重力

$$\kappa = c^2 \frac{\sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}}{r_+^2 + a^2}, \quad (3.1.53)$$

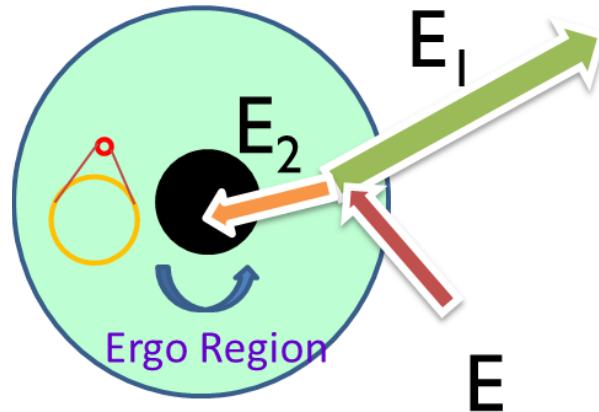


図 3.5: Penrose プロセス

Φ_H は BH の電気ポテンシャル Φ の極での値

$$\Phi_H = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qr_+}{r_+^2 + a^2} \quad (3.1.54)$$

である。温度として Hawking 輻射の温度

$$k_B T_H = \frac{\hbar\kappa}{2\pi c} \quad (3.1.55)$$

を用い、BH エントロピーを

$$\frac{S}{k_B} = \frac{c^3}{4G\hbar} A \quad (3.1.56)$$

で定義すると、上記の公式は可逆過程に対する熱力学の第2法則と一致する。

§3.2

ブラックホールの一般的定義

【定義 3.2.1 (ブラックホール, ホライズン, DOC)】 2つの光的無限遠をもつ漸近的に平坦な時空 \mathcal{M} では、天体から十分離れた観測者に情報が伝わる時空領域は $J^-(\mathcal{I}^+, \hat{\mathcal{M}})$ と一致するので、その外は観測者には見えない時空領域となる。

1. この領域のうち \mathcal{I}^- から影響の及ぶ部分

$$\mathcal{B} = (\mathcal{M} - J^-(\mathcal{I}^+, \hat{\mathcal{M}})) \cap J^+(\mathcal{I}^-, \hat{\mathcal{M}}) \quad (3.2.1)$$

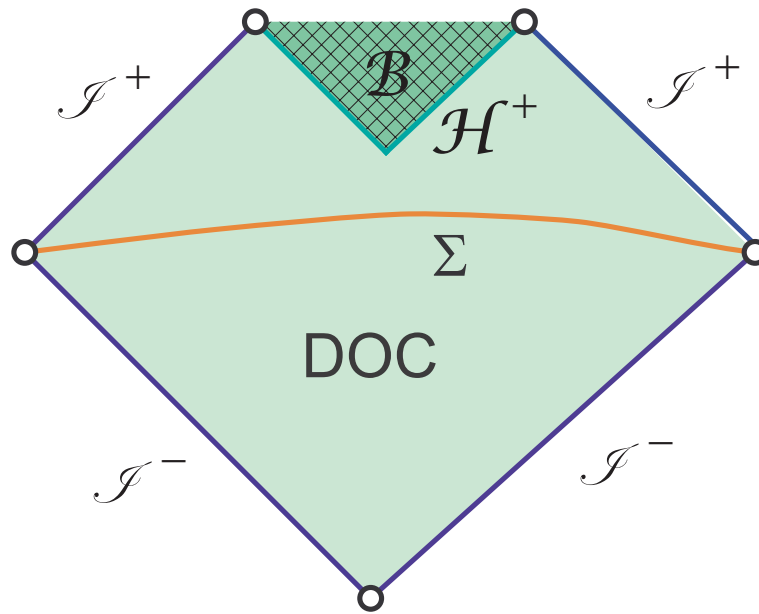


図 3.6: 漸近的に平坦なブラックホール時空の2次元断面

をブラックホール領域, その境界

$$\mathcal{H}^+ = J^-(\mathcal{I}^+, \hat{\mathcal{M}}) \cap J^+(\mathcal{I}^-, \hat{\mathcal{M}}) \quad (3.2.2)$$

を未来の事象の地平線 (future event horizon) (以下ホライズン) と定義する (図 3.6).

2. また, \mathcal{I}^+ から観測可能でかつ \mathcal{I}^- からの情報が伝わる領域

$$J^-(\mathcal{I}^+, \hat{\mathcal{M}}) \cap J^+(\mathcal{I}^-, \hat{\mathcal{M}}) \quad (3.2.3)$$

は **DOC**(domain of outer communication) と呼ばれる.

□

【注 3.2.2】 ブラックホールが重力崩壊で作られる場合には, 外部に特異点がないければ $\text{DOC} = J^-(\mathcal{I}^+, \hat{\mathcal{M}})$ となるが, 解析的に極大に拡張された Schwarzschild 解の表す時空では, ホワイトホール領域が存在し $\mathcal{M} - J^+(\mathcal{I}^-, \hat{\mathcal{M}}) \neq \emptyset$ となるので, DOC は $J^-(\mathcal{I}^+, \hat{\mathcal{M}})$ の一部となる (図 3.2). 実際の天体の重力崩壊では, この図の橙色の部分が星の内部と対応し, その左側の領域は存在しない. □

§3.3

測地線束方程式

3.3.1 Jacobi 方程式

曲線族 $\Gamma : x^\mu = x^\mu(\tau, z)$ の単位接ベクトル場を $u^\mu = \dot{x}^\mu$, 曲線間の相対位置ベクトルを $Z^\mu = \delta z^i \partial x^\mu / \partial z^i$ とすると,

$$\nabla_u Z = \nabla_Z u \quad (3.3.1)$$

が成り立つ。これより

$$\nabla_u^2 Z = \nabla_u \nabla_Z u = R(u, Z)u + \nabla_Z \nabla_u u. \quad (3.3.2)$$

したがって,

$$\nabla_u u = A \quad (3.3.3)$$

とおくと,

$$\nabla_u^2 Z = R(u, Z)u + \nabla_Z A \quad (3.3.4)$$

を得る。特に, Γ が測地線束, すなわち $A = 0$ のとき, この方程式は Jacobi 方程式と呼ばれる。

【注 3.3.1】 Γ が光的測地線束のとき,

$$\nabla_U(U \cdot Z) = U \cdot \nabla_U Z = U \cdot \nabla_Z U = 0 \quad (3.3.5)$$

となるので, U に直交する光的超平面に横断的な方向の変位の振る舞いは自明となる。したがって, 以下, U の接する光的超平面方向の変位のみ限定する。□

【定義 3.3.2 (共役点)】

1. 測地線 γ およびその上の2点 p, q に対して, $Z(p) = Z(q) = 0$ となる γ 上の Jacobi 場が存在するとき, p と q は γ に沿って共役 (conjugate) であるという。
2. 部分多様体 \mathcal{S} と点 p 直交する測地線 γ とその上の点 q に対して, $Z(q) = 0, Z(p) \parallel \mathcal{S}$ となる γ 上の Jacobi 場が存在するとき, \mathcal{S} と q は γ に沿って共役であるという。

□

3.3.2 弧長の2次変分

曲線族 $\Gamma = \{\gamma(z)\} : x^\mu = x^\mu(\tau, z)$ の弧長

$$S(z) = \int_{\gamma(z)} ds = \int_0^1 \sqrt{\pm g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} d\tau \quad (3.3.6)$$

の1次変分は,

$$U^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}, \quad Z_i^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial z^i} \quad (3.3.7)$$

と置くとき, (中間点では Z_i が peace-wise C^2 となることを許すと)

$$\partial_{z^i} S = \sum [\pm U \cdot Z_i] \mp \int Z_i \cdot \nabla_U U ds \quad (3.3.8)$$

Γ が端点で $U \cdot Z_i$ となる測地線族のとき, 2次変分は

$$\begin{aligned} \partial_{z^i} \partial_{z^j} S &= \sum [\pm \nabla_{Z_j} (U \cdot Z_i)] \mp \int ds \nabla_{Z_j} (Z_i \cdot \nabla_U U) \\ &= \sum [\pm \nabla_{Z_j} (U \cdot Z_i)] \mp \int ds Z_i \cdot \nabla_{Z_j} \nabla_U U \\ &= \sum [\pm \nabla_{Z_j} (U \cdot Z_i)] \mp \int ds Z_i \cdot (\nabla_U \nabla_{Z_j} U + R(Z_j, U)U). \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

よって,

$$\begin{aligned} \partial_{z^i} \partial_{z^j} S &= \sum [\pm \nabla_{Z_j} (U \cdot Z_i)] \mp \int ds Z_i \cdot (\nabla_U^2 Z_j + R(Z_j, U)U) \\ &= \pm \int ds [\nabla_U Z_i \cdot \nabla_U Z_j - R(Z_j, U, Z_i, U)]. \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

(注) 光的測地線での2次変分を議論するには,

$$S = \int_0^1 d\tau L; \quad L = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \quad (3.3.11)$$

を用いるとよい, これを用いると, 1次変分に関する停留曲線は測地線となり, τ は自動的にアフィンパラメータとなる ($U^\mu = \dot{x}^\mu$):

$$\partial_{z^i} L = \nabla_U (U \cdot Z_i) - Z_i \cdot \nabla_U U. \quad (3.3.12)$$

2次変分の計算はほとんど同じで

$$\partial_{z^i} \partial_{z^j} L = \nabla_U \nabla_{Z_j} (U \cdot Z_i) - Z_i \cdot (\nabla_U^2 Z_j + R(Z_j, U)U) \quad (3.3.13)$$

【命題 3.3.3 (共役点を超える時間的測地線)】

1. 時空 M 上の p と q が時間的測地線 γ に沿って共役なとき, $p = \gamma(b), q = \gamma(a)$ ($a < b$) とすると, $a < b < c$ に対して, p と $r = \gamma(c)$ を結ぶ時間的曲線で γ より長い弧長をもつものが存在する.
2. 時空 M 内の部分多様体 \mathcal{S} と直交する時間的測地線に沿って共役な点 q が存在したとする. このとき, γ 上の q を超える点と \mathcal{S} 上の点を結ぶ時間的曲線で, γ より長いものが存在する.

□

Proof. W を区間 $[p, q]$ では $W(p) = W(q) = 0$ なる γ 上の Jacobi 場, 区間 $[q, r]$ では $W \equiv 0$ となる γ 上のベクトル場とする. いま, K を

$$K \cdot \nabla_U W = -1 \quad \text{at } q \tag{3.3.14}$$

とすると, $Z = \epsilon K + \epsilon^{-1}W$ に対して,

$$D^2S(Z, Z) = \epsilon^2 D^2L(K, K) + 2D^2L(K, W) + \epsilon^{-2} D^2L(W, W) = \epsilon^2 D^2L(K, K) + 2 > 0 \tag{3.3.15}$$

Q.E.D.

【命題 3.3.4 (共役点を超える光的測地線)】

1. 時空 M 上の p と q が光的測地線 γ に沿って共役なとき, $p = \gamma(0), q = \gamma(1)$ とすると, $1 < c$ に対して, p と $r = \gamma(c)$ を結ぶ時間的曲線が存在する.
2. 時空 M 内の部分多様体 \mathcal{S} と直交する光的測地線に沿って共役な点 q が存在したとする. このとき, γ 上の q を超える点と \mathcal{S} 上の点を結ぶ時間的曲線が存在する.

□

Proof. 1. W を $W(p) = W(q) = 0$ となる Jacobi 場とし, $W = f\hat{W}$ ($W \cdot W = 1$) と置くと, Jacobi 方程式より

$$\ddot{f} + hf = 0; \quad h = \hat{W} \cdot \nabla_U^2 \hat{W} + R(\hat{W}, U, \hat{W}, U). \tag{3.3.16}$$

2. いま, $[q, r]$ 内の点 x を (q, x) で $W \neq 0$ となるようにとる. このとき, $a > 0, b > 0$ を適当にとり,

$$Z_0 = \{b(e^{a\tau} - 1) + f\} \hat{W} \tag{3.3.17}$$

に対して, $Z_0(p) = 0, Z_0(x) = 0$ かつ

$$Z_0 \cdot \nabla_U^2 Z_0 + R(Z_0, U, Z_0, U) = ba^2 e^{\tau b} (e^{a\tau} - 1) + f > 0 \quad \text{in } (p, x) \tag{3.3.18}$$

となるようにできる.

3. 変形場 $Z = Z(\tau, z)$ を $Z(\tau, 0) = Z_0(\tau)$ で, $\nabla_Z Z$ が $z = 0$ で

$$\nabla_Z(U \cdot Z) = \begin{cases} -\epsilon t & \text{for } 0 \leq \tau \leq \tau_x/4, \\ \epsilon(\tau - \tau_x/2) & \text{for } \tau_x/4 \leq \tau \leq 3\tau_x/4, \\ \epsilon(\tau_x - \tau) & \text{for } 3\tau_x/4 \leq \tau \leq \tau_x \end{cases} \quad (3.3.19)$$

を満たすように選ぶ. このとき, $\epsilon > 0$ を十分小さく選べば, $0 \leq \tau \leq \tau_x$ で

$$\frac{d^2 L}{dz^2} = \nabla_U \nabla_Z(U \cdot Z) - Z \cdot (\nabla_U^2 Z + R(Z, U)U) < 0 \quad (3.3.20)$$

となる.

Q.E.D.

3.3.3 時間的測地線束

Fermi 基底 u^μ が時間的ベクトル場 (粒子の速度場)

$$u = \partial_\tau; \quad u \cdot u = -1. \quad (3.3.21)$$

の場合に, 次の条件を満たす流線に沿った正規直交基底 E_a を考える.

$$E_0 = u, \quad u \cdot E_I = 0, \quad \dot{E}_I \equiv \nabla_u E_I = A_I u. \quad (3.3.22)$$

このとき, A_I は

$$A_I = -u \cdot \dot{E}_I = \dot{u} \cdot E_I = A \cdot E_I \quad (3.3.23)$$

を満たすので, 流線上のある点で E_a を与えると他の点での E_a は一意的に決まる.

流線間の相対位置ベクトル Z を Fermi 基底に関して

$$Z = Z^0 u + Z^I E_I \quad (3.3.24)$$

と成分表示すると,

$$\begin{aligned} \dot{Z}^I &= \dot{E}_I \cdot Z + E_I \cdot \nabla_u Z = -a_I Z^0 + E_I \cdot \nabla_Z u \\ &= -a_I Z^0 + Z^0 E_I \cdot \dot{u} + E_I \cdot \nabla_{E_J} u Z^J. \end{aligned} \quad (3.3.25)$$

よって,

$$\dot{Z}^I = M_{IJ} Z^J; \quad M_{IJ} = E_I \cdot \nabla_{E_J} u. \quad (3.3.26)$$

また,

$$\begin{aligned} \dot{Z}^0 &= -\dot{u} \cdot Z - u \cdot \nabla_u Z = -\dot{u} \cdot E_I Z^I - u \cdot \nabla_Z u \\ &= -a_I Z^I. \end{aligned} \quad (3.3.27)$$

これらより

$$\dot{Z} = Z^0 \dot{u} + M_{IJ} Z^J E^I. \quad (3.3.28)$$

Expansion, shear, rotation

$$\theta_{IJ} = \sigma_{IJ} + \frac{1}{d}\delta_{IJ}\theta := M_{(IJ)}; \quad \sigma_{II} = 0, \quad (3.3.29)$$

$$\omega_{IJ} := M_{[IJ]}. \quad (3.3.30)$$

とおくと,

$$\begin{aligned} M_{IJ}E_\mu^IE_\nu^J &= (E_\mu^IE_\nu^J)(E_\nu^JE_\mu^I)\nabla_\sigma u_\lambda = (\delta_\mu^\lambda + u_\mu u^\lambda)(\delta_\nu^\sigma + u_\nu u^\sigma)\nabla_\sigma u_\lambda \\ &= \nabla_\nu u_\mu + u_\nu \dot{u}_\mu \end{aligned} \quad (3.3.31)$$

より,

$$\nabla_\nu u_\mu = \theta_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu} - \dot{u}_\mu u_\nu; \quad \theta_{\mu\nu} := E_\mu^IE_\nu^J\theta_{IJ}, \quad \omega_{\mu\nu} := E_\mu^IE_\nu^J\omega_{IJ}. \quad (3.3.32)$$

3.3.4 光的測地線束

Fermi 基底 k^μ が光的ベクトル場のとき, 光的測地線 γ に沿った光的 Fermi 基底を

$$E_0 = k, \quad E_1 = l, \quad E_n (n = 2, \dots, d-1); \quad (3.3.33a)$$

$$k \cdot l = -1, \quad k \cdot E_n = l \cdot E_n = 0, \quad E_n \cdot E_m = \delta_{nm}, \quad (3.3.33b)$$

$$\nabla_k E_a = 0 \quad (3.3.33c)$$

により定義する. 一般に, E_n は $\text{mod } k$ で決まる.

この基底を用いて,

$$Z = Z^0 k + Z^1 l + Z^n E_n \quad (3.3.34)$$

と成分表示すると,

$$\dot{Z}^1 = 0, \quad (3.3.35)$$

$$\dot{Z}^n = \hat{M}_{nm} Z^m; \quad \hat{M}_{nm} = E_n \cdot \nabla_{E_m} k \quad (3.3.36)$$

となる. \hat{M}_{nm} は l の取り方によらず決まる.

Expansion, shear, rotation

$$\hat{\theta}_{mn} = \hat{\sigma}_{mn} + \frac{1}{d-1}\delta_{mn}\hat{\theta} := \hat{M}_{(mn)}; \quad \hat{\sigma}_n^n = 0, \quad (3.3.37)$$

$$\hat{\omega}_{mn} := \hat{M}_{[mn]}. \quad (3.3.38)$$

とおくと,

$$\nabla_\mu k_\nu = (\hat{\theta}_{mn} + \hat{\omega}_{mn})E_{m\nu}E_{n\mu} \pmod{k} \quad (3.3.39)$$

特に,

$$\nabla_\mu k^\mu = \hat{\theta}. \quad (3.3.40)$$

3.3.5 Raychaudhuri 方程式

時間的曲線則 $[u, Z] = 0$ より

$$\ddot{Z} = \nabla_u \nabla_Z u = R(u, Z)u + \nabla_Z \dot{u}. \quad (3.3.41)$$

一方, \dot{Z} の表式より,

$$\begin{aligned} \ddot{Z} - \nabla_Z \dot{u} = & -a_I Z^I \dot{u} - Z^I \nabla_{E_I} \dot{u} + a_I M_{IJ} Z^J \dot{u} \\ & + (\dot{M} + M^2)_{IJ} Z^J E_I. \end{aligned} \quad (3.3.42)$$

よって,

$$(\dot{M} + M^2)_{IJ} = -R_{I\mu J\nu} u^\mu u^\nu + a_I a_J + E_I \cdot \nabla_{E_J} \dot{u}. \quad (3.3.43)$$

これより

$$\dot{\theta} + \frac{1}{d}\theta^2 = -2\sigma^2 + 2\omega^2 - \text{Ric}(u, u) + \nabla_\mu \dot{u}^\mu, \quad (3.3.44a)$$

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{IJ} + \frac{2}{d}\theta\sigma_{IJ} = & -\sigma_{IK}\sigma_J^K + \frac{2}{d}\sigma^2\delta_{IJ} + \omega_{IK}\omega_J^K - \frac{2}{d}\omega^2\delta_{IJ} \\ & -R_{IuJu} + \frac{1}{d}R_{uu}\delta_{IJ} + a_I a_J + E_{(I} \cdot \nabla_{E_{J)} \dot{u} - \frac{1}{d}\nabla \cdot \dot{u}\delta_{IJ}, \end{aligned} \quad (3.3.44b)$$

$$\dot{\omega}_{IJ} + \frac{2}{d}\theta\omega_{IJ} + \sigma_I^K \omega_{KJ} - \sigma_J^K \omega_{KI} = E_{[I} \cdot \nabla_{E_{J]} \dot{u}. \quad (3.3.44c)$$

ここで

$$2\sigma^2 := \sigma_{IJ}\sigma_{IJ}, \quad 2\omega^2 := \omega_{IJ}\omega_{IJ}. \quad (3.3.45)$$

特に, $\dot{u} \equiv 0$ のとき, $\dot{\theta}$ の方程式は *Raychaudhuri* 方程式と呼ばれる.

【命題 3.3.5 (非回転的測地線束)】 $(d+1)$ 次元時空において, 一点を通過する d 次元の測地線束は非回転的 ($\omega = 0$) である. また, 空間的超曲面に垂直な d 次元の測地線束も非回転的である. \square

Proof. 1. $\gamma(t, z)$ が空間的超曲面 Σ に垂直とする. f を Σ 上で定数となる非退化関数, V を γ の接ベクトル場とすると, 関数 k が存在して

$$V_* = kdf \Rightarrow dV_* = dk \wedge df \Rightarrow V_* \wedge dV_* = 0 \Leftrightarrow \omega = 0. \quad (3.3.46)$$

Σ 上で $\omega = 0$ となると, $\dot{\omega}$ の方程式より, 至る所 $\omega = 0$.

2. 弧長に対する第1変分公式より, 時間的測地線束が一点 p を通過するとき, 測地線束は p から固有長が一定となる超曲面に垂直.

Q.E.D.

【定義 3.3.6 (時間的収束条件)】 任意の時間的ベクトル V に対して, $\text{Ric}(V, V) \geq 0$ となると, 時間的収束条件 (timelike convergence condtion), あるいは強エネルギー条件 (strong energy condition) が成り立つという. \square

【命題 3.3.7 (非回転時間的測地線束)】 非回転的な時間的測地線束に含まれる測地線 γ 上の1点 p で $\theta < 0$ となるとする。もし、時間的収束条件が成り立ち、この測地線が完備なら、 γ に沿った共役点が存在する。 \square

光的測地線束 同様にして、

$$\dot{\hat{\theta}} + \frac{1}{d-1}\hat{\theta}^2 = -2\hat{\sigma}^2 + 2\hat{\omega}^2 - \text{Ric}(k, k), \quad (3.3.47a)$$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\sigma}}_{mn} + \frac{2}{d-1}\hat{\theta}\hat{\sigma}_{mn} &= -\hat{\sigma}_{ml}\hat{\sigma}_n^l + \frac{2}{d-1}\hat{\sigma}^2\delta_{mn} + \hat{\omega}_{ml}\hat{\omega}_n^l - \frac{2}{d-1}\hat{\omega}^2\delta_{mn} \\ &\quad - \text{Riem}(k, m, k, n) + \frac{1}{d-1}\text{Ric}(k, k)\delta_{mn}, \end{aligned} \quad (3.3.47b)$$

$$\dot{\hat{\omega}}_{mn} + \frac{2}{d-1}\hat{\theta}\hat{\omega}_{mn} + \hat{\sigma}_m^l\hat{\omega}_{ln} - \hat{\sigma}_n^l\hat{\omega}_{lm} = 0. \quad (3.3.47c)$$

【定義 3.3.8 (光的収束条件)】 任意の光的ベクトル k に対して、 $\text{Ric}(k, k) \geq 0$ となるとき、光的収束条件 (null convergence condtion) が成り立つという。 \square

【命題 3.3.9 (非回転的光測地線束)】 一点 p を通過する (余次元2の空間的面 \mathcal{S} に直交する) 非回転的な光測地線束に含まれる測地線 γ 上の1点で $\hat{\theta} < 0$ となるとする。もし、光収束条件が成り立ち、この測地線が未来向きに完備なら、 γ に沿った $p(\mathcal{S})$ の共役点が存在する。 \square

Proof. Raychaudhuri 方程式より、

$$-\frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{\hat{\theta}} \right) + \frac{1}{d-1} \leq 0 \Rightarrow \hat{\theta}(\tau) \leq \frac{-|\hat{\theta}(\tau_0)|}{1 - \frac{\tau - \tau_0}{d-1} |\hat{\theta}(\tau_0)|} \quad (3.3.48)$$

よって、 $\tau - \tau_0 \leq (d-1)/|\hat{\theta}(\tau_0)|$ で $\hat{\theta} \rightarrow -\infty$. Q.E.D.

§3.4

一般的な諸定理

【定義 3.4.1 (閉捕捉面 (Hawking-Ellis 1978B))] 時空内の余次元2の空間的コンパクト閉部分多様体 \mathcal{S} に対し、その未来向きの光的法ベクトル場の組を (k, ℓ) ($\ell \cdot k = -1$) とする。このとき、 $\theta^{(k)} < 0, \theta^{(\ell)} < 0$ となるなら、 \mathcal{S} を閉捕捉面 (closed trapped surface) という。 \square

【定理 3.4.2 (捕捉面とホライズンの関係 (Hawking-Ellis1973B))] 漸近的に平坦で大域的に双曲的時空 $\mathcal{M} = D(\Sigma)$ において, 光的収束条件が成り立ち, DOC に特異点がないとすると, 閉捕捉面はホライズンの中に含まれる. \square

Proof. (証明の概要)

1. 2次元面 \mathcal{S} に垂直な光的測地線束が収束的, すなわち $\theta < 0$ となっているとき, Raychaudhuri 方程式より, 含まれる測地線 γ が完備なら, 有限な v で $\theta = -\infty$ となる. この発散点は, \mathcal{S} の γ にそう共役点となる..
2. 共役点は, γ の無限小近傍の測地線が一点に集まる点であるが, γ のこの点より先の部分は $I^+(\mathcal{S})$ に含まれる.
3. いま, \mathcal{S} がホライズンに含まれないとすると, $\partial(J^+(\mathcal{S}))$ を生成する光的測地線で \mathcal{S}^+ に達するものが存在し, この測地線は共役点を持つことができないが, これは 1. に反する.

Q.E.D.

【定義 3.4.3 (外向き捕捉面, 見かけのホライズン, MOTS (Hawking-Ellis 1978B))]

時空 M が Cauchy 面 Σ をもち, その中の超曲面 \mathcal{S} がそれを外側と内側に分離するとする. このとき, Σ への垂直射影の向きにより光的ベクトルにも外向きと内向きの区別が定義される. この向きの定義のもとで, \mathcal{S} の外向きの光法ベクトルを k , 内向きの光法ベクトルを l とする.

1. $\theta^{(k)} \leq 0$ のとき, 外向き捕捉面 (outer trapped surface) という.
2. Σ の点のうち, その点を含む外向き捕捉面が存在するものの全体を捕捉領域 (trapped region) という.
3. 捕捉領域の境界の各連結成分の外側の境界を見かけのホライズン (apparent horizon) という.
4. $\theta^{(k)} = 0$ のとき, 臨界外向き捕捉面 (MOTS)(marginally outer trapped surface) という.

\square

【命題 3.4.4 (MOTS と見かけのホライズンの関係 (Hawking-Ellis 1978B))] 捕捉領域の境界の各連結成分は MOTS となる. \square

【定理 3.4.5 (BH の面積増大定理 (Hawking-Ellis1973B))] ホライズン上および外に特異点がなく, 光的収束条件が成り立つなら, ブラックホールの面積は決して減少しない. \square

Proof. ホライズンを織りなす光的測地線が常に $J^-(\mathcal{I}^+, \hat{M})$ の境界にとどまり共役点を持たないことより Q.E.D.

【注 3.4.6】 この定理は、ブラックホール熱力学においてブラックホール面積にエントロピーとしての解釈を与える根拠の一つとなっている。 □

【定理 3.4.7 (ブラックホール不分裂定理 (Hawking-Ellis1973B))】 ホライズン上およびDOCに特異点がないなら、ブラックホールは合体はできるが分裂はしない。 □

Proof. ホライズンを生成する光的測地線が終点を持たないので。 Q.E.D.

§3.5

静的ブラックホールの一意性

3.5.1 Israel の一意性定理 (4次元)

球対称 \Rightarrow 静的

【定理 3.5.1 (Birkhoff の定理 [Birkhoff 1923])】 Einstein 方程式の弱漸近単純かつ球対称な4次元真空解は必ず静的で、(dS/adS-)Schwarzschild 解に限られる。 □

【定理 3.5.2 (一般化された Birkhoff の定理)】 高々電磁場しか存在しない (n+2)次元系に対して、Einstein 方程式の $SO(n+1)$, $SO(n, 1)$ ないし $ISO(n)$ (= $Isom(E^n)$) 対称な解は必ず静的で、次のいずれかと局所同型である：

- 成相解： $M = dS^2 \times S^n, adS^2 \times H^n$.
- ブラックホール解：

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2d\sigma_k^2, \tag{3.5.1}$$

$$f(r) = k - \frac{m}{r^{n-1}} + \frac{q^2}{r^{2n-2}} - \lambda r^2 \tag{3.5.2}$$

□

静的 \Rightarrow 球対称

【定理 3.5.3 (Israel の剛性定理 [Israel W 1967])】 漸近的平坦で漸近予言可能な静的な Einstein 方程式の真空解は, $DOC \approx S^2 \times \mathbb{R}^2$ ならば球対称である. \square

Proof. 静的 $(n+2)$ 次元時空

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + d\sigma^2(\Sigma) \quad (3.5.3)$$

に対して, Einstein 方程式は

$$R_{ij}(\Sigma) = \frac{1}{N} \nabla_i \nabla_j N, \quad \Delta N = 0 \quad (3.5.4)$$

空間計量を

$$d\sigma^2 = \rho^2 dN^2 + \gamma_{ab} dz^a dz^b \quad (3.5.5)$$

と表すと, N -一定面 (n 次元) $S(N)$ の外部曲率

$$K_{ab} = \frac{1}{2\rho} \partial_N \gamma_{ab} = \hat{K}_{ab} + \frac{1}{n} K \gamma_{ab} \quad (3.5.6)$$

に対して, Einstein 方程式より

$$\partial_N \int_{S(N)} \frac{K}{N} \rho^{1/n-1} = - \int_{S(N)} \left(\frac{n-1}{n} \frac{(D\rho)^2}{\rho^2} + \hat{K}^2 \right), \quad (3.5.7)$$

$$\Rightarrow 2n\Omega_n \{(n-1)M\}^{1-1/n} \rho_H^{-1/n} \leq \int_H R, \quad (3.5.8)$$

$$\partial_N \int_{S(N)} \left(\frac{KN}{\rho} + \frac{2n-1}{n-1} \frac{1}{\rho^2} \right) = - \frac{N}{n-1} \int_{S(N)} \left(R + (n-1) \frac{(D\rho)^2}{\rho^2} + n\hat{K}^2 \right), \quad (3.5.9)$$

$$\Rightarrow \int_0^1 dN N \int_{S(N)} R \leq \frac{2nA_H}{\rho_H^2}, \quad M = \frac{A_H}{(n-1)\Omega_n \rho_H} \quad (3.5.10)$$

を得る. 特に, $n=2$ のとき, $S(N) \approx S^2$ なら Gauss-Bonnet の定理より

$$\int_{S(N)} R = 8\pi \Rightarrow 4\pi \leq \frac{4A_H}{\rho_H^2} = \frac{16\pi M}{\rho_H} \leq 4\pi \Rightarrow D\rho = \hat{K} = 0 \quad (3.5.11)$$

これより, $S(N)$ が 2 次元球面に等長で, 時空が $SO(3)$ 対称性をもつことが導かれる. \square

3.5.2 一般次元における一意性定理

【定義 3.5.4 (非縮退ホライズン)】 k をホライズンで光的となる Killing ベクトル場とするとき, $\nabla_k k = 0$ となるときホライズンは縮退しているという. また, $\nabla_k k = \kappa k (\kappa \neq 0)$ のとき, ホライズンは非縮退と呼ばれ, κ はホライズンの表示面重力という. \square

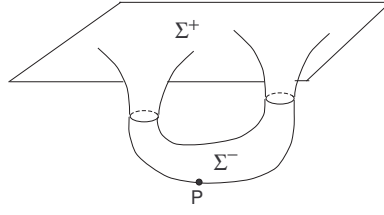


図 3.7: 静的ブラックホール時空の共形的改変

【定理 3.5.5 (一般剛性定理 [Bunting, Masood-ul-Alam 1987; Hwang S 1998; Gibbons, Ida, Shiromizu 2002])] 漸近的平坦で漸近予言可能な静的な Einstein-Maxwell 方程式の真空解は、ホライズンが非縮退ならば球対称であり、(一般次元の) RN 解で表される。 □

Proof. 静的ブラックホール解は次の方程式系の解である :

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= -V^2 dt^2 + g_{ij} dx^i dx^j, \\
 \Delta V &= 0; \quad V = 1 - \frac{2M}{r^{n-1}} + O\left(\frac{1}{r^n}\right), \quad (n = D - 2) \\
 R_{ij} - \frac{1}{V} D_i D_j V &= 0; \quad g_{ij} = \left(1 + \frac{4M}{r^{n-1}}\right) \delta_{ij} + O\left(\frac{1}{r^n}\right).
 \end{aligned}$$

1. (Conformal flatness)

$$\begin{aligned}
 \Sigma^\pm : \tilde{g}_{ij}^\pm &= \Omega_\pm^2 g_{ij}; \quad \Omega_\pm = \left(\frac{1 \pm V}{2}\right)^{2/(n-1)} \\
 \Rightarrow \tilde{\Sigma} = \Sigma^+ \cup \Sigma^- \cup p &: \text{Regular,} \\
 &\text{AF, zero mass and } \tilde{R} = 0 \\
 \Rightarrow (\tilde{\Sigma}, \tilde{g}_{ij}) &: \text{flat (Positive Energy Theorem)} \\
 \Rightarrow g_{ij} &= v^{4/(n-1)} \delta_{ij} \text{ with } v = \frac{2}{1+V} \text{ and the horizon is connected}
 \end{aligned}$$

2. (Spherical symmetry)

ホライズンの正則性 $\Rightarrow H$: totally umbilical in Euclidean space $\Rightarrow H$: an Euclidean sphere

$\Delta_0 v = 0, v = 2$ on $H, v = 1 + O(1/r^{n-1})$ at infinity $\Rightarrow v$: spherically symmetric

Q.E.D.

