

多様な次元における超重力理論とその 応用

北海道大学院理学研究科
物理学専攻素粒子論研究室
2018年11月13日-15日

小玉 英雄

京都大学基礎物理学研究所

Copyright Hideo Kodama 平成 32 年 9 月 15 日

目次

第 1 章 超重力理論の基礎	1
1.1 Poincaré 超対称性	2
1.1.1 超対称性と S-行列	2
1.1.2 超対称性からの帰結	4
1.1.3 Poincaré 超代数の Hilbert 空間への表現：超組	5
1.2 4次元 $\mathcal{N} = 1$ 大域的超対称理論	7
1.2.1 Chiral multiplet	8
1.2.2 実超組とベクトル超組	14
1.2.3 超場による記述	17
1.2.4 ゲージ理論の一般論の復習	21
1.2.5 カイラル超対称理論のゲージ化	23
1.3 純超重力理論	25
1.3.1 準備的事項	25
1.3.2 重力場	27
1.3.3 Rarita-Schwinger 場	29
1.3.4 4次元極小超重力理論	33
1.4 4次元 $\mathcal{N} = 1$ 超重力理論	34
1.4.1 一般座標変換	35
1.4.2 Einstein 重力に対する共形的アプローチ	36
1.4.3 4次元純超重力理論に対する超共形アプローチ	39
1.4.4 物質セクターとの結合	47
1.4.5 カイラル超組およびゲージ超組と結合した超重力理論の導出	50
1.4.6 最も一般的な4次元超重力理論の最終形	59
1.4.7 Dirac の量子化条件	63
1.4.8 Kähler-Hodge 条件	64
第 2 章 4次元超重力理論に基づく宇宙論	65
2.1 宇宙論の基礎	65

2.1.1	基礎方程式	65
2.1.2	単純な宇宙モデル	67
2.1.3	宇宙パラメーター	68
2.1.4	LFRW モデル	69
2.1.5	平坦モデル	70
2.1.6	特異点	71
2.1.7	Raychaudhuri 方程式	72
2.1.8	光の伝搬	73
2.1.9	ホライズン	74
2.2	加速膨張宇宙モデル	75
2.2.1	1成分スローロールモデル	75
2.2.2	Power-law inflation model	77
2.2.3	Chaotic inflation model	78
2.2.4	Natural inflation	79
2.2.5	Starobinsky 型モデル	81
2.2.6	観測よりの制限	83
2.3	$N = 1$ 超重力理論のまとめ	87
2.3.1	構成要素	87
2.4	η 問題	88
2.5	安定性問題	90
2.5.1	単インフラトンモデルの不安定性	90
2.5.2	Sf 型モデル	91
2.5.3	解決策	92
2.6	*巾零理論	94
2.6.1	ベキゼロカイラル場	94
2.6.2	Sf モデルへの応用	94
2.7	*準共形不変理論と D 項インフレーション	97
2.7.1	$f(R)$ 理論とスカラテンソル理論の等価性	97
2.7.2	スケール不変理論	98
2.7.3	$SU(1, 1 + n)$ 超重力模型	99
2.7.4	ミンコフスキー真空と dS 真空	99
2.7.5	dS 真空の D 項による安定化	100
2.7.6	ミンコフスキー真空の D 項による安定化	102
第 3 章 高次元超重力理論		104
3.1	高次元超重力理論の一般的分類	104
3.1.1	次元と最大超対称性への制限	104
3.1.2	基本超対称代数	105
3.1.3	各次元の基本超対称代数の構造	106

3.1.4	基本超重力理論の構造と一意性	109
3.1.5	理論の変形とゲージ化された超重力理論	110
3.1.6	中心電荷	111
3.2	11D 超重力理論	113
3.2.1	基本場:	113
3.2.2	作用積分	113
3.2.3	場の方程式:	114
3.2.4	対称性:	114
3.2.5	Bosonic part:	115
3.2.6	物理自由度	115
3.3	10次元超重力理論	117
3.3.1	IIA 型理論	117
3.3.2	IIB 型理論	118
3.3.3	10次元 II 型理論の Democratic formulation	120
3.3.4	I 型理論	124
3.3.5	問題点	125
3.4	量子アノマリー	127
3.4.1	カイラルアノマリー (4次元)	127
3.4.2	Gauge and gravitational anomaly	129
3.4.3	10次元超重量理論のアノマリー	131
3.5	超弦理論との対応	134
3.5.1	フレームワーク	134
3.5.2	平坦な時空上の超弦理論の分類	138
3.5.3	厳密に構成された非自明背景場・時空上の超弦理論	138
3.6	Brane	140
3.6.1	分類	140
3.6.2	電荷の量子化	140
3.6.3	D ブレーンの作用積分	141
3.6.4	RR tadpole 条件	143
第 4 章 超弦理論コンパクト化とインフレーション		144
4.1	直積型コンパクト化	144
4.1.1	共通セクター	144
4.1.2	Calabi-Yau コンパクト化	148
4.1.3	4次元有効理論	154
4.2	フラックスコンパクト化	165
4.2.1	IIB 理論での解	165
4.2.2	ワープ	171
4.2.3	Conifold 型解	173

4.3	SU(3) 構造	181
4.3.1	SU(3) 構造の基本的性質	181
4.3.2	固有トーシオン	182
4.3.3	Killing スピノール	183
4.4	II 型理論での 4 次元 $\mathcal{N} = 1$ 超対称コンパクト化解の分類	184
4.4.1	IIA 型	184
4.4.2	IIB 型	188
4.5	高次元超重力理論における加速膨張宇宙に対する NO-GO 定理	193
4.5.1	問題点	193
4.5.2	強エネルギー条件 (時間的収束条件)	194
4.5.3	Gibbons の NO-GO 定理	195
4.5.4	$D = 10/11$ 超重力理論における SEC	196
4.5.5	Maldacena-Nunez の No-Go 定理	198
4.5.6	ブレーンを含む IIB 理論における No-Go 定理	200
4.5.7	ブレーンを含む IIA 理論における No-Go 定理	203
4.5.8	α' 補正を含む $10D$ ヘテロ型超重力理論	205
4.5.9	α' を考慮した $10D$ 超重力理論における No-Go 定理	206
4.5.10	如何にして No-Go 定理を回避するか?	210
4.6	KKLT	211
4.6.1	KKLT モデル	211
4.6.2	Flux コンパクト化により得られる 4 次元超重力理論	212
4.6.3	No-scale structure	215
4.6.4	複素モジュライの固定	216
4.6.5	非摂動論的量子効果	217
4.6.6	Vacuum uplift	218
4.6.7	インフレーションモデル	219
4.6.8	KKLT シナリオの問題点	224
4.7	LVS	225
4.7.1	Large volume scenario	225
4.7.2	Kähler ポテンシャルに対する α'^3 補正	226
4.7.3	質量スペクトル	230
4.7.4	Kähler モジュライインフレーション	233
4.7.5	LVS の問題点	236
4.8	Monodromy Inflation	237
4.8.1	IIA 理論におけるモジュライ安定化	237
4.8.2	IIA 理論での dS 真空	243
4.8.3	Monodromy inflation in IIA	248
4.8.4	Axion monodromy inflation in IIB model	254
4.8.5	様々な axion monodromy influms	257

4.9	Non-geometrical flux	258
4.9.1	T 双対変換	258
4.9.2	Geometrical flux	260
4.9.3	Non-geometric flux	265
4.9.4	Flux-scaling scenario	272
4.10	*ヘテロ型理論のフラックスコンパクト化	280
4.10.1	ヘテロ型理論	280
4.10.2	整合性条件	282
4.10.3	BBFTY 解 (スムーズモデル)	285
4.10.4	文献ノート	287
第 5 章 *様々な厳密解		288
5.1	$\mathcal{N} = 2$ 超重力理論	288
5.1.1	大域的 $\mathcal{N} = 2$ 超対称理論におけるゲージ超組	288
5.1.2	大域的 $\mathcal{N} = 2$ 超対称理論におけるハイパー超組	293
5.1.3	$\mathcal{N} = 2$ 4 次元超重力理論	298
5.1.4	$\mathcal{N} = 2$ 4 次元超重力理論の超共形アプローチによる導出	305
5.2	*超対称ブラックホール解	309
5.2.1	4 次元 $\mathcal{N} = 2$ 純超重力理論	309
5.2.2	4 次元 $\mathcal{N} = 2$ $n_V = 1$ 超重力理論	313
5.2.3	BH アトラクター解	315
付録 A 超代数と超群		318
A.1	超代数	318
A.2	Lie 超代数	320
A.2.1	分類	321
A.2.2	表現	321
A.3	可解 Lie 超代数	323
A.4	単純複素 Lie 超代数	325
A.4.1	古典 Lie 超代数	326
A.4.2	Cartan 型超代数	329
A.5	単純実 Lie 超代数	331
A.5.1	分類	331
A.5.2	単純超対称代数	333
A.6	Lie 超群	335
A.6.1	超行列	335
A.6.2	超空間	337
A.6.3	線形超群	339

付録B 高次元スピノール	341
B.1 γ 行列	341
B.2 スピノール表現	343
B.2.1 Clifford代数	343
B.2.2 スピノール	344
B.2.3 Fierz恒等式	346
B.3 荷電共役とMajoranaスピノール	347
B.4 スピノール双一次形式	354
B.5 スピノールの接続	355
B.6 $SO(6)$ スピノール	356
B.6.1 諸定義	356
B.6.2 Fierz恒等式	357
B.6.3 形式系	357
付録C 微分幾何学からの準備	360
C.1 Complex Structure	360
C.1.1 複素多様体	360
C.1.2 概複素多様体	361
C.1.3 複素多様体上のテンソル	362
C.2 複素構造の変形	365
C.3 エルミート多様体	369
C.3.1 エルミート計量	369
C.4 Kähler多様体	371
C.4.1 基本的性質	371
C.4.2 曲率テンソル	372
C.4.3 座標成分表示	373
C.4.4 正則キリングベクトル場とモーメント写像	374
C.4.5 Kähler-Hodge多様体	375
C.4.6 射影Kähler多様体	375
C.4.7 Special Kähler多様体	376
C.4.8 Hyperkähler多様体	379
C.4.9 4元数ケーラー多様体	380
C.4.10 標準直線バンドル	380
C.4.11 ホロノミー	380
C.4.12 Chern類	381
C.5 Kähler-Einstein多様体	382
C.5.1 一般的性質	382
C.5.2 Calabi-Yau予想	383
C.5.3 例	383

C.5.4 Ricci 平坦多様体	383
C.5.5 Calabi-Yau 多様体	384
C.6 Hodge 理論	388
C.6.1 de Rham コホモロジー	388
C.6.2 Dolbeault コホモロジー	389
C.7 Einstein 空間	392
C.7.1 一般論	392
C.7.2 Einstein 構造の変形	393
C.7.3 Einstein 空間の体積	395
C.7.4 Einstein 構造の剛性	396
C.7.5 モジュライ空間の次元	397
C.8 G 構造	398
C.8.1 一般論	398

1

超重力理論の基礎

References

- Freedman DZ, Van Proeyen A: "Supergravity" (CUP, 2012)
- Weinberg S: "The Quantum Theory of Fields" I-III (CUP, 1995)
- Wess J, Bagger J: "Supersymmetry and Supergravity" (PUP, 1992)
- Cornwell JF: "Group Theory in Physics" (Elsevier, 1989)

§1.1

Poincaré 超対称性

概要 Lie 超代数の一般的定義, S 行列の最大対称性と Poincaré 超対称代数の結び付きについて触れた後, 超対称性からの最も基本的な帰結および超対称代数の既約表現である超組の構造を説明する.

1.1.1 超対称性と S -行列

【Definition 1.1.1 (Poincaré 代数)】

1. $\mathcal{P} = \mathbb{R}^D \oplus \mathfrak{so}(D-1, 1)$
2. 交換関係は

$$\begin{aligned} [P_a, P_b] &= 0, & [M_{ab}, P_c] &= -(\delta_{ac}P_b - \delta_{cb}P_a), \\ [M_{ab}, M_{cd}] &= 2(\delta_{a[c}M_{d]b} - \delta_{b[c}M_{d]a}). \end{aligned}$$

3. スピノールへの表現は

$$\xi^a \mapsto \delta\psi = \xi^a P_a \psi = \xi^p \partial_a \psi, \quad (1.1.1a)$$

$$\delta\Lambda_{ab} = \omega_{ab} \mapsto \delta\psi = \frac{1}{2}\omega^{ab} M_{ab} \psi = -\frac{1}{4}\omega_{ab} \Gamma^{ab} \psi \quad (1.1.1b)$$

□

【Theorem 1.1.2 (Coleman-Mandula の定理 (1967))】 仮定

- 1) S 行列は 4 次元 Minkowski 時空上の局所的相対論的量子論に基づく.
- 2) 同じ質量の 1 粒子状態をもつ粒子の種類は有限個.
- 3) 真空と 1 粒子状態の間にはエネルギーギャップがある.

のもとで, S 行列の対称性を表す Lie 代数は, Poincare Lie 代数とコンパクト Lie 代数の直和となる. □

【Definition 1.1.3 (Lie 超代数)】 \mathbb{Z}_2 次数付き線形空間 $\mathcal{L}_s = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1$ に次の性質をもつ積 $[a, b]$ が定義されているとき, \mathcal{L}_s を Lie 超代数という:

i) a, b がそれぞれ斉次元のとき,

$$\deg([a, b]) = \deg a + \deg b.$$

すなわち,

$$[\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_0] \subset \mathcal{L}_0, \quad [\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1] \subset \mathcal{L}_1, \quad [\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_1] \subset \mathcal{L}_0.$$

ii) $a, b, c \in \mathcal{L}_s$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$ のとき,

$$[\alpha a + \beta b, c] = \alpha[a, c] + \beta[b, c].$$

iii) a, b が斉次元のとき,

$$[b, a] = -(-1)^{\deg a \cdot \deg b} [a, b].$$

iv) a, b, c が斉次元のとき

$$[a, [b, c]](-1)^{\deg a \cdot \deg c} + [b, [c, a]](-1)^{\deg b \cdot \deg a} + [c, [a, b]](-1)^{\deg c \cdot \deg b} = 0.$$

□

【Theorem 1.1.4 (Haag-Lopuszanski-Sohnius の定理 (1975))】 Coleman-Mandula の定理の仮定が満たされるとき, 4次元理論の S-行列の持ちうる超対称性は, 超対称代数が正定値内積をもつ Hilbert 空間への表現をもち, かつ, 任意の奇元 Q のエルミート共役作用素が再び代数に属するならば, 奇元は必ずスピン 1/2 の表現に属し, 次の交換関係で特徴付けられる Poincare SUSY 代数で与えられる ($\bar{Q} = Q^\dagger i\gamma^0$):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 &= \mathcal{P} \oplus \mathcal{S} \oplus \mathcal{C}, \quad \mathcal{L}_1 = \langle Q_I = P_L Q_I, Q^I = P_R Q^I; I = 1, \dots, N \rangle; \\ [P_m, Q_I] &= [P_m, Q^J] = 0, \\ [M_{ab}, Q_{I\alpha}] &= -\frac{1}{2}(\gamma_{ab})_\alpha{}^\beta Q_{I\beta}, \quad [M_{ab}, Q_\alpha^I] = -\frac{1}{2}(\gamma_{ab})_\alpha{}^\beta Q_\beta^I \\ [B, Q_I] &= S(B)_I{}^J Q_J, \quad [B, Q^I] = -S(B)^{*I}{}_J Q^J \quad (B \in \mathcal{S}), \\ \{Q_{I\alpha}, \bar{Q}^{J\beta}\} &= -\frac{1}{2}(P_L \gamma_m)_\alpha{}^\beta P^m \delta_J^I, \quad \{Q_\alpha^I, \bar{Q}_J^\beta\} = -\frac{1}{2}(P_R \gamma_m)_\alpha{}^\beta P^m \delta_J^I, \\ \{Q_{I\alpha}, Q_{J\beta}\} &= (P_L C)_{\alpha\beta} Z_{IJ}, \quad \{Q_\alpha^I, Q_\beta^J\} = (P_R C)_{\alpha\beta} Z^{*IJ}, \\ S(B)_I{}^K Z_{KJ} &= S(B)_J{}^K Z_{KI} \quad (B \in \mathcal{S}, \quad Z_{IJ} = -Z_{JI} \in \mathcal{C}) \end{aligned}$$

□

1.1.2 超対称性からの帰結

【Note 1.1.5】

1. Boson \Leftrightarrow Fermion :

$$\delta_\epsilon \hat{\phi} = -i[\bar{\epsilon} \hat{Q}, \hat{\phi}] = \epsilon \cdot X \Rightarrow \epsilon : \text{Grassmann odd constant spinor}$$

2. Boson-fermion cancellation:

$$\text{Vacuum energy} = +\frac{1}{2} \sum_p \omega_p \text{ (boson)}, \quad -\frac{1}{2} \sum_p \omega_p \text{ (fermion)}$$

2. $N = 1$ case ($\hat{P}_a = iP a_a$):

$$\{\hat{Q}_\alpha, \hat{Q}_\beta^\dagger\} = -\frac{1}{2} \hat{P}_a (P_L \gamma^a \gamma^0)_{\alpha\beta}, \quad \{\hat{Q}_\alpha, \hat{Q}_\beta\} = 0, \quad [\hat{P}^a, \hat{Q}_\alpha] = 0$$

3. Positivity of energy

$$\sum_\alpha \langle \{\hat{Q}_\alpha, \hat{Q}_\alpha^\dagger\} \rangle = 8E$$

□

1.1.3 Poincaré 超代数の Hilbert 空間への表現：超組

【Theorem 1.1.6 (Supermultiplet)】

1. (massless multiplet)

$$\begin{aligned} N = 1 & : (0, 1/2), (1/2, 1), (1, 3/2), (3/2, 2) \\ N = 2 & : \left(-\frac{1}{2}, 0^2, \frac{1}{2}\right), \left(0, \frac{1}{2}, 1\right), \left(\frac{1}{2}, 1^2, \frac{3}{2}\right), \left(1, \frac{3}{2}, 2\right) \\ N = 8 & : \left(-2, -\frac{3}{2}, -1^{28}, -\frac{1}{2}^{56}, 0^{70}, \frac{1}{2}^{56}, 1^{28}, \frac{3}{2}, 2\right) \end{aligned}$$

2. (massive multiplet)

$$N = 1 : \left(-\frac{1}{2}, 0^2, \frac{1}{2}\right), \left(0, \frac{1}{2}, 1\right), \left(\frac{1}{2}, 1^2, \frac{3}{2}\right), \left(1, \frac{3}{2}, 2\right)$$

□

Proof. • **Massless multiplet:** スピノールに対する Weyl 表示では, $P = (P^0, P^i) = (\omega, 0, 0, \omega)$ となる座標系で, $N = 1$ Poincare Lie 超代数の交換関係は

$$\begin{aligned} \{Q_1, Q_1\} &= \{Q_1, Q_2\} = \{Q_1, Q_1^\dagger\} = \{Q_1, Q_2^\dagger\} = 0, \\ \{Q_2, Q_2^\dagger\} &= \omega, \quad \{Q_2, Q_2\} = 0. \end{aligned}$$

交換関係

$$[J_3, Q_2] = [M_{12}, Q_2] = -\frac{i}{2}(\gamma_{12})_2^\alpha Q_\alpha = \frac{1}{2}(\sigma_3)_2^\alpha Q_\alpha = -\frac{1}{2}Q_2 \quad (1.1.2)$$

より, ヘリシティ s の状態に対して,

$$J_3 Q_2 |s\rangle = Q_2 J_3 |s\rangle - \frac{1}{2}|s\rangle = \left(s - \frac{1}{2}\right) Q_2 |s\rangle. \quad (1.1.3)$$

同様に, $J_3 Q_2^\dagger |s\rangle = (s + 1/2)|s\rangle$. よって, $N = 1$ Poincare Lie 超代数の規約ユニタリ表現で 4 元運動量 $P = (\omega, 0, 0, \omega)$ をもつ最大ヘリシティ状態を $|P, s\rangle$ とすると, $Q_\alpha, Q_\alpha^\dagger$ の作用は, 次の状態の組を生成する:

$$|P, s\rangle, |P, s - 1/2\rangle = Q_2 |P, s\rangle; \quad Q_2^\dagger |P, s\rangle = 0. \quad (1.1.4)$$

Q.E.D.

【Exercise 1.1.7 (Massive supermultiplet)】 最高スピン s の有質量超組が $(s, (s - 1)^2, s - 2)$ というスピン成分からなることを示せ。 □

Answer. • **Massive multiplet:** 4元運動量が $P = (M, 0, 0, 0)$ となるフレームにおいて, $N = 1$ Poincare Lie 超代数の交換関係は

$$\{Q_\alpha, Q_\beta^\dagger\} = \frac{M}{2}\delta_{\alpha\beta} \quad (1.1.5)$$

また,

$$[J_j, Q_\alpha] = \frac{1}{2}\epsilon_{jkl}[M_{kl}, Q_\alpha] = -\frac{i}{4}\epsilon_{jkl}(\gamma_{kl})_\alpha^\beta Q_\beta = \frac{1}{2}(\sigma_j)_\alpha^\beta Q_\beta. \quad (1.1.6)$$

すなわち,

$$[J_3, Q_1] = \frac{1}{2}Q_1, \quad [J_3, Q_2] = -\frac{1}{2}Q_2, \quad (1.1.7a)$$

$$[J_+, Q_1] = Q_2, \quad [J_+, Q_2] = 0, \quad [J_-, Q_1] = 0, \quad [J_-, Q_2] = -Q_1. \quad (1.1.7b)$$

これより, スピン s の最高ウエイト状態を $|s, s_z = s\rangle$, $\Psi_1 = Q_1^\dagger|s, s\rangle$ とおくと,

$$J_3\Psi_1 = ([J_3, Q_1^\dagger] + Q_1^\dagger J_3)|s, s\rangle = \left(s - \frac{1}{2}\right)\Psi_1, \quad (1.1.8a)$$

$$J^2\Psi_1 = (J_- J_+ + J_3(J_3 + 1))\Psi_1 = (s^2 - 1/4)\Psi_1. \quad (1.1.8b)$$

よって, Ψ_1 はスピン $s - 1/2, s_z = s - 1/2$ の状態. 同様に, $\Psi_2 = Q_2|s, s\rangle$ とおくと,

$$J_3\Psi_2 = ([J_3, Q_2] + Q_2 J_3)|s, s\rangle = \left(s - \frac{1}{2}\right)\Psi_2, \quad (1.1.9a)$$

$$J^2\Psi_2 = (s^2 - 1/4)\Psi_2 \quad (1.1.9b)$$

よって, Ψ_2 もスピン $s - 1/2, s_z = s - 1/2$ の状態. さらに, $Q_1^\dagger\Psi_1 = Q_2\Psi_2 = 0$ で, $Q_2\Psi_1$ と $Q_1^\dagger\Psi_2$ は同じ状態 $|s - 1, s - 1\rangle$ を与える.

Q.E.D.

§1.2

4次元 $\mathcal{N} = 1$ 大域的超対称理論

概要 超対称代数と Poincare 不変性を足場として、超対称変換の局所場への作用、その既約成分であるカイラル超組, 実超組, ベクトル超組およびそれらに対する大域的に超対称不変な作用積分をボトムアップで構築する。また、これららの構成を見通しよく行う枠組みである超空間と超場の概念にも触れる。

記法

1. 基本スピノール場はすべてマヨラナで反可換：

$$\chi^C \equiv B^{-1}\chi^* = \chi \Rightarrow P_R\chi = (P_L\chi)^C. \quad (1.2.1)$$

$${}^T B = B, \quad BB^* = 1, \quad (1.2.2a)$$

$$B\gamma_a B^{-1} = +\gamma_a^*, \quad B\gamma_5 B^{-1} = -\gamma_5^*. \quad (1.2.2b)$$

2. 荷電共役変換：マヨラナスピノール χ に対し、

$$C = iB\gamma^0 \Rightarrow \bar{\chi} = {}^T\chi C = \chi^\dagger(i\gamma^0). \quad (1.2.3)$$

$${}^T C = -C, \quad C^* = -C^{-1}, \quad (1.2.4a)$$

$$C\gamma_a C^{-1} = -{}^T\gamma_a, \quad C\gamma_5 C^{-1} = +{}^T\gamma_5. \quad (1.2.4b)$$

大域的超対称変換 (古典) 交換関係

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}^\beta\} = -\frac{1}{2}(\gamma_a)_\alpha{}^\beta P^a \quad (1.2.5)$$

より, ϵ を Grassmann-odd な定数スピノールとして, 場の無限小超対称変換を古典正準変換

$$\delta\hat{X} = \delta(\bar{\epsilon}Q)X = \delta_\epsilon(Q)X = \{\bar{\epsilon}Q, \hat{X}\} \quad (1.2.6)$$

により定義すると, 古典場に対して

$$[\delta_1, \delta_2]X = -\frac{1}{2}(\bar{\epsilon}_1\gamma^a\epsilon_2)D_a X. \quad (1.2.7)$$

Fierz 恒等式 次元 D が偶数のとき $n = D$, 奇数のとき $n = (D-1)/2$, $N = 2^{[D/2]}$ として,

$$(\bar{\psi}_1\psi_2)(\bar{\psi}_3\psi_4) = -\frac{1}{N} \sum_{I=0}^n \frac{(-1)^{I(I-1)/2}}{I!} (\bar{\psi}_1\Gamma_{[I}\psi_4)(\bar{\psi}_3\Gamma^{[I]}\psi_2) \quad (1.2.8)$$

例えば, 4次元では

$$\begin{aligned} \psi_4(\bar{\psi}_1\psi_2) &= -\frac{1}{4}\psi_2(\bar{\psi}_1\psi_4) \\ &\quad +\frac{1}{4}\gamma_a\psi_2(\bar{\psi}_1\gamma^a\psi_4) \\ &\quad +\frac{1}{8}\gamma_{ab}\psi_2(\bar{\psi}_1\gamma^{ab}\psi_4) \\ &\quad -\frac{1}{4}\gamma_5\gamma_a\psi_2(\bar{\psi}_1\gamma_5\gamma^a\psi_4) \\ &\quad -\frac{1}{4}\gamma_5\psi_2(\bar{\psi}_1\gamma_5\psi_4). \end{aligned} \quad (1.2.9)$$

特に, χ_1, χ_2, ϵ がマヨラナススピノールの時,

$$2\chi_{[1}(\bar{\epsilon}P_L\chi_2) = -P_L\epsilon(\bar{\chi}_1P_L\chi_2), \quad (1.2.10)$$

$$\chi_{[1}(\bar{\epsilon}P_L\chi_2) = -\frac{1}{8}P_L\gamma_{ab}\epsilon(\bar{\chi}_1P_L\gamma^{ab}\chi_2). \quad (1.2.11)$$

1.2.1 Chiral multiplet

(1) 1成分系

超対称変換 1成分系のカイラル超組は2個の複素スカラ場 Z, F および1個のマヨラナススピール χ の組 (Z, χ, F) で, その超対称変換は

$$\delta Z = \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\epsilon}P_L\chi, \quad (1.2.12a)$$

$$\delta P_L\chi = \frac{1}{\sqrt{2}}P_L(\not{\partial}Z + F)\epsilon, \quad (1.2.12b)$$

$$\delta F = \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\epsilon}P_R\not{\partial}\chi. \quad (1.2.12c)$$

ここで, 第1式は χ の定義で, 第2式と第3式の構造は, 交換関係(1.2.7)より完全に決まる.

作用積分の運動項 スカラ場 Z とスピノール場の作用積分を標準的なもの

$$S_0 = \int d^4x \left[-\partial\bar{Z} \cdot \partial Z - \frac{1}{2}\bar{\chi}\not{\partial}\chi \right] \quad (1.2.13)$$

にとると, その超対称変換は

$$\delta S_0 = \int d^4x \left[-F\delta\bar{F} - \bar{F}\delta F \right] \quad (1.2.14)$$

となる. よって,

$$S_{K,\text{chiral}} = \int d^4x \left[-\partial\bar{Z} \cdot \partial Z - \bar{\chi}P_L\not{\partial}\chi + \bar{F}F \right] \quad (1.2.15)$$

が超対称性をもつ作用積分となる.

複合カイラル超組とその F 項 2組のカイラル超組 (Z_1, χ_1, F_1) , (Z_2, χ_2, F_2) に対して, $aZ_1 + bZ_2$ (a, b は定数) および Z_1Z_2 を最低次元のスカラ場とするカイラル超組が一意的に存在し, それぞれ

$$Z = aZ_1 + bZ_2, \quad \chi = a\chi_1 + b\chi_2, \quad F = aF_1 + bF_2, \quad (1.2.16)$$

$$Z = Z_1Z_2, \quad \chi = Z_2\chi_1 + Z_1\chi_2, \quad F = F_1Z_2 + F_2Z_1 - \bar{\chi}_1P_L\chi_2 \quad (1.2.17)$$

で与えられる. これより, 特に, 任意の正則関数 $W(Z)$ に対し, それを最低次元のスカラ場とするカイラル超組が一意的に存在し,

$$Z(W) = W(Z), \quad \chi(W) = W'(Z)\chi, \quad [W(Z)]_F \equiv F(W) = W'F - \frac{1}{2}W''\bar{\chi}P_L\chi \quad (1.2.18)$$

で与えられる. 一般に, F 項の超対称変換は全微分項となるので, その共形次数が4ならば, その4次元積分は超対称な作用積分を与える. 特に, $W(Z)$ の共形次数が3なら, $[W(Z)]_F$ は超対称な相互作用項を与える.

【Exercise 1.2.1】 (1.2.17) および (1.2.18) を証明せよ. _____□

相互作用項 (F 項) 相互作用項として

$$\mathcal{L}_{I,chiral} = -V(Z, \bar{Z}) + M\bar{\chi}P_L\chi + \bar{M}\bar{\chi}P_R\chi \quad (1.2.19)$$

を仮定すると, 超対称性が成り立つ条件は

$$\partial_Z V = 2MF, \quad \partial_F V = g(Z), \quad \partial_Z g = 2M \quad (1.2.20)$$

となる. これより, $M = -W''(Z)/2$ とおくと,

$$\mathcal{L}_{I,chiral} = -\frac{1}{2}W''\bar{\chi}P_L\chi + W'F. \quad (1.2.21)$$

が得られる. これは, ちょうど, $W(Z)$ から生成されるカイラル超組の F 項と一致する.

カイラル超組に対する超対称な全作用積分は

$$S_{chiral,0} = \int d^4x \left[-\partial\bar{Z} \cdot \partial Z - \bar{\chi}\hat{\rho}P_L\chi + \bar{F}F + \left(-\frac{1}{2}W''\bar{\chi}P_L\chi + W'F + \text{h.c.} \right) \right] \quad (1.2.22)$$

で与えられる. F に対する変分方程式は

$$F = -\bar{W}', \quad \bar{F} = -W' \quad (1.2.23)$$

となるので, F を消去すると,

$$S'_{chiral,0} = \int d^4x \left[-\partial\bar{Z} \cdot \partial Z - V_F - \bar{\chi}\hat{\rho}P_L\chi - \frac{1}{2}(W''\bar{\chi}P_L\chi + \bar{W}''\bar{\chi}P_R\chi) \right] \quad (1.2.24)$$

を得る. ここで,

$$V_F = |W'(Z)|^2. \quad (1.2.25)$$

(2) 多成分化

複数のカイラル超組が存在する系 (Z^j, χ^j, F^j) に対して、運動項が標準的で運動項での異なる組の間の混合がない場合には、超対称な作用積分の運動項は単に各超組に対する運動項の和で与えられる。また、相互作用は、超ポテンシャル $W(Z^1, \dots, Z^n)$ に対する F 項より得られる。したがって、この場合の作用積分は、

$$S_{\text{chiral}} = \int d^4x \left[\delta_{jk} (-\partial \bar{Z}^j \cdot \partial Z^k - \bar{\chi}^j \not{\partial} P_L \chi^k + \bar{F}^j F^k) - \frac{1}{2} W_{jk} \bar{\chi}^j P_L \chi^k + W_j F^j + \text{h.c.} \right] \quad (1.2.26)$$

で与えられる。ここで、 $W_j = \partial W / \partial Z^j$, $W_{jk} = \partial^2 W / \partial Z^j \partial Z^k$ である。

しかし、運動項の係数がスカラ場 Z に依存する一般の場合には、いくつかの補正が必要となる

【Theorem 1.2.2 (一般的なカイラル超組系に対する超対称作用積分)】 時空微分について高々2階の最も一般的なカイラル超組系 (Z^j, χ^j, F^j) に対する超対称ラグランジアンは、次式で与えられる：

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{chiral}} = & -g_{j\bar{k}} \partial Z^j \cdot \partial \bar{Z}^{\bar{k}} - \frac{1}{2} g_{j\bar{k}} (\bar{\chi}^k \not{\partial} P_L \chi^j + \bar{\chi}^k \not{\partial} P_R \chi^j) \\ & + g_{j\bar{k}} \left(F^j - \frac{1}{2} \Gamma_{lm}^j \bar{\chi}^l P_L \chi^m \right) \left(\bar{F}^{\bar{k}} - \frac{1}{2} \Gamma_{\bar{l}\bar{m}}^{\bar{k}} \bar{\chi}^{\bar{l}} P_R \chi^{\bar{m}} \right) \\ & + \frac{1}{4} R_{jk\bar{l}\bar{m}} (\bar{\chi}^j P_L \chi^k) (\bar{\chi}^{\bar{l}} P_R \chi^{\bar{m}}) \\ & + F^j W_j + \bar{F}^{\bar{j}} \bar{W}_{\bar{j}} - \frac{1}{2} W_{jk} \bar{\chi}^j P_L \chi^k - \frac{1}{2} \bar{W}_{\bar{j}\bar{k}} \bar{\chi}^{\bar{j}} P_R \chi^{\bar{k}}. \end{aligned} \quad (1.2.27)$$

ここで、 $g_{j\bar{k}}$ は Kähler 計量、 $\Gamma_{lm}^j, \Gamma_{\bar{l}\bar{m}}^{\bar{j}}$ は対応する Levi-Civita 接続係数、 $R_{jk\bar{l}\bar{m}}$ は曲率テンソル、 $D\chi^j$ は

$$D_\mu P_L \chi^j = P_L (\partial_\mu \chi^j + \partial_\mu Z^l \Gamma_{lk}^j \chi^k), \quad D_\mu P_R \chi^j = P_R (\partial_\mu \chi^j + \partial_\mu \bar{Z}^{\bar{l}} \Gamma_{\bar{l}\bar{k}}^{\bar{j}} \chi^{\bar{k}}), \quad (1.2.28)$$

により定義される共変微分、 $W(Z)$ は超ポテンシャル、 $W_j = \partial W / \partial Z^j$, $W_{jk} = \partial^2 W / \partial Z^j \partial Z^k$ である。 □

Proof.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_0 &= -K_{jk}\partial Z^j \cdot \partial Z^k - (K_{jk})^* \partial \bar{Z}^j \cdot \partial \bar{Z}^k - K_{j\bar{k}}\partial Z^j \cdot \partial \bar{Z}^k \\
&\quad - \frac{1}{2}g_{j\bar{k}}\bar{\chi}^k \not{D} P_L \chi^j - \frac{1}{2}(g_{j\bar{k}})^* \bar{\chi}^k \not{D} P_R \chi^j \\
&\quad + L_{j\bar{k}}(F^j - \bar{\chi}^l B_{lm}^j \chi^m)(\bar{F}^j - \bar{\chi}^l (B_{lm}^j)^* \chi^m) \\
&\quad + \chi^4 \text{項}
\end{aligned} \tag{1.2.29}$$

ここで,

$$D_\mu P_L \chi^j = P_L (\partial_\mu \chi^j + \partial_\mu Z^l \Gamma_{lk}^j \chi^k), \tag{1.2.30}$$

$\Gamma_{lk}^j(Z, \bar{Z})$ は, Z 座標変換 $\chi^j \rightarrow \chi'^j = (\partial Z'^j / \partial Z^k) \chi^k$ に対して, $D'_\mu P_L \chi'^j = (\partial Z'^j / \partial Z^k) D_\mu P_L \chi^k$ が成り立つスカラ多様体上の適当な接続係数である. $K_{j\bar{k}}(Z, \bar{Z})$ と $L_{j\bar{k}}(Z, \bar{Z})$ はエルミート行列に値を取る関数. また, $g_{j\bar{k}}(Z, \bar{Z})$ はエルミート行列としてよい, 実際, $g_{j\bar{k}}$ を $g_{j\bar{k}} = h_{j\bar{k}} + a_{j\bar{k}}$ とエルミート部分 $h_{j\bar{k}}$ と反エルミート部分 $a_{j\bar{k}}$ の和として表すと, 部分積分により, $a_{j\bar{k}}$ に比例した部分は

$$h^{l\bar{m}}(g_{n\bar{m}}\Gamma_{jk}^n + \partial_j a_{k\bar{m}}) \rightarrow \Gamma_{jk}^l \tag{1.2.31}$$

の置き換えにより, Γ_{jk}^l に吸収できる. 以下, $g_{j\bar{k}}$ はエルミート行列とする.

このラグランジアン of 超対称変換のうち, (適当な部分積分により) $\partial^2 Z P_L \chi$ および $\partial Z^2 P_L \chi$ に比例する項は

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\partial_l K_{jk}\partial Z^j \cdot \partial Z^k (\bar{\epsilon} P_L \chi^l) \tag{1.2.32}$$

のみなので, $\partial_l K_{jk} = 0$ を得る. すなわち, $K_{jk} = K_{jk}(\bar{Z})$ は反正則関数でないといけない. したがって, 理論が複素スカラ場が値を取る複素多様体の正則座標変換 $Z^j \rightarrow Z'^j = Z^i(Z)$ に対して共変的となることを要求すると $K_{jk} = 0$ となる.

次に $\partial^2 Z P_R \chi$ および $\partial Z^2 P_R \chi$ に比例する項は,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\sqrt{2}} \left[2(K_{j\bar{k}} - g_{j\bar{k}}) \partial^2 Z^j \right. \\
&\quad \left. + (-2\partial_{\bar{l}} K_{jk} + 2\partial_j K_{k\bar{l}} - g_{m\bar{l}} \Gamma_{jk}^m - \partial_j g_{k\bar{l}}) \partial Z^j \cdot \partial Z^k \right] (\bar{\epsilon} P_R \chi^l) \\
&\quad - \frac{1}{2\sqrt{2}} \partial_k g_{j\bar{l}} \partial_\mu Z^j \partial_\nu Z^k (\bar{\epsilon} \gamma^{\mu\nu} P_R \chi^l)
\end{aligned} \tag{1.2.33}$$

これより,

$$K_{j\bar{k}} = g_{j\bar{k}}, \tag{1.2.34a}$$

$$\partial_{\bar{j}} g_{l\bar{k}} - \partial_{\bar{k}} g_{l\bar{j}} = 0, \tag{1.2.34b}$$

$$0 = 2\partial_{\bar{l}} K_{jk} = \partial_{(j} g_{k)\bar{l}} - g_{m\bar{l}} \Gamma_{(jk)}^m. \tag{1.2.34c}$$

この第2式はエルミート計量 $g_{j\bar{k}}$ に対する Kähler 条件となっており, これより $g_{j\bar{k}}$ は実関数 $K(Z, \bar{Z})$ を用いて,

$$g_{j\bar{k}} = K_{j\bar{k}} = \partial_j \partial_{\bar{k}} K. \quad (1.2.35)$$

すなわち, 計量 $g_{j\bar{k}}$ は Kähler 計量となる. さらに, 第3式より, $\Gamma_{jk}^m = \Gamma_{jk}^m(g)$ となる.

次に, $\bar{F} \partial P_L \chi$ に比例した項を取り出すと,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (L_{j\bar{k}} - g_{j\bar{k}}) \bar{\epsilon} P_R \partial \chi^j \bar{F}^k = 0 \Rightarrow L_{j\bar{k}} = g_{j\bar{k}}. \quad (1.2.36)$$

$F^j \bar{F}^k$ に比例した部分より

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} F^j \bar{F}^k \left[(\partial_l g_{j\bar{k}} \bar{\chi}^l P_L \epsilon - 2g_{n\bar{k}} \bar{\chi}^l P_L B_{lj}^n P_L \epsilon) \right. \\ \left. + (\partial_{\bar{l}} g_{j\bar{k}} \bar{\chi}^l P_R \epsilon - 2g_{n\bar{k}} \bar{\chi}^l P_L (B_{lj}^n)^* P_R \epsilon) \right] = 0 \end{aligned} \quad (1.2.37)$$

よって,

$$\partial_l g_{j\bar{k}} = 2g_{m\bar{k}} B_{lj}^m \Leftrightarrow B_{jk}^m = \frac{1}{2} \Gamma_{jk}^m(g). \quad (1.2.38)$$

最後に, $F \chi^3$ の係数より, χ^4 項の構造が決まる.

Q.E.D.

1.2.2 実超組とベクトル超組

D 項 実超組 $(C, \zeta, \mathcal{H}, B_\mu, \lambda, D)$ は3個の複素スカラ C, \mathcal{H}, D , 2個のマヨラナスピノール ζ, λ および実ベクトル場 B_μ からなり, 超対称変換に対して次のように変換する:

$$\delta C = \frac{1}{2} i \bar{\epsilon} \gamma_5 \zeta, \quad (1.2.39a)$$

$$\delta P_L \zeta = \frac{1}{2} P_L (i \mathcal{H} - \not{B} - i \not{\partial} C) \epsilon, \quad (1.2.39b)$$

$$\delta \mathcal{H} = -i \bar{\epsilon} P_R (\lambda + \not{\partial} \zeta), \quad (1.2.39c)$$

$$\delta B_\mu = -\frac{1}{2} \bar{\epsilon} (\gamma_\mu \lambda + \partial_\mu \zeta), \quad (1.2.39d)$$

$$\delta \lambda = \frac{1}{2} (\gamma^{\mu\nu} \partial_\mu B_\nu + i \gamma_5 D) \epsilon, \quad (1.2.39e)$$

$$\delta D = \frac{1}{2} i \epsilon \gamma_5 \gamma^\mu \partial_\mu \lambda. \quad (1.2.39f)$$

C から出発して, 第1式を ζ の定義とし, 新たに登場するスピノール場が1個のみであることを要求すると, 超対称性代数より, この変換則が一意的に導かれる.

1個以上の超組の成分から作られる複合スカラを C として用いると, D 成分は超対称変換が全微分となるので, 超対称なラグランジアンを与える. 例えば, $K(Z, \bar{Z})$ を複素スカラ場の組 (Z^j) の実関数とすると, $[(1/2)K(Z, \bar{Z})]_D + [W(Z)]_F$ がちょうど定理 1.2.2 を与える:

$$\mathcal{L}_{\text{chiral}} = \frac{1}{2} [K(Z, \bar{Z})]_D + [W(Z)]_F. \quad (1.2.40)$$

ゲージ超組 つぎに, (Z, χ, F) をカイラル超組として, $C = \text{Im } Z$ に対応する実超組を構成すると

$$(C, \zeta, \mathcal{H}, B_\mu, \lambda, D) = \left(\text{Im } Z, -\frac{1}{\sqrt{2}}\chi, iF, \partial_\mu \text{Re } Z, 0, 0 \right) \quad (1.2.41)$$

となる. これより, 任意の実超組 $(C, \zeta, \mathcal{H}, B_\mu, \lambda, D)$ とカイラル超組 (Z, χ, F) に対して,

$$\left(C + \text{Im } Z, \zeta - \frac{1}{\sqrt{2}}\chi, \mathcal{H} + iF, B_\mu + \partial_\mu \text{Re } Z, \lambda, D \right) \quad (1.2.42)$$

は再び実超組として変換する. そこで, 実超組 $(C, \zeta, \mathcal{H}, B_\mu, \lambda, D)$ をゲージ場を表す超組, カイラル超組 (Z, χ, F) から今構成した実超組を一般化されたゲージパラメータと見なし, 理論が拡張されたゲージ変換 (1.2.42) となることを要求する. すると, 明らかに, C, ζ, \mathcal{H} はラグランジアンに現れない. 残りの場 B_μ, λ, D のうち, B_μ の超対称変換は閉じないが, 余分な項 $-(1/2)\bar{\epsilon}\partial_\mu\zeta = -\partial_\mu((1/2)\bar{\epsilon}\zeta)$ は, B_μ に対するゲージ変換と見なせる. したがって, 次の超対称変換を受ける場の組 (A_μ, λ, D) をゲージ場を表す超組と定義することができる:

$$\delta A_\mu = -\frac{1}{2}\bar{\epsilon}\gamma_\mu\lambda, \quad \delta\lambda = \frac{1}{2}(\gamma^{\mu\nu}\partial_\mu A_\nu + i\gamma_5 D)\epsilon, \quad \delta D = -\frac{1}{2}i\bar{\epsilon}\gamma_5\rlap{/}\partial\lambda. \quad (1.2.43)$$

この超組は (Wess-Zumino ゲージでの) **ゲージ超組** と呼ばれる. ただし, これらの場の超対称変換の代数は, 標準的なものからゲージ変換分だけずれる:

$$[\delta(\bar{\epsilon}_1 Q), \delta(\bar{\epsilon}_2 Q)]A_\mu^A = -\frac{1}{2}\bar{\epsilon}_1\gamma^\nu\epsilon_2 F_{\mu\nu}^A, \quad (1.2.44a)$$

$$[\delta(\bar{\epsilon}_1 Q), \delta(\bar{\epsilon}_2 Q)]\lambda^A = -\frac{1}{2}\bar{\epsilon}_1\gamma^\nu\epsilon_2 D_\nu\lambda^A, \quad (1.2.44b)$$

$$[\delta(\bar{\epsilon}_1 Q), \delta(\bar{\epsilon}_2 Q)]D^A = -\frac{1}{2}\bar{\epsilon}_1\gamma^\nu\epsilon_2 D_\nu D^A. \quad (1.2.44c)$$

複数のゲージ超組 $(A_\mu^A, \lambda^A, D^A)$ の直和は, 可換ゲージ場を含むヘリシティ $(1, 1/2)$ の超組を表現し, 超対称ラグランジアンは

$$\mathcal{L}_{vector,0} = -\frac{1}{2}F^A \cdot F^A - \frac{1}{2}\bar{\lambda}^A\rlap{/}\partial\lambda^A + \frac{1}{2}D^A D^A \quad (1.2.45)$$

で与えられることが容易に示される.

非可換ゲージ超組 非可換ゲージ場に対応するゲージ超組 $(A_\mu^A, \lambda^A, D^A)$ に対して、超対称な理論を構成するには、まず、超対称変換をゲージ変換と可換な形

$$\delta A_\mu^A = -\frac{1}{2}\bar{\epsilon}\gamma_\mu\lambda^A, \quad (1.2.46a)$$

$$\delta\lambda^A = \frac{1}{4}(\gamma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}^A + 2i\gamma_5 D^A)\epsilon, \quad (1.2.46b)$$

$$\delta D^A = -\frac{1}{2}i\bar{\epsilon}\gamma_5\not{D}\lambda^A. \quad (1.2.46c)$$

に修正する必要がある。ここで、

$$D\lambda^A = d\lambda^A + f^A{}_{BC}A^B\lambda^C, \quad (1.2.47a)$$

$$F_{\mu\nu}^A = \partial_\mu A_\nu^A - \partial_\nu A_\mu^A + f^A{}_{BC}A_\mu^B A_\nu^C \quad (1.2.47b)$$

である。この変更のもとで、正則関数 $\mathcal{N}_{AB}(Z) = \mathcal{N}_{BA}(Z)$ と λ^A から作られる複合スカラ場 $\mathcal{N}_{AB}\bar{\lambda}^A P_L \lambda^B$ が生成するカイラル超組を作ると次式を得る：

$$Z(\mathcal{N}) = -\frac{1}{4}\mathcal{N}_{AB}\bar{\lambda}^A P_L \lambda^B, \quad (1.2.48a)$$

$$P_L \chi(\mathcal{N}) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\mathcal{N}_{AB}\left(\not{F}^{-A} - iD^A\right)P_L \lambda^B - \frac{1}{4}\mathcal{N}_{ABj}P_L \chi^j \bar{\lambda}^A P_L \lambda^B, \quad (1.2.48b)$$

$$\begin{aligned} F(\mathcal{N}) &= \frac{1}{4}\mathcal{N}_{AB}\left(-2\bar{\lambda}^A P_L \not{D}\lambda^B - 2F^{-A} \cdot F^{-B} + D^A D^B\right) \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{2}}\mathcal{N}_{ABj}\bar{\chi}^j\left(-\not{F}^{-A} + iD^A\right)P_L \lambda^B - \frac{1}{4}\mathcal{N}_{ABj}F^j \bar{\lambda}^A P_L \lambda^B \\ &+ \frac{1}{8}\mathcal{N}_{ABjk}\bar{\chi}^j P_L \chi^k \bar{\lambda}^A P_L \lambda^B. \end{aligned} \quad (1.2.48c)$$

ここで、 $F_{\mu\nu}^- = (F_{\mu\nu} + i\tilde{F}_{\mu\nu})/2$, $\not{F} = (1/2)\gamma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$, $F^A \cdot F^B = (1/2)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ である。これより、 F 項

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} = \left[\mathcal{N}_{AB}\bar{\lambda}^A P_L \lambda^B\right]_F + \text{hc} \quad (1.2.49)$$

が、ゲージ結合係数がカイラル場に依存する一般の場合に対して、ゲージ場の超対称ラグランジュ密度関数を与える。

1.2.3 超場による記述

θ^α を定数の Grassmann Majorana スピノールとすると、 $E^{3,1}$ 上の関数を係数として θ から生成される代数の元

$$\Phi(x, \theta) = \phi_0(x) + \theta^\alpha \chi_\alpha(x) + \theta^\alpha \theta^\beta \phi_{\alpha\beta}(x) + \cdots + \theta^1 \theta^2 \theta^3 \theta^4 \phi_4(x) \quad (1.2.50)$$

は形式的に、 x^μ と θ^α の関数と見なすことができる。 $\Phi(x, \theta)$ は超場 (superfield) と呼ばれる。

超空間における並進変換としての超対称変換 4個の生成元をもつ実外積代数を $\mathbb{R}B$ 、その偶成分と奇成分への分解を $\mathbb{R}B = \mathbb{R}B_0 + \mathbb{R}B_1$ と表記するとき、

$$\mathbb{R}S^{4,1} \equiv \mathbb{R}B^{4,4} = (\mathbb{R}B_0)^4 \times (\mathbb{R}B_1)^4 \quad (1.2.51)$$

を4次元における $N=1$ の超空間と呼ぶ。 x^μ は $\mathbb{R}B_0$ に、 θ^α は $\mathbb{R}B_1$ に値を取るとすると、超場は $\mathbb{R}S^{4,1}$ から $\mathbb{C}B$ に値を取る関数と見なすことができる。

いま、超空間における Grassmann スピノール ϵ をパラメータとする無限小変換 $\delta(\epsilon)$ を

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \frac{1}{4} \bar{\epsilon} \gamma^\mu \theta, \quad (1.2.52a)$$

$$\theta \rightarrow \theta' = \theta - \epsilon \quad (1.2.52b)$$

により定義すると、対応する超場の変換は

$$\delta\Phi = \bar{\epsilon} Q\Phi, \quad (1.2.53)$$

$$Q_\alpha = \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\theta^\alpha} - \frac{1}{4} (\gamma^\mu \theta)_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (1.2.54)$$

と表される。ここで、

$$\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\theta^\alpha} = (C^{-1})_\alpha{}^\beta \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\theta^\beta} \quad (1.2.55)$$

Q_α は、超対称変換と同じ交換関係

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = \frac{1}{2} (\gamma^\mu C^{-1})_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\mu}. \quad (1.2.56)$$

を満たす。したがって、この変換を超場の成分場で表せば、成分場の組が作る超組への超対称変換の表現が得られる。

ベクトル超場 例えば, Φ を任意の複素超場として, Lorentz 不変性を考慮して超場を θ で展開し, スピノール 2 次形式の対称性と Fierz 恒等式から得られる関係式

$$(\bar{\theta}\gamma_*\theta)\bar{\theta} = -(\bar{\theta}\theta)\bar{\theta}\gamma_*, \quad (1.2.57a)$$

$$(\bar{\theta}\gamma_*\gamma_\mu\theta)\bar{\theta} = -(\bar{\theta}\theta)\bar{\theta}\gamma_*\gamma_\mu \quad (1.2.57b)$$

を考慮すると, 一般に,

$$\begin{aligned} \Phi = & C(x) + \frac{i}{2}\bar{\gamma}_*\theta\zeta - \frac{1}{8}\bar{\theta}(P_L\mathcal{H}_L + P_R\mathcal{H}_R)\theta - \frac{i}{8}\bar{\theta}\gamma_*\gamma^\mu\theta B_\mu \\ & - \frac{i}{8}(\bar{\theta}\theta)\bar{\theta}\gamma_*\left(\lambda + \frac{1}{2}\not{\partial}\zeta\right) + \frac{1}{32}\bar{\theta}P_L\theta\bar{\theta}P_R\theta\left(D + \frac{1}{2}\square C\right) \end{aligned} \quad (1.2.58)$$

が得られる. これにより定義され複素成分場 $(C, \zeta, \mathcal{H}_L, \mathcal{H}_R, B_\mu, \lambda, D)$ により上記の変換を表すと,

$$\delta C = \frac{i}{2}\bar{\epsilon}\gamma_*\zeta, \quad (1.2.59a)$$

$$\delta\zeta = \frac{i}{2}(\mathcal{H}_L P_L + \mathcal{H}_R P_R)\epsilon - \frac{1}{2}(\not{B} + i\gamma_*\not{\partial}C)\epsilon, \quad (1.2.59b)$$

$$\delta\mathcal{H}_L = -i\bar{\epsilon}P_R(\lambda + \not{\partial}\zeta), \quad (1.2.59c)$$

$$\delta\mathcal{H}_R = i\bar{\epsilon}P_L(\lambda + \not{\partial}\zeta), \quad (1.2.59d)$$

$$\delta B_\mu = -\frac{1}{2}\bar{\epsilon}(\gamma_\mu\lambda + \partial_\mu\zeta), \quad (1.2.59e)$$

$$\delta\lambda = \frac{1}{2}(iD\gamma_* + \gamma^{\mu\nu}\partial_\mu B_\nu)\epsilon, \quad (1.2.59f)$$

$$\delta D = \frac{i}{2}\bar{\epsilon}\gamma_*\not{\partial}\lambda. \quad (1.2.59g)$$

これより, C が実場であることを要請すると, 超対称変換との整合性より, $\mathcal{H}_R = \mathcal{H}_L^*$, B_μ, D が実場, ζ と λ が Majorana 場であることが必要となり, 実超組が得られる.