§3.6

4次元回転ブラックホールの一意性

3.6.1 回転ブラックホールの剛性定理

【定理 3.6.1 (Hawking の BH 位相定理)】 4次元時空において DOE が成り立つとする。このとき、見かけのホライズンに含まれる MOTS \mathcal{T} は S^2 か T^2 に同相である。 □

Proof.

$$2\pi\chi(\mathcal{T}) = \int_{\mathcal{T}} R_s \geq \int 8\pi GT(\ell, \ell + k) \geq 0 \quad (3.6.1)$$

Q.E.D.

【定理 3.6.2 (回転ブラックホールの剛性定理 (Hawking 1973))] Einstein-Maxwell 系において、正則解析的で定常な回転ブラックホール解は、ホライズンが連結で解析的な部分多様体なら、軸対称である。 □

3.6.2 Ernst 形式

【定義 3.6.3 (Ernst ポテンシャル)】

1. 一般に、4次元時空が Killing ベクトル $\alpha = \partial_u$ を持つとき、時空をこのベクトル場の軌道の集まり、すなわち 3次元 Riemann 多様体 (Σ, q) を底空間しファイバーが 1次元のファイバー空間とみなすと、 β を Σ 上の 1形式として、4次元計量 g は

$$g = V(du + \beta)^2 + |V|^{-1}q \quad (3.6.2)$$

と表される。

2. この時空での定常な電磁場の電磁テンソル F は、 Σ 上の複素関数 Φ をもちいて、

$$\sqrt{G}F = \text{Re}[V^{-1}(1 + i*)(d\Phi \wedge \xi)] \quad (3.6.3)$$

と表されることが示される。

3. これらを用いて、

$$d\mathcal{E} = -dV + i*_q(V^2d\beta) - 2\bar{\Phi}d\Phi \quad (3.6.4)$$

とおくと、Einstein 方程式より右辺が閉形式であることが示されるので、この式により **Ernst** ポテンシャル (と) 呼ばれる複素関数 \mathcal{E} が定義される [12, 13].

□

【定理 3.6.4 (Ernst 形式)】 Killing ベクトルを持つ系に対し，4次元の Einstein 方程式と Maxwell 方程式は，3次元多様体上の Σ 上の計量 q ，Ernst ポテンシャル \mathcal{E} および複素電磁ポテンシャル Φ に対する作用積分

$$S = \int_{\Sigma} *_q \left(R(q) - 2 \frac{|d\Phi|^2}{V} - \frac{|d\mathcal{E} + 2\bar{\Phi}d\Phi|^2}{2V^2} \right) \quad (3.6.5)$$

より得られる変分方程式に帰着する。 □

3.6.3 一意性定理

【注 3.6.5 (回転ブラックホール一意性定理の歴史)】

1. 時空が定常軸対称の時には， α として時間推進の Killing ベクトル ∂_t を取り $u = t$ とおくと， $q = e^{2k}(dz^2 + d\rho^2) + \rho^2 d\phi^2$ と表され，場の方程式は， k に対する常微分方程式と，2次元の (ρ, z) 平面上の2つの場 \mathcal{E}, Φ に対する非線形の楕円型方程式系となる．この2次元系への還元は B. Carter によってなされた [4].
2. 彼はさらに，重力場のみの系では，境界条件のもつ連続パラメータの自由度は，質量 M ，角運動量 J のみであることを示した．
3. D.C. Robinson はこの結果を電磁場が存在する場合に拡張し，連続パラメータの自由度は， M, J と電荷 Q のみであることを示した [36]. ただし，これらの結果では，Kerr-Newman 解以外に別の解の族が存在する可能性を排除できない．
4. 重力のみの系に対しては，この問題は，非常に複雑な恒等式を用いることにより，Robinson により解決され，Kerr ブラックホールが唯一の解であることが証明された．
5. しかし，この恒等式を電磁場が存在する場合に試行錯誤により拡張することは絶望的であった．何かより深い議論に基づく恒等式の導出が切望された [5]. この希望を見事に叶えたのが，P.O. Mazur [23] である．彼は，Ernst 形式での理論が，(3次元重力と結合した) 非線形 σ 模型の構造をしていることに着目し，それから得られる Mazur 恒等式と呼ばれる電流保存則を用いることにより，一意性定理を証明した．

□

【定理 3.6.6 (Carter 1972; Robinson; Mazur 1982; Chrusciel 1996; Weinstein 1996)】

上記剛性定理と同じ仮定の下で, 4次元 Einstein-Maxwell 系に対する漸近的に平坦で予測可能な定常回転ブラックホール解は, Weinstein 解のどれかと等長である. 特に, ホライズンが連結なら Kerr-Newman 解に限られ, 質量, 角運動量および電荷で一意的に決まる. □

Proof. (ホライズンが連結な場合の Mazur による証明)

1. α を空間回転の Killing ベクトル η に取ると, $V > 0$ なので, 作用積分 (3.6.5) は $SU(2, 1)$ 不変性を持ち, (\mathcal{E}, Φ) は対称空間 $\mathcal{M} = SU(2, 1)/S(U(2) \times U(1))$ と同一視できる.
2. 実際, (\mathcal{E}, Φ) を $SU(2, 1)$ に含まれる正値エルミート行列 $X \in SU(2, 1) \cap H(3)$ に

$$v = \frac{1}{2|N|^{1/2}} (\mathcal{E} - 1, \mathcal{E} + 1, 2\Phi), \quad (3.6.6)$$

$$X_{ab} = \eta_{ab} + 2\epsilon\bar{v}_a v_b \quad (3.6.7)$$

により埋め込むと, これらの場の作用積分は, 行列値 1 形式

$$\mathcal{J} = X^{-1} dX \quad (3.6.8)$$

を用いて

$$S = \int *_q \text{Tr}(\mathcal{J}^\mu \mathcal{J}_\mu) \quad (3.6.9)$$

と表される. これより, 場の方程式は

$$\nabla \cdot \mathcal{J} = 0 \quad (3.6.10)$$

となり, その2つの解 $X_{(1)}, X_{(2)}$ に対して,

$$-\Delta_q \text{Tr} \Psi = \text{Tr}(Y^\dagger \cdot Y); \quad Y = X_{(2)}^{1/2} (\mathcal{J}_{(2)} - \mathcal{J}_{(1)}) X_{(1)}^{-1/2} \quad (3.6.11)$$

を得る. ここで,

$$\Psi := X_{(2)}^{-1} X_{(1)} - I_3 \quad (3.6.12)$$

右辺は非負で, 左辺の Σ での積分は境界条件よりゼロとなる. これより, 直ちに2つの解は一致することと言える.

Q.E.D.

4

時空特異点

References

- Geroch, R.: What is a singularity in general relativity?, *Ann. Phys.* 48, 526-540 (1968).
- Schmidt, B.: A new definition of singular points in general relativity, *Gen. Rel. Grav.* 1, 269-280 (1971).
- Hawking, S. and Ellis, G.: *The Large Scale Structure of Space-time* (Cambridge Univ. Press, 1973).
- Clarke, C.: Local extensions in singular space-times, *Comm. Math. Phys.* 32, 205-214 (1973).
- Ellis, G. and Schmidt, B.: Singular space-times, *Gen. Rel. Grav.* 8, 915-954 (1977).
- Tipler, F.: Energy conditions and spacetime singularities, *Phys. Rev. D* 17, 2521-2528 (1978).
- Tipler, F., Clarke, C. and Ellis, G.: Singularities and Horizons — A Review Article, in Held, A. ed., *General Relativity and Gravitation*, vol.2, 97-206, Plenum Press (1980).
- Borde, A.: Geodesic focusing, energy conditions and singularities, *Class. Quantum Grav.* 4, 343-356 (1987).
- Clarke, C.: *The Analysis of Space-Time Singularities* (Cambridge Univ. Press, 1993).

§4.1

特異点の定義

【定義 4.1.1 (一般化されたアフィンパラメータと b-完備)】

1. C^1 級曲線 $\gamma(t)$ に沿って平行な正規直交基底を E_a , 接ベクトルを V とするとき, γ のパラメータ

$$u = \int_{t_0}^t \left(\sum_a (E_a \dot{V})^2 \right)^{1/2} \quad (4.1.1)$$

を平行基底 E_a に関する一般化されたアフィンパラメータ (generalized affine parameter) という. 一般化されたアフィンパラメータの有限性は, 平行基底の選び方によらない.

2. 時空は, 一般化されたアフィンパラメータに関して有限長の C^1 級曲線が常に端点をもつとき, **b-完備** (b-complete) であるという.

□

【定義 4.1.2 (未来 (過去) の特異点と無限遠点)】 終端既約過去集合 \mathcal{P} は未来向きに延長不可能な因果的曲線 γ を用いて $T = I^-(\gamma)$ と表される. このとき,

1. γ の一般化されたアフィン長が無限大の時, \mathcal{P} を未来の無限遠点 (future infinity point) という.
2. γ の一般化されたアフィン長が有限の時, \mathcal{P} を未来の特異点 (future singularity) という.

同様に, 終端既約未来集合を用いて, 過去の無限遠点, 過去の特異点が定義される.

□

【定理 4.1.3 ($O(M)$ バンドルと b 完備性の関係 (Schmidt))】 時空 (M, g) の擬正規直交基底全体の作るバンドル $O(M)$ には, g から自然な正定値 Riemann 計量が定義される:

$$(V, \omega) \in T_{(p,E)}(O(M)) \Rightarrow g(O(M)) = \sum_a (V \dot{E}_a)^2 + \sum_{ab} \omega_{ab}^2 \quad (4.1.2)$$

このとき, この計量から誘導される距離に関して $O(M)$ が完備となることと, (M, g) が b-完備となることは同値である.

□

【定義 4.1.4 (b-特異点)】 時空 (M, g) に対応する $O(M)$ バンドルが完備でないとき, その完備化を $\overline{O(M)}$ として, $\partial(O(M)) = \overline{O(M)} - O(M)$ の点を **b-特異点** という.

□

 §4.2

 特異点定理

次の定理は、重力崩壊によりブラックホールができると、必ず特異点も生成されることを意味している。ただし、「特異点の場所」については何の情報も与えない。

【定理 4.2.1 (Penrose 1965)】 次の条件が成り立つと、時空は光的測地線に関して完備でない：

- (1) 光的収束条件.
- (2) 非コンパクトな Cauchy 面の存在.
- (3) 閉捕捉面の存在.

□

Proof. (証明の概要)

1. Cauchy 面を Σ 、閉捕捉面を \mathcal{S} とする。 $M = D(\Sigma)$ が光測地線に関して完備とすると、 $E = \partial(J^+(\mathcal{S}))$ を生成するすべての光測地線は延長すると \mathcal{S} の共役点をもつので、 E に含まれる部分は有限で、 \mathcal{S} はコンパクトなので、その長さは一様有界となる。 よって、 E はコンパクト閉な超曲面となる。
2. $D(\Sigma)$ 上の時間的ベクトル場の各積分曲線は、 \mathcal{S} と高々1度だけ交わり、 \mathcal{S} から Σ の中への微分同相写像 f を誘導する。
3. $f(E)$ は Σ と同じ次元のコンパクト閉部分多様体となるが、 Σ は非コンパクトなので、これは許されない。したがって、背理法により、 M は光的測地線に関して完備でない。

Q.E.D.

【定義 4.2.2 (一般性条件)】 曲率テンソルが任意のベクトル V に対して、 $V_{[a}R_{a]VV[b}V_{b]} \neq 0$ を満たすとき、一般性条件 (generic condition) が満たされるという。

□

【定義 4.2.3 (過去向き捕捉点)】 点 P が過去向きの捕捉点 (past trapped point) であるとは、 P から過去向き出た光の光波面の面積が有限な時間（正確にはアフィンパラメータ）で至る所局所的に減少することを意味する。すなわち、 P を頂点として過去向きに広がった光円錐が有限な時間で再び縮み始めるという条件である。

□

また、次の定理から、もし宇宙初期でも物質のエネルギー密度や圧力が非負だとすると、我々の宇宙には特異点が存在することが導かれる。ただし、この定理だけからは、それが未来にあるのか過去にあるのかは結論できない。

【定理 4.2.4 (Hawking, Penrose 1970)】 次の条件が成り立つと、時空は時間的ないし光的測地線に関して不完備：

- (1) 時間的収束条件と曲率テンソルに対する一般性条件.
- (2) 時間的閉曲線の非存在.
- (3) 過去向きの捕捉点, 閉捕捉面, 非時間的なコンパクト閉部分多様体のいずれかが存在.

□

これらの定理は、その後、収束条件を測地線に沿う $R_{\mu\nu}V^aV^b$ の積分に対する条件に緩めるなどの拡張がなされた [42, 1].

§4.3

特異点強度

【定義 4.3.1 (特異点の分類)】 特異点をそれに漸近する曲線 γ (の同値類) により定義するとき、この曲線に沿って曲率がどのように振る舞うかで特異点の強度を分類する。

1. Riemann 曲率テンソルから作られる適当なスカラ多項式の値が一定値に収束しない (非有界の) とき、 $[\gamma]$ を C^0 級 (C^{0-} 級) スカラ型曲率特異点と呼ぶ.
2. γ にそって擬正規直交基底 \mathbf{E} を平行移動させるとき、その基底に関する曲率テンソルの成分の中に一定値に収束しない (有界でない) ものがあるなら、 C^0 型 (C^{0-} 型) **pp** 曲率特異点という (pp=parallelly propagating).
3. 曲率テンソルの pp 成分がすべて C^0 級 (C^{0-} 級) であるにもかかわらず延長不可能な曲線に対応する特異点を準正則特異点 (quasiregular singularity) と呼ぶ.

□

【注 4.3.2】

1. スカラ型曲率特異点は pp 特異点であるが、逆は言えない。これは、時空計量が不定形量であることに起因する。

2. スカラ型でない pp 特異点に対しては、曲線 γ に沿って（必ずしも平行でない）うまい擬正規直交基底をとると、その基底に関する曲率テンソルのすべての成分が C^0 級 (C^{0-} 級) となることが示される (Siklos の定理 [S. Siklos 1976, PhD thesis]). したがって、特異性は擬正規直交基底が平行移動により無限の Lorentz ブーストを受けることに起因する。
3. 非スカラ型の pp 曲率特異点の例は、平面重力波解や非等方一様宇宙を表す解で知られている [9, 7]. ただし、これらが一般的な摂動に対して不安定であることから、その発生は一般的でないと予想されている。
4. 円錐の表面から頂点を除いた 2 次元面は局所的に平坦であるが、円錐の頂点にあたる点は含まれないので、準正則特異点となる。この点を追加すると微分可能な面でなくなるので、単なる空間の拡張で特異性は解消されない。しかし、この面を切り開くと特異性のない 2 次元平面に拡張される。実は、この特徴は準正則特異点に共通するもので、準正則特異点 $[\gamma]$ に対しては、 γ の適当な開近傍 U に時空を限定すると、 γ が延長可能となる U の拡張が存在することが示される [6].
5. 準正則特異点をもつ時空の非自明な例としては、Taub-NUT 時空がある。この時空は正の宇宙項をもつ Einstein 方程式の真空解で、空間が S^3 に同相な $U(1)$ 対称性をもつ非等方膨張宇宙を表し、極大な解析的拡張では、曲率テンソルは一様有界であるが、光的測地線に関して完備でない [19, 47]. 準正則特異点も曲率テンソルが特殊な代数構造を持っているときに発生し、現実の宇宙で発生することはないと考えられているが厳密な証明はない。

□

§4.4

宇宙検閲予想

References

- Penrose, R.: Gravitational collapse: the role of general relativity, Riv. Nuovo Cimento 1, 252-276 (1969).
- Penrose, R.: Singularities and time asymmetry, in Hawking, S. and Israel, W. eds., General Relativity: An Einstein Centenary Survey, 531-638, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1979).

- Poisson, E. and Israel, W.: Internal structure of black holes, Phys. Rev. D 41, 1796-1809 (1990).
- Shapiro, S. L. and Teukolsky, S. A.: Formation of naked singularities: The violation of cosmic censorship, Phys. Rev. Lett. 66, 994-997 (1991).
- Wald, R. M. and Iyer, V.: Trapped surfaces in the Schwarzschild geometry and cosmic censorship, Phys. Rev. D 44, R3719-R3772 (1991).
- Ori, A.: Inner structure of a charged black hole: an exact mass-inflation solution, Phys. Rev. Lett. 67, 789-792 (1991).
- Wald, R. M.: Gravitational Collapse and Cosmic Censorship, gr-qc/9710068 (1997).
- Burko, L.: Survival of the black hole's Cauchy horizon under non-compact perturbations, Phys. Rev. D 66, 024046 (2002).
- Christodoulou, D.: On the global initial value problem and the issue of singularities, Class. Quantum Grav. 16, A23-35 (1999).
- Choptuik, M.: Universality and scaling in gravitational collapse of a massless scalar field, Phys. Rev. Lett. 70, 9 (1993).
- Gundlach, C. and Martin-Garcia, J.: Critical phenomena in gravitational collapse, Living Rev. Relativity 10, 5 (2007).

特異点が発生して、それが曲率の発散を伴っているとしても、その影響が我々に届かなければ、現実的な問題を引き起こさない。この期待を表現したのが、Penroseの提唱した宇宙検閲説である。この仮説には2つのバージョンがある。一つは、1969年に発表された弱い宇宙検閲仮説(WCCH)で[31]、大まかな内容は、「物質が現実的な状態方程式に従うとき、なめらかな初期条件から Einstein 方程式の解として決まる漸近的に平坦な時空の特異点は一般にブラックホールホライズンで隠される」というものである。数学的には次のように表現される：

【予想 4.4.1 (弱い宇宙検閲仮説)】 初期条件 (Σ, q) から決まる漸近的に平坦な時空解 (\mathcal{M}, g) は一般に次の条件を満たす：

$$\mathcal{I}^+ \subset \overline{D^+(\Sigma)}, \quad J^+(\Sigma) \cap \overline{J^-(\mathcal{I}^+, \mathcal{M})} \subset D^+(\Sigma).$$

□

2つめのバージョンは10年後に発表された強い宇宙検閲仮説(SCCH)で[32]、次の内容をもつ：

【予想 4.4.2 (強い宇宙検閲仮説)】 物質が現実的な状態方程式に従うとき、なめらかな初期条件に対する Einstein 方程式の解の極大な拡張は、一般に大域的に双曲型時空となる。 □

【注 4.4.3 (WCCH の歴史)】

1. 球対称系について WCCH が詳しく調べられ、特に圧力が無視できる天体の重力崩壊に対しては、ホライズンに隠されない特異点である裸の特異点 (naked singularity) が中心に一般に生成されることが示された。また、有限な圧力を流体の持つ場合でも、必ずしも特異点は隠されない。ただし、これらは球対称性という高い対称性に起因している可能性が否定できない。
2. しかし、非球対称な系の研究は困難で、未だに明確な結論は得られていない [44]。細長い形状の無衝突ガス系の重力崩壊では、特異点が発生してもそれを取り囲む捕捉面が存在しない例が数値計算により与えられたが [39]、この数値計算では特定の時間一定面の取り方をしているため、捕捉面の非存在がホライズンの非存在を必ずしも意味せず [45]、WCCH の破れの明確な例とは言えない。

【定義 4.4.4 (Cauchy ホライズン)】 大域的に双曲的でない時空では、その極大な大域的に双曲的領域を $\mathcal{N} = D(\Sigma)$ とおくと、 \mathcal{N} は \mathcal{M} において境界 $\mathcal{H} = \partial\mathcal{N}$ をもつ。この境界は **Cauchy ホライズン** と呼ばれる。特に、 $\mathcal{H}^+ = \mathcal{H} \cap \partial D^+(\Sigma)$ は未来の Cauchy ホライズンという。 □

【注 4.4.5 (SCCH の意味)】 SCCH の破れは、大域的に双曲的でない極大時空 \mathcal{M} が存在することを意味し、これらの時空では Cauchy ホライズンが存在する。解析的に極大に拡張された Reissner-Nordstrom 解や Kerr 解など多くの基本的なブラックホール解が Cauchy ホライズンをもつ。したがって、SCCH はこれらの解の Cauchy ホライズンが不安定であることを予想する。 □

【注 4.4.6 (Mass inflation)】 Cauchy ホライズンの安定性の問題は様々な側面から研究され、有限エネルギーの摂動により時空の局所質量が Cauchy ホライズンで発散するという質量インフレーション [33, 28] など Cauchy ホライズンの不安定性を示唆する現象が見つかり、その後の数値計算でも、Cauchy ホライズンの一部が空間的スカラ曲率特異点集合に変わることが指摘された。しかし、Cauchy ホライズンの一部は光的なまま残り、そこを通過しても物体が有限な変形しか受けないう程度の弱い特異性しかもたないことが示された [3]。 □

5

時空構造の安定性

§5.1

正エネルギー定理

References

- Schoen, R. and Yau, S.-T.: On the proof of the positive mass conjecture in general relativity, *Comm. Math. Phys.* 65, 45-76 (1979).
- Schoen, R. and Yau, S.-T.: Proof of the positive mass theorem. II., *Comm. Math. Phys.* 79, 231-260 (1981).
- Witten, E.: A new proof of the positive energy theorem, *Comm. Math. Phys.* 80, 381-402 (1981).
- Nester, J.: A New gravitational energy expression with a simple positivity proof, *Phys. Lett. A* 83, 241 (1981).
- Reula, O.: Existence theorem for solutions of Witten 's equation and non-negativity of total mass, *J. Math. Phys.* 23, 810-814 (1982).
- Ashtekar, A. and Horowitz, G. T.: Energymomentum of isolated systems cannot be null, *Phys. Lett. A* 89, 181-184 (1982).
- Parker, T. and Taubes, C.: On Witten 's proof of the positive energy theorem, *Comm. Math. Phys.* 84, 223-238 (1982).
- Gibbons, G., Hawking, S., Horowitz, G. and Perry, M.: Positive Mass Theorems for Black Holes, *Comm. Math. Phys.* 88, 295 (1983).

- Gibbons, G., Hull, C. and Warner, N.: The Stability of Gauged Supergravity, Nucl. Phys. B 218, 173-190 (1983)
- Reula, O. and Tod, K.: Positivity of the Bondi energy, J. Math. Phys. 25, 1004-1008 (1984).
- O’Murchadha, N.: How large can a star be ?, Phys. Rev. Lett. 57, 2466 (1986).
- Beig, R. and Chrusciel, P.: Killing vectors in asymptotically at space-times: I. asymptotically translational Killing vectors and the rigid positive energy theorem, J. Math. Phys. 37, 1939 (1996).
- Peiris, M.: Energy and Volume: A Proof of the Positivity of ADM Energy Using the Yamabe Invariant of Three-Manifolds, Comm. math. Phys. 287, 383 (2009).
- Dain, S.: Geometric inequalities for axially symmetric black holes, Class. Quantum Grav. 29, 073001 (2012).
- Dain, S.: Positive energy theorems in General Relativity, arXiv:1302.33405 (2013)

5.1.1 諸定義

【定義 5.1.1 (初期値問題)】 n 次元 Riemann 多様体 (Σ, q) とその上のテンソル K_{ij} , ρ , S_i の組 $(\Sigma, q_{ij}, K_{ij}, S_i)$ に対して,

$$R(q) - K_{ij}K^{ij} + K_s^2 = 16\pi G\rho, \quad (5.1.1a)$$

$$D_j K_i^j - D_i K_s = -8\pi G S_i \quad (5.1.1b)$$

□

【定義 5.1.2 (全エネルギー, 全運動量, ADM 質量)】

1. 拘束条件の漸近的に平坦な解 (q_{ij}, K_{ij}) が与えられたとき, ある $\alpha > 1/2$ に対して,

$$\gamma_{ij} = q_{ij} - \delta_{ij} = O(r^{-\alpha}), \quad (5.1.2a)$$

$$\partial^s \gamma_{ij} = O(r^{-\alpha-s-1}) \quad (1 \leq s \leq 4), \quad (5.1.2b)$$

$$\partial^s K_{ij} = O(r^{-\alpha-s-1}) \quad (5.1.2c)$$

$(0 \leq s \leq 3)$ が成り立つとき、全系の質量と運動量が

$$E = \frac{1}{16\pi G} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S(r)} (\partial_j q_{ij} - \partial_i q_{jj}) n^i d\Omega, \quad (5.1.3a)$$

$$P_i = \frac{1}{8\pi G} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S(r)} (K_{ik} - K q_{ik}) n^k d\Omega \quad (5.1.3b)$$

により曖昧さなく定義される [26]. ここで, $S(r)$ は漸近的 Descartes 座標に関して半径 r の球面, n^i はその単位法ベクトル, $d\Omega$ は面積要素である.

2. 無限遠でのベクトル (E, \mathbf{P}) が因果的ベクトルであるとき,

$$M = (E^2 - \mathbf{P}^2)^{1/2} \quad (5.1.4)$$

により ADM 質量が定義される.

□

【定義 5.1.3 (支配的エネルギー条件 (DEC))】 エネルギー運動量テンソル \mathbb{T} が, 任意の時間的ベクトル V に対して $\mathbb{T}(V, V) \geq 0$ を満たす時, 支配的エネルギー条件 ($()$ DEC) が満たされるという. □

5.1.2 正エネルギー定理

【定理 5.1.4 (ADM エネルギーに関する正エネルギー定理)】 $(\Sigma, q_{ij}, K_{ij}, \rho, S^i)$ を 4次元 Einstein 方程式に対する漸近的に平坦で完備な初期値とする. ただし, Σ は 3次元閉多様体か $\Sigma \cong \mathbb{R}^3 - B$ ($B = \sum_i B_i$, B_i は球体) で ∂B はブラックホール境界とする. このとき, エネルギー運動量テンソルに対して支配的エネルギー条件が成り立てば, 全系のエネルギー E と運動量 $\mathbf{P} = (P_i)$ は次の条件を満たす:

$$E \geq |\mathbf{P}|. \quad (5.1.5)$$

さらに, 等号が成り立つのは, 初期値が Minkowski 時空に対応する場合のみである. □

【注 5.1.5 (証明の歴史)】

- 正エネルギー定理の最初の証明は, R. Schoen と S.-T. Yau により, 大域解析学的手法を用いて行われた [37, 38]. 彼らは, エネルギーが負の場合には Gauss 曲率の積分が正で平面の位相を持つ面 \mathcal{F} が存在することを示した上で, それが開曲面に対する R. Finn および A. Huber による開 Riemann 面に対する Gauss-Bonnet の定理と矛盾することを示し, 背理法で $E \geq 0$ および $E = 0$ なら Minkowski 的とうことを示している. この主張は, 上記の定理より少し弱いものである.

- 彼らに続いて、1981年には E. Witten がスピノール 2 次式に対する恒等式を用いた全く新しい方法で正值性を示した [46]. 本質は同じであるが、彼の方法は、J. Nester により、見通しが良くかつ ADM エネルギーのみでなく光的無限遠上に境界をもつ空間的面に含まれるエネルギーを表す Bondi エネルギーに対しても適用できる形に改良された [25].
- Witten の方法は単純な上に非常に強力である. 例えば、共変微分に宇宙定数や電磁場に依存した変形を施すと、電荷を持つブラックホールが存在する場合の精密化 ($M \geq |Q|$) や、負の宇宙定数がある場合への拡張 ($J_{04} \geq 0$, $J_{AB}(A, B = 0, \dots, 4)$ は反 de Sitter 群 $SO(3, 2)$ の生成元に対応) が得られる [16]. ポテンシャルエネルギーが下に非有界となるゲージ化された拡張超重力理論でも漸近的に反 de Sitter 時空となる場合と同様の正エネルギー定理が成り立つ [17]. また、最近では、軸対称な初期条件に対し、角運動量を考慮した精密化 ($M \geq |J|$) も得られている [8]
- 1999 年には J. Lohkamp がスカラ曲率の変形に基づく証明を、2009 年には M. Peiris が山辺の定理と Thurston の幾何学化定理を用いた証明を新たに発表している.

□

Proof. (Witten らによるスピノールを使った証明)

1. まず、4次元スピノール ψ の 2 次式で表される次のような 2 階反対称テンソルを考える：

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} E_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu := 2 * [(\bar{\psi} \gamma_5 \gamma_\alpha \nabla_\beta \psi - \nabla_\beta \bar{\psi} \gamma_5 \gamma_\alpha \psi) dx^\alpha \wedge dx^\beta]. \quad (5.1.6)$$

ここで

$$\nabla_\mu \psi = \partial_\mu \psi + \frac{1}{2} \omega_{ab\mu} \sigma^{ab} \psi, \quad (5.1.7)$$

$$\sigma^{\alpha\beta} = (1/2) \gamma^\alpha \gamma^\beta. \quad (5.1.8)$$

対応する 2 形式の無限遠 2 次元球面 $S_\infty^2 = \partial\Sigma$ での積分は、Stokes の定理より

$$\int_{\partial\Sigma} * \mathcal{E} = \int_\Sigma d * \mathcal{E} = \int_\Sigma \nabla_\nu E_\mu{}^\nu \hat{t}^\mu d\Sigma. \quad (5.1.9)$$

ここで、 \hat{t}^μ は Σ の未来向きの単位法ベクトル. ψ が無限遠で定数スピノール ψ_0 に漸近することを要請し、 $V_{(0)}^\mu = \bar{\psi}_0 \gamma^\mu \psi_0$ とおくと、左辺は $-16\pi G P_\mu V_{(0)}^\mu$ と表されることが、 $(P_\mu) = (-E, P_i)$ の定義より示される:

$$-16\pi G P \cdot V_{(0)} = \int_\Sigma \nabla_\nu E_\mu{}^\nu \hat{t}^\mu d\Sigma. \quad (5.1.10)$$

2. 一方, 右辺を計算すると,

$$\nabla_\alpha E^{\mu\alpha} = 2G_\alpha^\mu \bar{\psi} \gamma^\alpha \psi + 4\nabla_\alpha \bar{\psi} (\gamma^\mu \sigma^{\alpha\beta} + \sigma^{\alpha\beta} \gamma^\mu) \nabla_\beta \psi \quad (5.1.11)$$

および

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha \bar{\psi} (\gamma^0 \sigma^{\alpha\beta} + \sigma^{\alpha\beta} \gamma^0) \nabla_\beta \psi &= -2\nabla_j \psi^\dagger \sigma^{jk} \nabla_k \psi \\ &= q^{jk} \nabla_j \psi^\dagger \nabla_k \psi - \nabla_j \psi^\dagger \gamma^j \gamma^k \nabla_k \psi \end{aligned} \quad (5.1.12)$$

より,

$$\hat{t}_\mu \nabla_\nu E^{\mu\nu} \geq 2\hat{t}_\mu G_\nu^\mu V^\nu, \quad \text{mod}(\mathcal{D}\psi) \quad (5.1.13)$$

が得られる. ここで, $e_I^\mu (I = 1, 2, 3)$ を Σ のベクトル場の正規直交基底,

$$\mathcal{D} := \gamma^I e_I^\mu \nabla_\mu \quad (5.1.14)$$

である. また, $V = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ は常に未来向きの時間的ベクトルとなる. したがって, この式の右辺は非負となる.

3. 以上より, 方程式

$$\mathcal{D}\psi = 0 \quad (5.1.15)$$

を満たし無限遠で定数に近づく4個の一次独立なスピノール (**Witten** スピノール) が存在すれば, 正エネルギー定理が示されたことになる. この存在は, O. Reula らにより証明されている [34, 35, 29]. また, ブラックホールが存在する場合は, ホライズンからの寄与がゼロとなる境界条件を課することができるが G.W. Gibbons らにより示されている [16].

Q.E.D.

§5.2

Penrose 不等式

References

- Jang, P. and Wald, R.: The positive energy conjecture and the cosmic censor hypothesis, J. Math. Phys. 18, 41 (1977).
- Gibbons, G.: in Willmore, T. and Hitchin, N. eds., Global Riemmanian Geometry, Ellis Horwood, Chichester (1984).

- Trudinger, N.: Isoperimetric inequalities for quermassintegrals, Ann. Inst. Henri Poincaré 11, 411 (1994).
- Gibbons, G.: Collapsing Shells and the Isoperimetric Inequality for Black Holes, Class. Quantum Grav. 14, 2905 (1997).
- Huisken, G. and Ilmanen, T.: The inverse mean curvature flow and the Riemannian Penrose inequality, J. Diff. Geom. 59, 353 (2001).
- Bray, H. L. and Chrusciel, H. L.: The Penrose Inequality, gr-qc/0312047 (2003).
- Mars, M.: Present status of the Penrose inequality, Class. Quantum Grav. 26, 193001 (2009).

5.2.1 Penrose 不等式

【予想 5.2.1 (Penrose 不等式)】 4次元時空においてブラックホールホライズンに含まれる閉捕捉面の面積を A , ブラックホールの質量を M とすると,

$$GM \geq \sqrt{\frac{A}{16\pi}} \tag{5.2.1}$$

が成り立つ. この不等式は **Penrose 不等式** と呼ばれる. _____□

【注 5.2.2 (Penrose の議論)】 Penrose は 1969 年に WCCH の反例を作る目的で, 光速でつぶれる物質殻によるブラックホールを考えた [31]. 対応する時空は, この物質殻の軌跡である光的超曲面 \mathcal{N} で不連続となり, \mathcal{N} の過去側は Minkowski 時空, \mathcal{N} の未来は一般に重力波を含む曲がった時空となる. この物質殻が十分小さな領域につぶれる様な初期配位を取ると, この \mathcal{N} の直上に閉捕捉面 \mathcal{S} が形成される. もし, WCC が成り立つと閉捕捉面は必ずブラックホールホライズンに含まれ [19] だが, \mathcal{N} の下は Minkowski 時空なので, \mathcal{N} で計量が連続となることより, \mathcal{S} の面積 A はブラックホール表面積以下となる. ところが, ブラックホールの面積増大定理より, このブラックホール表面積は増大し, その最終値は全系の重力質量 M に対応する Schwarzschild ブラックホールの表面積 $16\pi(GM)^2$ を超えない. したがって, Penrose 不等式が成り立つことが期待される. _____□

【定理 5.2.3 (isoperimetric 不等式 (Gibbons 1984, 1997))] Minkowski 時空内の空間的 2次元面 \mathcal{S} を外向きに通過する光波面の面積増大率を θ とするとき

$$\frac{1}{8\pi} \int_{\mathcal{S}} 2\theta dA \geq \sqrt{\frac{A(\mathcal{S})}{4\pi}}. \tag{5.2.2}$$

が成り立つ. この不等式を **等周不等式 (isoperimetric inequality)** と呼ばれる. _____□

【注 5.2.4 (Gibbons の議論)】 G.W. Gibbons は, Penrose の議論において, 捕捉面 \mathcal{S} を \mathcal{M} を横切って Minkowski 時空側に動かした際の \mathcal{S} を通過する光波面の面積増大率の変化量が, 物質殻のもつ全エネルギーに比例することを用いると, Penrose 不等式が Minkowski 時空内の幾何学量のみで表される等周不等式に帰着することに気づいた [14]. 当初, Gibbons は, \mathcal{S} が 3次元 Euclidean 空間に含まれる凸な 2次元面ときのみ, この不等式を証明した. この場合は, 2θ は \mathcal{S} の各点における平均曲率と一致し, この不等式を Minkowski 不等式 (1903 年) に帰着することができたのである. しばらくこの問題に大きな進展はなかったが, Gibbons はついに 1997 年に, 特別な仮定なしにこの不等式を証明し, さらに一般次元に拡張することに成功した [15]. その理由は, N.S. Trudinger が, Minkowski 不等式を任意次元の Euclidean 空間 E^n 内の任意の閉超曲面 Σ に対する次の不等式に拡張することに成功したことによる [43]: このように全く非自明な数学的不等式と対応することは, WCCH を支持する事実と見なす人が多い. □

【定理 5.2.5 (Trudinger 不等式 (1994))】 Euclidean 空間 E^n 内の任意の閉超曲面 Σ に対して次の不等式が成り立つ:

$$\int_{\Sigma} K dA \geq (n-1) \Omega_{n-1}^{1/(n-1)} A^{\frac{n-2}{n-1}}. \tag{5.2.3}$$

ここで, K は Σ の平均曲率, Ω_n は n 次元単位球面 S^n の面積で, 等号は $\Sigma = S^{n-1}$ のときに成立. □

5.2.2 Riemann-Penrose 不等式

Penrose 不等式はその後, 初期値問題における一般的不等式型予想に拡張された [2].

【予想 5.2.6 (初期値問題における Penrose 不等式)】 漸近的に平坦な初期面 (Σ, q) に含まれる最も外側の捕捉面 \mathcal{S} の面積を A , 初期面での ADM 質量を M とするとき, 次の Penrose 不等式が成り立つ.

$$GM \geq \sqrt{\frac{A}{16\pi}} \tag{5.2.4}$$

【定理 5.2.7 (Riemann-Penrose 不等式 (Huisken-Ilmanen 2001; Bray 2001))】 Σ のスカラー曲率 $R_s(\Sigma)$ が非負で, Σ が全測地的, すなわち解が時間反転不変性をもち, Σ がその時間反転の不動面となるとき, 初期値 (Σ, q) に対して Penrose 不等式が成り立つ.

この不等式は **Riemann-Penrose 不等式** と呼ばれ, \mathcal{S} は最も外側の極小曲面となる. □

【注 5.2.8】

1. P.S. Jang と R.M. Wald は、1977 年に逆平均曲率流 (inverse mean curvature flow) によるこの極小曲面の連続変形を用いた証明を発表した [21]. ここで、逆平均曲率流による変形とは、曲面 \mathcal{F} をその法ベクトル方向に平均曲率の逆数に比例する「速度」で変形させることを意味する. ポイントは、 $R(\Sigma) \geq 0$ のとき、Hawking 質量と呼ばれる関数

$$m_H(\mathcal{F}) = \left(1 - \int_{\mathcal{F}} K^2/16\pi\right) \sqrt{A(\mathcal{F})/16\pi} \quad (5.2.5)$$

が、この変形に対して単調に増加し、しかも出発点の捕捉面 \mathcal{S} に対して $m_H(\mathcal{S}) = \sqrt{A/16\pi}$ 、無限遠の球面に近づくとき $m_H(\mathcal{F}) \rightarrow GM$ となることである. したがって、逆平均曲率流によって \mathcal{S} が無限遠球面に滑らかに変形できる場合には不等式が証明されることになる.

2. しかし、実際には、この変形は一般に特異性を持つ面を含むことが示される. この困難の克服には 20 年以上の歳月を要したが、ついに 2001 年に G. Huisken と T. Ilmanen が不等式の厳密な証明に成功した [20]. 基本的なアイデアは、連続な変形をあきらめ、飛びのある不連続な変形を許すよう一般化することにあった.
3. さらに、同じ年に、H.L. Bray により全く異なった証明が発表された. 彼の方法は、極小曲面の面積を保って、初期値を共形的に Schwarzschild ブラックホールに対応するものに変形するというものであった.

□

§5.3

*摂動論

5.3.1 一般摂動方程式

【公式 5.3.1】 $(n+2)$ 次元時空における Einstein 方程式

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu}$$

の線形摂動は次のように表される：

$$\begin{aligned} (\Delta_L h)_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu h + 2\nabla_{(\mu} \nabla^\alpha h_{\nu)\alpha} + (-\nabla^\alpha \nabla^\beta h_{\alpha\beta} + \Delta h + R^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta})g_{\mu\nu} \\ + (2\Lambda - R)h_{\mu\nu} = 2\kappa^2 \delta T_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

ここで、 Δ_L は次式で定義される Lichnerowicz 作用素である：

$$(\Delta_L h)_{\mu\nu} := -\nabla \cdot \nabla h_{\mu\nu} + 2R_{(\mu}^\alpha h_{\nu)\alpha} - 2R_{\mu\alpha\nu\beta} h^{\alpha\beta}.$$

この作用素について次の式が成り立つ：

$$\begin{aligned} (\Delta_L h)_\alpha^\alpha &= -\Delta h, \\ \nabla^\alpha (\Delta_L h)_{\mu\alpha} &= -\nabla \cdot \nabla (\nabla^\alpha h_{\mu\alpha}) + R_\mu^\alpha \nabla^\beta h_{\alpha\beta} + (2\nabla_\alpha R_{\mu\beta} - \nabla_\mu R_{\alpha\beta})h^{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

$\psi_{\mu\nu}$ を

$$\psi_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}h g_{\mu\nu}$$

により定義すると、

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu} &= \psi_{\mu\nu} - \frac{1}{n}\psi g_{\mu\nu}, \\ h &= -\frac{2}{n}\psi \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= \kappa^2 \left(T_{\mu\nu} - \frac{T}{n}g_{\mu\nu} \right) + \frac{2\Lambda}{n}g_{\mu\nu}, \\ R &= \frac{2(n+2)}{n}\Lambda - \frac{2\kappa^2}{n}T \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} \Delta_L \psi_{\mu\nu} - \frac{4\Lambda}{n}\psi_{\mu\nu} + 2\nabla_{(\mu} \nabla^\alpha \psi_{\nu)\alpha} - \nabla^\alpha \nabla^\beta \psi_{\alpha\beta} g_{\mu\nu} \\ = 2\kappa^2 \delta T_{\mu\nu} - \frac{2\kappa^2}{n}T\psi_{\mu\nu} - \kappa^2 \left(T_{\alpha\beta} \psi^{\alpha\beta} - \frac{T}{n}\psi \right) g_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

□

【公式 5.3.2 (ゲージ変換)] 摂動変数には, 背景時空計量の微分同相変換による移動の自由度の伴い, ゲージ自由度と呼ばれる不定性が存在する:

$$\bar{\delta}h = \bar{\delta}(\bar{g} - g) = \mathcal{L}_\xi g \Leftrightarrow \bar{\delta}h_{\mu\nu} = \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu. \quad (5.3.1)$$

ψ で表すと,

$$\bar{\delta}\psi_{\mu\nu} = \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu - (\nabla \cdot \xi)g_{\mu\nu}. \quad (5.3.2)$$

□

【命題 5.3.3 (DeDonger ゲージでの摂動 Einstein 方程式)] ゲージ条件

$$\nabla^\nu \psi_{\mu\nu} = 0 \quad (5.3.3)$$

のもとで, 真空 Einstein 方程式の線形摂動方程式は

$$-\Delta\psi_{\mu\nu} - 2R_{\mu\alpha\nu\beta}\psi^{\alpha\beta} = 0 \quad (5.3.4)$$

で与えられる.

□

5.3.2 ワープ積型背景時空での摂動

Background Solution

1. 背景時空

$$M^{n+m} \approx \mathcal{N} \times \mathcal{K} \ni (z^M) = (y^a, x^i) \quad (5.3.5)$$

2. 計量

$$ds^2 = g_{MN}dz^M dz^N = g_{ab}(y)dy^a dy^b + r(y)^2 d\sigma_n^2, \quad (5.3.6)$$

ここで, $d\sigma_n^2 = \gamma_{ij}dx^i dx^j$ は \mathcal{K} 上の n 次元 Einstein 計量

$$\hat{R}_{ij} = (n-1)K\gamma_{ij}. \quad (5.3.7)$$

3. 共変微分の分解:

$$\nabla_M, \Gamma_{NL}^M(z), R_{MNLS}(z) \Rightarrow D_a, {}^m\Gamma_{bc}^a(y), {}^mR_{abcd}(y); \hat{D}_i, \hat{\Gamma}_{jk}^i(x), \hat{R}_{ijkl}(x). \quad (5.3.8)$$

4. 曲率テンソルの関係は,

$$R^a{}_{bcd} = {}^mR^a{}_{bcd}, \quad R^i{}_{ajb} = -\frac{D_a D_b r}{r} \delta_j^i, \quad R^i{}_{jkl} = {}^mR_{abcd} - (Dr)^2 (\delta_k^i \gamma_{jl} - \delta_l^i \gamma_{jk}), \quad (5.3.9)$$

5. Einstein テンソルの分解は

$$G_{ab} = {}^m G_{ab} - \frac{n}{r} D_a D_b r - \left[\frac{n(n-1)}{2} \frac{K - (Dr)^2}{r^2} - \frac{n}{r} \square r \right] g_{ab} \quad (5.3.10a)$$

$$G_j^i = \left[-\frac{1}{2} {}^m R - \frac{(n-1)(n-2)}{2} \frac{K - (Dr)^2}{r^2} + \frac{n-1}{r} \square r \right] \delta_j^i. \quad (5.3.10b)$$

6. Einstein 方程式より, エネルギー-運動量テンソルは次の構造をもつ:

$$T_{ab} = T_{ab}(y), \quad T_{ai} = 0, \quad T_j^i = P(y) \delta_j^i. \quad (5.3.11)$$

Examples

This class of background spacetimes include quite a large variety of important solutions to the Einstein equations in four and higher dimensions.

1. **Robertson-Walker universe:** $m = 1$ and \mathcal{K} is a constant curvature space.

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 d\sigma_n^2.$$

The gauge-invariant formulation was first introduced for perturbations of this background by Bardeen[?] and applied to realistic cosmological models by the author[?, ?, ?].

2. **Braneworld model:** $m = 2$ (and \mathcal{K} is a constant curvature space). For example, the metric of AdS^{n+2} spacetime can be written

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \lambda r^2} - (1 - \lambda r^2) dt^2 + r^2 d\Omega_n^2. \quad (5.3.12)$$

The gauge-invariant formulation of this background was first discussed by Mukohyama[?] and then applied to the braneworld model taking account of the junction conditions by the author and collaborators[?].

3. **Higher-dimensional static Einstein black holes:** $m = 2$ and \mathcal{K} is a compact Einstein space. For example, for the Schwarzschild-Tangherlini black hole, $\mathcal{K} = S^n$. In general, the generalised Birkhoff theorem says[?] that the electrovac solutions of the form (5.3.6) with $m = 2$ to the Einstein equations are exhausted by the Nariai-type solutions such that M is the direct product of a two-dimensional constant curvature spacetime \mathcal{N} and an Einstein space \mathcal{K} with $r = \text{const}$ and the black hole type solution whose metric is given by

$$ds^2 = \frac{dr^2}{f(r)} - f(r) dt^2 + r^2 d\sigma_n^2; \quad (5.3.13)$$

$$f(r) = K - \frac{2M}{r^{n-1}} + \frac{Q^2}{r^{2n-2}} - \lambda r^2. \quad (5.3.14)$$

The gauge-invariant formulation for perturbations was applied to this background to discuss the stability of static black holes by the author and collaborators[?, ?, ?]. This application is explained in the next section.

4. **Black branes:** $m = 2 + k$ and $\mathcal{K} =$ Einstein space. In this case, the spacetime factor \mathcal{N} is the product of a two-dimensional black hole sector and a k -dimensional brane sector:

$$ds^2 = \frac{dr^2}{f(r)} - f(r)dt^2 + dz \cdot dz + r^2 d\sigma_n^2. \quad (5.3.15)$$

One can also generalise this background to introducing a warp factor in front of the black hole metric part. The stability of this background for the case in which \mathcal{K} is an Euclidean space is discussed in §??.

5. **Higher-dimensional rotating black hole** (a special Myers-Perry solution): $m = 4$ and $\mathcal{K} = S^n$.

$$ds^2 = g_{rr}dr^2 + g_{\theta\theta}d\theta^2 + g_{tt}dt^2 + 2g_{t\phi}dtd\phi + g_{\phi\phi}d\phi^2 + r^2 \cos^2 \theta d\Omega_n^2, \quad (5.3.16)$$

where all the metric coefficients are functions only of r and θ . The stability of this background was studied in [?].

6. **Axisymmetric spacetime:** m is general and $n = 1$.

摂動のテンソル型

h_{MN} and τ_{MN} can be classified into the following three algebraic types according to their transformation property as tensors on the n -dimensional space \mathcal{K} :

- i) Spatial scalar: h_{ab}, τ_{ab}
- ii) Spatial vector: h_{ai}, τ_i^a
- iii) Spatial tensor: h_{ij}, τ_j^i

Among these, spatial vectors and tensors can be further decomposed into more basic quantities. First, we decompose a vector field v_i on \mathcal{K} into a scalar field $v^{(s)}$ and a transverse vector $v_i^{(t)}$ as

$$v_i = \hat{D}_i v^{(s)} + v_i^{(t)}; \quad \hat{D}_i v^{(t)i} = 0. \quad (5.3.17)$$

Then, from the relation

$$\hat{\Delta} v^{(s)} = \hat{D}_i v^i, \quad (5.3.18)$$

the component fields $v^{(s)}$ and $v_i^{(t)}$ can be uniquely determined from v_i up to the ineffective freedom in $v^{(s)}$ to add a constant, provided that this Poisson equation has a unique solution on \mathcal{K} up to the same freedom. For example, when \mathcal{K} is compact and closed, this condition is satisfied.

Next, we decompose a symmetric tensor field of rank 2 on \mathcal{K} as

$$t_{ij} = \frac{1}{n}tg_{ij} + \hat{D}_i\hat{D}_js - \frac{1}{n}\hat{\Delta}sg_{ij} + \hat{D}_it_j + \hat{D}_jt_i + t_{ij}^{(tt)}; \quad (5.3.19a)$$

$$\hat{D}_it^i = 0, \quad t_i^{(tt)i} = 0, \quad \hat{D}_it_j^{(tt)i} = 0. \quad (5.3.19b)$$

Here, t is uniquely determined as $t = t_i^i$. Further, from the relations derived from this definition,

$$\hat{\Delta}(\hat{\Delta} + nK)s = \frac{n}{n-1} \left(\hat{D}_i\hat{D}_jt^{ij} - \frac{1}{n}\hat{\Delta}t \right), \quad (5.3.20a)$$

$$[\hat{\Delta} + (n-1)K]t^i = (\delta_j^i - \hat{D}^i\hat{\Delta}^{-1}\hat{D}_j)(\hat{D}_mt^{jm} - n^{-1}\hat{D}^jt), \quad (5.3.20b)$$

s and t_i , hence $t_{ij}^{(tt)}$, can be uniquely determined from t_{ij} up to the addition of ineffective zero modes, provided that these Poisson equations have solutions unique up to the same ineffective freedom.

After these decompositions of vectors and tensors to basic components, we can classify these components into the following three types:

- i) Scalar type: $v^i = \hat{D}^iv^{(s)}$, $t_{ij} = \frac{1}{n}tg_{ij} + \hat{D}_i\hat{D}_js - \frac{1}{n}\hat{\Delta}sg_{ij}$.
- ii) Vector type: $v_i = v_i^{(t)}$, $t_{ij} = \hat{D}_it_j + \hat{D}_jt_i$.
- iii) Tensor type: $v^i = 0$, $t_{ij} = t_{ij}^{(tt)}$.

We call these types *reduced tensorial types*.

5.3.3 Tensor Perturbation

Let us start from the tensor-type perturbation, for which the argument is simplest.

Tensor Harmonics

We utilise tensor harmonics to expand tensor-type perturbations. They are defined as the basis for 2nd-rank symmetric tensor fields satisfying the following eigenvalue problem:

$$(\hat{\Delta}_L - \lambda_L)\mathbb{T}_{ij} = 0; \quad \mathbb{T}_i^i = 0, \quad \hat{D}_j\mathbb{T}_i^j = 0, \quad (5.3.21)$$

where $\hat{\Delta}_L$ is the Lichnerowicz operator on \mathcal{K} defined by

$$\hat{\Delta}_L h_{ij} := -\hat{D} \cdot \hat{D} h_{ij} - 2\hat{R}_{ikjl} h^{kl} + 2(n-1)K h_{ij}. \quad (5.3.22)$$

When \mathcal{K} is a constant curvature space, this operator is related to the Laplace-Beltrami operator by

$$\hat{\Delta}_L = -\hat{\Delta} + 2nK, \quad (5.3.23)$$

and, \mathbb{T}_{ij} satisfies

$$(\hat{\Delta} + k^2)\mathbb{T}_{ij} = 0; \quad k^2 = \lambda_L - 2nK. \quad (5.3.24)$$

We use k^2 in the meaning of $\lambda_L - 2nK$ from now on when \mathcal{K} is an Einstein space with non-constant sectional curvature.

The harmonic tensor has the following basic properties:

1. **Identities:** Let T_{ij} be a symmetric tensor of rank 2 satisfying

$$T_i^i = 0, \quad D^j T_{ij} = 0.$$

Then, the following identities hold:

$$\begin{aligned} 2D_{[i} T_{j]k} D^{[i} T^{j]k} &= 2D^i (T_{jk} D^{[i} T^{j]k}) + T_{jk} [-\Delta T^{jk} + R_l^j T^{lk} + R_i^{jk} T^{il}], \\ 2D_{(i} T_{j)k} D^{(i} T^{j)k} &= 2D^i (T_{jk} D^{(i} T^{j)k}) + T_{jk} [-\Delta T^{jk} - R_l^j T^{lk} - R_i^{jk} T^{il}]. \end{aligned}$$

On the constant curvature space with sectional curvature K , these identities read

$$\begin{aligned} 2D_{[i} T_{j]k} D^{[i} T^{j]k} &= 2D^i (T_{jk} D^{[i} T^{j]k}) + T_{jk} (-\Delta + nK) T^{jk}, \\ 2D_{(i} T_{j)k} D^{(i} T^{j)k} &= 2D^i (T_{jk} D^{(i} T^{j)k}) + T_{jk} (-\Delta - nK) T^{jk}. \end{aligned}$$

2. **Spectrum:** When \mathcal{K} is a compact and closed space with constant sectional curvature K , these identities lead to the following condition on the spectrum of k^2 :

$$k^2 \geq n|K|. \quad (5.3.25)$$

In contrast, when \mathcal{K} is not a constant curvature space, no general lower bound on the spectrum k^2 is known.

3. When \mathcal{K} is a two-dimensional surface with a constant curvature K , a symmetric 2nd-rank harmonic tensor that is regular everywhere can exist only for $K \leq 0$: for T^2 ($K = 0$), the corresponding harmonic tensor T_{ij} becomes a constant tensor in the coordinate system such that the metric is written $ds^2 = dx^2 + dy^2$ ($k^2 = 0$); for H^2/Γ ($K = -1$), a harmonic tensor corresponds to an infinitesimal deformation of the moduli parameters.

4. For $\mathcal{K} = S^n$, the spectrum of k^2 is given by

$$k^2 = l(l+n-1) - 2; \quad l = 2, 3, \dots, \quad (5.3.26)$$

Perturbation equations

The metric and energy-momentum perturbations can be expanded in terms of the tensor harmonics as

$$h_{ab} = 0, \quad h_{ai} = 0, \quad h_{ij} = 2r^2 H_T \mathbb{T}_{ij}, \quad (5.3.27)$$

$$\tau_{ab} = 0, \quad \tau_i^a = 0, \quad \tau_j^i = \tau_T \mathbb{T}_j^i. \quad (5.3.28)$$

Since the coordinate transformations contain no tensor-type component, H_T and τ_T are gauge invariant by themselves:

$$\xi^M = \bar{\delta} z^M = 0; \quad \bar{\delta} H_T = 0, \quad \bar{\delta} \tau_T = 0. \quad (5.3.29)$$

Only the (i, j) -component of the Einstein equations has the tensor-type component:

$$-\square H_T - \frac{n}{r} D r \cdot D H_T + \frac{k^2 + 2K}{r^2} H_T = \kappa^2 \tau_T. \quad (5.3.30)$$

Here, $\square = D^a D_a$ is the D'Alembertian in the m -dimensional spacetime \mathcal{N} . Thus, the Einstein equations for tensor-type perturbations can be always reduced to the single master equation on our background spacetime.

5.3.4 Vector Perturbation

Vector harmonics

We expand transverse vector fields in terms of the complete set of harmonic vectors defined by the eigenvalue problem

$$(\hat{\Delta} + k^2) \mathbb{V}_i = 0; \quad \hat{D}_i \mathbb{V}^i = 0. \quad (5.3.31)$$

Tensor fields of the vector-type can be expanded in terms of the harmonic tensors derived from these vector harmonics as

$$\mathbb{V}_{ij} = -\frac{1}{2k} (\hat{D}_i \mathbb{V}_j + \hat{D}_j \mathbb{V}_i). \quad (5.3.32)$$

They satisfy

$$\left[\hat{\Delta} + k^2 - (n+1)K \right] \mathbb{V}_{ij} = 0, \quad (5.3.33a)$$

$$\mathbb{V}_i^i = 0, \quad \hat{D}_j \mathbb{V}_i^j = \frac{k^2 - (n-1)K}{2k} \mathbb{V}_i. \quad (5.3.33b)$$

Here, there is one subtle point; \mathbb{V}_{ij} vanishes when \mathbb{V}_i is a Killing vector. For this mode, from the above relations, we have $k^2 = (n-1)K$. We will see below

that the converse holds when \mathcal{K} is compact and closed. We call these modes *exceptional modes*.

Now, we list up some basic properties of the vector harmonics relevant to the subsequent discussions.

1. **Spectrum:** In an n -dimensional Einstein space \mathcal{K} satisfying $R_{ij} = (n-1)Kg_{ij}$, we have

$$2D_{[i}V_{j]}D^{[i}V^{j]} = 2D_i(V_j D^{[i}V^{j]}) + V_j[-\Delta + (n-1)K]V^i \quad (5.3.34a)$$

$$2D_{(i}V_{j)}D^{(i}V^{j)} = 2D_i(V_j D^{(i}V^{j)}) + V_j[-\Delta - (n-1)K]V^i \quad (5.3.34b)$$

When \mathcal{K} is compact and closed, from the integration of these over \mathcal{K} , we obtain the following general restriction on the spectrum of k^2 :

$$k^2 \geq (n-1)|K|. \quad (5.3.35)$$

Here, when the equality holds, the corresponding harmonic vector becomes a Killing vector for $K \geq 0$ and a harmonic 1-form for $K \leq 0$, respectively.

2. For $\mathcal{K}^n = S^n$, we have

$$k^2 = \ell(\ell + n - 1) - 1, \quad (\ell = 1, 2, \dots). \quad (5.3.36)$$

Here, the harmonic vector field \mathbb{V}_i becomes a Killing vector for $l = 1$ and is exceptional.

3. For $K = 0$, the exceptional mode exists only when \mathcal{K} is isometric to $T^p \times \mathcal{C}^{n-p}$, where \mathcal{C}^{n-p} is a Ricci flat space with no Killing vector.

Perturbation equations

Vector perturbations of the metric and the energy-momentum tensor can be expanded in terms of the vector harmonics as

$$h_{ab} = 0, \quad h_{ai} = rf_a \mathbb{V}_i, \quad h_{ij} = 2r^2 H_T \mathbb{V}_{ij}, \quad (5.3.37a)$$

$$\tau_{ab} = 0, \quad \tau_i^a = r\tau_a \mathbb{V}_i, \quad \tau_j^i = \tau_T \mathbb{V}_j^i. \quad (5.3.37b)$$

For the vector-type gauge transformation

$$\xi_a = 0, \quad \xi_i = rL\mathbb{V}_i \quad (5.3.38)$$

the perturbation variables transform as

$$\bar{\delta}f_a = -rD_a \left(\frac{L}{r} \right), \quad \bar{\delta}H_T = \frac{k}{r}L, \quad \bar{\delta}\tau_a = 0, \quad \bar{\delta}\tau_T = 0. \quad (5.3.39)$$

Hence, we adopt the following combinations as the fundamental gauge-invariant variables for the vector perturbation:

$$\text{generic modes: } \quad \tau_a, \tau_T, F_a = f_a + \frac{r}{k} D_a H_T \quad (5.3.40)$$

$$\text{exceptional modes: } \quad \tau_a, F_{ab}^{(1)} = r D_a \left(\frac{f_b}{r} \right) - r D_b \left(\frac{f_a}{r} \right) \quad (5.3.41)$$

Note that for exceptional modes, $F_a = f_a$ because H_T is not defined.

The reduced vector part of the Einstein equations come from the components corresponding to G_i^a and G_j^i . In terms of the gauge-invariant variables defined above, these equations can be written as follows.

- **Generic modes:**

$$\frac{1}{r^{n+1}} D^b \left(r^{n+1} F_{ab}^{(1)} \right) - \frac{k^2 - (n-1)K}{r^2} F_a = -2\kappa^2 \tau_a, \quad (5.3.42a)$$

$$\frac{k}{r^n} D_a (r^{n-1} F^a) = -\kappa^2 \tau_T. \quad (5.3.42b)$$

- **Exceptional modes:** $k^2 = (n-1)K > 0$. For these modes, the second of the above equations coming from G_j^i does not exist.

$$\frac{1}{r^{n+1}} D^b \left(r^{n+1} F_{ab}^{(1)} \right) = -2\kappa^2 \tau_a. \quad (5.3.43)$$

5.3.5 Scalar Perturbation

Scalar harmonics

Scalar functions on \mathcal{H} can be expanded in terms of the harmonic functions defined by

$$(\hat{\Delta} + k^2)\mathbb{S} = 0. \quad (5.3.44)$$

Correspondingly, scalar-type vector and tensor fields can be expanded in terms of harmonic vectors \mathbb{S}_i and harmonic tensors \mathbb{S}_{ij} define by

$$\mathbb{S}_i = -\frac{1}{k} \hat{D}_i \mathbb{S}, \quad (5.3.45a)$$

$$\mathbb{S}_{ij} = \frac{1}{k^2} \hat{D}_i \hat{D}_j \mathbb{S} + \frac{1}{n} \gamma_{ij} \mathbb{S}. \quad (5.3.45b)$$

These harmonic tensors satisfy the following relations:

$$\hat{D}_i \mathbb{S}^i = k \mathbb{S}, \quad (5.3.46a)$$

$$[\hat{\Delta} + k^2 - (n-1)K] \mathbb{S}_i = 0, \quad (5.3.46b)$$

$$\mathbb{S}_i^i = 0, \quad \hat{D}_j \mathbb{S}_i^j = \frac{n-1}{n} \frac{k^2 - nK}{k} \mathbb{S}_i, \quad (5.3.46c)$$

$$[\hat{\Delta} + k^2 - 2nK] \mathbb{S}_{ij} = 0. \quad (5.3.46d)$$

Note that as in the case of vector harmonics, there are some exceptional modes:

- i) $k = 0$: $\mathbb{S}_i \equiv 0, \mathbb{S}_{ij} \equiv 0$.
- ii) $k^2 = nK$ ($K > 0$): $\mathbb{S}_{ij} \equiv 0$.

For scalar harmonics, $k^2 = 0$ is obviously always the allowed lowest eigenvalue. Therefore, the information on the second eigenvalue is important. In general, it is difficult to find such information. However, when \mathcal{K}^n is a compact Einstein space with $K > 0$, we can obtain a useful constraint as follows. Let us define Q_{ij} by

$$Q_{ij} := D_i D_j Y - \frac{1}{n} g_{ij} \Delta Y.$$

Then, we have the identity

$$Q_{ij} Q^{ij} = D^i (D^i Y D_i D_j Y - Y D_i \Delta Y - R_{ij} D^j Y) + Y [\Delta(\Delta + (n-1)K)] Y - \frac{1}{n} (\Delta Y)^2.$$

For $Y = \mathbb{S}$, integrating this identity, we obtain the constraint on the second eigenvalue

$$k^2 \geq nK. \quad (5.3.47)$$

For $\mathcal{K}^n = S^n$, the equality holds because the full spectrum is given by

$$k^2 = \ell(\ell + n - 1), \quad (\ell = 0, 1, 2, \dots). \quad (5.3.48)$$

Perturbation equations

The scalar perturbation of the metric and the energy-momentum tensor can be expanded as

$$h_{ab} = f_{ab} \mathbb{S}, \quad h_{ai} = r f_a \mathbb{S}_i, \quad h_{ij} = 2r^2 (H_L \gamma_{ij} \mathbb{S} + H_T \mathbb{S}_{ij}), \quad (5.3.49a)$$

$$\tau_{ab} = \tau_{ab} \mathbb{S}, \quad \tau_i^a = r \tau_a \mathbb{S}_i, \quad \tau_j^i = \delta P \delta_j^i \mathbb{S} + \tau_T \mathbb{S}_j^i. \quad (5.3.49b)$$

For the scalar-type gauge transformation

$$\xi_a = T_a \mathbb{S}, \quad \xi_i = r L \mathbb{S}_i, \quad (5.3.50)$$

these harmonic expansion coefficients for generic modes $k^2(k^2 - nK) > 0$ of a scalar-type perturbation transform as

$$\bar{\delta} f_{ab} = -D_a T_b - D_b T_a, \quad \bar{\delta} f_a = -r D_a \left(\frac{L}{r} \right) + \frac{k}{r} T_a, \quad (5.3.51a)$$

$$\bar{\delta} H_L = -\frac{k}{nr} L - \frac{D^a r}{r} T_a, \quad \bar{\delta} H_T = \frac{k}{r} L, \quad (5.3.51b)$$

$$\bar{\delta} \tau_{ab} = -T^c D_c T_{ab} - T_{ac} D_b T^c - T_{bc} D_a T^c, \quad (5.3.51c)$$

$$\bar{\delta} \tau_a = \frac{k}{r} (T_{ab} T^b - P T_a), \quad \bar{\delta}(\delta P) = -T^a D_a P, \quad \bar{\delta} \tau_T = 0. \quad (5.3.51d)$$

From these we obtain

$$\bar{\delta}X_a = T_a; \quad X_a = \frac{r}{k} \left(f_a + \frac{r}{k} D_a H_T \right). \quad (5.3.52)$$

Hence, the fundamental gauge invariants can be given by τ_T and the following combinations:

$$F = H_L + \frac{1}{n} H_T + \frac{1}{r} D^a r X_a, \quad (5.3.53a)$$

$$F_{ab} = f_{ab} + D_a X_b + D_b X_a, \quad (5.3.53b)$$

$$\Sigma_{ab} = \tau_{ab} + T_b^c D_a X_c + T_a^c D_b X_c + X^c D_c T_{ab}, \quad (5.3.53c)$$

$$\Sigma_a = \tau_a - \frac{k}{r} (T_a^b X_b - P X_a), \quad (5.3.53d)$$

$$\Sigma_L = \delta P + X^a D_a P. \quad (5.3.53e)$$

The scalar part of the Einstein equations comes from G_{ab} , G_{ai} and G_j^i . First, from δG_{ab} , we obtain

$$\begin{aligned} & -\square F_{ab} + D_a D_c F_b^c + D_b D_c F_a^c + n \frac{D^c r}{r} (-D_c F_{ab} + D_a F_{cb} + D_b F_{ca}) \\ & + {}^m R_a^c F_{cb} + {}^m R_b^c F_{ca} - 2 {}^m R_{abcd} F^{cd} + \left(\frac{k^2}{r^2} - R + 2\Lambda \right) F_{ab} - D_a D_b F_c^c \\ & - 2n \left(D_a D_b F + \frac{1}{r} D_a r D_b F + \frac{1}{r} D_b r D_a F \right) \\ & - \left[D_c D_d F^{cd} + \frac{2n}{r} D^c r D^d F_{cd} + \left(\frac{2n}{r} D^c D^d r + \frac{n(n-1)}{r^2} D^c r D^d r \right. \right. \\ & \left. \left. - {}^m R^{cd} \right) F_{cd} - 2n \square F - \frac{2n(n+1)}{r} D r \cdot D F + 2(n-1) \frac{k^2 - nK}{r^2} F \right. \\ & \left. - \square F_c^c - \frac{n}{r} D r \cdot D F_c^c + \frac{k^2}{r^2} F_c^c \right] g_{ab} = 2\kappa^2 \Sigma_{ab}. \end{aligned} \quad (5.3.54)$$

Second, from δG_i^a , we obtain

$$\frac{k}{r} \left[-\frac{1}{r^{n-2}} D_b (r^{n-2} F_a^b) + r D_a \left(\frac{1}{r} F_b^b \right) + 2(n-1) D_a F \right] = 2\kappa^2 \Sigma_a. \quad (5.3.55)$$

Finally, from the trace-free part of δG_j^i , we obtain

$$-\frac{k^2}{2r^2} [2(n-2)F + F_a^a] = \kappa^2 \tau_T, \quad (5.3.56)$$

and from the trace δG_i^i ,

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2}D_a D_b F^{ab} - \frac{n-1}{r}D^a r D^b F_{ab} \\
 & + \left[\frac{1}{2}mR^{ab} - \frac{(n-1)(n-2)}{2r^2}D^a r D^b r - (n-1)\frac{D^a D^b r}{r} \right] F_{ab} \\
 & + \frac{1}{2}\square F_c^c + \frac{n-1}{2r}Dr \cdot DF_c^c - \frac{n-1}{2n}\frac{k^2}{r^2}F_c^c + (n-1)\square F \\
 & + \frac{n(n-1)}{r}Dr \cdot DF - \frac{(n-1)(n-2)}{n}\frac{k^2 - nK}{r^2}F = \kappa^2 \Sigma_L. \quad (5.3.57)
 \end{aligned}$$

Note that for the exceptional mode with $k^2 = nK > 0$, the third equation does not exist, and for the mode with $k^2 = 0$, the second and the third equations do not exist. For these exceptional modes, the other equations hold without change, but the variables introduced above are not gauge invariant.