カイラル超場 次に、超空間のベクトル場 \mathbb{D}_α を

$$\mathbb{D}_\alpha = \frac{\vec{\partial}}{\partial\theta^\alpha} + \frac{1}{4}(\gamma^\mu\theta)_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (1.2.60)$$

により定義すると、

$$\{\mathbb{D}_\alpha, \mathbb{D}_\beta\} = -\frac{1}{2}(\gamma^\mu C^{-1})_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\mu}. \quad (1.2.61)$$

$$\{\mathbb{D}_\alpha, \mathbb{Q}_\beta\} = 0 \quad (1.2.62)$$

が成り立つ。これより、超場に対するカイラリティ条件

$$P_R \mathbb{D}\Phi = 0 \quad (1.2.63)$$

は、超対称変換で保存される。新しい偶座標系を

$$x_+^\mu \equiv x^\mu + \frac{1}{8}\bar{\theta}\gamma_*\gamma^\mu\theta \quad (1.2.64)$$

により導入し、超場を x_+^μ と θ を用いて

$$\Phi = \tilde{\Phi}(x_+, \theta) \quad (1.2.65)$$

と表すと、カイラリティ条件は

$$P_R \left. \frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial\theta} \right|_{x_+=\text{const}} = 0 \quad (1.2.66)$$

となる。この条件は、 $\tilde{\Phi}$ を x_+ を固定して θ で展開したとき、 $P_L\theta$ のみが現れることと同等である。したがって、 $\tilde{\Phi}$ は

$$\tilde{\Phi}(x_+, \theta) = Z(x_+) + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\theta}P_L\chi(x_+) + \frac{1}{4}\bar{\theta}P_L\theta F(x_+) \quad (1.2.67)$$

と、 (Z, χ, F) により表される。この表式を展開して、 x, θ で表すと、

$$C = Z, \quad \zeta = -i\sqrt{2}P_L\chi, \quad \mathcal{H}_L = -2F, \quad \mathcal{H}_R = 0, \quad B_\mu = i\partial_\mu Z, \quad \lambda = 0, \quad D = 0 \quad (1.2.68)$$

が得られる。この対応により、 (Z, χ, F) の超対称変換に対する変換則を求めると、標準的なカイラル超組の変換則と一致することが確かめられる。

ベクトル型カイラル超場とゲージ超組 ゲージ超組 (B_μ, λ, D) は、次のベクトル超場と対応する：

$$\begin{aligned} V &= -\frac{i}{8}\bar{\theta}\gamma_*\gamma^\mu\theta B_\mu(x) - \frac{i}{8}(\bar{\theta}\theta)(\bar{\theta}\gamma_*\lambda(x)) + \frac{1}{64}(\bar{\theta}\theta)^2 D(x) \\ &= -\frac{i}{8}\bar{\theta}\gamma_*\gamma^\mu\theta B_\mu(x_+) - \frac{i}{8}(\bar{\theta}\theta)(\bar{\theta}\gamma_*\lambda(x_+)) + \frac{1}{64}(\bar{\theta}\theta)^2(D(x_+) + i\partial \cdot B(x_+)). \end{aligned} \quad (1.2.69)$$

この超場より、新しい超場 W_α を

$$W_\alpha \equiv 4\bar{\mathbb{D}}P_R\mathbb{D}P_L\mathbb{D}_\alpha V \quad (1.2.70)$$

により定義すると、 W_α は自動的にカイラルな超場となる：

$$P_R\mathbb{D}W_\alpha = 0. \quad (1.2.71)$$

具体的に計算すると、

$$W = -iP_L\lambda(x_+) + \frac{1}{2}(D(x_+) - i\gamma^{\mu\nu}\partial_\mu B_\nu(x_+))P_L\theta - \frac{i}{4}P_L\hat{\rho}\lambda(x_+)(\bar{\theta}P_L\theta). \quad (1.2.72)$$

この超場の超対称変換

$$\delta W_\alpha = \bar{\epsilon}QW_\alpha = \bar{\epsilon}^\beta \left(\frac{\vec{\partial}}{\partial\bar{\theta}^\beta} - \frac{1}{2}(P_R\gamma^\mu\theta)_\beta \frac{\partial}{\partial x_+^\mu} \right) W_\alpha \quad (1.2.73)$$

を計算すると、ゲージ超場の正しい変換則が得られる。また、ゲージ超組に対する Lagrange 密度は、カイラル超場 $\mathcal{N}_{AB}\bar{W}^A W^B$ の F 項と一致する：

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} = [\mathcal{N}_{AB}\bar{W}^A W^B]_F + \text{hc}. \quad (1.2.74)$$

1.2.4 ゲージ理論の一般論の復習

変換群と無限小変換 群 G の多様体 X への左作用 Φ_g が与えられたとする：

$$G \ni g \mapsto \Phi_g \in \text{Diff}(X) : \Phi_{g_1 g_2}(x) = (\Phi_{g_1} \circ \Phi_{g_2})(x) = \Phi_{g_1}(\Phi_{g_2}(x)). \quad (1.2.75)$$

これより、 G のリー代数 $\mathcal{L}(G)$ から X 上のベクトル場の集合 $\mathfrak{X}(X)$ への線形写像が定まる：

$$\mathcal{L}(G) \rightarrow \mathfrak{X}(X) : A \mapsto V_A = V(A), \quad V_A = \left. \frac{d}{dt} \Phi_{\exp(tA)}(x) \right|_{t=0} \equiv \delta(A)x. \quad (1.2.76)$$

このとき、次の関係式が成り立つ：

$$[A, B] \mapsto V_{[A, B]} = -[V_A, V_B]. \quad (1.2.77)$$

つぎに、 $\phi : X \rightarrow L$ を内部自由度 L に値を取る関数 $\phi \in \mathcal{F}(X) \otimes L$ 、 ρ を G の L 上の表現として、 G の ϕ への作用 T_g を

$$T_g \phi = \rho(g)^{-1} \Phi_g^* \phi \quad (1.2.78)$$

により定義する。このとき、 ϕ の無限小変換 $\delta(A)\phi$ が

$$A \in \mathcal{L}(G) \mapsto \delta(A)\phi = (\mathcal{L}_{V(A)} - (d\rho)_*(A))\phi \quad (1.2.79)$$

により定義される。さらに、これを用いて、 ϕ の汎関数 $F(\phi)$ の無限小変換を

$$\delta(A)F(\phi) = (\delta(A)\phi)^i \cdot \frac{\delta F}{\delta \phi^i} \quad (1.2.80)$$

により定義すると、

$$[A, B] \mapsto \delta([A, B]) = [\delta(A), \delta(B)] \quad (1.2.81)$$

が成り立つ。

内部対称性に対するゲージ場系の内部対称性の作る代数を \mathcal{L} とする；

$$\mathcal{L} = \langle T_A \rangle; \quad [T_A, T_B] = T_C f^C_{AB}. \quad (1.2.82)$$

このとき、 \mathcal{L} に値を取るゲージ場

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_\mu dx^\mu = T_A A_\mu^A dx^\mu \quad (1.2.83)$$

のゲージ変換は、 $\lambda = \lambda^A T_A$ を変換パラメータとして、

$$\begin{aligned} \delta(\lambda)\mathcal{A}_\mu &= D_\mu \lambda \equiv \partial_\mu \lambda + [\mathcal{A}_\mu, \lambda] \\ \Leftrightarrow \delta(\lambda)A_\mu^A &= D_\mu \lambda^A = \partial_\mu \lambda^A + f^A_{BC} A_\mu^B \lambda^C \end{aligned} \quad (1.2.84)$$

で与えられる。また、場 ϕ の共変微分が

$$\delta(\lambda)\phi = -d\rho(\lambda)\phi \mapsto D_\mu \phi = (\partial_\mu - \delta(\mathcal{A}_\mu))\phi \quad (1.2.85)$$

により定義される。この共変微分はゲージ変換に対して、

$$\delta(\lambda)D_\mu \phi = -d\rho(\lambda)D_\mu \phi \quad (1.2.86)$$

と変換する。また、

$$[D_\mu, D_\nu]\phi = d\rho(\mathcal{R}_{\mu\nu})\phi = -\delta(\mathcal{R}_{\mu\nu})\phi \quad (1.2.87)$$

が成り立つ。ここで、

$$\mathcal{R} = \frac{1}{2}\mathcal{R}_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu, \quad \mathcal{R}_{\mu\nu} = T_A R_{\mu\nu}^A \quad (1.2.88)$$

は曲率テンソルで、

$$\mathcal{R} = d\mathcal{A} + \frac{1}{2}[\mathcal{A}, \mathcal{A}], \quad (1.2.89a)$$

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu + [\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu], \quad (1.2.89b)$$

$$R_{\mu\nu}^A = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu^A - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu^A + f^A_{BC} A_\mu^B A_\nu^C \quad (1.2.89c)$$

により定義される。曲率テンソルは、ゲージ変換に対して次のように変換する：

$$\delta(\lambda)\mathcal{R} = -[\lambda, \mathcal{R}]. \quad (1.2.90)$$

また、次の Bianchi 恒等式を満たす：

$$D\mathcal{R} \equiv d\mathcal{R} + [\mathcal{A}, \mathcal{R}] = 0. \quad (1.2.91)$$

1.2.5 カイラル超対称理論のゲージ化

前節で求めたゲージ場に対する超対称理論では、カイラル超組は中性でゲージ変換を受けない。この部分を修正して、ゲージ場のカイラルセクターへの結合を与える操作をゲージ化 (gauging) と呼ぶ。

ゲージ化を行うには、まず、ゲージ群をスカラ多様体 (\mathcal{M}, g) の等長変換群へ埋め込む必要がある。この埋込は、ゲージ群のリー代数の基底を t_A に対して、次の条件を満たす (\mathcal{M}, g) の Killing ベクトルを対応させることにより指定される：

$$t_A \mapsto k_A : [t_A, t_B] = t_C f^C{}_{AB} \mapsto [k_A, k_B] = k_C f^C{}_{AB}. \quad (1.2.92)$$

カイラル超組の運動項に現れる計量は Kähler 計量となるので、 k_A は正則 Killing ベクトルでないといけない。この対応により、無限小ゲージ変換 $\theta^A(x)t_A$ に対して、スカラ場、スピノール場、ゲージ場は次のように変換する：

$$\delta_g Z^j = \theta^A k_A^j(Z), \quad (1.2.93a)$$

$$\delta_g P_L \chi^j = \theta^A \partial_k k_A^j(Z) P_L \chi^k, \quad (1.2.93b)$$

$$\delta_g \lambda^A = -\theta^C f^A{}_{CB} \lambda^B, \quad (1.2.93c)$$

$$\delta_g A_\mu^A = \partial_\mu \theta^A + f^A{}_{BC} A_\mu^B \theta^C \quad (1.2.93d)$$

これに対応して、共変微分を

$$D_\mu Z^j = \partial_\mu Z^j - A_\mu^A k_A^j, \quad (1.2.94a)$$

$$D_\mu P_L \chi^j = \partial_\mu P_L \chi^j + D_\mu Z^l \gamma_{lk}^j P_L \chi^k - A_\mu^A \partial_k k_A^j P_L \chi^k, \quad (1.2.94b)$$

$$D_\mu \lambda^A = \partial_\mu \lambda^A + A_\mu^C f^A{}_{CB} \lambda^B, \quad (1.2.94c)$$

$$D_\mu f_{AB} = \partial_\mu f_{AB} - 2A_\mu^C f^D{}_{C(A} f_{B)D} \quad (1.2.94d)$$

により定義する。この定義の元で、ゲージ変換と可換なカイラル超組の超対称変換は

$$\delta Z^j = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\epsilon} P_L \chi^j, \quad (1.2.95a)$$

$$\delta P_L \chi^j = \frac{1}{\sqrt{2}} (\not{D} Z^j + F^j) \epsilon, \quad (1.2.95b)$$

$$\delta F^j = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\epsilon} (\not{D} P_L \chi^j + P_R \lambda^A k_A^j) \quad (1.2.95c)$$

となる。ベクトル超組の変換は (1.2.46) のままで変更はない。

この修正された超対称変換を用いて $K(Z, \bar{Z})/2$ に対する D 項, $W(Z)$ および $(-1/4)f_{AB}(Z)\bar{\lambda}^A P_L \lambda^B$ に対する F 項を計算することによりゲージ化されたカイラル超組と (非可換) ゲージ超組の系に対するゲージ不変かつ超対称なラグランジュ関数が, $K(Z, \bar{Z}), f_{AB}(Z), W(Z), f^A_{BC}, \mathcal{P}(Z, \bar{Z})$ により一意的に定まる:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{kin,chiral}} + \mathcal{L}_{\text{kin,gauge}} + \mathcal{L}_{\text{pot,chiral}}. \quad (1.2.96)$$

ここで,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{kin,chiral}} = & -g_{j\bar{k}} DZ^j \cdot DZ^k - \frac{1}{2}g_{j\bar{k}} (\bar{\chi}^k \not{D} P_L \chi^j + \bar{\chi}^k \not{D} P_R \chi^j) \\ & + g_{j\bar{k}} \left(F^j - \frac{1}{2}\Gamma_{lm}^j \bar{\chi}^l P_L \chi^m \right) \left(\bar{F}^k - \frac{1}{2}\Gamma_{lm}^{\bar{k}} \bar{\chi}^l P_R \chi^m \right) \\ & + \frac{1}{4}R_{j\bar{k}l\bar{m}} (\bar{\chi}^j P_L \chi^k) (\bar{\chi}^l P_R \chi^m) \\ & - D^A \mathcal{P}_A - \sqrt{2}\bar{\lambda}^A \left(P_L \chi^j k_{Aj} + P_R \chi^{\bar{j}} k_{A\bar{j}} \right), \end{aligned} \quad (1.2.97a)$$

$$\mathcal{L}_{\text{pot,chiral}} = F^j W_j + \bar{F}^{\bar{j}} \bar{W}_{\bar{j}} - \frac{1}{2}W_{jk} \bar{\chi}^j P_L \chi^k - \frac{1}{2}\bar{W}_{\bar{j}\bar{k}} \bar{\chi}^{\bar{j}} P_R \chi^{\bar{k}}, \quad (1.2.97b)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{kin,gauge}} = & -\frac{1}{2}(\text{Re } f_{AB}) (\bar{\lambda}^A P_L \not{D} \lambda^B + F^A \cdot F^B - D^A D^B) \\ & + \frac{1}{2}(\text{Im } f_{AB}) F \cdot \tilde{F} + \frac{i}{4}(\text{Im } D_\mu f_{AB}) \bar{\lambda}^A \gamma_5 \gamma^\mu \lambda^B \\ & + \left[\frac{1}{2\sqrt{2}} f_{ABj} \bar{\chi}^j \left(-\not{F}^{-A} + iD^A \right) P_L \lambda^B - \frac{1}{4} f_{ABj} F^j \bar{\lambda}^A P_L \lambda^B \right. \\ & \left. + \frac{1}{8} f_{ABjk} \bar{\chi}^j P_L \chi^k \bar{\lambda}^A P_L \lambda^B + \text{h.c.} \right]. \end{aligned} \quad (1.2.97c)$$

正確には, Kähler ポテンシャル $K(Z, \bar{Z})$ がキリングベクトル k_A で不変なときのみ, 以上の方法で超対称なラグランジアンが得られる. この場合, 直接得られる D 項では, $\mathcal{P}_A \rightarrow ik_A^j \partial_j K$ とおいた表式が得られる. しかし, 上の表式は, $\mathcal{L}_{k_A} K = r_A(Z) + \bar{r}_A(\bar{Z})$ として, $\mathcal{P} = i(k_A^j \partial_j K - r_A(Z))$ となっている. この修正により, $r_A(z)$ がゼロでない一般の場合にも, ラグランジアンが超対称変換で不変となることが直接計算で確かめられる. この修正は, $\mathcal{L}_{k_A} K = 0$ の場合にも, $\mathcal{P}_A = ik_A^j \partial_j K + p_A$ (p_A は実定数) より, 新たな付加項 $p_A D^A$ を生み出す. ただし, 整合性条件より $p_C f^C_{AB} = 0$ が要求される. この付加項は **FI 項** (Fayet-Illiopoulos term) と呼ばれる.

§1.3

純超重力理論

概要 超対称代数の構造より、一般共変性を保って超対称性を導入するには、超対称性の局所化が必要となる。したがって、超対称な重力理論、すなわち超重力理論には、重力を表す計量場（ないしフレーム場）に加えて超対称変換に対応するゲージ場である Rarita-Schwinger 場が含まれる。4次元では、これらボーズ場とフェルミ場の力学自由度が一致することを確かめ、さらに、フレーム場と Rarita-Schwinger 場に対する一般共変性をもつ最も単純な作用積分が局所超対称変換で不変であることを示す。

1.3.1 準備的事項

- 線形接続とテンソルの共変微分

$$\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu V^\lambda, \quad (1.3.1a)$$

$$\nabla_\mu V_\nu = \partial_\mu V_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda V_\lambda. \quad (1.3.1b)$$

- **Torsion** と曲率トーシオンテンソル $T_{\nu\lambda}^\mu$ を

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = T(X, Y) \Leftrightarrow T_{\nu\lambda}^\mu = 2\Gamma_{[\nu\lambda]}^\mu \quad (1.3.2)$$

により定義する。また、曲率テンソル $R^\mu{}_{\nu\lambda\sigma}$ を

$$([\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X, Y]})Z = R(X, Y)Z \Leftrightarrow R_{\lambda\sigma}{}^{\mu}{}_{\nu} = 2\partial_{[\lambda}\Gamma_{\sigma]\nu}^\mu - 2\Gamma_{[\lambda|\rho]}^\mu \Gamma_{\sigma]\nu}^\rho \quad (1.3.3)$$

により定義する。

- **接続係数** 一般フレーム場を e_a^μ 、双対フレーム場を θ_μ^a とする：

$$\theta^a(e_b) = \delta_b^a, \quad e_a \cdot e_b = g_{ab}(x), \quad \theta^a \cdot \theta^b = g^{ab}(x) \quad (1.3.4)$$

これに対する接続形式 $\omega^a{}_b = dx^\mu \omega_\mu{}^a{}_b$ を

$$\nabla_\mu e_a = e_b \omega_\mu{}^b{}_a, \quad \nabla_\mu \theta^a = -\omega_\mu{}^a{}_b \theta^b. \quad (1.3.5)$$

により定義する。このとき、テンソルの共変微分は

$$\nabla_X (V^a e_a) = X^\mu (D_\mu V^a) e_a \quad : \quad D_\mu V^a = \partial_\mu V^a + \omega_\mu{}^a{}_b V^b, \quad (1.3.6a)$$

$$\nabla_X (W_a \theta^a) = X^\mu (D_\mu W_a) \theta^a \quad : \quad D_\mu W_a = \partial_\mu W_a - W_b \omega_\mu{}^b{}_a \quad (1.3.6b)$$

と表される。また、トーシオンテンソル、曲率テンソルに対応するトーシオン形式 \mathcal{T}^a 、曲率形式 $\mathcal{R}^a{}_b$ が

$$\mathcal{T}^a \equiv \frac{1}{2} T_{bc}{}^a \theta^b \wedge \theta^c = D\theta^a \equiv d\theta^a + \omega^a{}_b \wedge \theta^b, \quad (1.3.7a)$$

$$\mathcal{R}^a{}_b \equiv \frac{1}{2} R_{cd}{}^a{}_b \theta^c \wedge \theta^d = d\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b \quad (1.3.7b)$$

と表される。これより、次の Bianchi 恒等式が得られる：

$$D\mathcal{T}^a = \mathcal{R}^a{}_b \wedge \theta^b \Leftrightarrow \partial_{[\lambda} T_{\mu\nu]}{}^a + T_{[\mu\nu}{}^b \omega_{\lambda]}{}^a{}_b = \theta_{[\lambda}^b R_{\mu\nu]}{}^a{}_b, \quad (1.3.8a)$$

$$D\mathcal{R}^a{}_b \equiv d\mathcal{R}^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \mathcal{R}^c{}_b - \mathcal{R}^a{}_c \wedge \omega^c{}_b = 0. \quad (1.3.8b)$$

- 計量接続 Contorsion $K_{\nu\lambda}{}^\mu$ を

$$\Gamma_{\nu\lambda}{}^\mu = \{\overset{\mu}{\nu\lambda}\} + K_{\nu\lambda}{}^\mu \Leftrightarrow \omega_\mu{}^a{}_b = \omega_\mu{}^a{}_b(e) + K_\mu{}^a{}_b \quad (1.3.9)$$

により定義する。このとき、接続が計量を保つことを要求すると

$$\nabla_\mu g_{\nu\lambda} = 0 \Leftrightarrow K_{\mu(\lambda\nu)} = 0. \quad (1.3.10)$$

が成り立ち、これより、torsion と contorsion は一対一に対応

$$K_{\nu\lambda\mu} = -\frac{1}{2} (T_{\nu\lambda\mu} + T_{\mu\nu\lambda} + T_{\mu\lambda\nu}), \quad (1.3.11a)$$

$$T_{\nu\lambda\mu} = 2(-K_{(\mu\nu)\lambda} + K_{(\mu\lambda)\nu}) \quad (1.3.11b)$$

- 正規直交フレームバンドルの接続 正規直交フレーム場を e_a^μ 、双対フレーム場を θ_μ^a とするとき、計量接続の接続係数は

$$\omega_{ab} + \omega_{ba} = -dg_{ab} = 0 \quad (1.3.12)$$

を満たす。また、スピノールの共変微分が

$$D_\mu \psi = \partial_\mu \psi + \frac{1}{4} \omega_{\mu ab} \gamma^{ab} \psi \quad (1.3.13)$$

により定義される。このとき、

$$D_\mu \gamma^a = 0, \quad D_\mu \gamma_\nu = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \gamma_\lambda \quad (1.3.14)$$

が成り立つ。

- Levi-Civita 接続 $\omega^a{}_b(e) = \omega_\mu{}^a{}_b(e) dx^\mu$ は、条件

$$\omega_{ab}(e) + \omega_{ba}(e) = -dg_{ab} = 0, \quad (1.3.15a)$$

$$d\theta^a + \omega^a{}_b(e) \wedge \theta^b = 0 \quad (1.3.15b)$$

により一意的に定まる。

1.3.2 重力場

一般共変性 重力場が計量テンソルのみで決定され、重力場の方程式が一般共変性をもつ計量の2階微分方程式とするのとすると、4次元では、場の方程式あるいは作用積分は一意的に定まり、Einstein-Hilbert 作用積分

$$S_{\text{EH}} = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^D x \sqrt{-g} (R_s(g) - 2\Lambda). \quad (1.3.16)$$

ただし、 $D \geq 5$ では、一意性は破れ、より一般的な Lovelock 理論で与えられる:

$$S_{\text{Lovelock}} = \int d^D x \sqrt{-g} \sum_{m=0}^{[(D-1)/2]} c_m \mathcal{L}_m; \quad (1.3.17)$$

$$\mathcal{L}_m = \frac{1}{2^{3m} \pi^m m!} \delta_{\rho_1 \kappa_1 \dots \rho_m \kappa_m}^{\lambda_1 \sigma_1 \dots \lambda_m \sigma_m} R_{\lambda_1 \sigma_1}{}^{\rho_1 \kappa_1} \dots R_{\lambda_m \sigma_m}{}^{\rho_m \kappa_m} \quad (1.3.18)$$

具体的な表式は、

$$\mathcal{L}_0 = 1, \quad \mathcal{L}_1 = \frac{1}{4\pi} R_s, \quad \mathcal{L}_2 = \frac{1}{32\pi^2} (R_s^2 - 4R_\mu{}^\nu R_\nu{}^\mu + R_{\mu\nu\lambda\sigma} R^{\lambda\sigma\mu\nu}) \quad (1.3.19)$$

局所ローレンツ不変性 スピノール場は、接バンドルの構造群の $\text{SO}(D-1, 1)$ 簡約、すなわち正規直交基底の選択に依存するので、重力場がスピノール場と結合する場合には、正規直交基底 e_a ないしその双対基底 θ^a が重力場を記述する基本場となる。また、このとき、接続 ω_b^a はトーションを持ち得る。

これらフレーム場と接続係数の組 $\Omega = (\theta^a, \omega_b^a)$ を基本変数とする記述では、局所ローレンツ変換に対応する正規直交基底の変更に対して理論は不変でないといけないので、新たなゲージ対称性が生じる。対応するゲージ変換は、無限小局所ローレンツ変換 $\lambda = (\lambda_b^a(x)) \in \mathfrak{so}(D-1, 1)$ に対し、

$$\delta_\lambda \theta^a = \lambda_b^a \theta^b, \quad \delta \omega_b^a = -D\lambda_b^a = -d\lambda_b^a - [\omega, \lambda]_b^a \quad (1.3.20)$$

で与えられる。1階形式での Einstein-Hilbert 作用積分に対応する作用積分

$$S_2 = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^D x |\theta| e_a^\mu e_b^\nu R_{\mu\nu}{}^{ab}(\omega) \quad (1.3.21)$$

は、局所ローレンツ変換で不変となる。公式

$$\partial_\mu |\theta| = -|\theta| \theta_\nu^a \partial_\mu e_a^\nu = |\theta| \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda, \quad (1.3.22a)$$

$$D_\mu e_a^\nu = -e_a^\lambda \Gamma_{\mu\lambda}^\nu, \quad D_\mu \theta_\nu^a = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \theta_\lambda^a \quad (1.3.22b)$$

より、この作用積分の ω_b^a に対する変分は

$$2\kappa^2 \delta_\omega S = \int d^D x |\theta| \left(\frac{1}{2} T^{ab\mu} + T_c^{[a|c|} e^{b]\mu} \right) \delta \omega_{\mu ab} \quad (1.3.23)$$

で与えられる。対応する変分方程式により、トーシオンは一意的に決まり、他の場が存在しない今の場合は、 $\mathcal{T}^a = 0$ となる。

なお、 Ω をポアンカレ群 $\mathcal{P} = \{(a, \Lambda) \mid a \in \mathbb{R}^D, \Lambda \in \text{SO}(D-1, 1)\}$ に対するゲージ場とみなすと、その曲率形式は

$$(\mathcal{T}^a, \mathcal{R}^a{}_b) = d\Omega + [\Omega, \Omega] \quad (1.3.24)$$

となる。

力学自由度 変分方程式によりトーシオンは他の場により一意的に決まるので、重力場の力学自由度は、計量理論のものと一致する。計量を

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + q_{ij}(dx^i + \beta^i dt)(dx^j + \beta^j dt) \quad (1.3.25)$$

と $((D-1) + 1)$ 分解すると、ラプス関数 $N(x)$ とシフトベクトル $\beta^j(x)$ は、座標系の取り方を決定する非力学的自由度となります。また、Einstein-Hilbert 作用積分は

$$S_{\text{EH}} = \frac{1}{2\kappa^2} d^D x [\dot{q}_{ij} p^{ij} - N\mathcal{H}_\perp - \beta^j \mathcal{H}_j]; \quad (1.3.26)$$

$$p^{ij} = -\frac{\sqrt{q}}{2\kappa^2} (K^{ij} - K q^{ij}); \quad K_{ij} = -\frac{1}{2N} (\dot{q}_{ij} - D_i \beta_j - D_j \beta_i), \quad (1.3.27)$$

$$\mathcal{H}_\perp = \frac{2\kappa^2}{\sqrt{q}} \left(p_k^j p_j^k - \frac{1}{2} p^2 \right) - \frac{\sqrt{q}}{2\kappa^2} R_s[q], \quad (1.3.28)$$

$$\mathcal{H}_j = -2D_k p_j^k \quad (1.3.29)$$

と表される。これより、 (q_{ij}, p^{ij}) に対する時間について1階の時間発展方程式と、各時空点ごとに、初期値に対する D 個の拘束条件

$$\mathcal{H}_\perp = 0, \quad \mathcal{H}_j = 0 \quad (1.3.30)$$

が得られる。以上より、真空重力場の力学自由度は

$$\frac{1}{2}D(D+1) - 2D = \frac{1}{2}D(D-1) - D = \frac{1}{2}D(D-3) \quad (1.3.31)$$

となる。

1.3.3 Rarita-Schwinger 場

局所超対称性 スピノール場が存在するとき、正規直交フレーム場 (e_a, θ^a) を導入し、その局所ローレンツ変換に対して不変となるよう理論を作る必要がある。大域的なローレンツ変換 $\delta_\lambda (\lambda \in \mathfrak{so}(D-1, 1))$ と超対称変換 δ_ϵ (ϵ は D 次元の Majorana スピノール) の交換関係は

$$[\delta_\lambda, \delta_\epsilon] = \frac{1}{2} \delta_{\lambda \cdot \gamma \epsilon} \quad (1.3.32)$$

となるので、ローレンツ変換を $\lambda \rightarrow \lambda(x)$ 局所化すると、 $\epsilon' = \lambda \cdot \gamma \epsilon \rightarrow \epsilon'(x) = \lambda(x) \cdot \gamma \epsilon$ より、超対称変換も局所化する必要がある。すなわち、一般共変性と整合的に超対称性を導入するには、必ず、そのゲージ化が必要である。

逆に、超対称変換の交換関係

$$[\delta_{\epsilon_1}, \delta_{\epsilon_2}] = -\frac{1}{2} D_{\bar{\epsilon}_1 \gamma^a \epsilon_2} \quad (1.3.33)$$

より、超対称性を局所化（ゲージ化）するためには、理論の変換群に一般的な併進、すなわち一般座標変換を含めることが要求される。

ゲージ場 一般に、群で記述される理論の大域的対称性をゲージ対称性に拡張するには、ゲージ変換に対して、 $\delta A_\mu = D_\mu \lambda$ と変換するゲージ場 A_μ を導入する必要がある。同様に、大域的超対称性をゲージ化するには、 $\delta \psi_\mu = D_\mu \epsilon$ と変換するベクトルスピノール場が必要となる。実際、このゲージスピノール場を用いると、例えば、カイラル超組 (Z, χ, F) の「共変微分」を

$$\hat{D}_\mu Z = \partial_\mu Z - \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\psi}_\mu P_L \chi, \quad (1.3.34a)$$

$$\hat{D}_\mu P_L \chi = \partial_\mu P_L \chi - \frac{1}{\sqrt{2}} P_L (\hat{D} Z + F) \psi_\mu, \quad (1.3.34b)$$

$$\hat{D}_\mu F = \partial_\mu F - \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\psi}_\mu \hat{D} \chi \quad (1.3.34c)$$

により導入すれば、これらの量の局所超対称変換は $\partial_\mu \epsilon$ を含まない形で与えられる。

Rarita-Schwinger 場 一般座標変換、局所ローレンツ変換、局所超対称変換 $\delta \psi_\mu = D_\mu \epsilon$ に対して不変で、 ψ_μ について 2 次、微分に関して 1 階の作用積分は

$$S_{3/2} = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^D x |\theta| (-\bar{\psi}_\mu \gamma^{\mu\nu\lambda} D_\nu \psi_\lambda) \quad (1.3.35)$$

という表式をもつ。ここで、 D_μ の取り方には自由度があるが、ここでは、4 次元の場合の純超重力理論と一致するよう、 $\text{SO}(D-1, 1)$ 接続に対応する共変微分

$$D_\mu \psi_\nu = \left(\partial_\mu + \frac{1}{4} \omega_{\mu ab} \gamma^{ab} \right) \psi_\nu \quad (1.3.36)$$

を採用する。ただし、この定義だと、 $[\mu, \nu]$ について反対称化しない限り、座標の添え字に関してはテンソル性を持たないので注意を要する。 $\nabla_\mu \psi_\nu = D_\mu \psi_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(e) \psi_\lambda$ を用いてこのテンソル性を回復することもできるが、ここでは採用しない。

ここで、 $S = S_2 + S_{3/2}$ に対する変分方程式から、 ω^a_b を決定することにする。このとき、

$$\hat{\nabla}(e)_\mu V_\nu^a = \nabla_\mu(e) V_\nu^a + \omega(e)_\mu{}^a{}_b V^b \quad (1.3.37)$$

に対して、

$$\partial_\mu(|\theta| V^\mu) = |\theta| \nabla(e)_\mu V^\mu, \quad \hat{\nabla}(e)_\mu e_a^\nu = \hat{\nabla}(e)_\mu \theta^a = 0 \quad (1.3.38)$$

より、

$$\begin{aligned} 2\kappa^2 \delta_\omega S_2 &= \int d^D x |\theta| (-2) e_a^\mu e_b^\nu D_\nu \delta \omega_\mu{}^{ab} \\ &= \int d^D x |\theta| (T_{ab}{}^\mu + 2T)_{ca} e_b^\mu \delta \omega_\mu{}^{ab}. \end{aligned} \quad (1.3.39)$$

つぎに、

$$\begin{aligned} \gamma^{mnl} \gamma_{ab} &= \gamma^{mnl}{}_{ab} + 6\delta_a^{[l} \delta_b^{n} \gamma^m] + 6\delta_a^{[l} \gamma^{mn]}{}_b, \\ \gamma_{ab} \gamma^{mnl} &= \gamma^{mnl}{}_{ab} + 6\delta_a^{[l} \delta_b^{n} \gamma^m] - 6\delta_a^{[l} \gamma^{mn]}{}_b, \end{aligned} \quad (1.3.40a)$$

より、

$$\begin{aligned} 2\kappa^2 \delta_\omega S_{3/2} &= \int d^D x |\theta| \left(-\frac{1}{4} \right) \bar{\psi}_\mu \gamma^{\mu\nu\lambda} \gamma^{ab} \psi_\lambda \delta \omega_{\mu ab} \\ &= \int d^D x |\theta| \frac{1}{4} \bar{\psi}_\nu (\gamma^{\mu\nu\lambda}{}_{ab} + 6\delta_a^{[\lambda} \delta_b^{\nu]} \gamma^\mu) \psi_\lambda \delta \omega_\mu{}^{ab} \end{aligned} \quad (1.3.41)$$

よって、 $\delta_\omega S = 0$ より

$$T_{ab}{}^\mu = \frac{1}{2} \bar{\psi}_a \gamma^\mu \psi_b + \frac{1}{4} \bar{\psi}_\nu \gamma^{\nu\mu\rho}{}_{ab} \psi_\rho. \quad (1.3.42)$$

トーシオンとしてこの値を取る接続をもとの作用積分に代入し、その θ_μ^a 、 ψ_μ に関する変分を取ると、 $\delta \omega^a_b$ 経由の項は自動的にゼロとなる。これより、 θ_μ^a 、 ψ_μ に対する場の方程式は、 ω^a_b を独立の場として θ_μ^a 、 ψ_μ に関する変分を取り、得られた変分方程式で ω^a_b に上記のトーシオンに対応する表式を代入すれば正しい方程式が得られる(1.5次形式)。

場の方程式 この方法を用いると、まず、 ψ_μ に対する方程式は

$$\begin{aligned} & |\theta|^{-1} \partial_\nu (|\theta| \bar{\psi}_\mu \gamma^{\mu\nu\lambda} \delta\psi_\lambda) \\ &= \overline{D_\nu \psi_\mu} \gamma^{\mu\nu\lambda} \delta\psi_\lambda + \bar{\psi}_\mu \gamma^{\mu\nu\lambda} D_\nu \delta\psi_\lambda - 3K_\nu^{[\lambda} \bar{\psi}_\mu \gamma^{\mu\nu]a} \delta\psi_\lambda \end{aligned} \quad (1.3.43)$$

より、

$$\gamma^{\mu\nu\lambda} D_\nu \psi_\lambda = -\frac{3}{2} K_\nu^{[\mu} \gamma^{\lambda\nu]a} \psi_\lambda. \quad (1.3.44)$$

この方程式は、次式と同等：

$$\gamma^{\mu\nu\lambda} D(e)_\nu \psi_\lambda + \frac{3}{2} K_\nu^{[\lambda\nu} \gamma^{\mu]} \psi_\lambda + \frac{1}{4} K_{\nu ab} \gamma^{\mu\nu\lambda ab} \psi_\lambda = 0. \quad (1.3.45)$$

次に、作用積分の θ_μ^a に関する変分

$$2\kappa^2 \delta_\theta S_{3/2} = \int d^D x |\theta| (e_a^\mu \bar{\psi}_\rho \gamma^{\rho\nu\lambda} - 3\bar{\psi}_\rho e_a^{[\rho} \gamma^{\nu\lambda]\mu}) D_\nu \psi_\lambda \delta\theta_\mu^a, \quad (1.3.46a)$$

$$2\kappa^2 \delta_\theta S_2 = \int d^D x |\theta| (R_s(\omega) e_a^\mu - 2e^{b\mu} e_a^\nu R_{\nu b}) \delta\theta_\mu^a \quad (1.3.46b)$$

より、Einstein 方程式は

$$\begin{aligned} & e_a^\nu R(\omega)_{\nu b} e^{b\mu} - \frac{1}{2} R_s(\omega) e_a^\mu \\ &= \frac{1}{2} \bar{\psi}_\rho \gamma^{\rho\nu\lambda} D_\nu \psi_\lambda - \frac{3}{2} \bar{\psi}_\rho e_a^{[\rho} \gamma^{\nu\lambda]\mu} D_\nu \psi_\lambda. \end{aligned} \quad (1.3.47)$$

上記の RS 場の方程式を代入すると、右辺はゼロとなることが示される。よって、

$$R(\omega)_{\mu a} \equiv e^{b\nu} R(\omega)_{\mu\nu ab} = 0 \quad (1.3.48)$$

力学自由度 $d_s(D)$ を D 次元での既約実スピノール表現の次元とする：

D	3	4	5	6	7	8	9	10	11
d_s	4	4	8	8	16	16	16	16	32
タイプ	M	M	SM	SMW	SM	M	M	MW	M

線形化された方程式

$$\gamma^{\mu\nu\lambda} D_\nu \psi_\lambda = 0 \quad (1.3.49)$$

($D_\mu = D_\mu^{(e)}$) は、次式と同値：

$$\gamma^\nu (D_\nu \psi_\mu - D_\mu \psi_\nu) = 0. \quad (1.3.50)$$

簡単のため、背景時空が平坦とすると、ゲージ変換 $\delta_\epsilon \psi_\mu = \partial_\mu \epsilon$ により、 $\psi_0 = 0$ とできる。このとき、残留ゲージ自由度 $\delta_\epsilon \psi_j = \partial_j \epsilon(x^j)$ と、上記方程式の $\mu = 0$ 成分より得られる方程式 $\partial_0 \gamma \cdot \psi = 0$ より、 $\gamma \cdot \psi = 0$ とゲージ固定できる。このとき、このゲージ条件の整合性条件として、

$$\not{\partial}(\gamma \cdot \psi) = \gamma^{ab} \partial_a \psi_b + \partial \cdot \psi = 0 \Rightarrow \partial \cdot \psi = \partial^j \psi_j = 0 \quad (1.3.51)$$

が得られる。以上より、ゲージ固定条件は

$$\psi_0 = 0, \quad \gamma^j \psi_j = 0, \quad \partial^j \psi_j = 0 \quad (1.3.52)$$

となり、場の方程式は

$$\not{\partial} \psi_j = 0 \quad (1.3.53)$$

と簡単化される。このゲージ固定条件は完全なので、初期値の自由度は $(D-3)d_s(D)$ となる。発展方程式は1階なので、通常力学自由度はその半分の

$$\frac{1}{2}(D-3)d_s(D) \quad (1.3.54)$$

で与えられる。これと、重力場の力学自由度の差は

$$\Delta = \frac{1}{2}(D-3)d_s(D) - \frac{D(D-3)}{2} = \frac{D-3}{2}(d_s(D) - D) \quad (1.3.55)$$

となる。これより、 $D = 3$ および $D = 4$ では両者の自由度がちょうど一致する。一方、 $D \geq 5$ では、重力場の自由度が不足する。したがって、これらの次元で超重力理論を作るには、余分な場が必要となる。

1.3.4 4次元極小超重力理論

4次元では、以上で用いた作用積分

$$S = S_2 + S_{3/2}; \quad (1.3.56)$$

$$S_2 = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^D x |\theta| e_a^\mu e_b^\nu R_{\mu\nu}{}^{ab}[\omega], \quad (1.3.57)$$

$$S_{3/2} = -\frac{1}{2\kappa^2} \int d^D x |\theta| \bar{\psi}_\mu \gamma^{\mu\nu\lambda} D_\nu[\omega] \psi_\lambda, \quad (1.3.58)$$

$$\omega^a{}_b : T_{ab}{}^\mu = \frac{1}{2} \bar{\psi}_a \gamma^\mu \psi_b \quad (1.3.59)$$

が局所超対称性をもつ。

まず、基本場 (θ_μ^a, ψ_μ) の局所超対称変換は

$$\delta_\epsilon \theta_\mu^a = \frac{1}{2} \bar{\epsilon} \gamma^a \psi_\mu, \quad (1.3.60a)$$

$$\delta_\epsilon \psi_\mu = D_\mu \epsilon \equiv \partial_\mu \epsilon + \frac{1}{4} \omega_{\mu ab} \gamma^{ab} \epsilon \quad (1.3.60b)$$

となる。実際、交換関係は

$$[\delta_{\epsilon_1}, \delta_{\epsilon_2}] \theta_a^\mu = (\delta_\xi - \delta_{\hat{\lambda}} - \delta_{\hat{\epsilon}}) e_a^\mu, \quad (1.3.61a)$$

$$[\delta_{\epsilon_1}, \delta_{\epsilon_2}] \psi_\mu = (\delta_\xi - \delta_{\hat{\lambda}} - \delta_{\hat{\epsilon}}) \psi_\mu \pmod{\text{EOM}} \quad (1.3.61b)$$

となり、微分同相変換、局所ローレンツ変換と合わせて閉じた超代数を構成する。ここで、

$$\xi^a = -\frac{1}{2} \bar{\epsilon}_1 \gamma^a \epsilon_2, \quad \hat{\lambda}_{ab} = \xi^\rho \omega_{\rho ab}, \quad \hat{\epsilon} = \xi^\rho \psi_\rho. \quad (1.3.62)$$

1.5次形式を用いると、この変換に対する作用積分の変化は

$$\begin{aligned} 2\kappa^2 \delta S &= \int d^4 x |\theta| \left[(e_a^\mu R_s[\omega] - 2R_a{}^\mu[\omega]) \delta \theta_\mu^a + i \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} \bar{\psi}_\mu \gamma_5 \gamma_a D_\nu \psi_\rho \delta \theta_\mu^a \right. \\ &\quad \left. + \frac{i}{4} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (\bar{\psi}_\mu \gamma_5 \gamma_\sigma \gamma^{ab} R_{\nu\rho ab} \epsilon + 2T^a{}_{\nu\sigma} \bar{\psi}_\mu \gamma_5 \gamma_a D_\rho \epsilon) \right] \end{aligned} \quad (1.3.63)$$

ここで、

$$\frac{i}{4} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \bar{\psi}_\mu \gamma_5 \gamma_\sigma \gamma^{ab} R_{\nu\rho ab} \epsilon = (R_s e_a^\mu - 2R_a{}^\mu) \delta \theta_\mu^a + \frac{i}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} R_{\nu\lambda\rho\sigma} \bar{\psi}_\mu \gamma_5 \gamma^\sigma \epsilon, \quad (1.3.64)$$

$$(\bar{\psi}_\mu \gamma_5 \gamma_a D_\nu \psi_\rho) (\bar{\epsilon} \gamma^a \psi_\sigma) = \frac{1}{2} T^b{}_{\nu\sigma} (\bar{\epsilon} \gamma_5 \gamma_b D_\nu \psi_\rho) \quad (1.3.65)$$

を用いると、

$$2\kappa^2 \delta S = \int d^4 x |\theta| \frac{i}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (R_{\nu\rho\sigma a} + D_\nu T^a{}_{\rho\sigma}) (\bar{\epsilon} \gamma_5 \gamma^a \psi_\mu). \quad (1.3.66)$$

したがって、ビアンキ恒等式

$$D \mathcal{F}^a = \mathcal{R}^a{}_b \wedge \theta^b \Leftrightarrow D_{[\nu} T^a{}_{\rho\sigma]} = -R_{[\nu\rho\sigma]}{}^a \quad (1.3.67)$$

より、 $\delta S = 0$ となる。

§1.4

4次元 $\mathcal{N} = 1$ 超重力理論

概要 まず、曲がった D 次元時空において、Poincaré 代数を含む最小の共形変換群 $SO(D, 2)$ に対応するゲージ場を極小結合させることにより、スカラー場に対する共形不変な理論を構成し、その理論に適切な拘束条件を課し、さらに Poincaré 変換以外の共形ゲージ自由度を固定すると、フレーム場に対する Einstein-Hilbert 作用積分が得られることを示す。次に、対称性を Poincaré 超代数を含む超共形変換群 $SU(2|2)$ に拡張し、スカラー場の代わりにカイラル超組に対する超共形不変な理論に対して類似の処理を行うと、フレーム場と Rarita-Schwinger 場からなる 4 次元の純超重力理論が得られることを見る。最後に、スケール変換不変性をもつ、一般的な 4 次元超対称理論に超共形ゲージ場を極小結合させることにより、超共形不変な理論を構成し、それに同様の拘束条件によるゲージ場の除去とゲージ固定処理を行うことにより、カイラル超組およびゲージ超組と結合した最も一般的な 4 次元超重力理論を導出する。

1.4.1 一般座標変換

無限小座標変換 $\delta x^\mu = \xi^\mu$ に対する場の一般座標変換は

$$\delta_{\text{gct}}(\xi)\phi = \mathcal{L}_\xi\phi. \quad (1.4.1)$$

ただし、この変換は内部ゲージ変換と整合的でないので、共変的無限小座標変換を

$$\delta_{\text{cgct}}(\xi) = \delta_{\text{gct}}(\xi) - \delta(\xi^\mu A_\mu^A T_A) \quad (1.4.2)$$

により定義する。この節では、ゲージ場、リー代数の基底の添え字 A, B, C は内部自由度のみを動くとし、並進の自由度を含める時は、 A', B', C' などを使う
具体的には

- 座標スカラ場 ϕ :

$$\delta_{\text{cgct}}(\xi)\phi = \xi^\mu \mathcal{D}_\mu\phi \equiv \xi^\mu(\partial_\mu + A_\mu^A t_A)\phi. \quad (1.4.3)$$

- 内部ゲージ場 A_μ^A : ゲージ場の変換が δ 、拡張した形

$$\delta(\Lambda)A_\mu^A = \partial_\mu\Lambda^A + f^A{}_{BC}A_\mu^B\Lambda^C + \Lambda^B\mathcal{M}_{\mu B}{}^A, \quad (1.4.4)$$

をとるとき、

$$\delta_{\text{cgct}}(\xi)A_\mu^A = \xi^\nu \hat{R}_{\nu\mu}{}^A. \quad (1.4.5)$$

ここで、

$$\hat{R}^A = dA^A + f^A{}_{BC}A^B \wedge A^C - A^B \wedge \mathcal{M}_B{}^A. \quad (1.4.6)$$

なお、このゲージ変換の一般化により、共変量のゲージ変換は以下のように修正される：

$$\delta(\Lambda)D_a\phi = -\lambda_a{}^b D_b\phi - \theta^A t_A D_a\phi, \quad (1.4.7a)$$

$$\delta(\Lambda)\hat{R}_{ab}{}^A = f^A{}_{CB}\Lambda^B \hat{R}_{ab}{}^C + 2\Lambda^B D_{[a}\mathcal{M}_{b]B}{}^A - 2\Lambda^C \mathcal{M}_{[a|C|}{}^B \mathcal{M}_{b]B}{}^A. \quad (1.4.7b)$$

また、共変微分の交換関係および Bianchi 恒等式は

$$[\mathcal{D}_a, \mathcal{D}_b]\phi = -\hat{R}_{ab}{}^A T_A\phi, \quad (1.4.8)$$

$$\mathcal{D}_{[a}\hat{R}_{bc]}{}^A = 2\hat{R}_{[ab}{}^B \mathcal{M}_{c]B}{}^A. \quad (1.4.9)$$

- フレーム場 θ_μ^a :

$$\delta_{\text{cgct}}(\xi)\theta_\mu^a = \partial_\mu\xi^a + f^a{}_{Bc}A_\mu^B\xi^c - \xi^\nu \mathcal{R}_{\mu\nu}(P^a). \quad (1.4.10)$$

以上の、共変的一般座標変換は、座標スカラ場、ゲージ場に対しては、内部自由度に対応するゲージ変換と可換となる：

$$[\delta(\Lambda), \delta_{\text{cgct}}(\xi)]\phi = [\delta(\Lambda), \delta_{\text{cgct}}(\xi)]A_\mu^A = 0. \quad (1.4.11)$$

1.4.2 Einstein 重力に対する共形的アプローチ

共形代数 D 次元時空の共形群は $SO(D, 2)$ で与えられ, そのリー代数は

$$\mathcal{L}(SO(D, 2)) = \langle P_a, M_{ab}, K_a, D \rangle \quad (1.4.12)$$

交換関係は

$$[P_a, P_b] = 0, \quad [M_{ab}, M_{cd}] = 4\eta_{[a[c}M_{d]b]}, \quad (1.4.13a)$$

$$[M_{ab}, P_c] = -2\eta_{c[a}P_{b]}, \quad [M_{ab}, K_b] = -2\eta_{c[a}K_{b]}, \quad (1.4.13b)$$

$$[P_a, K_b] = 2(\eta_{ab}D + M_{ab}), \quad [D, P_a] = P_a, \quad [D, K_a] = -K_a. \quad (1.4.13c)$$

平坦なミンコフスキー時空への作用は

$$\xi^a = a^a + \lambda^{ab}x_b + \lambda_D x^a + (x \cdot x \lambda_K^a - 2x^a x \cdot \lambda_K), \quad (1.4.14)$$

より,

$$P_a = \partial_a, \quad M_{ab} = x_b \partial_a - x_a \partial_b, \quad D = x^a \partial_a, \quad K_a = x \cdot x \partial_a - 2x_a x^b \partial_b. \quad (1.4.15)$$

局所共形対称性と対応するゲージ場 共形代数の基底 T_A と, 無限小局所変換のパラメータ Λ^A , およびゲージ場 A^A を次のように表す:

$$\Lambda^A T_A = \xi^a(x) P_a + \frac{1}{2} \lambda^{ab}(x) M_{ab} + \lambda_D(x) D + \lambda_K^a(x) K_a \quad (1.4.16a)$$

$$\mathcal{A} = A^A T_A = \theta^a P_a + \frac{1}{2} \omega^{ab} M_{ab} + b D + f^a K_a. \quad (1.4.16b)$$

ゲージ場の内部局所変換に対する変換は

$$\delta \theta^a = -\lambda^a_b \theta^b - \lambda_D \theta^a, \quad (1.4.17a)$$

$$\delta \omega^{ab} = d\lambda^{ab} + 2\omega_c^{[a} \lambda^{b]c} - 4\lambda_K^{[a} \theta^{b]}, \quad (1.4.17b)$$

$$\delta f^a = d\lambda_K^a - b\lambda_K^a + \omega^a_b \lambda_K^b - \lambda^a_b f^b + \lambda_D f^a, \quad (1.4.17c)$$

$$\delta b = d\lambda_D + 2\lambda_K^a \theta_a. \quad (1.4.17d)$$

曲率テンソルは

$$\mathcal{R}(P^a) = \mathcal{F}^a + b \wedge \theta^a; \quad \mathcal{F}^a = d\theta^a + \omega^a_b \theta^b, \quad (1.4.18a)$$

$$\mathcal{R}(M^{ab}) = d\omega^{ab} + \omega^a_c \wedge \omega^{cb} + 4\theta^{[a} \wedge f^{b]}, \quad (1.4.18b)$$

$$\mathcal{R}(K^a) = df^a + \omega^a_b f^b, \quad (1.4.18c)$$

$$\mathcal{R}(D) = db + 2\theta^a \wedge f_a. \quad (1.4.18d)$$

これらの内部ゲージ変換は

$$\delta \mathcal{R}(P^a) = -\lambda^a_b \mathcal{R}(P^b) - \lambda_D \mathcal{R}(P^a), \quad (1.4.19a)$$

$$\delta \mathcal{R}(M^{ab}) = 2\lambda^{[a}_c \mathcal{R}(M^{b]c}) - 4\lambda_K^{[a} \mathcal{R}(P^{b]}), \quad (1.4.19b)$$

$$\delta \mathcal{R}(K^a) = -\lambda^a_b \mathcal{R}(K^b) + \lambda_D \mathcal{R}(K^a), \quad (1.4.19c)$$

$$\delta \mathcal{R}(D) = 2\lambda_{K^a} \mathcal{R}(P^a). \quad (1.4.19d)$$

拘束条件

(i) $\mathcal{R}_{\mu\nu}(P^a) = 0$: この条件は

$$\mathcal{F}^a \equiv d\theta^a + \omega^a{}_b \wedge \theta^b = -b \wedge \theta^a \quad (1.4.20)$$

となる。これより,

$$\omega_\mu{}^a{}_b = \omega_\mu{}^a{}_b(e) + K_\mu{}^a{}_b; \quad (1.4.21)$$

$$K_{\mu ab} = 2\theta_\mu^{[a} e^{b]\nu} b_\nu \quad (1.4.22)$$

(ii) $e_b^\nu \mathcal{R}_{\mu\nu}(M^{ab}) = 0$: この条件は

$$e_b^\nu \mathcal{R}_{\mu\nu}(M^{ab}) = R_\mu{}^a(\omega) + \theta_\mu^a f_b^b + f_\mu^a \quad (1.4.23)$$

より,

$$f_a^a = -\frac{1}{2(D-1)} R_s(\omega), \quad (1.4.24a)$$

$$(D^2)f_\mu^a = -R_\mu{}^a(\omega) + \frac{R_s(\omega)}{2(D-1)} \theta_\mu^a. \quad (1.4.24b)$$

これらの拘束条件は、局所共形変換と整合的である。

共形不変な作用積分 スカラ場 ϕ の共形ウエイトを w とする :

$$\delta(\lambda_D D)\phi = \lambda_D w \phi. \quad (1.4.25)$$

このとき、 ϕ の共変微分は

$$\mathcal{D}_a \phi = (\partial_a - w b_a) \phi = e_a^\mu (\partial_\mu - w b_\mu) \phi. \quad (1.4.26)$$

また、そのゲージ変換は

$$\delta \mathcal{D}_a \phi = -\lambda_a{}^b \mathcal{D}_b \phi - 2w \lambda_{K a} \phi + (w+1) \lambda_D \mathcal{D}_a \phi. \quad (1.4.27)$$

よって,

$$\square^C \phi = \partial^a \mathcal{D}_a \phi + \{\omega_b{}^{ba} - (w+1)b^a\} \mathcal{D}_a \phi + 2w f_a^a \phi \quad (1.4.28)$$

このゲージ変換は,

$$\delta \square^C \phi = (w+2) \lambda_D \square^C \phi + 2(D-2w-2) \lambda_K^a \mathcal{D}_a \phi. \quad (1.4.29)$$

よって,

$$\delta|\theta| = e_a^\mu \delta_\mu^a |\theta| = -D \lambda_D |\theta| \quad (1.4.30)$$

より,

$$w = \frac{1}{2}(D - 2) \quad (1.4.31)$$

と取ると,

$$\delta(|\theta|\phi\Box^C\phi) = (w + 2 - D + w)|\theta|\phi\Box^C\phi = 0. \quad (1.4.32)$$

以上より, 作用積分

$$S = \int d^D x |\theta| \left(-\frac{1}{2}\right) \phi\Box^C\phi \quad (1.4.33)$$

は共形不変で, 拘束条件 $\mathcal{R}_{\mu\nu}(P^a) = 0$, $e_b^\nu \mathcal{R}_{\mu\nu}(M^{ab}) = 0$ に加えて, K^a 変換に対するゲージ条件

$$\text{K-gauge} : b_\mu = 0 \rightarrow \lambda_K^a = -\frac{1}{2}\partial_a \lambda_D \quad (1.4.34)$$

を課すと, 作用積分は

$$S = \int d^D x |\theta| \left(-\frac{1}{2}\phi\Box\phi + \frac{D^2}{4(D-1)}R_s\phi^2\right). \quad (1.4.35)$$

この作用積分は依然として局所共形不変で, このゲージ自由度を

$$\phi^2 = \frac{2}{\kappa^2} \frac{D-1}{D-2} \quad (1.4.36)$$

により固定すると, 最終的に Einstein-Hilbert 作用積分が得られる:

$$S = \int d^D x |\theta| \frac{1}{2\kappa^2} R_s(e). \quad (1.4.37)$$

1.4.3 4次元純超重力理論に対する超共形アプローチ

超共形代数 $SU(2, 2|1)$ Poincaré 共形代数 $SU(2, 2)$ を含む最小の超代数は, $SU(2, 2|1)$ で与えられ, 生成元は

$$\mathcal{L}_0 = \langle P_a, M_{ab}, K_a, D \rangle \oplus \langle T \rangle, \quad \mathcal{L}_1 = \langle Q_\alpha, S_\alpha \rangle. \quad (1.4.38)$$

$SU(2, 2) \cong SO(4, 2)$ 部分代数以外のゼロでない交換関係は,

$$[M_{ab}, Q] = -\frac{1}{2}\gamma_{ab}Q, \quad [M_{ab}, S] = -\frac{1}{2}\gamma_{ab}S, \quad (1.4.39a)$$

$$[K_a, Q] = \gamma_a S, \quad [P_a, S] = \gamma_a Q, \quad (1.4.39b)$$

$$[D, Q] = \frac{1}{2}Q, \quad [D, S] = -\frac{1}{2}S, \quad (1.4.39c)$$

$$[T, Q] = -\frac{3}{2}i\gamma_5 Q, \quad [T, S] = \frac{3}{2}i\gamma_5 S, \quad (1.4.39d)$$

$$\{Q_\alpha, Q^\beta\} = -\frac{1}{2}(\gamma^a)_\alpha{}^\beta P_a, \quad \{S_\alpha, S^\beta\} = -\frac{1}{2}(\gamma^a)_\alpha{}^\beta K_a, \quad (1.4.39e)$$

$$\{Q_\alpha, S^\beta\} = -\frac{1}{2}\delta_\alpha^\beta D - \frac{1}{4}(\gamma^{ab})_\alpha{}^\beta M_{ab} + \frac{i}{2}(\gamma_5)_\alpha{}^\beta T, \quad (1.4.39f)$$

$$\{S_\alpha, Q^\beta\} = +\frac{1}{2}\delta_\alpha^\beta D - \frac{1}{4}(\gamma^{ab})_\alpha{}^\beta M_{ab} - \frac{i}{2}(\gamma_5)_\alpha{}^\beta T \quad (1.4.39g)$$

,

超共形ゲージ場 (Weyl 超組) リー代数の各生成元に対応したゲージパラメータおよびゲージ場を以下のように表記する:

$$\begin{array}{l} T_A : P_a \quad M_{ab} \quad K_a \quad D \quad T \quad Q_\alpha \quad S_\alpha \\ \Lambda^A : \xi^a \quad \lambda^{ab} \quad \lambda_K^a \quad \lambda_D \quad \lambda_T \quad \epsilon^\alpha \quad \eta^\alpha \\ A_\mu^A : \theta_\mu^a \quad \omega_\mu^{ab} \quad f_\mu^a \quad b_\mu \quad B_\mu \quad \psi_\mu \quad \phi_\mu \end{array} \quad (1.4.40)$$

ゲージ場に対する内部ゲージ変換 ($\Lambda^A \neq \xi^a$)

$$\mathcal{A} = A_\mu^A dx^\mu T_A : \quad \delta \mathcal{A} = d\Lambda + [\mathcal{A}, \Lambda] \quad (1.4.41)$$

の具体的表式は

$$\delta\theta^a = -\lambda^a{}_b\theta^b - \lambda_D\theta^a + \frac{1}{2}\bar{\epsilon}\gamma^a\psi, \quad (1.4.42a)$$

$$\delta\omega^{ab} = d\lambda^{ab} + 2\omega_c{}^{[a}\lambda^{b]c} - 4\lambda_K^{[a}\theta^{b]} + \frac{1}{2}\bar{\eta}\gamma^{ab}\psi + \frac{1}{2}\bar{\epsilon}\gamma^{ab}\phi, \quad (1.4.42b)$$

$$\delta f^a = d\lambda_K^a - b\lambda_K^a + \omega^a{}_b\lambda_K^b - \lambda^a{}_bf^b + \lambda_D f^a + \frac{1}{2}\bar{\eta}\gamma^a\phi, \quad (1.4.42c)$$

$$\delta b = d\lambda_D + 2\lambda_{Ka}\theta^a - \frac{1}{2}\bar{\eta}\psi + \frac{1}{2}\bar{\epsilon}\phi, \quad (1.4.42d)$$

$$\delta B = d\lambda_T + \frac{i}{2}\bar{\eta}\gamma_5\psi - \frac{i}{2}\bar{\epsilon}\gamma_5\phi, \quad (1.4.42e)$$

$$\begin{aligned} \delta\psi = & d\epsilon + \left(\frac{1}{4}\omega^{ab}\gamma_{ab} + \frac{1}{2}b - \frac{3}{2}iB\gamma_5 \right) \epsilon - \theta^a\gamma_a\eta \\ & + \left(-\frac{1}{2}\lambda_D + \frac{3}{2}i\lambda_T\gamma_5 - \frac{1}{4}\lambda^{ab}\gamma_{ab} \right) \psi, \end{aligned} \quad (1.4.42f)$$

$$\begin{aligned} \delta\phi = & d\eta + \left(\frac{1}{4}\omega^{ab}\gamma_{ab} - \frac{1}{2}b + \frac{3}{2}iB\gamma_5 \right) \eta - f^a\gamma_a\epsilon \\ & + \left(\frac{1}{2}\lambda_D - \frac{3}{2}i\lambda_T\gamma_5 - \frac{1}{4}\lambda^{ab}\gamma_{ab} \right) \phi + \lambda_K^a\gamma_a\psi. \end{aligned} \quad (1.4.42g)$$

また,

$$\delta e_a^\mu = -\lambda_a{}^b e_b^\mu + \lambda_D e_a^\mu - \frac{1}{2}\bar{\epsilon}\gamma^\mu\psi_a, \quad (1.4.43)$$

$$\delta|\theta| = (-4\lambda_D + \frac{1}{2}\bar{\epsilon}\gamma^\mu\psi_\mu)|\theta| \quad (1.4.44)$$

カイラル超組への表現 カイラル超組 $(Z, P_{L\mathcal{X}}, F)$ への超共形代数の表現は, Z の共形ウエイト w を指定すると, 次のように一意的に定まる:

$$\delta Z = (w\lambda_D + iw\lambda_T)Z + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\epsilon}P_{L\mathcal{X}}, \quad (1.4.45a)$$

$$\begin{aligned} \delta P_{L\mathcal{X}} = & \left\{ \left(w + \frac{1}{2} \right) \lambda_D + \left(w - \frac{3}{2} \right) i\lambda_T \right\} P_{L\mathcal{X}} \\ & + \frac{1}{\sqrt{2}}P_L(\not{\mathcal{D}}Z + F)\epsilon + \sqrt{2}wZP_L\eta, \end{aligned} \quad (1.4.45b)$$

$$\begin{aligned} \delta F = & \{ (w+1)\lambda_D + (w-3)i\lambda_T \} F \\ & + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\epsilon}\not{\mathcal{D}}P_{L\mathcal{X}} + \sqrt{2}(1-w)\bar{\eta}P_{L\mathcal{X}}. \end{aligned} \quad (1.4.45c)$$

これより, Z と $P_L\chi$ の共変微分がブートストラップ的に定まり

$$\mathcal{D}Z = dZ - (wb + iwB)Z - \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\psi}P_L\chi, \quad (1.4.46a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}P_L\chi = & P_L \left[d\chi + \left\{ \frac{1}{4}\omega^{ab}\gamma_{ab} - \left(w + \frac{1}{2}\right)b - \left(w - \frac{3}{2}\right)iB \right\} \chi \right. \\ & \left. - \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathcal{D}Z + F)\psi - \sqrt{2}wZ\phi \right]. \end{aligned} \quad (1.4.46b)$$

Proof. 1) Q の作用

$$\delta(\bar{\epsilon}Q)Z = \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\epsilon}P_L\chi, \quad \delta(\bar{\epsilon}Q)P_L\chi = \frac{1}{\sqrt{2}}P_L((\mathcal{D}Z + F)\epsilon), \quad \delta(\bar{\epsilon}Q)F = \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\epsilon}\mathcal{D}^2P_L\chi. \quad (1.4.47)$$

ここで, 共変微分 $\mathcal{D}Z$, $\mathcal{D}\chi$ は, 表現が確定すると, 一般公式

$$\mathcal{D}\phi = d\phi - \delta(\mathcal{A})\phi \quad (1.4.48)$$

により定まる.

2) D の作用: 共形ウエイト. $[D, Q]$ より,

$$\delta(D)Z = wZ, \quad \delta(D)P_L\chi = (w + 1/2)P_L\chi, \quad \delta(D)F = (w + 1)F. \quad (1.4.49)$$

3) T の作用: カイラルウエイト. $[T, Q]$ より,

$$\delta(T)Z = icZ, \quad \delta(T)P_L\chi = i(c - 3/2)P_L\chi, \quad \delta(T)F = i(c - 3)F. \quad (1.4.50)$$

4) K^a, S の作用: η の共形ウエイトが $1/2$ で, すべての場およびその微分の共形ウエイトは w 以上となるので, $\delta(S)Z = 0$. これと $[S, S] \propto K$ より, $\delta(K_a)Z = 0$. この結果に, Q 変換を施すことにより, $P_L\chi, F$ に対する S 変換が定まり, 整合性より $w = c$ が得られる. さらに, $[S, S] \propto K$ を用いると, K 変換も定まる.

Q.E.D.

修正 F 項 F の変換則より, $w = 3$ と取ると, $|\theta|F$ は

$$|\theta|^{-1}\delta(|\theta|F) = \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\epsilon}\mathcal{D}P_L\chi + \frac{1}{2}F\bar{\epsilon}\gamma^\mu\psi_\mu - 2\sqrt{2}\bar{\eta}P_L\chi \quad (1.4.51)$$

と変換するので, 平坦な時空の場合と異なり, $\int d^4x|\theta|F$ は超対称変換で不変でない. この問題は, F の代わりに

$$\tilde{F} = F + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\psi}_\mu\gamma^\mu P_L\chi + \frac{1}{2}Z\bar{\psi}_\mu\gamma^{\mu\nu}P_R\psi_\nu \quad (1.4.52)$$

を用いることにより解消される. 実際, 次に述べる拘束条件のもとで

$$\delta(|\theta|\tilde{F}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_\mu(|\theta|\bar{\epsilon}\gamma^\mu P_L\chi) \quad (1.4.53)$$

が成り立つ.

カイラル超組に対する超共形不変な作用積分 $(Z, P_L\chi, F)$ を超共形変換に対して (1.4.45) に従って変換するカイラル超組とする。このとき、次の組が $Z' = \bar{F}$ を基本スカラ場とするカイラル超組となる：

$$(Z', P_L\chi', F') = (\bar{F}, \not{D}P_{R\chi}, \square^C \bar{Z}) \quad (1.4.54)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \square^C Z &\equiv \not{D}^\mu \not{D}_\mu Z = e^{a\mu} (\partial_\mu \not{D}_a Z - 2b_\mu \not{D}_a Z + \omega_{\mu ab} \not{D}^b Z + 2f_{\mu a} Z \\ &\quad - iB_\mu \not{D}_a Z - \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\psi}_\mu P_L \not{D}_a \chi + \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\phi}_\mu \gamma_a P_L \chi). \end{aligned} \quad (1.4.55)$$

これらの2つのカイラル超組の積で定義される新たなカイラル超組

$$Z'' = Z\bar{F}, \quad (1.4.56a)$$

$$P_L\chi'' = Z\not{D}P_{R\chi} + \bar{F}P_L\chi, \quad (1.4.56b)$$

$$F'' = F\bar{F} + Z\square^C \bar{Z} - \bar{\chi}\not{D}P_{R\chi} \quad (1.4.56c)$$

に対応する修正 F 項 \tilde{F}'' より、 Z のカイラルウエイトが1のとき、次の超共形不変な作用積分が得られる：

$$\begin{aligned} S_{\text{SG}} &= \int d^4x |\theta| \text{Re} \left[F\bar{F} + Z\square^C \bar{Z} - \bar{\chi}P_L\not{D}\chi \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\psi}_\mu \gamma^\mu (Z\not{D}P_{R\chi} + \bar{F}P_L\chi) + \frac{1}{2} Z\bar{F} \bar{\psi}_\mu \gamma^{\mu\nu} P_R \psi_\nu \right]. \end{aligned} \quad (1.4.57)$$

拘束条件

$$\text{C1} : \mathcal{R}_{\mu\nu}(P^a) = 0.$$

$$\mathcal{R}(P^a) = \mathcal{T}^a + b \wedge \theta^a - \frac{1}{4} \bar{\psi} \wedge \gamma^a \psi; \quad \mathcal{T}^a \equiv d\theta^a + \omega^a{}_b \wedge \theta^b \quad (1.4.58)$$

より、この条件は

$$\mathcal{T}^a = -b \wedge \theta^a + \frac{1}{4} \bar{\psi} \wedge \gamma^a \psi \quad (1.4.59)$$

これより、

$$\omega^{ab} = \omega^{ab}(e, b, \psi) = \omega^{ab}(e, b) + \frac{1}{2} \bar{\psi} \gamma^{[a} \psi^{b]} + \frac{1}{4} \bar{\psi}^a \gamma_\mu \psi^b. \quad (1.4.60)$$

$\omega^{ab}(e, b, \psi)$ の変換則は、 Q 変換に関して、元の独立したゲージ場としての ω^{ab} と異なり、

$$\delta(\bar{\epsilon}Q)\omega^{ab}(e, b, \psi) = \delta_{\text{gauge}}\omega^{ab} + \delta_{\mathcal{M}}\omega^{ab} = \frac{1}{2} \bar{\epsilon} \gamma^{ab} \phi + \bar{\epsilon} \mathcal{M}^{ab}(Q) \quad (1.4.61)$$

$$\mathcal{M}_\mu{}^{ab}(Q) = -\frac{1}{2} \gamma^{[a} \mathcal{R}_\mu{}^{b]}(Q) - \frac{1}{4} \gamma_\mu \mathcal{R}^{ab}(Q). \quad (1.4.62)$$

となる。このゲージ変換則の変更により、 $\mathcal{R}(M^{ab})$ の定義は次のように変更される：

$$\hat{\mathcal{R}}_{\mu\nu}(M^{ab}) = \hat{R}_{\mu\nu}{}^{ab} + 8f_{[\mu}^{[a}\theta_{\nu]}^b]; \quad (1.4.63)$$

$$\hat{R}_{\mu\nu}{}^{ab} = R_{\mu\nu}{}^{ab}(\omega) - \bar{\psi}_{[\mu}\gamma^{ab}\phi_{\nu]} - 2\bar{\psi}_{[\mu}\mathcal{M}_{\nu]}{}^{ab}(Q). \quad (1.4.64)$$

C2 : $e_b^\nu \hat{\mathcal{R}}_{\mu\nu}(M^{ab}) = 0$. この条件は、次式と同等：

$$f_\mu^a = -\frac{1}{4}\hat{R}_\mu{}^a + \frac{1}{24}\theta_\mu^a \hat{R}_s \quad (1.4.65)$$

C3 : $\gamma^\mu \mathcal{R}_{\mu\nu}(Q) = 0$. この条件は、

$$\mathcal{R}_{\mu\nu}(Q) = \mathcal{R}'_{\mu\nu}(Q) - 2\gamma_{[\mu}\phi_{\nu]}, \quad (1.4.66)$$

$$\mathcal{R}'(Q) = \mathcal{D}\psi \equiv \left(d + \frac{1}{2}b \wedge - \frac{3}{2}iB \wedge \gamma_5 + \frac{1}{4}\omega^{ab} \wedge \gamma_{ab} \right) \psi \quad (1.4.67)$$

とおくと、次式と同等：

$$\phi_\mu = -\frac{1}{2}\gamma^\nu \mathcal{R}'_{\mu\nu}(Q) + \frac{1}{2}\gamma_\mu \gamma^{ab} \mathcal{R}'_{ab}(Q). \quad (1.4.68)$$

以上の C1~C3 の条件が満たされるとき、

$$f_\mu^\mu = -\frac{1}{2}\hat{R}_s = -\frac{1}{12} (R_s(\omega) - \bar{\psi}_a \gamma^{ab} \phi_b), \quad (1.4.69a)$$

$$\gamma^\mu \phi_\mu = -\frac{1}{6}\gamma^{\mu\nu} \mathcal{R}'_{\mu\nu}(Q), \quad (1.4.69b)$$

$$\gamma^{ab} \phi_b = -\frac{1}{4}\gamma^{ab} \mathcal{R}'_{bc}(Q), \quad (1.4.69c)$$

$$\mathcal{M}_\mu{}^{ab}(Q) = -\frac{1}{2}\gamma_\mu \mathcal{R}^{ab}(Q) = \gamma_\mu \gamma^{[a}\phi^{b]} - \frac{1}{2}\gamma_\mu \mathcal{R}'^{ab}(Q). \quad (1.4.69d)$$

したがって、独立な場としては、ゲージ場 θ^a , B , ψ_μ および F のみが残る。

【Exercise 1.4.1 (未確認事項)】 拘束条件を課すと、従属ゲージ場 ω^{ab} , f^a , ϕ の変換則が変化する。この変化した後の変換則でも、作用積分 (1.4.57) が不変であることを示せ。すなわち、

$$\int d^4x \frac{\delta S_{SG}}{\delta A^A} \cdot \delta_{\mathcal{M}} A^A = 0 \quad (1.4.70)$$

を示せ。 _____ □

ゲージ固定 P^a, M^{ab}, Q 以外の変換に対するゲージ自由度を取り除くため、次のゲージ条件を課す：

$$K\text{-gauge} : b_\mu = 0, \quad (1.4.71a)$$

$$D\text{-gauge and } T\text{-gauge} : Z = \sqrt{3}/\kappa, \quad (1.4.71b)$$

$$S\text{-gauge} : \chi = 0 \quad (1.4.71c)$$

このとき、

$$0 = \delta Z = (\lambda_D + i\lambda_T)Z \Rightarrow \lambda_D = \lambda_T = 0, \quad (1.4.72a)$$

$$0 = \delta P_L \chi = \frac{1}{\sqrt{2}} P_L (-i\mathcal{B}Z + F)\epsilon + \sqrt{2}Z P_L \eta \Rightarrow \eta, \quad (1.4.72b)$$

$$0 = \delta b = 2\lambda_K^a - \frac{1}{2}\bar{\eta}\psi + \frac{1}{2}\bar{\epsilon}\phi \Rightarrow \lambda_K^a \quad (1.4.72c)$$

より、 D, T, K_a, S に対するゲージ変換が固定される。

超重力作用積分 ゲージ固定条件を (1.4.57) に代入すると、

$$\mathcal{D}_\mu Z = -iB_\mu Z. \quad (1.4.73a)$$

$$\mathcal{D}_\mu P_L \chi = P_L \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (i\mathcal{B}Z - F)\psi_\mu - \sqrt{2}Z\phi_\mu \right], \quad (1.4.73b)$$

$$\square^C \bar{Z} = -ie^{a\mu} \mathcal{D}(\omega)_\mu B_a \bar{Z} + 2f_a^a \bar{Z} - B_a B^a \bar{Z} - \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\psi}^a \mathcal{D}_\mu P_R \chi \quad (1.4.73c)$$

より、

$$S_{\text{SG}} = \int d^4x |\theta| \left[F\bar{F} + |Z|^2 \left\{ -B_a B^a + 2f_a^a - \frac{i}{4} \bar{\psi}_a \gamma^{abc} \gamma_5 \psi_b B_c - \frac{1}{2} \bar{\psi}_a \gamma^{ab} \phi_b \right\} \right]. \quad (1.4.74)$$

さらに、拘束条件とゲージ固定条件より

$$f_a^a = -\frac{1}{12} \hat{R}_S = -\frac{1}{12} (R_s(\omega) - \bar{\psi}_a \gamma^{ab} \psi_b), \quad (1.4.75a)$$

$$\gamma^a \phi_a = -\frac{1}{6} \gamma^{ab} \mathcal{R}'_{ab}(Q), \quad (1.4.75b)$$

$$\gamma^{ab} \psi_b = -\frac{1}{4} \bar{\psi}_a \gamma^{abc} \mathcal{R}'_{bc}(Q), \quad (1.4.75c)$$

$$\mathcal{R}'_{ab} = 2\mathcal{D}(\omega)_{[a} \psi_{b]} - 3iB_{[a} \gamma_5 \psi_{b]} \quad (1.4.75d)$$

となることを用いると、

$$S_{\text{SG}} = \int d^4x |\theta| \left[\frac{1}{2\kappa^2} (R_s(\omega) - \bar{\psi}_a \gamma^{abc} \mathcal{D}(\omega)_b \psi_c + 6B_a B^a) - |F|^2 \right] \quad (1.4.76)$$

を得る。ここで、 ω^{ab} はトーシオンをもつ接続係数

$$\omega_\mu^{ab} = \omega_\mu^{ab}(e) + \frac{1}{2} \bar{\psi}_\mu \gamma^{[a} \psi^{b]} + \frac{1}{4} \bar{\psi}^a \gamma_\mu \psi^b. \quad (1.4.77)$$

である。

【Note 1.4.2 (超対称変換の修正)】 もとの作用積分 (1.4.57) は、本来の超対称変換 (1.4.42) に対して不変であるが、拘束条件 C1 を課すと、 ω^{ab} の変換則が変化するため、 $\delta(\epsilon)$ に対する不変性が壊れる可能性がある。しかし、ゲージ固定条件と拘束条件 C_3 のもとで、

$$\delta(\epsilon)S_{\text{SG}} = \int d^4x \delta_{\mathcal{M}} \omega_{\mu}{}^{ab} \frac{\delta S_{\text{SG}}}{\delta \omega_{\mu}{}^{ab}} = \int d^4x |\theta| \mathcal{M}_{\mu}{}^{ab}(Q) e^{a\mu} B^b = 0 \quad (1.4.78)$$

より、不変性は破れない。

この作用積分を不変にする超対称変換 $\tilde{\delta}(\epsilon)$ は、ゲージ固定条件より得られる関係式

$$P_L \eta = \frac{1}{2} i P_L \mathcal{B} \epsilon - \frac{\kappa}{2\sqrt{3}} F P_L \epsilon \quad (1.4.79)$$

を考慮すると、

$$\tilde{\delta} e^a = \frac{1}{2} \bar{\epsilon} \gamma^a \psi, \quad (1.4.80a)$$

$$\tilde{\delta} P_L \psi = P_L \hat{\mathcal{D}} \epsilon \equiv P_L \left(\mathcal{D}(\omega) - \frac{3}{2} i B + \frac{1}{2} i \gamma_{\mu} dx^{\mu} \mathcal{B} + \frac{\kappa}{2\sqrt{3}} \gamma_{\mu} dx^{\mu} \bar{F} \right) \epsilon, \quad (1.4.80b)$$

$$\tilde{\delta} B_{\mu} = -\frac{1}{4} i \bar{\epsilon} \gamma_5 \left(-\gamma^{\nu} \hat{\mathcal{R}}_{\mu\nu}(Q) + \frac{1}{6} \gamma_{\mu} \gamma^{ab} \hat{\mathcal{R}}_{ab}(Q) \right), \quad (1.4.80c)$$

$$\tilde{\delta} F = \frac{\sqrt{3}}{6\kappa} \bar{\epsilon} P_R \gamma^{\mu\nu} \hat{\mathcal{R}}_{\mu\nu}(Q). \quad (1.4.80d)$$

ここで、

$$P_L \hat{\mathcal{R}}_{\mu\nu}(Q) = 2P_L \hat{\mathcal{D}}_{[\mu} \psi_{\nu]}. \quad (1.4.81)$$

□

【Exercise 1.4.3 (未確認)】 上の修正された変換則が閉じた代数をなすことをしめせ。また、この変換に対して、作用積分 (1.4.76) が不変であることを確かめよ。 □

adS 超対称代数

【Exercise 1.4.4 (共形不変ポテンシャル)】 超共形不変作用積分を用いたアプローチにおいて、超ポテンシャル $W = cZ^3$ に対応する修正 F 項を加えることができる。対応する作用積分 $S_{\text{SG}} + S_c$ において、補助場 B, F を場の方程式を用いて消去すると、反 de Sitter 超重力理論

$$S_{\text{SG}} + S_c = \int d^4x |\theta| \frac{1}{2\kappa^2} \left[R_s(\omega) - 2\Lambda - \bar{\psi}_\mu \gamma^{\mu\nu\rho} \mathcal{D}(\omega)_\nu \psi_\rho + m_{3/2} \bar{\psi}_\mu \gamma^{\mu\nu} \psi_\nu \right]. \quad (1.4.82)$$

が得られることを示せ。ここで、

$$m_{3/2} = \frac{1}{L} = \frac{3^{3/2}c}{2\kappa}, \quad \Lambda = -3m_{3/2}^2. \quad (1.4.83)$$

また、対応

$$P_a \mapsto \delta_{\text{cgct}}, \quad Q \mapsto \tilde{\delta}(\epsilon) \quad (1.4.84)$$

のもとで、次の adS 超対称代数が成り立つことを示せ (未確認):

$$[P_a, P_b] = \frac{1}{4L^2} M_{ab}, \quad (1.4.85a)$$

$$[P_a, Q] = \frac{1}{4L} \gamma_a Q, \quad (1.4.85b)$$

$$[Q_\alpha, Q_\beta] = -\frac{1}{2} (\gamma^a)_{\alpha\beta} P_a - \frac{1}{8L} (\gamma^{ab})_{\alpha\beta} M_{ab}. \quad (1.4.85c)$$

□

1.4.4 物質セクターとの結合

超共形対称性およびゲージ対称性の表現 超共形変換と物質場のゲージ対称性は可換であるとする.

Wyle 超組 (超共形ゲージ場)	$\theta^a, \omega^{ab}, f^a, b, B; \psi, \phi$
カイラル超組	(X^I, Ω^I, F^K)
ゲージ超組	$(A^A, P_R \lambda^A, D^A)$
実超組	$(C, P_L \zeta, \mathcal{H}, V_a, P_R \lambda, D)$

Weyl 超組 Weyl 超組の共形およびカイラルウエイトは以下の通り :

	θ^a	$P_L \psi$	b	ω^{ab}	B	$P_L \phi$	f^a
w	-1	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	1
c	0	$\frac{3}{2}$	0	0	0	$-\frac{3}{2}$	0

超共形ゲージ超組 A_μ^A は実ベクトル場で, ゲージ変換とカイラル変換は可換なので, A_μ^A のカイラルウエイトはゼロ. また, $A_a^A = e_a^\mu A_\mu^A$ と e_a^μ の共形ウエイトが1なので, A_μ^A の共形ウエイトはゼロ. これと, 超共形変換の構造より, ゲージ超組に属する場の共形ウエイトとカイラルウエイトは

	A_μ^A	$P_R \lambda^A$	D^A
w	0	3/2	2
c	0	-3/2	0

これと, 超共形代数の構造より, K^a, S のゲージ超組への作用は自明で, Q 変換の作用は次のように定まる :

$$\delta(\bar{\epsilon}Q)A_\mu^A = -\frac{1}{2}\bar{\epsilon}\gamma_\mu\lambda^A, \tag{1.4.86a}$$

$$\delta(\bar{\epsilon}Q)\lambda^A = \left(\frac{1}{4}\gamma^{ab}\hat{F}_{ab}^A + \frac{1}{2}i\gamma_5 D^A\right)\epsilon, \tag{1.4.86b}$$

$$\delta(\bar{\epsilon}Q)D^A = \frac{1}{2}i\bar{\epsilon}\gamma_5\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu\lambda^A. \tag{1.4.86c}$$

ここで,

$$\hat{F}^A = dA^A + \frac{1}{2}f^A_{BC}A^B \wedge A^C + \frac{1}{2}\bar{\psi} \wedge \gamma_\nu dx^\nu \lambda^A, \tag{1.4.87a}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\lambda^A &= d\lambda^A - \left(-\frac{1}{4}\omega^{ab}\gamma_{ab} + \frac{3}{2}b + \frac{3}{2}i\gamma_5 B\right)\lambda^A \\ &\quad + \lambda^C A^B f^A_{BC} - \left(\frac{1}{4}\gamma^{ab}\hat{F}_{ab}^A + \frac{1}{2}i\gamma_5 D^A\right)\psi. \end{aligned} \tag{1.4.87b}$$

【Exercise 1.4.5 (未確認事項)】 上の変換が, $[Q, Q]$ の交換関係と整合的であることを確認せよ. □

超共形実超組 実超組の基礎スカラ場 C は実場なのでカイラルウエイトはゼロ。そのカイラルウエイトを w とすると、超共形変換則より、

	C	$P_L\zeta$	\mathcal{H}	V_a	$P_R\lambda$	D
w	w	$w + 1/2$	$w + 1$	$w + 1$	$w + 3/2$	$w + 2$
c	0	$-3/2$	-3	0	$-3/2$	0

また、 $\delta = \delta(\lambda_K^a K_a + \bar{\epsilon}Q + \bar{\eta}S)$ に対する変換則は

$$\delta C = \frac{1}{2}i\bar{\epsilon}\gamma_5\zeta, \quad (1.4.88a)$$

$$\delta P_L\zeta = \frac{1}{2}P_L(i\mathcal{H} - \mathcal{V} - i\mathcal{D}C)\epsilon - iwCP_L\eta, \quad (1.4.88b)$$

$$\delta\mathcal{H} = -i\bar{\epsilon}P_R(\lambda + \mathcal{D}\zeta) + (w - 2)i\bar{\eta}P_L\zeta, \quad (1.4.88c)$$

$$\delta V_a = -\frac{1}{2}\bar{\epsilon}(\gamma_a\lambda + \mathcal{D}_a\zeta) + \frac{1}{2}(1 + w)\bar{\eta}\gamma_a\zeta, \quad (1.4.88d)$$

$$\delta P_R\lambda = P_R\left(\frac{1}{4}\gamma^{ab}F_{ab} - i\frac{D}{2}\right)\epsilon + \frac{w}{2}P_R(i\mathcal{H} - \mathcal{V} + i\mathcal{D}C)\eta - w\lambda_K P_L\zeta, \quad (1.4.88e)$$

$$\delta D = \frac{i}{2}\bar{\epsilon}\gamma_5\mathcal{D}\lambda + iw\bar{\eta}\left(\lambda + \frac{1}{2}\mathcal{D}\zeta\right) - 2w\lambda_K^a\mathcal{D}_aC. \quad (1.4.88f)$$

ここで、

$$F_{ab} \equiv 2\mathcal{D}_{[a}V_{b]} + \epsilon_{abcd}\mathcal{D}^c\mathcal{D}^dC. \quad (1.4.89)$$

【Exercise 1.4.6 (未確認)】 この変換則が超共形代数の交換関係と整合的であることを確認せよ。 □

超共形カイラル超組 規準スカラ場 X^I のカイラルウエイトを w 、 $c = w$ とすると、 $\delta = \delta(\lambda_K^a K_a + \bar{\epsilon}Q + \bar{\eta}S)$ に対する変換則は

$$\delta X^I = \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\epsilon}\Omega^I, \quad (1.4.90a)$$

$$\delta\Omega^I = \frac{1}{\sqrt{2}}P_L(\mathcal{D}X^I + F^I)\epsilon + \sqrt{2}wX^I P_L\eta, \quad (1.4.90b)$$

$$\delta F^I = \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\epsilon}\mathcal{D}\Omega^I + \bar{\epsilon}PR\lambda^A k_A^I(X) + \sqrt{2}(1 - w)\bar{\eta}\Omega^I. \quad (1.4.90c)$$

各成分場の共形ウエイトとカイラルウエイトは

	X^I	Ω^I	F^I
w	w	$w + \frac{1}{2}$	$w + 1$
c	w	$w - \frac{3}{2}$	$w - 3$

【Exercise 1.4.7 (未確認)】 この変換則が超共形代数の交換関係と整合的であることを確認せよ。 □

修正 D 項による不変作用積分 $(C, \zeta, \mathcal{H}, V_a, \lambda, D)$ を $w(C) = 2$ の超共形実超組とすると,

$$Z = -\bar{\mathcal{H}}, \quad P_L \chi = -\sqrt{2}iP_L(\lambda + \mathcal{D}\zeta), \quad F = D + \mathcal{D}^a \mathcal{D}_a C + i\mathcal{D}^a V_a \quad (1.4.91)$$

により定義される組 $(Z, P_L \chi, F)$ が $w(F) = 4$ の超共形カイラル超組として変換することが示される. したがって, 対応する修正 F 項は, 超共形不変な作用積分を与える;

$$S_D = \int d^4x |\theta| \left[D + \square^C C + \frac{1}{2} \left(i\bar{\psi} \cdot \gamma P_R (\lambda + \mathcal{D}\zeta) - \frac{1}{4} \bar{\psi}_\mu P_L \gamma^{\mu\nu} \psi_\nu \mathcal{H} + \text{h.c.} \right) \right]. \quad (1.4.92)$$

ここで,

$$\mathcal{D}_a C = \partial_a C - 2b_a C - \frac{1}{2} i\bar{\psi}_a \gamma_5 \zeta, \quad (1.4.93a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_a P_L \zeta &= \left(\partial_a + \frac{1}{4} \omega_a^{bc} \gamma_{bc} - \frac{5}{2} b_a + \frac{3}{2} iB_a \right) \zeta - \frac{1}{2} P_L (i\mathcal{H} - V - i\mathcal{D}C) \psi_a \\ &\quad + 2iC P_L \phi_a, \end{aligned} \quad (1.4.93b)$$

$$\begin{aligned} \square^C C &= \mathcal{D}^a \mathcal{D}_a C \\ &= \partial^a \mathcal{D}_a C - 3b^a \mathcal{D}_a C + \omega_a^{ab} \mathcal{D}_b C + 4C f_a^a - \frac{1}{2} i\bar{\psi}^a \gamma_5 \mathcal{D}_a \zeta + \frac{1}{2} i\bar{\phi} \cdot \gamma \gamma_5 \zeta. \end{aligned} \quad (1.4.93c)$$

拘束条件 C1, C2, C3 を課して, ω^{ab}, f^a, ϕ を他のゲージ場で表すと, この作用積分は次の形で表される:

$$\begin{aligned} S_D &= \int d^4x |\theta| \left[D - \frac{1}{2} i\bar{\psi} \cdot \gamma \gamma_5 \lambda - \frac{1}{3} CR(\omega) + \frac{1}{6} (C\bar{\psi}_\mu \gamma^{\mu\rho\sigma} - i\bar{\zeta} \gamma^{\rho\sigma} \gamma_5) R'_{\rho\sigma}(Q) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} \epsilon^{abcd} \bar{\psi}_a \gamma_b \psi_c \left(B_d - \frac{1}{2} \bar{\psi}_d \zeta \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.4.94)$$

1.4.5 カイラル超組およびゲージ超組と結合した超重力理論の導出

超共形的作用積分 $(X^I, \chi^I, F^I) (I = 0, 1, \dots, n)$ を $n+1$ 個のカイラル超組, (A^A, λ^A, D^A) をゲージ超組, $(\theta^a, \omega^{ab}, f^a, b, B; \psi, \phi)$ を超共形ゲージ場とする. 曲がった時空での最も一般的な超対称理論の超共形不変な拡張は次式で与えられる:

$$\mathcal{L} = [N(X, \bar{X})]_{\bar{D}} + [\mathcal{W}(X)]_{\bar{F}} + [f_{AB}(X)\bar{\lambda}^A P_L \lambda^B]_{\bar{F}}. \quad (1.4.95)$$

ここで,

- 1) $N(X, \bar{X})$: 共形ウエイト $w = 2$, カイラルウエイト $c = 0$ の実関数.

$$N(\lambda X, \bar{\lambda} \bar{X}) = \lambda \bar{\lambda} N(X, \bar{X}). \quad (1.4.96)$$

- 2) $\mathcal{W}(X)$: 共形ウエイト $w = 3$ の正則関数.

$$X^I \mathcal{W}_I = 3\mathcal{W}(X); \quad \mathcal{W}_I \equiv \frac{\partial \mathcal{W}(X)}{\partial X^I}. \quad (1.4.97)$$

- 3) $f_{AB}(X)$: 共形ウエイト $w = 0$ の正則関数.

$$X^I f_{AB,I} = 0; \quad f_{AB,I} \equiv \frac{\partial f_{AB}(X)}{\partial X^I}. \quad (1.4.98)$$

ゲージ化 ゲージ群 G の Kähler 多様体 $\tilde{\mathcal{M}} = (X^I, N(X, \bar{X}))$ への正則変換群としての作用が与えられると, 共変微分を

$$\mathcal{D}_\mu X^I = (\partial_\mu - b_\mu - iB_\mu)X^I - \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\psi}_\mu \Omega^I - A_\mu^A k_A^I, \quad (1.4.99a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\mu \Omega^I &= \left(\partial_\mu - \frac{3}{2}b_\mu + \frac{1}{4}\omega_\mu^{ab}\gamma_{ab} - \frac{1}{2}iB_\mu \right) \Omega^I \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{2}}P_L(\not{\partial}X^I + F^I)\psi_\mu - \sqrt{2}X^I P_L \phi_\mu - A_\mu^A \Omega^J \partial_J k_A^I \end{aligned} \quad (1.4.99b)$$

と変更することにより, カイラル超組がゲージ相互作用する超重力理論が決まる.

ただし, 理論の超共形不変性を保つために, 対応する $\tilde{\mathcal{M}}$ 上の正則 Killing ベクトル

$$k_A = (k_A^I): \quad \delta X^I = \theta^A k_A^I, \quad \delta \Omega^I = \theta^A \partial_J k_A^I \Omega^J \quad (1.4.100)$$

は, X^I と同じ共形ウエイト $w = 1$ を持つことが要求される:

$$X^J \partial_J k_A^I = k_A^I, \quad \partial_J k_A^I = 0. \quad (1.4.101)$$

また、 \mathcal{W} と N はこの無限小変換で不変であることが必要で、 N の同次性のために Kähler 変換の自由度は失われる：

$$\mathcal{W}_I k_A^I = 0, \quad N_I k_A^I + N_{\bar{I}} k_A^{\bar{I}} = 0, \quad (1.4.102a)$$

$$\mathcal{P}_A = \frac{1}{2} i (N_I k_A^I - N_{\bar{I}} k_A^{\bar{I}}) = i N_I k_A^I = -i N_{\bar{I}} k_A^{\bar{I}}. \quad (1.4.102b)$$

ここで、 \mathcal{P}_A は次式で定義されるモーメント写像：

$$\partial_{\bar{I}} \mathcal{P}_A = i N_{J\bar{I}} k_A^J. \quad (1.4.103)$$

作用積分の具体的表式 拘束条件 C1, C2, C3 の元で、

$$\begin{aligned} |\theta|^{-1} [N]_{\bar{D}} &= N_{I\bar{J}} \left(-\mathcal{D}_\mu X^I \mathcal{D}^\mu \bar{X}^{\bar{J}} - \frac{1}{2} \bar{\Omega}^I \mathcal{D} \Omega^{\bar{J}} - \frac{1}{2} \bar{\Omega}^{\bar{J}} \mathcal{D} \Omega^I + F^I \bar{F}^{\bar{J}} \right) \\ &\quad \frac{1}{2} \left[N_{IJ\bar{K}} \left(-\bar{\Omega}^I \Omega^J \bar{F}^{\bar{K}} + \bar{\Omega}^I (\mathcal{D} X^J) \Omega^{\bar{K}} \right) + \text{h.c.} \right] + \frac{1}{4} N_{IJ\bar{K}\bar{L}} \bar{\Omega}^I \Omega^J \bar{\Omega}^{\bar{K}} \Omega^{\bar{L}} \\ &\quad - i N_I K_A^I D^A - \sqrt{2} \bar{\lambda}^A N_{I\bar{J}} (\Omega^I k_A^{\bar{J}} + \Omega^{\bar{J}} k_A^I) \\ &\quad + \left[\frac{1}{2\sqrt{2}} \bar{\psi} \cdot \gamma \left(N_{I\bar{J}} F^I \Omega^{\bar{J}} - N_{I\bar{J}} \mathcal{D} \bar{X}^{\bar{J}} \Omega^I - \frac{1}{2} N_{IJ\bar{K}} \Omega^{\bar{K}} \bar{\Omega}^I \Omega^J + N_I P_R \lambda^A k_A^I \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{8} i \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \bar{\psi}_\mu \gamma_\nu \psi_\rho \left(N_I \mathcal{D}_\sigma X^I + \frac{1}{2} N_{IJ} \bar{\Omega}^I \gamma_\sigma \Omega^J + \frac{1}{\sqrt{2}} N_I \bar{\psi}_\sigma \Omega^I \right) + \text{h.c.} \right] \\ &\quad + \frac{1}{6} N \left(-R(\omega) + \frac{1}{2} \bar{\psi}_\mu \gamma^{\mu\nu\rho} R'_{\nu\rho}(Q) \right) - \frac{1}{6\sqrt{2}} \left(N_I \bar{\Omega}^I + N_{\bar{I}} \bar{\Omega}^{\bar{I}} \right) \gamma^{\mu\nu} R'_{\mu\nu}(Q), \end{aligned} \quad (1.4.104a)$$

$$|\theta|^{-1} [\mathcal{W}]_{\bar{F}} = \mathcal{W}_I F^I - \frac{1}{2} \mathcal{W}_{IJ} \bar{\Omega}^I \Omega^J + \mathcal{W}_I \bar{\psi} \cdot \gamma \Omega^I + \frac{1}{2} \mathcal{W} \bar{\psi}_\mu P_R \gamma^{\mu\nu} \psi_\nu + \text{h.c.}, \quad (1.4.104b)$$

$$\begin{aligned} |\theta|^{-1} [f_{AB} \bar{\lambda}^A P_L \lambda^B]_{\bar{F}} &= -\frac{1}{4} f_{AB} \left[2 \bar{\lambda}^A P_L \mathcal{D} \lambda^B + \hat{F}_{\mu\nu}^{-A} \hat{F}^{\mu\nu-B} - D^A D^B \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} \bar{\psi} \cdot \gamma P_L \left(\frac{1}{2} \gamma^{\mu\nu} \hat{F}_{\mu\nu}^{-A} - i D^A \right) \lambda^B - \frac{1}{8} \bar{\psi}_\mu \gamma^{\mu\nu} P_R \psi_\nu \bar{\lambda}^A P_L \lambda^B \right] \\ &\quad + \frac{1}{2\sqrt{2}} f_{AB,I} \bar{\Omega}^I \left(-\frac{1}{2} \gamma^{\mu\nu} \hat{F}_{\mu\nu}^{-A} + i D^A \right) \lambda^B \\ &\quad + \left[-\frac{1}{4} f_{AB,I} \left(F^I + \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\psi} \cdot \gamma \Omega^I \right) + \frac{1}{8} f_{AB,IJ} \bar{\Omega}^I \Omega^J \right] \bar{\lambda}^A P_L \lambda^B + \text{h.c.} \end{aligned} \quad (1.4.104c)$$

補助場の消去 運動項を持たない補助場 $F^I, \bar{F}^{\bar{I}}, D^A, B_\mu$ に対する変分方程式は

$$-\bar{F}^{\bar{J}} N_{IJ} = \mathcal{W}_I - \frac{1}{2} N_{IJ\bar{K}} \bar{\Omega}^{\bar{J}} \Omega^{\bar{K}}, \quad (1.4.105a)$$

$$(\text{Re } f_{AB}) D^B = \mathcal{P}_A + \mathcal{P}_A^F, \quad (1.4.105b)$$

$$B_\mu = \mathcal{B}_\mu + B_\mu^F. \quad (1.4.105c)$$

ここで,

$$\mathcal{P}_A^F = \frac{i}{2\sqrt{2}} \left(-f_{AB,I} \bar{\Omega}^I \lambda^B + \bar{f}_{AB,\bar{I}} \bar{\Omega}^{\bar{I}} \lambda^B \right), \quad (1.4.106)$$

$$\mathcal{B}_\mu = \frac{i}{2N} \left(N_{\bar{I}} \partial_\mu \bar{X}^{\bar{I}} - N_I \partial_\mu X^I \right) + \frac{1}{N} A_\mu^A \mathcal{P}_A. \quad (1.4.107)$$

$$B_\mu^F = \frac{i}{4N} \left[\sqrt{2} \bar{\psi}_\mu (N_I \Omega^I - N_{\bar{I}} \bar{\Omega}^{\bar{I}}) + N_{I\bar{J}} \bar{\Omega}^I \gamma_\mu \Omega^{\bar{J}} + \frac{3}{2} (\text{Re } f_{AB}) \bar{\lambda}^A \gamma_\mu \gamma_5 \lambda^B \right]. \quad (1.4.108)$$

これらを上で求めた超共形不変作用積分に代入し整理すると、次式を得る：

$$|\theta|^{-1} \mathcal{L} = \frac{N}{6} \left[-R(e, b) + \bar{\psi}_\mu R^\mu + |\theta|^{-1} \partial_\mu (|\theta| \bar{\psi} \cdot \gamma \psi^\mu) \right] \\ + \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{1/2} + \mathcal{L}_1 - V + \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_{\text{mix}} + \mathcal{L}_d + \mathcal{L}_{4f}. \quad (1.4.109)$$

ここで,

$$\mathcal{L}_0 = -G_{I\bar{J}} D_\mu X^I D^\mu X^{\bar{J}}, \quad (1.4.110a)$$

$$\mathcal{L}_{1/2} = -\frac{1}{2} G_{I\bar{J}} \left(\bar{\Omega}^I \hat{\mathcal{D}}^{(0)} \Omega^{\bar{J}} + \bar{\Omega}^{\bar{J}} \hat{\mathcal{D}}^{(0)} \Omega^I \right), \quad (1.4.110b)$$

$$\mathcal{L}_1 = (\text{Re } f_{AB}) \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^A F^{\mu\nu B} - \frac{1}{2} \bar{\lambda}^A \mathcal{D}^{(0)} \lambda^B \right) \\ + \frac{i}{4} \left((\text{Im } f_{AB}) F_{\mu\nu}^A \tilde{F}^{\mu\nu B} + (D_\mu \text{Im } f_{AB}) \bar{\lambda}^A \gamma_5 \gamma^\mu \lambda^B \right), \quad (1.4.110c)$$

$$V = V_F + V_D = G^{I\bar{J}} \mathcal{W}_I \mathcal{W}_{\bar{J}} + \frac{1}{2} (\text{Re } f)^{-1AB} \mathcal{P}_A \mathcal{P}_B, \quad (1.4.110d)$$

$$\mathcal{L}_m = \frac{1}{2} \mathcal{W} \bar{\psi}_\mu P_R \gamma^{\mu\nu} \psi_\nu - \frac{1}{2} \nabla_I \mathcal{W}_J \bar{\Omega}^I \Omega^J + \frac{1}{4} \mathcal{W}_{\bar{J}} f_{AB,I} \bar{\lambda}^A P_L \lambda^B \\ + \sqrt{2} i \left[-\partial_I \mathcal{P}_A + \frac{1}{4} f_{AB,I} (\text{Re } f)^{-1BC} \mathcal{P}_C \right] \bar{\lambda}^A \Omega^I + \text{h.c.}, \quad (1.4.110e)$$

$$\mathcal{L}_{\text{mix}} = \bar{\psi} \cdot \gamma P_L \left(\frac{i}{2} \mathcal{P}_A \lambda^A + \frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{W}_I \Omega^I \right) + \text{h.c.}, \quad (1.4.110f)$$

$$\mathcal{L}_d = \frac{1}{8} (\text{Re } f_{AB}) \bar{\psi}_\mu \gamma^{ab} (F_{ab}^A + \hat{F}_{ab}^A) \gamma^\mu \lambda^B + \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ G_{I\bar{J}} \bar{\psi}_\mu \mathcal{D} X^{\bar{J}} \gamma^\mu \Omega^I \right. \\ \left. - \frac{1}{4} f_{AB,I} \bar{\Omega}^I \gamma^{ab} \hat{F}_{ab}^A \lambda^B - \frac{2}{3} N_I \bar{\Omega}^I \gamma^{\mu\nu} D_\mu \psi_\nu + \text{h.c.} \right\}, \quad (1.4.110g)$$

$$\mathcal{L}_{4f} = -\frac{N}{6} \mathcal{L}_{\text{SG,torsion}} + \dots \quad (1.4.110h)$$

ただし,

$$DX^I = (d - b - i\mathcal{B})X^I - A^A k_A^I, \quad (1.4.111)$$

$$\begin{aligned} \hat{D}^{(0)}\Omega^I &= \left(d - \frac{3}{2}b + \frac{1}{4}\omega^{ab}(e, b)\gamma_{ab} + \frac{i}{2}\mathcal{B} \right) \Omega^I \\ &\quad + \Gamma_{JK}^I \Omega^K D_\mu X^I - A^A \partial_{JK} k_A^I \Omega^J, \end{aligned} \quad (1.4.112)$$

$$D^{(0)}\lambda^A = \left(d - \frac{3}{2}b + \frac{1}{4}\omega^{ab}(e, b)\gamma_{ab} - \frac{3}{2}i\mathcal{B}\gamma_5 \right) \lambda^A - A^C \lambda^B f^A_{BC}, \quad (1.4.113)$$

$$R^\mu = \gamma^{\mu\rho\sigma} \left(\partial_\rho + \frac{1}{2}b_\rho + \frac{1}{4}\omega_\rho^{ab}(e, b)\gamma_{ab} - \frac{3}{2}i\mathcal{B}_\rho\gamma_5 \right) \psi_\rho, \quad (1.4.114)$$

$$D_\mu\psi_\nu = \left(\partial_\mu + \frac{1}{2}b_\mu + \frac{1}{4}\omega_\mu^{ab}(e, b, \psi)\gamma_{ab} - \frac{3}{2}i\mathcal{B}_\mu\gamma_5 \right) \psi_\nu, \quad (1.4.115)$$

$$\mathcal{L}_{\text{SG, torsion}} = -\frac{1}{16} [(\bar{\psi}^\rho \gamma^\mu \psi^\nu)(\bar{\psi}_\rho + \gamma_\mu \psi_\nu + 2\bar{\psi}_\rho \gamma_\nu \psi_\mu) - 4(\bar{\psi}_\mu \gamma \cdot \psi)(\bar{\psi}^\mu \gamma (1.4.116))]16$$

カイラルスカラーの運動項 同次座標 X^I の代わりに,

$$X^I = yZ^I(z) \quad (1.4.117)$$

により, 新たな複素座標 $(y, z^\alpha)(\alpha = 1, \dots, n)$ を導入する. ここで, $Z^I(z)$ は, $\partial Z^I/\partial z^\alpha$ がランク n を持つような z の正則関数の組である. y 座標には, $f(z)$ を任意の正則関数として,

$$y \rightarrow y' = e^{f(z)/a} y, \quad Z^I \rightarrow Z'^I(z) = e^{-f(z)/a} Z^I(z) \quad (1.4.118)$$

という変換の自由度が存在する. X^I に対して, D-gauge 条件 $N = -a$ を課すと, $|y|^2$ は z の関数となる:

$$y\bar{y} = e^{\mathcal{K}(z, \bar{z})/a} \equiv -\frac{a}{N(Z^I, \bar{Z}^I)}. \quad (1.4.119)$$

このゲージ条件のもとで, 変換 (1.4.118) を施すと, \mathcal{K} は次の変換を受ける:

$$\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}' = \mathcal{K} + f(z) + \overline{f(z)}. \quad (1.4.120)$$

最終的に \mathcal{K} はカイラルスカラーが値を取る Kähler 多様体の Kähler ポテンシャルとなるので, これは Kähler ポテンシャルの Kähler 変換を与える.

この D-ゲージ条件を満たす超曲面上では, スカラー場の運動項は

$$\mathcal{L}_0 = -G_{I\bar{J}} DX^I \cdot D\bar{X}^{\bar{J}} = -K_{\alpha\bar{\beta}} \hat{\partial} z^\alpha \cdot \hat{\partial} \bar{z}^{\bar{\beta}}; \quad K_{\alpha\bar{\beta}} = \partial_\alpha \partial_{\bar{\beta}} \mathcal{K} \quad (1.4.121)$$

すなわち, \mathcal{K} はカイラルスカラーの運動項に対応する Kähler 計量に対する Kähler ポテンシャルと一致する.

Proof. カイラルスカラーの共変微分を新たな座標系で表すと,

$$DX^I = \{dy - (b + i\mathcal{B})y\} Z^I + ydz^\alpha \partial_\alpha Z^I - A^A k_A^I. \quad (1.4.122)$$

ここで, キリングベクトル場 k_A は共形ウエイト 0 なので,

$$[k_A^I \partial_{X^I}, X^I \partial_{X^I}] = 0 \Leftrightarrow \partial_y k_A^\alpha = 0, \quad y \partial_y k_A^y = k_A^y \quad (1.4.123)$$

より,

$$k_A^\alpha = k_A^\alpha(z), \quad k_A^y = \frac{y}{a} r_A(z). \quad (1.4.124)$$

また,

$$\delta_{\text{gauge}} \mathcal{K} = \theta^A \mathcal{L}_{k_A} \mathcal{K} = \delta(a \ln(y\bar{y})) = \theta^A \left(r_A(z) + \overline{r_A(z)} \right) \quad (1.4.125)$$

よって,

$$\delta X^I = \delta y Z^I + y \delta z^\alpha \partial_\alpha Z^I = \theta^A y \left\{ k_A^\alpha \nabla_\alpha Z^I + \frac{i}{a} \mathcal{P}_A Z^I \right\}. \quad (1.4.126)$$

ここで, $\nabla_\alpha Z^I$ は Kähler 変換 (1.4.118) に関する共変微分で

$$\nabla_\alpha y = \partial_\alpha y - \frac{1}{a} \partial_\alpha \mathcal{K} y, \quad (1.4.127a)$$

$$\nabla_\alpha Z^I = \partial_\alpha Z^I + \frac{1}{a} \partial_\alpha \mathcal{K} Z^I, \quad \nabla_{\bar{\alpha}} Z^I = 0. \quad (1.4.127b)$$

また,

$$\mathcal{P}_A \equiv i(k_A^\alpha \partial_\alpha \mathcal{K} - r_A) = -i(k_A^{\bar{\alpha}} \partial_{\bar{\alpha}} \mathcal{K} - \bar{r}_A). \quad (1.4.128)$$

以上より, Killing ベクトルは

$$k_A^I = y \left(k_A^\alpha \nabla_\alpha Z^I + ia^{-1} \mathcal{P}_A Z^I \right) \quad (1.4.129)$$

と表される. これを $D_\mu X^I$ の表式に代入すると,

$$D_\mu X^I = Y_\mu X^I + y \hat{\partial}_\mu z^\alpha \nabla_\alpha Z^I. \quad (1.4.130)$$

ただし,

$$Y \equiv \frac{dy}{y} - i(\mathcal{B} + a^{-1} \mathcal{P}_A A^A) - a^{-1} dz^\alpha \partial_\alpha \mathcal{K}, \quad (1.4.131)$$

$$\hat{\partial}_\mu z^\alpha = \partial_\mu z^\alpha - k_A^\alpha A_\mu^A. \quad (1.4.132)$$

この表式において, Z^I と $\nabla_\alpha Z^J$ はエルミート内積 $G_{I\bar{J}}$ に関して直交する. 実際, D-gauge $N = -a$ のもとで, $N_{IJ} X^J = 0$ より,

$$\begin{aligned} \partial_\alpha (\bar{X}^{\bar{I}} N_{\bar{I}}) &= \partial_\alpha N = 0 \\ \Leftrightarrow \partial_\alpha \bar{X}^{\bar{I}} N_{\bar{I}} + \bar{X}^{\bar{I}} \partial_\alpha X^J N_{\bar{I}J} + \partial_\alpha X^J N_{\bar{I}J} \bar{X}^{\bar{I}} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\partial_\alpha \bar{y}}{\bar{y}} N + \frac{\partial_\alpha y}{y} N + y G_{\bar{I}J} \bar{X}^{\bar{I}} \partial_\alpha Z^J &= 0 \\ \Leftrightarrow e^{\mathcal{K}/a} G_{\bar{I}J} \bar{Z}^{\bar{I}} \nabla_\alpha Z^J &= 0. \end{aligned} \quad (1.4.133)$$

よって、カイラルスカラの運動項は

$$-G_{I\bar{J}}DX^I \cdot D\bar{X}^{\bar{J}} = -|y|^2 Y \cdot Y G_{I\bar{J}}Z^I \bar{Z}^{\bar{J}} + K_{\alpha\bar{\beta}} \hat{\partial}_\mu z^\alpha \hat{\partial}^\mu \bar{z}^{\bar{\beta}}. \quad (1.4.134)$$

ここで、

$$K_{\alpha\bar{\beta}} = |y|^2 G_{I\bar{J}} \nabla_\alpha Z^I \overline{\nabla_{\bar{\beta}} \bar{Z}^{\bar{J}}}. \quad (1.4.135)$$

B_μ は

$$\text{Im} Y = -\mathcal{B} - \frac{1}{a} \mathcal{P}_A A^A - \frac{i}{2} d \ln(y/\bar{y}) + \frac{i}{2} (dz^\alpha \partial_\alpha \mathcal{K} - d\bar{z}^{\bar{\alpha}} \partial_{\bar{\alpha}} \mathcal{K}) \quad (1.4.136)$$

にのみ含まれるので、 B_μ についての変分方程式は、 $\text{Im} Y = 0$ となる。また、このとき、

$$\text{Re} Y = \frac{1}{2} d \ln(y\bar{y}) - \frac{1}{2a} d\mathcal{K} = 0 \quad (1.4.137)$$

すなわち、 $Y = 0$ 。さらに、

$$G_{I\bar{J}} \nabla_\alpha Z^I \bar{Z}^{\bar{J}} = 0 \Rightarrow G_{I\bar{J}} \partial_\alpha Z^I \bar{Z}^{\bar{J}} = -\frac{1}{a} \partial_\alpha \mathcal{K} G_{I\bar{J}} Z^I \bar{Z}^{\bar{J}} = \frac{1}{|y|^2} \partial_\alpha \mathcal{K} \quad (1.4.138)$$

より、

$$K_{\alpha\bar{\beta}} = |y|^2 G_{I\bar{J}} \partial_\alpha Z^I \partial_{\bar{\beta}} \bar{Z}^{\bar{J}} + \frac{1}{a} \partial_\alpha \mathcal{K} \partial_{\bar{\beta}} \mathcal{K}. \quad (1.4.139)$$

一方、 $N_{I\bar{J}\bar{K}} \bar{Z}^{\bar{J}} = 0$ より、

$$\begin{aligned} \partial_\alpha \partial_{\bar{\beta}} \mathcal{K} &= -a \partial_\alpha \partial_{\bar{\beta}} \ln \left[-a^{-1} Z^I G_{I\bar{J}} \bar{Z}^{\bar{J}} \right] \\ &= |y|^2 G_{I\bar{J}} \partial_\alpha Z^I \partial_{\bar{\beta}} \bar{Z}^{\bar{J}} + \frac{|y|^2}{a} (N_I \partial_\alpha Z^I) (N_{\bar{J}} \partial_{\bar{\beta}} \bar{Z}^{\bar{J}}). \end{aligned} \quad (1.4.140)$$

ここで、

$$\begin{aligned} N_I \partial_\alpha Z^I &= \frac{1}{y} N_I (\partial_\alpha X^I - \partial_\alpha y Z^I) = \frac{1}{y} (\partial_\alpha N - N_{\bar{I}} \partial_\alpha \bar{y} \bar{Z}^{\bar{I}}) - \frac{\partial_\alpha y}{y^2} N \\ &= -\frac{N}{y} \partial_\alpha \ln(y\bar{y}) = \frac{1}{ay} \partial_\alpha \mathcal{K} \end{aligned} \quad (1.4.141)$$

よって、

$$\mathcal{L}_0 = -K_{\alpha\bar{\beta}} \hat{\partial} z^\alpha \cdot \hat{\partial} \bar{z}^{\bar{\beta}}; \quad K_{\alpha\bar{\beta}} = \partial_\alpha \partial_{\bar{\beta}} \mathcal{K} \quad (1.4.142)$$

Q.E.D.

カイラルスピノール場の運動項 カイラルスピノール場 Ω^I から

$$\Omega^I = y\chi^0 Z^I + y\chi^\alpha \nabla_\alpha Z^I \quad (1.4.143)$$

により, (χ^0, χ^α) を導入する:

$$\chi^0 = -a^{-1} N_I \Omega^I, \quad \chi^\alpha = \bar{y} K^{\alpha\bar{\beta}} \Omega^I G_{I\bar{J}} \bar{\nabla}_{\bar{\beta}} \bar{Z}^{\bar{J}}. \quad (1.4.144)$$

このとき,

$$\text{S-gauge: } \chi^0 = 0. \quad (1.4.145)$$

以下, この条件を課すと, スピノール場は $\chi^\alpha (\alpha = 1, \dots, n)$ のみで表される. χ^α の共形ウエイトとカイラルウエイトは $w = 1/2, c = -3/2$, Kähler ウエイトは $(0,0)$ である.

このゲージ条件のもとで, カイラルスピノール場の運動項は

$$\mathcal{L}_{1/2} = -\frac{1}{2} G_{I\bar{J}} \left(\bar{\Omega}^I \hat{\mathcal{D}}^{(0)} \Omega^{\bar{J}} + \bar{\Omega}^{\bar{J}} \hat{\mathcal{D}}^{(0)} \Omega^I \right) = -\frac{1}{2} K_{\alpha\bar{\beta}} \left(\bar{\chi}^{\bar{\beta}} \mathcal{D}^{(0)} \chi^\alpha + \bar{\chi}^\alpha \mathcal{D}^{(0)} \chi^{\bar{\beta}} \right). \quad (1.4.146)$$

Proof. Ω^I の運動項に含まれる共変微分

$$\hat{D}_\mu^{(0)} \Omega^I = D_\mu^{(0)} (y \nabla_\alpha Z^I \chi^\alpha) + \Gamma_{JK}^I D_\mu X^J y \nabla_\alpha Z^K \chi^\alpha \quad (1.4.147)$$

において,

$$D_\mu X^J = y Y_\mu Z^J + y \hat{\partial}_\mu z^\beta \nabla_\beta Z^J = y \hat{\partial}_\mu z^\beta \nabla_\beta Z^J, \quad (1.4.148a)$$

$$D_\mu^{(0)} \Omega^I = \mathcal{D}(\omega, \mathcal{B})_\mu (y \nabla_\alpha Z^I \chi^\alpha) - A_\mu^A \partial_J k_A^I y \nabla_\alpha Z^J \chi^\alpha. \quad (1.4.148b)$$

ここで,

$$\begin{aligned} \partial_J k_A^I y \nabla_\alpha Z^J &= \partial_\alpha k_A^I + \frac{1}{a} k_A^I \frac{\partial_\alpha \bar{y}}{\bar{y}} = y \nabla_\alpha \left(\frac{k_A^I}{y} \right) \\ &= y \left[\nabla_\alpha k_A^\beta \nabla_\beta Z^I + k_A^\beta \nabla_\alpha \nabla_\beta Z^I + \frac{i}{a} (\mathcal{P}_A \nabla_\alpha Z^I + \partial_\alpha \mathcal{P}_A Z^I) \right] \end{aligned} \quad (1.4.149)$$

よって,

$$\begin{aligned} D_\mu^{(0)} \Omega^I &= y \nabla_\alpha Z^I D_\mu^{(0)} \chi^\alpha + y \chi^\alpha \left(\hat{\partial}_\mu z^\beta \nabla_\beta \nabla_\alpha Z^I + \hat{\partial}_\mu \bar{z}^{\bar{\beta}} \nabla_{\bar{\beta}} \nabla_\alpha Z^I \right) \\ &\quad - i \frac{y}{a} A_\mu^A \partial_\alpha \mathcal{P}_A Z^I \chi^\alpha. \end{aligned} \quad (1.4.150)$$

ここで,

$$\nabla_{\bar{\beta}} \nabla_\alpha Z^I = \frac{1}{a} K_{\alpha\bar{\beta}} Z^I. \quad (1.4.151)$$

また, (1.4.135) の両辺に ∇_γ を作用させると,

$$G_{IJ}\overline{\nabla_\beta Z^J}\nabla_\gamma\nabla_\alpha Z^I + y\nabla_\gamma Z^K N_{IJK}\nabla_\alpha Z^I\bar{\nabla}_\beta\bar{Z}^{\bar{J}} = 0. \quad (1.4.152)$$

これを $\nabla_\gamma\nabla_\alpha Z^I$ について解くと,

$$\nabla_\beta\nabla_\alpha Z^I = -yN_{KIJ}G^{I\bar{J}}\nabla_\alpha Z^K\nabla_\beta Z^{\bar{L}} = -y\Gamma_{KL}^I\nabla_\alpha Z^K\nabla_\beta Z^{\bar{L}}. \quad (1.4.153)$$

以上より,

$$\hat{D}_\mu^{(0)}\Omega^I = y\nabla_\alpha Z^I D_\mu^{(0)}\chi^\alpha + \frac{y}{a}\left(K_{\alpha\bar{\beta}}\hat{\partial}_\mu\bar{z}^{\bar{\beta}} - iA_\mu^A\partial_\alpha\mathcal{P}_A\right)Z^I\chi^\alpha. \quad (1.4.154)$$

よって, カイラルスピノール場の運動項は

$$\mathcal{L}_{1/2} = -\frac{1}{2}K_{\alpha\bar{\beta}}\left(\bar{\chi}^{\bar{\beta}}\mathcal{D}^{(0)}\chi^\alpha + \bar{\chi}^\alpha\mathcal{D}^{(0)}\chi^{\bar{\beta}}\right). \quad (1.4.155)$$

Q.E.D.