Although the energy-momentum conservation equation $\nabla_N T_M^N = 0$ can be derived from the Einstein equations, it is often useful to know its explicit form. For scalar-type perturbations, they are given by the following two sets of equations:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{r^{n+1}}D_a(r^{n+1}\Sigma^a) - \frac{k}{r}\Sigma_L + \frac{n-1}{n}\frac{k^2 - nK}{kr}\tau_T \\
 & + \frac{k}{2r}(T^{ab}F_{ab} - PF_a^a) = 0, \quad (5.3.58a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{r^n}D_b[r^n(\Sigma_a^b - T_a^c F_c^b)] + \frac{k}{r}\Sigma_a - n\frac{D_a r}{r}\Sigma_L \\
 & + n(T_a^b D_b F - PD_a F) + \frac{1}{2}(T_a^b D_b F_c^c - T^{bc}D_a F_{bc}) = 0. \quad (5.3.58b)
 \end{aligned}$$

5.3.6 静的ブラックホールの摂動

References

- Kodama H, Ishibashi A (2003): PTP110, 701.
 ”Master equation for gravitational perturbations of maximally symmetric black holes in higher dimensions”
- Kodama H, Ishibashi A (2003): PTP110, 903.
 ”Stability of higher dimensional Schwarzschild black holes”
- Kodama H, Ishibashi A (2004): PTP111, 29.
 ”Master equations for perturbations of generalized static black holes with charge in higher dimensions”

- Kodama H (2009): Lect.Notes Phys. 769, 427.

”Perturbations and Stability of Higher-Dimensional Black Holes”

【定理 5.3.4 (Master 方程式 (Kodama-Ishibashi2003))] Einstein ブラックホールの摂動方程式は、テンソル型，ベクトル型，スカラ型のそれぞれが，自己共役型の2階常微分作用素の固有値問題

$$L\Phi = \left(-\frac{d^2}{dr_*^2} + V(r) \right) \Psi = \omega^2 \Phi \quad (5.3.59)$$

に帰着される. _____ □

【定理 5.3.5 (中性球対称ブラックホールの安定性 (Kodama-Ishibashi2003))] Schwarzschild(-Tanhgelini) ブラックホールは線形摂動に対して安定である. _____ □

5.3.7 Gregory-Laflamme 不安定

【定理 5.3.6 (Gregory-Laflamme 1994; Kodama H 2009)] ブラックブレン (Schwarzschild BH×ℝⁿ) の球対称スカラ型摂動 (Sモード) $h \propto \exp(-i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{z})$ の方程式は，自己共役型2階常微分型作用素の固有値問題に帰着され， k/M (M はブラックホールの質量) の大きさがある臨界値以下だと $\omega^2 < 0$ となる. すなわち，系は摂動に対して不安定である. _____ □

【注 5.3.7] ブラックブレン系に対して，非球対称なスカラ型摂動の方程式は連立系の常微分方程式となり，自己共役型の固有値問題に帰着されない. また，ベクトル型摂動の方程式は2個の連立型常微分作用素の固有値問題に帰着されるが，自己共役型でない. _____ □

5.3.8 回転ブラックホールの摂動

【注 5.3.8] 回転ブラックホールに対して，摂動方程式は自己共役型の固有値問題に帰着されない. _____ □

【定理 5.3.9 (Kerr ブラックホールの線形安定性 (Whiting B 1989))] 4次元 Kerr BH は線形摂動に対して安定である. _____ □

References

- Jorge E. Santos, Benson Way: arXiv:1503.00721 [hep-th]
”The Black Ring is Unstable”
- O.J.C. Dias, P. Figueras, R. Monteiro, J.E. Santos and R. Emparan, Instability and new phases of higher-dimensional rotating black holes, Phys. Rev. D 80 (2009) 111701 [arXiv:0907.2248]
- O.J.C. Dias, P. Figueras, R. Monteiro and J.E. Santos, Ultraspinning instability of rotating black holes, Phys. Rev. D 82 (2010) 104025 [arXiv:1006.1904]
- Hirotaka Yoshino, Masaru Shibata (2011):Prog.Theor.Phys.Suppl. 190 (2011) 282
”Exploring Higher-Dimensional Black Holes in Numerical Relativity”
- Masaru Shibata, Hirotaka Yoshino: Phys.Rev. D81 (2010) 104035
”Bar-mode instability of rapidly spinning black hole in higher dimensions: Numerical simulation in general relativity”
- Masaru Shibata, Hirotaka Yoshino: Phys.Rev. D81 (2010) 021501
”Nonaxisymmetric instability of rapidly rotating black hole in five dimensions”

【注 5.3.10 (高次元回転ブラックホールの安定性)】

1. 6次元以上のMP BHは単回転のとき、十分速い回転に対して不安定であることが数値計算により示されている。[Dias et al 2009, 2010; Shibata, Yoshino]
2. 5次元単回転BRは、常に不安定であることが示されている。[Santos, Way 2015]

□

6

*高次元ブラックホール

§6.1

剛性定理

References

- Hollands S, Ishibashi A, Wald R.M. : Commun.Math.Phys. 271, 699-722 (2007) [gr-qc/0605106].
”A Higher dimensional stationary rotating black hole must be axisymmetric”
- Hollands S, Ishibashi A: Commun.Math.Phys. 291, 403-441 (2009) [arXiv:0809.2659 [gr-qc]]
”On the ‘Stationary Implies Axisymmetric’ Theorem for Extremal Black Holes in Higher Dimensions ”

【定理 6.1.1 (一般次元での剛性定理 [Hollands, Ishibashi, Wald 2007])】 解析的な定常回転ブラックホール解は、ホライズンが連結な解析的部分多様体ならば、軸対称である。 □

Proof. • \mathcal{H}^+ の光的接ベクトルを k , 各光的生成母線を一点につぶして得られる軌道空間を \mathcal{F} とする: $p: \mathcal{H}^+ \rightarrow \mathcal{F}$.

- BH が回転的なら、ホライズン H^+ 上で時間推進の Killing ベクトル ξ は空間的なので、 $\hat{\xi} = p_*\xi$ は \mathcal{F} の Killing ベクトルとなる。

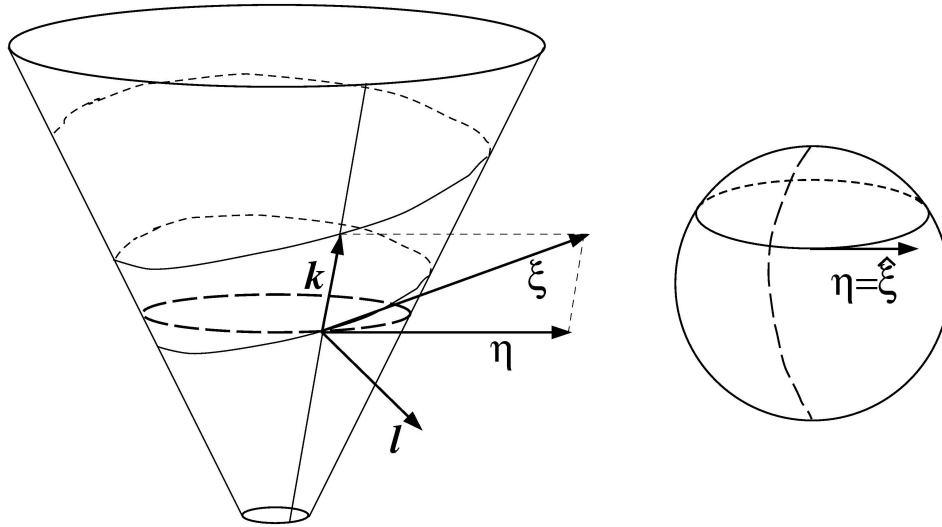


図 6.1: ホライズン \mathcal{H}^+ とその底空間 \mathcal{F}

- $\hat{\xi}$ の軌道がエルゴード的でない時には、軌道は単純閉曲線となり ($\hat{\xi} = \Omega_h \partial_\phi$), 適当に $f(\phi)$ を取ると, $\eta = \xi - fk$ は \mathcal{H}^+ の構造を保ち, かつ \mathcal{H}^+ 上での軌道が閉曲線となる.
- 時空および \mathcal{H}^+ が解析的な場合には, Einstein 方程式を用いると, η を時空全体の回転的 Killing ベクトルで $[\xi, \eta] = 0$ を満たすものに解析的に拡張できることが示される.
- $\hat{\xi}$ の軌道がエルゴード的な時にも, \mathcal{F} がより高い対称性を持つことより, Killing ベクトルを適当に取り替えることにより, 同様の議論ができることが示される.

Q.E.D.

6.1.1 帰結

1. $\hat{\xi}$ がゼロ点を持たないとき: \mathcal{F} は $U(1)$ 作用に関して Seifert 多様体となる.
コンパクト閉 Seifert 多様体 \mathcal{F} は, コンパクト閉多様体 B 上の S^1 バンドル $\tilde{\mathcal{F}}$ を用いて, $\mathcal{F} \approx \tilde{\mathcal{F}}/\Gamma$ (Γ はバンドル自己同形からなる有限群) とあらわされる.
2. $\hat{\xi}$ がゼロ点を持つとき: このとき, $\hat{\xi}$ の零点集合は, 余次元 2 のコンパクト閉部分多様体 N_i の直和となり, 各 N_i は $U(1)$ 不変な管状近傍 $U_i \cong D^2 \times N_i$

目次へ

を持つ。もし、 $N_i = \partial M_i$ となる境界のある多様体が存在する場合 (i.e. N_i がゼロコボルダント), 一般化された手術 $(\mathcal{F} - \cup_i U) \cup (\cup_i S^1 \times M_i)$ により得られるコンパクト閉多様体は, $\mathcal{F} - \cup_i U_i$ の $U(1)$ 構造を全体に自然に拡張でき, Seifert 多様体となる.

- $n = 3$ のときは, $N_i \approx S^1$ となり, 手術は $(2, 2)$ 型の球面改変となる.

§6.2

ホライズン曲率定理

References

- Hawking SW: CMP 25, 152 (1972).
“Black holes in general relativity”
- Gibbons GW: CQG 16, 1677 (1999).
“Some comments on gravitational entropy and the inverse mean curvature flow.”
- Cai M, Galloway GJ: CQG 18, 2707 (2001).
“On the topology and area of higher-dimensional black holes”
- Galloway GJ, Schoen R: CMP 266, 571 (2006).
“ A generalization of Hawking ’ s black hole topology theorem to higher dimensions”
- Galloway GJ: gr-qc/0608118 (2006).
“Rigidity of outer horizons and the topology of black holes.”
- Galloway GJ, O ’ Murchadha N: CQG 25, 105009 (2008).
“Some remarks on the size of bodies and black holes.”
- Racz I: CQG25, 162001 (2008).
“A simple proof of the recent generalizations of Hawking ’ s black hole topology theorem”.

【定義 6.2.1 (Yamabe Constant)】 M を n 次元コンパクト閉多様体とする. M 上の Riemann 計量の共形類 $[g]$ に対して,

$$Y(M, [g]) := \inf_{\hat{g} \in [g]} \frac{\int_M R_s[\hat{g}] d\mu_{\hat{g}}}{\left(\int_M d\mu_{\hat{g}}\right)^{(n-2)/n}}, \quad (6.2.1a)$$

$$Y(M) := \sup_{[g]} Y(M, [g]) \quad (6.2.1b)$$

により定義される $Y(M)$ を山辺定数 (Yamabe constant) と呼ぶ. $Y(M, [g])$ は次の様にも表される :

$$Y(M, [g]) = \inf_{u>0} \frac{\int_M \left(4\frac{n-1}{n-2}(Du)^2 + u^2 R_s[g]\right) d\mu_g}{\left(\int_M u^{\frac{2n}{n-2}} d\mu_g\right)^{(n-2)/n}} \quad (6.2.2)$$

□

【定義 6.2.2 (外側の見かけのホライズン (Galloway-Schoen 2006))】 Cauchy 面 Σ 内の超曲面 \mathcal{S} が次の 2 条件を満たすとき, 外側の見かけのホライズン (outer apparent horizon) という.

- i) \mathcal{S} は臨界外向き捕捉面 (MOTS).
- ii) \mathcal{S} の外に外向き強捕捉面 ($\theta < 0$) は存在しない

□

【定理 6.2.3 (ホライズン曲率定理 (Galloway-Schoen 2006))】 $(M^{n+2}, g)(n \geq 2)$ を DEC を満たす Einstein 方程式 $\mathbb{G} = \kappa^2 \mathbb{T}$ の解とする. M の Cauchy 面 Σ^{n+1} 内の外側の見かけのホライズン \mathcal{A}^n に対して次のいずれかが成り立つ:

1. \mathcal{A} は正の山辺タイプ (P) に属する.
2. (\mathcal{A}, h) (h は g から誘導された計量) は Ricci 平坦で, U を Σ の未来向きの単位法ベクトル, N を Σ に平行な \mathcal{A} の外向き単位法ベクトル, $k = U + N$ とするとき, k に関する外部曲率テンソル $\chi^{(k)} = 0$ および $\mathbb{T}(k, U) = 0$ (\mathcal{A} 上) が成り立つ.

□

Proof. \mathcal{A} を Σ 内で, 法ベクトル場 $V = \phi N$ ($\phi \in C^\infty(\mathcal{A})$) に沿って変形した時の θ の変化は

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial t} \right|_{t=0} = L\phi; \quad (6.2.3)$$

$$L\phi \equiv -\Delta\phi + 2X \cdot \nabla\phi + (Q + \nabla \cdot X - |X|^2)\phi, \quad (6.2.4)$$

$$Q \equiv \frac{1}{2}R_s(\mathcal{A}) - \mathbb{T}(U, K) - \frac{1}{2}|X|^2, \quad (6.2.5)$$

$$X = \text{proj}(\nabla_N U, T(\mathcal{A})). \quad (6.2.6)$$

で与えられる [Cai M, Galloway GJ: CQG18, 2707 (2001); Andersson L, Mars M, Simon W: PRL 95, 111102 (2005)]. ここで, L は実数の固有値 λ_1 をもち, その固有関数 ϕ_1 は至る所正であることが示される. \mathcal{A} が外側の見かけのホライズンなので, $\lambda_1 \geq 0$. よって, $\phi_1 = e^u$ とおくと,

$$-\Delta u + Q + \nabla \cdot X - |X - \nabla u|^2 \geq 0. \quad (6.2.7)$$

この式は,

$$Y = X - \nabla u \quad (6.2.8)$$

を用いて

$$Q + |Y|^2 \leq \nabla \cdot Y. \quad (6.2.9)$$

これより

$$\begin{aligned} -\psi^2 Q + \psi^2 |Y|^2 &\leq \psi^2 \nabla \cdot Y \\ &= \nabla \cdot (\psi^2 Y) - 2\psi \nabla \psi \cdot Y \\ &\leq \nabla \cdot (\psi^2 Y) + |\nabla \psi|^2 + \psi^2 |Y|^2. \end{aligned} \quad (6.2.10)$$

積分すると,

$$\int_{\mathcal{A}} (|\nabla \psi|^2 + Q\psi^2) \geq 0, \quad \forall \psi \in C^\infty(\mathcal{A}). \quad (6.2.11)$$

いま,

$$\tilde{h} = \psi^{2/n-2} h \quad (6.2.12)$$

とおくと,

$$R_s(\tilde{h}) = \psi^{-n/(n-2)} \left(-2\Delta\psi + R_s[h]\psi + \frac{n-1}{n-2} \frac{|\nabla\psi|^2}{\psi^2} \right). \quad (6.2.13)$$

ここで, 固有値問題

$$-\Delta\psi + Q\psi = \mu\psi \quad (6.2.14)$$

の最小固有値 μ_1 は, 上の積分不等式より $\mu_1 \geq 0$ で, 対応する固有関数 ψ_1 は至る所正. よって,

$$\begin{aligned} R_s(\tilde{h}) &= \psi_1^{-n/(n-2)} \left(2(\mu_1 - Q)\psi_1 + R_s[h]\psi_1 + \frac{n-1}{n-2} \frac{|\nabla\psi_1|^2}{\psi_1^2} \right) \\ &= \psi_1^{-n/(n-2)} \left[(2\mu_1 + 2\mathbb{T}(U, k) + |\chi|^2)\psi_1 + \frac{n-1}{n-2} \frac{|\nabla\psi_1|^2}{\psi_1^2} \right] \\ &\geq 0. \end{aligned} \quad (6.2.15)$$

ここで, $R_s(\tilde{h}) = 0$ なら, $\mu_1 = 0$, $\mathbb{T}(U, k) = 0$, $\chi = 0$, $\psi_1 = \text{const}$ が要求されるので, $Q = 0$, よって, $R_s[h] = 0$. Q.E.D.

【定義 6.2.4 (Stably outermost MOTS)】 \mathcal{T} を MOTS, k と l をその外向きおよび内向きの光的未来向き法ベクトル場 ($k \cdot l = -1$) とする. 変換 $(l, k) \rightarrow (l', k') = (e^v l, e^{-v} k)$ に対して, \mathcal{T} を l' に接する測地線に沿って移動して得られる余次元 2 の空間的部分多様体の族を $\mathcal{T}(u)$ して, 各 $\mathcal{T}(u)$ の外向きの光的未来向き法ベクトル k' を $k' \cdot l' = -1$ を満たすよう取る. このとき,

$$\mathcal{L}_{l'} \theta^{(k')} \leq 0 \quad (6.2.16)$$

がなりたつとき, \mathcal{T} は *stably outermost* であるという. また, $\mathcal{L}_{l'} \theta^{(k')} > 0$ のとき, *strictly stably outermost* であるという. □

【定理 6.2.5 (ホライズン曲率定理 (Racz I 2008))] (M, g) を $(n+2)$ 次元時空で, 宇宙項 Λ と DEC を満たすエネルギー運動量テンソル \mathbb{T} をもつ Einstein 方程式

$$\mathbb{G} + \Lambda g = \kappa^2 \mathbb{T} \quad (6.2.17)$$

の解とする. さらに, \mathcal{A} を outermost stable MOTS, h を g から \mathcal{A} に誘導される計量とする. このとき,

(1) もし $\Lambda \geq 0$ ならば, $Y(\mathcal{A}) \geq 0$. さらに, \mathcal{A} が strictly outermost stable ならば $Y(\mathcal{A}) > 0$.

(2) もし $\Lambda < 0$ かつ $Y(\mathcal{T}) < 0$ なら

$$\int_{\mathcal{T}} d\mu_h \geq \left(\frac{|Y(\mathcal{T})|}{2|\Lambda|} \right)^{n/2}. \quad (6.2.18)$$

ここで, \mathcal{T} が strictly outermost stable MOTS なら, (1) において $Y(\mathcal{T}) > 0$ が成り立つ. □

Proof. \mathcal{A} の外向き方向の光的法ベクトル場を $k(\theta^{(k)} = 0)$, ℓ を $k \cdot \ell = -1$ となる \mathcal{A} の (内向きの) 未来向き光的法ベクトルとする. このとき, \mathcal{A} を通過し ℓ に接する光的超曲面 \mathcal{N} 上で,

$$\begin{aligned} 2\mathbb{G}(k, \ell) &= \gamma^{ab} R_{ab} \\ &= 2\mathcal{L}_\ell \theta^{(k)} - \alpha \theta^{(k)} + \frac{1}{2} \theta^{(\ell)} \theta^{(k)} + R_s[h] + D \cdot \beta - \frac{1}{2} \beta \cdot \beta. \end{aligned} \quad (6.2.19)$$

特に, \mathcal{A} 上では $\theta^{(k)} = 0$ より,

$$\mathcal{L}_\ell \theta^{(k)}|_{\mathcal{T}} = \mathbb{G}(k, \ell) - \frac{1}{2} \left(R_s[q] + D \cdot \beta - \frac{1}{2} \beta \cdot \beta \right). \quad (6.2.20)$$

いま, DEC が成り立つとすると,

$$\mathbb{G}(k, \ell) = \kappa^2 \mathbb{T}(k, \ell) - \Lambda k \cdot \ell \geq \Lambda. \quad (6.2.21)$$

よって,

$$R_s[q] + D \cdot \beta - \frac{1}{2} \beta \cdot \beta \geq -2\mathbb{G}(n, \ell) \geq 2\Lambda + 2\mathcal{L}_n \theta^{(\ell)}. \quad (6.2.22)$$

ここで,

$$\begin{aligned} u^2 D \cdot \beta &= D \cdot (u^2 \beta) - 2u Du \cdot \beta \\ &\leq D \cdot (u^2 \beta) + 2(Du)^2 + \frac{1}{2} u^2 \beta^2. \end{aligned} \quad (6.2.23)$$

を用いると,

$$2(Du)^2 + R_s[h]u^2 + D \cdot (u^2\beta) \geq 2u^2\Lambda - 2\mathcal{L}_\ell\theta^{(k)}. \quad (6.2.24)$$

よって, $\Lambda \geq 0$ で \mathcal{A} が outermost stable MOTS のとき, $4(n-1)/(n-2) > 2(n \geq 3)$ より, 任意の $u > 0$ に対して

$$\int_{\mathcal{A}} d\mu_h \left(\frac{4(n-1)}{n-2} (Du)^2 + u^2 R_s[h] \right) \geq \int_{\mathcal{A}} d\mu_h \left(\frac{2n}{n-2} (Du)^2 + 2(\Lambda - \mathcal{L}_\ell\theta^{(k)})u^2 \right) \geq 0. \quad (6.2.25)$$

これは, $Y(\mathcal{A}) \geq Y(\mathcal{A}, [h]) \geq 0$ を意味する. さらに, \mathcal{A} が strictly outermost stable のときには, コンパクト閉多様体上の Sobolev 不等式

$$\|u\|_{L^{2n/(n-2)}} \leq C\|u\|_{2,1} \quad (6.2.26)$$

(C は u に依存しない定数) より,

$$\frac{\int_{\mathcal{A}} \mu_h \frac{4(n-1)}{n-2} (Du)^2 + u^2 R_s[h]}{\left(\int_{\mathcal{A}} u^{2n/(n-2)} \right)^{(n-2)/n}} \geq C' > 0 \quad (6.2.27)$$

となり, $Y(\mathcal{A}) \geq Y(\mathcal{A}, [h]) > 0$ が導かれる.

つぎに, Hölder の不等式

$$\int_{\mathcal{A}} \phi_1 \phi_2 d\mu_h \leq \left(\int_{\mathcal{A}} |\phi_1|^a \right)^{1/a} \left(\int_{\mathcal{A}} |\phi_2|^b \right)^{1/b}; \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1 \quad (6.2.28)$$

において, $\phi_1 = u^2, \phi_2 = 1, a = \frac{n}{n-2}, b = \frac{n}{2}$ とおくと

$$\int_{\mathcal{A}} u^2 d\mu_h \leq \left(\int_{\mathcal{A}} u^{\frac{2n}{n-2}} d\mu_h \right)^{1-2/n} [A(\mathcal{A})]^{2/n}. \quad (6.2.29)$$

よって, $\Lambda < 0$ のとき,

$$\frac{\int_{\mathcal{A}} \left(4\frac{n-1}{n-2} (Du)^2 + u^2 R_s[h] \right) d\mu_h}{\left(\int_{\mathcal{A}} u^{\frac{2n}{n-2}} d\mu_h \right)^{(n-2)/n}} \geq -2|\Lambda|[A(\mathcal{A})]^{2/n}. \quad (6.2.30)$$

さらに, $Y(\mathcal{A}) < 0$ ならば,

$$|Y(\mathcal{A})| \leq |Y(\mathcal{A}, [h])| = -Y(\mathcal{A}, [h]) \leq 2|\Lambda|[A(\mathcal{A})]^{2/n}. \quad (6.2.31)$$

(注) $D = 4(n = 2)$ の場合, (6.2.22) の積分より, $\Lambda > 0$ または \mathcal{A} が strictly outermost stable なら, $\chi(\mathcal{A}) > 0$ となるので, $\mathcal{A} \approx S^2$. Q.E.D.

§6.3

位相検閲定理

【定義 6.3.1 (光収束条件)】 任意の光的ベクトル k に対して, $\text{Ric}(k, k) \geq 0$ がなりたつとき, 光収束条件 (null convergence condition) が成り立つという. \square

【命題 6.3.2 (光測地線の共役点)】 光収束条件が成り立つ時空では, 余次元 2 の面 \mathcal{S} に垂直な収束的光的測地線束は必ず \mathcal{S} の共役点をもつ. \square

Proof. Raychaudhuri 方程式

$$\frac{d\theta}{du} + \frac{1}{n}\theta^2 = -2\hat{\sigma}^2 + 2\hat{\omega}^2 - \text{Ric}(k, k), \quad (6.3.1)$$

において, \mathcal{S} に垂直なら $\hat{\omega} = 0$ より,

$$\frac{d\theta}{du} + \frac{1}{n}\theta^2 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{d}{du} \left(\frac{1}{\theta} \right) \geq \frac{1}{n} \Leftrightarrow \theta(u) \leq -\frac{n}{n/|\theta(0)| - u} \quad (6.3.2)$$

Q.E.D.

【命題 6.3.3】 余次元 2 の空間的曲面 \mathcal{S} と垂直に交わる未来向きの光測地線 γ 上の $J^+(\mathcal{S})$ の部分に \mathcal{S} の共役点 p が存在するとき, γ の p を超える部分は $I^+(\mathcal{S})$ に含まれる. \square

【定理 6.3.4 (位相検閲定理 [Friedman, Schleich, Witt 1993])】 光収束条件が成り立つなら, 漸近的に平坦で予言可能な時空の各 DOC は単連結である. \square

Proof. • DOC M において, \mathcal{S}^+ と \mathcal{S}^- をつなぐ因果的な曲線 C を勝手に取る.

- もし, M が単連結でないなら, その普遍被覆空間 $\tilde{M} (\neq M)$ が存在する. さらに, 無限遠 \mathcal{S} の近傍に連続変形できない C が存在する.
- C の \tilde{M} へのリフト \tilde{C} は, M の異なる被覆シートの \mathcal{S}_1^+ と \mathcal{S}_2^- に端点 $p \in M_1$ と $q \in M_2$ をもつ.
- q 近傍で \tilde{C} と交わる球面を S とすると, S は \mathcal{S}_1^+ から見て外部強捕捉面となる. また, $\partial J^+(S)$ の光的生成母線の中に, \mathcal{S}_1^+ に終点をもつ測地線 γ が存在する.

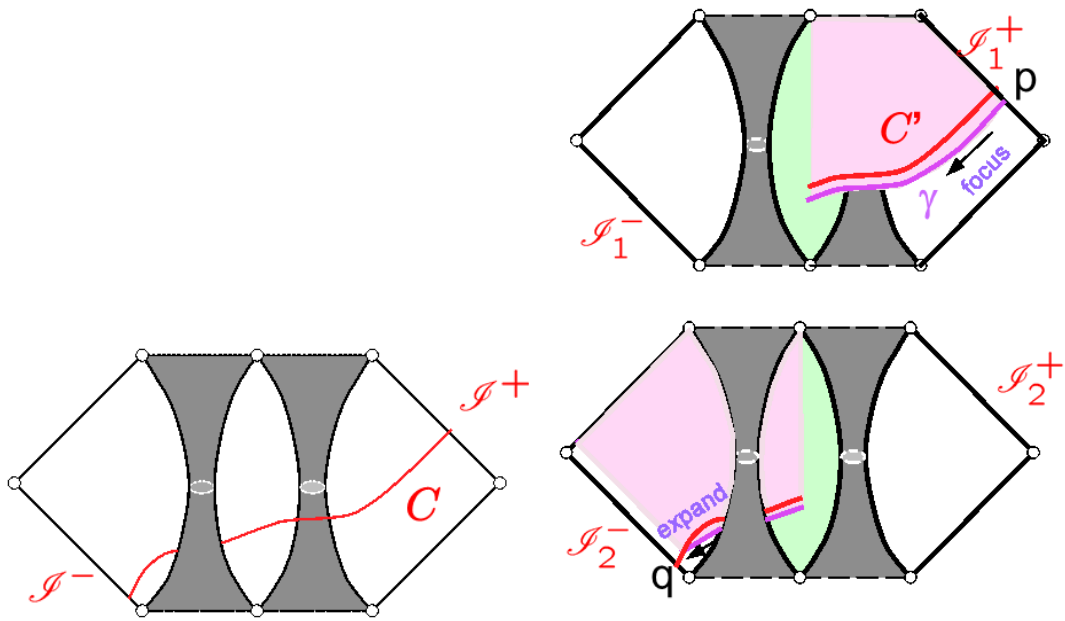


図 6.2: 単連結でない DOC とその被覆空間

- これは、光収束条件が成り立つとき、外部強捕捉面に直交する無限に長い測地線が常に共役点对を持つことと矛盾する。

Q.E.D.

【系 6.3.5 (Cauchy 面の単連結性)】 光収束条件が成り立つ漸近的に平坦な時空において、DOC が大域的に双曲的ならその Cauchy 面は単連結である。 —□

§6.4

ホライズンの位相

References

- Helfgott C, Oz Y, Yanay Y: JHEP 0602, 025 (2006) [arXiv: hep-th/0509013]
“On the topology of black hole event horizons in higher dimensions” —
- Galloway GJ, Schoen R: CMP 266, 571 (2006).
“ A generalization of Hawking ’ s black hole topology theorem to higher dimensions”
- Galloway GJ: gr-qc/0608118 (2006).
“Rigidity of outer horizons and the topology of black holes.”
- Hollands S, Holland J, Ishibashi A: Annales Henri Poincare 12, 279 (2011) [arXiv:1002.0490 [gr-qc]]
“Further restrictions on the topology of stationary black holes in five dimensions”
- Ida D, Ishibashi A, Shiromizu T: PTP suppl. No. 189, 52 (2011) []
“Topology and Uniqueness of Higher Dimensional Black Holes”
- Hollands S, Ishibashi A: CQG 29, 163001 (2012) []
“Black hole uniqueness theorems in higher dimensional spacetimes”

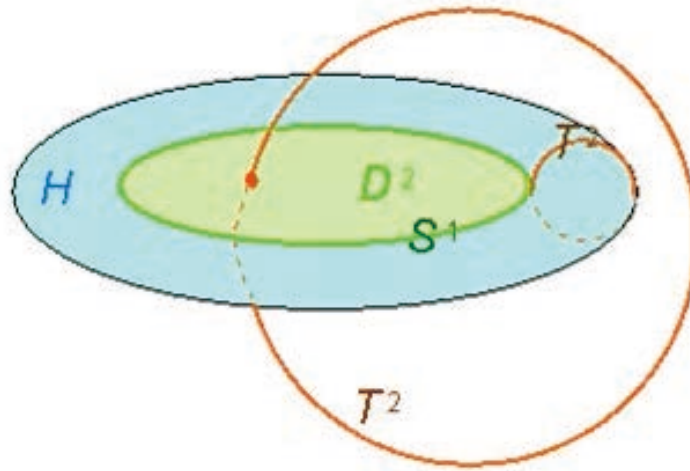
6.4.1 5次元ブラックホール

【定理 6.4.1 (5次元ブラックホールの位相 (Galloway-Schoen 2006; Helfgott-Oz-Yanay 2006; Hollands-Holland-Ishibashi 2011))] H を漸近的に平坦で解析的定常回転真空ブラックホール解の非縮退ホライズンの断面の連結成分とする. このとき, DOC が大域的に双曲的なら,

$$H \approx S^3/\Gamma (\#S^2 \times S^1)^\ell \tag{6.4.1}$$

□

【注 6.4.2】 剛性定理より, H は空間回転に対応する $U(1)$ 対称性をもつ. その Killing ベクトルを η とするとき,



- H 上で η がゼロ点を持たないときは, H は Seifert 多様体となり, より強い制限が得られる: $H \approx S^3/\Gamma, S^2 \times S^1$.

□

Proof. • 一般に, 向きづけられたコンパクト閉3次元多様体は

$$(S^3/\Gamma_1) \# \cdots \# (S^3/\Gamma_m) \# (S^2 \times S^1) \cdots \# (S^2 \times S^1) \# K(\pi_1, 1) \cdots \# K(\pi_n, 1) \tag{6.4.2}$$

と同相である. ここで, $K(\pi, 1)$ は普遍被覆が可縮となる空間である [Milnor 1962; Hempel 1976]

- ホライズン曲率定理より, H は非負の山辺タイプである.
- もし, H が正の山辺タイプとすると, H が $K(\pi, 1)$ を因子として持つことはできない [Lawson-Michelsohn 1989B; Gromov-Lawson 1983; Schoen-Yau 1979]
- H がゼロ山辺タイプの時には, H は $T^3 = S^1 \times T^2$ で被覆される. すると, 位相検閲定理より, Cauchy 面が Σ は単連結なので, S^1 は Σ 内の D^2 の境界となり, T^2 と D^2 は交差数 1 をもつ. ところが, Σ は単連結なので, T^2 は D^2 外の 1 点にホモトープに変形できる. これは交差数が奇数変化できることを意味し, 矛盾する.

Q.E.D.

6.4.2 6次元以上の時空のブラックホール

【注 6.4.3】

1. 6次元時空に対しては，連結，単連結かつ素なホライズンは， S^4 か $S^2 \times S^2$ に同相であることが示される [Helfgott, Oz, Yanay 2006]. しかし，単連結性の要請を外すと， $S^3 \times S^1$ ， S^4/Γ が排除されなくなり，またそれ以外の位相も排除されない．また，連結和を許すと，スピン多様体であることを要請しても， $K3\#K3$ なども排除できなくなる．

□

【定理 6.4.4 (6次元時空の単連結・素なホライズン (Helfgott-Oz-Yanay 2006))】

K を漸近的に平坦な6次元時空のコンパクト連結で非縮退なホライズンの切断とする．もし， K が単連結で素なら， $K \approx S^4$ または $K \approx S^2 \times S^2$ である． □

【注 6.4.5】

1. K がスピン多様体で単連結なら，素でない場合は， $K \approx \#k(S^2 \times S^2)$.
2. K が単連結でない場合には， S^4/Γ ， $S^1 \times S^3/\Gamma$ ， $S^3 \times S^1$ ， $S^2 \times \Sigma_g/\Gamma$ が許される可能性がある．

□

Proof. • Hirzebruch の指数定理より

$$\sigma(K) = \frac{1}{3} \int_H p_1. \tag{6.4.3}$$

一方， $\partial\Sigma = K + S^4$ より， K と S^4 は cobordant なので，

$$p_1(K) = p_1(S^4) = 0 \Rightarrow \sigma(K) = 0. \tag{6.4.4}$$

• Firedman の4次元位相多様体の分類定理より， K が単連結とすると

- i) $Q = 0$ のとき， $K = S^4$.
- ii) $Q \neq 0$ で Q が偶 (II型) 不定形式なら $Q = \pm aE_8 + bH$. $\sigma(E_8) = 8, \sigma(H) = 0$ より， $a = 0$. よって， $K \approx \#b(S^2 \times S^2)$.
- iii) $Q \neq 0$ で Q が奇 (I型) 不定形式なら $Q = +a[1] + b[-1]$. よって， $\sigma(Q) = a - b$ より， $Q = a[1] + a[-1]$. すなわち， $K = \#a(\mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P^2})$.

Q.E.D.

【注 6.4.6 ($n \geq 5$)】 $n = D - 2 \geq 5$ では, コボルディズム理論やホライズン曲率定理は余り役に立たない. □

【定理 6.4.7 (Gromov-Lawson 1980)】 X を5次元以上のコンパクト単連結連結多様体とする. このとき,

1. X がスピン構造を持たなければ, X は $R_s > 0$ の Riemann 計量を許容する.
2. X がスピン多様体で $R_s > 0$ の多様体とスピン同境なら, X は $R_s > 0$ の Riemann 計量を許容する.

□

For $n \geq 5$, the cobordism theory and the horizon curvature theorem are not helpful. Theorem (Gromov-Lawson 1980). Let X be a compact simply connected manifold of dimension $n \geq 5$. If X is not spin, then X carries a metric with $R_s \geq 0$. If X is spin, and spin cobordant to a manifold with $R_s \geq 0$, then X carries a metric with $R_s \geq 0$.

【系 6.4.8 (Lawson-Michelsohn 1989)】 次元が5, 6ないし7のすべてのコンパクト単連結は $R_s \geq 0$ の計量を許容する. □

§6.5

***Black fold**

A

時空の幾何学

§A.1

Weyl 変換

【公式 A.1.1 (曲率テンソルの変換)】 n 次元 Riemann 多様体の Weyl 変換

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \hat{g}_{\mu\nu} = e^{2\Phi} g_{\mu\nu} \quad (\text{A.1.1})$$

に対して, Christoffel シンボルおよび曲率テンソルは次のように変換する:

$$\hat{\Gamma}_{\nu\lambda}^{\mu} = \Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} + \nabla_{\nu}\Phi\delta_{\lambda}^{\mu} + \nabla_{\lambda}\Phi\delta_{\nu}^{\mu} - \nabla^{\mu}\Phi g_{\nu\lambda}, \quad (\text{A.1.2})$$

$$\begin{aligned} \hat{R}^{\mu}{}_{\nu\lambda\sigma} = & R^{\mu}{}_{\nu\lambda\sigma} + 2\delta_{[\sigma}^{\mu}\nabla_{\lambda]}\nabla_{\nu}\Phi - 2g_{\nu[\sigma}\nabla_{\lambda]}\nabla^{\mu}\Phi \\ & - 2\nabla_{\nu}\Phi\nabla_{[\nu}\Phi\delta_{\sigma]}^{\mu} + 2\nabla^{\mu}\Phi\nabla_{[\lambda}\Phi g_{\sigma]\nu} - 2(\nabla\Phi)^2\delta_{[\lambda}^{\mu}g_{\sigma]\nu}, \end{aligned} \quad (\text{A.1.3})$$

$$\begin{aligned} \hat{R}_{\mu\nu} = & R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}\nabla^2\Phi - (n-2)\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\Phi \\ & + (n-2)\nabla_{\mu}\Phi\nabla_{\nu}\Phi - (n-2)(\nabla\Phi)^2 g_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (\text{A.1.4})$$

$$e^{2\Phi}\hat{R} = R - 2(n-1)\nabla^2\Phi - (n-1)(n-2)(\nabla\Phi)^2. \quad (\text{A.1.5})$$

□

§A.2

時空の分解

A.2.1 接続の分解

Riemann 接続 : Riemann 多様体 (\mathcal{M}, g) の Riemann 接続 ∇ は次の条件を満たす一意的な線形接続である.

1. (計量条件) $\nabla g = 0$.
2. (ねじれ条件) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$.

Gauss の公式 : 時空 (\mathcal{M}, \tilde{g}) の Riemann 接続を $\tilde{\nabla}$, \mathcal{M} 内の超曲面を Σ , n を Σ の単位法ベクトル場とする. Σ に接するベクトル場 X, Y に対して,

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - K(X, Y)n; \quad \nabla_X Y \parallel \Sigma \quad (\text{A.2.1})$$

と直交分解すると, $[X, Y]$ が Σ に接することより, ∇ は \tilde{g} から Σ に誘導された計量 g に関する Riemann 接続となり, また $K(X, Y)$ は Σ 上の対称テンソル (第 2 基本形式ないし外部曲率) となる:

$$K(X, Y) = K(Y, X). \quad (\text{A.2.2})$$

Weingarten の公式 : X を Σ に平行なベクトル場, n を Σ の単位法ベクトル場として, Σ 上の $(1, 1)$ 型混合テンソル場 $K(X)$ を

$$g(K(X), Y) = K(X, Y) \quad (\text{A.2.3})$$

により定義すると,

$$\tilde{\nabla}_X n = \pm K(X) \parallel \Sigma; \quad g(n, n) = \pm 1 \quad (\text{A.2.4})$$

が成り立つ.

計量による表現 : $(d+1)$ 次元時空の計量は一般に,

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + g_{ij}(dx^i + \beta^i dt)(dx^j + \beta^j dt) \quad (\text{A.2.5})$$

と表される. この表示のもとで, $t = \text{一定面 } \Sigma_t$ の単位法ベクトル n は

$$n = \frac{1}{N}(\partial_t - \beta^i \partial_i) \quad (\text{A.2.6})$$

となる. $T = Nn$ とおくと,

$$\begin{aligned} K(X, Y) &= \pm \frac{1}{N} \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X T, Y) = \pm \frac{1}{N} \tilde{g}([X, T] + \tilde{\nabla}_T X, Y) \\ &= \pm \frac{1}{2N} (\mathcal{L}_T g)(X, Y) \end{aligned} \quad (\text{A.2.7})$$

より

$$K_{ij} = \pm \frac{1}{2N} (\partial_t g_{ij} - \nabla_i \beta_j - \nabla_j \beta_i) \quad (\text{A.2.8})$$

を得る.

A.2.2 曲率の分解

Riemann 曲率 : 線形接続 ∇ の曲率テンソルは次式で定義される :

$$R(X, Y)Z = (\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]})Z. \quad (\text{A.2.9})$$

特に, 計量 g に関する Riemann 接続に対して

$$R(X, Y, Z, W) = g(Z, R(X, Y)W) \quad (\text{A.2.10})$$

とおくとき, 次式が成り立つ :

$$R(X, Y, Z, W) = -R(X, Y, W, Z), \quad (\text{A.2.11a})$$

$$R(X, Y, Z, W) = R(Z, W, X, Y), \quad (\text{A.2.11b})$$

$$R(X, Y, Z, W) + R(X, Z, W, Y) + R(X, W, Y, Z) = 0, \quad (\text{A.2.11c})$$

$$(\nabla_W R)(X, Y, U, V) + (\nabla_U R)(X, Y, V, W) + (\nabla_V R)(X, Y, W, U) = 0. \quad (\text{A.2.11d})$$

第 3 式は第 1 Bianchi 恒等式, 第 4 式は第 2 Bianchi 恒等式と呼ばれる.

Gauss-Codazzi 方程式 : $\nabla_X Y$ の分解公式より, Σ の接ベクトル場 X, Y, Z に対して,

$$\begin{aligned} \tilde{R}(X, Y)Z &= \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y Z - \tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X Z - \tilde{\nabla}_{[X, Y]} Z \\ &= R(X, Y)Z \pm (K(X, Z)K(Y) - K(Y, Z)K(X)) \\ &\quad + [-(\nabla_X K)(Y, Z) + (\nabla_Y K)(X, Z)]n. \end{aligned} \quad (\text{A.2.12})$$

この式は次の 2 式と同等である :

$$\begin{aligned} \tilde{R}(X, Y, Z, W) &= R(X, Y, Z, W) \pm (K(X, W)K(Y, Z) \\ &\quad - K(X, Z)K(Y, W)), \end{aligned} \quad (\text{A.2.13})$$

$$\tilde{R}(X, Y, Z, n) = \pm ((\nabla_X K)(Y, Z)) - (\nabla_Y K)(X, Z). \quad (\text{A.2.14})$$

Σ の正規直交基底 e_I および Σ の単位法ベクトル $e_0 = n$ からなる \mathcal{M} の正規直交基底に関する成分表示のもとで、これらの方程式は次のように表わされる：

$$\tilde{R}_{IJKL} = R_{IJKL} \pm (K_{IL}K_{JK} - K_{IK}K_{JL}), \quad (\text{A.2.15a})$$

$$\tilde{R}_{0IJK} = n_\mu \tilde{R}^\mu{}_{IJK} = \pm (\nabla_K K_{IJ} - \nabla_J K_{IK}). \quad (\text{A.2.15b})$$

となる。

残りの成分 $T = Nn = \partial_t - \beta^i \partial_i$ に対して、 $t = \text{一定面 } \Sigma_t$ に接するベクトル場 X, Y を

$$\mathcal{L}_T X = 0, \quad \mathcal{L}_T Y = 0 \quad (\text{A.2.16})$$

となるようにとる。このとき、

$$\tilde{g}(n, \tilde{R}(X, n)Y) = \frac{1}{N^2} \tilde{g}(T, \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_T Y - \tilde{\nabla}_T \tilde{\nabla}_X Y). \quad (\text{A.2.17})$$

ここで、 $\tilde{\nabla}_T Y = \tilde{\nabla}_Y T$ より

$$\begin{aligned} \tilde{g}(T, \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_T Y) &= \tilde{g}(T, \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y T) = \tilde{g}(T, \tilde{\nabla}_X ((\partial_Y N)n \pm NK(Y))) \\ &= \tilde{g}(T, (\partial_X \partial_Y N)n \pm N \tilde{\nabla}_X (K(Y))) \\ &= \pm N \partial_X \partial_Y N - N^2 K(X, K(Y)). \end{aligned} \quad (\text{A.2.18})$$

また、 $\mathcal{L}_T \nabla_X Y \parallel \Sigma_t$ より

$$\begin{aligned} \tilde{g}(T, \tilde{\nabla}_T \tilde{\nabla}_X Y) &= \tilde{g}(T, \tilde{\nabla}_T (\nabla_X Y - K(X, Y)n)) \\ &= \tilde{g}(T, \tilde{\nabla}_{\nabla_X Y} T - \partial_T (K(X, Y))n) \\ &= \pm N \partial_{\nabla_X Y} N \mp (\mathcal{L}_T K)(X, Y). \end{aligned} \quad (\text{A.2.19})$$

ここで

$$\partial_X \partial_Y N = \nabla_X (\nabla_Y N) = \nabla_X (Y^i \nabla_i N) = (\nabla_X Y)^i \nabla_i N + (\nabla^2 N)(X, Y). \quad (\text{A.2.20})$$

よって

$$\tilde{g}(n, \tilde{R}(X, n)Y) = \pm \frac{1}{N} (\mathcal{L}_T K)(X, Y) - K(X, K(Y)) \pm \frac{1}{N} (\nabla^2 N)(X, Y) \quad (\text{A.2.21})$$

成分表示では、

$$\tilde{R}_{0i0j} = \mp \frac{1}{N} (\dot{K}_{ij} - (\mathcal{L}_\beta K)_{ij}) + K_{ik} K_j^k \mp \frac{1}{N} (\nabla^2 N)_{ij}. \quad (\text{A.2.22})$$

Note : $\dim \Sigma = 2$ のとき, 曲率テンソルは必ず

$${}^2R_{IJKL} = k(\delta_{IK}\delta_{JL} - \delta_{IL}\delta_{JK}) \quad (\text{A.2.23})$$

と表され, 独立な成分は ${}^2R_{1212} = k$ のみとなる. 特に, Σ が 3 次元 Euclid 空間内の 2 次元面の時, $R_{abcd} = 0$ と Gauss の方程式より

$$k = K_{12}^2 - K_{11}K_{22} = \det K_{IJ} \quad (\text{A.2.24})$$

となる. したがって, Σ の曲率半径を R_1, R_2 とすると, K_{IJ} の固有値は $1/R_1, 1/R_2$ となるので, 有名な Gauss の公式

$$k = \frac{1}{R_1 R_2} \quad (\text{A.2.25})$$

を得る.

A.2.3 Einstein 方程式の分解

Gauss 方程式および Codazzi 方程式のトレースより

$$2\tilde{G}_{nn} = 2\tilde{R}_{nn} \mp \tilde{R} = \mp R + K^2 - K_j^i K_i^j, \quad (\text{A.2.26a})$$

$$\tilde{G}_{ni} = \tilde{R}_{ni} = \pm(\nabla_j K_i^j - \nabla_i K). \quad (\text{A.2.26b})$$

また,

$$\tilde{G}_{ij} = \tilde{R}_{ij} + (\tilde{G}_0^0 - \tilde{R}_0^0)g_{ij}, \quad (\text{A.2.27})$$

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{ij} &= g^{kl} \tilde{R}_{kilj} + \tilde{R}^0_{i0j} \\ &= R_{ij} \pm (K_{ik} K_j^k - K K_{ij}) + \tilde{R}^0_{i0j}. \end{aligned} \quad (\text{A.2.28})$$

ここで, $T = \partial_t - \beta^i \partial_i$ として,

$$\tilde{R}^0_{i0j} = -\frac{1}{N} \mathcal{L}_T K_{ij} \pm K_{ik} K_j^k - \frac{1}{N} \nabla_i \nabla_j N, \quad (\text{A.2.29})$$

$$g^{ij} \mathcal{L}_T K_{ij} = \mathcal{L}_T K \pm 2N K_j^i K_i^j. \quad (\text{A.2.30})$$

よって,

$$\tilde{R}_{ij} = R_{ij} \pm (2K_{ik} K_j^k - K K_{ij}) - \frac{1}{N} \mathcal{L}_T K_{ij} - \frac{1}{N} \nabla_i \nabla_j N, \quad (\text{A.2.31a})$$

$$\tilde{R}_0^0 = -\frac{1}{N} \mathcal{L}_T K \mp K_j^i K_i^j - \frac{1}{N} \Delta N, \quad (\text{A.2.31b})$$

$$\tilde{R} = R - \frac{2}{N} \mathcal{L}_T K \mp (K^2 + K_j^i K_i^j) - \frac{2}{N} \Delta N. \quad (\text{A.2.31c})$$

これより,

$$\begin{aligned}\tilde{G}_{ij} = & G_{ij} \pm \left[2K_i^k K_{kj} - KK_{ij} + \frac{1}{2}(K^2 + K_l^k K_k^l)g_{ij} \right] \\ & - \frac{1}{N}(\mathcal{L}_T K_{ij} - g_{ij}\mathcal{L}_T K) - \frac{1}{N}\nabla_i \nabla_j N + \frac{1}{N}\Delta N g_{ij}.\end{aligned}\quad (\text{A.2.32})$$

ただし, $(\mathcal{L}_T K)_{ij} = \partial_i K_{ij} - (\mathcal{L}_\beta K)_{ij}$ において,

$$(\mathcal{L}_\beta K)_{ij} = (\nabla_\beta K)_{ij} + K_{ik}\nabla_j \beta^k + K_{jk}\nabla_i \beta^k. \quad (\text{A.2.33})$$

§A.3

初期値問題に対する O'Murchandha-York の方法

\hat{K}_j^i を

$$\hat{K}_j^i = S_j^i + (LW)_j^i; \quad (\text{A.3.1})$$

$$(LW)_j^i = D_j W^i + D^i W_j - \frac{2}{d}D \cdot W \delta_j^i, \quad (\text{A.3.2})$$

$$S_j^j = 0, \quad D_j S_i^j = 0 \quad (\text{A.3.3})$$

と分解する. このとき, 次の定理が成り立つ.

【定理 A.3.1】 $(q_{jk}, K^{jk}, \phi, \pi)$ を任意の配意データとするとき, 変換

$$q_{jk} \rightarrow q'_{jk} = e^{2\Omega} q_{jk}, \quad (\text{A.3.4a})$$

$$K_k^j \rightarrow K'^j_k = K_k^j + (LW)_k^j \quad (\text{A.3.4b})$$

は $(\Omega(\mathbf{x}), W^j(\mathbf{x}))$ をパラメーターとする可換な無限次元変換群をなす. 勝手なデータ $(q_{jk}, K^{jk}, \phi, \pi)$ を 1 つ与えたとき, それにこの変換を施して得られる位相空間での軌道上では, 拘束条件は Ω と W^j に対する次の楕円型連立微分方程式で表わされる:

$$\begin{aligned}2(d-1)\Delta\Omega + (d-1)(d-2)(D\Omega)^2 = & -e^{2\Omega} \left[2\hat{K} \cdot (LW) + (LW)^2 \right] \\ & + {}^dR + e^{2\Omega} \left[\frac{d-1}{d}K^2 - \hat{K}^2 \right] - 2\kappa^2 e^{2\Omega} T'_{nn},\end{aligned}\quad (\text{A.3.5a})$$

$$(\text{A.3.5b})$$

$$\begin{aligned}\Delta W_i + \frac{d-2}{d}D_i D \cdot W + {}^dR_{ij}W^j + dD_j \Omega (LW)_i^j \\ = -D_j \hat{K}_i^j - dD_j \Omega \hat{K}_i^j + \frac{d-1}{d}D_i K - \kappa^2 T'_{ni}\end{aligned}\quad (\text{A.3.5c})$$

ここで T'_{nn}, T'_{nj} は T_{nn}, T_{nj} の表式で $q_{jk} \rightarrow q'_{jk}, K_k^j \rightarrow K'^j_k$ と置き換えたものである。□

4次元時空 ($d = 3$) に対して、この定理より、初期条件の自由度は空間の各点ごとに、計量の共形クラス $[q_{jk}] = q_{jk}/q^{1/3}$ の自由度 5 とゼロトレース、ゼロ発散テンソル S_k^j の自由度 2, K_k^j のトレース K の自由度 1 の計 8 となる。このうち 4 個は座標変換の自由度 (ゲージ自由度) なので、真の力学的自由度は $2 + 2$ (+ 物質場の自由度) となる。これはちょうど近似的に平坦な時空での重力波の自由度と一致している。

上記の連立楕円型方程式は必ずしも解を持つとは限らない。また、解が存在しても一般には一意的とも限らない。しかし、適当なゲージ条件のもとでは存在と一意性がいえる [27]。例えば、時間座標に対して $K = \text{const}$ (一様膨張時間スライス)、空間座標に対して $T_{nj} = 0$ (共動ゲージ) の座標条件を課すと、運動量拘束条件 (1.3.9b) は $D_j \hat{K}_i^j = 0$ となる。いま、 (q_{ij}, \hat{K}_j^i, K) を拘束条件 (1.3.9) の解、 $\overset{\circ}{q}_{ij}$ を q_{ij} の共形類に属する一つの計量、 $q_{ij} = e^{2\Omega} \overset{\circ}{q}_{ij}$ とおくと、

$$D_j \hat{K}_i^j = e^{-d\Omega} \overset{\circ}{D}_j (e^{d\Omega} \hat{K}_i^j) \quad (\text{A.3.6})$$

より、 \hat{K}_i^j は

$$\hat{K}_i^j = e^{-d\Omega} S_i^j; \quad S_j^j = 0, \quad \overset{\circ}{D}_j S_i^j = 0 \quad (\text{A.3.7})$$

と表される。また、ハミルトン拘束条件 (1.3.9a) は

$$(d-1) \left[2 \overset{\circ}{\Delta} \Omega + (d-2) (\overset{\circ}{D} \Omega)^2 \right] = d \overset{\circ}{R} + \frac{d-1}{d} K^2 e^{2\Omega} - e^{-2(d-1)\Omega} S^2 - 2\kappa^2 e^{2\Omega} T'_{nn} \quad (\text{A.3.8})$$

となる。この方程式は、ほとんど全てのデータ $(\overset{\circ}{q}_{jk}, S_k^j, T_{nn}, K)$ に対して解を持つことが示される。さらに、同じゲージのもとで、 $T_{nn} = S_k^j = K = 0$ の場合を除くと、解は一意的であることも示される。この除外された場合には Ω の方程式は $e^{(d-2)\Omega/2}$ に対する同次線形方程式となるため、一般にはたくさんの解を持つが、時空が漸近的に平坦な場合には $\Omega = O\left(\frac{1}{r^{d-2}}\right)$ ($r \rightarrow \infty$) の境界条件のもとでは一意性が言える。また、このゲージ条件から僅かにずれたゲージ条件 $K = \text{const} + \delta K(\mathbf{x})$, $T_{nj} = \delta T_{nj}(\mathbf{x})$ に対しても解の存在と一意性が示されている。

§A.4

時空の摂動

A.4.1 計量・接続・曲率

【公式 A.4.1】 計量テンソル $g_{\mu\nu}$ の変分

$$\delta g_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$$

に対して、接続係数、曲率テンソルなどの幾何学的諸量の 1 次変分は次のようになる：

$$\begin{aligned} \delta g^{\mu\nu} &= -h^{\mu\nu}, \\ \delta|g| &= |g|h; \quad h = g^{\mu\nu}h_{\mu\nu}, \\ \delta\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} &= \frac{1}{2}(\nabla_{\nu}h_{\lambda}^{\mu} + \nabla_{\lambda}h_{\nu}^{\mu} - \nabla^{\mu}h_{\nu\lambda}), \\ \delta R^{\mu}{}_{\nu\lambda\sigma} &= \nabla_{\lambda}\delta\Gamma_{\nu\sigma}^{\mu} - \nabla_{\sigma}\delta\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} \\ &= \frac{1}{2}(\nabla_{\lambda}\nabla_{\nu}h_{\sigma}^{\mu} - \nabla_{\sigma}\nabla_{\nu}h_{\lambda}^{\mu} - \nabla_{\lambda}\nabla^{\mu}h_{\nu\sigma} + \nabla_{\sigma}\nabla^{\mu}h_{\nu\lambda} \\ &\quad + R_{\lambda\sigma}{}^{\mu}{}_{\beta}h_{\nu}^{\beta} + R_{\lambda\sigma\nu}{}^{\beta}h_{\beta}^{\mu}), \\ \delta R_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}(-\nabla^2 h_{\mu\nu} - \nabla_{\mu}\nabla_{\nu}h + \nabla_{\mu}\nabla_{\alpha}h_{\nu}^{\alpha} + \nabla_{\nu}\nabla_{\alpha}h_{\mu}^{\alpha} \\ &\quad + R_{\mu\alpha}h_{\nu}^{\alpha} + R_{\nu\alpha}h_{\mu}^{\alpha} - 2R_{\mu\alpha\nu\beta}h^{\alpha\beta}), \\ \delta R &= -h_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + \nabla^{\mu}\nabla^{\nu}h_{\mu\nu} - \nabla^2 h. \end{aligned}$$

□

A.4.2 Einstein 方程式

【公式 A.4.2】 $(n+2)$ 次元時空における Einstein 方程式

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu}$$

の線形摂動は次のように表される：

$$\begin{aligned} (\Delta_L h)_{\mu\nu} - \nabla_{\mu}\nabla_{\nu}h + 2\nabla_{(\mu}\nabla^{\alpha}h_{\nu)\alpha} + (-\nabla^{\alpha}\nabla^{\beta}h_{\alpha\beta} + \Delta h + R^{\alpha\beta}h_{\alpha\beta})g_{\mu\nu} \\ + (2\Lambda - R)h_{\mu\nu} = 2\kappa^2 \delta T_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

ここで, Δ_L は次式で定義される Lichinerowicz 作用素である :

$$(\Delta_L h)_{\mu\nu} := -\nabla \cdot \nabla h_{\mu\nu} + 2R_{(\mu}^{\alpha} h_{\nu)\alpha} - 2R_{\mu\alpha\nu\beta} h^{\alpha\beta}.$$

この作用素について次の式が成り立つ :

$$\begin{aligned} (\Delta_L h)_{\alpha}^{\alpha} &= -\Delta h, \\ \nabla^{\alpha} (\Delta_L h)_{\mu\alpha} &= -\nabla \cdot \nabla (\nabla^{\alpha} h_{\mu\alpha}) + R_{\mu}^{\alpha} \nabla^{\beta} h_{\alpha\beta} + (2\nabla_{\alpha} R_{\mu\beta} - \nabla_{\mu} R_{\alpha\beta}) h^{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

$\psi_{\mu\nu}$ を

$$\psi_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} h g_{\mu\nu}$$

により定義すると,

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu} &= \psi_{\mu\nu} - \frac{1}{n} \psi g_{\mu\nu}, \\ h &= -\frac{2}{n} \psi \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= \kappa^2 \left(T_{\mu\nu} - \frac{T}{n} g_{\mu\nu} \right) + \frac{2\Lambda}{n} g_{\mu\nu}, \\ R &= \frac{2(n+2)}{n} \Lambda - \frac{2\kappa^2}{n} T \end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned} \Delta_L \psi_{\mu\nu} - \frac{4\Lambda}{n} \psi_{\mu\nu} + 2\nabla_{(\mu} \nabla^{\alpha} \psi_{\nu)\alpha} - \nabla^{\alpha} \nabla^{\beta} \psi_{\alpha\beta} g_{\mu\nu} \\ = 2\kappa^2 \delta T_{\mu\nu} - \frac{2\kappa^2}{n} T \psi_{\mu\nu} - \kappa^2 \left(T_{\alpha\beta} \psi^{\alpha\beta} - \frac{T}{n} \psi \right) g_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

□

A.4.3 摂動の $(m+n)$ 分解

背景時空の計量が

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^{\mu} dx^{\nu} = g_{ab}(y) dy^a dy^b + r(y)^2 \gamma_{ij}(z) dz^i dz^j \quad (\text{A.4.1})$$

で与えられるとし, 共変微分を

$$g_{\mu\nu} \Rightarrow \nabla_{\mu}, \quad R^{\mu}{}_{\nu\lambda\sigma}, \quad (\text{A.4.2a})$$

$$g_{ab} \Rightarrow D_a, \quad R^a{}_{bcd} = {}^m R^a{}_{bcd}, \quad (\text{A.4.2b})$$

$$\gamma_{ij} \Rightarrow \hat{D}_i, \quad \hat{R}^i{}_{jkl} \quad (\text{A.4.2c})$$

目次へ

と表す。対応して、曲率テンソルと Ricci 曲率の非ゼロ成分は

$$R^a{}_{bcd} = {}^m R^a{}_{bcd}, \quad (\text{A.4.3a})$$

$$R^a{}_{ibj} = -\frac{D^a D_b r}{r} g_{ij}, \quad (\text{A.4.3b})$$

$$R^i{}_{jkl} = \hat{R}^i{}_{jkl} - (Dr)^2 (\delta_k^i \gamma_{jl} - \delta_l^i \gamma_{jk}). \quad (\text{A.4.3c})$$

と

$$R_{ab} = {}^m R_{ab} - n \frac{D_a D_b r}{r}, \quad (\text{A.4.4a})$$

$$R_{ai} = 0, \quad (\text{A.4.4b})$$

$$R_{ij} = \hat{R}_{ij} - \left(\frac{\square r}{r} + (n-1) \frac{(Dr)^2}{r^2} \right) g_{ij}, \quad (\text{A.4.4c})$$

$$R = {}^m R + \frac{\hat{R}}{r^2} - n \left(2 \frac{\square r}{r} + (n-1) \frac{(Dr)^2}{r^2} \right). \quad (\text{A.4.4d})$$

で与えられる。

【公式 A.4.3 ($\square h$ の分解)】

この背景時空での計量の摂動を

$$h_{\mu\nu} = \delta g_{\mu\nu} \quad (\text{A.4.5})$$

とおくとき以下の公式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \square h_b^a &= D^2 h_b^a + n \left(\frac{D^c r}{r} D_c h_b^a - \frac{D^a r D_b r}{r^2} h_b^c - \frac{D_b r D^c r}{r^2} h_c^a \right) \\ &\quad + \frac{1}{r^2} \hat{\Delta} h_b^a - 2 \frac{D_a r}{r} \hat{D}_k h_k^b - 2 \frac{D_b r}{r^3} \gamma^{ij} \hat{D}_i h_j^a \\ &\quad + 2 \frac{D^a r D_b r}{r^2} h_k^k, \end{aligned} \tag{A.4.6a}$$

$$\begin{aligned} \square h_i^a &= 2 \frac{D^b r}{r} \hat{D}_i h_b^a \\ &\quad + \frac{1}{r^2} \hat{\Delta} h_i^a + D^2 h_i^a + (n-2) \frac{D^b r}{r} D_b h_i^a \\ &\quad - \left\{ (n-1) \frac{(Dr)^2}{r^2} + \frac{\square r}{r} \right\} h_i^a - (n+2) \frac{D^a r D^b r}{r^2} h_b^i \\ &\quad - 2 \frac{D^a r}{r} \hat{D}_j h_i^j, \end{aligned} \tag{A.4.6b}$$

$$\tag{A.4.6c}$$

$$\begin{aligned} \square h_a^i &= 2 \frac{D_a r}{r} \gamma^{ik} \hat{D}_k h_a^i \\ &\quad + \frac{1}{r^2} \hat{\Delta} h_a^i + D^2 h_a^i + (n+2) \frac{D^b r}{r} D_b h_a^i \\ &\quad + \left\{ \frac{D^2 r}{r} + (n-1) \frac{(Dr)^2}{r^2} \right\} h_a^i - (n+2) \frac{D_a r D^b r}{r^2} h_b^i \\ &\quad - 2 \frac{D_a r}{r^3} \gamma^{jk} \hat{D}_j h_k^i, \end{aligned} \tag{A.4.6d}$$

$$\tag{A.4.6e}$$

$$\begin{aligned} \square h_j^i &= 2 \frac{D_a r D^b r}{r^2} h_b^a \\ &\quad + 2 \frac{D_a r}{r} \left(\gamma^{ik} \hat{D}_k h_j^a + \hat{D}_j h_a^i \right) \\ &\quad + D^2 h_j^i + \frac{1}{r^2} \hat{\Delta} h_j^i + n \frac{D^a r}{r} D_a h_j^i - 2 \frac{(Dr)^2}{r^2} h_j^i. \end{aligned} \tag{A.4.6f}$$

□

B

厳密解

§B.1

回転球形ブラックホール解

B.1.1 GLPP 解

Ref:

- Gibbons GW, Lü H, Page DN, Pope CN(2004)

GLPP 解の Kerr-Schild 形:

$$ds^2 = d\bar{s}^2 + \frac{2M}{U} k_* \otimes k_*; \quad (\text{B.1.1})$$

$$d\bar{s}^2 = -(1 - \lambda r^2)W dt^2 + \frac{F dr^2}{1 - \lambda r^2} + \sum_{i=1}^{N+\epsilon} \frac{r^2 + a_i^2}{1 + \lambda a_i^2} d\mu_i^2 + \sum_{i=1}^N \frac{r^2 + a_i^2}{1 + \lambda a_i^2} \mu_i^2 d\phi_i^2 \\ + \frac{\lambda}{(1 - \lambda r^2)W} \left(\sum_{i=1}^{N+\epsilon} \frac{r^2 + a_i^2}{1 + \lambda a_i^2} \mu_i d\mu_i \right)^2, \quad (\text{B.1.2})$$

$$k_* = W dt + \frac{F dr}{1 - \lambda r^2} - \sum_{i=1}^N \frac{a_i \mu_i^2}{1 + \lambda a_i^2} d\phi_i, \quad (\text{B.1.3})$$

$$U = r^{\epsilon-2} F \prod_{j=1}^N (r^2 + a_j^2), \quad (\text{B.1.4})$$

$$W = \sum_{i=1}^{N+\epsilon} \frac{\mu_i^2}{1 + \lambda a_i^2}, \quad (\text{B.1.5})$$

$$F = r^2 \sum_{i=1}^{N+\epsilon} \frac{\mu_i^2}{r^2 + a_i^2}. \quad (\text{B.1.6})$$

ここで,

$$D = 2N + 1 + \epsilon; \quad \epsilon = 0, 1, \quad (\text{B.1.7})$$

で, $\epsilon = 1$ のとき, $a_{N+1} = 0$. また, μ_i は

$$\sum_{i=1}^{N+\epsilon} \mu_i^2 = 1 \quad (\text{B.1.8})$$

を満たす. (注: F の定義は, Gibbons-Lu-Page-Pope と少し異なる.)