ポテンシャル項 $W(z)$ を

$$\mathcal{W}(X) = y^3W(z) \quad (1.4.156)$$

により導入すると,

$$G^{I\bar{J}}\mathcal{W}_I\bar{\mathcal{W}}_{\bar{J}} = y\bar{y}\left(-\frac{1}{a}Z^I\bar{Z}^{\bar{J}} + K^{\alpha\bar{\beta}}\nabla_\alpha Z^I\bar{\nabla}_{\bar{\beta}}\bar{Z}^{\bar{J}}\right)\mathcal{W}_I\bar{\mathcal{W}}_{\bar{J}} \quad (1.4.157)$$

において,

$$Z^I\mathcal{W}_I = 2y^2W(z), \quad (1.4.158a)$$

$$\nabla_\alpha Z^I\mathcal{W}_I = y^2\nabla_\alpha W. \quad (1.4.158b)$$

ここで, $N = -a = -3/\kappa^2$ より,

$$\nabla_\alpha W \equiv \partial_\alpha W + \kappa^2\partial_\alpha\mathcal{K}W. \quad (1.4.159)$$

よって,

$$V = V_F + V_D; \quad (1.4.160)$$

$$V_F = e^{\kappa^2\mathcal{K}}\left(-3\kappa^2W\bar{W} + \nabla_\alpha W K^{\alpha\bar{\beta}}\bar{\nabla}_{\bar{\beta}}\bar{W}\right),$$

$$V_D = \frac{1}{2}[(\text{Re } f)^{-1}]^{AB}\mathcal{P}_A\mathcal{P}_B. \quad (1.4.161)$$

残留ゲージ対称性 最終的な4次元超重力理論は、局所座標変換、局所 Lorentz 変換 M^{ab} 、局所超対称変換 Q 、局所内部ゲージ変換 T_A および Kähler 変換に対して不変となるが、これらの変換の一部は、元の理論におけるカイラル変換および S 変換を伴う。

まず、T-gauge 条件 $y = \bar{y}$ より、

$$\lambda_T = \frac{i}{2a}\theta^A(r_A - \bar{r}_A) + \frac{i}{2a\sqrt{2}}\bar{\epsilon}(\chi^\alpha\partial_\alpha\mathcal{K} - \chi^{\bar{\alpha}}\partial_{\bar{\alpha}}\mathcal{K}) + \frac{i}{2a}[f(z) - \bar{f}(\bar{z})]. \quad (1.4.162)$$

つぎに、S-gauge 条件 $N_I\Omega^I = 0$ より、

$$\frac{2}{\kappa^2}P_L\eta = -\bar{W}P_L\epsilon + \gamma_a P_R\epsilon \left(\frac{1}{4}N_{I\bar{J}}\bar{\Omega}^I\gamma^a\Omega^{\bar{J}} + \frac{1}{8}\text{Re}f_{AB}\bar{\lambda}^A\gamma^a\gamma_5\lambda^B \right). \quad (1.4.163)$$

1.4.6 最も一般的な4次元超重力理論の最終形

基本場と自由データ

- Weyl 超組: フレーム場 θ_μ^a ; グラヴィティノー場 ψ_μ (Majorana)
- カイラル超組: 複素スカラー場 z^α ; スピノール場 χ^α ($\gamma_*\chi^\alpha = \chi^\alpha$)。

スカラー場 z^α は、Kähler-Hodge 多様体 (\mathcal{M}_s, g, J) に値を取る。この Kähler-Hodge 多様体の選択は、理論の自由データの一つ。特に、Kähler 計量 $g_{\alpha\bar{\beta}}$ は、 $g_{\alpha\bar{\beta}} = \partial_\alpha \bar{\partial}_{\bar{\beta}} \mathcal{K}$ により、Kähler ポテンシャル \mathcal{K} を、Kähler 変換 $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K} + f(z) + \bar{f}(\bar{z})$ の自由度を除いて決定。

- ゲージ超組: ゲージ場 A_μ^A ; ゲージノー場 λ^A (Majorana)。

ゲージセクターの自由データは、ゲージ群 G と \mathcal{M}_s 上の正則関数を要素とする対称行列であるゲージ結合関数 $f_{AB}(z)$ 。この関数は、ゲージ変換に対して、随伴表現のもとで2階対称テンソルとして変換することが必要。

- ゲージ結合: ゲージ場のカイラルセクターとの結合は、ゲージ群 G の Kähler 多様体 (M, g, J) の正則等長変換群への埋込により定義される。対応する正則キリングベクトルの基底を k_A とおくと、 (z^α, χ^α) のゲージ変換は

$$\delta z^\alpha = \theta^A k_A^\alpha, \quad \delta \chi^\alpha = \theta^A \partial_{\bar{\beta}} k_A^\alpha \chi^\beta. \quad (1.4.164)$$

各正則 Killing ベクトル場には、対応して、次の条件で特徴付けられるモーメント写像 \mathcal{P}_A が一意的に存在する：

$$k_{A\alpha} = i\partial_\alpha \mathcal{P}_A, \quad k_{A\bar{\alpha}} = -i\partial_{\bar{\alpha}} \mathcal{P}_A, \quad (1.4.165a)$$

$$\mathcal{P}_A = i(k_A^\alpha \partial_\alpha K - r_A) = -i(k_A^{\bar{\alpha}} \partial_{\bar{\alpha}} K - \bar{r}_A). \quad (1.4.165b)$$

一方、ゲージセクターとの結合は G の随伴表現により決まり、特にゲージノー場は次のように変換する：

$$\delta \lambda^A = -\theta^C f^A_{CB} \lambda^B. \quad (1.4.166)$$

ラグランジアン

$$\begin{aligned}
|\theta|^{-1} \mathcal{L} &= \frac{1}{2\kappa^2} [R(e) - \bar{\psi}_\mu R^\mu] \\
&\quad - K_{\alpha\bar{\beta}} \left(\hat{\partial}_\mu z^\alpha \hat{\partial}^\mu \bar{z}^{\bar{\beta}} + \frac{1}{2} \bar{\chi}^\alpha \mathcal{D}^{(0)} \chi^{\bar{\beta}} + \frac{1}{2} \bar{\chi}^{\bar{\beta}} \mathcal{D}^{(0)} \chi^\alpha \right) - V \\
&\quad + (\text{Re } f_{AB}) \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^A F^{\mu\nu B} - \frac{1}{2} \bar{\lambda}^A \mathcal{D}^{(0)} \lambda^B \right] \\
&\quad + \frac{1}{4} \left[(\text{Im } f_{AB}) F_{\mu\nu}^A \tilde{F}^{\mu\nu B} + (\hat{\partial}_\mu \text{Im } f_{AB}) \bar{\lambda}^A \gamma_5 \gamma^\mu \lambda^B \right] \\
&\quad + \frac{1}{8} (\text{Re } f_{AB}) \bar{\psi}_\mu \gamma^{ab} (F_{ab}^A + \hat{F}_{ab}^A) \gamma^\mu \lambda^B + \frac{1}{\sqrt{2}} \left[K_{\alpha\bar{\beta}} \bar{\psi}_\mu \hat{\phi}^{\bar{\beta}} \gamma^\mu \chi^\alpha + \text{h.c.} \right] \\
&\quad + \frac{1}{4\sqrt{2}} \left[f_{AB,\alpha} \bar{\lambda}^A \gamma^{ab} \hat{F}_{ab}^B \chi^\alpha + \text{h.c.} \right] + \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_{\text{mix}} + \mathcal{L}_{4f}. \quad (1.4.167)
\end{aligned}$$

ここで,

$$R^\mu = \gamma^{\mu\rho\sigma} \left(\partial_\rho + \frac{1}{4} \omega_\rho^{ab}(e) \gamma_{ab} - \frac{3}{2} i \mathcal{B}_\rho \gamma_5 \right) \psi_\sigma, \quad (1.4.168a)$$

$$\hat{\partial}_\mu z^\alpha = \partial_\mu z^\alpha - A_\mu^A k_A^\alpha, \quad (1.4.168b)$$

$$D^{(0)} \chi^\alpha = \left(\partial_\mu + \frac{1}{4} \omega_\mu^{ab}(e) \gamma_{ab} + \frac{3}{2} i \mathcal{B}_\mu \right) \chi^\alpha - A_\mu^A \partial_\beta k_A^\alpha(z) \chi^\beta + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \chi^\gamma \hat{\partial}_\mu z^\beta. \quad (1.4.168c)$$

Kähler 接続係数 $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ とカイラル接続係数 \mathcal{B}_μ は,

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = K^{\alpha\bar{\delta}} \partial_\beta K_{\gamma\bar{\delta}}, \quad (1.4.169a)$$

$$\mathcal{B}_\mu = \frac{i}{6} \kappa^2 (\partial_\mu z^\alpha \partial_\alpha \mathcal{K} - \partial_\mu \bar{z}^{\bar{\alpha}} \partial_{\bar{\alpha}} \mathcal{K}) - \frac{\kappa^2}{3} A_\mu^A \mathcal{P}_A. \quad (1.4.169b)$$

ゲージノの共変微分は

$$D_\mu^{(0)} \lambda^A = \left(\partial_\mu + \frac{1}{4} \omega_\mu^{ab}(e) \gamma_{ab} - \frac{3}{2} i \mathcal{B}_\mu \gamma_5 \right) \lambda^A - A_\mu^C \lambda^B f^A{}_{BC}. \quad (1.4.170)$$

超共形ゲージ曲率 \hat{F}_{ab} は

$$\hat{F}_{ab}^A = e_a^\mu e_b^\nu (2\partial_{[\mu} A_{\nu]}^A + f_{BC}^A A_\mu^B A_\nu^C + \bar{\psi}_{[\mu} \gamma_{\nu]} \lambda^A). \quad (1.4.171)$$

次に, 質量項は

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_m &= \frac{1}{2} m_{3/2} \bar{\psi}_\mu P_R \gamma^{\mu\nu} \psi_\nu \\
&\quad - \frac{1}{2} m_{\alpha\beta} \bar{\chi}^\alpha \chi^\beta - m_{\alpha A} \bar{\chi}^\alpha \lambda^A - \frac{1}{2} m_{AB} \bar{\lambda}^A P_L \lambda^B + \text{h.c.} \quad (1.4.172)
\end{aligned}$$

ここで,

$$m_{3/2} = \kappa^2 e^{\kappa^2 \mathcal{K}/2} W, \quad (1.4.173a)$$

$$m_{\alpha\beta} = e^{\kappa^2 \mathcal{K}/2} \nabla_\alpha \nabla_\beta W, \quad (1.4.173b)$$

$$m_{\alpha A} = i\sqrt{2} \left[\partial_\alpha \mathcal{P}_A - \frac{1}{4} f_{AB,\alpha} [(\text{Re } f)^{-1}]^{BC} \mathcal{P}_C \right] = m_{A\alpha}, \quad (1.4.173c)$$

$$m_{AB} = -\frac{1}{2} e^{\kappa^2 \mathcal{K}/2} f_{AB,\alpha} K^{\alpha\bar{\beta}} \nabla_\beta \bar{W}. \quad (1.4.173d)$$

グラヴィティノーとカイラルフェルミオンの混合項は

$$\mathcal{L}_{\text{mix}} = \bar{\psi} \cdot \gamma \left[\frac{i}{2} P_L \lambda^A \mathcal{P}_A + \frac{1}{\sqrt{2}} \chi^\alpha e^{\kappa^2 \mathcal{K}/2} \nabla_\alpha W \right] + \text{h.c.} \quad (1.4.174)$$

最後に, 4体フェルミ項は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{4f} = & \frac{1}{2\kappa^2} \mathcal{L}_{\text{SG,torsion}} \\ & + \left\{ -\frac{1}{4\sqrt{2}} f_{AB,\alpha} \bar{\psi} \cdot \gamma \chi^\alpha \bar{\lambda}^A P_L \lambda^B + \frac{1}{8} (\nabla_\alpha f_{AB,\beta}) \bar{\chi}^\alpha \chi^\beta \bar{\lambda}^A P_L \lambda^B + \text{h.c.} \right\} \\ & + \frac{i}{16} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \bar{\psi}_\mu \gamma_\nu \psi_\rho \left(\frac{1}{2} (\text{Re } f_{AB}) \bar{\lambda}^A \gamma_5 \gamma_\sigma \lambda^B + K_{\alpha\bar{\beta}} \bar{\chi}^{\bar{\beta}} \gamma_\sigma \chi^\alpha \right) - \frac{1}{2} K_{\alpha\bar{\beta}} \bar{\psi}_\mu \chi^{\bar{\beta}} \bar{\psi}^\mu \chi^\alpha \\ & + \frac{1}{4} \left(R_{\alpha\bar{\gamma}\beta\bar{\delta}} - \frac{1}{2} \kappa^2 K_{\alpha\bar{\gamma}} K_{\beta\bar{\delta}} \right) \bar{\chi}^\alpha \chi^\beta \bar{\chi}^{\bar{\gamma}} \chi^{\bar{\delta}} \\ & + \frac{3}{64} \kappa^2 [(\text{Re } f_{AB}) \bar{\lambda}^A \gamma_\mu \gamma_5 \lambda^B]^2 - \frac{1}{16} f_{AB,\alpha} \bar{\lambda}^A P_L \lambda^B K^{\alpha\bar{\beta}} \bar{f}_{CD,\bar{\beta}} \bar{\lambda}^C P_R \lambda^D \\ & + \frac{1}{16} [(\text{Re } f)^{-1}]^{AB} (f_{AC,\alpha} \bar{\chi}^\alpha - \bar{f}_{AC,\bar{\alpha}} \bar{\chi}^{\bar{\alpha}}) \lambda^C (f_{BD,\beta} \bar{\chi}^\beta - \bar{f}_{BD,\bar{\beta}} \bar{\chi}^{\bar{\beta}}) \lambda^D \\ & - \frac{1}{4} \kappa^2 K_{\alpha\bar{\beta}} (\text{Re } f_{AB}) \bar{\chi}^\alpha \lambda^A \bar{\chi}^{\bar{\beta}} \lambda^B. \end{aligned} \quad (1.4.175)$$

残留ゲージ変換 局所ローレンツ変換と一般座標変換を除く残留ゲージ変換のうち、内部ゲージ変換と局所超対称変換に対する変換則は、

$$\delta\theta_\mu^A = \frac{1}{2}\bar{\epsilon}\gamma^\alpha\psi_\mu, \quad (1.4.176a)$$

$$\begin{aligned} \delta P_L\psi_\mu &= \left(\partial_\mu + \frac{1}{4}\omega_\mu^{ab}(e)\gamma_{ab} - \frac{3}{2}i\mathcal{B}_\mu \right) P_L\epsilon + \frac{\kappa^2}{2}\gamma_\mu e^{\kappa^2\mathcal{K}/2}W P_R\epsilon \\ &\quad + \frac{\kappa^2}{4}P_L\psi_\mu\theta^A(\bar{r}_A - r_A) + \text{cubic in fermions}, \end{aligned} \quad (1.4.176b)$$

$$\delta z^\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\epsilon}\chi^\alpha + \theta^A k_A^\alpha, \quad (1.4.176c)$$

$$\begin{aligned} \delta\chi^\alpha &= \frac{1}{\sqrt{2}}P_L \left(\hat{\partial}z^\alpha - e^{\kappa^2\mathcal{K}/2}K^{\alpha\bar{\beta}}\nabla_{\bar{\beta}}\bar{W} \right) \epsilon \\ &\quad + \theta^A \left[\partial_\beta k_A^\alpha \chi^\beta + \frac{1}{4}\kappa^2(r_A - \bar{r}_A)\chi^\alpha \right] + \text{cubic in fermions} \end{aligned} \quad (1.4.176d)$$

$$\delta A_\mu^A = -\frac{1}{2}\bar{\epsilon}\gamma_\mu\lambda^A + \partial_\mu\theta^A + \theta^C A_\mu^B f^A_{BC}, \quad (1.4.176e)$$

$$\begin{aligned} \delta\lambda^A &= \left[\frac{1}{4}\gamma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}^A + \frac{i}{2}\gamma_5[(\text{Re } f)^{-1}]^{AB}\mathcal{P}_B \right] \epsilon \\ &\quad + \theta^B \left[\lambda^C f^A_{CB} + \frac{\kappa^2}{4}\gamma_5(\bar{r}_B - r_B)\lambda^A \right] + \text{cubic in fermions} \end{aligned} \quad (1.4.176f)$$

1.4.7 Dirac の量子化条件

ゲージ場 A とスピノール場 ψ の結合を

$$D\psi = (d - iqA)\psi. \quad (1.4.177)$$

ゲージ変換を

$$\psi \rightarrow e^{iq\theta}\psi, \quad A \rightarrow A + d\theta \quad (1.4.178)$$

とする。

いま、2次元球面 S^2 上の赤道に対応する円を C 、 C の北半球を H^N 、南半球を H^S 、それぞれにおけるゲージポテンシャルを A^N, A^S とするとき、 $A^N - A^S = d\theta$ で、 $e^{q\theta}$ は C 上の一価関数となることより、

$$\begin{aligned} \exp\left(iq \int_{S^2} F\right) &= \exp\left\{iq \left(\int_{H^N} F + \int_{H^S} F\right)\right\} \\ &= \exp\left[iq \int_C (A^N - A^S)\right] = \exp\left(iq \int_C d\theta\right) = 1 \end{aligned} \quad (1.4.179)$$

よって、フラックスに対する次の量子化条件が得られる：

$$q \int_{S^2} F = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (1.4.180)$$

単体分割を利用することにより、この条件は、球面だけでなく任意の閉曲面に対して成り立つことが示される：

$$q \int_{\Sigma^2} F = 2\pi n. \quad (1.4.181)$$

1.4.8 Kähler-Hodge 条件

$\mathcal{N} = 1, D = 4$ の大域的超対称理論では、スカラ多様体として任意の Kähler 多様体を用いることができる。しかし、超重力理論におけるスカラ多様体は、以下の理由で、Kähler-Hodge 多様体という Kähler 多様体の部分クラスに限定される。

まず、超重力理論では、 P^a, M^{ab}, Q 以外の超共形ゲージ自由度をゲージ固定すると、Kähler 変換 $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K} + f(z) + \overline{f(\bar{z})}$ は、カイラル $U(1)$ ゲージ変換を伴うようになる。このため、最終的な理論での基本場のうち、 $\psi, \chi^\alpha, \lambda^A$ がケーラー変換に伴い次のように変換する：

$$\delta\psi = -i\frac{\kappa^2}{2}\text{Im}(f)\gamma_*\psi, \quad (1.4.182a)$$

$$\delta\chi^\alpha = i\frac{\kappa^2}{2}\text{Im}(f)\chi^\alpha, \quad (1.4.182b)$$

$$\delta\lambda^A = i\frac{\kappa^2}{2}\text{Im}(f)\gamma_*\lambda^A. \quad (1.4.182c)$$

対応して、複合ゲージ場

$$\mathcal{A} = \frac{i}{6}\kappa^2(dz^\alpha\partial_\alpha\mathcal{K} - d\bar{z}^{\bar{\alpha}}\partial_{\bar{\alpha}}\mathcal{K}) \quad (1.4.183)$$

がこのゲージ変換を打ち消すためにこれらの場に次のように結合する：

$$D\psi = \left(d - \frac{3}{2}i\mathcal{A}\gamma_* + \dots\right)\psi + \dots \quad (1.4.184)$$

(他の場への作用も全く同じ)。よって、 \mathcal{A} は次の Dirac 量子化条件の制限を受ける：

$$\frac{3}{2}\int_{\Sigma^2} d\mathcal{A} = -\frac{\kappa^2}{2}\int_{\Sigma^2} \omega = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (1.4.185)$$

ここで、 ω は Kähler 形式

$$\omega = ig_{\alpha\bar{\beta}}dz^\alpha \wedge d\bar{z}^{\bar{\beta}} = i\partial_\alpha\partial_{\bar{\beta}}\mathcal{K}dz^\alpha \wedge d\bar{z}^{\bar{\beta}} \quad (1.4.186)$$

である。これより、 $(\mathcal{M}_s, (\kappa^2/(4\pi))g, J)$ は Kähler-Hodge 多様体となる。

2

4次元超重力理論に基づく宇宙論

§2.1

宇宙論の基礎

2.1.1 基礎方程式

時空次元 $D = 1 + n$

等長変換群 $G = \text{ISO}(n), \text{SO}(n+1), \text{SO}(n,1)$: 空間は定曲率

$$d\sigma_K^2 = d\chi^2 + r_K(\chi)^2 d\Omega_{n-1}^2; \quad r_K(\chi) = \begin{cases} \chi & K = 0 \\ K^{-1/2} \sin(K^{1/2}\chi) & K > 0 \\ |K|^{-1/2} \sinh(|K|^{1/2}\chi) & K < 0 \end{cases} \quad (2.1.1)$$

時空計量

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 d\sigma_K^2 \quad (2.1.2)$$

エネルギー-運動量テンソル

$$T_{tt} = \rho(t), \quad T_{tj} = 0, \quad T_j^i = P(t)\delta_j^i \quad (2.1.3)$$

Einstein 方程式 $G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu}$

$$G_{tt} : \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{K}{a^2} - \frac{2\Lambda}{n(n-1)} = \frac{2\kappa^2}{n(n-1)}\rho \quad (2.1.4a)$$

$$G_j^i : \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{n-2}{2} \left\{ \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{K}{a^2} \right\} - \frac{\Lambda}{n-1} = -\frac{\kappa^2 P}{n-1} \quad (2.1.4b)$$

エネルギー保存則 $\nabla^\nu T_{\mu\nu} = 0$

$$\dot{\rho} = -n(\rho + P)\frac{\dot{a}}{a} \quad (2.1.5)$$

2.1.2 単純な宇宙モデル

$w = P/\rho$ が一定とすると、基礎方程式は

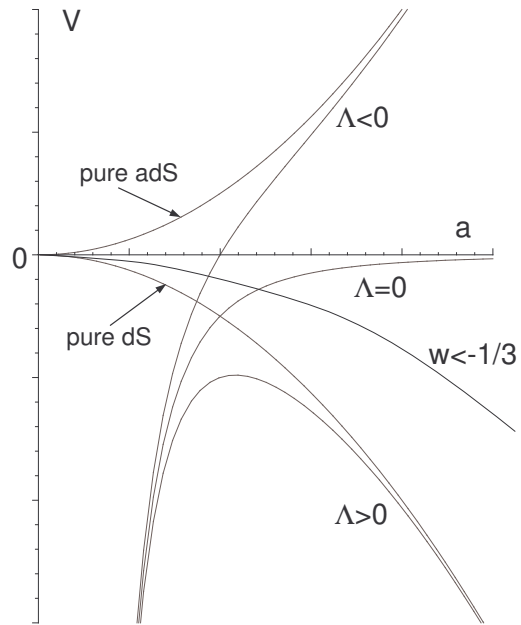
$$\rho \propto a^{-n(1+w)} \Rightarrow \dot{a}^2 + V(a) = -K \quad (2.1.6)$$

に帰着される。ここで、

$$V = -\frac{C}{a^{n(1+w)}} - \lambda a^2, \quad (2.1.7)$$

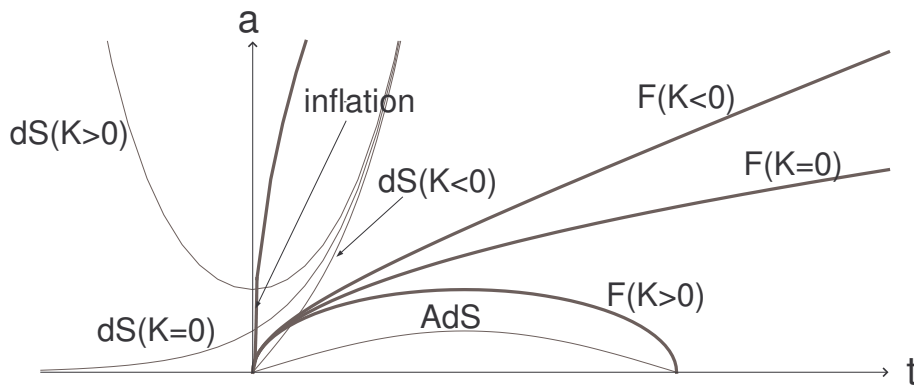
$$C = \frac{2\kappa^2 \rho_0}{n(n-1)} = \Omega_M H_0^2 \quad (2.1.8)$$

$$\lambda = \frac{2\Lambda}{n(n-1)} = \Omega_\Lambda H_0^2. \quad (2.1.9)$$



特徴

- $\Lambda < 0$ の時、常に宇宙は有限時間で収縮を始める。
- $\Lambda = 0$ の時は、 $K = 0$ ないし $K < 0$ なら、宇宙は膨張を続ける。
- $\Lambda > 0$ の時、 K がある正の臨界値より大きいと、再収縮するとサイズが有限な最小値を持つ解の2つが存在。



2.1.3 宇宙パラメーター

基礎方程式

- 膨張方程式

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\kappa^2}{3}\rho - \frac{K}{a^2} = \frac{\kappa^2}{3}\rho_M - \frac{K}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \quad (2.1.10)$$

- エネルギー方程式

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3(1+w)\frac{\dot{a}}{a} \quad (2.1.11)$$

- 状態方程式

$$w = \frac{P}{\rho} \quad (2.1.12)$$

宇宙パラメーター

- Hubble 定数 : H_0 ($a(t_0) = 1$)

- 密度パラメータ :

$$H_0^2 = \frac{\kappa^2}{3}\rho_{\text{cr}} \Rightarrow \Omega_E = \frac{\rho}{\rho_{\text{cr}}}, \quad \Omega_M = \frac{\rho_M}{\rho_{\text{cr}}}, \quad \Omega_K = -\frac{K}{H_0^2}, \quad \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H_0^2} \quad (2.1.13)$$

これらは, 関係式

$$1 = \Omega_E + \Omega_K, \quad \Omega_E = \Omega_M + \Omega_\Lambda \quad (2.1.14)$$

を満たす.

- 物質組成 :

$$\begin{aligned} \Omega_M &= \Omega_{\text{DM}} + \Omega_{\text{b}} + \Omega_{\nu} + \Omega_{\gamma} + \Omega_{\text{GW}} + \Omega_{\text{DE}} + \dots \\ &\Rightarrow w = w(a). \end{aligned} \quad (2.1.15)$$

2.1.4 LFRW モデル

基本仮定

$$D = 4, \quad \Lambda = 0, \quad \Omega_M = \Omega_n + \Omega_r. \quad (2.1.16)$$

曲率による違い

- $\Omega_M = 1$ (Einstein-de Sitter モデル: $K = 0$)

$$a = \Omega_n \xi^2 + 2\Omega_r^{1/2} \xi, \quad (2.1.17a)$$

$$H_0 t = \frac{2}{3} \Omega_n \xi^3 + 2\Omega_r^{1/2} \xi^2 \quad (2.1.17b)$$

$$H_0 t_0 = \frac{2}{3} \frac{1 + 2\Omega_r^{1/2}}{(1 + \Omega_r^{1/2})^2} \quad (2.1.17c)$$

- $\Omega_M < 1$ (Open モデル; $K < 0$)

$$a = \frac{\Omega_n}{2(1 - \Omega_M)} (\cosh \theta - 1) + \frac{\Omega_r^{1/2}}{\sqrt{1 - \Omega_M}} \sinh \theta, \quad (2.1.18a)$$

$$H_0 t = \frac{\Omega_n}{2(1 - \Omega_M)^{3/2}} (\sinh \theta - \theta) + \frac{\Omega_r^{1/2}}{1 - \Omega_M} (\cosh \theta - 1) \quad (2.1.18b)$$

$$H_0 t_0 = \frac{\Omega_n}{1 - \Omega_M} \left(\frac{1 + \Omega_r^{1/2}}{\Omega_M + 2\Omega_r^{1/2} + \Omega_r} - \frac{1}{\sqrt{1 - \Omega_M}} \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \Omega_M} + \Omega_r^{1/2}}{(\Omega_0 + 2\Omega_r^{1/2} + \Omega_r)^{1/2}} \right) + \frac{2\Omega_r^{1/2}}{\Omega_M + 2\Omega_r^{1/2} + \Omega_r} \quad (2.1.18c)$$

- $\Omega_M = 0$ (Milne 宇宙: $K < 0$)

$$ds^2 = -dt^2 + t^2 d\sigma_{-1}^2 \quad (2.1.19)$$

2.1.5 平坦モデル

物質優勢 ($4D, \Lambda = 0$): $\gamma = 2/3$

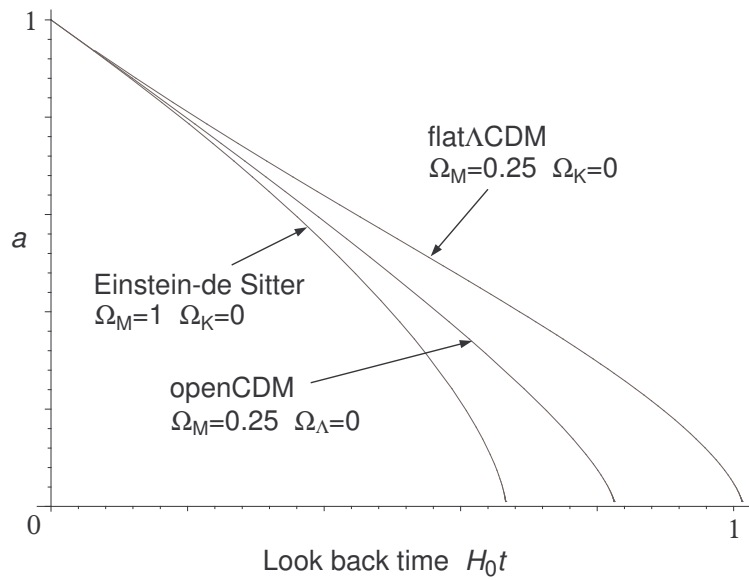
$$t_0 = 2/(3H_0) = 9.3\text{Gyrs}(0.7/h) \quad (2.1.20)$$

輻射優勢 ($4D, \Lambda = 0$): $\gamma = 1/2$

$$t_0 = 1/(2H_0) = 7\text{Gyrs}(0.7/h) \quad (2.1.21)$$

Flat Λ CDM ($4D, \Omega_M = 0.25$):

$$t_0 \simeq 1.01/H_0 = 14\text{Gyrs}(0.7/h) \quad (2.1.22)$$



2.1.6 特異点

宇宙膨張の加速度

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{(n-2)\kappa^2}{n(n-1)} \left(\rho + \frac{n}{n-2}P \right) + \frac{2\Lambda}{n(n-1)} \quad (2.1.23)$$

(宇宙項 Λ は $\rho = -P = \Lambda/\kappa^2$ と対応.)

宇宙の初期特異点 強エネルギー条件

$$P \geq -\frac{n-2}{n}\rho \Leftrightarrow w \geq -1 + \frac{2}{n} \quad (2.1.24)$$

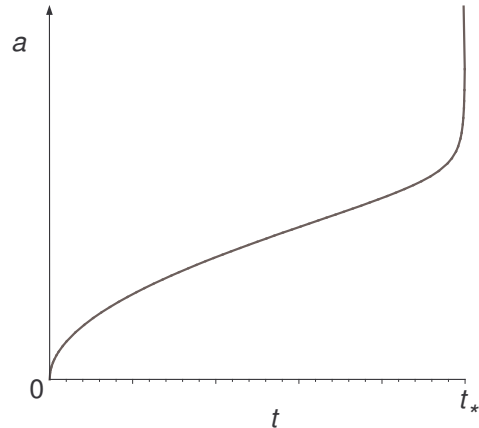
が満たされれば、必ず有限な過去に $a = 0$ となる。すなわち、宇宙は有限な年齢をもつ。

Big-Rip 特異点 $w < -1$ のとき、 $\alpha = -n(1+w)/2 (> 0)$ とおくと、

$$\rho \propto a^{2\alpha} \Rightarrow t = \int^a \frac{da}{aH} \propto \text{const} - \frac{1}{a^\alpha} \quad (2.1.25)$$

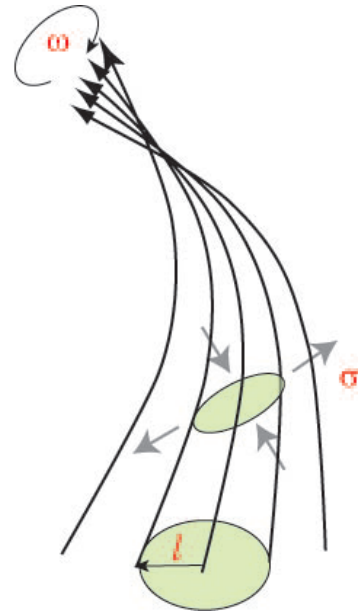
より、有限な時間でスケール因子も密度も発散

$$a \propto \frac{1}{(t_* - t)^{1/\alpha}}, \quad \rho \propto \frac{1}{(t_* - t)^2} \quad (2.1.26)$$



2.1.7 Raychaudhuri 方程式

$$n \frac{\ddot{\ell}}{\ell} = -\sigma^2 + \omega^2 - R_{\mu\nu} V^\mu V^\nu \quad (2.1.27)$$



重力の引力性 これより，強エネルギー条件

$$R_{\mu\nu} V^\mu V^\nu \geq 0 \quad (2.1.28)$$

が満たされるとき，

- 重力は引力となる．
- 一旦収束し始めた非回転的光線束（時間的測地線束）は有限時間内に「一点」に収束する．

Hawking-Penrose の特異点定理

- 強エネルギー条件（+一般性条件）
- 因果性条件
- 強重力条件（捕捉的集合の存在）

の3つの条件が満たされるとき，無限に延長できない光的ないし時間的測地線が存在する．

2.1.8 光の伝搬

光波面の方程式 RW 計量が

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2(d\chi^2 + r_K^2 d\Omega_{n-1}^2) \quad (2.1.29)$$

と表される座標系において,

$$d\eta := \frac{dt}{a(t)} = \pm d\chi \Rightarrow \chi = \chi_0 \pm (\eta - \eta_0) \quad (2.1.30)$$

宇宙論的赤方偏移 動径距離 χ の位置から時刻 t および $t + \Delta t$ に出た光が原点 $\chi = 0$ に到達する時刻をそれぞれ $t_0, t_0 + \Delta t_0$ とすると

$$\Delta\eta = \Delta\eta_0 \Leftrightarrow \frac{\Delta t}{a(t)} = \frac{\Delta t_0}{a(t_0)} \Leftrightarrow \lambda_0 = \frac{a(t_0)}{a(t)}\lambda \Leftrightarrow \nu_0 = \frac{a(t)}{a(t_0)}\nu \quad (2.1.31)$$

これより, 時刻 t に共動的天体から出た光の赤方偏移は

$$z \equiv \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda} = \frac{a(t_0)}{a(t)} - 1 \Leftrightarrow a(t) = \frac{a(t_0)}{1+z} \quad (2.1.32)$$

2.1.9 ホライズン

粒子ホライズン 時刻 t の観測者を頂点とする過去の光円錐は

$$\chi = \eta_0 - \eta = \int_t^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_a^{a_0} \frac{da}{a^2 H} \quad (2.1.33)$$

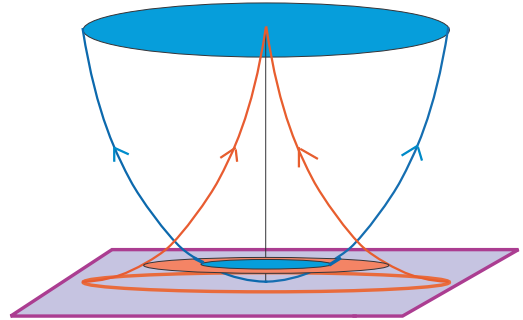
時刻 t までに観測できる球領域の共動半径 $L_H(t)$ は

$$L_H(t) = \int_0^{a(t)} \frac{da}{a^2 H} \quad (2.1.34)$$

L_H は次の条件が満たされると有限となる.

$$\lim_{a \rightarrow 0} a^2 \rho = \infty \quad (2.1.35)$$

$L_H(t)$ は, 初期面上の1点から出た光波面の時刻 t での共動半径と一致する.



Hubble ホライズン

- ゆらぎの力学的振る舞いなどでは, Hubble ホライズン半径 $1/H$ が上記の $L_H(t)$ より重要となる.
- Friedmann モデルでは, Hubble ホライズン半径は $L_H(t)$ と同程度となり, 時間 t に比例して増大する.

§2.2

加速膨張宇宙モデル

定義 宇宙が加速膨張する時期が宇宙初期に存在する宇宙モデル.

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa^2}{6}(\rho + 3P) > 0. \quad (2.2.1)$$

これより, インフレーション時期では $P < -\rho/3$.

2.2.1 1成分スローロールモデル

- 運動方程式

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V = 0, \quad (2.2.2a)$$

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3} \left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V \right) \quad (2.2.2b)$$

これより,

$$\dot{H} = -\frac{\kappa^2}{2}\dot{\phi}^2, \quad (2.2.3a)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \dot{H} + H^2 = \frac{\kappa^2}{3} (V - \dot{\phi}^2) \quad (2.2.3b)$$

となり, $\dot{\phi}^2 < V$ なら加速膨張が実現される.

- **Slow roll** 近似インフレーションが持続するには, 一般に, $|\ddot{\phi}|$ が $3H|\dot{\phi}|$ と比べて小さい必要がある. そこで, $\ddot{\phi}$ が無視できる条件を求めてみよう. まず, (2.2.2a) においてこの項を無視すると

$$3H\dot{\phi} \simeq -V'(\phi) \quad (2.2.4)$$

この解に対して,

$$\epsilon := \frac{m_{\text{pl}}^2 (V')^2}{2V^2} \ll 1 \quad (2.2.5)$$

が成り立つ時期では, 加速膨張が起りかつ H の変化が緩やかになる:

$$\frac{|\dot{H}|}{H^2} = \frac{\kappa^2 \dot{\phi}^2}{2H^2} \simeq \frac{m_{\text{pl}}^2 (V')^2}{2V^2} = \epsilon \ll 1 \quad (2.2.6)$$

さらに,

$$\eta := \frac{m_{\text{pl}}^2 V''}{V} \quad (2.2.7)$$

とおくと, (2.2.4) の時間微分より

$$\frac{\ddot{\phi}}{3H\dot{\phi}} \simeq \frac{1}{3}(\eta - \epsilon) \quad (2.2.8)$$

となるので,

$$|\eta| \ll 1 \quad (2.2.9)$$

なら, $\ddot{\phi}$ を無視する近似が正当化される

- 指数膨張数 1 成分インフラトンモデルにおいて, 時刻 t からインフレーション終了時 $t = t_f$ までの指数膨張数 N は, 一般に

$$N = \int_t^{t_f} H dt = \int_{\phi}^{\phi_f} \frac{H}{\dot{\phi}} d\phi \quad (2.2.10)$$

となるので, slow roll 近似が良い場合には, N を時刻の代わりにそのときの ϕ の値の関数と見なすと

$$N(\phi) \simeq \int_{\phi_f}^{\phi} \frac{3H^2}{V'} \simeq \int_{\phi_f}^{\phi} \frac{V}{m_{\text{pl}}^2 V'} d\phi = \pm \int_{\phi}^{\phi_f} \frac{d\phi}{m_{\text{pl}} \sqrt{2\epsilon}} \quad (2.2.11)$$

- 観測量の表式

$$\mathcal{P}_S = \frac{V}{24\pi^2 \epsilon m_{\text{pl}}^4} = \frac{V^3}{12\pi^2 (V')^2 m_{\text{pl}}^6}, \quad (2.2.12a)$$

$$n_s - 1 = -6\epsilon + 2\eta = 1 - 3 \left(\frac{m_{\text{pl}} V'}{V} \right)^2 + 2 \frac{m_{\text{pl}}^2 V''}{V}, \quad (2.2.12b)$$

$$r = 16\epsilon, \quad (2.2.12c)$$

$$n_t = -2\epsilon = -\frac{r}{8} \quad (2.2.12d)$$

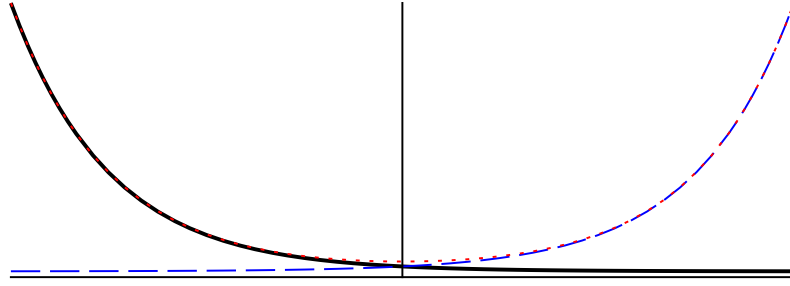


図 2.1: 指数関数型ポテンシャル.

2.2.2 Power-law inflation model

- ポテンシャル

$$V = m_{\text{pl}}^4 e^{2\alpha\phi/m_{\text{pl}}} \quad (2.2.13)$$

- slow roll パラメータ

$$\epsilon = 2\alpha^2, \quad \eta = 4\alpha^2 \quad (2.2.14)$$

- slow roll 条件

$$\alpha \ll \frac{1}{2}. \quad (2.2.15)$$

- slow roll 解

$$e^{-\alpha\phi/m_{\text{pl}}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\alpha^2 m_{\text{pl}} t + e^{-\alpha\phi_i/m_{\text{pl}}}, \quad (2.2.16a)$$

$$a = a_* \exp \frac{\phi_i - \phi}{2\alpha m_{\text{pl}}} = a_i \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\alpha^2 m_{\text{pl}} t + e^{-\alpha\phi_i/m_{\text{pl}}} \right)^{1/(2\alpha^2)}, \quad (2.2.16b)$$

$$H \simeq \frac{m_{\text{pl}}}{\sqrt{3}} e^{\alpha\phi/m_{\text{pl}}} \approx \frac{1}{2\alpha^2 t}. \quad (2.2.16c)$$

- e-folding 数

$$N = \frac{\Delta\phi}{2\alpha m_{\text{pl}}} \quad (2.2.17)$$

- 観測的予言

$$\mathcal{P}_S = \frac{1}{48\pi^2\alpha^2} e^{2\alpha\phi_e/m_{\text{pl}}} e^{4\alpha^2 N}, \quad (2.2.18a)$$

$$n_s - 1 = -4\alpha^2, \quad r = 32\alpha^2, \quad n_t = -4\alpha^2. \quad (2.2.18b)$$

$n_s \approx 0.96$ を考慮すると

$$\alpha \approx 0.01 \Rightarrow r \approx 0.32. \quad (2.2.19)$$

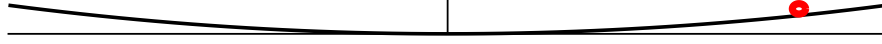


図 2.2: カオティックインフレーション型ポテンシャル.

2.2.3 Chaotic inflation model

- ポテンシャル

$$V = \mu^2 m_{\text{pl}}^2 (|\phi|/m_{\text{pl}})^n \quad (n > 0) \quad (2.2.20)$$

- Slow roll パラメーター

$$\epsilon = \frac{n^2}{2} \left(\frac{m_{\text{pl}}}{|\phi|} \right)^2, \quad \eta = n(n-1) \left(\frac{m_{\text{pl}}}{|\phi|} \right)^2. \quad (2.2.21)$$

- slow roll 条件

$$|\phi| \gg \frac{1}{n} m_{\text{pl}}. \quad (2.2.22)$$

- Slow roll 解

$$\phi = \begin{cases} \phi_i \left[1 - \frac{n(4-n)}{2\sqrt{3}} \mu t \left(\frac{m_{\text{pl}}}{|\phi_i|} \right)^{2-n/2} \right]^{2/(4-n)} & n \neq 4 \\ \phi_i e^{-4\mu t/\sqrt{3}} & n = 4 \end{cases}, \quad (2.2.23a)$$

$$a = a_* \left(\frac{m_{\text{pl}}}{|\phi|} \right)^{1/n}, \quad (2.2.23b)$$

$$H \simeq \frac{\mu}{\sqrt{3}} \left(\frac{|\phi|}{m_{\text{pl}}} \right)^{n/2}. \quad (2.2.23c)$$

- 指数膨張数

$$N = \frac{\phi^2 - \phi_e^2}{2nm_{\text{pl}}^2} \quad (2.2.24)$$

- 観測的予言

$$\mathcal{P}_\zeta \simeq \frac{(2nN)^{n-2}}{12\pi n^2} \left(\frac{\mu}{m_{\text{pl}}} \right)^2 \quad (2.2.25a)$$

$$r \simeq 16\epsilon \simeq \frac{4n}{N} \quad (2.2.25b)$$

$$n_s - 1 \simeq 2\eta - 6\epsilon \simeq -\frac{n(n+2)}{4N} \quad (2.2.25c)$$

$$\alpha_s = \frac{dn_s}{d \ln k} = -\frac{n(n+2)}{4N^2} \quad (2.2.25d)$$

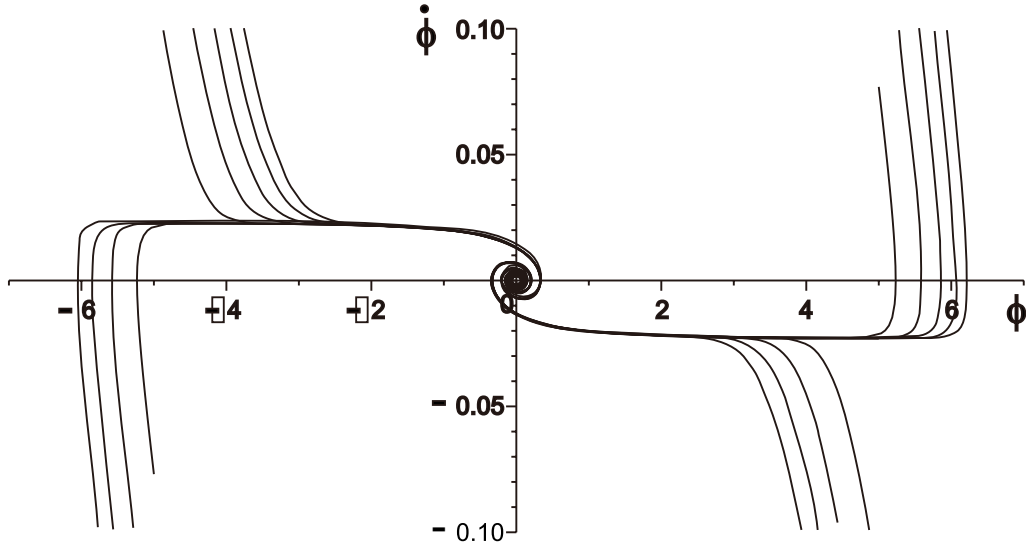


図 2.3: カオティックインフレーションのインフラトンの時間発展. $n = 2, \mu = 0.02m_{\text{pl}}$ の場合, 横軸は ϕ/m_{pl} , 縦軸は $\dot{\phi}/m_{\text{pl}}^2$.

2.2.4 Natural inflation

- 作用積分

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{m_{\text{pl}}^2}{2} R_s - \frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 - V(\phi) \right], \quad (2.2.26)$$

$$V = \mu^4 \left(1 + \cos \frac{\phi}{f_a} \right) \quad (2.2.27)$$

- slow roll parameters

$$\epsilon = \frac{m_{\text{pl}}^2}{2f_a^2} \tan^2 \frac{\phi}{2f_a}, \quad (2.2.28a)$$

$$\eta = -\frac{m_{\text{pl}}^2}{2f_a^2} \left(1 - \tan^2 \frac{\phi}{2f_a} \right). \quad (2.2.28b)$$

- 観測的予言

$$\sin \frac{\phi}{2f_a} = e^{-\xi}, \quad \mathcal{P}_S = \frac{N}{3\pi^2} \left(\frac{\mu}{m_{\text{pl}}} \right)^4 \frac{\sinh^2 \xi}{\xi}, \quad (2.2.29a)$$

$$n_s - 1 \simeq -\frac{2\xi}{N} \left(1 + \frac{2}{e^{2\xi} - 1} \right), \quad r \simeq \frac{16}{N} \frac{\xi}{e^{2\xi} - 1}. \quad (2.2.29b)$$

ここで,

$$\xi \equiv \frac{N m_{\text{pl}}^2}{2 f_a^2} \quad (2.2.30)$$

2.2.5 Starobinsky 型モデル

以下, $\kappa = 1$ とおく.

f を

$$f(R) = R + cR^2 \quad (2.2.31)$$

と取ると,

$$\chi = 1 + 2cR. \quad (2.2.32)$$

Jordan frame でのポテンシャルは

$$2U(\chi) = cX^2 = \frac{(\chi - 1)^2}{4c}. \quad (2.2.33)$$

Einstein frame でのポテンシャルは

$$2V(\phi) = \frac{1}{2c} (1 - e^{-\gamma\phi})^2. \quad (2.2.34)$$

Starobinsky モデルでは $\gamma = \sqrt{2/3}(\kappa = 1 \text{ unit})$ だが, 以下では γ をフリーパラメータとして扱う.

slow roll parameters は

$$\epsilon = \frac{2\gamma^2}{(e^{\gamma\phi} - 1)^2}, \quad (2.2.35a)$$

$$\eta = -2\gamma^2 \frac{e^{\gamma\phi} - 2}{(e^{\gamma\phi} - 1)^2}. \quad (2.2.35b)$$

これより, インフレーションが終了する ϕ の値は $\exp(\gamma\phi_e) \approx 2$. よって, e-folding 数 $N(\phi)$ は

$$\begin{aligned} N &= \int_{\phi_e}^{\phi} \frac{d\phi}{\sqrt{2\epsilon}} \\ &= \frac{1}{2\gamma^2} (e^{\gamma\phi} - e^{\gamma\phi_e}) - \frac{1}{2\gamma} (\phi - \phi_e) \\ &\approx \frac{1}{2\gamma^2} e^{\gamma\phi} \quad (e^{\gamma\phi} \gg 1). \end{aligned} \quad (2.2.36)$$

よって,

$$\epsilon \simeq \frac{3}{4N^2} \simeq \frac{4\gamma^2}{3} \times 10^{-4} \left(\frac{60}{N}\right)^2, \quad (2.2.37a)$$

$$\eta \simeq -\frac{1}{N} \simeq -1.7 \times 10^{-2} \left(\frac{60}{N}\right). \quad (2.2.37b)$$

スカラゆらぎの振幅より

$$\mathcal{P}_\zeta \simeq \frac{H^2}{8\pi^2\epsilon} \simeq 2.5 \cdot 10^{-9} \quad (2.2.38)$$

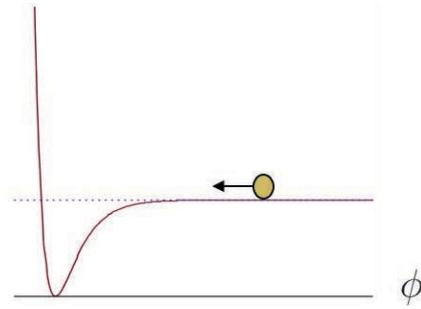


図 2.4: Starobinsky 型モデルでの等価スカラーポテンシャル

より,

$$H \simeq 6.4 \times 10^{-6} m_{\text{pl}} \sqrt{\frac{2}{3\gamma^2}} \left(\frac{60}{N}\right) \quad (2.2.39)$$

よって,

$$H^2 \simeq \frac{1}{12c} (1 - e^{-\gamma\phi})^2 \Rightarrow c \simeq 3\gamma^2 \times 10^9 m_{\text{pl}}^{-2} (N/60)^2 \quad (2.2.40)$$

スペクトル指数は

$$1 - n_s = 6\epsilon - 2\eta = \frac{4\gamma^2(e^{\gamma\phi} + 1)}{(e^{\gamma\phi} - 1)^2} \simeq \frac{2}{N} + \frac{3}{\gamma^2 N} \simeq 0.035 \quad (\gamma^2 = 2/3, N = 60). \quad (2.2.41)$$

テンソル・スカラ比は

$$r = 16\epsilon \simeq 3.2 \times 10^{-3} \frac{2}{3\gamma^2} \left(\frac{60}{N}\right)^2. \quad (2.2.42)$$

2.2.6 観測よりの制限

Reference

- Planck 2015 (Ade PAR et al): AA594, A20 (2016). arXiv: 1502.02114
“ Planck 2015 results. XX. Constraints on inflation “

(1) インフレーションの程度

- 平坦性

$$|\Omega_K| \lesssim 0.005 \quad (2.2.43)$$

インフレーションが始まる前の空間曲率を k_s , 対応するスケール因子を a_s , インフレーション終了後（再加熱後）のスケール因子を a_e とおくと,

$$\Omega_K = \frac{k_s a_s^2}{H_0^2} = e^{-2N_t} \frac{k_s a_e^2}{H_0^2}, \quad (2.2.44)$$

$$H_0^2 \simeq H_e^2 \times \left(\frac{a_f}{a_{\text{eq}}}\right)^4 \times a_{\text{eq}}^3 = \frac{a_e^4}{a_{\text{eq}}} H_e^2 \Rightarrow a_e^2 = \sqrt{a_{\text{eq}}} \frac{H_0}{H_e} \quad (2.2.45)$$

および $a_{\text{eq}} \simeq 2.5 \times 10^{-5}$ より,

$$\Omega_K = e^{-2N_t} \frac{k_s \sqrt{a_{\text{eq}}}}{H_0 H_e} \simeq 10^{54} e^{-2N_t} \left(\frac{H_e}{3 \times 10^{14} \text{GeV}}\right) \left(\frac{k_s}{H_e^2}\right) \quad (2.2.46)$$

($H_f = 3 \times 10^{14} \text{GeV} \Leftrightarrow T_f \simeq 10^{16} \text{GeV}$). よって,

$$N_t \gtrsim 64.8 - 0.5 \ln \frac{H_e}{3 \times 10^{14} \text{GeV}} \frac{k_s}{H_e^2}. \quad (2.2.47)$$

- 一様性 (ホライズン問題) 現在の Hubble ホライズンサイズがインフレーションの途中で Hubble ホライズンサイズ以下の領域になるためには,

$$\frac{1}{H_0} \times a_s < \frac{1}{H_s} \Leftrightarrow e^{-N_t} \frac{H_s a_e}{H_0} < 1. \quad (2.2.48)$$

これは

$$e^{2N_t} > \frac{\sqrt{a_{\text{eq}}} H_s^2}{H_0 H_e} = 6 \times 10^{53} \left(\frac{H_s}{H_e}\right)^2 \left(\frac{H_e}{3 \times 10^{14} \text{GeV}}\right) \quad (2.2.49)$$

と同等. よって,

$$N_t > 62 + \ln \left[\frac{H_s}{H_e} \left(\frac{H_e}{3 \times 10^{14} \text{GeV}}\right)^{1/2} \right]. \quad (2.2.50)$$

より正確には,

$$N_t > N_o \equiv 61 + \ln \left[\frac{H_{os}}{H_e} \left(\frac{H_e}{2 \cdot 10^{14} \text{GeV}/\hbar}\right)^{1/3} \left(\frac{g(T_r)}{216}\right)^{12} \left(\frac{T_r}{10^{16} \text{GeV}}\right)^{1/3} \right] \quad (2.2.51)$$

(2) ゆらぎ

- ゆらぎの振幅 \Rightarrow ポテンシャルの傾き

$$\mathcal{P}_S(k_o) = (2.142 \pm 0.049) \times 10^{-9} \quad (k_o = 0.002 \text{Mpc}^{-1}) \quad (68\% \text{CL}) \quad [\text{Planck+LSS}] \quad (2.2.52)$$

ポテンシャルが支配的なスローロールモデルでは

$$\mathcal{P}_S(k) = \frac{H^2}{\|\dot{\phi}\|^2} \Big|_{t=t_k} \quad \mathcal{P}_\phi(k) \simeq \left(\frac{H^2}{2\pi\|\dot{\phi}\|} \right)^2 \Big|_{t=t_k} \simeq \left(\frac{H^2}{8\pi^2\epsilon m_{\text{pl}}^2} \right) \Big|_{t=t_k} \quad (2.2.53)$$

ここで,

$$\epsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2} \simeq \frac{m_{\text{pl}}^2}{2} \frac{\|DV\|^2}{V^2}. \quad (2.2.54)$$

- スカラゆらぎのスペクトル指数 \Rightarrow ポテンシャルの曲率

$$\mathcal{P}_S(k) = \mathcal{P}_S(k_*) \left(\frac{k}{k_*} \right)^{n_s-1}; \quad (2.2.55a)$$

$$n_s = 0.9667 \pm 0.0040 \quad (68\% \text{CL}) \quad [\text{Planck+LSS}], \quad (2.2.55b)$$

$$dn_s/d\ln(k) = -0.0065 \pm 0.0075 \quad (68\% \text{CL}) \quad [\text{Planck+LSS+BKP}] \quad (2.2.55c)$$

ポテンシャルが支配的なスローロールモデルではスペクトル指数は

$$n_s - 1 \simeq 2\eta - 6\epsilon = -2\epsilon - \frac{\dot{\epsilon}}{H\epsilon} \quad (2.2.56)$$

ここで,

$$\eta = 2\epsilon - \frac{\dot{\epsilon}}{2H\epsilon} \simeq \frac{D^a V D^b D_a D_b V}{VG(DV, DV)}. \quad (2.2.57)$$

- 原始重力波の振幅 \Rightarrow インフレーションのスケール
振幅に対する観測的制限は

$$\mathcal{P}_T(k_*) \simeq \frac{2H^2}{\pi^2 m_{\text{pl}}^2} < 1.9 \times 10^{-9} \quad (2.2.58)$$

現在の観測的制限は, テンソル-スカラ比 $r = \mathcal{P}_T/\mathcal{P}_S$ で表して

$$r_{0.002} < 0.09 \quad (95\% \text{CL}) \quad [\text{Planck+LSS+BKP}] \quad (2.2.59)$$

ポテンシャルが支配的なスローロールモデルでは,

$$r \simeq 16\epsilon. \quad (2.2.60)$$

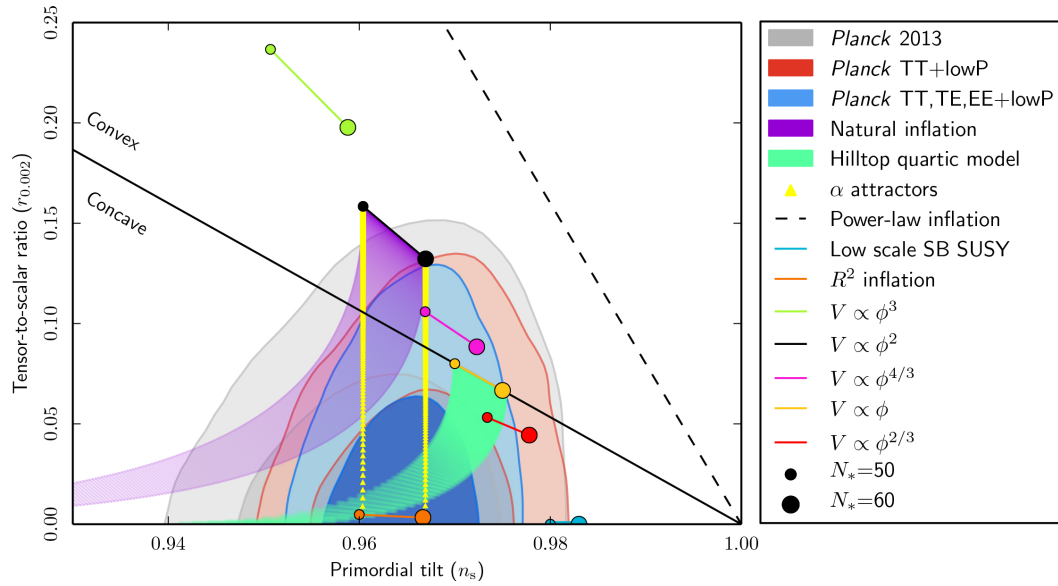


図 2.5: Planck2015 により得られた $n_s - r$ 平面での制限

- ゆらぎの断熱性等曲率ゆらぎの振幅 $S_m = S_c + S_b \rho_b / \rho_c$ が断熱的曲率ゆらぎを表すバーディーンパラメータ Z と $S = \text{sgn}(\alpha) \sqrt{|\alpha| / (1 - |\alpha|)} Z$ という比例関係にあると仮定したとき、パラメータ α に対して次の制限が得られている:

$$\alpha = 0.0003^{+0.0016}_{-0.0012} \text{ (95\%CL) [Planck]} \quad (2.2.61)$$

これは、等曲率ゆらぎの割合が断熱ゆらぎの3%以下であることを意味する。

- ゆらぎの非ガウス性ゆらぎの統計については、ガウ斯的であることを支持する結果が得られている。

$$f_{\text{NL}} = 2.5 \pm 5.7 \text{ (local)}, -16 \pm 73 \text{ (equil)}, -34 \pm 33 \text{ (ortho)} \text{ (68\%CL)}. \quad (2.2.62)$$

(3) 再加熱

- バリオン非対称性 : $n_B/n_\gamma = (6.10 \pm 0.21) \times 10^{-10}$ (WMAP3yr)
 - GUT baryogenesis \Rightarrow High T_r
 - Thermal leptogenesis $\Rightarrow T_r > O(10^9)$ GeV [Buchmuller W, Di Bari P, Plumacher M 2005[16]]
 - Affleck-Dine baryogenesis

- Gravitino 問題 [Kawasaki M, Takahashi F, Yanagida 2006 [50];Kawasaki M, Moroi T 1995[49]]
 - $m_{3/2} \gtrsim 100\text{TeV}$ (unstable): No problem
 - $m_{3/2} = 100\text{GeV} - 30\text{TeV}$ (unstable): Thermal production $\Rightarrow T_r < 10^{6-8}\text{GeV}$ (BBN constraint)
 - $10\text{keV} < m_{3/2} < O(10)\text{GeV}$ (stable, LSP): $T_r < 10^7\text{GeV}(m_{3/2}/1\text{GeV})$ (Ω_M constraint)

§2.3

N = 1 超重力理論のまとめ

2.3.1 構成要素

カイラル場セクター

- スカラ多様体: $(z^\alpha) \in \mathcal{M}$: Kähler 多様体
- Kähler ポテンシャル: $K(z, \bar{z})$
- 超ポテンシャル: $W(z)$

これらのポテンシャルは, Kähler 変換

$$K \rightarrow K' = K(z, \bar{z}) + f(z) + \overline{f(z)}, \quad (2.3.1a)$$

$$W \rightarrow e^{-f(z)} W \quad (2.3.1b)$$

の任意性をもつ.