Boyer-Lindquist 形

Kerr-Schild 形の座標系に対して変換

$$dt' = dt - \frac{2Mr^{2-\epsilon}}{(1 - \lambda r^2)f(r)\Pi'_i(r^2 + a_i^2)}, \quad (\text{B.1.9a})$$

$$d\phi'_i = d\phi_i - \frac{2Ma_i r^{2-\epsilon}}{(r^2 + a_i^2)f(r)\Pi'_j(r^2 + a_j^2)} \quad (\text{B.1.9b})$$

を施す. ここで, $\Pi'_i = \prod_{i=1}^N$ で, $f(r)$ は次式で与えられる r のみの関数.

$$f(r) := 1 - \lambda r^2 - \frac{2Mr^{2-\epsilon}}{\Pi'_i(r^2 + a_i^2)}. \quad (\text{B.1.10})$$

変換後 $t' \rightarrow t, \phi' \rightarrow \phi$ と書き換えると、計量は次の形になる：

$$\begin{aligned}
ds^2 = & -(1 - \lambda r^2)W dt^2 + \sum'_i \frac{r^2 + a_i^2}{1 + \lambda a_i^2} \mu_i^2 d\phi_i^2 \\
& + \frac{2M}{U} \left(W dt - \sum'_i \frac{a_i}{1 + \lambda a_i^2} \mu_i^2 d\phi_i \right)^2 \\
& + \frac{F}{f(r)} dr^2 + \sum'_i \frac{r^2 + a_i^2}{1 + \lambda a_i^2} d\mu_i^2, \\
& + \frac{\lambda}{(1 - \lambda r^2)W} \left(\sum'_i \frac{r^2 + a_i^2}{1 + \lambda a_i^2} \mu_i d\mu_i \right)^2. \tag{B.1.11}
\end{aligned}$$

一様セクター $(t, \phi_1, \dots, \phi_N)$ の計量を $g_{pq} dy^p dy^q$ とおくと、

$$\bar{\Delta} = -\det(g_{pq}) = f(r)W \prod'_i \frac{r^2 + a_i^2}{1 + \lambda a_i^2} \mu_i^2. \tag{B.1.12}$$

よって、ホライズンの位置は

$$f(r) = 0 \tag{B.1.13}$$

の解として決まる。また、体積要素は

$$\sqrt{-g} d^D x = dt dr \frac{F}{\mu_{N+\epsilon}} \left(\prod_{i=1}^N \frac{r^2 + a_i^2}{1 + \lambda a_i^2} \mu_i d\phi_i d\mu_i \right) \left(\frac{1}{r d\mu_{N+\epsilon}} \right)^{1-\epsilon} \tag{B.1.14}$$

次に、

$$k = \xi + c^i \eta_i \tag{B.1.15}$$

に対して、

$$\begin{aligned}
k \cdot k = & \sum'_i \frac{r^2 + a_i^2}{1 + \lambda a_i^2} \mu_i^2 (c^i - \Omega^i)^2 + \frac{2M}{U} \left(\sum'_i \frac{a_i \mu_i^2}{1 + \lambda a_i^2} (c^i - \Omega^i) \right)^2 \\
& - \frac{f(r)W}{X} \tag{B.1.16}
\end{aligned}$$

ここで、

$$X = 1 + \frac{2M}{U} \sum'_i \frac{a_i^2 \mu_i^2}{(r^2 + a_i^2)(1 + \lambda a_i^2)} = \frac{f + \frac{2MW}{U}}{1 - \lambda r^2}, \tag{B.1.17}$$

$$\Omega^i = \frac{2MW}{UX} \frac{a_i}{r^2 + a_i^2}. \tag{B.1.18}$$

これより、ホライズンの null geodesic generator は

$$k = \xi + \Omega_h^i \eta_i, \tag{B.1.19}$$

$$\Omega_h^i = (1 - \lambda r_h^2) \frac{a_i}{r_h^2 + a_i^2}. \tag{B.1.20}$$

また、計量は次のように書き換えられる：

$$\begin{aligned}
ds^2 &= -\frac{\Delta\Sigma^2}{\Gamma}dt^2 + \frac{\Sigma^2}{\Delta}dr^2 \\
&+ \frac{\lambda}{(1-\lambda r^2)W} \left(\sum \frac{r^2 + a_i^2}{1 + \lambda a_i^2} \mu_i d\mu_i \right)^2 + \sum \frac{r^2 + a_i^2}{1 + \lambda a_i^2} d\mu_j^2 \\
&+ \sum' \frac{r^2 + a_i^2}{1 + \lambda a_i^2} \mu_i^2 (d\phi_i - \Omega^i dt)^2 \\
&+ \frac{2M}{U} \left\{ \sum' \frac{a_i \mu_i^2}{1 + \lambda a_i^2} (d\phi_i - \Omega^i dt) \right\}^2. \tag{B.1.21}
\end{aligned}$$

ここで、

$$\Delta := r^2 f(r), \quad \Sigma^2 := r^2 F, \tag{B.1.22a}$$

$$\Gamma := \frac{UX}{W} \frac{r^{6-\epsilon}}{\prod'_i (r^2 + a_i^2)}. \tag{B.1.22b}$$

Γ はホライズン状では定数となる：

$$\Gamma_0 := \Gamma|_{r=r_h} = \frac{2M}{1 - \lambda r_h^2} \frac{r_h^{6-\epsilon}}{\prod'(r_h^2 + a_i^2)}. \tag{B.1.23}$$

したがって、

$$\tilde{\phi}_i = \phi - \Omega_i t, \tag{B.1.24a}$$

$$du_{\pm} = dt \pm \frac{\Gamma_0^{1/2}}{\Delta} dr \tag{B.1.24b}$$

とおくと、座標系 $(u_{\pm}, \tilde{\phi}_i, r, \mu_i)$ は未来（過去）のホライズンで正則な座標系を与える。

計量に現れる諸関数の $r \rightarrow \infty$ での漸近挙動は

$$F \rightarrow 1 - \sum'_i \frac{\mu_i^2 a_i^2}{r^2} + \dots, \tag{B.1.25a}$$

$$U \rightarrow r^{2(N-1)+\epsilon} \left(1 + \sum'_i \frac{(1 - \mu_i^2) a_i^2}{r^2} + \dots \right), \tag{B.1.25b}$$

$$X \rightarrow 1 + \frac{2M}{r^{2N+\epsilon}} \sum'_i \frac{a_i^2 \mu_i^2}{1 + \lambda a_i^2} + \dots, \tag{B.1.25c}$$

$$\Omega^i \rightarrow \frac{2M a_i W}{r^{2N+\epsilon}}. \tag{B.1.25d}$$

これより一般に、Killing ベクトル k のノルムの無限遠での漸近挙動は

$$\begin{aligned}
k \cdot k &= r^2 \left(\sum'_i \frac{\mu_i^2 c_i^2}{1 + \lambda a_i^2} + \lambda W \right) \\
&+ \sum'_i \frac{\mu_i^2 a_i^2 c_i^2}{1 + \lambda a_i^2} - W + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^{2(N-1)+\epsilon}}\right). \tag{B.1.26}
\end{aligned}$$

これより、時空次元 D が奇数で $\lambda = -1/\ell^2 < 0$ のときには、

$$c_i^2 = \frac{1}{\ell^2} \quad (\text{B.1.27})$$

に対して（かつその時のみ） k^2 は無限遠で有界となる。このとき、その漸近値は

$$k^2 \rightarrow -1 \quad (\text{B.1.28})$$

となる。一方、時空次元 D が偶数の時には k^2 の漸近挙動における r^2 の係数が

$$\lambda + \sum_i' \frac{(c_i^2 - \lambda^2 a_i^2) \mu_i^2}{1 + \lambda a_i^2} \quad (\text{B.1.29})$$

となるので、この係数をゼロとすることはできない。しかし、

$$c_i^2 = \lambda^2 a_i^2 \quad (\text{B.1.30})$$

と取れば、 μ_i に依存しなくなる。このとき、

$$k^2 \rightarrow \lambda r^2 + \lambda \sum_i' a_i^2 \mu_i^2 - 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^{2(N-1)+\epsilon}}\right). \quad (\text{B.1.31})$$

B.1.2 単純 GLPP 解

Kerr-Schild 形

一般 GLPP 解で、

$$a_1 = a, \quad a_2 = \cdots = a_{[(D-1)/2]} = 0 \quad (\text{B.1.32})$$

のとき、 $D = n + 4$ として、

$$\begin{aligned} ds^2 = & -\frac{(1 + \lambda a^2 \cos^2 \theta)(1 - \lambda r^2)}{1 + \lambda a^2} dt^2 + \frac{\rho^2 dr^2}{(1 - \lambda r^2)(r^2 + a^2)} \\ & + \frac{\rho^2 d\theta^2}{1 + \lambda a^2 \cos^2 \theta} + \frac{r^2 + a^2}{1 + \lambda a^2} \sin^2 \theta d\phi^2 + r^2 \cos^2 \theta d\Omega_n^2 \\ & + \frac{2M}{r^{n-1} \rho^2} \left(\frac{1 + \lambda a^2 \cos^2 \theta}{1 + \lambda a^2} dt + \frac{\rho^2 dr}{(1 - \lambda r^2)(r^2 + a^2)} - \frac{a \sin^2 \theta}{1 + \lambda a^2} d\phi \right)^2. \end{aligned} \quad (\text{B.1.33})$$

ここで、

$$\rho^2 := r^2 + a^2 \cos^2 \theta. \quad (\text{B.1.34})$$

この計量は、 $a, b = t, \phi, r, \theta$ として、

$$ds^2 = g_{ab}(y) dy^a dy^b + S(y)^2 d\Omega_n^2 \quad (\text{B.1.35})$$

とまとめられる。ここで,

$$S(y) = r \cos(\theta). \quad (\text{B.1.36})$$

また,

$$\det(g_{ab})^{1/2} = (1 + \lambda a^2)^{-1} \rho^2 \sin \theta. \quad (\text{B.1.37})$$

具体的な計量成分は

$$\begin{aligned} g_{tt} &= -(1 - \lambda r^2)\sigma + \frac{2M\sigma^2}{\rho^2 r^{n-1}} \\ &= -\frac{\sigma^2}{\rho^2} \left[\Delta - \frac{a^2 \sin^2 \theta}{1 + \lambda a^2 \cos^2 \theta} (1 - \lambda r^2)^2 \right], \end{aligned} \quad (\text{B.1.38a})$$

$$\begin{aligned} g_{t\phi} &= -\frac{2aM\sigma \sin^2 \theta}{\rho r^{n-1}(1 + \lambda a^2)} \\ &= -\frac{a(1 - \lambda r^2)(r^2 + a^2)\sigma \sin^2 \theta}{(1 + \lambda a^2)\rho^2} \left[1 - \frac{\Delta}{(1 - \lambda r^2)(r^2 + a^2)} \right], \end{aligned} \quad (\text{B.1.38b})$$

$$\begin{aligned} g_{\phi\phi} &= \left(r^2 + a^2 + \frac{2a^2 M \sin^2 \theta}{\rho^2 r^{n-1}} \right) \frac{\sin^2 \theta}{1 + \lambda a^2} \\ &= \frac{(r^2 + a^2)^2 \sin^2 \theta}{(1 + \lambda a^2)^2 \rho^2} \left[1 + \lambda a^2 \cos^2 \theta - \frac{\Delta a^2 \sin^2 \theta}{(r^2 + a^2)^2} \right], \end{aligned} \quad (\text{B.1.38c})$$

$$\begin{aligned} g_{tr} &= \frac{2M\sigma}{r^{n-1}(1 - \lambda r^2)(r^2 + a^2)} \\ &= \sigma \left[1 - \frac{\Delta}{(1 - \lambda r^2)(r^2 + a^2)} \right], \end{aligned} \quad (\text{B.1.38d})$$

$$g_{\phi r} = -\frac{a \sin^2 \theta}{1 + \lambda a^2 \cos^2 \theta} g_{tr}, \quad (\text{B.1.38e})$$

$$\begin{aligned} g_{rr} &= \frac{\rho^2}{(r^2 + a^2)(1 - \lambda r^2)} \left[1 + \frac{2M}{r^{n-1}(r^2 + a^2)(1 - \lambda r^2)} \right] \\ &= \frac{\rho^2}{(1 - \lambda r^2)(r^2 + a^2)} \left[2 - \frac{\Delta}{(1 - \lambda r^2)(r^2 + a^2)} \right], \end{aligned} \quad (\text{B.1.38f})$$

$$g_{\theta\theta} = \frac{\rho^2}{1 + \lambda a^2 \cos^2 \theta}. \quad (\text{B.1.38g})$$

ここで,

$$\sigma := \frac{1 + \lambda a^2 \cos^2 \theta}{1 + \lambda a^2}, \quad (\text{B.1.39a})$$

$$\Delta := (r^2 + a^2)(1 - \lambda r^2) - \frac{2M}{r^{n-1}}. \quad (\text{B.1.39b})$$

また, $g^{\mu\nu}$ は

$$\begin{aligned} g^{tt} &= -\frac{1}{(1-\lambda r^2)\sigma} - \frac{2M}{r^{n-1}\rho^2(1-\lambda r^2)^2} \\ &= -\frac{r^2(2+\lambda a^2) + a^2 + a^2(1+\lambda r^2 + 2\lambda a^2)\cos^2\theta}{(1-\lambda r^2)\rho^2(1+\lambda a^2\cos^2\theta)} + \frac{\Delta}{(1-\lambda r^2)^2\rho^2}, \end{aligned} \quad (\text{B.1.40a})$$

$$\begin{aligned} g^{t\phi} &= -\frac{2aM}{r^{n-1}\rho^2(r^2+a^2)(1-\lambda r^2)} \\ &= -\frac{a}{\rho^2} \left[1 - \frac{\Delta}{(r^2+a^2)(1-\lambda r^2)} \right], \end{aligned} \quad (\text{B.1.40b})$$

$$\begin{aligned} g^{\phi\phi} &= \frac{1+\lambda a^2}{(r^2+a^2)\sin^2\theta} - \frac{2a^2M}{r^{n-1}(r^2+a^2)^2\rho^2} \\ &= \frac{(1+2\lambda a^2)r^2 - a^2 + a^2(2+\lambda a^2 - \lambda r^2)\cos^2\theta}{(r^2+a^2)\rho^2\sin^2\theta} + \frac{a^2\Delta}{(r^2+a^2)^2\rho^2}, \end{aligned} \quad (\text{B.1.40c})$$

$$g^{tr} = \frac{2M}{r^{n-1}\rho^2(1-\lambda r^2)} = \frac{r^2+a^2}{\rho^2} - \frac{\Delta}{\rho^2(1-\lambda r^2)}, \quad (\text{B.1.40d})$$

$$g^{\phi r} = \frac{2aM}{r^{n-1}(r^2+a^2)\rho^2} = \frac{a}{\rho^2} \left(1 - \lambda r^2 - \frac{\Delta}{r^2+a^2} \right), \quad (\text{B.1.40e})$$

$$g^{rr} = \frac{(r^2+a^2)(1-\lambda r^2)}{\rho^2} - \frac{2M}{r^{n-1}\rho^2} = \frac{\Delta}{\rho^2}, \quad (\text{B.1.40f})$$

$$g^{\theta\theta} = \frac{1+\lambda a^2\cos^2\theta}{\rho^2}. \quad (\text{B.1.40g})$$

Boyer-Lindquist 形

Boyer-Lindquist 型座標を

$$dt' = dt - \frac{2M}{r^{n-1}\Delta} \frac{dr}{1-\lambda r^2}, \quad (\text{B.1.41a})$$

$$d\phi' = d\phi - \frac{2M}{r^{n-1}\Delta} \frac{adr}{r^2+a^2} \quad (\text{B.1.41b})$$

により導入し, $dt' \rightarrow dt, d\phi' \rightarrow d\phi$ と置くと, 計量は

$$g_{rr} = \frac{\rho^2}{\Delta}, \quad (\text{B.1.42a})$$

$$g_{\theta\theta} = \frac{\rho^2}{X}, \quad (\text{B.1.42b})$$

$$g_{tt} = \frac{X}{C^2 \rho^2} \left\{ \frac{2M}{r^{n-1}} X - C(1 - \lambda r^2) \rho^2 \right\}, \quad (\text{B.1.42c})$$

$$g_{t\phi} = -\frac{2aMX}{C^2 \rho^2 r^{n-1}} \sin^2 \theta, \quad (\text{B.1.42d})$$

$$g_{\phi\phi} = \frac{\sin^2 \theta}{C^2 \rho^2} \left\{ C(r^2 + a^2) \rho^2 + \frac{2a^2 M}{r^{n-1}} \sin^2 \theta \right\}. \quad (\text{B.1.42e})$$

ここで,

$$C = 1 + \lambda a^2, \quad X = 1 + \lambda a^2 \cos^2 \theta. \quad (\text{B.1.43})$$

すなわち,

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{X}{C^2 \rho^2} \left[\frac{2M}{r^{n-1}} X - C(1 - \lambda r^2) \rho^2 \right] dt^2 - \frac{4aMX \sin^2 \theta}{C^2 \rho^2 r^{n-1}} dt d\phi \\ &\quad + \frac{\sin^2 \theta}{C^2 \rho^2} \left[C(r^2 + a^2) \rho^2 + \frac{2a^2 M}{r^{n-1}} \sin^2 \theta \right] d\phi^2 \\ &\quad + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \frac{\rho^2}{X} d\theta^2 + r^2 \cos^2 \theta d\Omega_n^2. \end{aligned} \quad (\text{B.1.44})$$

さらに, ϕ 座標を

$$\phi + \lambda a t \rightarrow \phi \quad (\text{B.1.45})$$

と変換すると, 計量は次のように書き換えられる.

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\frac{\Delta}{\rho^2} \left(dt - \frac{a}{C} \sin^2 \theta d\phi \right)^2 + \frac{X \sin^2 \theta}{\rho^2} \left(a dt - \frac{r^2 + a^2}{C} d\phi \right)^2 \\ &\quad + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \frac{\rho^2}{X} d\theta^2 + r^2 \cos^2 \theta d\Omega_n^2 \\ &= -\frac{\Delta - a^2 X \sin^2 \theta}{\rho^2} dt^2 - \frac{2a \sin^2 \theta}{C \rho^2} \left\{ \lambda \rho^2 (r^2 + a^2) + \frac{2M}{r^{n-1}} \right\} dt d\phi \\ &\quad + \frac{\sin^2 \theta}{C^2 \rho^2} \left[C(r^2 + a^2) \rho^2 + \frac{2a^2 M}{r^{n-1}} \sin^2 \theta \right] d\phi^2 \\ &\quad + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \frac{\rho^2}{X} d\theta^2 + r^2 \cos^2 \theta d\Omega_n^2. \end{aligned} \quad (\text{B.1.46})$$

この最後の座標系において

$$\xi = \partial_t, \quad \eta = \partial_\phi \quad (\text{B.1.47})$$

とおくと, $r \rightarrow \infty$ ($\Lambda < 0$ で)

$$g(\xi, \xi) \rightarrow \lambda(r^2 + a^2). \quad (\text{B.1.48})$$

これに対して, 一つ前の座標系において $g(\partial_t, \partial_t)$ の $r \rightarrow \infty$ での極限は θ に依存する. このような角度依存性がなくなるのは, ξ ないし $\xi + 2\lambda a\eta$ のみ.

共通の性質

Horizon ホライズンは,

$$g(\xi, \xi)g(\eta, \eta) - g(\xi, \eta)^2 = -\frac{1}{C^2}\Delta X \sin^2 \theta \quad (\text{B.1.49})$$

より,

$$\Delta = 0. \quad (\text{B.1.50})$$

未来のホライズン近傍で正則な座標は

$$du_+ = dt + \frac{r^2 + a^2}{\Delta} dr, \quad d\phi_+ = d\phi + \frac{aC}{\Delta} dr. \quad (\text{B.1.51})$$

この座標を用いると, 計量は

$$\begin{aligned} ds^2 = & -\frac{\Delta}{\rho^2} \left(du_+ - \frac{a}{C} \sin^2 \theta d\phi_+ \right)^2 + 2dr \left(du_+ - \frac{a}{C} \sin^2 \theta d\phi_+ \right) \\ & + \frac{X \sin^2 \theta}{\rho^2} \left(adu_+ - \frac{r^2 + a^2}{C} d\phi_+ \right)^2 \\ & + \frac{\rho^2}{X} d\theta^2 + r^2 \cos^2 \theta d\Omega_n^2. \end{aligned} \quad (\text{B.1.52})$$

これより, ホライズンの面積は

$$A_h = \Omega_{n+2} r_h^n \frac{r_h^2 + a^2}{C} \quad (\text{B.1.53})$$

ここで, Ω_{n+2} は $n+2$ 次元単位球面の面積.

角速度と表面重力 一般に,

$$k = \xi + A\eta \quad (\text{B.1.54})$$

に対して,

$$g(k, k) = -\frac{(C - aA \sin^2 \theta)^2}{C^2 \rho^2} \Delta + \frac{X \sin^2 \theta}{C^2 \rho^2} \{aC - A(r^2 + a^2)\}^2. \quad (\text{B.1.55})$$

これより, ブラックホールの角速度は

$$\Omega_h = \frac{aC}{r_h^2 + a^2}. \quad (\text{B.1.56})$$

また,

$$\nabla_k k = -\frac{1}{2}\nabla g(k, k) \quad (\text{B.1.57})$$

より, $r \rightarrow r_h$ で

$$\nabla_k k \rightarrow \frac{\rho^2 \Delta'}{2(r_h^2 + a^2)^2} \nabla r. \quad (\text{B.1.58})$$

一方,

$$du_+(k) = 1, \quad du_+(\nabla r) = \frac{r^2 + a^2}{\rho^2} \quad (\text{B.1.59})$$

より, $r \rightarrow r_h$ で

$$\nabla r \rightarrow \frac{r_h^2 + a^2}{\rho^2} k. \quad (\text{B.1.60})$$

よって,

$$\nabla_k k \rightarrow \frac{\Delta'}{2(r_h^2 + a^2)} k. \quad (\text{B.1.61})$$

すなわち, 表面重力は

$$\kappa = \frac{\Delta'}{2(r_h^2 + a^2)} = \frac{-3\lambda r_h^4 + (1 - \lambda a^2)r_h^2 - a^2}{2(r_h^2 + a^2)}. \quad (\text{B.1.62})$$

特異点 見かけ上,

$$-g = \frac{\rho^4}{C^2} \sin^2 \theta (r^2 \cos^2 \theta)^n \quad (\text{B.1.63})$$

も考慮すると, 計量は

$$\Delta = 0, \quad \rho^2 = 0, \quad r = 0 \quad (\text{B.1.64})$$

で特異となる. ここで, $\Delta = 0$ はホライズン. また, $r = 0$ は $n = 1 (D = 5)$ のとき, $\rho^2 \neq 0$ なら座標特異点, $n > 1$ では曲率特異点となる (n が奇数のとき, 計量は r^2 の有理関数となるが, $-g \geq 0$ を要求すると, $r^2 \geq 0$ の制限が得られる). よって, 特異点は $D = 5$ のとき,

$$\mathcal{S}_{\text{sing}}^{D=5} = \{\rho^2 = 0\} \cup \{r = \cos \theta = 0\}, \quad (\text{B.1.65})$$

$D > 5$ のとき,

$$\mathcal{S}_{\text{sing}}^{D \geq 6} = \{r = 0\} \quad (\text{B.1.66})$$

AdS ブラックホール

以下,

$$\lambda = -\frac{1}{\ell^2} \quad (\text{B.1.67})$$

とおく.

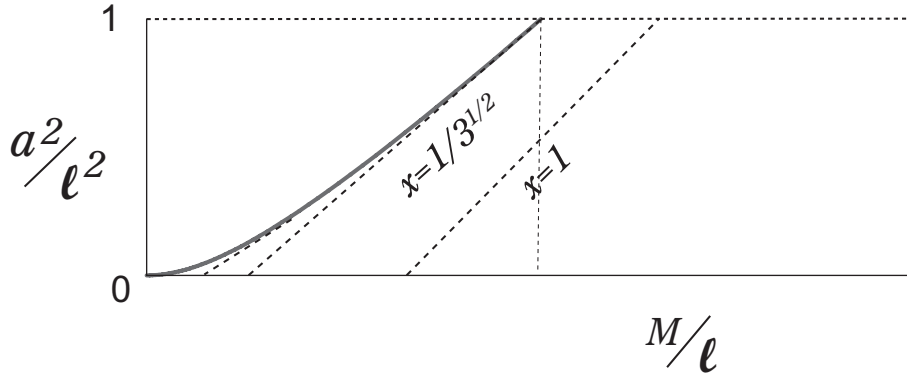


図 B.1: 4次元 AdS-Kerr がホライズンをもつ条件

Horizon radius Δ の振る舞いは n により大きく代わる.

1. $n = 0$ ($D = 4$) の場合 :

この場合, 固定した a/l の値に対し, M/l がある臨界値を超えるとホライズンが存在する. 臨界値は $\Delta = 0$ が重解を持つ条件

$$\Delta(r_h) = 0, \quad \Delta'(r_h) = 0 \quad (\text{B.1.68})$$

より, $x = r_h/l$ によるパラメーター表示で

$$\frac{a^2}{\ell^2} = \frac{x^2(1+3x^2)}{1-x^2}, \quad \frac{M}{\ell} = \frac{x(1+x^2)^2}{1-x^2}. \quad (\text{B.1.69})$$

この臨界値は, 図の実線に対応し, この線の下かつ $a^2/\ell^2 < 1$ でホライズンが存在 ($\Delta = 0$ が 2 つの実根 $r = r_+, r_-$ をもち, $r_h = r_+$). この図で, $x = r_h/l$ の等高線は直線群

$$\frac{M}{\ell} = \frac{x(1+x^2)}{2} + \frac{1+x^2}{2x} \frac{a^2}{\ell^2} \quad (\text{B.1.70})$$

となり, 実線はその包絡線となっている. この実線と $a/\ell = 1$ との交わりは

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad M/\ell = \frac{8}{3\sqrt{3}} \quad (\text{B.1.71})$$

に対応. 実線上で x は $1/\sqrt{3}$ からゼロまで単調に変化.

§B.2

ブラックリング解

B.2.1 Emparan-Reall 解

Reference

- Emparan R, Reall HS (2002) PRD65:084025
”Generalized Weyl solutions”
- Emparan R, Reall HS (2002) PRL88:101101
”A rotating black ring in five dimensions”
- Emparan R, Reall HS (2006) CQG23: R169
”Black Rings”
- Emparan R, Reall HS (2008) LLR11: 6
”Black Holes in Higher Dimensions”

計量

計量の一般型:

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & -\frac{F(y)}{F(x)} \left(dt - CR \frac{1+y}{F(y)} d\psi \right)^2 \\
 & + \frac{R^2}{(x-y)^2} F(x) \left[-\frac{G(y)}{F(y)} d\psi^2 - \frac{dy^2}{G(y)} + \frac{dx^2}{G(x)} + \frac{G(x)}{F(x)} d\phi^2 \right].
 \end{aligned}
 \tag{B.2.1}$$

ここで, 一般に

$$F(\xi) = 1 + \lambda\xi, \tag{B.2.2a}$$

$$G(\xi) = g_0 + g_1\xi + g_2\xi^2 + g_3\xi^3, \tag{B.2.2b}$$

$$C = \pm \frac{\sqrt{-\lambda^4 G(-1/\lambda)}}{1 - \lambda} \tag{B.2.2c}$$

のとき、この計量は真空 Einstein 方程式の解となる。ただし、 $G(\xi)$ の係数のうち 2 個は ξ の線形変換、パラメータの線形変換、座標の線形変換により適当な値に固定できる。

Kretschmann 不変量は

$$R_{abcd}R^{abcd} = \frac{3(x-y)^4 P(x,y)}{2R^4 F(x)^6}. \quad (\text{B.2.3})$$

ここで、 P は次の多項式：

$$\begin{aligned} P = & (8\lambda^4 g_3^2 x^4 + 32\lambda^3 g_3^2 x^3 + 32\lambda g_3^2 x + 48\lambda^2 g_3^2 x^2 + 8g_3^2) y^2 \\ & + \{-4\lambda^4 g_3^2 x^5 + 4\lambda^3 g_3(-4g_3 + g_2\lambda)x^4 \\ & - 4\lambda^2 g_3(9g_3 + g_1\lambda^2 - 6g_2\lambda)x^3 - 4g_3\lambda(10g_3 + 3g_0\lambda^3 - 9g_2\lambda)x^2 \\ & - 4g_3(4g_3 - 4g_2\lambda - 3g_1\lambda^2 + 6g_0\lambda^3)x - 4g_3\lambda(3g_0\lambda - 2g_1)\} y \\ & + 3\lambda^4 g_3^2 x^6 + 14\lambda^3 g_3^2 x^5 + \lambda^2 g_3(27g_3 + 2g_1\lambda^2)x^4 \\ & + 4g_3\lambda(2g_3 + 2g_0\lambda^3 - g_1\lambda^2 + 4g_2\lambda)x^3 \\ & + (8g_3^2 - 16\lambda g_2 g_3 - 16\lambda^3 g_2 g_1 + 16\lambda^2 g_2^2 + 3\lambda^4 g_1^2 + 4g_0\lambda^4 g_2 + 18\lambda^2 g_3 g_1)x^2 \\ & + 2\lambda(8g_0 g_1 \lambda^3 - 5\lambda^2 g_1^2 - 12g_0 g_2 \lambda^2 + 12\lambda g_0 g_3 + 8\lambda g_2 g_1 - 4g_1 g_3)x \\ & + \lambda^2(16g_0^2 \lambda^2 - 16g_0 g_1 \lambda + 3g_1^2 + 4g_0 g_2). \end{aligned} \quad (\text{B.2.4})$$

ただし、

$$P(-1/\lambda, y) = 16\lambda^4 G(-1/\lambda)^2. \quad (\text{B.2.5})$$

特に、 $x = -1/\lambda$ で Kretschmann 不変量³が有界であるためには、 $G(\xi) = cF(\xi)^2$ となることが必要十分であることが示される。よって、この場合を除くと、 $\lambda \neq 0$ なら、 $x = -1/\lambda$ は曲率特異点。

また、Killing 軌道に誘導される計量 $h_{ij} := g(\xi_i, \xi_j)$ ($\xi_0 = \partial_t, \xi_1 = \partial_\psi, \xi_2 = \partial_\phi$) は、

$$\partial_t \cdot \partial_t = -\frac{F(y)}{F(x)}, \quad (\text{B.2.6a})$$

$$\partial_t \cdot \partial_\psi = C \frac{1+y}{RF(x)}, \quad (\text{B.2.6b})$$

$$\partial_t \cdot \partial_\phi = 0, \quad (\text{B.2.6c})$$

$$\partial_\psi \cdot \partial_\psi = \frac{R^2 Q(x, y)}{(1-\lambda)^2 (x-y)^2 F(x)}, \quad (\text{B.2.6d})$$

$$\partial_\psi \cdot \partial_\phi = 0, \quad (\text{B.2.6e})$$

$$\partial_\phi \cdot \partial_\phi = \frac{R^2 G(x)}{(x-y)^2}. \quad (\text{B.2.6f})$$

ここで, Q は

$$\begin{aligned}
Q = & (\lambda^3 g_0 - \lambda^2 g_1 + \lambda g_2 - g_3) y^3 \\
& + \{(2\lambda^2 g_3 - \lambda^3 g_3 - \lambda g_3) x^2 \\
& + (-2\lambda^3 g_0 + (2g_1 - 2g_3)\lambda^2 + (-2g_2 + 4g_3)\lambda) x \\
& + 2\lambda^3 g_0 + (-2g_1 - g_0)\lambda^2 + (2g_2 - g_3 + g_1)\lambda - g_2\} y^2 \\
& + \{((-g_2 + g_0)\lambda^3 + (g_3 + 2g_2 - g_1)\lambda^2 - 2\lambda g_3) x^2 \\
& + (-4\lambda^3 g_0 + (-2g_2 + 4g_1 + 2g_0)\lambda^2 + (-2g_1 + 2g_3)\lambda) x \\
& + \lambda^3 g_0 + (-2g_0 - g_1)\lambda^2 + (2g_1 + g_0)\lambda - g_1\} y \\
& + ((-g_1 + 2g_0)\lambda^3 + (g_2 - g_0)\lambda^2 - \lambda g_3) x^2 \\
& + (4\lambda^2 g_0 - 2\lambda g_0 - 2\lambda^3 g_0) x + 2\lambda g_0 - \lambda^2 g_0 - g_0.
\end{aligned} \tag{B.2.7}$$

また, その行列式は

$$\Delta := \det h = \frac{R^4 G(x) G(y)}{(x - y)^4}. \tag{B.2.8}$$

これより, 特に, CTCが存在しないための必要条件は $G(x) > 0$. このとき, 計量の各 (直交) 成分の符号は

$F(x)$	$F(y)$	$[t]$	$[\psi]$	$[\phi]$	$[y]$	$[x]$	$G(y)$	
+	+	-	+	+	+	+	-	○
		-	-	+	-	+	+	×
+	-	+	-	+	+	+	-	○
		+	+	+	-	+	+	○
-	+	+	-	+	-	-	-	×
		+	+	+	+	-	+	○
-	-	-	+	+	-	-	-	×
		-	-	+	+	-	+	×

以上より, 漸近的に平坦な領域があるとする, 無限遠では,

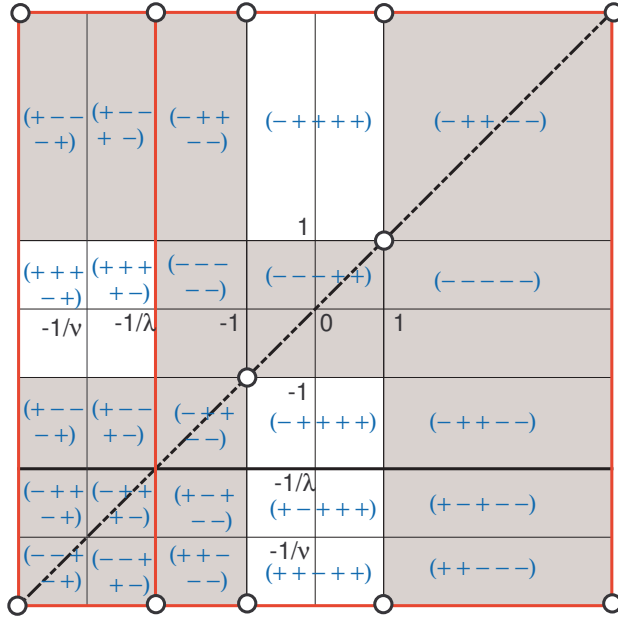
$$x = y, \quad G(x) = G(y) = 0, \quad F(x) = F(y) > 0. \tag{B.2.9}$$

よって, 漸近的に平坦な DOC では, CTC が無いとする

$$F(x) > 0, \quad G(x) > 0, \quad G(y) < 0 \tag{B.2.10}$$

で無限遠の近傍では $F(y) > 0$. また, $F(y) < 0$ の領域はエルゴ領域で, ホライズンでは $G(y) = 0$.