ゲージセクター

- ゲージ群: 構造定数 $f_{AB}{}^C \rightarrow G$
- ゲージ結合関数: $f_{AB}(z)$ (holomorphic)
- Gauging Killing ポテンシャル: $\mathcal{P}_A(z, \bar{z})$

t_A を G の Killing ベクトル基底とすると,

$$k_A^\alpha(z) = -ig^{\alpha\bar{\beta}} \partial_{\bar{\beta}} \mathcal{P}_A(z, \bar{z}); \quad \nabla_\alpha \partial_{\bar{\beta}} \mathcal{P}_A(z, \bar{z}) = 0 \quad (2.3.2)$$

と表される (\mathcal{M}, K) の holomorphic Killing vector k_A^α を用いて, gauging $G \subset \text{Isom}(\mathcal{M})$ が $t_A \mapsto k_A^\alpha$ により定義される. 群 G を生成する条件は,

$$g_{\alpha\bar{\beta}} \left(k_A^\alpha k_B^{\bar{\beta}} - k_B^\alpha k_A^{\bar{\beta}} \right) = if_{AB}{}^C \mathcal{P}_C. \quad (2.3.3)$$

理論のゲージ不変性を保つため, K, W, f_{AB} はゲージ変換

$$\delta A^A = D\theta^A = d\theta^A + A^B \theta^C f_{BC}{}^A, \quad (2.3.4a)$$

$$\delta z^\alpha = \theta^A k_A^\alpha(z) \quad (2.3.4b)$$

に対して、次の変換性をもつことが要求される：

$$\delta K = \theta^A [r_A(z) + \overline{r_A(z)}]; \quad r_A = \partial_{k_A} K + i\mathcal{P}_A, \quad (2.3.5a)$$

$$\delta W = -\theta^A r_A W, \quad (2.3.5b)$$

$$\delta f_{AB} = \theta^C (2f_{C[A}{}^D f_{B]D} + iC_{AB,C}). \quad (2.3.5c)$$

§2.4

η 問題

インフラトン Φ が標準的な運動項をもつとすると、

$$K = \Phi\bar{\Phi} + \dots \Rightarrow K_{\Phi\bar{\Phi}} = 1 \Rightarrow e^{-1}\mathcal{L} = -D\Phi \cdot D\bar{\Phi} + \dots \quad (2.4.1)$$

他の場が安定化されていて、スーパーポテンシャルが Φ に依存しないとすると、

$$\partial_{\Phi} W = 0 \Rightarrow V_F = e^{|\Phi|^2} (V_0 + |\Phi|^2 |W|^2). \quad (2.4.2)$$

よって、 Φ の質量は

$$m^2 = \begin{cases} V_F + e^{|\Phi|^2} |W|^2 \\ (1 + 2|\Phi|^2)V_F + e^{|\Phi|^2} (1 + 4|\Phi|^2) |W|^2 \end{cases} \geq V_F \simeq 3H^2 \quad (2.4.3)$$

したがって、 η パラメータに対して次の制限を得る：

$$\eta = \frac{V''}{V} = \frac{m^2}{V_F} \geq 1 \quad (2.4.4)$$

シフト対称性 Φ の Kähler ポテンシャルが

$$K = F(\Phi \pm \bar{\Phi}) \quad (2.4.5)$$

という構造を持てば、 Φ の実部ないし虚部の後方に対し η 問題は回避される。例えば、 $K = 1/2(\Phi + \bar{\Phi})^2$ は標準的な運動項を生み出し、かつ η 問題を起こさない。

$$V_F = e^{(\Phi+\bar{\Phi})^2/2+K_0} [V_0 + (\Phi + \bar{\Phi})^2 |W|^2], \quad (2.4.6)$$

$$V_0 = K_0^{I\bar{J}} D_I W D_{\bar{J}} \bar{W} - 3|W|^2, \quad (2.4.7)$$

$$\partial_{\Phi} W = 0 \Rightarrow m_{\phi}^2 = 0; \quad \Phi = (\sigma + i\phi)/\sqrt{2} \quad (2.4.8)$$

Reference

- Kawasaki M, Yamaguchi H, Yanagida TT : PRL 85, 3572 (2000) [arXiv:hep-ph/0004243]

“Natural chaotic inflation in supergravity”

[Note 2.4.1] 標準のケーラーポテンシャルとシフト対称性をもつケーラーポテンシャルは, ケーラー変換で結ばれる:

$$\frac{1}{2}(\Phi + \bar{\Phi})^2 = \Phi\bar{\Phi} + f(\Phi) + \overline{f(\Phi)}; \quad f(z) = \frac{1}{2}z^2. \quad (2.4.9)$$

□

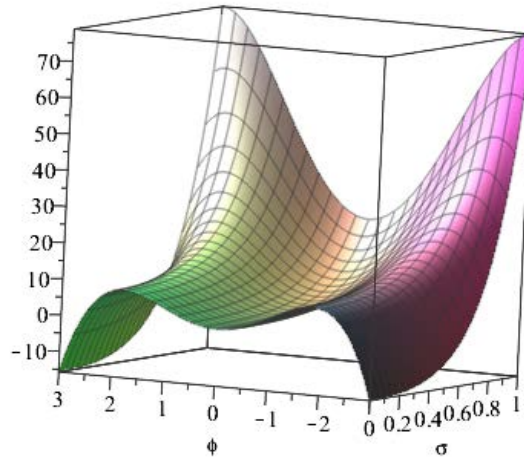


図 2.6: 不安定性をもつインフラトンポテンシャル ($n = 2, \mu = 1, W_0 = 1$)

§2.5

安定性問題

2.5.1 単インフラトンモデルの不安定性

シフト対称性をもつケーラーポテンシャルを用いて、超重力理論に基づく現実的なインフレーションモデルを作るには、スパーポテンシャルにインフラトン依存性を持たせることが必要となる。しかし、1成分のカイラルスカラー場 Φ を用いてこのようなモデルと作ると、一般に、不安定性が生じる。

例 ケーラーポテンシャル K と超ポテンシャル W を

$$K = K_0 + (\Phi + \bar{\Phi})^2, \quad W = W_0 + \mu\Phi^n; \quad \Phi = \frac{\sigma + i\phi}{\sqrt{2}} \quad (2.5.1)$$

と取ると、

$$V_F(\phi, \sigma = 0) = V_0 + \frac{\mu^2}{2n} \phi^{2(n-1)} (2n^2 - 3\phi^2) - \frac{6}{2^{n/2}} \text{Re}(i^n \mu W_0) \phi^n, \quad (2.5.2)$$

$$\begin{aligned} \partial_\sigma^2 V_F(\phi, \sigma = 0) = & 2V_0 + 4|W_0|^2 + 2^{1-n} \phi^{2(n-2)} \{2n^2(n-1) + n(2n+1)\phi^2 - \phi^4\} \\ & - 2^{1-n/2} \phi^{n-2} \{\phi^2 + n(n-1)\} \text{Re}((-i)^n \mu W_0). \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

2.5.2 Sf 型模型

インフラトンセクターのカイラススカラー場を2種類以上に増やすと、不安定性を持たない模型を作ることができる。例えば、2つのカイラルスカラー場 f, S を導入し、ケーラーポテンシャルと超ポテンシャルを

$$W = Sf(\Phi), \quad K = \frac{1}{2}(\Phi + \bar{\Phi})^2 + S\bar{S} \Rightarrow D_S W = (1 + |S|^2)f(\Phi) \quad (2.5.4)$$

と選ぶと、

$$V_F = e^{\sigma^2 + |S|^2} \left[(1 - |S|^2 + |S|^4)|f|^2 + |S|^2|f_\Phi + \sqrt{2}\sigma f|^2 \right] \geq 0, \quad (2.5.5a)$$

$$\partial_{|S|} V_F = 2|S|(1 + |S|^2) \left(|S|^2|f|^2 + |f' + \sqrt{2}\sigma f|^2 \right) \quad (2.5.5b)$$

$$V_F|_{S=0} = e^{\sigma^2} |f(\Phi)|^2; \quad \Phi = \frac{\sigma + i\phi}{\sqrt{2}} \quad (2.5.5c)$$

となるので、 $S = \sigma = 0$ は安定で、 ϕ 方向にカオティックインフレーションが実現される：

$$V_F = |f|^2 + \sigma^2 + |S|^2 \Rightarrow V(\phi) = |f(i\phi/\sqrt{2})|^2 = 2^{-n} \mu^2 \phi^{2n} \quad (f = \mu\Phi^n) \quad (2.5.6)$$

しかし、このインフラトンセクターを物質セクターと結合すると、しばしば、今度は安定化場 S に対して不安定性が発生する。実際、ケーラーポテンシャルと超ポテンシャルを

$$W = Sf(\Phi) + W_0, \quad K = \frac{1}{2}(\Phi + \bar{\Phi})^2 + S\bar{S} + K_0 \quad (2.5.7)$$

と取ると、F 項ポテンシャルは

$$V_F = e^{\sigma^2 + |S|^2 + K_0} \left[V_0 + (1 - |S|^2 + |S|^4)|f|^2 + |W_0|^2|S|^2 + 2(|S|^2 - 2)\text{Re}(fS\bar{W}_0) + |S(f_\Phi + \sqrt{2}\sigma f) + \sqrt{2}\sigma W_0|^2 \right] \quad (2.5.8)$$

となる。例えば、 $f = \mu\Phi^n$ に対して、 $S = \sigma = 0$ での質量行列は、 S の位相を適当に調節して $W_0 = i^n |W_0|$ となるように選ぶと、 (S_1, S_2, σ, ϕ) に関する成分表示で

$$M^2 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & d \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ \epsilon & 0 & 0 & c \end{pmatrix}; \quad (2.5.9)$$

$$a = 2^{2-n} n^2 \mu^2 \phi^{2(n-1)} + 2|W_0|^2, \quad (2.5.10)$$

$$b = 2^{1-n} n(2n-1) \mu^2 \phi^{2n} + 2^{2-n} n \mu^2 \phi^{2n-2} + 2|W_0|^2, \quad (2.5.11)$$

$$c = 2^{1-n} n(2n-1) \mu^2 \phi^{2n-2} |W_0|, \quad (2.5.12)$$

$$\epsilon = -2^{2-n/2} n \mu \phi^{n-1} \quad (2.5.13)$$

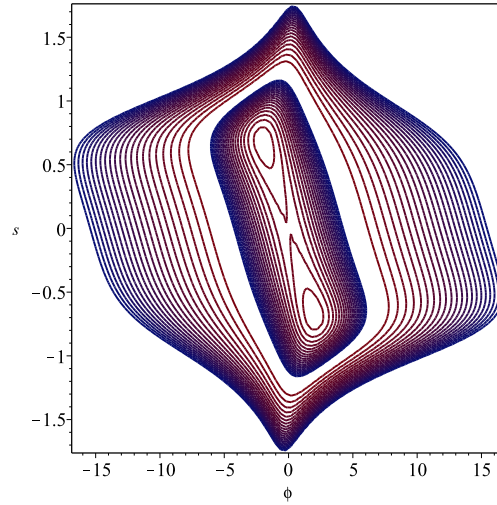


図 2.7: Sfモデルの $(s = \text{Re}(S), \phi)$ セクターのポテンシャル ($n = 1, \mu = 1, W_0 = i$)

となる. $a, b, c > 0$ なので, 質量の2乗がすべて正である条件は

$$ac - \epsilon^2 = 2^{3-2n} n \mu^2 \phi^{2(n-1)} \{n^2(2n-1)\mu^2 \phi^{2(n-1)} - 2^{n-1}(2n+1)|W_0|^2\} > 0 \quad (2.5.14)$$

となる.

例えば, $n = 1$ のときには, $|W_0|^2 > \mu^2/3$ なら $S = 0$ は常に不安定となる. 具体的な表式は, $W_0 = ik\mu$ のとき, $(s = \text{Re}(S), \phi)$ セクターで

$$V_F = \mu^2 e^{s^2} \left[\frac{1}{2}(s^4 - s^2 + 1)\phi^2 + (k^2 + 1)s^2 - \sqrt{2}ks(s^2 - 2)\phi \right]. \quad (2.5.15)$$

また, $n > 1$ のときには,

$$\phi^{2(n-1)} < \frac{2^n}{2n^2} \frac{2n+1}{2n-1} \frac{|W_0|^2}{\mu^2} \quad (2.5.16)$$

のレンジで $S = 0$ が不安定となる. S, Φ が大きい領域でポテンシャルは下限をもつので, これらの不安定性はインフラトンの軌道を $S = 0$ からずらすだけで致命的ではないが, インフレーションの振る舞いの解析が複雑になり, またインフレーションの終盤の振る舞いを大きく帰る. また, 複数の極小点が現れドメインウォールが生じる可能性も生じる (図 2.7 参照).

2.5.3 解決策

- Higher-order correction to the Kahler potential of a shift-symmetric model
 - Single Superfield models

[Ketov SV, Takada T: arXiv:1408.6524; plb736, 272 (2014)]

- $W = Sf$ -type 2 SF models

- Starobinsky influm

[Kallosh, Linde (2013) JCAP1306, 128; Ferrara S, Kallosh R, Van Proeyen (2013) JHEP1311,134; Cecotti S (1987) plb190, 86]

- Chaotic influm

[Kallosh, Linde (2010) JCAP1011,011]

- Natural influm

[Kallosh, Linde, Vercnocke (2014)arXiv:14-4.6244]

- General potential

[Kallosh, Linde, Rube T (2011) prd83, 043507]

- Stabilisation of the F-term influm by nilpotent SF

[Kallosh R, Linde A: arXiv:1408.5950; Ferrara S, Kallosh R, Linde A: JHEP1410, 143(2014)]

- R^2 inflation from scale invariant supergravity and anomaly free superstrings with fluxes

[Kounnas C, Lust D, Toumbas N: Fortsch. Phys. 63, 12-35 (2015). arXiv:1409.7076]

- Higher-derivative generalisation of supergravity

[Aoki S, Yamada Y (2014) prd90, 127701; Koehn M, Lehnert JL, Ovrut BA (2012) prd86, 085019]

§2.6

*巾零理論

References

- Kallosh R, Linde A: arXiv:1408.5950;
- Ferrara S, Kallosh R, Linde A: JHEP1410, 143(2014)
“Stabilisation of the F-term influm by nilpotent SF”

2.6.1 べきゼロカイラル場

カイラル場

$$S(x, \theta) = s(x_+) + \sqrt{2}i\theta \cdot G(x_+) + \theta^2 F^S(x_+) \quad (2.6.1)$$

の2乗

$$S^2 = s^2 + 2\sqrt{2}s(\theta \cdot G) + (2sF^S - G^2)\theta^2 \quad (2.6.2)$$

がゼロとすると,

$$S^2 = 0 \Rightarrow s = \frac{1}{2F^S} G^2, \quad s^2 = 0, \quad sG = 0 \quad (2.6.3)$$

これより,

$$\langle s \rangle \propto \langle G^2 \rangle = 0. \quad (2.6.4)$$

次のようなラグランジュ未定係数法により, このべきゼロ条件をラグランジュ形式の枠内で課することができる:

$$e^{-1}\mathcal{L} = [\mathcal{K}(X, \bar{X})]_D + [W(X)]_F + [\Lambda S^2]_F \quad (2.6.5)$$

2.6.2 Sf モデルへの応用

例1

$$K = K_0 + \frac{1}{2}(\Phi + \bar{\Phi})^2 + S\bar{S}, \quad W = W_0 + \mu S\Phi \quad (2.6.6)$$

に対して、従来の方法では、ポテンシャルは

$$V_F = e^{\sigma^2 + |S|^2 + K_0} \left[V_0 + \mu^2(1 - |S|^2 + |S|^4)|\Phi|^2 + |W_0|^2|S|^2 + 2\mu^2(|S|^2 - 2)\text{Re}(S\Phi\bar{W}_0) + |\mu S(+\sqrt{2}\sigma\Phi) + \sqrt{2}\sigma W_0|^2 \right] \quad (2.6.7)$$

となり、不安定項をもつが、 $S^2 = 0$ 拘束条件を用いると、

$$V_F = e^{\sigma^2 + K_0} (V_0 + 2|W_0|^2\sigma^2 + \mu^2|\Phi|^2) \quad (2.6.8)$$

となり、 $\sigma = 0$ で安定なカオティックインフレーションが実現される。

例2 ケーラーポテンシャルと超ポテンシャルが

$$K = -3 \log \left[1 - \frac{1}{6}(\Phi + \bar{\Phi})^2 - \frac{1}{3}S\bar{S} \right], \quad W = \mu S\Phi \quad (2.6.9)$$

で与えられる系のポテンシャルは、 S が通常のスカラー場の場合には、 $\phi^2 > 6/5$ のとき、 $s = 0$ が不安定となる：

$$V_F|_{\sigma=0} = \frac{3\mu^2(13\phi^2 - 6)s^4 + (18 - 15\phi^2)s^2 + 9\phi^2}{2(3 - s^2)^3} \quad (2.6.10)$$

安定な軌道でのポテンシャルは

$$V_{\text{eff}} = \frac{\mu^2(13\phi^2 - 6)^2(3\phi^4 + 4\phi^2 - 4)}{3(7\phi^2 - 2)^3} \quad (2.6.11)$$

$$\approx \mu^2(0.49\phi^2 + 0.62 + O(1/\phi^2)) \quad (\phi \gg 1) \quad (2.6.12)$$

一方、 $S^2 = 0$ 条件を課す場合には、ポテンシャルは、単に、

$$V_F = \frac{\mu^2(\phi^2 + \sigma^2)}{2(1 - \sigma^2/3)^2} \approx \frac{\mu^2}{2}\phi^2 + \frac{\mu^2 + 4H^2}{2}\sigma^2 \quad (2.6.13)$$

となり、標準的なカオティック型となる。

一般の場合 インフレトンセクターを (Φ, S) 、物質セクターを Z として、 (K, W) を

$$K = k((\Phi + \bar{\Phi})^2/2, S\bar{S}) + Z\bar{Z}, \quad W = Sf(\Phi) + W_0(Z), \quad S^2 = 0 \quad (2.6.14)$$

とおくと、 F 項ポテンシャルは

$$V_F = e^{k(\sigma^2, 0)} \left[V'_0 + \frac{|f(\Phi)|^2}{k_2(\sigma^2, 0)} + \frac{2k_1(\sigma^2, 0)\sigma^2}{k_1(\sigma^2, 0) + 2\sigma^2 k_{11}(\sigma^2, 0)} |W_0|^2 \right] \quad (2.6.15)$$

となる。ここで、 $k_i(x_1, x_2) = \partial k / \partial x_i$ 。このポテンシャルは、

$$\left[(V'_0 + 2|W_0|^2)k_1 + \frac{k_1 k_2 - k_{12}}{k_2^2} |f|^2 \right]_{\Phi = \sigma/\sqrt{2}} > 0 \quad (2.6.16)$$

のとき、 $\sigma = 0$ が安定な極小となる。そこで、 $\sigma = 0$ に安定化されるとすると、インフラトンポテンシャルは

$$V(\phi) = V_0 + c|f(i\phi/\sqrt{2})|^2 \quad (2.6.17)$$

となる。したがって、多様なポテンシャルが安定的に実現される。

§2.7

*準共形不変理論とD項インフレーション

References

- Kounnas C, Lust D, Toumbas N: Fortsch. Phys. 63, 12-35 (2015). arXiv:1409.7076]
 “ R^2 inflation from scale invariant supergravity and anomaly free superstrings with fluxes

2.7.1 $f(R)$ 理論とスカラテンソル理論の等価性

References

- De Felice A, Tsujikawa S: Living Review 13:3 (2010) ” $f(R)$ theories”

スカラ・テンソル形式 (Jordan frame) 作用積分

$$S = S_G + S_M; \quad (2.7.1)$$

$$S_G = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2\kappa^2} f(R) \right) \quad (2.7.2)$$

において, 重力部分は

$$S_G = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} [\chi(R - X) + f(X)] \quad (2.7.3)$$

と同等. X を消去すると,

$$S_G = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{\chi}{2\kappa^2} R - U(\chi) \right), \quad (2.7.4)$$

$$\chi = f'(X), \quad (2.7.5)$$

$$2\kappa^2 U(\chi) = \chi X - f(X). \quad (2.7.6)$$

場の方程式は,

$$\square\chi - \frac{2\kappa^2}{3}(2U + \chi U') = \frac{\kappa^2}{3} T^M, \quad (2.7.7a)$$

$$R = 2\kappa^2 U'(\chi), \quad (2.7.7b)$$

$$\chi G_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu \chi + (\square\chi - \kappa^2 U) g_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu}^M. \quad (2.7.7c)$$

ここで, $T_{\mu\nu}^M$ は物質の EM テンソル, $T^M = T_{\mu}^{M\mu}$.

空間的に一様な場合, 方程式系は

$$\ddot{\chi} + 3H\dot{\chi} - \frac{2\kappa^2}{3}(2U + \chi U') = \frac{\kappa^2}{3}\tau_M, \quad (2.7.8a)$$

$$\dot{H} + 2H^2 = \frac{\kappa^2}{3}U', \quad (2.7.8b)$$

$$\chi H^2 - 3H\dot{\chi} - \frac{\kappa^2}{3}(3U + 2\chi U') = -\kappa^2\rho_M. \quad (2.7.8c)$$

スカラ・テンソル形式 (Einstein frame) Weyl 変換

$$g_{\mu\nu} \rightarrow e^{-\gamma\phi} g_{\mu\nu} \quad (2.7.9)$$

を行い,

$$\chi = e^{\gamma\phi}, \quad \gamma = \sqrt{2/3}/\kappa \quad (2.7.10)$$

とおくと, 作用積分は

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2\kappa^2} R - \frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 - V(\phi) + e^{-\gamma\phi} \mathcal{L}_M(\Phi, e^{-\gamma\phi}g) \right] \quad (2.7.11)$$

$$V(\phi) = \chi^{-2}U(\chi) = \frac{1}{2\kappa^2} \frac{Xf'(X) - f(X)}{(f'(X))^2}, \quad f'(X) = e^{\gamma\phi}.. \quad (2.7.12)$$

空間的に一様な宇宙モデルに対しては

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{6} (\dot{\phi}^2 + 2V) + e^{\gamma\phi} \rho_M, \quad (2.7.13)$$

$$\ddot{\phi} + 3\hat{H}\dot{\phi} + V'(\phi) = \frac{1}{2\gamma} e^{-2\gamma\phi} T_M. \quad (2.7.14)$$

2.7.2 スケール不変理論

純 R^2 理論 $f(R) \propto R^2$ となる理論は, スケール不変性をもつ. 対応するスカラテンソル理論は

$$f(t) = \frac{1}{8\mu^2} t^2 \Rightarrow V = \frac{tf'(t) - f(t)}{2(f'(t))^2} = \mu^2 \quad (2.7.15)$$

より,

$$\int d^4x \sqrt{-g} \frac{1}{16\mu^2} R^2 \Leftrightarrow \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{R}{2} - \frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 - \mu^2 \right) \quad (2.7.16)$$

したがって, この理論は, 安定な dS 真空解をもつ.

対称性 R^2 理論のスケール不変性

$$g \rightarrow e^{-2\sigma} g \quad (2.7.17)$$

は, Einstein フレームでのスカラテンソル理論では, シフト対称性

$$g \rightarrow g, \quad \gamma\phi \rightarrow \gamma\phi + 2\sigma \quad (2.7.18)$$

へと変化する.

スケール不変性の破れ $f(R) = R^2 \Rightarrow R^2 + R$ により, 理論のスケール不変性は破られる:

$$S = S_c + \int d^4x \sqrt{-g} \frac{1}{2} R. \quad (2.7.19)$$

2.7.3 $SU(1, 1 + n)$ 超重力模型

- カイラルスカラーの構成

$$(Z^I) = (T, z^j) (j = 1, \dots, n): T = t + ib, \quad z^j = \frac{1}{\sqrt{6}} \Phi^j e^{i\theta_j} \quad (2.7.20)$$

- ケーラーポテンシャルとスカラー多様体

$$K = -3 \ln(Y); \quad Y = T + \bar{T} - |z|^2 = e^{\alpha\phi}. \quad (2.7.21)$$

対応するスカラー多様体は, 一様アインシュタイン-ケーラー多様体:

$$ds^2 = d\phi^2 + 3e^{-\alpha\phi} |dz|^2 + \frac{27}{4} e^{-2\alpha\phi} \left[db + \frac{i}{2} (\bar{z} \cdot dz - z \cdot d\bar{z}) \right]^2 \quad (2.7.22a)$$

$$\mathcal{M}(T, z) \cong \frac{SU(1, 1 + n)}{U(1) \times SU(1 + n)}; \quad R_{I\bar{J}} = -\frac{2 + n}{3} K_{I\bar{J}} \quad (2.7.22b)$$

- 超ポテンシャル: T と z^j の共形ウエイトはそれぞれ 2 と 1 なので, 超ポテンシャルが次のような形をもつとき, 理論はスケール不変となる:

$$W = cT^{3/2} + c_i z^i T + c_{ijk} z^i z^j z^k \quad (2.7.23)$$

2.7.4 ミンコフスキー真空と dS 真空

No-scale 模型 一般に, 一個のサイズモジュラス T とその他の n 個のモジュライ変数 z^j からなる系で, ケーラーポテンシャルと超ポテンシャルが

$$K = -3 \ln Y = -3 \ln(T + \bar{T} - g(z, \bar{z})).$$

$$W = W(z)$$

という構造をもつとき, F 項ポテンシャルは, T に依存しなくなる:

$$V_F = \frac{1}{3Y^2} K^{j\bar{k}} \partial_j W \partial_{\bar{k}} \bar{W} \geq 0 \quad (2.7.24)$$

ミンコフスキー真空をもつ $SU(1, n)$ スケール不変模型

- 超ポテンシャル: $W = c_{ijk} z^i z^j z^k + W_0$
- ポテンシャル:

$$V_F = 3e^{-2\alpha\phi} \sum_i |c_i(z)|^2 \geq 0; \quad c_i(z) = c_{ijk} z^j z^k \quad (2.7.25)$$

- 極小点: $z = 0 \Rightarrow \partial_i \wedge = 0$
 - ミンコフスキー真空. ただし, $m_{3/2}, \phi$ の値は未定.
 - $W_0 \neq 0 \Rightarrow D_T W_0 \neq 0 \Rightarrow$ Susy の破れ.

dS 真空をもつ $SU(1, n)$ スケール不変模型

- 超ポテンシャル: $W = hTz$
- ポテンシャル:

$$V_F = \frac{|h|^2}{12} (1 + 4B^2 - 2|\Phi|^2 - 3|\Phi|^4), \quad (2.7.26)$$

$$B = b/Y, \quad \Phi = z/\sqrt{Y}. \quad (2.7.27)$$

- 極点: $B = \Phi = 0 \Rightarrow b = z = 0$
 - dS 真空: $V = |h|^2/12 > 0..$
 - 極点は鞍点で不安定.

2.7.5 dS 真空の D 項による安定化

$SU(1, 1)$ スケール不変模型において, 超ポテンシャルを

$$W = hzT \quad (2.7.28)$$

と取る.

1) $U(1)_R$ ゲージ化 $U(1)_R$ 変換

$$T \rightarrow T, \quad z \rightarrow e^{i\omega} z \Rightarrow k^T = 0, k^z = iz \quad (2.7.29)$$

をゲージ化すると,

$$\delta W = i\omega W, \quad \delta K = 0 \Rightarrow r = -i \quad (2.7.30)$$

より, モーメント写像 \mathcal{P}_R は

$$\mathcal{P}_R = i(k^I \partial_I K - r) = -1 - \frac{3|z|^2}{Y}. \quad (2.7.31)$$

よって, ゲージ結合係数を g とおくと, ポテンシャルは

$$V = \frac{|h|^2}{12} (1 + 4B^2 - 2|\Phi|^2 - 3|\Phi|^4) + \frac{g^2}{2} (1 + 3|\Phi|^2)^2 \quad (2.7.32)$$

$$= p^2 + \frac{q^2}{3} + 4p^2 B^2 + (q^2 - p^2) (2|\Phi|^2 + 3|\Phi|^4) \quad (2.7.33)$$

となる. ここで,

$$p^2 = |h|^2/12, \quad q^2 = 3g^2/2 \quad (2.7.34)$$

したがって, $p^2 < q^2$ のとき, dS 真空 ($B = \Phi = 0$) は安定となる. また, $t = \text{Re}(T)$ 方向が dS 平坦方向となる.

2) $U(1)_d$ ゲージ化 $U(1)_d$ 変換

$$T \rightarrow e^{2\xi\omega} T, \quad z \rightarrow e^{(i+\xi)\omega} z \Rightarrow k^T = 2\xi T, k^z = (i + \xi)z \quad (2.7.35)$$

をゲージ化すると,

$$\delta W = (i + 3\xi)\omega W \Rightarrow r = -(i + 3\xi) \quad (2.7.36)$$

より, モーメント写像 \mathcal{P}_R は

$$\mathcal{P}_R = i(k^I \partial_I K - r) = -1 - 3|\Phi|^2 + 6\xi B. \quad (2.7.37)$$

よって, ゲージ結合係数を g とおくと, ポテンシャルは

$$V = p^2 (1 + 4B^2 - 2|\Phi|^2 - 3|\Phi|^4) + \frac{q^2}{3} (1 + 3|\Phi|^2 - 6\xi B)^2 \quad (2.7.38)$$

特に, $\partial_B V = 0$ 上では,

$$V = p^2 + \frac{\hat{q}^2}{3} + (\hat{q}^2 - p^2) (2|\Phi|^2 + 3|\Phi|^4), \quad \hat{q}^2 = \frac{p^2 q^2}{p^2 + 3\xi^2 q^2} \quad (2.7.39)$$

これより, $\hat{q}^2 > p^2$ ($\Rightarrow \xi < 1/2$) のとき, $\Phi = B = 0$ が安定な dS 真空を与える.

2.7.6 ミンコフスキー真空の D 項による安定化

§(1,1) スケール不変模型において, 超ポテンシャルを

$$W = hz^3 \quad (2.7.40)$$

と取る.

1) $U(1)_R$ ゲージ化 $U(1)_R$ 変換

$$T \rightarrow T, \quad z \rightarrow e^{i\omega} z \Rightarrow k^T = 0, k^z = iz \quad (2.7.41)$$

をゲージ化すると,

$$\delta W = 3i\omega W, \quad \delta K = 0 \Rightarrow r = -3i \quad (2.7.42)$$

より, モーメント写像 \mathcal{P}_R は

$$\mathcal{P}_R = i(k^I \partial_I K - r) = -3 - \frac{3|z|^2}{Y}. \quad (2.7.43)$$

よって, ゲージ結合係数を g とおくと, ポテンシャルは

$$V = p^2 |\Phi|^4 + q^2 (1 + |\Phi|^2)^2; \quad p^2 = 3|h|^2, \quad q^2 = \frac{1}{2}g^2 \quad (2.7.44)$$

これより, $\Phi = 0$ が安定な dS 真空となる.

2) $U(1)_d$ ゲージ化 $U(1)_d$ 変換

$$T \rightarrow e^{2\xi\omega} T, \quad z \rightarrow e^{(i+\xi)\omega} z \Rightarrow k^T = 2\xi T, k^z = (i + \xi)z \quad (2.7.45)$$

をゲージ化すると,

$$\delta W \Rightarrow r = -3(i + \xi) \quad (2.7.46)$$

より, モーメント写像 \mathcal{P}_R は

$$\mathcal{P}_R = i(k^I \partial_I K - r) = -3 - 3|\Phi|^2 + 6\xi B \quad (2.7.47)$$

よって, ゲージ結合係数を g とおくと, ポテンシャルは

$$V = V = p^2 |\Phi|^4 + q^2 (1 + |\Phi|^2 - 2\xi B)^2; \quad \Phi = z/\sqrt{Y}, \quad B = b/Y \quad (2.7.48)$$

これより, $\Phi = 0, 2\xi B = 1$ に安定なミンコフスキー真空をもつ. この真空は, 超対称で, スケール変換および $U(1)_R$ に対して不変となる. この模型では,

$$\partial_\Phi V = 0 \Rightarrow |\Phi|^2 = -\frac{q^2}{p^2 + q^2} (1 - 2\xi B), \quad V = \frac{p^2 q^2}{p^2 + q^2} (1 - 2\xi B)^2 \quad (2.7.49)$$

となるので, カオティックインフレーションが可能となる.

3) スケール不変性の破れ \Rightarrow Starobinsky 型インフレーション 次のような、スケール変換と非可換な $U(1)_t$ 変換

$$T \rightarrow T + i\xi\omega, \quad z \rightarrow e^{i\omega}z \Rightarrow k^T = i\xi, \quad k^z = iz \quad (2.7.50)$$

によりゲージ化を行うと

$$\delta W = 3i\omega W \Rightarrow r = -3i \quad (2.7.51)$$

より、モーメント写像は

$$\mathcal{D}_t = 3 \left(\frac{\xi}{Y} - |\Phi|^3 - 1 \right) \quad (2.7.52)$$

となるので、ポテンシャルは

$$V = p^2|\Phi|^4 + q^2 (|\Phi|^2 + 1 - \xi e^{-\alpha\phi})^2 \quad (2.7.53)$$

となる。したがって、この模型では、Starobinsky 型のインフレーションが起きる。

3

高次元超重力理論

§3.1

高次元超重力理論の一般的分類

3.1.1 次元と最大超対称性への制限

References

- Porrati M: PRD78, 065016 (2008)
“Universal limits on massless high-spin particles”
- C. Aragone and S. Deser, Phys. Lett. 86B, 161 (1979).
“Consistency Problems of Hypergravity”

4次元時空において、一般の曲がった時空でのダイナミクスが整合的となるためには、場のスピンは2以下に制限される。例えば、4次元時空において、スピン5/2を持つ場は添え字について対称なスピノールテンソル $\psi_{\mu\nu}$ により記述され、自由場の作用積分は、正規直交基底に関する成分表示のもとで、

$$S = \int d^4x |\theta| \left[-\frac{1}{2} \bar{\psi}_{ab} \not{D} \psi_{ab} - \bar{\psi}_{ab} \gamma^b \not{D} \gamma_c \psi^{ca} + 2 \bar{\psi}_{ab} \gamma^b D_c \psi^{ca} + \frac{1}{4} \bar{\psi}_a^a \not{D} \psi_b^b - \bar{\psi}_a^a D_b \gamma_c \psi^{bc} \right] \quad (3.1.1)$$

で与えられる。平坦な時空では、場は次のゲージ自由度をもつ：

$$\delta \psi_{\mu\nu} = \partial_\mu \zeta_\nu + \partial_\nu \zeta_\mu; \quad \gamma^\mu \zeta_\mu = 0. \quad (3.1.2)$$

しかし、曲がった時空に対応原理に従って移行し、作用積分において $\partial_\mu \rightarrow \nabla_\mu$ の置き換えを行うと、対応する共変化されたゲージ変換に対して、作用積分は

$$\delta\psi_{ab} = D_a\zeta_b + D_b\zeta_a \Rightarrow \delta S = -4 \int d^4x |\theta| \bar{\zeta}_a \gamma_b \psi_{cd} R^{abcd} \quad (3.1.3)$$

このため、4次元へのトーラスコンパクト化の整合性を考慮すると、高次元においても、超対称変換生成元の最大数は32となる。これより、各次元での複素スピノール表現の最小次元を $\dim_{s,\min}^{\mathbb{C}}$ 、実スピノール表現の最初次元を $\dim_{s,\min}^{\mathbb{R}}$ とおくと、独立な超対称変換生成元を表すスピノール Q^i の数 \mathcal{N} は、 $\mathcal{N} \dim_{s,\min}^{\mathbb{R}} \leq 32$ となる。

3.1.2 基本超対称代数

超対称変換の作る極小代数の交換関係は、 $e^j (j = 1, \dots, \mathcal{N})$ を各次元での Grassmann スピノールパラメータ、 Δ^{ij} を \mathcal{N} 次の定数行列として、

$$[\bar{\epsilon}_{(1)i} Q^i, \bar{\epsilon}_{(2)j} Q^j] = \frac{1}{2} \Delta^{ij} \bar{\epsilon}_{(1)i} \Gamma^M \epsilon_{(2)j} P_M \quad (3.1.4)$$

と表される。ただし、 C を荷電共役変換行列として、

$$\bar{\epsilon} = {}^T \epsilon C \quad (3.1.5)$$

である。

Majorana スピノールが存在する $D \equiv 4, 8, 9, 10, 11 \pmod{8}$ では、 ϵ_i および Q^i を Majorana スピノールに取るものとする。このとき、

$$\bar{\epsilon}_1 \Gamma^M \epsilon_2 = -\bar{\epsilon}_2 \Gamma^M \epsilon_1, \quad (3.1.6)$$

$$(\bar{\epsilon}_1 \Gamma^M \epsilon_2)^\dagger = \bar{\epsilon}_1 \Gamma^M \epsilon_2 \quad (3.1.7)$$

が成り立つので、交換関係の左辺が $\epsilon_{(1)} \leftrightarrow \epsilon_{(2)}$ に対して反対称であることと $P_M^\dagger = -P_M$ を考慮すると、 Δ^{ij} は実対称行列となる。したがって、 Q^i の基底を適当に取り替えることにより、 $\Delta^{ij} = \delta^{ij}$ とできる。

一方、Majorana スピノールが存在しない $D \equiv 5, 6, 7 \pmod{8}$ では、次の条件により定義される **symplectic Majorana** スピノールに取る：

$$\epsilon_i = (J^{-1})_{ij} B^{-1}(\epsilon_j)^*, \quad Q^j = J^{jk} B^{-1}(Q^k)^\dagger. \quad (3.1.8)$$

ここで、 $J = (J^{ij})$ は正則な定数行列である。 $D \equiv 5, 6, 7$ では $B^* B = -1$ となるので、Symplectic Majorana 条件の整合性は

$$J^* J = -1 \quad (3.1.9)$$

となる。

一般に、SM スピノールの基底の変更に対して、 J は次のように変換する：

$$\psi'_i = T_i^j \psi_j \Rightarrow J' = T^* J T^{-1} \quad (3.1.10)$$

特に、 $J = J^*$ を要請すると、 $J^2 = -1$ となるので、適当な $T \in \text{GL}(2n, \mathbb{R})$ を用いて、

$$J = T J_0 T^{-1}; \quad J_0 = \oplus^n \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.1.11)$$

と表される。以下、 $J = J_0$ とする。したがって、 \mathcal{N} は偶数となることが要求される。

Majorana スピノールおよびSM スピノールに対して、

$$(\bar{\epsilon}_i Q^i)^\dagger = \sigma \bar{\epsilon}_i Q^i; \quad \sigma = \begin{cases} 1 & : D \equiv 4, 5, 10, 11 \pmod{8}, \\ -1 & : D \equiv 6, 7, 8, 9 \pmod{8} \end{cases} \quad (3.1.12)$$

が成り立つ (ϵ, Q は、ともに、Grassmann 代数の奇元であることに注意)。

SM スピノールで表される超対称変換生成元 $Q^i (i = 1, \dots, 2n = N)$ に対する交換関係は、一般に

$$\begin{aligned} [\bar{\epsilon}_{(1)i} Q^i, \bar{\epsilon}_{(2)j} Q^j] &= \frac{1}{2} \Delta^{ij} \bar{\epsilon}_{(1)i} \Gamma^A \epsilon_{(2)j} P_A \\ \Leftrightarrow \{Q^i, T Q^j\} &= -\frac{1}{2} \Delta^{ij} \Gamma^A T C^{-1} P_A \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

で与えられる。 $D \equiv 5, 6, 7$ では、一般に

$$\bar{\epsilon}_1 \Gamma^A \epsilon_2 = \bar{\epsilon}_2 \Gamma^A \epsilon_1 \quad (3.1.14)$$

が成り立つので、 Δ^{ij} は反対称行列でないといけない：

$$\Delta^{ij} = -\Delta^{ji}. \quad (3.1.15)$$

さらに、

$$(\bar{\epsilon}_{(1)i} \Gamma^A \epsilon_{(2)j})^\dagger = J^{ik} J^{jl} (\bar{\epsilon}_{(1)l} \Gamma^A \epsilon_{(2)k}) \quad (3.1.16)$$

より、

$${}^T J \Delta^* J = \Delta \quad (3.1.17)$$

が要求される。例えば、 $\Delta = J$ は、これら2つの条件を満たす。

3.1.3 各次元の基本超対称代数の構造

11次元: $\mathcal{C}_{11} \cong \mathbb{C}(32) \oplus \mathbb{C}(32)$, $\mathcal{C}_{10}^* \cong \mathbb{R}(32)$. スピノール Q はMajoranaで、個数は $\mathcal{N} = 1$. 対応する超重力理論は、微分について2階の範囲で一意的 [Cremmer E, Julia B, Scherk J 1978].

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = -\frac{1}{2} (\Gamma^M T C^{-1})_{\alpha\beta} P_M. \quad (3.1.18)$$

D	\mathbb{C} -spinor rep.	Majorana	Weyl	Majorana-Weyl	by \mathbb{R} -rep.
2	$1 + 1'$	○	self	○	$(1_{\mathbb{R}} + 1'_{\mathbb{R}}) \otimes \mathbb{C}$
3	2	○	–	–	$(2_{\mathbb{R}}) \otimes \mathbb{C}$
4	$2 + \bar{2}$	○	complex	–	$(4_{\mathbb{R}} = 2_{\mathbb{C}}) \otimes \mathbb{C}$
5	4	–	–	–	$8_{\mathbb{R}} = 4_{\mathbb{C}}$
6	$4 + 4'$	–	self	–	$8_{\mathbb{R}} + 8'_{\mathbb{R}}$
7	8	–	–	–	$16_{\mathbb{R}} = 8_{\mathbb{C}}$
8	$8 + \bar{8}$	○	complex	–	$(16_{\mathbb{R}} = 8_{\mathbb{C}}) \otimes \mathbb{C}$
9	16	○	–	–	$16_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$
10	$16 + 16'$	○	self	○	$(16_{\mathbb{R}} + 16'_{\mathbb{R}}) \otimes \mathbb{C}$
11	32	○	–	–	$32_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$
12	$32 + \bar{32}$	○	complex	–	$64_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$

表 3.1: Spinor representation of $\text{SO}(D - 1, 1)$

10次元: $\mathcal{C}_{10} \cong \mathbb{C}(32), \mathcal{C}_9^* \cong \mathbb{R}(16) \oplus \mathbb{R}(16)$. スピノール Q^j は Majorana-Weyl で、 $\mathcal{N} \leq 2$. $\mathcal{N} = 2$ となるタイプ II 型は、 Q^i のカイラリティが $(1, 1)$ となる

$$\text{IIA 型} : P_L Q^1 = Q^1, \quad P_R Q^2 = Q^2, \quad (3.1.19a)$$

$$\{Q^1_{\alpha}, Q^2_{\beta}\} = 0, \quad (3.1.19b)$$

$$\{Q^1_{\alpha}, Q^1_{\beta}\} = -\frac{1}{2}(P_L \Gamma^M T_C^{-1} T_{P_L})_{\alpha\beta} P_M, \quad (3.1.19c)$$

$$\{Q^2_{\alpha}, Q^2_{\beta}\} = -\frac{1}{2}(P_R \Gamma^M T_C^{-1} T_{P_R})_{\alpha\beta} P_M \quad (3.1.19d)$$

と、 $(2, 0)$ ないし $(0, 2)$ となる

$$\text{IIB 型} : P_L Q^i = Q^i \quad (i = 1, 2), \quad (3.1.20a)$$

$$\{Q^i_{\alpha}, Q^j_{\beta}\} = -\delta^{ij} \frac{1}{2}(P_L \Gamma^M T_C^{-1} T_{P_L})_{\alpha\beta} P_M \quad (3.1.20b)$$

$$(\text{or } P_L \rightarrow P_R) \quad (3.1.20c)$$

が存在。II 型の理論は、微分について 2 階の範囲では一意的。

一方、 $\mathcal{N} = 1$ のタイプ I 型理論の超対称代数の構造は一意的で、カイラリティは $(1, 0)$ ないし $(0, 1)$:

$$\{Q_{\alpha}, Q_{\beta}\} = -\frac{1}{2}(P_L \Gamma^M T_C^{-1} T_{P_L})_{\alpha\beta} P_M, \quad (\text{or } P_L \rightarrow P_R). \quad (3.1.21)$$

I 型の理論は、任意の 10 次元ゲージ超組と結合することができる。この自由度を除く重力セクターは、微分について 2 階の範囲では一意的。

9次元: $\mathcal{Cl}_9 \cong \mathbb{C}(16) \oplus \mathbb{C}(16)$, $\mathcal{Cl}_8^* \cong \mathbb{R}(16)$ で、スピノール Q^j は Majorana。カイラリティがないので、タイプは、 $\mathcal{N} = 1$ の I 型と $\mathcal{N} = 2$ の II 型の 2 種類のみ:

$$\{Q_\alpha^i, Q_\beta^j\} = -\delta^{ij} \frac{1}{2} (\Gamma^M T C^{-1})_{\alpha\beta} P_M \quad (3.1.22)$$

II 型の理論は一意的だが、I 型の理論には、9次元ベクトル超組を結合させる自由度あり。

8次元: $\mathcal{Cl}_8 \cong \mathbb{C}(16)$, $\mathcal{Cl}_7^* \cong \mathbb{C}(8)$, $\mathcal{Cl}_7 \cong \mathbb{C} \otimes \mathbb{C}(8) \cong \mathbb{C}(8) + \mathbb{C}(8)^*$ で、スピノール Q^j は Majorana。 $\mathcal{N} \leq 2$ だが、カイラルスピノールは複素表現で、複素共役変換でカイラリティが入れ替わるので、 $\mathcal{N} = 1$ の I 型理論、 $\mathcal{N} = 2$ の II 型理論のいずれも 1 種類のみ。超対称交換関係は、 $D = 9$ と同じで、カイラル射影を行うと、

$$\{(P_L Q^i)_\alpha, (P_R Q^j)_\beta\} = -\delta^{ij} \frac{1}{2} (P_L \Gamma^M T C^{-1} T P_R)_{\alpha\beta} P_M, \quad (3.1.23a)$$

$$\{(P_L Q^i)_\alpha, (P_L Q^j)_\beta\} = \{(P_R Q^i)_\alpha, (P_R Q^j)_\beta\} = 0. \quad (3.1.23b)$$

II 型の理論は一意的だが、I 型の理論には、8次元ベクトル超組を結合させる自由度あり。

7次元: $\mathcal{Cl}_7 \cong \mathbb{C}(8) \oplus \mathbb{C}(8)$, $\mathcal{Cl}_6^* \cong \mathbb{H}(4)$, $\mathcal{Cl}_6 \cong \mathbb{C}(8)$ で、スピノール Q^j は Symplectic Majorana。 $\mathcal{N} = 2, 4$ (超対称生成元の数は 16, 32)。交換関係は

$$[Q_\alpha^i, Q_\beta^j] = -\frac{1}{2} \Delta^{ij} (\Gamma^M T C^{-1})_{\alpha\beta} P_M \quad (i, j = 1, \dots, \mathcal{N}) \quad (3.1.24)$$

ここで、 $\Delta = J_0$ 。

$\mathcal{N} = 4$ の理論は一意的だが、 $\mathcal{N} = 2$ の理論には、7次元ベクトル超組を結合させる自由度あり。

6次元: $\mathcal{Cl}_6 \cong \mathbb{C}(8)$, $\mathcal{Cl}_5^* \cong \mathbb{H}(2) + \mathbb{H}(2)$, $\mathcal{Cl}_5 \cong \mathbb{C}(4) + \mathbb{C}(4)$ で、スピノール Q^j は Symplectic Weyl。 $\mathcal{N} = 2, 4, 6, 8$ で、カイラリティで分類すると、

- $\mathcal{N} = 8$: (2, 2), (3, 1), (4, 0). (2, 2) 型の理論は、 $D \geq 7$ からの KK 次元低下により得られるものと一致する。これに対し、(3, 1), (4, 0) の理論は、原理的には存在するが [Townsend PK:PLB139, 283 (1984)], 重力が計量とは異なるテンソルにより記述され、これまで線形レベルでのみ具体的に構成されている [Hull CM: NPB583, 237 (2000) arXiv:hep-th/0004195]]。
- $\mathcal{N} = 6$: (2, 1), (3, 0). (2, 1) 型は重力が計量で記述されるが、(3, 0) 型の理論では重力が計量テンソルでは表されず、これまでに相互作用する理論は発見されていない。

- $\mathcal{N} = 4$: $(1, 1), (2, 0)$.
 - * $(1, 1)$: ベクトル超組を結合させる自由度あり。
 - * $(2, 0)$: テンソル超組を結合させる自由度あり。
- $\mathcal{N} = 2$: $(1, 0)$. ベクトル超組、テンソル超組、ハイパー超組を結合する自由度あり。

5次元: $\mathcal{C}_5 \cong \mathbb{C}(4) \oplus \mathbb{C}(4), \mathcal{C}_4^* \cong \mathbb{H}(2), \mathcal{C}_4 \cong \mathbb{C}(4)$. スピノール Q^j は Symplectic Majorana. $\mathcal{N} = 2, 4, 6, 8$. 交換関係は (3.1.24) と同じ。理論の自由度は、

- $\mathcal{N} = 6, 8$: 理論は一意的で、 $D \geq 6$ から次元低下で得られるものと一致。
- $\mathcal{N} = 4$ の理論には、5次元ベクトル超組を結合させる自由度あり。
- $\mathcal{N} = 2$ の理論には、ベクトル超組とハイパー超組を結合させる自由度と、前ポテンシャルと呼ばれるスカラ多様体上の正則関数の自由度あり(?)。

4次元: $\mathcal{C}_4 \cong \mathbb{C}(4), \mathcal{C}_3^* \cong \mathbb{C}(2), \mathcal{C}_3 \cong \mathbb{C}(2) + \mathbb{C}(2)^*$. スピノール Q^j は Majorana で、 $\mathcal{N} = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8$. 超対称変換の交換関係の構造は、8次元と同じ。理論の自由度は

- $\mathcal{N} = 5, 6, 8$: 物質超組の自由度はなく、ベクトル場のゲージ化の自由度を除いて理論は一意的。
- $\mathcal{N} = 3, 4$: ベクトル場のゲージ化の自由度に加え、4次元ベクトル超組を結合させる自由度あり。
- $\mathcal{N} = 2$: 4次元ベクトル超組およびハイパー超組を結合させる自由度、ゲージ化の自由度、および前ポテンシャルの自由度あり。
- $\mathcal{N} = 1$: 4次元ゲージ超組およびカイラル超組を結合させる自由度、ゲージ化の自由度、カイラル超組に対する Kähler ポテンシャル、超ポテンシャルおよびゲージ超組の結合関数の自由度あり。

3.1.4 基本超重力理論の構造と一意性

超対称性の数による分類 以下、理論の含む微分は、スカラ場について2階まで、スピノール場について1階までとする。また、実超電荷の数を n_s と表記する：

- $n_s > 8$: 超重力理論の運動項は、理論が含む超組のタイプと数を指定すると、一意的に決まる。
 - $n_s > 16$: 重力超組のみの理論なので、運動項は一意的。

- $n_s = 16$: 結合するベクトル超組（ないし、 $D = 6, (2, 0)$ 型に対してはテンソル超組）の数を指定するすると、運動項は一意的。
- $n_s = 8$: スカラ多様体はハイパー超組のスカラに対する quaternionic- Kähler 多様体とテンソル超組 ($D = 6$)/ベクトル超組ないしテンソル超組 ($D = 5$)/ベクトル超組 ($D = 4$) のスカラに対する特殊多様体の直積。これら特殊多様体の取り方は自由。
- $n_s = 4$: スカラ多様体は Kähler-Hodge 構造を持つ複素多様体で、カイラル超組の運動項の自由度は、Kähler 計量 $\mathcal{K}(z, \bar{z})$ 。ゲージ超組の運動項にはスカラ多様体上の正則関数行列 $\mathcal{N}_{AB}(z)$ の自由度あり。

物理自由度 各タイプのテンソル場，スピノール場の物理自由度は次の通り：

計量	ベクトル場	スカラ-場	p -形式場	RS 場	スピノール場
$\frac{D(D-3)}{2}$	$D - 2$	1	$\frac{(D-2)\cdots(D-p-1)}{p!}$	$\frac{d_s(D)}{2}(D - 3)$	$\frac{d_s(D)}{2}$

ここで、 $d_s(D)$ を D 次元での既約実スピノール表現の次元で、以下の通り：

D	3	4	5	6	7	8	9	10	11
d_s	4	4	8	8	16	16	16	16	32
タイプ	M	M	SM	SMW	SM	M	M	MW	M
\mathcal{N}	1	1	2	2	2	1	1	1	1

基本場

- $D = 8$
 - $\mathcal{N} = 2$:
 Boson: $g_{MN} (20)$, $A_M^I (6 \times 6)$, $\Phi^j (7 \times 1)$, $C_{[2]}^p (3 \times 15)$, $C_{[3]} (20)$
 Fermion: $\psi_M^{(i)} (2 \times 40)$, $\lambda^I (6 \times 8)$
 - $\mathcal{N} = 1$:
 Sugra: $g_{MN} (20)$, $B_{MN} (15)$, $A_M^I (2 \times 6)$, $\sigma(1)$; $\psi_M (40)$, $\chi (8)$
 Vector: $A_M (6)$, $\phi^i (2 \times 1)$; $\lambda (8)$.

3.1.5 理論の変形とゲージ化された超重力理論

用語の定義

Ungauged supersymmetry: すべての内部ゲージ場は可換で、超ポアンカレ群はゲージ化されていない。

Gauged supersymmetry: 物質超組のベクトル場は、一般に非可換群に対するゲージ場となっていて、ゲージ場は他の超組にもゲージ結合するが、超ポアンカレ群はゲージ化されていない。

Ungauged supergravity: 超ポアンカレ群はゲージ化されているが、物質超組のベクトル場は可換で、他の場と結合しない。

Gauged supergravity: 超重力セクターのベクトル場が非可換群に対するゲージ場となっているか、物質セクターの場の非可換対称性がゲージ化されている。

理論の変形 基本超重力理論に対して、次のような理論の改変操作を理論の変形 (deformation) という：

- 非可換ゲージ群によりゲージ化する。
- R 対称性をゲージ化する。例：SO(8)-gauged maximal supergravity in 4D [de Wit B, Nicolai H (1982)]
- フェルミオンに質量項（湯川結合）を持たせ、宇宙項やスカラポテンシャルを導入する。例：adS 超重力理論、massive IIA in 10D [Romans LL (1986)]

3.1.6 中心電荷

基本超対称代数は、一般に中心電荷 (central charge) と呼ばれる他の変換と可換な作用素による拡大を許す。

- $D = 4$: Majorana 表示では

$$\{Q_\alpha^i, Q_\beta^j\} = -\frac{1}{2}\delta^{ij}(\gamma^\mu \mathcal{T}C^{-1})_{\alpha\beta}P_\mu + (A^{[ij]} + iB^{[ij]}\gamma_5)(\mathcal{T}C^{-1})_{\alpha\beta}. \quad (3.1.25)$$

Weyl 表示では

$$\{(P_L Q^i)_\alpha, (P_R Q^j)_\beta\} = -\delta^{ij}\frac{1}{2}(P_L \Gamma^M \mathcal{T}C^{-1} \mathcal{T}P_R)_{\alpha\beta}P_M, \quad (3.1.26a)$$

$$\{(P_L Q^i)_\alpha, (P_L Q^j)_\beta\} = Z^{[ij]}(P_L \mathcal{T}C^{-1})_{\alpha\beta}, \quad (3.1.26b)$$

$$\{(P_R Q^i)_\alpha, (P_R Q^j)_\beta\} = \bar{Z}^{[ij]}(P_R \mathcal{T}C^{-1})_{\alpha\beta}. \quad (3.1.26c)$$

ここで、 $Z^{[ij]} = A^{[ij]} + iB^{[ij]}$.