Black Ring: x-y plane
($0 < \lambda < \nu < 1$)



正則解 $G(\xi)$ のパラメータを

$$G(\xi) = (1 - \xi^2)(1 + \nu\xi), \tag{B.2.11}$$

($1 > \nu > 0$) と選ぶと,

$$C(\nu, \lambda) = \sqrt{\lambda(\lambda - \nu) \frac{1 + \lambda}{1 - \lambda}}. \tag{B.2.12}$$

このとき、正質量の漸近的平坦な領域およびそれに接する物理領域は,

$$-1 \leq x \leq 1, \quad -\infty < y \leq -1. \tag{B.2.13}$$

パラメータ λ, ν の変域は

$$0 < \nu \leq \lambda < 1. \tag{B.2.14}$$

このときに、計量が Lorentz 型となる領域は図のようになる。

Conical singularity: 2次元面 $x = -1$ および $y = -1$ で conical singularity を持たない条件は

$$\Delta\psi = \Delta\phi = 2\pi \frac{\sqrt{1 - \lambda}}{1 - \nu}. \tag{B.2.15}$$

さらに、2次元面 $x = 1$ で conical singularity を持たない条件は,

$$\lambda = \frac{2\nu}{1 + \nu^2} \tag{B.2.16}$$

特殊な場合：

- 静的ブラックリング解： $\lambda = \nu$.
- 正則回転ブラックリング解 (ER 解)： $\lambda = \frac{2\nu}{1+\nu^2}$.
- 特殊 MP 解：次式で定義される m, a を一定に保って， $\lambda, \nu \rightarrow 1, R \rightarrow 0$ の極限をとる.

$$m = \frac{2R^2}{1-\nu}, \quad a^2 = 2R^2 \frac{\lambda - \nu}{(1-\nu)^2} \quad (\text{B.2.17})$$

回転正則ブラックリング解

物理パラメーター： 質量 M , 角運動量 J , ホライズン面積 \mathcal{A}_H , 表面重力 κ は [11]

$$M = \frac{3\pi R^2}{4G} \frac{\lambda}{1-\nu}, \quad (\text{B.2.18a})$$

$$J = \frac{\pi R^3}{2G} \frac{\sqrt{\lambda(\lambda - \nu)(1 + \lambda)}}{(1 - \nu)^2}, \quad (\text{B.2.18b})$$

$$\mathcal{A}_H = 8\pi^2 R^3 \frac{\nu^{3/2} \sqrt{\lambda(1 - \lambda^2)}}{(1 - \nu)^2(1 + \nu)}, \quad (\text{B.2.18c})$$

$$\kappa = 2\pi T_H = \frac{1 + \nu}{2R} \sqrt{\frac{1 - \lambda}{\lambda\nu(1 + \lambda)}}. \quad (\text{B.2.18d})$$

M, J, \mathcal{A}_H から無次元量

$$j^2 := \frac{27\pi J^2}{32G M^3}, \quad a_H := \frac{3\sqrt{3}}{16\sqrt{\pi}} \frac{\mathcal{A}_H}{(GM)^{3/2}} \quad (\text{B.2.19})$$

を定義すると,

$$a_H = 2\sqrt{\nu(1 - \nu)}, \quad j^2 = \frac{(1 + \nu)^3}{8\nu}. \quad (\text{B.2.20})$$

Kretchman 不変量

$$R_{abcd}R^{abcd} = \frac{6\nu^2(1 + \nu^2)^2(x - y)^4 P}{R^4(1 + \nu^2 + 2\nu x)^6}, \quad (\text{B.2.21})$$

$$\begin{aligned}
P := & \{32\nu^4 x^4 + 64\nu^3(1 + \nu^2)x^3 + 48\nu^2(1 + \nu^2)^2 x^2 \\
& + 16\nu(1 + \nu^2)^3 x + 2(1 + \nu^2)^4\} y^2 \\
& + \{-16\nu^4 x^5 - 16\nu^3(2\nu^2 + 1)x^4 - 4\nu^2(-3 + 9\nu^4 + 2\nu^2)x^3 \\
& - 4\nu(5\nu^6 + 6\nu^4 - 4 - 15\nu^2)x^2 - 4(1 + \nu^2)(\nu^6 + 4\nu^4 - 10\nu^2 - 1)x \\
& - 4\nu(\nu^2 - 2)(1 + \nu^2)^2\} y \\
& + 12\nu^4 x^6 + 28\nu^3(1 + \nu^2)x^5 + \nu^2(46\nu^2 + 27\nu^4 + 27)x^4 \\
& + 4\nu(5\nu^2 + \nu^6 + 5 + 9\nu^4)x^3 + (10 + 2\nu^8 + 14\nu^2 - 18\nu^6 + 12\nu^4)x^2 \\
& + 4\nu(3 + 6\nu^2 - 12\nu^4 + \nu^6)x - 4 - 30\nu^4 + 3\nu^6 + 27\nu^2.
\end{aligned} \tag{B.2.22}$$

MP 極限

座標変換

$$x = -1 + 2\delta \frac{R^2 \cos^2 \theta}{r^2 - m\delta \cos^2 \theta}, \tag{B.2.23a}$$

$$y = -1 - 2\delta \frac{R^2 \sin^2 \theta}{r^2 - m\delta \cos^2 \theta}, \tag{B.2.23b}$$

$$(\psi, \phi) \rightarrow \frac{\sqrt{2m\delta}}{2R} (\psi, \phi), \tag{B.2.23c}$$

$$m = \frac{2R^2}{1 - \nu}, \quad a^2 = 2R^2 \frac{\lambda - \nu}{(1 - \nu)^2}, \quad \delta = 1 - \frac{a^2}{m} \tag{B.2.23d}$$

の後, m, a を一定にして, $R \rightarrow 0$ の極限を取ると, 単純回転 MP 解

$$\begin{aligned}
ds^2 = & - \left(1 - \frac{m}{\Sigma}\right) \left(dt - \frac{ma \sin \theta}{\Sigma - m} d\psi\right)^2 + \frac{\Delta \sin^2 \theta}{1 - m/\Sigma} d\psi^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \\
& + \Sigma \left(\frac{dr^2}{\Delta} + d\theta^2\right),
\end{aligned} \tag{B.2.24}$$

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \tag{B.2.25}$$

$$\Delta = r^2 + a^2 - m \tag{B.2.26}$$

を得る.

B.2.2 Pomeransky-Senkov 解

Ref: Pomeransky AA, Sen'kov RA: "Black ring with two angular momenta", hep-th/0612005.

計量:

$$ds^2 = -\frac{H(y,x)}{H(x,y)}(dt + \Omega)^2 - \frac{F(x,y)}{H(y,x)}d\phi^2 - 2\frac{J(x,y)}{H(y,x)}d\phi d\psi \\ + \frac{F(y,x)}{H(y,x)}d\psi^2 + \frac{2k^2 H(x,y)}{(1-\sigma)^2(x-y)^2} \left(\frac{dx^2}{G(x)} - \frac{dy^2}{G(y)} \right). \quad (\text{B.2.27})$$

ここで,

$$G(x) = (1-x^2)(1+\nu x + \sigma x^2), \quad (\text{B.2.28a})$$

$$H(x,y) = 1 + \nu^2 - \sigma^2 + 2\nu\sigma(1-x^2)y + 2\nu x(1-\sigma^2 y^2) \\ + \sigma(1-\nu^2 - \sigma^2)x^2 y^2, \quad (\text{B.2.28b})$$

$$J(x,y) = \frac{2k^2 \nu \sqrt{\sigma}(1-x^2)(1-y^2)}{(1-\sigma)^2(x-y)} \{1 + \nu^2 - \sigma^2 \\ + 2\nu\sigma(x+y) - \sigma(1-\nu^2 - \sigma^2)xy\}, \quad (\text{B.2.28c})$$

$$F(x,y) = \frac{2k^2}{(1-\sigma)^2(x-y)^2} \left[G(x)(1-y^2) \{ ((1-\sigma)^2 - \nu^2)(1+\sigma) \\ + \nu(1+2\sigma - 3\sigma^2 - \nu^2)y \} + G(y) \{ 2\nu^2 + \nu((1-\sigma)^2 + \nu^2)x \\ + (1+\sigma)((1-\sigma)^2 - \nu^2)x^2 + \nu(1-\nu^2 - 3\sigma^2 + 2\sigma^3)x^3 \\ + \sigma(1-\sigma)(1-\nu^2 - \sigma^2)x^4 \} \right], \quad (\text{B.2.28d})$$

$$\Omega = -\frac{2k\nu\sqrt{(1+\sigma)^2 - \nu^2}}{H(y,x)} \left[\sqrt{\sigma}(1-x^2)y d\psi + \frac{1+y}{1-\nu+\sigma} \right. \\ \left. \times \{ 1 + \nu - \sigma + \sigma(1-\nu-\sigma)x^2 y + 2\sigma x(1-y) \} d\phi \right]. \quad (\text{B.2.28e})$$

計量を

$$ds^2 = \Phi_{ab}(x,y) dz^a dz^b + k^2(x,y) \left(\frac{dx^2}{G(x)} - \frac{dy^2}{G(y)} \right) \quad (\text{B.2.29})$$

と表記するとき $((z^a) = (t, \phi, \psi))$,

$$\rho^2 := \det(\Phi_{ab}) = -\frac{4k^4 G(x)G(y)}{(1-\sigma)^2(y-x)^4}, \quad (\text{B.2.30})$$

$$-g = \frac{16k^8 H(x,y)^2}{(1-\sigma)^6(y-x)^8}. \quad (\text{B.2.31})$$

B.2.3 双極子型ブラックリング解

Ref: Emparan R (2004)[10]

作用積分: Einstein-Maxwell-Dilaton 系とみたとき,

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^5x \sqrt{-g} \left(R - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - \frac{1}{2}e^{-\alpha\phi} |\mathcal{F}_{[2]}|^2 \right). \quad (\text{B.2.32})$$

変換

$$\tilde{\phi} = -\phi, \quad \mathcal{H}_{[3]} = dB_{[2]} = e^{-\alpha\phi} * \mathcal{F}_{[2]} \quad (\text{B.2.33})$$

により,

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^5x \sqrt{-g} \left(R - \frac{1}{2} (\nabla\tilde{\phi})^2 - \frac{1}{2} e^{-\alpha\phi} |\mathcal{H}_{[3]}|^2 \right). \quad (\text{B.2.34})$$

以下, N を

$$\alpha^2 = \frac{4}{N} - \frac{4}{3}, \quad (0 < N \leq 3) \quad (\text{B.2.35})$$

により定義する.

計量の一般型:

$$\begin{aligned} ds^2 = & -\frac{F(y)}{F(x)} \left(\frac{H(x)}{H(y)} \right)^{N/3} \left(dt + C(\nu, \lambda) R \frac{1+y}{F(y)} d\psi \right)^2 \\ & + \frac{R^2}{(x-y)^2} F(x) (H(x)H(y)^2)^{N/3} \\ & \times \left[-\frac{G(y)}{F(y)H(y)^N} d\psi^2 - \frac{dy^2}{G(y)} + \frac{dx^2}{G(x)} + \frac{G(x)}{F(x)H(x)^N} d\phi^2 \right] \end{aligned} \quad (\text{B.2.36})$$

ここで,

$$F(\xi) = 1 + \lambda\xi, \quad G(\xi) = (1 - \xi^2)(1 + \nu\xi), \quad H(\xi) = 1 - \mu\xi \quad (\text{B.2.37a})$$

$$C(\nu, \lambda) = \sqrt{\lambda(\lambda - \nu) \frac{1 + \lambda}{1 - \lambda}}. \quad (\text{B.2.37b})$$

変数 x, y の変域は

$$-1 \leq x \leq 1, \quad -\infty < y \leq -1. \quad (\text{B.2.38})$$

パラメータ λ, ν, μ の変域は

$$0 < \nu \leq \lambda < 1, \quad 0 \leq \mu < 1. \quad (\text{B.2.39})$$

Conical singularity: 2次元面 $x = -1$ および $y = -1$ で conical singularity を持たない条件は

$$\Delta\psi = \Delta\phi = 4\pi \frac{H(-1)^{N/2} \sqrt{F(-1)}}{|G'(-1)|} = 2\pi \frac{(1 + \mu)^{N/2} \sqrt{1 - \lambda}}{1 - \nu}. \quad (\text{B.2.40})$$

さらに, 2次元面 $x = 1$ で conical singularity を持たない条件は,

$$\Delta\phi = 4\pi \frac{H(1)^{N/2} \sqrt{F(1)}}{|G'(1)|} \Leftrightarrow \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda} \left(\frac{1 + \mu}{1 - \mu} \right)^N = \left(\frac{1 - \nu}{1 + \nu} \right)^2. \quad (\text{B.2.41})$$

物理パラメーター

$$M = \frac{3\pi R^2 (1+\mu)^N}{4G} \left(\lambda + \frac{N}{3} \frac{\mu(1-\lambda)}{1+\mu} \right), \quad (\text{B.2.42a})$$

$$J = \frac{\pi R^3 (1+\mu)^{3N/2} \sqrt{\lambda(\lambda-\nu)(1+\lambda)}}{2G (1-\nu)^2}, \quad (\text{B.2.42b})$$

$$\mathcal{A}_H = 8\pi^2 R^3 \frac{(1+\mu)^N \nu^{(3-N)/2} (\mu+\nu)^{N/2} \sqrt{\lambda(1-\lambda^2)}}{(1-\nu)^2(1+\nu)}, \quad (\text{B.2.42c})$$

$$T_H = \frac{1}{4\pi R} \frac{\nu^{(N-1)/2} (1+\nu)}{(\mu+\nu)^{N/2}} \sqrt{\frac{1-\lambda}{\lambda(1+\lambda)}}, \quad (\text{B.2.42d})$$

$$\Omega_H = \frac{1}{R(1+\mu)^{N/2}} \sqrt{\frac{\lambda-\nu}{\lambda(1+\lambda)}}, \quad (\text{B.2.42e})$$

$$\mathcal{Q} = R\sqrt{N} \frac{(1+\mu)^{(N-1)/2} \sqrt{\mu(\mu+\nu)(1-\lambda)}}{(1-\nu)\sqrt{1-\mu}}, \quad (\text{B.2.42f})$$

$$\Phi_H = \frac{\pi R\sqrt{N} (1+\mu)^{(N-1)/2} \sqrt{\mu(1-\mu)(1-\lambda)}}{2G \sqrt{\mu+\nu}}. \quad (\text{B.2.42g})$$

ここで,

$$\mathcal{Q} := \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} e^{-\alpha\tilde{\phi}} * \mathcal{H}, \quad (\text{B.2.43})$$

$$\Phi_H := \frac{\pi}{2G} [B_{t\tilde{\psi}}(x=y=-1) - B_{t\tilde{\psi}}(y=-1/\nu)], \quad \tilde{\psi} := \frac{2\pi}{\Delta\psi} \psi \quad (\text{B.2.44})$$

熱力学関係式： Smarr 関係式は

$$M = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{4G} \mathcal{A}_H T_H + \Omega_H J \right) + \frac{1}{2} \mathcal{Q} \Phi_H. \quad (\text{B.2.45})$$

微分関係式は

$$dM = \frac{1}{4G} T_H d\mathcal{A}_H + \Omega_H dJ + \Phi_H d\mathcal{Q}. \quad (\text{B.2.46})$$

C

3次元多様体

§C.1

2次元面の一意化定理

【命題 C.1.1 (2次元曲面の位相)】 閉曲面は種数 g ないし Euler 数 χ で分類される (向き付け可能なとき, $\chi = 2 - 2g$)

- $\chi = 2$: 球面 S^2 .
- $\chi = 0$: トーラス $T^2 = S^1 \times S^1$.
- $\chi < 0$: $\sharp^p T^2, 4$

□

【定理 C.1.2 (一意化定理)】 任意の向き付け可能なコンパクト面は, 定曲率曲面を被覆面として持つ: $F = M/\Gamma$.

- トーラス: $T^2 = E^2/\mathbb{Z}^2$.
- $g \geq 2$ の面: $F_g = H^2/\Gamma$.

□

【定理 C.1.3 (Gauss-Bonnet の定理)】 一様被覆空間のタイプは位相のみで決まる:

$$\int_{\mathcal{F}} d^2x \sqrt{g} R_s(g) = 4\pi\chi(\mathcal{F}). \quad (\text{C.1.1})$$

□

§C.2

光的座標系

【定義 C.2.1 (Future null coordinates)】

1. $s + 2$ 次元時空 M において, \mathcal{T} を余次元 2 の空間的部分コンパクト閉多様体, l と k を \mathcal{T} 上の未来向きの光的法ベクトル場の組で条件 $l \cdot k = -1$ を満たすものとする.
2. \mathcal{T} の各点を始点とし, $-k$ を \mathcal{T} 上での接ベクトルとする光的測地線全体が張る光的超曲面を \mathcal{N} とする. このとき, 各測地線の接ベクトルを同じ n で表し, \mathcal{T} を始点とするそのアフィンパラメータを u とおくと, $\nabla_n n = 0$, $\mathcal{L}_n u = 1$ で, $u = \text{const}$ 面 $\mathcal{T}(u)$ は $u = 0$ 近傍で $\mathcal{T}(0) = \mathcal{T}$ と微分同相となり, u によらず n と直交する.
3. (z^1, \dots, z^{D-2}) を \mathcal{T} の座標系として, それを条件 $\mathcal{L}_n z^i = 0$ により \mathcal{N} 全体に拡張する. このとき, $u = 0$ 近傍で (u, z^i) は \mathcal{N} の正則な座標系を与える.
4. 各 $\mathcal{T}(u)$ 上で, 未来向きの光的法ベクトル場 l を規格化条件 $l \cdot n = 1$ を満たすようにとり (一意的), $\mathcal{T}(u)$ 上の各点において l に接する未来向きの光的測地線全体の張る光的超曲面を $\mathcal{S}(u)$ と表す. $\mathcal{S}(u) \cap \mathcal{N} = \mathcal{T}(u)$ である. $\mathcal{S}(u)$ の光的測地線の接ベクトルを l で表す.
5. \mathcal{N} 上の座標系 (u, z^i) を $\mathcal{L}_l u = 0$, $\mathcal{L}_l z^i = 0$ により, 各 $\mathcal{S}(u)$ 面に拡張する. これらに l のアフィンパラメータ r を加えた, $(x^\mu) = (u, r, z^i)$ は \mathcal{T} の近傍で M の正則な局所座標系を与える. この座標系を (\mathcal{T}, l) に関する未来向きの光的座標系 (Past null coordinate system) と呼ぶ.
6. $(u, r) = \text{const}$ により定義される s 次元部分多様体を $\mathcal{T}(u, r)$ とおくと, l はこれらの部分多様体と常に直交する恋る光的ベクトルとなる. $\mathcal{T}(u, 0) = \mathcal{T}(u)$. k を各点で $\mathcal{T}(u, r)$ に直交する未来向きの光的ベクトルで $l \cdot k = -1$ となるものとする.

□

【公式 C.2.2 (Future null coordiantes)】 未来向きの光的座標系 (u, r, z^i) において, M の計量は次の形で表される :

$$ds^2 = du (dr + r\alpha(x)du + r\beta_i(x)dz^i) + \gamma_{ij}(x)dz^i dz^j. \quad (\text{C.2.1})$$

また, $n = \partial/\partial r$ とおくとき,

$$\ell_* = du, \quad -k_* = dr - \left(r\alpha + \frac{1}{2}r^2\beta^2 \right) du, \quad (\text{C.2.2a})$$

$$n_* = dr - 2r\alpha du - r\beta_j dz^j, \quad (\text{C.2.2b})$$

$$-k = n + \left(\alpha r + \frac{1}{2}r^2\beta^2 \right) \ell + r\beta^j \partial_j, \quad (\text{C.2.2c})$$

$$ds^2 = -\ell_* \otimes k_* - k_* \otimes \ell_* + q; \quad (\text{C.2.2d})$$

$$q = \gamma_{ij}(dz^i - r\beta^i du)(dz^j - r\beta^j du).$$

さらに, \mathcal{N} 上で,

$$\gamma^{ab}R_{ab} = -2\mathcal{L}_n\theta^{(\ell)} - 2\alpha\theta^{(l)} - 2(\theta^{(\ell)})^2 + R[q] + D_a\beta^a - \frac{1}{2}\beta^a\beta_a. \quad (\text{C.2.3})$$

[Hollands S, Ishibashi A, Wald R: CMP271, 699 (2007)]. _____□

§C.3

極大幾何学

【定義 C.3.1 (極大幾何学とコンパクト商)】

1. 単連結多様体 \tilde{M} とその推移的変換群 G の組 (\tilde{M}, G) は, \tilde{M} 上に G 不変な計量が存在するとき, 幾何 (geometry) と呼ぶ.
2. 幾何 (\tilde{M}, G) に対して, \tilde{M}/K がコンパクト閉多様体となる G の離散部分群 K が存在するとき, (\tilde{M}, G) はコンパクト商を許すという.
3. \tilde{M} の幾何 (\tilde{M}, G_{\max}) は, $G_{\max} \subset G$ となる幾何 (\tilde{M}, G) が存在しないとき, 極大幾何 (maximal geometry) という.

□

【注 C.3.2】 一般に, \tilde{M} を固定しても極大幾何の一つという保証はない. 例えば, $E^n = (\mathbb{R}^n, \text{IO}(n))$ と $H^n = (\mathbb{R}^n, \text{O}(n, 1))$ はいずれも \mathbb{R}^n 上の極大幾何である.

□

【定理 C.3.3 (極大幾何学の分類定理 Thurston W 1982)】 コンパクト商を許す 3次元の極大幾何は次の 8個に分類される:

$$E^3, \quad H^3, \quad S^3, \quad S^2 \times E^1, \quad H^2 \times E^1, \quad \text{Nil}, \quad \text{Sol}, \quad \widetilde{\text{SL}_2\mathbb{R}} \quad (\text{C.3.1})$$

さらに, 同じ離散群が異なる 2つ以上の極大幾何に対しコンパクト商を与えることはない. 特に, 異なる極大幾何から得られるコンパクト商が微分同相となることはない. □

【系 C.3.4】 極大幾何学の商として得られる 3次元コンパクト閉多様体 M は, その基本群 $\pi_1(M)$ により完全に分類される. □

§C.4

Seifert fibre space

C.4.1 Twisted torus

【定義 C.4.1 (Fibred torus)】 $D^2 \times \mathbb{R}$ を次の滑り回転により生成される巡回群 K により同一視する：

$$\lambda = T_a R(-2\pi q/p) : D^2 \times \mathbb{R} \rightarrow D^2 \times \mathbb{R}; \quad (p, q) = 1, \quad 0 < q < p. \quad (\text{C.4.1})$$

このとき、トーラス $T(p, q) = (D^2 \times \mathbb{R})/K$ は自然に次のようなねじれたファイバー構造をもつ：

- $\lambda \Leftrightarrow$ 中心の S^1 : 指数 (p, q) をもつ特異ファイバー.
- $\ell = \lambda^p \Leftrightarrow$ 非特異ファイバー S^1 : 正則ファイバー

□

【定義 C.4.2 (Orbifold)】 K から誘導される D^2 の変換群を K' とする：

$$K' = \{\rho^n \mid n \in \mathbb{Z}, \rho = R(2\pi/p)\} \cong \mathbb{Z}_p. \quad (\text{C.4.2})$$

このとき、次のようなファイバー空間 $\pi : T(p, q) \rightarrow D^2(p) = D^2/K'$ の構造が存在する：

$$\begin{array}{ccc} D^2 \times \mathbb{R} & \xrightarrow{/K} & T(p, q) \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ D^2 & \xrightarrow{/K'} & D^2(p) : \text{orbifold} \end{array} .$$

□

【命題 C.4.3 (Twisted torus の基本群)】 ℓ が生成する循環群を L とすると次の exact sequence が成り立つ：

$$0 \rightarrow L \xrightarrow{i} K \xrightarrow{j} K' \rightarrow 0. \quad (\text{C.4.3})$$

さらに、変換 $\rho \in K'$ に対応する K の変換として

$$\gamma = \lambda^{-r} = T_{-ra} R(2\pi/p); \quad ps + qr = 1, \quad 0 < r < p. \quad (\text{C.4.4})$$

を選ぶ。このとき、 K の生成変換 λ は $\lambda = \gamma^{-q} \ell^s$ と表される。これより、 $T(p, q)$ の基本群 $\pi_1(T(p, q)) \cong \mathbb{Z}$ は次のようにも表される：

$$\pi_1(T(p, q)) \cong K = \langle \ell, \gamma \mid [\ell, \gamma] = 1, \ell^r \gamma^p = 1 \rangle. \quad (\text{C.4.5})$$

□

C.4.2 Seifert Fibre Space

【定義 C.4.4 (slice 表現)】 群 G が Riemann 多様体 (M, g) に等長変換群として作用するとする: $G \triangleleft (M, g)$. 点 $x \in M$ の固定部分群 G_x に対し, T_x の直交分解 $T_x M = T_x(Gx) \oplus \mathcal{N}$ により誘導される G_x の表現 $\rho: G_x \triangleleft \mathcal{N}$ を G_x の **slice 表現** という. □

【定義 C.4.5 ($U(1)$ の局所自由作用)】 $U(1)$ の Riemann 多様体への作用が次の条件を満たす時, **局所自由** (locally free) であるという:

- 1) 各点において固定部分群が有限群 (i.e. \mathbb{Z}_p).
- 2) スライス表現が向きを保つ.

□

【定義 C.4.6 (Seifert manifold)】

1. 3次元コンパクト多様体が局所自由な $U(1)$ 作用を持つとき, **Seifert 多様体** という.
2. Seifert 多様体 M に $U(1)$ 作用を与えると, M は S^1 ファイバーにより葉層分解され, 各 S^1 ファイバーは適当な twisted torus $T(p, q)$ と同型な近傍をもつ. この S^1 葉層構造を与えられた Seifert 多様体を **Seifert ファイバー空間** という.

□

【定義 C.4.7 (Seifert bundle)】 Seifert ファイバー空間は, 自然にオービフォルド $X = M/S^1$ 上のファイバー空間の構造をもつ:

$$\pi: M \rightarrow X = M/S^1 \tag{C.4.6}$$

さらに, X の指数 (p, q) の特異ファイバーは, X に指数 p の conical singularity を生み出す. □

【命題 C.4.8 (Seifert 多様体の基本群)】 Seifert bundle $\pi: M \rightarrow X$ において, X の種数が g で, k 個の特異点 x_i を持つとする. また, M の正則ファイバーを ℓ , x_i における特異ファイバーの指数が (p_i, q_i) とする.

1. X が向き付け可能なとき, M の基本群は次のように表される:

$$\begin{aligned} \pi_1(\Sigma) = \langle \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g, \gamma_1, \dots, \gamma_k, \ell \mid [\alpha_a, \ell] = [\beta_a, \ell] = [\gamma_i, \ell] = 1, \\ \gamma_i^{p_i} \ell^{q_i} = 1, [\alpha_1, \beta_1] \cdots [\alpha_g, \beta_g] \gamma_1 \cdots \gamma_k = \ell^b \rangle. \end{aligned} \tag{C.4.7}$$

この基本群をもつ Seifert ファイバー空間を $S^+(g, e; (p_1, r_1), \dots, (p_k, r_k))$, または単に $S^+(g, e; k)$ と表記する. $k = 0$ のとき, $-b$ は通常の S^1 -バンドルの Euler 数と一致する.

2. X が向け付きできないとき, M の基本群は

$$\pi_1(\Sigma) = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_g, \gamma_1, \dots, \gamma_k, \ell \mid \alpha_a \ell \alpha_a^{-1} = \ell^{-1}, [\gamma_i, \ell] = 1, \gamma_i^{p_i} \ell^{r_i} = 1, \alpha_1^2 \cdots \alpha_g^2 \gamma_1 \cdots \gamma_k = \ell^b \rangle. \quad (\text{C.4.8})$$

対応する Seifert ファイバー空間を $S^-(g, e; (p_1, r_1), \dots, (p_k, r_k))$ ないし $S^-(g, e; k)$ と表記する.

□

Proof. x_i を指数 p_i をもつ X の特異点, x_i を中心とする小さな円盤を D_i , $\bar{\gamma}_i = \partial D_i$ とおく. X が向き付け可能で種数 g をもつとき, $N = \overline{X - \cup_i D_i}$ の基本群は次の様に表される:

$$\pi_1(N) = \langle \bar{\alpha}_1, \bar{\beta}_1, \dots, \bar{\alpha}_g, \bar{\beta}_g, \bar{\gamma}_1, \dots, \bar{\gamma}_k \mid [\bar{\alpha}_1, \bar{\beta}_1] \cdots [\bar{\alpha}_g, \bar{\beta}_g] \bar{\gamma}_1 \cdots \bar{\gamma}_k = 1 \rangle. \quad (\text{C.4.9})$$

したがって, N 上の S^1 -バンドル $M' = \pi^{-1}(N)$ の基本群は

$$\pi_1(M') = \langle \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g, \gamma_1, \dots, \gamma_k, \ell \mid [\alpha_a, \ell] = [\beta_a, \ell] = [\gamma_i, \ell] = 1, [\alpha_1, \beta_1] \cdots [\alpha_g, \beta_g] \gamma_1 \cdots \gamma_k = \ell^b \rangle, \quad (\text{C.4.10})$$

ここで, b は整数. 一方, $\pi^{-1}(D_i)$ の基本群は

$$\pi_1(\pi^{-1}(D_i)) \cong K = \langle \ell, \gamma_i \mid [\ell, \gamma_i] = 1, \ell^{r_i} \gamma_i^{p_i} = 1 \rangle. \quad (\text{C.4.11})$$

よって, Van Kampen の定理より, $\pi_1(M)$ の表式が得られる. Q.E.D.