D	32			24		20
10	$O(1, 1)$	$\frac{SU(1,1)}{U(1)}$				
9	$\frac{SL(2)}{SO(2)} \otimes O(1, 1)$					
8	$\frac{SL(3)}{SU(2)} \otimes \frac{SL(2)}{U(1)}$					
7	$\frac{SL(5)}{USp(4)}$					
6	$\frac{O(5,5)}{USp(4) \times USp(4)}$	$\frac{F_{4,4}}{USp(6) \times USp(2)}$	$\frac{E_{6,6}}{USp(8)}$	$\frac{SU^*(4)}{USp(4)}$	$\frac{SU^*(6)}{USp(6)}$	
5		$\frac{E_{6,6}}{USp(8)}$		$\frac{SU^*(6)}{USp(6)}$		
4		$\frac{E_{7,7}}{SU(8)}$		$\frac{SO^*(12)}{U(6)}$		$\frac{SU(1,5)}{U(5)}$

D	16		12	8
10	$O(1, 1)?$			
9	$\frac{O(1,n)}{O(n)} \otimes O(1, 1)$			
8	$\frac{O(2,n)}{U(1) \times O(n)} \otimes O(1, 1)$			
7	$\frac{O(3,n)}{USp(2) \times O(n)} \otimes O(1, 1)$			
6	$\frac{O(4,n)}{SO(4) \times O(n)} \otimes O(1, 1)$	$\frac{O(5,n)}{O(n) \times USp(4)}$		$\frac{O(1,n)}{O(n)} \times \text{QK}$
5	$\frac{O(5,n)}{USp(4) \times O(n)} \otimes O(1, 1)$			$\text{VSR} \times \text{QK}$
4	$\frac{SU(1,1)}{U(1)} \times \frac{SO(6,n)}{SU(4) \times SO(n)}$		$\frac{SU(3,n)}{U(3) \times SU(n)}$	$\text{SK} \times \text{QK}$

表 3.2: 8個以上の超電荷をもつ超重力理論におけるスカラ多様体の等質空間としての構造リスト. QK=quaternionic-Kähler 多様体、VSR=very special real 多様体、SK=special Kähler 多様体。

次元	スピノールタイプ	R-対称性
$D = 10$	MW	$SO(\mathcal{N}_L) \times SO(\mathcal{N}_R)$
$D = 9$	M	$SO(\mathcal{N})$
$D = 8, 4$	M	$U(\mathcal{N})$
$D = 7, 5$	SM	$USp(\mathcal{N})$
$D = 6$	SW	$USp(\mathcal{N}_L) \times USp(\mathcal{N}_R)$

表 3.3: 各次元の超対称変換代数における R-対称性

§3.2

11D 超重力理論

Refereces

- Cremmer E, Julia B, Scherk J: PLB76, 409 (1978)
 “Supergravity theory in 11 dimensions”

3.2.1 基本場:

基本的な場は

$$\begin{aligned} \text{フレーム場: } e_A &= (e_A^M); \quad g^{MN} = \eta^{AB} e_A^M e_B^N, \quad \theta^A(e_B) = \delta_B^A, \\ \text{3形式場: } A_3 &= \frac{1}{3!} A_{MPQ} dx^M \wedge dx^P \wedge dx^Q, \\ \text{Majorana 3/2 場: } \Psi_M; \quad \bar{\Psi} &= \mathcal{T}\Psi C \end{aligned}$$

ここで, C はつぎの条件により定義される荷電共役変換行列:

$$C^{-1}\Gamma_A C = -\mathcal{T}\Gamma_A, \quad \mathcal{T}C = -C. \quad (3.2.1)$$

Majorana 表示では,

$$\mathcal{T}\Gamma_A = \Gamma^A, \quad (\Gamma_A)^* = \Gamma_A, \quad C = i\Gamma^0. \quad (3.2.2)$$

3.2.2 作用積分

完全な作用積分は

$$\begin{aligned} 2\kappa^2 S = \int d^{11}x |\theta| & \left[e_A^M e_B^N \mathcal{R}_{MN}{}^{AB}(\omega) - \frac{1}{2} |F_4|^2 + \frac{1}{6} * (F_4 \wedge F_4 \wedge A_3) \right. \\ & - \bar{\Psi}_M \Gamma^{MNP} D_N \left[\frac{1}{2} (\omega + \tilde{\omega}) \right] \Psi_P \\ & \left. + \frac{1}{192} \left[\bar{\Psi}_M \Gamma^{MNPWXYZ} \Psi_N + 12 \bar{\Psi}^W \Gamma^{XY} \Psi^Z \right] (F_{WXYZ} + \tilde{F}_{WXYZ}) \right]. \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

ここで,

$$\omega_{MAB} = \omega_{MAB}(e) + K_{MAB}, \quad (3.2.4a)$$

$$K_{MAB} = \frac{1}{8} [\bar{\Psi}_N \Gamma_{MAB}{}^{NP} \Psi_P + 4\bar{\Psi}_M \Gamma_{[A} \Psi_{B]} - 2\bar{\Psi}_B \Gamma_M \Psi_A], \quad (3.2.4b)$$

$$\tilde{\omega}_{MAB} = \omega_{MAB} - \frac{1}{8} \bar{\Psi}_N \Gamma_{MAB}{}^{NP} \Psi_P, \quad (3.2.4c)$$

$$D_M(\omega) = \partial_M + \frac{1}{4} \omega_M{}^{AB} \Gamma_{AB}, \quad (3.2.4d)$$

$$F = dA, \quad (3.2.4e)$$

$$\tilde{F}_{MNPQ} = F_{MNPQ} + \frac{3i}{2} \bar{\Psi}_{[M} \Gamma_{NP} \Psi_{Q]}. \quad (3.2.4f)$$

基本場の次元は

$$[\kappa] = L^{9/2}, \quad [e_A^M] = L^0, \quad [A_{MNP}] = L^0, \quad [\Psi_M] = L^{-1/2}. \quad (3.2.5)$$

3.2.3 場の方程式:

$$R_{MN}(\tilde{\omega}) - \frac{1}{2} g_{MN} R(\tilde{\omega}) = \frac{1}{12} \tilde{F}_{MPQR} \tilde{F}_N{}^{PQR} - \frac{1}{4} g_{MN} |F_4|^2, \quad (3.2.6a)$$

$$\Gamma^{MNP} \tilde{D}_N(\tilde{\omega}) \Psi_P = 0, \quad (3.2.6b)$$

$$d * \tilde{F} + \frac{1}{2} \tilde{F} \wedge \tilde{F} = 0. \quad (3.2.6c)$$

ここで,

$$\tilde{D}_M(\tilde{\omega}) = D_M(\tilde{\omega}) + T_M{}^{PQRS} \tilde{F}_{PQRS}, \quad (3.2.7)$$

$$T_M{}^{PQRS} = \frac{1}{288} \left(\Gamma_M{}^{PQRS} - 8\delta_M^{[P} \Gamma^{QRS]} \right). \quad (3.2.8)$$

3.2.4 対称性:

a) 一般共変性:

$$\delta\theta_M^A = (\mathcal{L}_\xi \theta^A)_M \equiv \theta_N^A \partial_M \xi^N + \xi^N \partial_N \theta_M^A, \quad (3.2.9a)$$

$$\delta\Psi_M = \Psi_N \partial_M \xi^N + \xi^N \partial_N \Psi_M, \quad (3.2.9b)$$

$$\delta A_{MNP} = (\mathcal{L}_\xi A_3)_{MNP} \equiv 3A_{Q[MN} \xi_{P]} \xi^Q + \xi^Q \partial_Q A_{MNP}. \quad (3.2.9c)$$

b) 局所 SO(10, 1) 変換:

$$\delta\theta_M^A = -\theta_M^B \alpha_B^A, \quad (3.2.10a)$$

$$\delta\Psi_M = \frac{1}{4} \alpha_{AB} \Gamma^{AB} \Psi_M, \quad (3.2.10b)$$

$$\delta A_{MNP} = 0. \quad (3.2.10c)$$

c) $N = 1$ SUSY:

$$\delta\theta_M^A = \frac{1}{2}\bar{\epsilon}\Gamma^A\Psi_M, \quad (3.2.11a)$$

$$\delta\Psi_M = \tilde{D}_M(\tilde{\omega})\epsilon, \quad (3.2.11b)$$

$$\delta A_{MNP} = -\frac{3}{2}\bar{\epsilon}\Gamma_{[MN}\Psi_{P]}. \quad (3.2.11c)$$

d) A_3 のゲージ変換 :

$$\delta\theta_M^A = 0, \quad (3.2.12a)$$

$$\delta\Psi_M = 0, \quad (3.2.12b)$$

$$\delta A = d\Lambda. \quad (3.2.12c)$$

e) T/P 変換 : 空間ないし時間座標の奇数個の反転と

$$A_{MNP} \rightarrow -A_{MNP}. \quad (3.2.13)$$

3.2.5 Bosonic part:

$\Psi_M = 0$ とおくと, 作用積分は

$$2\kappa^2 S = \int d^{11}x (-g)^{1/2} \left(R - \frac{1}{2}|F_4|^2 \right) - \frac{1}{6} \int A_3 \wedge F_4 \wedge F_4. \quad (3.2.14)$$

場の方程式は

$$d * F_4 + \frac{1}{2} F_4 \wedge F_4 = 0. \quad (3.2.15)$$

また, エネルギー運動量テンソルは

$$\kappa^2 T_{MN} = \frac{1}{12} F_{MABC} F_N^{ABC} - \frac{1}{4} |F_4|^2 g_{MN}. \quad (3.2.16)$$

よって,

$$R_{MN} = \frac{1}{12} F_{MABC} F_N^{ABC} - \frac{1}{6} |F_4|^2 g_{MN}. \quad (3.2.17)$$

3.2.6 物理自由度

以下、しばらく、時空の次元 D を特定せずに議論する。

計量場および Rarita-Schwinger 場については、すでに求めたので、残る 3 形式場の物理自由度を求める。自明な背景場に対して、 A_3 場の方程式は

$$k^M F_{MPQR} = 0; \quad F_{MPQR} = 4ik_{[M} A_{PQR]}. \quad (3.2.18)$$

ゲージ変換は

$$\delta A_{MNP} = i(k_M \chi_{NP} + k_N \chi_{PM} + k_P \chi_{MN}). \quad (3.2.19)$$

ゲージ条件

$$A_{IJ0} = 0 \quad (3.2.20)$$

を課すと、残留ゲージ自由度は

$$\chi_{IJ} = \frac{1}{k_0}(k_I \chi_{J0} - k_J \chi_{I0}). \quad (3.2.21)$$

このとき、

$$ik^M F_{MPQR} = -k^2 A_{PQR} + 3k_{[P} A_{QR]I} k^I \quad (3.2.22)$$

より、

$$ik^M F_{MPQ0} = k_0 A_{PQI} k^I = 0. \quad (3.2.23)$$

よって、

$$A_{IJK} k^K = 0. \quad (3.2.24)$$

この条件下で、元の場の方程式は

$$ik^M F_{MIJK} = -k^2 A_{IJK} = 0. \quad (3.2.25)$$

よって、

$$k^2 = 0. \quad (3.2.26)$$

また、 A_{IJK} は残留ゲージ変換で不変。よって、物理自由度は

$$\frac{(D-1)(D-2)(D-3)}{3!} - \frac{(D-2)(D-3)}{2} = \frac{(D-2)(D-3)(D-4)}{3!} \quad (3.2.27)$$

以上より、結局、 $D = 11$ のとき、

$$\text{ボーズ場} : \frac{1}{2}D(D-3) + \frac{1}{6}(D-2)(D-3)(D-4) = 128 \quad (3.2.28a)$$

$$\text{フェルミ場} : (D-3) \times 2^{[D/2]-1} = 128 \quad (3.2.28b)$$

【Exercise 3.2.1 (フォーム場の物理自由度)】 一般に、 D 次元における p -形式場 C に対する場の方程式が、平坦な背景時空での線形摂動のレベルで

$$F = dC, \quad d * F = 0 \quad (3.2.29)$$

で与えられるとき、 p -形式場の物理自由度は、 ${}_{D-2}C_p$ で与えられることを示せ。

□

§3.3

10次元超重力理論

3.3.1 IIA 型理論

Refereces

- Campbell C, West PC: NPB243, 112 (1984)
“ $N = 2$ $D = 10$ nonchiral supergravity and its spontaneous compactification”
- Giani F, Pernici M: PRD 30, 325 (1984)
“ $N = 2$ supergravity in ten dimensions”

11次元超重力理論の S^1 コンパクト化 : $y = x^\sharp (\sharp = 10)$

- 計量

$$ds^2 = e^{-2\phi/3} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + e^{4\phi/3} (dy + C_1)^2. \quad (3.3.1)$$

- 3形式ポテンシャル

$$A_{\mu\nu\lambda} = C_{\mu\nu\lambda}(x), \quad A_{\mu\nu\sharp} = B_{\mu\nu}(x) \quad (3.3.2)$$

- Rarita-Schwinger 場

$$\Psi_\mu = (\psi_\mu, \psi'_\mu), \quad \Psi_\sharp = (\lambda, \lambda'). \quad (3.3.3)$$

基本場

- ボーズ場
 - NS 場 : $g_{MN}, \phi, B_{[2]}$
 - R 場 : $C_{[1]}, C_{[3]}$
- フェルミ場
 - Chirality の異なる Majorana 1/2 場 : λ, λ'
 - Chirality の異なる Majorana 3/2 場 : ψ_M, ψ'_M

作用積分 (String フレーム) IIA 理論のストリングフレームでの Bosonic part の作用積分は

$$S_{\text{IIA,B}} = S_{\text{NS}} + S_{\text{R}} + S_{\text{CS}}; \quad (3.3.4)$$

$$S_{\text{NS}} = \frac{1}{2\kappa_{10}^2} \int d^{10}x (-\tilde{g})^{1/2} e^{-2\phi} \left(\tilde{R} + 4(\tilde{\nabla}\phi)^2 - \frac{1}{2}H_3 \cdot H_3 \right), \quad (3.3.5)$$

$$S_{\text{R}} = -\frac{1}{4\kappa_{10}^2} \int d^{10}x (-\tilde{g})^{1/2} \left(\tilde{F}_2 \cdot \tilde{F}_2 + \tilde{F}_4 \cdot \tilde{F}_4 \right), \quad (3.3.6)$$

$$S_{\text{CS}} = -\frac{1}{4\kappa_{10}^2} \int B_2 \wedge F_4 \wedge F_4. \quad (3.3.7)$$

ここで,

$$H_3 = dB_2, \quad F_2 = dC_1, \quad F_4 = dC_3, \quad \tilde{F}_4 = F_4 - C_1 \wedge H_3. \quad (3.3.8)$$

3.3.2 IIB 型理論

References

- Schwarz JH, West PC: PLB126, 301 (1983)
“Symmetries and transformation rules of chiral $N = 2, d = 10$ supergravity”
- Schwarz JH: NPB226, 269 (1983)
“Covariant field equations of chiral $N = 2, d = 10$ supergravity”
- Howe P, West PC: NPB238, 181 (1984)
“The complete $N = 2, d = 10$ supergravity”

基本場

- ボーズ場
 - NS 場 : $g_{MN}, \phi, B_{[2]}$
 - R 場 : $C_{[0]}, C_{[4]}$
- フェルミ場
 - 同じ Chirality の Majorana 1/2 場 :
 $\lambda = \lambda^{(1)} + i\lambda^{(2)}; \quad \Gamma_{11}\lambda = \mp\lambda$
 - 同じ Chirality の Majorana 3/2 場 :
 $\psi_M = \psi_M^{(1)} + i\psi_M^{(2)}; \quad \Gamma_{11}\psi_M = \pm\psi_M$

場の方程式: τ, G_3, \tilde{F}_5 を

$$\tau = C_0 + ie^{-\phi}, \quad (3.3.9)$$

$$G_3 := \tau H_3 - F_3, \quad \tilde{G}_3 = \tau_2^{-1/2} G_3, \quad (3.3.10)$$

$$\tilde{F}_5 = dC_4 - \frac{1}{2} C_2 \wedge H_3 + \frac{1}{2} B_2 \wedge F_3 \quad (3.3.11)$$

により定義すると,

$$\square\tau + i\frac{(\nabla\tau)^2}{\tau_2} = -\frac{i}{2}G_3 \cdot G_3, \quad (3.3.12a)$$

$$\nabla \cdot G_3 = -\frac{i\nabla\tau}{2\tau_2}(G_3 + G_3^*) - i\tilde{F}_5 \cdot G_3, \quad (3.3.12b)$$

$$dG_3 = -\frac{i}{2\tau_2}d\tau \wedge (G_3 - G_3^*), \quad (3.3.12c)$$

$$d\tilde{F}_5 = \frac{i}{2\tau_2}G_3 \wedge G_3^*, \quad (3.3.12d)$$

$$*\tilde{F}_5 = \pm\tilde{F}_5, \quad (3.3.12e)$$

$$\begin{aligned} R_{MN} &= \frac{1}{4\tau_2^2}(\nabla_M\tau\nabla_N\tau^* + \nabla_M\tau^*\nabla_N\tau) \\ &\quad + \frac{1}{8\tau_2}\left[G_{MPQ}G_N^{*PQ} + G_{MPQ}^*G_N^{PQ}\right] - \frac{1}{8\tau_2}G_3 \cdot G_3^*g_{MN} \\ &\quad + \frac{1}{96}\tilde{F}_{MP_1\dots P_4}\tilde{F}_N{}^{P_1\dots P_4}. \end{aligned} \quad (3.3.12f)$$

作用積分 (String frame): IIB 理論のストリングフレームでの Bosonic part の作用積分は

$$S_{\text{IIB}} = S_{\text{NS}} + S_{\text{R}} + S_{\text{CS}}; \quad (3.3.13a)$$

$$S_{\text{NS}} = \frac{1}{2\kappa^2} \int dx^{10} (-\tilde{g})^{1/2} e^{-2\phi} \left(\tilde{R} + 4(\tilde{\nabla}\phi)^2 - \frac{1}{2} H_3 \cdot H_3 \right), \quad (3.3.13b)$$

$$S_{\text{R}} = -\frac{1}{4\kappa^2} \int dx^{10} (-\tilde{g})^{1/2} \left(F_1 \cdot F_1 + \tilde{F}_3 \cdot \tilde{F}_3 + \frac{1}{2} \tilde{F}_5 \cdot \tilde{F}_5 \right), \quad (3.3.13c)$$

$$S_{\text{CS}} = \pm \frac{1}{4\kappa^2} \int C_4 \wedge H_3 \wedge F_3. \quad (3.3.13d)$$

ここで,

$$F_1 := dC_0, \quad \tilde{F}_3 := F_3 - C_0 \wedge H_3. \quad (3.3.14)$$

作用積分 (Einstein frame): String frame での計量 $g = g_s$ を Einstein frame での計量 $g = g_E = e^{-\phi/2}g_s$ に直すと,

$$\begin{aligned} 2\kappa^2 S_{\text{IIB}} &= \int \Omega \left[R - \frac{\nabla\tau \cdot \nabla\bar{\tau}}{2(\text{Im}\tau)^2} \right] - \frac{1}{2\text{Im}\tau} *G_2 \wedge \bar{G}_2 \\ &\quad - \frac{1}{4} *\tilde{F}_5 \wedge \tilde{F}_5 \pm \frac{i}{4\text{Im}\tau} C_4 \wedge G_2 \wedge \bar{G}_2. \end{aligned} \quad (3.3.15)$$

3.3.3 10次元II型理論のDemocratic formulation

Reference

- Bergshoeff E, Kallosh R, Ortin T, Roest D, van Proeyen A: CQG17, 3359-82 (2001)[12]

New Formulations of $D = 10$ Supersymmetry and D8-O8 Domain Walls

- Grana M: PLC 433, 91-158 (2006) [38]

“Flux compactifications in string theory: A comprehensive review”

(1) 基本場

$$\text{IIA} : \left\{ g_{MN}, B_{[2]}, \phi, C_M^{(1)}, C_{MNP}^{(3)}, C_{M\dots P}^{(5)}, C_{M\dots P}^{(7)}, C_{M\dots P}^{(9)}, \psi_M, \lambda \right\}, \quad (3.3.16a)$$

$$\text{IIB} : \left\{ g_{MN}, B_{[2]}, \phi, C_M^{(0)}, C_{MNP}^{(2)}, C_{M\dots P}^{(4)}, C_{M\dots P}^{(6)}, C_{M\dots P}^{(8)}, \psi_M, \lambda \right\} \quad (3.3.16b)$$

ここで、IIA に対しては ψ_M, λ は右と左カイラリティの doublets, IIB に対しては条件

$$\Gamma_{11}\psi_M = \psi_M, \quad \Gamma_{11}\lambda = -\lambda \quad (3.3.17)$$

を満たす同じカイラリティの doublets.

(2) 擬作用積分

$$\begin{aligned} S = & \frac{1}{2\kappa_{10}^2} \int d^{10}x \sqrt{-g} \left[e^{-2\phi} \left(R(\omega(e)) + 4d\phi \cdot d\phi + 2d\phi \cdot \chi^{(1)} \right. \right. \\ & - \frac{1}{2} H \cdot H - H \cdot \chi^{(3)} \\ & \left. \left. - 2\bar{\psi}_M \Gamma^{MNP} \nabla_N \psi_P + 2\bar{\lambda} \Gamma^M \nabla_M \lambda - 4\bar{\lambda} \Gamma^{MN} \nabla_M \psi_N \right) \right. \\ & \left. - \sum_{n \in S} \left(\frac{1}{4} G^{(n)} \cdot G^{(n)} + \frac{1}{2} G^{(n)} \cdot \Psi^{(n)} \right) \right] \\ & + \text{quartic fermionic terms.} \end{aligned} \quad (3.3.18)$$

ここで,

$$S = \begin{cases} (0, 2, \dots, 10); & IIA \\ (1, 3, \dots, 9); & IIB \end{cases} \quad (3.3.19)$$

また,

$$\mathbf{G} = \sum_{n \in S} \frac{1}{\ell_s^{n-1}} G^{(n)}, \quad \mathbf{C} = \sum_{n \in S} \frac{1}{\ell_s^{n-1}} C^{(n-1)} \quad (3.3.20)$$

として,

$$H = dB, \quad \mathbf{G} = d\mathbf{C} - \frac{1}{\ell_s^2} dB \wedge \mathbf{C} + \ell_s G^{(0)} e^{B/\ell_s^2}. \quad (3.3.21)$$

(この定義は, IIB の標準的なものに対応. IIA の標準的なものとは B の符号が異なる.) 各場の次元は, 微分形式は成分でなく dx^* を含むとして,

$$[\kappa_{10} = L^4, \quad [g_{MN}] = L^0, \quad [\phi] = L^0, \\ [H_{[3]}] = L^2, \quad [B_{[2]}] = L^2, \quad [G_{[n]}] = L^{n-1}, \quad [C_{[n]}] = L^n, \quad (3.3.22)$$

$$[\lambda] = [\Psi_M] = L^{-1/2}. \quad (3.3.23)$$

さらに,

$$\chi_M^{(1)} = -2\bar{\psi}_N \Gamma^N \psi_M - 2\bar{\lambda} \Gamma^N \Gamma_M \psi_N, \quad (3.3.24a)$$

$$\chi_{MNP}^{(3)} = \frac{1}{2} \bar{\psi}_Q \Gamma^{[Q} \Gamma_{MNP} \Gamma^{R]} \mathcal{P} \psi_R + \bar{\lambda} \Gamma_{MNP}{}^Q \mathcal{P} \psi_Q - \frac{1}{2} \bar{\lambda} \mathcal{P} \Gamma_{MNP} \lambda, \quad (3.3.24b)$$

$$\Psi_{M_1 \dots M_n}^{(n)} = \frac{1}{2} e^{-\phi} \bar{\psi}_P \Gamma^{[P} \Gamma_{M_1 \dots M_n} \Gamma^{Q]} \mathcal{P}_n \psi_Q + \frac{1}{2} e^{-\phi} \bar{\lambda} \Gamma_{M_1 \dots M_n} \Gamma^Q \mathcal{P}_n \psi_Q \\ - \frac{1}{4} e^{-\phi} \bar{\lambda} \Gamma_{[M_1 \dots M_{n-1}} \mathcal{P}_n \Gamma_{M_n]} \lambda. \quad (3.3.24c)$$

ここで,

$$\mathcal{P} := \Gamma_{11} \text{ (IIA)}, \quad -\sigma^3 \text{ (IIB)}, \quad (3.3.25a)$$

$$\mathcal{P}_n := (\Gamma_{11})^n \text{ (IIA)}, \quad \begin{cases} \sigma^1 & (n+1)/2 : \text{even} \\ \sigma^2 & (n+1)/2 : \text{odd} \end{cases} \text{ (IIB)}. \quad (3.3.25b)$$

$\Psi^{(n)}$ は次の関係式を満たす ;

$$\Psi^{(n)} = (-1)^{[n/2]+1} * \Psi^{(10-n)}. \quad (3.3.26)$$

(3) 場の方程式

Bianchi 恒等式

$$dH = 0, \quad d\mathbf{G} - H \wedge \mathbf{G} = 0. \quad (3.3.27)$$

付加拘束条件

$$G^{(n)} + \Psi^{(n)} = (-1)^{[n/2]} *G^{(10-n)}. \quad (3.3.28)$$

変分方程式 (string frame, bosonic part only)

$$d *G^{(n)} + H \wedge *G^{(n+2)} = 0, \quad (3.3.29a)$$

$$d(e^{-2\phi} *H) + \frac{1}{2} \sum_n *G^{(n)} \wedge G^{(n-2)} = 0, \quad (3.3.29b)$$

$$\square\phi - (\nabla\phi)^2 + \frac{1}{4}R_s - \frac{1}{8}H^2 = 0, \quad (3.3.29c)$$

$$\begin{aligned} R_{MN} = & -2\nabla_M \nabla_N \phi + \frac{1}{4}(-\square\phi + 2(\nabla\phi)^2) g_{MN} \\ & + \frac{1}{2}H_M^{(2)} \cdot H_N^{(2)} - \frac{1}{8}H^{(3)} \cdot H^{(3)} g_{MN} \\ & + e^{2\phi} \sum_n \frac{1}{4} \left(G_M^{(n-1)} \cdot G_N^{(n-1)} - \frac{n-1}{8} G^{(n)} \cdot G^{(n)} g_{MN} \right) \end{aligned} \quad (3.3.29d)$$

これより,

$$R_s = -\frac{9}{2}\square\phi + 5(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{4}H^2 - \sum_n \frac{n-5}{16} e^{2\phi} (G^{(n)})^2. \quad (3.3.30)$$

(注) $G^{(n)}$ の内積とその双対 $G^{(10-n)}$ の間には, Lorentz 時空では

$$(G^{(n)})^2 = -(G^{(10-n)})^2, \quad (3.3.31a)$$

$$(G^{(n)})_M \cdot (G^{(n)})_N = (G^{(10-n)})_M \cdot (G^{(10-n)})_N - (G^{(10-n)})^2 g_{MN} \quad (3.3.31b)$$

の関係があるので, R_{MN} の右辺で, 互いに双対な G の寄与は同じ値を与える.場の方程式 (Einstein frame, bosonic part only) 計量を $g_{MN} \rightarrow e^{\phi/2} g_{MN}$ と変換すると,

$$d(e^{(5-n)\phi/2} *G^{(n)}) + e^{(3-n)\phi/2} H \wedge *G^{(n+2)} = 0, \quad (3.3.32a)$$

$$G^{(n)} = (-1)^{[n]} e^{(n-5)\phi/2} *G^{(10-n)}, \quad (3.3.32b)$$

$$d(e^{-\phi} *H) + \frac{1}{2} \sum_n e^{(5-n)\phi/2} *G^{(n)} \wedge G^{(n-2)} = 0, \quad (3.3.32c)$$

$$\square\phi + (\nabla\phi)^2 - 2R_s + e^{-\phi} H^2 = 0, \quad (3.3.32d)$$

$$\begin{aligned} R_{MN} = & \frac{1}{2} \nabla_M \phi \nabla_N \phi + \frac{e^{-\phi}}{2} \left(H_M^{(2)} \cdot H_N^{(2)} - \frac{1}{4} H^{(3)} \cdot H^{(3)} g_{MN} \right) \\ & + \sum_n \frac{1}{4} e^{-(n-5)\phi/2} \left(G_M^{(n-1)} \cdot G_N^{(n-1)} - \frac{n-1}{8} G^{(n)} \cdot G^{(n)} g_{MN} \right) \end{aligned} \quad (3.3.32e)$$

特に,

$$R_s = \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{4}(H^{(3)})^2 + \sum_n \frac{5-n}{16} e^{-(n-5)\phi/2} (G^{(n)})^2 \quad (3.3.33)$$

これを用いると, dilaton の方程式は次のように書き換えられる:

$$\square\phi = -\frac{1}{2}e^{-\phi}(H^{(3)})^2 + \sum_n \frac{5-n}{8} e^{-(n-5)\phi/2} (G^{(n)})^2 \quad (3.3.34)$$

(注) $G^{(n)}$ の内積とその双対 $G^{(10-n)}$ の間には, Lorentz 時空では

$$e^{-(n-5)\phi/2} (G^{(n)})^2 = -e^{(n-5)\phi/2} (G^{(10-n)})^2 \quad (3.3.35)$$

の関係がある.

(4) 対称性

ゲージ対称性

$$\delta_\Lambda B = d\Lambda, \quad \delta_\Lambda C = (d\Lambda - G^{(0)}\Lambda) \wedge e^B, \quad (3.3.36)$$

ここで,

$$\Lambda = \sum_{n \in S} \Lambda^{(n)}. \quad (3.3.37)$$

局所超対称性

$$\delta e_M^A = \bar{\epsilon} \Gamma^A \psi_M, \quad (3.3.38a)$$

$$\delta\phi = \frac{1}{2} \bar{\epsilon} \lambda, \quad (3.3.38b)$$

$$\delta B_{MN} = -2\bar{\epsilon} \Gamma_{[M} \mathcal{P} \psi_{N]}, \quad (3.3.38c)$$

$$\begin{aligned} \delta C_{M_1 \dots M_{n-1}}^{(n-1)} &= -e^{-\phi} \bar{\epsilon} \Gamma_{[M_1 \dots M_{n-2}} \mathcal{P}_n \left\{ (n-1) \psi_{M_{n-1}] } - \frac{1}{2} \Gamma_{M_{n-1}] } \lambda \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2} (n-2)(n-1) C_{[M_1 \dots M_{n-3}}^{(n-3)} \delta B_{M_{n-2} M_{n-1]}}, \end{aligned} \quad (3.3.38d)$$

$$\delta\lambda = \left(\Gamma^M \partial_M \phi + \frac{1}{2} \mathbb{H} \mathcal{P} \right) \epsilon + \frac{e^\phi}{8} \sum_{n \in S} (-1)^n (5-n) \mathcal{G}^n \mathcal{P}_n \epsilon, \quad (3.3.38e)$$

$$\delta\psi_M = \nabla_M \epsilon + \frac{1}{4} \mathcal{P} \mathbb{H}_M \epsilon + \frac{e^\phi}{16} \sum_{n \in S} \mathcal{G}^{(n)} \Gamma_M \mathcal{P}_n \epsilon. \quad (3.3.38f)$$

ここで,

$$\mathbb{H} = \frac{1}{3!} H^{MNP} \Gamma_{MNP}, \quad \mathbb{H}_M = \frac{1}{2} H_{MNP} \Gamma^{NP}, \quad (3.3.39a)$$

$$\mathcal{G}^{(n)} = \frac{1}{n!} G_{M_1 \dots M_n}^{(n)} \Gamma^{M_1 \dots M_n} \quad (3.3.39b)$$

また, $\mathcal{P}, \mathcal{P}_n$ は

$$\text{IIA} : \mathcal{P} = \Gamma_*, \quad \mathcal{P}_n = \Gamma_*^{n/2} \sigma^1, \quad (3.3.40a)$$

$$\text{IIB} : \mathcal{P} = -\sigma^3, \quad \mathcal{P}_n = \begin{cases} \sigma^1 & : n = 3, 7, \\ i\sigma^2 & : n = 1, 4, 9 \end{cases} \quad (3.3.40b)$$

3.3.4 I型理論

基本場

- 重力超組
 - ボース場 : $g_{MN}, \phi, B_{[2]}$
 - Majorana 3/2 場 ψ_M , 1/2 場 λ : $\Gamma_{11}\psi_M = \pm\psi_M \Gamma_{11}\lambda = \mp\lambda$
- ゲージ超組
 - ゲージ場 A_1 (ゲージ群 G は任意)
 - G の随伴表現に従う Majorana 1/2 場 χ

作用積分 スtringフレームでの Bosonic part の作用積分は

$$S_{\text{Het},B} = \frac{1}{2\kappa_{10}^2} \int d^{10}x (-g)^{1/2} e^{-2\phi} \left[R + 4(\partial\phi)^2 - \frac{1}{2} |\tilde{H}_3|^2 - \frac{\kappa_{10}^2}{g_{10}^2} \text{Tr}_v (|F_2|^2) \right]. \quad (3.3.41)$$

ここで,

$$\tilde{H}_3 = dB_2 - \frac{\kappa_{10}^2}{g_{10}^2} \omega_3, \quad (3.3.42)$$

$$\omega_3 = \text{Tr}_v \left(A_1 \wedge dA_1 - \frac{2i}{3} A_1 \wedge A_1 \wedge A_1 \right). \quad (3.3.43)$$

Einstein フレームでの作用積分は,

$$g_{MN} \rightarrow e^{\phi/2} g_{MN} \quad (3.3.44)$$

とにおいて,

$$S_{\text{Het},B} = \frac{1}{2\kappa_{10}^2} \int d^{10}x (-g)^{1/2} \left[R - \frac{1}{2} (\partial\phi)^2 - \frac{1}{2} e^\phi |\tilde{H}_3|^2 - \frac{\kappa_{10}^2}{g_{10}^2} e^{-\phi/2} \text{Tr}_v (|F_2|^2) \right]. \quad (3.3.45)$$

場の方程式 デイラトンおよびゲージ場の方程式は

$$\square\phi - \frac{1}{2}e^\phi \tilde{H}_3 \cdot \tilde{H}_3 + \frac{\kappa_{10}^2}{2g_{10}^2} e^{-\phi/2} \text{Tr} F_2 \cdot F_2 = 0, \quad (3.3.46a)$$

$$d\tilde{H}_3 = -\frac{\kappa_{10}^2}{g_{10}^2} \text{Tr} F_2 \wedge F_2, \quad (3.3.46b)$$

$$d(e^\phi * \tilde{H}_3) = 0, \quad (3.3.46c)$$

$$DF_2 := dF_2 - iA_1 \wedge F_2 + iF_2 \wedge A_1 = 0, \quad (3.3.46d)$$

$$d(e^{-\phi/2} * F_2) + e^\phi F_2 \wedge * \tilde{H}_3 = 0. \quad (3.3.46e)$$

また,

$$\begin{aligned} \kappa_{10}^2 T_{MN} = & \frac{1}{2} \partial_M \phi \partial_N \phi - \frac{1}{4} (\nabla \phi)^2 g_{MN} \\ & + \frac{1}{4} e^\phi \left(\tilde{H}_{MPQ} \tilde{H}_N{}^{PQ} - |\tilde{H}_3|^2 g_{MN} \right) \\ & + \frac{\kappa_{10}^2}{g_{10}^2} e^{-\phi/2} \left(\text{Tr}_v(F_{MP} F_N{}^P) - \frac{1}{2} \text{Tr}_v(|F_2|^2) g_{MN} \right) \end{aligned} \quad (3.3.47)$$

より, Einstein 方程式は

$$\begin{aligned} R_{MN} = & \frac{1}{2} \partial_M \phi \partial_N \phi \\ & + e^\phi \left(\frac{1}{4} \tilde{H}_{MPQ} \tilde{H}_N{}^{PQ} - \frac{1}{8} |\tilde{H}_3|^2 g_{MN} \right) \\ & + \frac{\kappa_{10}^2}{g_{10}^2} e^{-\phi/2} \left(\text{Tr}_v(F_{MP} F_N{}^P) - \frac{1}{8} \text{Tr}_v(|F_2|^2) g_{MN} \right). \end{aligned} \quad (3.3.48)$$

3.3.5 問題点

- 発散の問題 (繰り込み不可能性)

Cf. 弦理論

- ゲージセクターの非一意性 (I 型)

Cf. Anomaly cancelation

- 標準宇宙モデルの起源

- 次元低下・コンパクト化の問題
- モジュライ問題, デイラトン安定化問題
- Inflation 問題, 宇宙項問題

Cf. Massive IIA, 9-brane

- 素粒子標準モデルの起源
 - Chirality の起源 (IIA 型)
Cf. T-duality
 - 低エネルギーゲージ群の起源 (と対称性の破れ) (II 型)
Cf. branes
 - SUSY breaking mechanism

§3.4

量子アノマリー

3.4.1 カイラルアノマリー（4次元）

要約: カイラルカレントは、それを構成しているフェルミ粒子がゲージ相互作用すると、一般的に量子効果によりアノマリーが生じ、カレントの保存則に位相的なゲージ補正項が加わる [Bell JS, Jackiw R (1969); Adler SL (1969)].

参考文献

- Harvey JA: "TASI 2003 Lecture notes on Anomalies" [arXiv:hep-th/0509097]
- Adler SL: "Anomalies" [arXiv:hep-th/0411038]

可換ゲージ場の Triangle Anomaly

- Lagrangian

$$\mathcal{L} = -i\bar{\psi}(\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (3.4.1)$$

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu \quad (3.4.2)$$

- 古典的対称性: 一般に,

$$\psi \mapsto e^{i\alpha}\psi \quad (3.4.3)$$

質量 $m = 0$ のとき, さらに

$$\psi \mapsto e^{i\beta\gamma_5}\psi \quad (3.4.4)$$

- 保存則 (量子論)

$$J^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \quad : \quad \partial_\mu J^\mu = 0, \quad (3.4.5a)$$

$$J_5^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi \quad : \quad \partial_\mu J_5^\mu = -2m\bar{\psi}\gamma_5\psi + \frac{e^2}{8\pi^2}F^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}. \quad (3.4.5b)$$

ここで,

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = *F_{\mu\nu} := \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}F^{\lambda\sigma}. \quad (3.4.6)$$

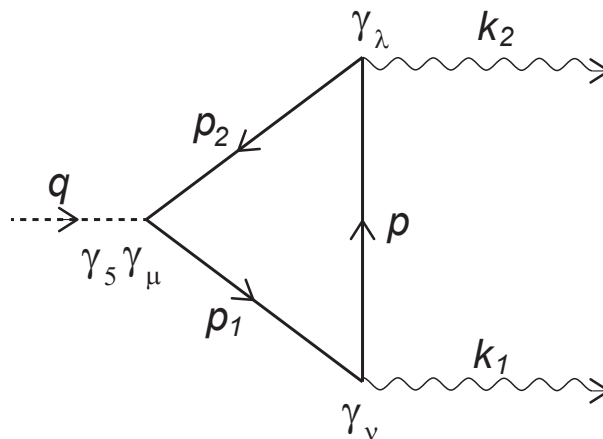


図 3.1: Triangle Diagram

Adler-Bardeen-Jackiw(ABJ) anomaly

- 不可避性：正則化においてベクトルカレントの保存を要請すると，軸性ベクトルカレントの保存則には anomaly が発生し，その値は正則化の方法に依存しない。
- 非くり込み定理：くり込みにより形を変えない。 [Adler-Bardeen の定理]
- 普遍性：非可換ゲージ場，重力場との結合もカイラルアノマリーを生む。

$$\begin{aligned}
 D_\mu &= \nabla_\mu -igt_a A_\mu^a, \quad J_5^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5t\psi \\
 \Rightarrow \partial_\mu J_5^\mu &= \dots + \frac{g^2}{8\pi^2}\text{Tr}(tt_a t_b)F_{\mu\nu}^a \tilde{F}^{b\mu\nu} + \frac{1}{384\pi^2}\text{Tr}(t)R_{\mu\nu\lambda\sigma}\tilde{R}^{\mu\nu\lambda\sigma}
 \end{aligned}
 \tag{3.4.7}$$

- 物理的には，アノマリーはインスタントンとスピノール場の相互作用により引き起こされる。
- 様々な証明法
 - Cut off による正則化.
 - Pauli-Villars 正則化.
 - Point-splitting 正則化.
 - 藤川による経路積分法:PI measure の正則化と Athiya-Singer 指数定理.

3.4.2 Gauge and gravitational anomaly

References

- Harvey JA: hep-th/0509097, “TASI Lecture on Anomalies”
- Adler SL: ”Anomalies” [arXiv:hep-th/0411038]
- Alvarez-Gaume L, Ginsparg P: Ann. Phys. 161:423-490 (1985), “The Structure of Gauge and Gravitational Anomalies”
- Alvarez-Gaume L, Witten E: NPB234:269-330 (1983), “Gravitational anomalies”
- Witten E: plb117(1982)324, “SU(2) anomaly”

Anomalous U(1) and GCS/GGS

- Anastasopoulos P, Bianchi M, Dudas E, Kiritsis E.: JHEP0611:057 (2006)
“Anomalies, anomalous U(1) ’s and generalized Chern-Simons terms”

ゲージアノマリー

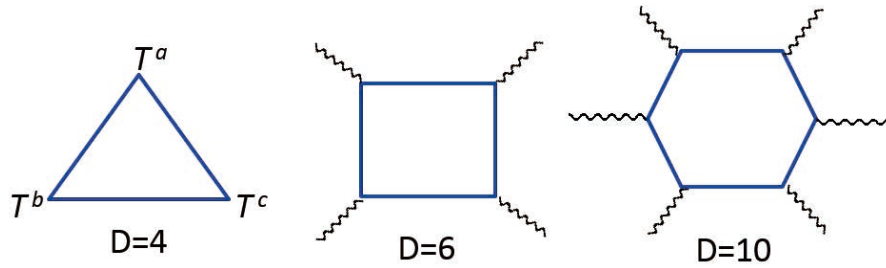
$$\delta_\epsilon Z[A] = \int d^D x \text{Tr} \epsilon(x) D_\mu \frac{\delta Z}{\delta A_\mu(x)} \neq 0 \quad (3.4.8)$$

- 自己共役表現（実表現，ないし擬実表現）はゲージアノマリーを生まない。これは，このような表現に対しては，ゲージ不変性をもつ Pauli-Villars 型 counter term が作れるためである。これより，特に，アノマリーは $\text{Im}(Z)$ にのみ生じる。
- アノマリーは，荷電共役変換（複素共役変換）およびパリティ変換で符号を変える。このため，アノマリーは偶数次元でのみ生じる。
- アノマリーは， $D/2 + 1$ 個の外線をもつカイラルフェルミオンのループ積分より生じる。
- 4次元の Gauge anomaly は次の形にかける：

$$I^d = C \alpha^a \text{Tr}(t_a t_{(b} t_{c)}) \mathcal{F}^b \wedge \mathcal{F}^c. \quad (3.4.9)$$

これより，4次元の場合，自己共役表現ではアノマリーが生じないことを直接示すことができる。まず，

$$\delta \psi_r = i \alpha^a t_a \psi_r, \quad \delta \psi_r^* = -i \alpha^a t_a^* \psi_r^* \quad (3.4.10)$$



で, t_a はエルミートなので, 自己共役表現に対しては,

$$t_a = S(-\bar{T}_a)S^{-1}. \quad (3.4.11)$$

よって,

$$\text{Tr}(t_a t_{(b} t_{c)}) = -\text{Tr}(\bar{T}_a \bar{T}_{(b} \bar{T}_{c)}) = -\text{Tr}(t_a t_{(b} t_{c)}). \quad (3.4.12)$$

- 4次元では, $G = \text{SU}(2), \text{SO}(2n+1)(n \geq 2), \text{Sp}(2n)(n \geq 3), G_2, F_4, E_7, E_8$ のときゲージアノマリーは生じない. 一方, $G = \text{U}(1), \text{SU}(n)(n \geq 3), \text{SO}(4n+2), E_6$ はアノマリーを生じる可能性がある. これらは, $\text{U}(1)$ を除くとすべて $\pi_5(G) \neq 0$.

重力アノマリー

$$\delta_\xi Z[g] = 2 \int d^D x \xi_\mu(x) D_\nu \frac{\delta Z}{\delta g_{\mu\nu}(x)} \neq 0 \quad (3.4.13)$$

- 理論の CPT 不変性と重力相互作用の P 不変性より, カイラルスピノール (およびカイラルテンソル) がローレンツ群の複素表現となっている場合には, 必ずカイラリティが反対の項が作用積分に対になって現れ, アノマリーはキャンセルする. このため, 重力アノマリーは $D = 4k+2$ 次元でのみ発生.
- 重力アノマリーは, $D/2+1$ 個の外線をもつカイラルフェルミ粒子と自己共役テンソルにより生じる.

一般的構造 アノマリーはカイラルな場の量子効果によってのみ生成され, d 次元時空では, 一般に次の構造をもつ:

$$\delta \ln Z = \frac{-i}{(2\pi)^5} \int \hat{I}^d(F_2, R_2), \quad (3.4.14)$$

$$\hat{I}^{d+2} \Rightarrow \hat{I}^d: \quad \hat{I}^{d+2} = d\hat{I}^{d+1}, \quad \delta\hat{I}^{d+1} = d\hat{I}^d. \quad (3.4.15)$$

3.4.3 10次元超重量理論のアノーマリー

10次元超重力理論に登場するカイラル場と対応する I^{12} は

- dilatino: $\mathbf{8}, \mathbf{8}'$

$$\begin{aligned} \hat{I}_{\mathbf{8}}(F_2, R_2) = & -\frac{\text{Tr}(F_2^6)}{1440} \\ & + \frac{\text{Tr}(F_2^4)\text{tr}(R_2^2)}{2304} - \frac{\text{Tr}(F_2^2)\text{tr}(R_2^4)}{23040} - \frac{\text{Tr}(F_2^2)[\text{tr}(R_2^2)]^2}{18432} \\ & + \dim(G) \left(\frac{\text{tr}(R_2^6)}{725760} + \frac{\text{tr}(R_2^4)\text{tr}(R_2^2)}{552960} + \frac{[\text{tr}(R_2^2)]^3}{1327104} \right). \end{aligned} \quad (3.4.16)$$

ここで, tr は $R_2 = (\mathcal{R}^a_b)$ の接空間添え字 a, b に関するトレース, Tr はフェルミ粒子のゲージ群 G の表現に関するトレース.

- gravitino: $\mathbf{56}, \mathbf{56}'$

$$\hat{I}_{\mathbf{56}}(R_2) = -495 \frac{\text{tr}(R_2^6)}{725760} + 225 \frac{\text{tr}(R_2^4)\text{tr}(R_2^2)}{552960} - 63 \frac{[\text{tr}(R_2^2)]^3}{1327104}. \quad (3.4.17)$$

- 5-form flux (IIB): $[5]_+, [5]_-$

$$\hat{I}_{\text{SD}}(R_2) = +992 \frac{\text{tr}(R_2^6)}{725760} - 448 \frac{\text{tr}(R_2^4)\text{tr}(R_2^2)}{552960} + 128 \frac{[\text{tr}(R_2^2)]^3}{1327104}. \quad (3.4.18)$$

II型理論 IIA型理論はカイラルでないので, アノーマリーは自明にキャンセルする. また, IIB型理論でも, アノーマリーはキャンセルする:

$$\hat{I}_{\text{IIB}}(R_2) = -2\hat{I}_{\mathbf{8}}(R_2) + 2\hat{I}_{\mathbf{56}}(R_2) + \hat{I}_{\text{SD}}(R_2) = 0. \quad (3.4.19)$$

I型理論 I型理論のアノーマリーは

$$\begin{aligned} \hat{I}_1 &= \hat{I}_{\mathbf{56}}(R_2) - \hat{I}_{\mathbf{8}}(R_2) + \hat{I}_{\mathbf{8}}(F_2, R_2) \\ &= \frac{Y_4 X_8}{768} + \frac{1}{1440} \left\{ -\text{Tr}_a(F_2^6) + \frac{1}{48} \text{Tr}_a(F_2^2) \text{Tr}_a(F_2^4) - \frac{1}{14400} [\text{Tr}_a(F_2^2)]^3 \right\} \\ &\quad + (\dim(G) - 496) \left\{ \frac{\text{tr}(R_2^6)}{725760} + \frac{\text{tr}(R_2^4)\text{tr}(R_2^2)}{552960} + \frac{[\text{tr}(R_2^2)]^3}{1327104} \right\} \end{aligned} \quad (3.4.20)$$

ここで,

$$Y_4 = \text{tr}(R_2^2) - \frac{1}{30} \text{Tr}_a(F_2^2), \quad (3.4.21a)$$

$$X_8 = \text{tr}(R_2^4) + \frac{[\text{tr}(R_2^2)]^2}{4} - \frac{\text{Tr}_a(F_2^2)\text{tr}(R_2^2)}{30} + \frac{\text{Tr}_a(F_2^4)}{3} - \frac{[\text{Tr}_a(F_2^2)]^2}{900} \quad (3.4.21b)$$

まず, $G = \text{SO}(n)$ のとき, 任意の生成元 $t \in \mathfrak{so}(n)$ に対し,

$$\text{Tr}_a(t^2) = (n-2)\text{Tr}_v(t^2), \quad (3.4.22a)$$

$$\text{Tr}_a(t^4) = (n-8)\text{Tr}_v(t^4) + 3[\text{Tr}_v(t^2)]^2, \quad (3.4.22b)$$

$$\text{Tr}_a(t^6) = (n-32)\text{Tr}_v(t^6) + 15\text{Tr}_v(t^2)\text{Tr}_v(t^4), \quad (3.4.22c)$$

より, 第2項は

$$\frac{32-n}{1440} \left\{ \text{Tr}_v(F_2^6) - \frac{n+22}{48} \text{Tr}_v(F_2^2)\text{Tr}_v(F_2^4) + \frac{(n-2)(n+28)}{14400} [\text{Tr}_v(F_2)]^3 \right\} \quad (3.4.23)$$

より, $n = 32$ のときのみゼロとなる. 同様に, $G = E_8$ に対して,

$$\text{Tr}_a(t^4) = \frac{1}{100} [\text{Tr}_a(t^2)]^2, \quad \text{Tr}_a(t^6) = \frac{1}{7200} [\text{Tr}_a(t^2)]^3 \quad (3.4.24)$$

より, 第2項は $G = E_8 \times E_8, E_8 \times \text{U}(1)^m$ のときゼロ. 第3項は, $G = \text{SO}(32), E_8 \times E_8, E_8 \times \text{U}(1)^{248}, \text{U}(1)^{496}$ に対してゼロ.

次に, (ヘテロ表示での) 作用積分において, \tilde{H}_3 の定義を

$$\tilde{H}_3 = dB_2 - c\omega_{3Y} - c'\omega_{3L}; \quad (3.4.25)$$

$$\omega_{3Y} = \text{Tr} \left(A_1 \wedge dA_1 - \frac{2i}{3} A_1 \wedge A_1 \wedge A_1 \right), \quad (3.4.26)$$

$$\omega_{3L} = \text{tr} \left(\omega_1 \wedge d\omega_1 + \frac{2}{3} \omega_1 \wedge \omega_1 \wedge \omega_1 \right) \quad (3.4.27)$$

に置き換え, ゲージ変換を

$$\delta A_1 = d\lambda - i[A_1, \lambda], \quad (3.4.28a)$$

$$\delta \omega_1 = d\Theta + [\omega_1, \Theta], \quad (3.4.28b)$$

$$\delta B_2 = c\text{Tr}(\lambda dA_1) + c'\text{tr}(\Theta d\omega_1) \quad (3.4.28c)$$

と定義すると, Chern-Simons 型繰り込み項

$$\mathbf{S}' = \int B_2 X_8(F_2, R_2) \quad (3.4.29)$$

は, ゲージ変換に補正

$$\delta \mathbf{S}' = \int \delta B_2 X_8 \quad (3.4.30)$$

を与える. これは, アノーマリー換算で

$$\begin{aligned} \hat{I}'_{10} &= [c\text{Tr}_a(\lambda dA_1) + c'\text{tr}(\Theta d\omega_1)] X_8 \\ \Rightarrow \hat{I}'_{12} &= [c\text{Tr}_a(F_2^2) + c'\text{tr}(R_2^2)] X_2 \end{aligned} \quad (3.4.31)$$

となる。よって,

$$c' = -\frac{c}{30} \quad (3.4.32)$$

ととれば, 第1項と相殺する (**Green-Schwarz** 機構)。このとき,

$$d\tilde{H}_3 = \frac{\alpha'}{4} \left[\text{tr}(R_2^2) - \frac{1}{30} \text{Tr}_a(F_2^2) \right]; \quad 4\kappa_{10}^2 = \alpha' g_{10}^2. \quad (3.4.33)$$

以上より, I型理論では, $G = \text{SO}(32), E_8 \times E_8, E_8 \times \text{U}(1)^{248} \cdot \text{U}(1)^{496}$ に対して, アノーマリーは相殺する。

§3.5

超弦理論との対応

3.5.1 フレームワーク

超弦理論は、2次元時空上の超対称性をもつ共形不変な場の理論であり、そのボゾンの基礎場の数が D のとき、 D 次元時空内を運動する内部自由度をもったものの量子論となる。

1. 古典論

- 2次元 world sheet の位相：
 - 閉曲面（閉弦）：球面、トーラス、 $\mathcal{F}_g (g \geq 2)$; $\mathbb{R}P^2$, Klein ボトル、...
 - 開曲面（開弦）：円盤、円筒、 $\mathcal{F}_g - nD^2 (g \geq 1)$; Möbius バンド、...
- Target space & background fields: $\mathcal{X} : (\Sigma, h) \rightarrow (\mathcal{M}, \Phi)$

例：(X, ψ) CFT. $\mathcal{M} = M^D \times \mathcal{S}_2^D$

$$\mathcal{X} = (X^\mu(\sigma), \psi^\mu(\sigma)), \quad \Phi = (g_{\mu\nu}(X), B_{\mu\nu}(X), \phi(X); A_\mu(X))$$

- Action: $S = S_m(h, \mathcal{X}; \Phi)$

例：(X, ψ) CFT

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\Sigma} d^2\sigma \sqrt{-h} \left[h^{ab} g(\partial_a X, \partial_b X) + \epsilon^{ab} B(\partial_a X, \partial_b X) + \alpha' R_s \phi + \frac{\alpha'}{2} g_{\mu\nu} \psi^\mu \not{D} \psi^\nu + \dots \right] - \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\partial\Sigma} dX^\mu A_\mu(X) + \dots \quad (3.5.1)$$

- Invariances:
 - WS diffeomorphism invariance
 - WS Weyl invariance
 - WS supersymmetry
 - Target space symmetries
- Field Equation: $F[\mathcal{X}] = 0, T_{ab} = 0.$

- 境界条件

- Closed string: $\psi(t, \sigma + 2\pi) = e^{2i\nu\pi}\psi(t, \sigma)$
 - * Neveu-Schwarz: $\nu = 1/2$
 - * Ramond: $\nu = 0$
- Open string: $\partial\Sigma \subset D_p$ branes: $(N^{p+1}; F, \text{Bulk fields})$

2. 量子論

- WS diff+ Weyl, local SUSY のゲージ固定: $h = dzd\bar{z}$
 - ⇒ CFT with superconformal symmetry
 - FP ghost: $S_g = \frac{1}{2\pi} \int d^2z (b\bar{\partial}c + \beta\bar{\partial}\gamma)$.
 - Constraint: $L_n \approx 0, \quad G_r \approx 0$

ここで、

$$T_{zz} = T_B(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{L_m}{z^{m+2}}, \quad T_{\bar{z}\bar{z}} = \tilde{T}_B(\bar{z}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{L}_m}{\bar{z}^{m+2}}, \quad (3.5.2a)$$

$$T_F(z) = \sum_{r \in \mathbb{Z} + \nu} \frac{G_r}{z^{r+3/2}}, \quad \tilde{T}_F(\bar{z}) = \sum_{r \in \mathbb{Z} + \nu} \frac{\tilde{G}_r}{\bar{z}^{r+3/2}}. \quad (3.5.2b)$$

- Regularization

WS $\simeq \mathbb{C}^*$ 上の自由場を

$$\partial X(z) = -i \left(\frac{\alpha'}{2} \right)^{1/2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{\alpha_m}{z^{m+1}}, \quad \bar{\partial} X(\bar{z}) = -i \left(\frac{\alpha'}{2} \right)^{1/2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{\tilde{\alpha}_m}{\bar{z}^{m+1}}, \quad (3.5.3a)$$

$$\psi(z) = \sum_{r \in \mathbb{Z} + \nu} \frac{\psi_r}{z^{r+1/2}}, \quad \tilde{\psi}(\bar{z}) = \sum_{r \in \mathbb{Z} + \nu} \frac{\tilde{\psi}_r}{\bar{z}^{r+1/2}} \quad (3.5.3b)$$

とモード展開すると、

$$L_0 = \frac{\alpha'}{4\epsilon} p^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n + \frac{1}{2} \sum_{r \in \mathbb{N} - \nu} r \psi_{-r} \cdot \psi_r + a^m, \quad (3.5.4a)$$

$$L_m = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_{m-n} \cdot \alpha_n + \frac{1}{4} \sum_{r \in \nu + \mathbb{Z}} (2r - m) \psi_{m-r} \cdot \psi_r, \quad (3.5.4b)$$

$$G_r = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n \cdot \psi_{r-n}. \quad (3.5.4c)$$

ここで、 $\epsilon = 0$ (open string), 1 (closed string) で $\alpha_0^2 = \alpha' 2^{-\epsilon} p^2$, また、

$$a^m = \frac{c}{24} - \frac{D_B}{24} + \frac{D_R}{24} - \frac{D_{NS}}{48} = 0(X + NS), \quad \frac{D}{16}(R). \quad (3.5.5)$$

また、ghost に対応する値は、

$$a^g = -1(\text{bosoni string}), \quad -\frac{5}{8}(R), \quad -\frac{1}{2}(NS). \quad (3.5.6)$$

⇒ Super-Virasoro 代数

$$[L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n} + \frac{c}{12}(m^3 - m)\delta_{m,-n}, \quad (3.5.7a)$$

$$\{G_r, G_s\} = 2L_{r+s} + \frac{c}{12}(4r^2 - 1)\delta_{r,-s}, \quad (3.5.7b)$$

$$[L_m, G_r] = \frac{m - 2r}{2}G_{m+r}. \quad (3.5.7c)$$

- Free physical states

– Constraint: $L_n|\text{Phys}\rangle = 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), $G_r|\text{Phys}\rangle = 0$ ($r \in \mathbb{N} - \nu$):

$$\frac{m^2}{m_0^2} = a + \sum_{n \in \mathbb{N}} n N_n + \sum_{r \in \mathbb{N} - \nu} r N_r. \quad (3.5.8)$$

ここで、 $a = a^m + a^g$.

- Vertex operators の構成 ⇒ \mathcal{V}_α

$$\delta S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\Sigma} (h^{ab}\delta g + \epsilon^{ab}\delta B)(\partial_a X, \partial_b X) \quad (3.5.9)$$

より

$$\mathcal{V}_g \propto e_{MN} h^{ab} \partial_a X^M(0) \partial_b X^N(0) e^{ik \cdot X(0)}, \quad (3.5.10a)$$

$$\mathcal{V}_b \propto b_{MN} \epsilon^{ab} \partial_a X^M(0) \partial_b X^N(0) e^{ik \cdot X(0)}. \quad (3.5.10b)$$

- Projections: Tachyon ⇒ GSO, Orientifold

例 : D=10 (X, ψ)

$$R: a = \frac{15}{24} - \frac{10}{24} + \frac{10}{24} - \frac{5}{8} = 0$$

$$NS: a = \frac{15}{24} - \frac{10}{24} - \frac{10}{48} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

– WS fermion number F :

$$\Sigma^{\mu\lambda} = -\frac{i}{2} \sum_{r \in \nu + \mathbb{Z}} [\psi_r^\mu, \psi_{-r}^\lambda], \quad (3.5.11a)$$

$$F = \sum_{a=0}^4 S_a : S_a = i^{\delta_{a,0}} \Sigma^{2a, 2a+1}, \quad (3.5.11b)$$

$$(3.5.11c)$$

$\exp(\pi i F)$ は WS スピノール場と反可換 :

$$e^{\pi i F} \psi_r^\mu = -\psi_r^\mu e^{\pi i F}. \quad (3.5.12)$$

また, 基底状態に対して,

$$\exp(\pi i F) |0\rangle_{\text{NS}} = -|0\rangle_{\text{NS}}, \quad (3.5.13a)$$

$$\exp(\pi i F) |\mathbf{s}\rangle_{\text{R}} = |\mathbf{s}\rangle_{\Gamma_{\mathbf{s}'\mathbf{s}}}. \quad (3.5.13b)$$

- Construction of S-matrix:

$$S(1; \dots; n) = \sum_{\chi, \gamma} \frac{e^{-\lambda \chi}}{n_{\text{R}}} \int_{\chi, \gamma} d^{n_e} t d^{n_o} \nu \left\langle \prod_{j=1}^{n_e} B_j \prod_{a=1}^{n_o} \delta(B_a) \prod_{i=1}^n \hat{\mathcal{V}}_i \right\rangle. \quad (3.5.14)$$

ここで, χ は WS の位相, γ はスピン構造, t は偶モジュライパラメータ, ν は奇モジュライパラメータ。

3. Outcome

- 重力とゲージ場を含む整合的理論

- 粒子の質量・スピンのスペクトル

例 : 10次元 flat BG SST での massless 粒子・場

* Open string: $a_{\text{NS}} = -1/2, a_{\text{R}} = 0 \Rightarrow$ vector $\mathbf{8}_v(\text{NS})$ + spinor $\mathbf{8}_s(\text{R})$

* NS sector(共通部分): $\mathbf{8}_v \times \mathbf{8}_{v/s} \Rightarrow g_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}, \phi; \psi_\mu, \chi (, \psi'_\mu, \chi')$

* RR sector(closed string): $\mathbf{8}_s \times \mathbf{8}_s \Rightarrow \{C_p\}$

- 散乱行列

- 低エネルギー極限の場の理論 = 10次元超重力理論

- Weyl 不変性 \Rightarrow バルク NS 場に対する場の方程式

特に, flat BG の SST が整合的であるためには, $D = 10$.

背景場 (G_{MN}, B_{MN}, Φ) でのボース弦理論に対するアノマリーは

$$T_a^a = -\frac{1}{2\alpha'} \beta_{MN}^G g^{ab} \partial_a X^M \partial_b X^N - \frac{i}{2\alpha'} \beta_{MN}^B \epsilon^{ab} \partial_a X^M \partial_b X^N - \frac{1}{2} \beta^\Phi R. \quad (3.5.15)$$

ここで,

$$\beta_{MN}^G = \alpha' \left(R_{MN} + 2\nabla_M \nabla_N \Phi - \frac{1}{4} H_{MPQ} H_N{}^{PQ} \right) + O(\alpha'^2) \quad (3.5.16a)$$

$$\beta_{MN}^B = \alpha' \left(-\frac{1}{2} \nabla^P H_{PMN} + \nabla^P \Phi H_{PMN} \right) + O(\alpha'^2), \quad (3.5.16b)$$

$$\beta^\Phi = \frac{D-10}{4} + \alpha' \left(-\frac{1}{2} \nabla^2 \Phi + (\nabla \Phi)^2 - \frac{1}{4} H_{[3]} \cdot H_{[3]} \right) + O(\alpha'^2) \quad (3.5.16c)$$

- Anomaly free \Rightarrow RR 場の方程式, Brane の作用積分
- Duality による理論の統一
- コンパクト化 (=非自明な target 上の弦理論) \Rightarrow 低エネルギーでの 4次元素粒子標準理論、GUT

4. 得られないもの

- 一般の動的な時空 (+場) の振る舞い (物質励起の背景場への反作用)
- 宇宙定数 (への量子補正)
- コンパクト化や低エネルギー理論の選別

3.5.2 平坦な時空上の超弦理論の分類

- 閉弦のみの理論
 - I 型 (16 susy)
 - * ヘテロ型 $E_8 \times E_8 / \mathbb{Z}_2$ 理論 \Rightarrow 10次元 Type I sugra + $E_8 \times E_8$ -SYM
 - * ヘテロ型 SO(32) 理論 \Rightarrow 10次元 Type I sugra + SO(32)-SYM
 - II 型 (32 susy)
 - * IIA 型理論 \Rightarrow 10次元 type IIA sugra
 - * IIB 型理論 \Rightarrow 10次元 type IIB sugra
- 開弦+閉弦理論 (16 susy 以下)
 - IIA 型理論+ブレーン \Rightarrow 10次元 type II sugra + brane 上の (chiral)SYM
 - IIB 型理論+ブレーン \Rightarrow 10次元 type II sugra + brane 上の (chiral)SYM
 - I 型 SO(32) \Rightarrow IIB 型理論+ D₉ ブレーン
- M 理論 \Rightarrow 11次元 sugra

3.5.3 厳密に構成された非自明背景場・時空上の超弦理論

- Linear dilaton 理論
- PP GW 上の超弦理論
- 直積型 Calabi-Yau/Orbifold コンパクト化 (no flux)

	Heterotic (M)	IIA	IIB	M/F
Local SUSY	$N = 4(D = 10)$	$N = 8(D = 10)$	$N = 8(D = 10)$	$N = 8(D = 11/12)$
Gravity sector	Bulk $(g_{MN}, B_2, \phi, \Psi_M, \lambda)$	Bulk $(NS, \{C_{2p+1}\}, \Psi_M, \lambda, \Psi'_M, \lambda')$	Bulk $(NS, \{C_{2p}\}, \Psi_M^{(1)}, \lambda^{(1)}, \Psi_M^{(2)}, \lambda^{(2)})$	Bulk $(g_{MN}, C_3, \Psi + M)$
Geometric Compactif.	$T^6 \Rightarrow N = 4$ $T^6/\Gamma, CY^3 \Rightarrow N = 1$	$T^6 \Rightarrow N = 8$ $T^6/\Gamma, CY^3 \Rightarrow N = 2$	$T^6 \Rightarrow N = 8$ $T^6/\Gamma, CY^3 \Rightarrow N = 2$	$M/T^7 \Rightarrow N = 8$ $F/CY^4 \Rightarrow N = 1$
Matter sector	Bulk $(F_2 + \chi)$	IDBs $(F_2 + \chi) \Rightarrow N = 1$	IDBs/MDB $(F_2 + \chi) \Rightarrow N = 1$	A-D-E Singularities
Bulk Flux	$G = E^8 \times E^8, SO(32)$ Gauge bdl \Rightarrow GUT	$G = U(n)$'s +SO/Sp $F_0 \Rightarrow$ massive IIA	$G = U(n)$'s +SO/Sp	$G = U(n)$'s, E^8
Moduli Stabilisation	H-flux $\Rightarrow Y^6$: NK X (partially for complex moduli)	Flux $\Rightarrow Y^6$: NK Δ Flux+NP effect (nongeneric)	ISD 3-flux \Rightarrow complex moduli fixed	X
Susy breaking	???	???	Δ Kähler uplifting	???
Particle Ph.	\circ MSSMs \Leftarrow SU(5)/SO(10)/ E_6 GUTs No EW higgs!!	Δ MSSM-like models. No GUT. EW SB ?	Δ Direct MSSM by MDB/F-GUT.	X GUT only
Cosmology	X Higher-order???	X No dS vacua found !!	Δ anti-D3 or string corrections	No realistic model. X

表 3.4: 超弦理論・M 理論のコンパクト化 : Summary table

§3.6

Brane

3.6.1 分類

D 次元時空における p -brane は, C_{p+1} ポテンシャルと電氣的に, C_{D-p-3} ポテンシャルと磁氣的に結合する. すなわち, $dC_{D-p-3} = *dC_{p+1}$ として,

$$\text{Electric} : \mu_p \int_{Dp} C_{p+1}, \quad (3.6.1a)$$

$$\text{Magnetic} : \mu'_p \int_{Dp} \tilde{C}_{p+1}. \quad (3.6.1b)$$

フォーム場 F_{D-p-2} の磁荷ないし F_{p+2} の電荷を持ちうる :

$$\text{Electric charge} : \int_{S_{D-p-2}} *F_{p+2} = 2\kappa_{10}^2 \mu_p, \quad (3.6.2a)$$

$$\text{Magnetic charge} : \int_{S_{D-p-2}} F_{D-p-2} = 2\kappa_{10}^2 \mu'_p. \quad (3.6.2b)$$

	Potential	Flux	electric	magnetic
	Φ	$d\Phi$	—	NS7(?)
	B_2	H_3	F1	NS5
	C_1	F_2	D0	D6
IIA	C_3	F_4	D2	D4
	(C_5)	(F_6)	D4	D2
	(C_7)	(F_8)	D6	D0
	C_9	F_{10}	D8	—
	$C_{10}(?)$	0	D9(?)	—

3.6.2 電荷の量子化

$D(D-p-4)$ ブレーンを囲む多様体 Σ_{D+2} 上を Dp が, $\Sigma_{p+1} = \partial N_{p+2}$ に沿って $D(D-p-4)$ の周りを一周すると, Dp の波動関数はこの軌道に沿った運動により,

$$\exp\left(i\mu_p \int_{\Sigma_{p+1}} C_{p+1}\right) = \exp\left(i\mu_p \int_{N_{p+2}} F_{p+2}\right) \quad (3.6.3)$$

だけ位相が変化する. いま, 軌道をだんだん小さくして, $N_{p+2} \rightarrow \Sigma_{p+2}$ となるよう1点に縮めると, 位相の変化はなくなるといけないので,

$$\exp\left(i\mu_p \int_{\Sigma_{p+2}} F_{p+2}\right) = \exp\left(i\mu_p \times 2\kappa_{10}^2 \mu'_{D-p-4}\right) = 1. \quad (3.6.4)$$

これより, 次の Dirac 型量子化条件を得る :

$$2\kappa_{10}^2 \mu_p \mu'_{D-4-p} = 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (3.6.5)$$

	Potential	Flux	electric	magnetic
	Φ	$d\Phi$	—	NS7(?)
	B_2	H_3	F1	NS5
	C_0	F_1	D-1	D7
IIB	C_2	F_3	D1	D5
	$(C_4)_+$	$(F_5)_+$	D3	D3
	(C_6)	(F_7)	D5	D1
	(C_8)	(F_9)	D7	D-1
	C_{10}	0	D9	—

3.6.3 D ブレーンの作用積分

References

- Anomaly cancelation, inflow and brane action
 - Izquierdo JM, Townsend PK: NPB 414:93 (1994), “Axionic defect anomalies and their cancellation”
 - Green MB, Harvey JA, Moore G: CQG14:47(1997), “I-brane inflow and anomalous couplings on D-branes”
 - Cheung YK, Yin Z: NPB 517:67 (1998) “Anomalies, branes, and currents”
 - Minasian R, Moore GW: JHEP9711:002 (1997) “K-theory and Ramond-Ramond charge”
- Extension to the non-Abelian case (N Dp-branes with $N > 1$)
 - Myers RC: jhep9912, 022 (1999) “Dielectric-branes”

Abelian case

DBI 作用積分 1枚の Dp ブレーンに対する DBI 作用積分は, F をその上の $U(1)$ ゲージ場フラックスとして, [33]

$$S_{\text{DBI}, Dp} = -\mu_p \int_{\Sigma^{p+1}} d^{p+1}\xi e^{-\Phi(X)} \sqrt{-\det(g_{ab}(X) + 2\pi\alpha' \mathcal{F}_{ab}(X))}. \quad (3.6.6)$$

ここで,

$$2\pi\alpha' \mathcal{F} = 2\pi\alpha' F + B, \quad (3.6.7)$$

$$\mu_p = 2\pi\ell_s^{-p-1} \times \begin{cases} 1 & \text{for type II} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{for type I} \end{cases} \quad (3.6.8)$$

Chern-Simons 作用積分 $C = \sum_q C_q / \ell_s^q$ として, Dp ブレーン B^{p+1} と RR 場との結合は

$$S_{\text{CS}} = 2\pi \int_{B^{p+1}} C \wedge \text{Tr} e^{\frac{B}{\ell_s^2} + \frac{F}{2\pi}} \frac{\sqrt{\hat{A}(TB)}}{\sqrt{\hat{A}(NB)}} \quad (3.6.9)$$

ここで $\hat{A}(TB)$ と $\hat{A}(NB)$ は, それぞれブレーンの接バンドル, 法バンドルの \hat{A} -特性類. ただし, ゲージ場はエルミートな行列に値を取るものを取る.

また, O_p 面に対する DBI 作用積分は

$$S_{\text{CS}} = -2^{p-4} 2\pi \int_{B^{p+1}} C \wedge \frac{\sqrt{L(\mathcal{R}_T/4)}}{\sqrt{L(\mathcal{R}_N/4)}} \quad (3.6.10)$$

ここで, L は Hirzebruch 特性類, $\mathcal{R}_T, \mathcal{R}_N$ は O_p 面の接バンドルおよび法バンドルの曲率形式 (ℓ_s のべきで無次元化されたもの).

Non-abelian case

N 枚重なったブレーン上には, $SU(N)$ ゲージ場 A_M とその adjoint 表現で変換する N 次エルミート行列に値をもつ非可換スカラ場 $\Phi^i (i = 1, \dots, 9-p)$ が現れる. 以下

$$\lambda = 2\pi\ell_s^2 = 2\pi\alpha', \quad T_p = \mu_p = \frac{2\pi}{g_s(2\pi\ell_s)^{p+1}}. \quad (3.6.11)$$

DBI 作用積分

$$S_{\text{DBI}} = -T_p \int d^{p+1}\sigma \text{Tr} \left(e^{-\phi} \sqrt{-(\det P + \lambda F) \det Q} \right). \quad (3.6.12)$$

ここで

$$E_{MN} = g_{MN} + B_{MN}, \quad (3.6.13a)$$

$$P_{ab} = E_{ab} + E_{ai}(Q^{-1} - \delta)^{ij}E_{jb}, \quad (3.6.13b)$$

$$Q^i_j = \delta^i_j + i\lambda[\Phi^i, \Phi^j]E_{k,j} \quad (3.6.13c)$$

λ が小さいとき

$$\sqrt{\det Q} = 1 - \frac{\lambda^2}{4}[\Phi^i, \Phi^j][\Phi^i, \Phi^j] + \dots \quad (3.6.14)$$

CS 作用積分

$$S_{\text{CS}} = \mu_p \int \text{Tr} \left(\mathcal{P} \left[e^{i\lambda I_\Phi I_\Phi} C e^{B/\ell_s^2} \right] e^{\lambda F} \right). \quad (3.6.15)$$

ここで,

$$I_\Phi I_\Phi B = B_{ij} \Phi^i \Phi^j = \frac{1}{2} B_{ij} [\Phi^i, \Phi^j]. \quad (3.6.16)$$

ヒグス場 Φ がゼロのとき, 重力場との結合も含めたうえで, 場について展開すると,

$$S_{\text{CS}} = \mu_p \left[\int_{B_{p+1}} C_{p+1} + (2\pi\alpha') \int_{B_{p+1}} C_{p-1} \wedge \text{tr} F + \frac{(2\pi\alpha')^2}{2} \int_{B_{p+1}} C_{p-3} \wedge \text{tr} F^2 - \frac{1}{24(8\pi^2)} \int_{B_{p+1}} C_{p-3} \wedge \text{tr} R^2 + \dots \right] \quad (3.6.17)$$

3.6.4 RR tadpole 条件

RR フォーム場に対する場の方程式

$$dF_{8-p} = H_3 \wedge F_{6-p} + \kappa_{10}^2 \mu_p [N_{\text{Dp}}(\delta(Dp) + \delta(Dp')) + Q_p N_{\text{Op}} \delta(Op)] \quad (3.6.18)$$

$$\kappa_{10}^2 \mu_p = (2\pi\sqrt{\alpha'})^{7-p}, \quad (3.6.19)$$

$$Q_p = -2^{p-4} \quad (3.6.20)$$

これを Dp に横断的な $(9-p)$ 次元部分多様体に沿って積分して,

$$N_{\text{Dp}} + N_{\text{flux},p} = 2^{p-5} N_{\text{Op}} \quad (3.6.21)$$

where

$$N_{\text{flux}} = \frac{1}{2\kappa_{10}^2 \mu_p} \int_{Y_{9-p}} H_3 \wedge F_{6-p} \quad (3.6.22)$$

4

超弦理論コンパクト化とインフレーション

§4.1

直積型コンパクト化

4.1.1 共通セクター

基本場

- ボーズ場
 - 計量/フレーム場: $g_{MN} (e_M^A)$
 - 2形式場: $B = \frac{1}{2} B_{MN} dx^M \wedge dx^N \Rightarrow H$
 - デイラトン: ϕ
- フェルミ場
 - スピン 3/2 場: ψ_M
 - デイラティーノ: λ

作用積分 スtring フレームでの Bosonic part の作用積分は

$$S_B = \frac{1}{2\kappa_{10}^2} \int d^{10}x (-g)^{1/2} e^{-2\phi} \left[R + 4(\partial\phi)^2 - \frac{1}{2}|H|^2 \right] \quad (4.1.1)$$

ここで,

$$H = dB \quad (4.1.2)$$

超対称変換 String frame で

$$\delta\psi_M = \mathcal{D}_M\epsilon; \quad \mathcal{D}_M = \nabla_M^{(+)} \equiv \nabla_M(e) - \frac{1}{4}\mathbb{H}_M, \quad (4.1.3a)$$

$$\delta\lambda = \mathcal{O}\epsilon; \quad \mathcal{O} \equiv \Gamma^M\partial_M\phi - \frac{1}{2}\mathbb{H}. \quad (4.1.3b)$$

ここで

$$\mathbb{H}_M := \frac{1}{2}H_{MPQ}\Gamma^{PQ}, \quad (4.1.4a)$$

$$\mathbb{H} := \frac{1}{6}H_{MNP}\Gamma^{MNP}. \quad (4.1.4b)$$

場の方程式 ストリングフレームで

$$\mathcal{E}_{MN} := R_{MN} + 2\nabla_M\nabla_N\phi - \frac{1}{4}\tilde{H}_{MPQ}\tilde{H}_N{}^{PQ}, \quad (4.1.5a)$$

$$\mathcal{E}_\phi := R - 4(\nabla\phi)^2 + 4\Box\phi - \frac{1}{2}|\tilde{H}|^2, \quad (4.1.5b)$$

$$\mathcal{I}_{MN} := e^{2\phi}\nabla_P(e^{-2\phi}\tilde{H}^P{}_{MN}) = 0. \quad (4.1.5c)$$

最後の式は

$$d(e^{-2\phi}*\tilde{H}) = 0 \quad (4.1.6)$$

と同等.

縮約 Bianchi 恒等式

$$\nabla^N R_{MN} = \frac{1}{2}\nabla_M R \quad (4.1.7)$$

より

$$\begin{aligned} \nabla^N \mathcal{E}_{MN} &= \frac{1}{2}\nabla_M \mathcal{E}_\phi + 2\mathcal{E}_{MN}\nabla^N\phi - \frac{1}{4}\mathcal{I}^{PQ}H_{MPQ} \\ &\quad + \frac{1}{12}H^{NPQ}(dH)_{MNPQ} \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

\mathcal{E}_M^M と \mathcal{E}_ϕ より, 曲率を含まない次の式を得る:

$$\mathcal{E}'_\phi := e^{2\phi}\Box e^{-2\phi} - |H|^2 = 0. \quad (4.1.9)$$

Killing スピノール 方程式

$$\mathcal{D}_M\epsilon = 0, \quad \mathcal{O}\epsilon = 0 \quad (4.1.10)$$

を満たす (c 数) スピノールを **Killing スピノール** と呼ぶ.

【Theorem 4.1.1 (Killing スピノールと超対称解)】 キリングスピノール ϵ が存在し, 対応するキリングベクトル $\bar{e}\Gamma^M\epsilon$ が時間的ベクトルなら, 場の方程式が自動的に満たされる. □

Proof. 関係式

$$[\nabla_M, \nabla_N] = \frac{1}{4} R_{MNPQ} \Gamma^{PQ} \equiv \frac{1}{2} \hat{R}_{MN} \quad (4.1.11)$$

および

$$[\Gamma^{PQ}, \Gamma^R] = 2\eta^{QR} \Gamma^P - 2\eta^{PR} \Gamma^Q \quad (4.1.12)$$

より,

$$\begin{aligned} [\mathcal{D}_M, \mathcal{D}_N] &= \frac{1}{4} R_{ABMN}^{(+)} \Gamma^{AB} \\ &= \frac{1}{2} \hat{R}_{MN} - \frac{1}{2} \nabla_{[M} \hat{H}_{N]} - \frac{1}{8} H_{MPS} H_{NQ}{}^S \Gamma^{PQ}. \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

ここで,

$$R_{MNPQ} \Gamma^N \Gamma^{PQ} = R_{MNPQ} (2\eta^{NP} \Gamma^Q + \Gamma^{NPQ}) = -2R_{MP} \Gamma^P \quad (4.1.14)$$

および

$$\begin{aligned} (dH)_{MNPQ} \Gamma^{NPQ} &= (\nabla_M H_{NPQ} - 3\nabla_N H_{MPQ}) \Gamma^{NPQ} \\ &= -12\nabla_M \hat{H} + 6\nabla_{[M} H_{N]PQ} \Gamma^{NPQ} \end{aligned} \quad (4.1.15)$$

を用いると,

$$\Gamma^N [\mathcal{D}_M, \mathcal{D}_N] = [\mathcal{D}_M, \mathcal{O}] - \frac{1}{2} \mathcal{E}_{MP} \Gamma^P - \frac{1}{4} \mathcal{J}_{MP} \Gamma^P - \frac{1}{24} (dH)_{MNPQ} \Gamma^{NPQ}, \quad (4.1.16)$$

$$\begin{aligned} [\mathcal{D}_M, \mathcal{O}] &= \Gamma^N \nabla_N \nabla_M \phi - \frac{1}{2} \nabla_M \hat{H} - \frac{1}{2} H_{MPN} \Gamma^P \nabla^N \phi \\ &\quad + \frac{1}{8} H_{SMP} H^S{}_{QR} \Gamma^{PQR}. \end{aligned} \quad (4.1.17)$$

を得る. さらに,

$$\hat{H}^2 = -|H|^2 + \frac{1}{4} H_{PQ} H_{RS} \Gamma^{PQRS} \quad (4.1.18)$$

を用いると,

$$\Gamma^M [\mathcal{D}_M, \mathcal{O}] = -\frac{1}{2} \mathcal{E}'_\phi - \frac{1}{2} d\hat{H} + 2\mathcal{O}^2 - \frac{1}{4} \mathcal{J}_{PQ} \Gamma^{PQ} \quad (4.1.19)$$

を得る.

以上より, Killing スピノール ϵ が存在し, H に対する Bianchi 恒等式 $dH = 0$ が満たされれば,

$$(2\mathcal{E}_{MN} + \mathcal{J}_{MN}) \Gamma^N \epsilon = 0, \quad (4.1.20a)$$

$$\left(\mathcal{E}'_\phi - \frac{1}{4} \mathcal{J}_{PQ} \Gamma^{PQ} \right) \epsilon = 0, \quad (4.1.20b)$$

$$(4.1.20c)$$

が成り立つ。これより

$$K^M = i\bar{\epsilon}\Gamma^M\epsilon \quad (4.1.21)$$

とおくと

$$(2\mathcal{E}_{MN} + \mathcal{I}_{MN})(2\mathcal{E}^{MN} + \mathcal{I}^{MN}) = 0, \quad (4.1.22a)$$

$$(2\mathcal{E}_{MN} + \mathcal{I}_{MN})K^N = 0 \quad (4.1.22b)$$

が成り立つ。 K^M は常に時間的ないし光的ベクトル Killing であるが、時間的ならこれらより

$$\mathcal{E}_{MN} = \mathcal{I}_{MN} = 0 \quad (4.1.23)$$

が導かれる。一方、 K^M が光的な場合には、 $L_M K^M \neq 0$ となる適当なベクトルに対して、さらに

$$(2\mathcal{E}_{MN} + \mathcal{I}_{MN})L^M L^N = 0 \quad (4.1.24)$$

が成り立てば同じ結論が得られる。さらに、整合性条件より

$$\mathcal{E}'_\phi = 0 \quad (4.1.25)$$

が導かれる。したがって、すべての場の方程式は満たされる。

Q.E.D.

4.1.2 Calabi-Yau コンパクト化

概要 RR セクターおよびゲージセクターの場がすべてゼロで、共通の NS セクターからなる 10 次元超重力理論において、時空が $X^4 \times Y^6$ にコンパクト化され、4 次元 Mink/adS/dS に対応する等長変換群で不変かつ $N = 1$ 超対称性をもつ解では、 $\phi = \text{const}, H_3 = 0$ となり、 X は Mink⁴/adS⁴, Y は 6 次元 Calabi-Yau 多様体となる。

Ansatz 10 次元時空解が 4 次元 Mink/adS/dS に対応する等長変換群で不変とすると、

$$ds^2 = \tilde{g}_{MN} dz^M dz^N = h^{1/2}(y) ds^2(X_4) + ds^2(Y_6), \quad (4.1.26a)$$

$$\phi = \phi(y), \quad (4.1.26b)$$

$$H = H_{pqr}(y) dy^p \wedge dy^q \wedge dy^r, \quad (4.1.26c)$$

$$\Gamma^a = \gamma^a \otimes 1, \quad \Gamma^p = \gamma^5 \otimes \hat{\gamma}^p. \quad (4.1.26d)$$

接続係数と曲率 $\tilde{\theta}^A$ を正規直交基底として

$$d\tilde{\theta}^a = h^{1/4} d\theta^a + \frac{1}{4} h^{-3/4} dh \wedge \theta^a = -\tilde{\omega}^a{}_b \wedge \tilde{\theta}^b - \tilde{\omega}^a{}_p \theta^p \quad (4.1.27)$$

より、

$$\tilde{\omega}^a{}_b = \omega^a{}_b(X), \quad \tilde{\omega}^a{}_p = \theta^a (dA)_p, \quad \tilde{\omega}^p{}_q = \omega^p{}_q(Y). \quad (4.1.28)$$

Ricci テンソルは

$$\tilde{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}(X) - \frac{1}{4} h^{-1/2} \Delta_Y h g_{\mu\nu}(X), \quad (4.1.29a)$$

$$\tilde{R}_{\mu m} = 0, \quad (4.1.29b)$$

$$\tilde{R}_{mn} = R_{mn}(Y) - 4h^{-1/4} D_m D_n (h^{1/4}). \quad (4.1.29c)$$

これより、

$$\tilde{\nabla}_\mu = \nabla_\mu + \frac{1}{2} \gamma_\mu \gamma_5 \otimes \hat{\gamma}^p \partial_p h^{1/4}, \quad \tilde{\nabla}_p = \nabla_p. \quad (4.1.30)$$

また、

$$*H = \mathbf{v}(X) \wedge h *_Y H. \quad (4.1.31)$$

超対称条件と SU(3) 構造 以上より, 超対称条件は

$$\mathcal{D}_\mu \epsilon = \left(\nabla_\mu + \frac{1}{2} \gamma_\mu \gamma_5 \hat{\gamma}^m \partial_m (h^{1/4}) \right) \epsilon = 0, \quad (4.1.32a)$$

$$\mathcal{D}_m \epsilon = \left(\nabla_m - \frac{1}{8} \hat{H}_m \right) \epsilon = 0, \quad (4.1.32b)$$

$$\mathcal{O} \epsilon = \gamma_5 \left(\hat{\partial} \phi - \frac{1}{12} \hat{H} \right) \epsilon = 0. \quad (4.1.32c)$$

この解は, 系が4次元時空の極大対称群で不変であることより, 次の形の解の線形和で与えられる:

$$\epsilon = \xi_+(x) \eta_\pm(y) + \xi_-(x) \eta_\mp(y), \quad \xi_- = \xi_+^c, \quad \eta_\mp = \eta_\pm^c. \quad (4.1.33)$$

特に, Y_6 上にとおいて, Y_6 上の微分形式 J, Ω を

$$J^{pq} = -2i \eta_+^\dagger \gamma^{pq} \eta_+, \quad \Omega^{pqr} = -2i \eta_-^\dagger \gamma^{pqr} \eta_+ \quad (4.1.34)$$

により定義すると, 次の代数関係式が成り立つ:

$$J_{pq} = -J_{qp}, \quad J^p{}_q J^q{}_r = -\delta_r^p, \quad (4.1.35a)$$

$$J \wedge \Omega = 0, \quad * \Omega = -i \Omega, \quad (4.1.35b)$$

$$J \wedge J \wedge J = \frac{3}{4} i \Omega \wedge \bar{\Omega} = -6 \mathbf{v}(Y_6). \quad (4.1.35c)$$

これらの最初の条件は, J が概複素構造を定義し, 計量が J に関してエルミートである (すなわち Y_6 が概エルミート多様体である) ことを意味している. これにより, Y_6 の接バンドルの構造群は $U(3)$ に簡約される ($U(3)$ 構造). また, 2番目の式は, Ω がこの概複素構造に関して, $(3, 0)$ 型となることを意味している. この Ω を用いるとさらに, 接バンドルの構造群は $SU(3)$ に簡約される ($SU(3)$ 構造).

さらに, トーションをもつ共変微分 $\hat{\nabla}$ を

$$\hat{\nabla}_m V^p = \nabla_m V^p - \frac{1}{2} H^p{}_{qm} V^q \quad (4.1.36)$$

により定義すると, 一般に, 6次元スピノール η_i に対して

$$\hat{\nabla}(\eta_1^\dagger \gamma_{[k]} \eta_2) = (\mathcal{D} \eta_1)^\dagger \gamma_{[k]} \eta_2 + \eta_1^\dagger \gamma_{[k]} \mathcal{D} \eta_2 \quad (4.1.37)$$

が成り立つので, Killing スピノール方程式より, 微分関係式

$$\hat{\nabla} J = 0, \quad \hat{\nabla} \Omega = 0 \quad (4.1.38)$$

が得られる. これは, $\hat{\nabla} g = 0$ を考慮すると, $\hat{\nabla}$ が複素構造と $SU(3)$ 構造を保つ接続であることを意味する.

また，整合性条件より

$$0 = [\hat{\nabla}_m, \hat{\nabla}_n]\epsilon = \frac{1}{4}\hat{R}_{mnpq}\hat{\gamma}^{pq}\epsilon \Rightarrow \hat{R}_{mn} = 0 \quad (4.1.39)$$

より， Y_6 は $\hat{\nabla}$ に関して Ricci 平坦となる．しかし，

$$\nabla_l J_{mn} = H_l^p {}_{[m} J_{n]p}, \quad (4.1.40a)$$

$$\nabla_l \Omega_{mnp} = \frac{3}{2} H_l^p {}_{[m} \Omega_{np]q} \quad (4.1.40b)$$

より， Y_6 は Kähler でない．実際， Y_6 が Kähler となることと $H = 0$ となることが同等であることが容易に示される．

No-Go 定理 Dilaton に対する場の方程式より，

$$\Delta_Y e^{-2\phi} = e^{-2\phi} |H|_Y^2. \quad (4.1.41)$$

Y がコンパクト閉で滑らか，かつ ϕ が有界とすると，これより

$$\int_Y \mathbf{v}(Y) e^{-2\phi} |H|_Y^2 = 0 \Rightarrow H = 0, \quad \phi = \text{const} \quad (4.1.42)$$

となる．

$H = 0$ の場合 Killing スピノール ϵ が存在すると,

$$\nabla_\mu \epsilon = -\frac{1}{2} \gamma_\mu \gamma^5 \otimes \hat{\gamma}^p \partial_p h^{1/4} \epsilon, \quad \nabla_p \epsilon = 0, \quad \hat{\gamma}_p \partial_p \phi \epsilon = 0. \quad (4.1.43)$$

- $\phi = 0$: $\delta\lambda = \mathcal{O}\epsilon = 0$ より,

$$\hat{\gamma}^m \nabla_m \phi \epsilon = 0 \Rightarrow (\nabla\phi)^2 = 0 \Rightarrow \phi = \text{const}. \quad (4.1.44)$$

- **No warp & 4D 平坦性**: $\delta\psi_\mu = 0$ の整合性より

$$\begin{aligned} [\nabla_\mu, \nabla_\nu] \epsilon &= \frac{1}{2} (\nabla h^{1/4})^2 \gamma_{\mu\nu} \epsilon \\ &= \frac{1}{4} R_{\mu\nu ab} (X) \gamma^{ab} \epsilon = \frac{1}{2} k \gamma_{\mu\nu} \epsilon. \end{aligned} \quad (4.1.45)$$

よって,

$$(\nabla_m h^{1/4})(\nabla^m h^{1/4}) = k. \quad (4.1.46)$$

また, $\delta\psi_\mu = 0$ と $\delta\psi_m = 0$ の整合性より

$$\hat{\gamma}^m \partial_n \partial_m h^{1/4} \epsilon = 0 \Rightarrow \Delta_Y h^{1/4} = 0. \quad (4.1.47)$$

よって, Y がコンパクト閉で滑らか, h が正で有界とすると,

$$h = \text{const} \Rightarrow k = 0. \quad (4.1.48)$$

となる.

- Y の **Ricci 平坦性**: $\delta\psi_m = 0$ の整合性条件

$$0 = [\nabla_m, \nabla_n] \epsilon = \frac{1}{4} R_{mnr s} (Y) \hat{\gamma}^{rs} \epsilon \quad (4.1.49)$$

より,

$$R_{mn} (Y) \hat{\gamma}^n \epsilon = 0 \Rightarrow R_p^m (Y) R_{mn} (Y) \hat{\gamma}^p \hat{\gamma}^n \epsilon = 0 \Rightarrow R_n^m (Y) R_m^n (Y) = 0, \quad (4.1.50)$$

すなわち $R_{mn} (Y) = 0$ という条件が得られる.

- Y の **Kähler 性**:

$H = 0$ とすると, (4.1.40) より,

$$\nabla_m J_{np} = 0, \quad \nabla_m \Omega_{npq} = 0 \quad (4.1.51)$$

これより, 特に, Nijenhuis テンソルは

$$N_{pq}{}^r \equiv J_p{}^s J_{[q;s]}^r - J_q{}^s J_{[p;s]}^r = 0. \quad (4.1.52)$$

よって, J は複素構造を定義し, $g_{pq} (Y)$ は J に関して Kähler 計量となる.

【Note 4.1.2 (SU(3) ホロノミー)】 3次元コンパクト複素多様体に対して,

- Kähler $\Leftrightarrow \nabla J = 0 \Leftrightarrow U(3)$ ホロノミー

- 複素接空間

$$\begin{aligned} T(M)^{\mathbb{C}} &= T'(M) + T''(M) : \\ J V' &= i V' \quad (V' \in T'(M)), \quad J V'' = -i V'' \quad (V'' \in T''(M)), \\ h(V, V) &= g(\bar{V}, V), \quad g(V, V) = g(\bar{V}, \bar{V}) = 0 \quad (V \in T'(M)) \end{aligned}$$

において, $\nabla J = 0$ より, 共変微分 ∇ による接続は複素接空間の接続を誘導し, しかもエルミート計量を保つ.

- 特殊ホロノミー多様体

- 実 $2m$ 次元 Calabi-Yau $\Leftrightarrow SU(m)$ ホロノミー

- 実 $4m$ 次元 Hyper-Kähler $\Leftrightarrow Sp(m) = USp(2m)$ ホロノミー

- $SU(m)/Sp(m)$ ホロノミー \Rightarrow Kähler, Ricci 平坦, 既約, 有限基本群

- コンパクト, Ricci 平坦, Kähler のとき: 標準線バンドルが自明 $\Leftrightarrow \text{Hol}(g) \subset SU(3)$

- Kähler 多様体の接続 ∇ は, 標準線バンドル $K(M) = \wedge^3 T'(M)$ の $U(1)$ 接続を誘導し, その曲率は ∇ の Ricci 形式 $\rho_{ij} = J_j^k R_{ij}$ と対応する. したがって, この接続が平坦なら, M が単連結な時 $K(M)$ は大域的な切断をもち, $T'(M)$ バンドルの構造群が $U(3)$ から $SU(3)$ に簡約される.

- $K(M)$ の大域的切断は, 3 形式

$$\Omega^{pqr} = -2i\eta_- \gamma^{pqr} \eta_+ \tag{4.1.53}$$

により与えられる. 実際, Ω は次の性質をもつ:

$$J_p^q \Omega_{qrs} = -i \Omega_{prs}, \tag{4.1.54a}$$

$$\Omega \wedge \bar{\Omega} = -6i\mathbf{v}(Y_6), \tag{4.1.54b}$$

$$\nabla \Omega = 0. \tag{4.1.54c}$$

□

【Note 4.1.3】

- $\phi = \text{const}$, $H = 0$, X_4 :Minkowski, Y_6 :Ricci 平坦という結論は, 最初の一般的仮定, Y_6 がコンパクト閉で滑らか, h が有界, 滑らかで正という要請と場の方程式のみから導かれ, 超対称性は必要ない.
- Y_6 が複素多様体で Kahler という性質は, 超対称性からの帰結である.

□

【Definition 4.1.4 (Calabi-Yau 多様体)】 ホロノミー群が $\text{Hol}(g) = \text{SU}(m)$ となる複素 m 次元コンパクト Kähler 多様体 (M, J, g) を (非特異) Calabi-Yau 多様体という. □

【Proposition 4.1.5 (ホロノミーによる特徴付け)】 (M, J, g) を単連結, 既約, コンパクト, Ricci 平坦な複素 m 次元 Kähler 多様体とする. このとき, $m \geq 2$ かつ $\text{Hol}(g) = \text{SU}(m)$, または m が偶数かつ $\text{Hol}(g) = \text{Sp}(m/2)$ となる. 逆に, (M, J, g) が複素 m 次元コンパクト Kähler 多様体で $\text{Hol}(g)$ が $\text{SU}(m)$ か $\text{Sp}(m/2)$ と一致すれば, g は Ricci 平坦, 既約でその基本群は有限群となる. (Joyce DD 2000[45]) □

4.1.3 4次元有効理論

References

- Grimm TW, Louis J: NPB699, 387 (2004)
”The effective action of $N = 1$ Calabi-Yau orientifolds”
- Grimm TW, Louis J: NPB718, 153 (2005)
”The effective action of type IIA Calabi-Yau orientifolds”

直積型コンパクト化に得られる超対称古典解の周りの摂動は、内部空間 Y で調和モード展開することにより、適当な超重力理論で記述される4次元時空上の場と見なすことができる。特に、ゼロモードに対する摂動は4次元では質量ゼロの場を与え、なかでもスカラー型のモードはモジュライと呼ばれる。

(1) モジュライ

10次元超重力論・超弦理論に含まれるゼロ質量ボゾン場は、次の2つに分類される。

- 1) 重力セクター： g_{MN}, B_{MN}, Φ (すべてに共通)
- 2) ゲージセクター：
 - i) I型理論：非可換ゲージ場 A_M
 - ii) II型理論： $\{C_p\}$ (RR-form 場)

Cohomology group	basis
$H^{(1,1)}$	$w_a \quad a = 1, \dots, h^{(1,1)}$
$H^{(0)} \oplus H^{(1,1)}$	$w_A = (1, w_a) \quad A = 0, \dots, h^{(1,1)}$
$H^{(2,2)}$	$\tilde{w}^a \quad a = 1, \dots, h^{(1,1)}$
$H^{(2,1)}$	$\chi_k \quad k = 1, \dots, h^{(2,1)}$
$H^{(3)}$	$(\alpha_K, \beta^K) \quad K = 0, \dots, h^{(2,1)}$

表 4.1: Basis of harmonic forms in a Calabi–Yau manifold.

重力セクター (NS セクター) これらのうち, 重力セクターはすべての理論に共通で, CY コンパクト化におけるゼロモードは次の2種類のモジュライを生み出す (Candelas, Horowitz, Strominger, Witten 1985[19]; Candelas P, de la Ossa XC 1991[17]).

- 1) 複素モジュライ + dilaton-axion : $h^{2,1} + 1$ コの chiral 場
- 2) Kähler モジュライ : $h^{1,1}$ コの chiral 場

重力セクターの摂動 g_{MN} , b_{MN} , ϕ (および ψ_M , λ) から得られるゼロモードは, 具体的には次のようになる :

- $\phi, b_{\mu\nu}, \lambda \Rightarrow$ Dilaton-axion カイラル超場
 - $b_{\mu\nu} \Rightarrow *db = da: (\phi + ai, \lambda)$
- $g_{\mu\nu}, \psi_\mu \Rightarrow$ 4次元重力超組
 - $(g_{\mu\nu}, \psi_\mu^{2+2*})$
- $g_{\mu i}, b_{\mu i}, \psi_\mu^{6+6*}, \psi_i^{2+2*} \Rightarrow$ no massless field
 - $g_{\mu i}, b_{\mu i} \in \mathcal{H}^{1,0}: h^{1,0} = 0.$
- $g_{ij}, b_{ij}, \psi_{i,j} \& \text{cc} \Rightarrow$ Complex moduli カイラル超場 z^k ($k = 1, \dots, h^{2,1}$)
 - $g_{ij} \Rightarrow g_{i\bar{k}\bar{l}} = \bar{z}^k (\bar{\chi}_k)_{i\bar{k}\bar{l}} = g_{ij} G^{j\bar{m}} \Omega_{\bar{m}\bar{k}\bar{l}} \in \mathcal{H}^{1,2}$
 - $b_{ij} \in \mathcal{H}^{2,0}: h^{2,0} = 0.$
- $g_{i\bar{j}}, b_{i\bar{j}}, \psi_{i,\bar{j}} \Rightarrow$ Kähler moduli カイラル超場 t^a ($a = 1, \dots, h^{1,1}$)
 - $g_{i\bar{j}}, b_{i\bar{j}} \in \mathcal{H}^{1,1} \Rightarrow ig_{i\bar{j}} + b_{i\bar{j}} = t^a \omega_a$

RR セクター 一方, ゲージセクターからの寄与は I 型と I I 型で異なる. まず, IIA, IIB のいずれに対しても, CY コンパクト化により得られるモジュライ場に対する 4 次元理論は, $N = 2$ 超対称性をもつゲージ結合のない超重力理論 (ungauged sugra) となる. 登場する massless の超組 (超場) は以下の通りである:

• IIA 型理論

$$C_{[1]}(x, y) = C_{[1]}^0(x), \tag{4.1.55a}$$

$$C_{[3]}(x, y) = C_{[1]}^a(x) \wedge \omega_a(y) + \xi^K(x)\alpha_K(y) - \tilde{\xi}_K(x)\beta^K(y) \tag{4.1.55b}$$

gravity multiplet	1	$(g_{\mu\nu}, C_1^0)$
vector multiplets	$h^{(1,1)}$	(C_1^a, v^a, b^a)
hypermultiplets	$h^{(2,1)}$	$(z^k, \xi^k, \tilde{\xi}_k)$
tensor multiplet	1	$(B_2, \phi, \xi^0, \tilde{\xi}_0)$

表 4.2: Type IIA moduli arranged in $\mathcal{N} = 2$ multiplets.

- 重力超組: $(g_{\mu\nu}, \psi_\mu^{(+)}, \psi_\mu^{(-)}, C_{[1]}^0)$
- ベクトル超組 (Kahler モジュライ): $(C_{[1]}^a, \psi^{a(-)}, \psi^{a(+)}, t^a = b^a + iv^a)$
($a = 1, \dots, h^{1,1}$)
- ハイパー超組 (複素モジュライ): $(\psi^{k(+)}, z^k, \psi^{k(-)}, \xi^k + i\tilde{\xi}_k)$ ($k = 1, \dots, h^{2,1}$)
- テンソル超組: $(\lambda^{(-)}, \phi + ia, \lambda^{(+)}, \xi^0 + i\tilde{\xi}_0)$ ($*db = da$)

注 $N = 2$ SUSY での massless 超組は

hypermultiplet: $(-\frac{1}{2}, 0^2, \frac{1}{2})$

vector multiplet: $(-1, -\frac{1}{2}^2, 0) + (0, \frac{1}{2}^2, 1)$

supergravity multiplet: $(-2, -\frac{3}{2}^2, -1) + (1, \frac{3}{2}^2, 2)$

• IIB 型理論

$$C_{[0]}(x, y) = C_{[0]}(x), \tag{4.1.56a}$$

$$C_{[2]}(x, y) = C_{[2]}(x) + c^a(x)\omega_a(y), \tag{4.1.56b}$$

$$dC_{[4]}(x, y) = (1 + *_Y) [dV_{[1]}^K(x) \wedge \alpha_K(y) + d\rho_a(x) \wedge \tilde{\omega}^a(y)] \tag{4.1.56c}$$

gravity multiplet	1	$(g_{\mu\nu}, V_1^0)$
vector multiplets	$h^{(2,1)}$	(V_1^k, z^k)
hypermultiplets	$h^{(1,1)}$	(v^a, b^a, c^a, ρ_a)
tensor multiplet	1	(B_2, C_2, ϕ, C_0)

表 4.3: Type IIB moduli arranged in $\mathcal{N} = 2$ multiplets.

- 重力超組 : $(g_{\mu\nu}, \psi_\mu^{(1)}, \psi_\mu^{(2)}, V_{[1]}^0)$
- ベクトル超組 (複素モジュライ) : $(V_{[1]}^k, \psi^{k(2)}, \psi^{k(1)}, z^k)$ ($k = 1, \dots, h^{2,1}$)
- ハイパー超組 (Kahler モジュライ) : $(\psi^{a(1)}, t^a = b^a + iv^a, \psi^{a(2)}, c^a + i\rho^a)$ ($a = 1, \dots, h^{1,1}$)
- テンソル超組 : $(\lambda^{(1)}, \phi + ia, \lambda^{(2)}, C_0 + ic)$ ($*dC_2 = dc, *db = da$)

(2) $\mathcal{H}^{2,1}$ セクター (複素モジュライ)

複素構造の変形 複素構造の変形は、 \dot{J} により記述され、次の条件を満たす：

$$\dot{J}J + J\dot{J} = 0, \quad N'_J(\dot{J}) = 0. \quad (4.1.57)$$

これらの条件は次のように書き換えられる：

$$\dot{J} = I + \bar{I}; \quad I = I^a_{\bar{b}} \partial_a \otimes dz^b \in \mathcal{T}^{1,0} \otimes \mathcal{A}_{0,1}, \quad (4.1.58a)$$

$$(i + J)\bar{\partial}I = 0. \quad (4.1.58b)$$

また、無限小変換 $X = (Z + \bar{Z})/2$ ($Z \in \mathcal{T}^{1,0}(M)$) に対して、

$$\mathcal{L}_X J = 2i(\bar{\partial}Z - \partial\bar{Z}) \Leftrightarrow \delta_X I = 2i\bar{\partial}Z. \quad (4.1.59)$$

以上より、正則ベクトル場の層 Θ の散布層分解

$$0 \rightarrow \Theta \rightarrow \mathcal{T}^{1,0} \rightarrow \mathcal{T}^{1,0} \otimes \mathcal{A}^{0,1} \rightarrow \mathcal{T}^{1,0} \otimes \mathcal{A}^{0,2} \rightarrow \dots \quad (4.1.60)$$

において、複素構造の変形自由度は1次の Dolbeault コホモロジー群 $H_{\bar{\partial}}^{0,1}(M, \mathcal{T}^{1,0})$ と一致する。これは Dolbeault の定理より、層係数コホモロジー群 $H^1(M, \Theta)$ と同型となる。

Calabi-Yau 多様体では、標準線バンドルの大域断面 Ω を用いると、同型対応

$$X = X^a \partial_a \in \Gamma_U(\Theta) \mapsto \omega = X^a \Omega_{abc} dz^b \wedge dz^c \in \Gamma_U(\Omega^2) \quad (4.1.61)$$

が存在するので、

$$H^1(M, \Theta) \cong H^1(M, \Omega^2) \cong H_{\bar{\partial}}^{2,1}(M) \quad (4.1.62)$$

となる。

Kähler ポテンシャル CY_6 の複素構造を \hat{J} , 対応する Kähler 形式を J , \hat{J} から決まる正則 3 形式を $\Omega(\hat{J})$, 複素モジュライのパラメーターを z^a とすると, 次の小平の公式が成り立つ:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial z^a} = k_a(z)\Omega + \chi_a \in \mathcal{H}^{3,0} \oplus \mathcal{H}^{2,1}. \quad (4.1.63)$$

ここで, χ_a は複素構造の変形と

$$\chi_{aij\bar{k}} = -\frac{1}{2}\Omega_{ij} \bar{l} \frac{\partial g_{\bar{k}l}}{\partial z^a} \quad (4.1.64)$$

の関係にある. これより, モジュライ空間の計量

$$G_{a\bar{b}} \delta z^a \delta \bar{z}^{\bar{b}} := \frac{1}{4V} \int_Y d\text{vol}(Y) g^{i\bar{j}} g^{k\bar{l}} \delta g_{ik} \delta g_{\bar{j}\bar{l}} = -\frac{i}{V \|\Omega\|^2} \delta z^a \delta \bar{z}^{\bar{b}} \int_Y \chi_a \wedge \bar{\chi}_{\bar{b}} \quad (4.1.65)$$

は

$$G_{a\bar{b}} = -\frac{\int_Y \chi_a \wedge \bar{\chi}_{\bar{b}}}{\int_Y \Omega \wedge \bar{\Omega}} = \partial_a \bar{\partial}_{\bar{b}} \mathcal{K}(z, \bar{z}) \quad (4.1.66)$$

となる. ここで,

$$\mathcal{K} = -\log \left(i \int_Y \Omega \wedge \bar{\Omega} \right) \quad (4.1.67)$$

は複素モジュライに対する Kähler ポテンシャルである.

つぎに, (A^a, B_b) ($a, b = 0, \dots, h^{2,1}$) を $H_3(Y, \mathbb{Z})$ の基底, (α_a, β^b) をその双対基底とする:

$$\int_{A^b} \alpha_a = \int_Y \alpha_a \wedge \beta^b = \delta_a^b, \quad \int_{B_a} \beta_b = \int_Y \beta^b \wedge \alpha_a = -\delta_a^b. \quad (4.1.68)$$

いま,

$$z^a := \int_{A^a} \Omega, \quad \mathcal{G}_a := \int_{B_a} \Omega \quad (4.1.69)$$

とおくと, z^a は複素構造モジュライ空間の (済次) 複素座標となり, \mathcal{G}_a は \hat{J} で決まる z^a の関数となる:

$$\Omega = z^a \alpha_a - \mathcal{G}_a(z) \beta^a. \quad (4.1.70)$$

小平の関係式より, \mathcal{G}_a は 2 次の済次正則関数を用いて

$$\mathcal{G}_a = \partial_a \mathcal{G}, \quad \mathcal{G}(\lambda z) = \lambda^2 \mathcal{G}(z) \quad (4.1.71)$$

と書けることが示される.

$$e^{-\mathcal{K}} = -i (z^a \bar{\partial}_{\bar{a}} \bar{\mathcal{G}} - \bar{z}^{\bar{a}} \partial_a \mathcal{G}) \quad (4.1.72)$$

が導かれる.

超ポテンシャル フラックスがない場合, II 型理論ではこのポテンシャルは存在しない.

(3) $\mathcal{H}^{1,1}$ セクター (Kähler モジュライ)

Kähler 変形 Einstein 計量の変形は、次の条件をみたす 2 階対称テンソル $h = \delta g$ により記述される：

$$\nabla^2 h_{mn} + 2R_{mpnq}h^{pq} = 0, \quad \nabla^m h_{mn} = 0, \quad h_m^m = 0. \quad (4.1.73)$$

一方、特に h が Kähler 計量の変形するとき、 h は

$$h = {}^T J h J \quad (4.1.74)$$

を満たし、

$$\psi_{mn} = h_{ml} J^l_n \quad (4.1.75)$$

とおくと、

$$\psi_{mn} = -\psi_{nm} \in \mathcal{A}^{1,1}(Y), \quad J^{mn}\psi_{mn} = 0 \quad (4.1.76)$$

すなわち primitive (1,1) 形式となる。これを上記の条件に代入すると

$$\Delta\psi = -[(\nabla^2 + 2\hat{R})h] \circ J + 2\frac{s}{n}\psi = 2\frac{s}{n}\psi \quad (4.1.77)$$

を得る。ここで s はスカラ曲率である。したがって、特に、Calabi-Yau 多様体に対しては、変形の自由度は、調和的 primitive (1,1) 形式の自由度となる。Hodge 理論よりこれは、 $h^{1,1} - 1$ と一致する。

Kähler ポテンシャル $\rho, \sigma, \tau \in \mathcal{H}^{1,1}$ に対して、

$$G(\rho, \sigma) := \frac{1}{2V} \int_Y \rho \wedge * \sigma, \quad (4.1.78a)$$

$$\kappa(\rho, \sigma, \tau) := \int_Y \rho \wedge \sigma \wedge \tau \quad (4.1.78b)$$

とおく。さらに、 $e_A (A = 1, \dots, h^{1,1})$ を $H^2(Y, \mathbb{Z})$ の基底として、

$$J + iB = w^A e_A; \quad w^A = v^A + i b^A \quad (4.1.79)$$

により Kähler モジュライ空間の複素座標 w^A を導入する。このとき、 Y の位相構造のみで決まる w の正則関数

$$P(w) = \frac{1}{3!} \kappa_{ABC} w^A w^B w^C : \quad \kappa_{ABC} = \kappa(e_A, e_B, e_C) \quad (4.1.80)$$

を用いて、モジュライ空間の Kähler 計量は

$$G_{A\bar{B}} = \partial_A \bar{\partial}_{\bar{B}} \mathcal{K}'(w, \bar{w}), \quad (4.1.81)$$

$$\mathcal{K}' = -\log(\kappa(J, J, J)) = -\log P\left(\frac{1}{2}(w + \bar{w})\right) \quad (4.1.82)$$

と表される。

注：

- 値としては, $\kappa(J, J, J) = 6\mathbf{v}(Y)$ である.
- $\{e_A\}$ の Poincare 双対にあたる $H_4(Y, \mathbb{Z})$ の基底を $\{C_A\}$ とおくと,

$$\kappa(e_A, e_B, e_C) = \#(C_A, C_B, C_C) : \text{intersection number} \quad (4.1.83)$$

が成り立つ.

超ポテンシャル： 一般に, 超ポテンシャル (F 項) は Kähler モジュライに依存しない. また, ゼロフラックスの II 型理論では, 超ポテンシャルはゼロとなる.

(4) ゲージセクター

I型理論では、アノマリー相殺条件

$$dH = \frac{\alpha'}{4} [\text{tr}(\mathcal{R}^2) - \text{Tr}_v(F^2)]; \quad \frac{\alpha'}{4} = \frac{\kappa_{10}^2}{g_{10}^2} \quad (4.1.84)$$

を考慮する必要がある (Tr_v は, $F \in \text{SO}(16)$ の場合のベクトル表現におけるトレース). $H = 0$ の CY コンパクト化では, 6次元内部空間が $\text{SU}(3)$ ホロノミーを持つので, $\text{SU}(3)$ ゲージ場が背景場として存在するコンパクト化を考えれば, アノマリー相殺条件が満たされる. 以下,

$$\mathcal{R} = F \in \text{SU}(3) \subset \text{SO}(6) \quad (4.1.85)$$

となる, ゲージバンドルの正規直交フレームバンドル $L(M)$ への標準埋め込みを仮定する.

$E_8 \times E_8$ の随伴表現の部分群 $\text{SU}(3) \times E_6 \times E_8$ に関する分解は, 次のような添え字で表される:

$$a : (\mathbf{1}, \mathbf{78}, \mathbf{1}) + (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{248}), \quad (4.1.86a)$$

$$ix : (\mathbf{3}, \mathbf{27}, \mathbf{1}), \quad \bar{i}\bar{x} : (\mathbf{3}^*, \mathbf{27}^*, \mathbf{1}), \quad ij : (\mathbf{8}, \mathbf{1}, \mathbf{1}) \quad (4.1.86b)$$

また, コンパクト化により

$$\text{SO}(9, 1) \supset \text{SO}(3, 1) \times \text{SO}(6) \quad (4.1.87)$$

に対応して, 10次元スピノールは

$$16 = (2, 1) + (2^*, 1) + (2, 3) + (2^*, 3^*) \quad (4.1.88)$$

と分解する. これより, ゲージセクターの摂動

$$a_{M,X} \quad (M = \mu, i, \bar{i}; \quad X = a, ix, \bar{i}\bar{x}, ij), \\ \partial_\mu \partial^\mu a = -\mathcal{D}_p \mathcal{D}^p a; \quad \mathcal{D}_p = \nabla_p - i[A_p, *]$$

のゼロモード

$$\mathcal{D}_p \mathcal{D}^p a = 0$$

は次のようになる:

- $a_{\mu,X}, \chi \Rightarrow$ ゲージ超場
 - $a_{\mu,a}$: X_4 上の $E_6 \times E_8$ ゲージ場
 - $a_{\mu,X}$ ($X \neq a$): no massless mode

- $a_{i,X}, \chi \Rightarrow$ カイラル超場
 - $a_{i,a} \in \mathcal{H}^{1,0}: h^{1,0} = 0$
 - $a_{i,jx} \Rightarrow a_{i\bar{l}m} = a_{i,jx} G^{j\bar{k}} \Omega_{\bar{k}l\bar{m}} \in \mathcal{H}^{1,2}: h^{2,1} \times \mathbf{27}(E_6)$.
 - $a_{i,\bar{j}\bar{x}} \in \mathcal{H}^{1,1}: h^{1,1} \times \mathbf{27}^*(E_6)$.
 - $a_{i,j\bar{k}} \in H^1(\text{End } T): \dim(H^1(\text{End } T)) (E_6 \text{ singlet})$.
- $a_{i,\bar{X}} \Rightarrow a_{i,X}$ の複素共役

世代数 以上の質量ゼロモードの解析より, ゲージ場と結合する質量ゼロフェルミオンの世代数 $N_g = |N_{\mathbf{27}} - N_{\mathbf{27}^*}|$ は

$$N_g = |h^{2,1} - h^{1,1}| = \frac{1}{2}\chi(Y_6) \quad (4.1.89)$$

となる.

$$\begin{array}{ccccccc} & & h^{3,3} & & & & 1 \\ & & h^{3,2} & h^{2,3} & & & 0 & 0 \\ & h^{3,1} & h^{2,2} & h^{1,3} & & & 0 & h^{1,1} & 0 \\ h^{3,0} & h^{2,1} & h^{1,2} & h^{0,3} & = & 1 & h^{2,1} & h^{2,1} & 1 \\ & h^{2,0} & h^{1,1} & h^{0,2} & & & 0 & h^{1,1} & 0 \\ & h^{1,0} & h^{0,1} & & & & 0 & 0 & \\ & & h^{0,0} & & & & & & 1 \end{array}$$

超ポテンシャル

1) 複素構造モジュライ:

ゲージ超組のゼロモード $a_{i,\bar{j}\bar{x}}(x, y), \lambda_{i,\bar{j}\bar{x}}(x, y)$ を $\mathcal{H}^{2,1}(Y)$ の基底 $\chi_a(y)$ で

$$a_{i,\bar{j}\bar{x}}(x, y) = \frac{1}{2}\sigma_{\bar{x}}^a(x)\chi_{a\bar{k}l\bar{i}}(y)\bar{\Omega}_{\bar{j}}^{kl}(y), \quad (4.1.90a)$$

$$\lambda_{i,\bar{j}\bar{x}}(x, y) = \frac{1}{2}\lambda_{\bar{x}}^a(x)\chi_{a\bar{k}l\bar{i}}(y)\bar{\Omega}_{\bar{j}}^{kl}(y), \quad (4.1.90b)$$

$$(4.1.90c)$$

と展開し, 10次元理論の湯川結合項

$$\int d^6y \text{Tr}_v (\bar{\lambda}\Gamma^m[A_m, \lambda]) \quad (4.1.91)$$

に代入すると,

$$d^{\bar{x}\bar{y}\bar{z}}\bar{\lambda}_{\bar{x}}^a\lambda_{\bar{y}}^b\sigma_{\bar{z}}^c\kappa_{abc}, \quad (4.1.92)$$

$$\kappa_{abc} = - \int_Y \Omega \wedge \chi_a^i \wedge \chi_b^j \wedge \chi_c^k \Omega_{ijk} \quad (4.1.93)$$

を得る (Strominger A, Witten E 1985[60]). ここで,

$$\chi_a^i = \frac{1}{2\|\Omega\|^2} \bar{\Omega}^{ijk} \chi_{ajk\bar{l}} dx^{\bar{l}} = \chi_{a\bar{j}}^i dx^{\bar{j}}. \quad (4.1.94)$$

この湯川結合係数は, うえの前ポテンシャル \mathcal{G} を用いて

$$\kappa_{abc} = -\partial_a \partial_b \partial_c \mathcal{G} \quad (4.1.95)$$

と表される. したがって, $\mathcal{H}^{2,1}$ セクターの超ポテンシャルは

$$W(z, \sigma) = \frac{\sigma^a \sigma^b \sigma^c}{3!} \partial_a \partial_b \partial_c \mathcal{G}(z) \quad (4.1.96)$$

2) ケーラーモジュライ :

ゲージ超組のゼロモード $a_{i,\bar{j}\bar{x}}(x, y)$, $\lambda_{i,\bar{j}\bar{x}}(x, y)$ を $\mathcal{H}^{1,1}(Y)$ の基底 $e_{Ai\bar{j}}(y)$ で

$$a_{i,\bar{j}\bar{x}}(x, y) = \phi_{\bar{x}}^A(x) e_{Ai\bar{j}}(y), \quad (4.1.97a)$$

$$\lambda_{i,\bar{j}\bar{x}}(x, y) = \lambda_{\bar{x}}^A(x) e_{Ai\bar{j}}(y), \quad (4.1.97b)$$

と展開し, 10次元理論の湯川結合項

$$\int d^6 y \operatorname{Tr}_v (\bar{\lambda} \Gamma^m [A_m, \lambda]) \quad (4.1.98)$$

に代入すると,

$$d^{\bar{x}\bar{y}\bar{z}} \bar{\lambda}_{\bar{x}}^A \lambda_{\bar{y}}^B \sigma_{\bar{z}}^C \kappa_{ABC} \quad (4.1.99)$$

を得る. したがって, ゲージセクターでの超ポテンシャル $W(\phi)$ は,

$$W(\phi) = d^{\bar{x}\bar{y}\bar{z}} \phi_{\bar{x}}^A \phi_{\bar{y}}^B \phi_{\bar{z}}^C \kappa_{ABC} \quad (4.1.100)$$

で与えられる. このポテンシャルはゲージ群と Y の位相のみにより決まり, 複素構造や Kähler モジュライに依存しない.

非繰り込み定理: 超ポテンシャルは, 摂動論の範囲では, σ -モデル量子補正を受けない (Witten E 1986 [62]).