【定理 C.4.9 (Seifert Fibring の一意性)】 コンパクト閉3次元多様体 M が2つの同型でない Seifert バンドルの構造をもつとすると, M は S^3 , $S^2 \times \mathbb{R}$, T^3 のいずれかで被覆される. □

【定義 C.4.10 (分数特性数)】 オービフォルド X の位相多様体として Euler 標数を $\chi_0(X)$ とすると, オービフォルドとしても分数 Euler 標数 $\chi(X)$ を次式で定義する:

$$\chi(X) := \chi_0(X) - \sum_i \left(1 - \frac{1}{p_i}\right). \quad (\text{C.4.12})$$

また, Seifert バンドル $\eta = (\Sigma, X)$ の Euler 数 $e(\eta)$ を Seifert 指数 (p_i, r_i) と b を用いて

$$e := -b - \sum_i \frac{r_i}{p_i}. \quad (\text{C.4.13})$$

により定義する. □

【命題 C.4.11】 Seifert バンドル $\eta = (M, X)$ の被覆バンドルを $\tilde{\eta} = (\tilde{M}, \tilde{X})$, $\tilde{M} \rightarrow M$ と $\tilde{X} \rightarrow X$ の被覆度をそれぞれ d, l とする. このとき, $m = d/l$ は整数となり, つぎの関係が成り立つ:

$$\chi(\tilde{X}) = l\chi(X), \quad e(\tilde{\eta}) = \frac{l}{m}e(\eta). \quad (\text{C.4.14})$$

□

【定理 C.4.12 (Thurston タイプとの関係)】 Thurston タイプ $E^3, S^3, S^2 \times E^1, H^2 \times E^1, \text{Nil}, \widetilde{\text{SL}_2\mathbb{R}}$ に属するコンパクト閉3次元多様体は Seifert 多様体である. 両者の対応は, (χ, e) により決まる.

	$\chi > 0$	$\chi = 0$	$\chi < 0$
$e = 0$	$S^2 \times \mathbb{R}$	E^3	$H^2 \times \mathbb{R}$
$e \neq 0$	S^3	Nil	$\widetilde{\text{SL}_2\mathbb{R}}$

□

§C.5

極大幾何

References

- Scott P: Bull. London Math. Soc. 15, 401 (1983).
"The geometries of 3-manifolds"

C.5.1 E^3

極大幾何: $(\mathbb{R}^3, \text{IO}(3))$.

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (\text{C.5.1})$$

$$0 \rightarrow \mathbb{R}^3 \rightarrow \text{Isom}(E^3) \rightarrow \text{O}(3) \rightarrow 1. \quad (\text{C.5.2})$$

コンパクト商: $M = E^3/K$ がコンパクト閉なら, $K \cap \mathbb{R}^3 = \mathbb{Z}^3$. したがって, M は常に T^3 で被覆され,

$$e = 0, \chi = 0. \quad (\text{C.5.3})$$

微分同相類は 6 つ:

$$\begin{aligned} T^3 \rightarrow T^2, \quad T^3/\mathbb{Z}_2 \rightarrow K^2, \quad T^3/\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \rightarrow P^2(2, 2), \\ T^3/\mathbb{Z}_3 \rightarrow S^2(3, 3, 3), \quad T^3/\mathbb{Z}_4 \rightarrow S^2(2, 4, 4), \quad T^3/\mathbb{Z}_6 \rightarrow S^2(2, 3, 6). \end{aligned} \quad (\text{C.5.4a})$$

C.5.2 Nil \cong Bianchi-II group

極大幾何: $(\mathbb{R}^3, G_{\text{II}} \rtimes \text{O}(2))$.

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + Q_3 \left[dz + \frac{1}{2}(ydx - xdy) \right]^2. \quad (\text{C.5.5})$$

Nil 群の構造:

$$(a, b, c)(x, y, z) = \left(a + x, b + y, c + z + \frac{ay - bx}{2} \right).$$

$$0 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \text{Nil} \rightarrow \mathbb{R}^2 \rightarrow 0, \quad (\text{C.5.6})$$

$$0 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \text{Isom}(\text{Nil}) \rightarrow \text{Isom}(E^2) \rightarrow 1. \quad (\text{C.5.7})$$

コンパクト商: $\text{Isom}(\text{Nil})$ は Nil のもつ自然な \mathbb{R} バンドル構造を保つ. よって, コンパクト商 M は T^2 上の S^1 バンドルとなる. 結果として,

$$\chi = 0, e \neq 0. \quad (\text{C.5.8})$$

微分同相類は 7 族あり, それぞれは正整数 n で分類される:

$$\begin{aligned} T^3(n) &\rightarrow T^2, K^3(n) \rightarrow K^2, T^3(2n)/\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \rightarrow P^2(2, 2), \\ T^3(n)/\mathbb{Z}_2 &\rightarrow S^2(2, 2, 2, 2), T^3(n)/\mathbb{Z}_3 \rightarrow S^2(3, 3, 3), \\ T^3(n)/\mathbb{Z}_4 &\rightarrow S^2(2, 4, 4), T^3(n)/\mathbb{Z}_6 \rightarrow S^2(2, 3, 6). \end{aligned} \quad (\text{C.5.9a})$$

C.5.3 Sol \cong Bianchi VI₀ group

極大幾何: $(\mathbb{R}^3, G_{\text{IV}_0} \times \bar{D}_4)$.

$$ds^2 = e^{2z}dx^2 + e^{-2z}dy^2 + Q_3dz^2. \quad (\text{C.5.10})$$

Sol 群の構造:

$$(a, b, c)(x, y, z) = (a + e^{-c}x, b + e^c y, c + z). \quad (\text{C.5.11})$$

$$0 \rightarrow \mathbb{R}^2 \rightarrow \text{Sol} \xrightarrow{p} \mathbb{R} \rightarrow 0, \quad (\text{C.5.12})$$

$$0 \rightarrow K \cap \mathbb{R}^2 \rightarrow K \cap \text{Sol} \xrightarrow{p} p(K \cap \text{Sol}) \rightarrow 0. \quad (\text{C.5.13})$$

コンパクト商: $M = \text{Sol}/K$ がコンパクト閉だとすると, $K \cap \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. したがって, $\text{Sol}/K \cap \text{Sol}$ は S^1 上の T^2 -バンドルで, $M = \text{Sol}/K$ は双曲型接着写像により $T^2 \times I$ から得られる S^1 上の T^2 -バンドルとなる.

基本群:

$$\pi_1(\text{Sol}(n)) = \langle \alpha, \beta, \gamma \mid [\alpha, \beta] = 1, \gamma\alpha\gamma^{-1} = \alpha^p\beta^q, \gamma\beta\gamma^{-1} = \alpha^r\beta^s \rangle, \quad (\text{C.5.14})$$

ここで

$$n = p + s, \omega_1, \omega_2 = \frac{p - s \pm \sqrt{n^2 - 4}}{2r}; \quad \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{Z}). \quad (\text{C.5.15})$$

C.5.4 $H^2 \times E^1 \cong$ Bianchi III group

極大幾何: $(\mathbb{R}^3, O_+(2, 1) \times \text{IO}(1))$.

$$ds^2 = Q \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} + dz^2. \quad (\text{C.5.16})$$

Bianchi III 群の構造:

$$(a, b, c) \cdot (x, y, z) = (a + bx, by, z + c). \quad (\text{C.5.17})$$

$$\text{Isom}(H^2 \times E^1) = \text{Isom}(H^2) \times \text{Isom}(E^1). \quad (\text{C.5.18})$$

特徴付け: 等長変換は $H^2 \times E^1$ の自然なバンドル構造を保つので, そのコンパクト商 $M = H^2 \times E^1/K$ は一意的な Seifert バンドル構造 $M \rightarrow X = H^2/K'$ をもつ. H^2 に自由に作用する K' の変換からなる部分群を K'' とすると, $Q = K'/K''$ は有限群となり, M は S^1 -バンドル $M' = H^2 \times E^1/j^{-1}(K'')$ で被覆される. ここで,

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow L \rightarrow K \xrightarrow{j} K' \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow L \rightarrow j^{-1}(K'') \xrightarrow{j} K'' \rightarrow 0. \end{aligned}$$

等長変換群の構造より, 2番目の完全系列は分裂するので, $e(M') = 0$. このバンドルの底空間に対しては $\chi < 0$ なので, $M = M'/Q$ に対して

$$\chi < 0, e = 0. \quad (\text{C.5.19})$$

基本群: M は $\chi < 0, e = 0$ となる Seifert ファイバー空間 $S^\pm(g, 0; k)$ と同型.

C.5.5 $\widetilde{\text{SL}}_2\mathbb{R} \cong \text{Bianchi VIII group}$

極大幾何: $(\mathbb{R}^3, \widetilde{\text{SL}}_2\mathbb{R} \times \text{O}(2))$.

$$ds^2 = Q_1 \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} + Q_3 \left(2dz + \frac{dx}{y} \right)^2. \quad (\text{C.5.20})$$

Bianchi-VIII 群:

$$(a + ib, c) \cdot (x + iy, z) = (a + bR(c) * (x + iy), z + H(c, x + iy)), \quad (\text{C.5.21})$$

ここで,

$$V * \zeta = \frac{d\zeta + c}{b\zeta + a} \text{ for } V = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad (\text{C.5.22})$$

$$H(z, \zeta) = \text{Im} \zeta \int_0^z \frac{d\phi}{|\cos \phi - \zeta \sin \phi|^2}. \quad (\text{C.5.23})$$

Seifert バンドル構造: 自然な射影

$$\widetilde{\text{SL}}_2\mathbb{R} \rightarrow \text{SL}_2\mathbb{R} \rightarrow \text{Isom}_0(H^2) \cong \text{PSL}_2\mathbb{R},$$

より, $\widetilde{\mathrm{SL}}_2\mathbb{R}$ は H^2 に推移的に作用するので, $\widetilde{\mathrm{SL}}_2\mathbb{R}$ は \mathbb{R} をファイバーとする H^2 上のファイバーバンドル

$$0 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \widetilde{\mathrm{SL}}_2\mathbb{R} \rightarrow H^2 \rightarrow 1. \quad (\text{C.5.24})$$

と見なすことができ, $\mathrm{Isom}(\widetilde{\mathrm{SL}}_2\mathbb{R})$ はこのバンドル構造を保つ. したがって, M は一意的な Seifert バンドル構造をもち, $H^2 \times E^1$ の場合と同様に, $g \geq 2$ の面上の S^1 バンドルにより被覆される. さらに, このバンドルは常に非自明 ($e \neq 0$) であることが示される. よって,

$$\chi < 0, e \neq 0. \quad (\text{C.5.25})$$

基本群: $\chi < 0, e \neq 0$ となる Seifert バンドル $\Sigma = S^\pm(g, e; k)$ の基本群で与えられる.

D

微分多様体

§D.1

スピン構造とスピン多様体

【定義 D.1.1 (ベクトルバンドルの向き付けバンドル)】 $\pi: E \rightarrow X$ を多様体 X 上の Riemann 計量をもつ n 次元実ベクトルバンドルとする. その直交枠バンドルを $P_O(E)$ から作られる X の 2 重被覆面 $\text{Or}(E) = P_O(E)/\text{SO}_n$ を向き付けバンドルという. 特に, $\text{Or}(E)$ が自明となるとき E は向き付け可能となる. \square

【命題 D.1.2】 $\text{Cov}_2(X)$ を X の 2 重被覆空間の同値類の集合とする. このとき, 次の自然な同型対応が存在する:

$$\text{Cov}_2(X) \cong H^1(X; \mathbb{Z}_2) \quad (\text{D.1.1})$$

 \square

【定義 D.1.3 (第 1 Stiefel-Whitney 類)】 X 上のベクトルバンドル E に対して, $\text{Or}(E)$ に対応するコホモロジー類 $w_1(E) \in H^1(X; \mathbb{Z}_2)$ を E の第 1 Stiefel-Whitney 類という. \square

【定理 D.1.4 (ベクトルバンドルの向き付け)】

1. X 上のベクトルバンドル E が向き付け可能であるための必要十分条件は $w_1(E) = 0$ となることである.
2. $w_1(E) = 0$ のとき, E の異なる向き付けは, $H^0(X; \mathbb{Z}_2)$ の要素と 1 対 1 に対応する.

□

【定義 D.1.5 (スピン構造)】 $n \geq 3$ とする. n 次元ベクトルバンドル E に対して, Spin_n -バンドル $P_{\text{Spin}}(E)$ と次の 2 重被覆写像 ξ の組を E 上のスピン構造 (spin structure on E) という:

$$\xi: P_{\text{Spin}}(E) \rightarrow P_{\text{SO}}(E); \quad \xi(pg) = \xi(p)\xi_0(g), \quad \forall p \in P_{\text{Spin}}(E), g \in \text{Spin}_n. \quad (\text{D.1.2})$$

□

【定義 D.1.6 (第 2Stiefel-Whitney 類)】 n 次元ベクトルバンドル E に対して, 完全系列

$$0 \longrightarrow H^1(X; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\pi^*} H^1(P_{\text{SO}}(E); \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{i^*} H^1(\text{SO}_n; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{w_E} H^2(X; \mathbb{Z}_2) \quad (\text{D.1.3})$$

において, $H^1(\text{SO}_n; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ の生成元 g_2 に w_E による像 $w_2(E) = w_E(g_2) \in H^2(X; \mathbb{Z}_2)$ を E の第 2Stiefel-Whitney 類 (2nd Stiefel-Whitney class) という. □

【定義 D.1.7 (スピン多様体)】 接バンドルにスピン構造が与えられた向きづけられた Riemann 多様体をスピン多様体 (spin manifold) という. □

【定理 D.1.8 (スピン構造の存在条件)】 X を向きづけられた Riemann 多様体とする.

1. X がスピン構造をもつための必要十分条件は第 2Stiefel-Whitney 類がゼロとなる ($w_2(X) = 0$) ことである.
2. $w_2(X) = 0$ のとき, X 上のスピン構造と $H^1(X; \mathbb{Z}_2)$ の元が一一に対応する.

□

E

幾何学不等式

§E.1

Sobolev 不等式

【定理 E.1.1 (Gagliardo-Nirenberg 不等式)】 n, p, q, r, α を

$$n \geq 1, \quad 1 \leq p, q, r \leq \infty, \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \quad (\text{E.1.1a})$$

$$\frac{1}{p} = \alpha \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{n} \right) + \frac{1-\alpha}{r} \quad (\text{E.1.1b})$$

を満たす定数とする (ただし, $n \geq 2$ の場合は, $p \neq \infty$ ないし $q \neq n$). このとき, $f \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$ に対するノルム $\|*\|_p$ に関して次の不等式が成り立つ;

$$\|f\|_p \leq C(n, p, q, r) \|f\|_r^{1-\alpha} \|\nabla f\|_q^\alpha. \quad (\text{E.1.2})$$

ここで, $C(n, p, q, r)$ は定数. この不等式で, 特に $\alpha = 1$ の場合を **Sobolev** の不等式と呼ぶ. また, $p = q = 2, r = 1, \alpha = 1 - \frac{2}{n+2}$ のとき, **Nash** の不等式という. □

【定理 E.1.2 (Ledoux 1999)】 非負 Ricci 曲率をもつ n 次元完備 Riemann 多様体上で,

$$1 \leq q < n, \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{q} - \frac{1}{n} \quad (\text{E.1.3})$$

を満たす (p, q) に対して

$$\|f\|_p \leq C_0 \|\nabla f\|_q, \quad \forall f \in C_0^\infty(M) \quad (\text{E.1.4})$$

が成り立てば, M は \mathbb{R}^n と等長である. ここで, C_0 は $M = \mathbb{R}^n$ の場合の最適値. [M Ledoux: Comm. Anal. Geom. 7, 347 (1999), "On manifolds with non-negative Ricci curvature and Sobolev inequalities"] □

【定理 E.1.3 (Xia CY 2001)】 非負 Ricci 曲率をもつ n 次元完備 Riemann 多様体上で,

$$1 \leq q < n, \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{q} - \frac{1}{n} \quad (\text{E.1.5})$$

を満たす適当な (p, q) に対して

$$\|f\|_p \leq C_1 \|\nabla f\|_q, \quad \forall f \in C_0^\infty(M) \quad (\text{E.1.6})$$

が成り立てば, M は \mathbb{R}^n と微分同相である. ここで, C_0 を $M = \mathbb{R}^n$ の場合の最適値として, $C_1 > C_0$.

[CY Xia: Illinois J. Math. 45, 1253 (2001), “Complete manifolds with negative Ricci curvature and almost best Sobolev constant”] _____□

【定理 E.1.4 (Ruan-Chen 2005)】 M を非負 Ricci 曲率をもつ n 次元完備 Riemann 多様体とする. M 上で適当な定数 $C > 0$ と $1 \leq p, q, r \leq \infty$, $0 \leq \alpha \leq 1$ に対して

$$\|f\|_p \leq C \|f\|_r^{1-\alpha} \|\nabla f\|_q^\alpha, \quad \forall f \in C_0^\infty(M), \quad \frac{1}{p} = \alpha \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{n} \right) + \frac{1-\alpha}{r} \quad (\text{E.1.7})$$

が成り立てば, M は \mathbb{R}^n に微分同相である.

[Q Ruan, Z Chen: aXiv:math/0501009/math.DG, “General Sobolev inequality on Riemannian manifolds”] _____□

【定義 E.1.5 (Sobolev ノルムと Sobolev 空間)】

1. $f \in C^\infty(M)$, $1 \leq p < \infty$ および整数 $k \geq 0$ に対して, Sobolev ノルムを

$$\|f\|_{p,k} = \left[\int_M d\mu_g \sum_{0 \leq |j| \leq k} |D^j f|^p \right]^{1/p}, \quad (\text{E.1.8})$$

により定義する.

2. さらに, このノルムによる $C^\infty(M)$ の完備化を **Sobolev 空間** $L_k^p(M)$ という.
3. $L_k^p(M)$ は, M 上の可測関数の同値類のうち, k 階までの微係数が $L^p(M)$ に属するものの全体と一致する.

(注) L_k^p の代わりに, しばしば $H_{p,k}$, W_k^p という記号が使われる.

_____□

【定理 E.1.6 (コンパクト閉 Riemann 多様体上の Sobolev 不等式と埋め込み定理)】

M を n 次元 C^∞ コンパクト閉 Riemann 多様体とし,

$$\delta(p, k) = k - \frac{n}{p} \quad (\text{E.1.9})$$

とおく. このとき, $0 \leq l \leq k$ を満たす整数 k, l および $f \in L_k^p(M)$ に対して,

(a) p, q が

$$0 < \frac{1}{p} - \frac{k-l}{n} \leq \frac{1}{q} \quad (\text{E.1.10})$$

を満たすとき, f に依存しない正定数 c が存在して

$$\|f\|_{q,l} \leq c \|f\|_{p,k}. \quad (\text{E.1.11})$$

したがって, 埋め込み $L_k^p \hookrightarrow L_l^q$ は連続である. さらに, $l < k$ で $1/p - (k-l)/n < 1/q$ のとき, この埋め込みはコンパクト作用素となる.

(b) $(k-l) - 1 < n/p < k-l$ のとき, $\alpha = \delta(p,k) - l$ とおくと ($0 < \alpha < 1$), f に依存しない正定数 c が存在して,

$$\|f\|_{C^{\delta(p,k)}} = \|f\|_{l+\alpha} \leq c \|f\|_{p,k}. \quad (\text{E.1.12})$$

これより, 埋め込み $L_k^p(M) \hookrightarrow C^{\delta(p,k)}(M)$ は連続であり, さらに $0 < \gamma < \delta(p,k)$ に対して, 埋め込み $L_k^p(M) \hookrightarrow C^\gamma(M)$ はコンパクトである.

□

【系 E.1.7】

i) $f \in L_k^p(M)$ で $p > n \Rightarrow f \in C^{k-1}(M)$.ii) $f \in L_k^p(M)$ で $pk > n \Rightarrow f \in C^0(M)$.iii) $f \in L_1^2(M) \Rightarrow f \in L^{2n/(n-2)}(M)$ ($n \geq 3$) であり, 次に不等式を満たす定数 $A, B > 0$ が存在:

$$\|f\|_{L^{2n/(n-2)}} \leq A \|Df\|_{L^2} + B \|f\|_{L^2}. \quad (\text{E.1.13})$$

□

§E.2

山辺の問題

【問題 E.2.1 (山辺の問題)】 \mathcal{C} を n 次元多様体 M 上の Riemann 計量の共形類とすると、汎関数

$$g \in \mathcal{C} \mapsto I(g) = \int_M R_s[g] d\mu_g / \left(\int_M d\mu_g \right)^{\frac{n-2}{n}} \quad (\text{E.2.1})$$

を最小にする計量はあるか? (存在すれば $R_s[g] = \text{const}$). □

【定義 E.2.2 (山辺不変量)】 上記 $I(g)$ の下限値

$$Y(g, M) := \inf_{q \in \mathcal{C}[g]} \frac{\int_M R_s[q] d\mu_q}{\left(\int_M d\mu_q \right)^{\frac{n-2}{n}}} = \inf_{\phi \in C^\infty(M)} \frac{\int_M d\mu_q \left(4 \frac{n-1}{n-2} |D\phi|_q^2 + R_s[q] \phi^2 \right)}{\left(\int_M \phi^{2n/(n-2)} d\mu_q \right)^{(n-2)/n}} \quad (\text{E.2.2})$$

を山辺不変量という. □

【定理 E.2.3 (J Lelong-Ferrand (1971), 小島守生 (1971))】 n 次元多様体 M の共形変換群が非コンパクトなら, M は標準的共形構造をもつ球面 S^n に共形的に微分同相である.

[< 岩波数学事典] □

【定理 E.2.4 (Aujan T 1976)】

- i) 任意のコンパクト Riemann 多様体 (M, g) に対して, $Y(M, g) \leq Y(S^n, \text{can})$.
- ii) もし $Y(M, g) < Y(S^n, \text{can})$ ならば, g の共形類の中にスカラ曲率は一定値 $Y(M, g)$ で体積 1 の計量が存在する.
- iii) $n \geq 6$ で (M, g) が共形平坦でなければ, $Y(M, g) < Y(S^n, \text{can})$ が成り立つ. (十分条件)

□

【定理 E.2.5 (山辺問題の解決 [R Schoen])】 \mathcal{C} が球面の標準的共形構造と一致する場合を除いて, $I(g)$ を最小にする計量が存在する.

[< 岩波数学事典] □

【定理 E.2.6 (T Aubin (1998), AL Besse (1987))】

1. 3次元以上の多様体上には常に負の一定スカラ曲率をもつ Riemann 計量が存在する.
2. M 上に $R_s[g] \geq 0$ で $R_s[g] \neq 0$ となる計量 g が存在すれば, スカラ曲率が正の定数となる計量および至る所ゼロとなる計量が存在する.

[< 岩波数学事典, Besse AL 1987B] _____ □

【定理 E.2.7 (Kozan-Warner 1975)】 多様体 M 上の C^∞ 関数がある点で負の値を取るなら, 常にそれをスカラ曲率とする計量が存在する.

[< 岩波数学事典] _____ □

【注 E.2.8 (正のスカラ曲率を持たない多様体)】 次の多様体は, スカラ曲率が至るところ正となる計量を持たない:

- i) $K3$ 面. [Lichnerowicz 1963]
- ii) トーラス [Gromov-Lawson 1980; Schoen-Yau 1979]

次の多様体は, スカラ曲率が非負となる計量を持たない:

- i) トーラスの連結和. [Gromov-Lawson 1980; Schoen-Yau 1979]

_____ □

§E.3

山辺タイプと位相

【定義 E.3.1 (山辺タイプ)】 n 次元コンパクト閉多様体 M に対して,

$$Y(M) = \sup_{[g]} Y(M, g) \quad (\text{E.3.1})$$

を山辺定数という. この符号により, 多様体は $(P)(Y(M) > 0)$, $(Z)(Y(M) = 0)$, $(N)(Y(M) < 0)$ に分類される. □

【定理 E.3.2 (J. Kazdan & F. Warner (1975), L. Bernard Bergery (1981))】 n 次元 $n \geq 3$ のコンパクト Riemann 多様体はつぎの 3つのカテゴリー (山辺タイプ) に分類される:

- (P) M 上の任意のなめらかな関数をスカラ曲率としてもつ計量が存在する. ($Y(M) > 0$)
- (Z) M 上の関数は, 恒等的にゼロまたはある領域で負定値のとき, かつそのときのみ, ある計量のスカラ曲率となり, しかもスカラ曲率がゼロとなる計量は必ず Ricci 平坦である. ($Y(M) = 0$)
- (N) M 上の関数は, ある領域で負定値になるとき, かつその時のみ, ある計量のスカラ曲率となる. ($Y(M) < 0$).

□

【命題 E.3.3 (Dirac 作用素に対する Weitzenböck 公式)】 $\mathcal{D} = i\Gamma^\mu D_\mu$ を Riemann 多様体 M 上のスピノールバンドルに対する Dirac 作用素とする. このとき, \mathcal{D} および \mathcal{D}^2 は自己共役な楕円型作用素で

$$\mathcal{D}^2 = D^*D + \frac{1}{4}s$$

が成り立つ. ここで, s はスカラ曲率である. □

【定理 E.3.4 (Lichnerowicz の定理 [Lichnerowicz A (1963)])】 (M, g) をコンパクトなスピン多様体とする.

1. もしスカラ曲率が非負で恒等的にゼロでなければ, ゼロ以外に調和スピノールは存在しない. また, スカラ曲率が恒等的にゼロなら, すべての調和スピノールは平行となる.

2. $M \in (P)$ なら $\hat{A} = 0$.

□

【定理 E.3.5 (Hitchin の定理 [Hitchin N (1974)])】 $\hat{A} : \Omega_*^{\text{spin}} \rightarrow KO^{-*}(pt)$ を一般化された \hat{A} 種数とする.

1. もし M がコンパクトなスピン多様体で山辺タイプ (P) なら, $\hat{A}(M) = 0$ である.
2. 山辺タイプ (P) に属さない異種球面が存在する.

□

【例 E.3.6】

1. 4次元では $\hat{A}(M) = \frac{1}{16}\tau(M)$ となる. $K3$ 曲面はスピン多様体で $\hat{A}(M) = -1$ となるので, スカラ曲率が正の計量を許さない.
2. $\mathbb{C}P^2$ はスピン多様体でないので, $\tau(\mathbb{C}P^2) = 1$ であるがスカラ曲率正の計量をもつ.

□

【定理 E.3.7 (Schoen-Yau 1979; Gromov-Lawson 1980)】 $M \in (P)$ なら, M に余次元 3 以上の手術を施した多様体も (P) に属する. □

【定理 E.3.8 (Gromov-Lawson の定理)】 [Gromov M, Lawson HB (1980)]
 M が次元 5 以上のコンパクト多様体とする.

1. M がスピン構造を持たないなら, $M \in (P)$.
2. M が単連結スピン多様体でタイプ (P) のスピン多様体とスピン同境なら, $M \in (P)$. また, M が単連結スピン多様体で $\hat{A}(M) = 0$ なら, 適当な数の連結和 $M\sharp \cdots \sharp M$ は (P) に属する.

□

【定理 E.3.9 (S Stolz 1992)】 M を 5次元以上の単連結スピン多様体とする. このとき, $M \in (P)$ となる必要十分条件は一般化された \hat{A} 種数 ($\alpha(M)$) がゼロとなることである. □

【定理 E.3.10 (Schoen-Yau, Gromov-Lawson)】

1. $T^n \in (Z)$.
2. M が断面曲率 $K \leq 0$ となる計量を許容するなら, $M \notin (P)$.
3. M が $K < 0$ となる計量を許容するなら, $M \in (N)$.

□

関連図書

- [1] Borde, A.: Geodesic focusing, energy conditions and singularities, *Class. Quantum Grav.* **4**, 343–356 (1987).
- [2] Bray, H. L. and Chruściel, H. L.: The Penrose Inequality, *gr-qc/0312047* (2003).
- [3] Burko, L.: Survival of the black hole’s Cauchy horizon under non-compact perturbations, *Phys. Rev. D* **66**, 024046 (2002).
- [4] Carter, B.: An axisymmetric black hole has only two degrees of freedom, *Phys. Rev. Lett.* **26**, 331–333 (1971).
- [5] Carter, B.: The general theory of the mechanical, electromagnetic and thermodynamic properties of black holes, in S.W.Hawking, and Israel, W. eds., *General Relativity: An Einstein centenary survey*, 294–369, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1979).
- [6] Clarke, C.: Local extensions in singular space-times, *Comm. Math. Phys.* **32**, 205–214 (1973).
- [7] Clarke, C.: *The Analysis of Space-Time Singularities*, Cambridge Univ. Press (1993).
- [8] Dain, S.: Geometric inequalities for axially symmetric black holes, *Class. Quantum Grav.* **29**, 073001 (2012).
- [9] Ellis, G. and Schmidt, B.: Singular space-times, *Gen. Rel. Grav.* **8**, 915–954 (1977).
- [10] Emparan, R.: Rotating Circular Strings, and Infinite Non-Uniqueness of Black Rings, *JHEP* **0403**, 064 (2004).

- [11] Emparan, R. and Reall, H.: Black Rings, *Class. Quantum Grav.* **23**, R169 (2006).
- [12] Ernst, F. J.: New formalism of the axially symmetric gravitational field problem, *Phys. Rev.* **167**, 1175 (1968).
- [13] Ernst, F. J.: New formalism of the axially symmetric gravitational field problem II, *Phys. Rev.* **168**, 1415 (1968).
- [14] Gibbons, G.: in Willmore, T. and Hitchin, N. eds., *Global Riemannian Geometry*, Ellis Horwood, Chichester (1984).
- [15] Gibbons, G.: Collapsing Shells and the Isoperimetric Inequality for Black Holes, *Class. Quantum Grav.* **14**, 2905 (1997).
- [16] Gibbons, G., Hawking, S., Horowitz, G. and Perry, M.: Positive Mass Theorems for Black Holes, *Comm. Math. Phys.* **88**, 295 (1983).
- [17] Gibbons, G., Hull, C. and Warner, N.: THE STABILITY OF GAUGED SUPERGRAVITY, *Nucl. Phys. B* **218**, 173–190 (1983).
- [18] Hawking, S.: Chronology protection conjecture, *Phys. Rev. D* **46**, 603–611 (1992).
- [19] Hawking, S. and Ellis, G.: *The Large Scale Structure of Space-time*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1973).
- [20] Huisken, G. and Ilmanen, T.: The inverse mean curvature flow and the Riemannian Penrose inequality, *J. Diff. Geom.* **59**, 353 (2001).
- [21] Jang, P. and Wald, R.: The positive energy conjecture and the cosmic censor hypothesis, *J. Math. Phys.* **18**, 41 (1977).
- [22] Krasnikov, S.: Singularity free WEC respecting time machine, *Class. Quantum Grav.* **15**, 997 (1997).
- [23] Mazur, P. O.: Proof of uniqueness of the Kerr-Newman black hole solution, *J. Phys. A* **15**, 3173–3180 (1982).
- [24] Morris, M., Thorne, K. and Yurtsever, U.: Wormholes, time machines, and the weak energy condition, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 1446–1449 (1988).
- [25] Nester, J.: A New gravitational energy expression with a simple positivity proof, *Phys. Lett. A* **83**, 241 (1981).

- [26] O’Murchadha, N.: How large can a star be ?, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 2466 (1986).
- [27] O’Murchadha, N. and York, W., Jr.: Initial-value problem of general relativity, *Phys. Rev. D* **10**, 428–446 (1974).
- [28] Ori, A.: Inner structure of a charged black hole: an exact mass-inflation solution, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 789–792 (1991).
- [29] Parker, T. and Taubes, C.: On Witten’s proof of the positive energy theorem, *Comm. Math. Phys.* **84**, 223–238 (1982).
- [30] Penrose, R.: Conformal treatment of infinity, in DeWitt, C. and DeWitt, B. eds., *Relativity, Groups and Topology*, 1963 Les Houches Lectures, 565–586, New York (1964), Gordon and Breach.
- [31] Penrose, R.: Gravitational collapse: the role of general relativity, *Riv. Nuovo Cimento* **1**, 252–276 (1969).
- [32] Penrose, R.: Singularities and time asymmetry, in Hawking, S. and Israel, W. eds., *General Relativity: An Einstein Centenary Survey*, 531–638, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1979).
- [33] Poisson, E. and Israel, W.: Internal structure of black holes, *Phys. Rev. D* **41**, 1796–1809 (1990).
- [34] Reula, O.: Existence theorem for solutions of Witten’s equation and non-negativity of total mass, *J. Math. Phys.* **23**, 810–814 (1982).
- [35] Reula, O. and Tod, K.: Positivity of the Bondi energy, *J. Math. Phys.* **25**, 1004–1008 (1984).
- [36] Robinson, D.: Classification of black holes with electromagnetic fields, *Phys. Rev. D* **10**, 458–460 (1974).
- [37] Schoen, R. and Yau, S.-T.: On the proof of the positive mass conjecture in general relativity, *Comm. Math. Phys.* **65**, 45–76 (1979).
- [38] Schoen, R. and Yau, S.-T.: Proof of the positive mass theorem. II., *Comm. Math. Phys.* **79**, 231–260 (1981).
- [39] Shapiro, S. L. and Teukolsky, S. A.: Formation of naked singularities: The violation of cosmic censorship, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 994–997 (1991).
- [40] Stephani, H., Kramer, D., MacCallum, M., Hoenselaers, C. and Herl, : Cambridge Univ. Press (2003).

- [41] Tipler, F.: Singularities and causal violation, *Ann. Phys.* **108**, 1–36 (1977).
- [42] Tipler, F.: Energy conditions and spacetime singularities, *Phys. Rev. D* **17**, 2521–2528 (1978).
- [43] Trudinger, N.: *Ann. Inst. Henri Poincaré* **11**, 411 (1994).
- [44] Wald, R. M.: Gravitational Collapse and Cosmic Censorship, *gr-qc/9710068* (1997).
- [45] Wald, R. M. and Iyer, V.: Trapped surfaces in the Schwarzschild geometry and cosmic censorship, *Phys. Rev. D* **44**, R3719–R3772 (1991).
- [46] Witten, E.: A new proof of the positive energy theorem, *Comm. Math. Phys.* **80**, 381–402 (1981).
- [47] 佐藤文隆, 小玉英雄 : 一般相対性理論, 岩波書店 (2000).