 §4.2

 フラックスコンパクト化

4.2.1 IIB 理論での解

基本場

$$g_{\mu\nu}, \quad \tau = C_0 + ie^{-\phi}, \quad H_3, \quad (4.2.1)$$

$$F_1 = dC_0, \quad F_3 = dC_2 - C_0 H_3, \quad F_5 = *F_5 = dC_4 - H_3 \wedge C_2, \quad (4.2.2)$$

$$\Gamma^{11}\lambda = -\lambda, \quad \Gamma^{11}\psi_M = \psi_M \quad (4.2.3)$$

以下、

$$G_3 := \tau H_3 - dC_2 = ie^{-\phi} H_3 - F_3 \quad (4.2.4)$$

とおく。

超対称変換

$$\delta\lambda = \left[\not{\partial}\phi - \frac{1}{2}\sigma_3 \left(\not{H} - ie^\phi \not{F}_{[3]}\sigma_2 \right) - e^\phi \not{F}_{[1]}i\sigma_2 \right] \epsilon, \quad (4.2.5a)$$

$$\begin{aligned} \delta\psi_M &= \nabla_M \epsilon - \frac{1}{4} \not{H}_M \sigma_3 \epsilon + \frac{e^\phi}{8} \not{F}_{[3]} \Gamma_M \sigma_1 \epsilon \\ &\quad + e^\phi \left(\frac{1}{8} \not{F}_{[1]} + \frac{1}{16} \not{F}_{[5]} \right) \Gamma_M i\sigma_2 \epsilon. \end{aligned} \quad (4.2.5b)$$

ここで、

$$\nabla_M = \partial_M + \frac{1}{4} \omega_{ABM} \Gamma^{AB}, \quad \not{F}_{[n]} = \frac{1}{n} F_{M_1 \dots M_n} \Gamma^{M_1 \dots M_n}. \quad (4.2.6)$$

【Theorem 4.2.1 (IIB 理論の超対称 CCY フラックスコンパクト化解)】 G を 4次元極大対称時空 X_4 , すなわち $E^{3,1}$, dS^4 , adS^4 のいずれかの等長変換群とする. このとき, G で不変な IIB 理論のコンパクト化 $M = X_4 \times Y_6$ に対応する配位は, 次のように表される:

- 計量とディラトン

$$ds^2 = A(y)^2 ds_2(X_4) + B(y)^2 ds_2(Y_6), \quad (4.2.7)$$

$$\phi = \phi(y). \quad (4.2.8)$$

- フラックス

$$C_0 = C_0(y), \quad G_{[3]} = \frac{1}{3!} G_{lmn}(y) dy^l \wedge dy^m \wedge dy^n, \quad (4.2.9a)$$

$$\tilde{F}_{[5]} = \left(\frac{A}{B}\right)^4 (1 + *)V_m(y) dy^m \wedge \mathbf{v}(X_4) \quad (4.2.9b)$$

この条件に加えて, $G_{[3]}$ フラックスに対する ISD 条件

$$*_Y G_{[3]} = iG_{[3]} \Leftrightarrow *_Y H = -e^\phi F_3, \quad *_Y F_3 = e^{-\phi} H \quad (4.2.10)$$

を満たす超対称解が存在するための必要十分条件は,

- X_4 が Minkowski 時空, Y_6 が Calabi-Yau 多様体
- $\phi = C_0 = \text{const}$
- Y_6 の $SU(3)$ 構造に関して,

$$H^{(1)} \equiv -\frac{i}{36} H^{ijk} \Omega_{ijk} = 0, \quad H_i^{(3)} \equiv \frac{1}{4} H_{imn} J^{mn} = 0. \quad (4.2.11)$$

このとき,

$$A(y) = h(y)^{-1/4}, \quad B(y) = h(y)^{1/4}, \quad V_m(y) = -\partial_m h(y), \quad (4.2.12)$$

$$\Delta_Y h = -\frac{g_s}{2} (G_3 \cdot \bar{G}_3)_Y. \quad (4.2.13)$$

解を不変にする独立な超対称変換の数は, $H \neq 0$ のとき 4 個 ($N = 1$), $H = F = 0$ のとき 8 個 ($N = 2$) となる. □

Proof. まず,

$$\hat{H} = B^{-3} \hat{H}, \quad \hat{F}_3 = -i\hat{\gamma}_7 e^{-\phi} B^{-3} \hat{H}. \quad (4.2.14)$$

より,

$$\delta\lambda = B^{-1} \hat{\gamma}^m (\partial_m \phi - e^\phi \partial_m C_0 i \sigma_2 \hat{\gamma}_7) \epsilon - \frac{1}{2B^3} \hat{\gamma}_7 \hat{H} \sigma_3 (1 - \hat{\gamma}_7 \sigma_2) \epsilon. \quad (4.2.15)$$

ここで,

$$\hat{Q}_k = \frac{1}{k!} \hat{\gamma}^{m_1 \dots m_k} Q_{m_1 \dots m_k}. \quad (4.2.16)$$

次に, $A = A(y), B = B(y)$ として,

$$\tilde{\omega}_{ab} = \omega_{ab}(X) + 2A^{-1} D_{[b} A \theta_{a]}, \quad (4.2.17a)$$

$$\tilde{\omega}^a{}_p = B^{-1} \hat{D}_p A \theta^a - A^{-1} D^a B \theta_p, \quad (4.2.17b)$$

$$\tilde{\omega}_{pq} = \omega^p{}_q(Y) + 2B^{-1} D_{[q} B \theta_{p]} \quad (4.2.17c)$$

および

$$\hat{F}_5 = \frac{i}{B^5} V_m \hat{\gamma}^m (1 - \Gamma_{11}) \quad (4.2.18)$$

より

$$\begin{aligned} \delta\psi_\mu &= \nabla_\mu^X \epsilon + \frac{1}{2B} \hat{\gamma}^m \gamma_\mu \left(\partial_m A \gamma_5 + \frac{e^\phi A}{4} \partial_\mu C_0 i \sigma_2 - e^\phi \frac{A}{4B^4} V_m \sigma_2 \right) \epsilon \\ &\quad + \frac{A}{8B^3} \gamma_5 \gamma_\mu \hat{F}_3 \sigma_1 \epsilon, \end{aligned} \quad (4.2.19a)$$

$$\begin{aligned} \delta\psi_m &= B^{-1/2} \nabla_m^Y (B^{1/2} \epsilon) + \frac{e^\phi}{8} \hat{\phi} C_0 \hat{\gamma}_m i \sigma_2 \epsilon - \frac{1}{2B} \left(\partial_n B + \frac{e^\phi}{4B^3} V_m \sigma_2 \hat{\gamma}_7 \right) \hat{\gamma}^n \hat{\gamma}_m \epsilon \\ &\quad + \frac{1}{8B^2} \sigma^3 \left[\hat{H} \hat{\gamma}_m (\sigma_2 \hat{\gamma}_7 - 1) - 2\hat{H}_m + \hat{H} \hat{\gamma}_m \right] \epsilon. \end{aligned} \quad (4.2.19b)$$

ここで,

$$\hat{H} \hat{\gamma}_m + \hat{\gamma}_m \hat{H} = 2\hat{H}_m \Rightarrow -2\hat{H}_m + \hat{H} \hat{\gamma}_m = -\hat{\gamma}_m \hat{H}. \quad (4.2.20)$$

より,

$$A = h^{-1/4}(y), \quad B = h^{1/4}(y), \quad V_m = -\partial_m h(y), \quad (4.2.21a)$$

$$C_0 = \phi = 0 \quad (4.2.21b)$$

と取れば(この仮定は, 場の方程式を考慮すると定理の仮定より導かれる),

Killing スピノール方程式は

$$\delta\lambda = -\frac{1}{2h^{3/4}}\hat{\gamma}_7\sigma_3(1 + \hat{\gamma}_7\sigma_2)\hat{\mathbb{H}}\epsilon = 0, \quad (4.2.22a)$$

$$\delta\psi_\mu = \nabla_\mu^X\epsilon + \frac{1}{8h}\gamma_5\gamma_\mu\hat{\mathbb{F}}_3\sigma_1\epsilon = 0, \quad (4.2.22b)$$

$$\delta\psi_m = h^{-1/8}\nabla_m^Y(h^{1/8}\epsilon) + \frac{1}{8\sqrt{h}}\left[\hat{\mathbb{H}}\hat{\gamma}_m(\sigma_2\hat{\gamma}_7 - 1) - \hat{\gamma}_m\hat{\mathbb{H}}\right]\epsilon = 0 \quad (4.2.22c)$$

ここで、一般に、解に対する対称性の要請より、Killing スピノールは

$$\epsilon = \mathcal{T}(\epsilon_1, \epsilon_2) \quad \epsilon_i = \zeta_+^{(i)}(x) \otimes \eta_+^{(i)}(y) + \zeta_-^{(i)}(x) \otimes \eta_-^{(i)}(y) \quad (4.2.23)$$

の形をしていると仮定して良い。ここで、 $\zeta_-^{(i)} = (\zeta_+^{(i)})^c$, $\eta_-^{(i)} = (\eta_+^{(i)})^c$ 。これを第2式に代入すると、

$$\nabla_\mu^X\zeta_+^{(1)} \otimes \eta_+^{(1)}(y) + \frac{1}{8h}\gamma_\mu\zeta_-^{(2)}(x) \otimes \hat{\mathbb{F}}_3\eta_-^{(2)} = 0 \quad (4.2.24)$$

および、この式で (1) \leftrightarrow (2) と入れ替えた式が得られる。これらの式が恒等的に成り立つための必要十分条件は、

$$\nabla_\mu^X\zeta_+^{(1)} = p\gamma_\mu\zeta_-^{(2)}, \quad \nabla_\mu^X\zeta_+^{(2)} = q\gamma_\mu\zeta_-^{(1)}, \quad (4.2.25a)$$

$$p\eta_+^{(1)} + \frac{1}{8h}\hat{\mathbb{F}}_3\eta_-^{(2)} = 0, \quad q\eta_+^{(2)} + \frac{1}{8h}\hat{\mathbb{F}}_3\eta_-^{(1)} = 0 \quad (4.2.25b)$$

となる。特に、最初の式の整合性条件より、

$$[\nabla_\mu^X, \nabla_\nu^X]\zeta_+^{(1)} = -2pq^*\gamma_{\mu\nu}\zeta_+^{(1)} = \frac{1}{4}R_{\mu\nu ab}\gamma^{ab}\zeta_+^{(1)} \quad (4.2.26)$$

および、この式で (1) \leftrightarrow (2)、 $p \leftrightarrow q$ と入れ替えた式が得られる。

$p = 0, q \neq 0$ とすると、 $\hat{H}\eta^{(2)} = 0, \hat{H}\eta^{(1)} \neq 0$ となるが、これは $\delta\lambda = 0$ の式と整合的でない。同様に、 $p \neq 0, q = 0$ も許されない。したがって、 (p, q) の値として、次の2つのケースが考えられる。

- 1) $pq^* \neq 0$: このとき、 $\hat{H}\eta_{\pm}^{(i)} \neq 0$ となるので、 $\delta\lambda = 0$ より、 $\zeta_+^{(2)} \propto \zeta_+^{(1)}$ が得られる。このとき、 $\eta^{(i)}$ の rescaling により、 $\zeta^{(1)} = \zeta^{(2)} = \zeta, q = p$ とおくことができる。すると、 $\delta\lambda = 0$ は

$$\hat{H}(1 - \hat{\gamma}_7\sigma_2)\epsilon = 0 \Leftrightarrow \hat{H}(\eta_+^{(1)} + i\eta_+^{(2)}) = 0 \quad (4.2.27)$$

と同値。このとき、(4.2.25b) より

$$p(\eta_+^{(1)} + i\eta_+^{(2)}) = -\frac{1}{8h}\hat{F}_3(i\eta_-^{(1)} + \eta_-^{(2)}) \propto \hat{H}(\eta_+^{(1)} + i\eta_+^{(2)})^c = 0. \quad (4.2.28)$$

よって、 $\eta^{(1)} = -i\eta^{(2)} = \eta$ とおくことができる。このとき、(4.2.25b) および $\delta\psi_m = 0$ は、 $\tilde{\eta} = h^{1/4}\eta$ として、

$$p\eta_+ = \frac{i}{8h}\hat{F}_3\eta_- = \frac{1}{8h}e^{-\phi}\hat{H}\eta_-, \quad (4.2.29a)$$

$$\nabla_m^Y\tilde{\eta}_+ = p\frac{e^\phi}{8\sqrt{h}}\hat{\gamma}_m\tilde{\eta}_- \equiv f\hat{\gamma}_m\tilde{\eta}_-. \quad (4.2.29b)$$

p は常に正の実数に変換できる。この第2式の整合性より、

$$[\nabla_m^Y, \nabla_n^Y]\tilde{\eta}_+ = 2f^2\hat{\gamma}_{mn}\tilde{\eta}_+ + 2\nabla_{[m}^Y f\hat{\gamma}_{n]}\tilde{\eta}_- = \frac{1}{4}\hat{R}_{mnpq}\hat{\gamma}^{pq}\tilde{\eta}_+ \quad (4.2.30)$$

が要求されるが、これが成り立つのは、 $\nabla_m f = 0$ 、すなわち h が定数のときのみ。これは $A = B = \text{const}$ および $H = F_3 = 0$ を要求するので、フラックスの存在する場合の解とはならない。

2) $p = q = 0$: このとき、 $\delta\psi_\mu = 0$ は

$$\nabla_\mu^X \zeta^{(i)} = 0, \quad \hat{H}\eta^{(i)} = 0 \quad (4.2.31)$$

で、 $\delta\lambda = 0$ は自動的に成り立つ。さらに $\hat{H}\hat{\gamma}_m\eta^{(i)} = 0$ が成り立つと $H = 0$ となるので、 $H \neq 0$ のとき、残る方程式 $\delta\psi_m = 0$ は、

$$\zeta^{(1)} = \zeta^{(2)} = \zeta, \quad (4.2.32a)$$

$$\nabla_m^Y(\eta_+^{(1)} + i\eta_+^{(2)}) = \frac{1}{4\sqrt{h}}\hat{H}\hat{\gamma}_m(\eta_+^{(1)} + i\eta_+^{(2)}), \quad (4.2.32b)$$

$$\nabla_m^Y(\eta_+^{(1)} - i\eta_+^{(2)}) = 0 \quad (4.2.32c)$$

と同値。いま、 $\eta^{(1)} - i\eta^{(2)} = 2\eta$ とおくと、 η は Y に積分可能な $SU(3)$ 構造 $(\hat{g}_{mn}(y), J, \Omega)$ を与え、 Y_6 は Calabi-Yau となる。特に、第3の方程式の整合性より、

$$\hat{H}\eta = 0, \quad R_{mnpq}\hat{\gamma}^{pq}\eta_+ = 0 \Rightarrow R_{mn} = 0, \quad \text{Im}(H^{(1)}) = H^{(3)} = 0. \quad (4.2.33)$$

また、 $\eta^{(1)} + i\eta^{(2)} = 2\eta'$ とおくと、

$$\hat{H}\eta' = 0 \Rightarrow \eta'_+ = s\eta_+ + t_i\hat{\gamma}^i\eta_-, \quad H_{ij}^{(6)}q^j = 0. \quad (4.2.34)$$

さらに、 $\nabla_m^Y\eta'$ に対する式より、 $\nabla_m s = 0$ かつ

$$\nabla_j t_i = \frac{is}{16\sqrt{h}}H_{ji}^{(6)}, \quad \nabla_{\bar{j}} t_i = -\frac{1}{64\sqrt{h}}t^{\bar{k}}\bar{\Omega}_{\bar{j}\bar{k}}{}^l H_{li}^{(6)}. \quad (4.2.35)$$

一般には、これらの方程式は解を持たない。このとき、 $\eta' = 0$ 。すなわち、 $(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}) = (1, i)\eta$ が解になる。 η は定数倍を除いて一意なので、Killing スピノールのは数は4個、すなわち $N = 1$ SUSY。

なお、 $H = F = 0$ なら一般には条件が $\nabla_m\eta^{(i)} = 0$ のみとなるので、Killing スピノールのは数は $4 \times 2 = 8$ 個、すなわち $N = 2$ SUSY.. Q.E.D.

4.2.2 ワープ

仮定

計量

$$ds^2(M) = A(x, y)^2 ds^2(X_4) + B(x, y)^2 ds^2(Y_6), \quad (4.2.36)$$

場

$$\tau \equiv C_0 + i e^{-\Phi} = i g_s^{-1} (= \text{const}), \quad (4.2.37a)$$

$$G_3 \equiv i g_s^{-1} H_3 - F_3 = \frac{1}{3!} G_{pqr}(y) dy^p \wedge dy^q \wedge dy^r, \quad (4.2.37b)$$

$$*_Y G_3 = \epsilon i G_3 \quad (\epsilon = \pm 1), \quad (4.2.37c)$$

$$\tilde{F}_5 = (1 \pm *) V_p dy^p \wedge \mathbf{v}(X_4) = V \wedge \mathbf{v}(X_4) \mp A^{-4} B^4 *_Y V \quad (4.2.37d)$$

場の方程式 自明でない方程式は

$$dG_3 = 0, \quad (4.2.38a)$$

$$\nabla \cdot G_3 = *d * G_3 = -i G_3 \cdot \tilde{F}_5, \quad (4.2.38b)$$

$$d\tilde{F}_5 = H_3 \wedge F_3, \quad (4.2.38c)$$

$$R_{MN} = \frac{g_s}{4} \left[\text{Re} (G_{MPQ} G_N^{*PQ}) - \frac{1}{2} G_3 \cdot G_3^* g_{MN} \right] + \frac{1}{96} \tilde{F}_{NP_1 \dots P_4} \tilde{F}_M{}^{P_1 \dots P_4} \quad (4.2.38d)$$

一般解 G_3 は Y_6 上の閉 ISD 3 形式なので, y にのみ依存し, (4.2.38b) は

$$(V \mp \epsilon d_y(A^4)) \cdot G_3 = 0 \quad (4.2.39)$$

を与える. ここで, $d_y = dy^p \partial_p$. これより, $G_3 \neq 0$ なら

$$V = \pm \epsilon d_y(A^4), \quad (4.2.40)$$

したがって, (4.2.38c) は次の2式と同値となる.

$$\partial_\mu (A^{-4} B^4 \partial_p(A^4)) = 0, \quad (4.2.41a)$$

$$(\hat{D} \cdot (A^{-4} B^4 \hat{D}(A^4)))_Y = -\frac{g_s}{2} (G_3 \cdot \bar{G}_3)_Y, \quad (4.2.41b)$$

次に, これらの第1式と Einstein 方程式の \tilde{R}_{ap} 成分

$$0 = AB \tilde{R}_{ap} = 3 \left[-\frac{D_a \hat{D}_p A}{A} + \frac{\hat{D}_p A D_a(AB)}{A^2 B} \right] + 5 \left[-\frac{\hat{D}_p D_a B}{B} + \frac{D_a B \hat{D}_p(AB)}{AB^2} \right] \quad (4.2.42)$$

より, $D_a \hat{D}_p \ln(AB) = 0$ が得られるので, $g(X_4) \rightarrow a(x)g(X_4)$, $g(Y_6) \rightarrow b(y)g(Y_6)$ により

$$A = h(x, y)^{-1/4}, \quad B = h(x, y)^{1/4} \quad (4.2.43)$$

と置くことができる。対応して、 \tilde{F}_5 と (4.2.41b) は

$$\tilde{F}_5 = \pm\epsilon(1 \pm *)d(h^{-1}) \wedge \mathbf{v}(X_4), \quad (4.2.44)$$

$$\Delta_Y h = -\frac{g_s}{2}(G_3 \cdot \bar{G}_3)_Y. \quad (4.2.45)$$

よって、Einstein 方程式は

$$hR_{\mu\nu}(X_4) - D_\mu D_\nu h + \frac{1}{4}g_{\mu\nu}(X_4)\Delta_X h = 0, \quad (4.2.46a)$$

$$\partial_\mu \partial_p h = 0, \quad (4.2.46b)$$

$$R_{pq}(Y_6) - \frac{1}{4}g_{pq}(Y_6)\Delta_X h = 0. \quad (4.2.46c)$$

この第2式より直ちに、

$$h(x, y) = h_0(x) + h_1(y). \quad (4.2.47)$$

さらに、 $h_1 \neq 0$ とすると、残りの方程式は

$$R_{\mu\nu}(X_4) = 0, \quad (4.2.48a)$$

$$D_\mu D_\nu h_0 = \lambda g_{\mu\nu}(X_4), \quad (4.2.48b)$$

$$R_{pq}(Y_6) = \lambda g_{pq}(Y_6). \quad (4.2.48c)$$

ここで、 $(Dh_0)^2 \neq 0$ なら X_4 が局所平坦となることが示される。

以上より、任意の Ricci 平坦な4次元空間 X_4 、任意のコンパクト Einstein 空間 Y_6 とその上の実調和3形式が与えられると、(一般に超対称な) IIB 型超重力理論の CY フラックスコンパクト化解が得られる。ただし、この解は $G_3 \neq 0$ なら必ずワープしており、しかもワープ因子 h は必ず特異点をもつ。また、 X_4 が平坦な場合には、この任意の解 $h = h_1(y)$ に対し、 $h = h_1(y) + a_\mu x^\mu$ 型の解が存在する [Kodama H, Uzawa K 2006[52]].

References

- Kodama H, Uzawa K : jhep 0507, 061 (2005)
” Moduli Instability in Warped Compactifications of the Type IIB Supergravity”
- Kodama H, Uzawa K: jhep 0603m 053 (2006)
”Comments on the four-dimensional effective theory for warped compactification”

4.2.3 Conifold 型解

Refereces

- Candelas P, de la Ossa XC: NPB342, 246-268 (1990)
” Comments on conifolds”

(1) $adS^5 \times S^5$

【Example 4.2.2 ($adS^5 \times S^5$)**】**

$$\begin{aligned}
 ds^2(M) &= ds^2(adS^5) + L^2 ds^2(S^5) \\
 &= h^{-1/2} ds^2(E^{3,1}) + h^{1/2} (dr^2 + r^2 ds^2(S^5)), \quad (4.2.49a)
 \end{aligned}$$

$$h = \frac{L^4}{r^4}, \quad (4.2.49b)$$

$$F_5 = \frac{4}{L^4} (1 + *) r^3 dr \wedge \mathbf{v}(E^{3,1}), \quad (4.2.49c)$$

$$H_3 = F_3 = 0, \quad \phi = C_0 = 0. \quad (4.2.49d)$$

超対称性: 16kis □

【Exercise 4.2.3 ($E^{1,3} \times E^6$ へのワープしたコンパクト化と見なしたときの、超対称性カウント)**】** $adS^5 \times S^5$ が 16 個の Killing スピノールを持つことを示せ.

□

Answer. Killing 方程式は、

$$\delta\lambda = 0, \quad (4.2.50a)$$

$$\delta\psi_M = \nabla_M \epsilon + \frac{1}{6} F_5 \Gamma_M i\sigma_2 \epsilon = 0. \quad (4.2.50b)$$

ここで、 $h = e^{-4A}$ とおき、10次元のガンマ行列を、 $E^{3,1}$ のガンマ行列 γ^μ と E^6 のガンマ行列 $\hat{\gamma}^m$ を用いて、

$$\Gamma^\mu = e^{-A} \gamma^\mu \otimes 1 \quad (\mu = 0, \dots, 3), \quad \Gamma^m = e^A \gamma_5 \otimes \hat{\gamma}^m \quad (4.2.51)$$

と表すと、

$$F_5 = - * F_5 \Gamma_* = 4ie^A \hat{\partial} A (1 - \Gamma_*) \quad (4.2.52)$$

よって、

$$\delta\psi_\mu = \partial_\mu \epsilon + \frac{1}{2} e^{2A} \gamma_\mu \hat{\partial} A (\gamma_5 - \sigma_2) \epsilon, \quad (4.2.53a)$$

$$\delta\psi_m = e^{A/2} \partial_m (e^{-A/2} \epsilon) + \frac{1}{2} \hat{\partial} A \hat{\gamma}_m (1 - \gamma_5 \sigma_2) \epsilon \quad (4.2.53b)$$

Killing スピノールは、 $\Gamma_*\epsilon = \epsilon$ より、 $E^{3,1}$ のスピノール $\zeta_{\pm}^{(i)}(x)$ および E^6 のスピノール $\eta_{\pm}^{(i)}(y)$ を用いて

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \zeta_+^{(1)}(x) \otimes \eta_+^{(1)}(y) + \text{cc} \\ \zeta_+^{(2)}(x) \otimes \eta_+^{(2)}(y) + \text{cc} \end{pmatrix} \quad (4.2.54)$$

と表される。このとき、

$$(\delta\psi_{\mu})^{(1)} = \partial_{\mu}\zeta_+^{(1)} \otimes \eta_+^{(1)} + \frac{1}{2}e^{2A}(-\gamma_{\mu}\zeta_-^{(1)} \otimes \hat{\rho}A\eta_-^{(1)} + i\gamma_{\mu}\zeta_-^{(2)} \otimes \hat{\rho}A\eta_-^{(2)}) + \text{cc} \quad (4.2.55)$$

より、 p, q を定数として、

$$\partial_{\mu}\zeta_+^{(1)} = p\gamma_{\mu}\zeta_-^{(1)} + q\gamma_{\mu}\zeta_-^{(2)} \quad (4.2.56)$$

これを $\delta\psi_{\mu}^{(1)}$ に代入すると、

$$\gamma_{\mu}\zeta_-^{(1)} \otimes \left(p\eta_+^{(1)} - \frac{1}{2}e^{2A}\hat{\rho}A\eta_-^{(1)} \right) + \gamma_{\mu}\zeta_-^{(2)} \otimes \left(q\eta_+^{(1)} - \frac{i}{2}e^{2A}\hat{\rho}A\eta_-^{(2)} \right) = 0 \quad (4.2.57)$$

よって、 $\zeta_-^{(2)} \propto \zeta_-^{(1)}$ 。これより、 $\eta_{\pm}^{(i)}$ のスケール変換により、 $\zeta_+^{(1)} = \zeta_+^{(2)} = \zeta_+$ 、 $p+q \Rightarrow p$ とおいて良い。すると、

$$p\eta_+^{(1)} = \frac{1}{2}e^{2A}\hat{\rho}A(\eta_-^{(1)} + i\eta_-^{(2)}). \quad (4.2.58)$$

$$\partial_{\mu}\zeta_+ = p\gamma_{\mu}\zeta_-, \quad \partial_{\mu}\zeta_- = \bar{p}\gamma_{\mu}\zeta_+. \quad (4.2.59)$$

この2番目の式より、

$$0 = [\partial_{\mu}, \partial_{\nu}]\zeta_+ = -2|p|^2\gamma_{\mu\nu}\zeta_- \Rightarrow p = 0. \quad (4.2.60)$$

よって、

$$\delta\psi_{\mu} = 0 \Leftrightarrow \partial_{\mu}\epsilon = 0, \quad (\gamma_5\sigma_2 - 1)\epsilon = 0, \quad (4.2.61a)$$

$$\delta\psi_m = 0 \Leftrightarrow \partial_m(e^{-A/2}\epsilon) = 0. \quad (4.2.61b)$$

ここで、

$$(\gamma_5\sigma_2 - 1)\epsilon = 0 \Leftrightarrow \eta_+^{(2)} = i\eta_+^{(1)}. \quad (4.2.62)$$

よって、Killing 方程式の一般解は、

$$\epsilon = \zeta_+^0 \otimes \eta_+^0 e^{A/2} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + \text{cc}. \quad (4.2.63)$$

ここで、 ζ_+^0 と η_+^0 は、それぞれ、 $E^{3,1}$ および E^6 の定数左巻きスピノール。よって、独立な Killing スピノールの数は 16 個。 Q.E.D.

(2) Conifold 解

【Example 4.2.4 (Conifold)】 (Candelas P, de la Ossa XC 1990[18]) 代数多様体

$$\sum_{A=1}^4 w_A^2 = 0 \tag{4.2.64}$$

は $S^2 \times S^3$ 上のコーンの構造をもつ。これに Kahler 計量を入れた 6 次元空間である、Einstein 空間 $T^{11}(\cong S^2 \times S^3)$ 上のコーン空間へのコンパクト化。

$$ds^2(M) = h^{-1/2} ds^2(E^{3,1}) + h^{1/2} (dr^2 + r^2 ds^2(\mathbb{T}^{11})), \tag{4.2.65a}$$

$$ds^2(\mathbb{T}^{11}) = \frac{1}{9} \left(d\psi + \sum_{i=1}^2 \cos \theta_i d\phi_i \right)^2 + \frac{1}{6} \sum_{i=1}^2 (d\theta_i^2 + \sin^2 \theta_i d\phi_i^2) \tag{4.2.65b}$$

$$h = \frac{9g_s M^2}{8r^4} \left[\ln \left(\frac{r}{r_0} \right) + \frac{1}{4} \right] + \frac{C}{r^4}, \tag{4.2.65c}$$

$$F_5 = (1 + *)d(h^{-1}) \wedge \mathbf{v}(E^{3,1}), \tag{4.2.65d}$$

$$H_3 = -g_s *_Y F_3 = \frac{3g_s M}{2r} dr \wedge [\mathbf{v}(S_1^2) - \mathbf{v}(S_2^2)], \tag{4.2.65e}$$

$$\phi = C_0 = 0. \tag{4.2.65f}$$

超対称性は $N = 1$. _____ □

【Exercise 4.2.5 (Conifold の $SU(3)$ 構造)】 Conifold に対する (J, Ω) を具体的に決定し、 $H^{(1)} = H^{(3)} = 0$ となることを示せ。 _____ □

Answer. 1) 位相構造:

$$Y : w \cdot w \equiv w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_4^2 = 0 \tag{4.2.66}$$

において、

$$w^A = x^A + iy^A \tag{4.2.67}$$

とおくと、

$$\Sigma(\rho) := Y \cap S^7 = \{w \in \mathbb{C}^4 \mid w \cdot \bar{w} = \rho^2\} \tag{4.2.68}$$

は

$$\Sigma(\rho) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \mid x \cdot x = y \cdot y = \rho^2/2, \quad x \cdot y = 0\} \tag{4.2.69}$$

よって、 $\Sigma(\rho)$ は S^3 の単位接ベクトルバンドルと同型。 S^3 は平行化可能なので、

$$\Sigma(\rho) \cong UT(S^3) \cong S^3 \times S^2. \tag{4.2.70}$$

対応して、 Y_6 は $S^3 \times S^2$ 上の錐体。

- 2) **Ricci 曲率**: 計量 g_{mn} が、適当な r の関数 $r(\rho)$ と $\Sigma = \Sigma(1)$ の計量 $g(\Sigma)$ を用いて

$$g(Y) = dr^2 + r^2g(\Sigma) \quad (4.2.71)$$

と表されるとすると、Ricci 曲率は

$$R_{ij}(Y) = R_{ij}(\Sigma) - 4g_{ij}(\Sigma), \quad R_{rm}(Y) = 0 \quad (m = r, i). \quad (4.2.72)$$

よって、 Y が Ricci 平坦となるための必要十分条件は

$$R_{mn}(Y) = 0 \Leftrightarrow R_{ij}(\Sigma) = 4g_{ij}(\Sigma). \quad (4.2.73)$$

- 3) **Einstein 空間 $T^{p,q}$** : S^3 を $SU(2)$ と同一視し、

$$S^3 \times S^3 \ni (L, R), \quad L = U(\theta_1, \phi_1, \psi_1), R = U(\theta_2, \phi_2, \psi_2) \in SU(2) \quad (4.2.74)$$

により、座標付けする。ここで、

$$U(\theta, \phi, \psi) = \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \in SU(2); \quad (4.2.75)$$

$$a = \cos \frac{\theta}{2} e^{i(\psi+\phi)/2}, \quad b = \sin \frac{\theta}{2} e^{i(\psi-\phi)/2} \quad (4.2.76)$$

いま、 p, q を互いに素な正の整数として、 $U(1) \ni \Theta = [e^{i\lambda}, e^{-i\lambda}]$ の $S^3 \times S^3$ への自由な作用を

$$(L, R) \rightarrow (L\Theta^q, R\Theta^{-p}) \quad (4.2.77)$$

により定義する。 k, l を $kp + lq = 1$ となる整数の組として、 ψ_1, ψ_2 の代わりに、新たな座標 ψ, χ を

$$\psi_1 = k\psi - q\chi, \quad \psi_2 = l\psi + p\chi \quad (4.2.78)$$

により導入すると、 $U(1)$ 作用は、

$$\psi \rightarrow \psi, \quad \chi \rightarrow \chi - \lambda \quad (4.2.79)$$

で与えられる。

この作用による商空間を $T^{p,q} = (S^3 \times S^3)/U(1)_{p,q}$ と表記すると、一般に、

$$\begin{aligned} \alpha^2(d\psi_1 + \cos \theta_1 d\phi_1)^2 + \frac{1}{\alpha^2}(d\psi_2 + \cos \theta_2 d\phi_2)^2 &= \left(\frac{p^2}{\alpha^2} + q^2 \alpha^2 \right) \\ &\left[d\chi + \frac{(-\alpha^2 kq + lp/\alpha^2)d\psi - q \cos \theta_1 d\psi_1 + p \cos \theta_2 d\phi_2}{p^2/\alpha^2 + q^2 \alpha^2} \right]^2 \\ &+ \frac{1}{p^2/\alpha^2 + q^2 \alpha^2} (d\psi + p \cos \theta_1 d\phi_1 + q \cos \theta_2 d\phi_2)^2. \end{aligned} \quad (4.2.80)$$

より、 A, B, C を任意の正定数とし、 $T^{1,1}$ 上に自然な計量

$$ds^2 = A^2 ds^2(S_1^2) + B^2 ds^2(S_2^2) + C^2 (d\psi + p \cos \theta_1 d\phi_1 + q \cos \theta_2 d\phi_2)^2 \quad (4.2.81)$$

が誘導される。ここで、 $ds^2(S_i^2) = d\theta_i^2 + \sin^2 \theta_i d\phi_i^2$. この5次元多様体が Einstein 空間となるための必要十分条件は

$$\frac{2A^2 - p^2 C^2}{2A^4} = \frac{2B^2 - q^2 C^2}{2B^4} = \frac{C^2 (q^2 A^4 + p^2 B^4)}{2A^4 B^4} = \lambda \Rightarrow R_n^m = \lambda \delta_n^m. \quad (4.2.82)$$

4) **Conifold** $\cong C(T^{1,1})$: 複素座標 w_A から $M(2, \mathbb{C})$ への写像を

$$W = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{A=1}^4 w_A \sigma_A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} w_3 + iw_4 & w_1 - iw_2 \\ w_1 + iw_2 & -w_3 + iw_4 \end{pmatrix}, \quad (4.2.83)$$

$$(\sigma_A) = (\sigma_i, i\text{id}_2) \quad (4.2.84)$$

により定義すると、

$$\det W = 0, \quad \text{Tr}(W^\dagger W) = w \cdot \bar{w} = \rho^2 \quad (4.2.85)$$

が成り立つ。

いま、

$$Z \equiv W/\rho: \quad \det Z = 0, \quad \text{Tr}(Z^\dagger Z) = 1 \Leftrightarrow Z \in \Sigma \quad (4.2.86)$$

において、

$$Z = LZ_0 R^\dagger; \quad L, R \in \text{SU}(2), \quad Z_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.2.87)$$

は、 $S^3 \times S^3$ から Σ への全射を与え、 $Z = Z_0$ の逆像は $U(1)$ と一致：

$$LZ_0 R^\dagger = Z_0 \Leftrightarrow L = R = \Theta = \begin{pmatrix} e^{i\lambda} & 0 \\ 0 & e^{-i\lambda} \end{pmatrix} \quad (4.2.88)$$

これより、conifold は $T^{1,1}$ 上の錐と同相：

$$\text{Conifold} \cong C(S^3 \times S^3 / U(1)_{1,1}) = C(T^{1,1}). \quad (4.2.89)$$

特に、適当な動径座標 $r = r(\rho)$ を用いて

$$ds^2 = dr^2 + r^2 g(T^{1,1}) \quad (4.2.90)$$

により定義される計量が conifold の Ricci 平坦計量を与える。ここで、

$$g(T^{1,1}) = \frac{1}{9} (d\psi + \cos \theta_1 d\phi_1 + \cos \theta_2 d\phi_2)^2 + \frac{1}{6} (d\theta_1^2 + \sin^2 \theta_1 d\phi_1^2) + \frac{1}{6} (d\theta_2^2 + \sin^2 \theta_2 d\phi_2^2) \quad (4.2.91)$$

$$R_n^m(T^{1,1}) = 4\delta_n^m. \quad (4.2.92)$$

- 5) ケーラー構造: つぎに、この計量が $r(\rho)$ を適当に選ぶとケーラー計量となることを示す。この計量は $SU(2) \times SU(2)$ 不変なので、ケーラーポテンシャル K も同じ対称性を持つとすると、 $K = K(\rho^2)$. 対応するケーラー計量は

$$g_{i\bar{j}} = \partial_i \partial_{\bar{j}} K = (\partial_i \partial_{\bar{j}} (\rho^2)) K' + \partial_i (\rho^2) \partial_{\bar{j}} (\rho^2) K''. \quad (4.2.93)$$

ρ^2 が

$$\rho^2 = \text{Tr}(W^\dagger W) \quad (4.2.94)$$

で与えられることを用いて、 $g_{i\bar{j}}$ を計算すると、

$$\sqrt{g} = \det(g_{i\bar{j}}) = \frac{(\gamma^3)'}{3\rho^2 |w_4|^2}; \quad \gamma = \rho^2 K'. \quad (4.2.95)$$

ケーラー多様体の Ricci 曲率は

$$R_{i\bar{j}} = -\partial_i \partial_{\bar{j}} \ln \sqrt{g} \quad (4.2.96)$$

で与えられるので、Ricci 平坦となる条件は

$$R_{i\bar{j}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{g} = f(z) \overline{f(z)} \Leftrightarrow (\gamma^3)' = 2c^3 \rho^2. \quad (4.2.97)$$

この解は

$$K = \frac{3}{2} c \rho^{4/3} = \frac{1}{2} r^2. \quad (4.2.98)$$

対応する計量は、

$$\begin{aligned} ds^2 &= 2K' \sum_A dw_A d\bar{w}_A + 2K'' \left| \sum_A \bar{w}_A dw_A \right|^2 \\ &= \frac{4}{3} c \rho^{-2/3} d\rho^2 + 2c \rho^{4/3} \left\{ \text{Tr}(dZ^\dagger dZ) - \frac{1}{3} |\text{Tr}(Z^\dagger dZ)|^2 \right\} \\ &= dr^2 + r^2 g(T^{1,1}). \end{aligned} \quad (4.2.99)$$

6) SU(3) 構造: ケーラー形式 $\omega = J_*$ は

$$\begin{aligned}
 J_* &= i\partial\bar{\partial}K \\
 &= K' \sum_A dw_A \wedge d\bar{w}_A + K'' \left(\sum_A \bar{w}_A dw_A \right) \wedge \left(\sum_A w_A d\bar{w}_A \right) \\
 &= \frac{1}{3} r dr \wedge (d\psi + \cos\theta_1 d\phi_1 + \cos\theta_2 d\phi_2) - \frac{\rho^2}{6} (\mathbf{v}(S_1^2) + \mathbf{v}(S_2^2)).
 \end{aligned} \tag{4.2.100}$$

これより、 $dJ_* = 0$.

正則3形式 Ω は

$$\begin{aligned}
 \Omega &= \sqrt{\frac{2}{3}} (2c)^{3/2} \frac{1}{w_4} dw_1 \wedge dw_2 \wedge dw_3 \\
 &= -\frac{\sqrt{2}}{8\sqrt{3}} (2c)^{2/3} r^2 e^{i\psi} \left(2\frac{dr}{r} + if_1 \right) \wedge (d\theta_1 - i\sin\theta_1 d\phi_1) \wedge (d\theta_2 - i\sin\theta_2 d\phi_2).
 \end{aligned} \tag{4.2.101}$$

ここで、

$$f_1 = d\psi + \cos\theta_1 d\phi_1 + \cos\theta_2 d\phi_2. \tag{4.2.102}$$

この3形式は $d\Omega = 0$ を満たす。

7) フラックス条件: conifold 解の H フラックスは、 $N = 1$ SUSY のための条件

$$H^{(1)} = -\frac{i}{6} H \cdot \Omega = 0, \quad H^{(3)} = \frac{1}{2} H \cdot J = 0 \tag{4.2.103}$$

を満たす。

Q.E.D.

(3) Klebanov-Strasser 解 (deformed conifold)

【Example 4.2.6 (KS 解)】 (Klebanov IR, Strassler MJ 2000[51]) 変形コニフォルド

$$x^2 + y^2 + v^2 + w^2 = \epsilon^2 \quad (4.2.104)$$

へのコンパクト化.

$$ds^2(M) = h^{-1/2} ds^2(E^{3,1}) + h^{1/2} ds^2(Y_6), \quad (4.2.105a)$$

$$ds^2(Y_6) = \frac{1}{2} \epsilon^{4/3} K(\tau) \left[\frac{1}{3K^3(\tau)} \{d\tau^2 + (g^5)^2\} + \sinh^2\left(\frac{\tau}{2}\right) \{(g^1)^2 + (g^2)^2\} \right. \\ \left. + \cosh^2\left(\frac{\tau}{2}\right) \{(g^3)^2 + (g^4)^2\} \right], \quad (4.2.105b)$$

$$h(x, \tau) = h_0(x) + g_s M^2 \frac{3^{2/3}}{\epsilon^{8/3}} \int_{\tau}^{\infty} du \frac{u \coth u - 1}{\sinh^2 u} \{\sinh(2u) - 2u\}^{1/3}, \quad (4.2.105c)$$

$$F_5 = (1 + *)d(h^{-1}) \wedge \mathbf{v}(E^{3,1}), \quad (4.2.105d)$$

$$B_2 = Mg_s [(1 - F) \tanh^2(\tau/2) g^1 \wedge g^2 + F \coth^2(\tau/2) g^3 \wedge g^4], \quad (4.2.105e)$$

$$H_3 = g_s *_Y F_3 = dB_2, \quad (4.2.105f)$$

$$\phi = C_0 = 0. \quad (4.2.105g)$$

ここで

$$K(\tau) = \frac{[\sinh(2\tau) - 2\tau]^{1/3}}{2^{1/3} \sinh(\tau)}, \quad F = \frac{\sinh \tau - \tau}{2 \sinh \tau}. \quad (4.2.106)$$

また, 基底 $g^1 \sim g^5$ は

$$g^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^1 - e^3), \quad g^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^2 - e^4), \quad g^3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^1 + e^3), \quad (4.2.107)$$

$$g^4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^2 + e^4), \quad g^5 = e^5, \quad (4.2.108)$$

$$e^1 \equiv -\sin \theta_1 d\phi_1, \quad e^2 \equiv d\theta_1, \quad e^3 \equiv \cos \psi \sin \theta_2 d\phi_2 - \sin \psi d\theta_2$$

$$e^4 \equiv \sin \psi \sin \theta_2 d\phi_2 + \cos \psi d\theta_2, \quad e^5 \equiv d\psi + \cos \theta_1 d\phi_1 + \cos \theta_2 d\phi_2.$$

この解は $N = 1$ 超対称性をもち, $\tau \rightarrow \infty$ で漸近的に conifold 解に近づく:

$$ds^2(Y_6) \rightarrow dr^2 + r^2 g(\mathbb{T}^{1,1}), \quad r \rightarrow \frac{3^{1/2}}{2^{5/6}} \epsilon^{2/3} e^{\tau/3}. \quad (4.2.109)$$

また, 至る所滑らかで, コーン型突起の頂点では

$$ds^2 \simeq \frac{\epsilon^{4/3}}{12^{1/3}} \left[\frac{1}{2} (d\tau^2 + \tau^2 g(S^2)) + g(S^3) \right] \quad (4.2.110)$$

□

§4.3

SU(3) 構造

参考文献

- Gurrieri S, Louis J, Micu A, Waldram D: NPB 654, 61-113 (2003)
“Mirror symmetry in generalized Calabi-Yau compactifications”
- Frey AR, Grana M: prd63 106002 (2003)
“Type IIB solutions with interpolating supersymmetries”
- Grana M, Minasian R, Petrini M, Tomasiello A: jhep0408, 046 (2004)
“Supersymmetric backgrounds from generalized Calabi-Yau manifolds”
- Fianza S, Minasian R, Tomasiello A : cmp254, 40-23 (2005)
“Mirror symmetric SU(3) structure manifolds with NS fluxes”

4.3.1 SU(3) 構造の基本的性質

一般に、6次元多様体 Y 上の SU(3) 構造は次の性質をもつ 2 形式 J と 3 形式 Ω により指定される：

$$J_{pq} = -J_{qp}, \quad J^p{}_q J^q{}_r = -\delta_r^p, \quad (4.3.1a)$$

$$J \wedge \Omega = 0, \quad (4.3.1b)$$

$$J \wedge J \wedge J = \frac{3}{4} i \Omega \wedge \bar{\Omega} = -6 \mathbf{v}(Y) \quad (4.3.1c)$$

これらは、さらに次の関係式を満たす：

$$\langle \Omega, \bar{\Omega} \rangle = 8, \quad \langle J, J \rangle = 3, \quad (4.3.2a)$$

$$*\Omega = -i\Omega, \quad *J = -\frac{1}{2} J \wedge J \quad (4.3.2b)$$

4.3.2 固有トーシオン

SU(3) 構造の積分可能性 (Calabi-Yau とのずれ) は, これらと整合的な接続 $\hat{\nabla}$ のトーシオン $T_{mn}{}^r$ を用いて

$$(dJ)_{mnp} = 3T_{[mn}{}^r J_{r|p]}, \quad (4.3.3a)$$

$$(d\Omega)_{mnpq} = 6T_{[mn}{}^r \Omega_{r|pq]} \quad (4.3.3b)$$

と表される.

SU(3) 構造と整合的な別の接続 ∇' に対応するトーシオンを $T'_{mn}{}^r$ に置き換えても, (4.3.3) の左辺は変化しないので, 右辺は, SU(3) 構造と整合的な接続の取り方によらない成分である固有トーシオン T^0 のみが残る:

$$(dJ)_{mnp} = 3T_{[mn}^0{}^r J_{r|p]}, \quad (4.3.4a)$$

$$(d\Omega)_{mnpq} = 6T_{[mn}^0{}^r \Omega_{r|pq]} \quad (4.3.4b)$$

そこで, dJ と $d\Omega$ を次のように分解する. まず, dJ の $(3,0) + (0,3)$ 成分は, dJ が実形式なので, Ω と $\bar{\Omega}$ の実線形和で表される. また, V を実 1 形式として, $(V \wedge J \wedge J)_{abcde} J^{de} J^{bc} = 16V_a$. これより, dJ の $(2,1) + (1,2)$ 成分の primitive な成分を \mathscr{W}_3 とおくと, dJ は

$$dJ = -\frac{3}{2} \text{Im}(\mathscr{W}_1 \bar{\Omega}) + \mathscr{W}_4 \wedge J + \mathscr{W}_3 \quad (4.3.5)$$

と表される. つぎに, $d\Omega$ は一般に, $(3,1) + (2,2)$ という成分をもつが, そのうち $(3,1) = (0,1) \wedge (3,0) = (0,1) \wedge \Omega$. また, $J^2 \wedge J \propto \Omega \wedge \bar{\Omega}$ より, $(2,2)$ 成分は J^2 に比例する項と primitive な $(2,2)$ 形式 χ_4 の和となるが, χ_4 は適当な $(1,1)$ 形式 \mathscr{W}_2 を用いて $\chi_4 = \mathscr{W}_2 \wedge J$ と表されることが示される. これより, $d\Omega$ は次のように表される:

$$d\Omega = \mathscr{W}_1 J^2 + \mathscr{W}_2 \wedge J + \bar{\mathscr{W}}_5 \wedge \Omega \quad (4.3.6)$$

が得られる. ここで,

- \mathscr{W}_1 : 関数
- \mathscr{W}_2 : 複素 primitive(1,1) 形式
- \mathscr{W}_3 : 実 primitive(2,1) \oplus (1,2) 形式
- $\mathscr{W}_4 = \mathscr{W}_4^{(3)} + \mathscr{W}_4^{(\bar{3})}$: 実 1 形式
- \mathscr{W}_5 : 複素 (1,0) 形式

である [41, 39, 31].

SU(3) 構造はこれらの振る舞いにより次のように特徴付けられる [37, 38]:

- $\mathcal{W}_1 = 0 = \mathcal{W}_2 \Leftrightarrow J$ が複素構造を与える [56, ?].
- $\mathcal{W}_1 = \mathcal{W}_3 = \mathcal{W}_4 = 0 \Leftrightarrow dJ = 0$ (シンプレクティック)
- $\mathcal{W}_1 = \mathcal{W}_2 = \mathcal{W}_3 = \mathcal{W}_4 = 0 \Leftrightarrow$ Kahler.
- $\mathcal{W}_1 = \mathcal{W}_2 = \mathcal{W}_3 = \mathcal{W}_4 = \mathcal{W}_5 = 0 \Leftrightarrow$ Calabi-Yau.

4.3.3 Killing スピノール

SU(3) 構造 (g, J, Ω) が与えられると、SU(3) 不変な Majorana スピノール $\eta = \eta_+ + \eta_-$ ($\gamma_* \eta_{\pm} = \pm \eta_{\pm}, \eta_- = \eta_+^c$) がスケールの自由度を除いて一意的に存在し、

$$\eta^\dagger \eta = 1 \quad (4.3.7)$$

と規格化すると、

$$J_{mn} = -i\eta^\dagger \gamma_{mn} \gamma_* \eta = \mp 2i\eta_{\pm}^\dagger \gamma_{mn} \eta_{\pm}, \quad (4.3.8a)$$

$$\Omega_{mnp} = -u\eta^\dagger \gamma_{mnp} (1 + \gamma_*) \eta = -2i\eta_-^\dagger \gamma_{mnp} \eta_+ \quad (4.3.8b)$$

を満足する。また、Fierz 恒等式より、次の関係が成り立つ：

$$\eta_{\pm} \otimes \eta_{\pm}^\dagger = \frac{1}{8} e^{\mp J}, \quad \eta_+ \otimes \eta_-^\dagger = -\frac{i}{8} \Omega, \quad \eta_- \otimes \eta_+^\dagger = -\frac{i}{8} \bar{\Omega}. \quad (4.3.9)$$

一般に、 $\eta, i\gamma_* \eta, i\gamma_m \eta$ は、6次元多様体の8次元 Majorana スピノール空間の基底となる。したがって、 η の Levi-Civita 接続に関する共変微分 $D_m \eta$ は、

$$D_m \eta = (\tilde{q}_m + iq_m \gamma_* + iq_{mn} \gamma^n) \eta, \quad \tilde{q}_m, q_m, q_{mn} \in \mathbb{R} \quad (4.3.10)$$

と表される。ここで、 $\eta^\dagger \eta = 1$ より、 $\tilde{q}_m = 0$ となる。これより、概複素構造 J に対応する複素接空間 $T'(Y)$ のエルミート直交基底を ϕ^i とするとき、

$$dJ_* = -iq^l{}_i \Omega - \frac{i}{2} \Omega_{ijk} q_l{}^k \phi^i \wedge \phi^j \wedge \bar{\phi}^l + \text{cc}, \quad (4.3.11a)$$

$$d\Omega = 2iq_{[1]} \wedge \Omega - 8iq^{(2,0)} \wedge J_* + 4iq_{\bar{j}i} \phi^i \wedge \bar{\phi}^{\bar{j}} \wedge J_* \quad (4.3.11b)$$

が得られる。これを固有トーシヨンの定義式と比較することにより、

$$q_{ij} = -\frac{i}{8} W_{3,ij} - \frac{1}{8} \Omega_{ijk} \bar{W}_4^k, \quad (4.3.12a)$$

$$q_{i\bar{j}} = -\frac{i}{4} \bar{W}_{2,i\bar{j}} + \frac{1}{4} \bar{W}_1 q_{i\bar{j}}, \quad (4.3.12b)$$

$$q_i = \frac{i}{2} (W_5 - W_4)_i \quad (4.3.12c)$$

が得られる。ここで、

$$W_{3,mn} = \frac{1}{2} W_{3,mpq} \Omega^{pq}{}_m. \quad (4.3.13)$$

[右辺の赤字の係数 1/2 は、Grana M et al (2004) の結果と異なる。要チェック]

以上より、 $D_m \eta$ は固有トーシヨンにより表される。

§4.4

II型理論での4次元 $\mathcal{N} = 1$ 超対称コンパクト化解の分類

References

- Grana M, Minasianb R, Petrini M, Tomasiello A: jhep0408, 046 (2004)
“Supersymmetric backgrounds from generalized Calabi-Yau manifolds”
- Grana M: PLC 423, 91-158 (2006)
“Flux compactifications in string theory: A comprehensive review”

仮定

計量 X_4 を4次元定曲率空間として、

$$ds^2 = e^{2A(y)} ds^2(X_4) + ds^2(Y_6) \quad (4.4.1)$$

対称性 すべての場が、 X_4 の等長変換群に作用に対して不変。

超対称性 4次元時空 X_4 から見て、 $\mathcal{N} = 1$ 超対称性をもつ。

4.4.1 IIA 型

フラックスの構造

$$\begin{aligned} H &= \hat{H}(y), \quad F_0 = \hat{F}_0(y), \quad F_2 = \hat{F}_2(y), \\ F_4 &= -(*_Y \hat{F}_6(y)) e^{4A} \mathbf{v}(X) + \hat{F}_4(y), \quad F_6 = -e^{4A} \mathbf{v}(X) *_Y \hat{F}_4(y) + \hat{F}_6(y), \\ F_8 &= e^{4A} \mathbf{v}(X) \wedge *_Y \hat{F}_2(y), \quad F_{10} = -\hat{F}_0(y) e^{4A} \mathbf{v}(X) \wedge \mathbf{v}(Y). \end{aligned} \quad (4.4.2a)$$

これらのフラックスは、SU(3) 変換に対する変換性により次のように分解される。まず、 H フラックスは

$$\hat{H} = -\frac{3}{2} \text{Im}(H^{(1)} \bar{\Omega}) + H^{(3)} \wedge J + H^{(6)}, \quad (4.4.3)$$

$$H^{(1)} = -\frac{i}{36} H^{ijk} \Omega_{ijk}, \quad H_i^{(3)} = \frac{1}{4} H_{imn} J^{mn}, \quad H_{ij}^{(6)} = H^{kl} {}_{(i} \Omega_{j)kl}. \quad (4.4.4)$$

つぎに、RR フラックスは

$$F_2^{(1)} = \hat{F}_2 \cdot J, \quad F_{2,k}^{(3)} = \frac{1}{8} \hat{F}^{ij} \Omega_{ijk}, \quad F_4^{(1)} = \frac{1}{8} \hat{F}^{mnpq} J_{mn} J_{pq}, \quad F_6^{(1)} = \frac{1}{6} \hat{F}_6 \cdot J \wedge J \wedge J \quad (4.4.5)$$

とおくと、

$$\hat{F}_2 = \frac{1}{3} F_2^{(1)} J + \text{Re}(F_2^{(3)} \cdot \bar{\Omega}) + F_2^{(8)}, \quad (4.4.6a)$$

$$\hat{F}_4 = \frac{1}{6} F_4^{(1)} J \wedge J + \text{Re}(F_4^{(3)} \wedge \bar{\Omega}) + F_4^{(8)}, \quad (4.4.6b)$$

$$\hat{F}_6 = \frac{1}{6} F_6^{(1)} J \wedge J \wedge J. \quad (4.4.6c)$$

Killing スピノール方程式 ϵ を局所超対称性変換のパラメータ $\epsilon = \mathcal{T}(\epsilon_1, \epsilon_2)$ として、Killing スピノール方程式は

$$\delta\psi_\mu = \left[D_\mu^X + \frac{1}{2} e^A \hat{\rho} A \gamma_\mu \gamma_5 + \frac{1}{8} e^A e^\phi \hat{F}_{\text{IIA}} \gamma_\mu \sigma_1 \right] \epsilon, \quad (4.4.7a)$$

$$\delta\psi_m = \left[\hat{D}_m + \frac{1}{4} \hat{H}_m \Gamma_{11} + \frac{1}{8} e^\phi \hat{F}_{\text{IIA}} \hat{\gamma}_m \gamma_5 \sigma_1 \right] \epsilon, \quad (4.4.7b)$$

$$\Gamma^M \delta\psi_M - \delta\lambda = \left(\mathcal{D} - \hat{\rho} \phi + \frac{1}{4} \hat{H} \Gamma_{11} \right) \epsilon. \quad (4.4.7c)$$

ここで、 $\hat{\cdot}$ のついた量は Y_6 上の量で、

$$\hat{F}_{\text{IIA}} = \hat{F}_0 - \hat{F}_2 \Gamma_{11} + \hat{F}_4 - \hat{F}_6 \Gamma_{11}. \quad (4.4.8)$$

解に対する対称性の要請より、 $\mathcal{N} = 1$ の場合、Killing スピノールは

$$\epsilon = \zeta_+(x) \otimes \begin{pmatrix} a\eta_+ \\ \bar{b}\eta_- \end{pmatrix} + \zeta_-(x) \otimes \begin{pmatrix} \bar{a}\eta_- \\ b\eta_+ \end{pmatrix} \quad (4.4.9)$$

という構造を持つとしてよい。ここで、 a, b は Y 上の複素関数、 $\zeta_-(x) = \zeta_+(x)^c$ 、 $\eta_-(y) = \eta_+(y)^c$ である。この表式を上記の Killing 方程式に代入すると、 ζ_\pm に対して

$$D_\mu^X \zeta_+ = \frac{p}{2} \gamma_\mu \zeta_- \quad (\bar{p} = p) \quad (4.4.10)$$

これより、

$$[D_\mu^X, D_\nu^X] \zeta_+ = \frac{1}{4} R_{\mu\nu ab} \gamma^{ab} \zeta_+ = -\frac{p^2}{2} \gamma_{\mu\nu} \zeta_+ \quad (4.4.11)$$

よって、

$$R_{\mu\nu\lambda\sigma} = -p^2 (g_{\mu\lambda} g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma} g_{\nu\lambda}). \quad (4.4.12)$$

また、 η_\pm に対して、

$$\alpha \hat{\rho} A \eta_+ + \frac{i}{4} e^\phi \hat{F}_{A1} \eta_- = -p e^{-A} \alpha^* \eta_-, \quad (4.4.13a)$$

$$\alpha D_m \eta_+ + \left(\partial_m \alpha + \frac{1}{4} \beta \hat{H}_m \right) \eta_+ + \frac{i}{8} e^\phi \hat{F}_{A1} \hat{\gamma}_m \eta_- = 0, \quad (4.4.13b)$$

$$\alpha \hat{\mathcal{D}} \eta_+ + \left\{ \alpha \hat{\rho} (2A - \phi + \ln \alpha) + \frac{1}{4} \beta \hat{H} \right\} \eta_+ = -\frac{p}{2} e^{-A} \bar{\beta} \eta_-, \quad (4.4.13c)$$

および、これらの方程式で $\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \alpha, F_{A1} \rightarrow F_{A2}$ と置き換えた3式が得られる。ここで、 α と β は Y_6 上の関数

$$\alpha = a(y) + ib(y), \quad \beta = a(y) - ib(y), \quad (4.4.14)$$

$F_{A1,2}$ は

$$-F_{A1} = \beta^*(\hat{F}_0 + \hat{F}_4) + \alpha^*(\hat{F}_2 + \hat{F}_6), \quad (4.4.15a)$$

$$F_{A12} = \alpha^*(\hat{F}_0 + \hat{F}_4) + \beta^*(\hat{F}_2 + \hat{F}_6) \quad (4.4.15b)$$

以上の式は、 $D_m \eta$ を固有トーションにより表し、Weyl スピノール基底 $\eta_{\pm}, \gamma^m \eta_{\pm}$ で展開すると、フラックスおよび固有トーションに対する次の代数的方程式系を与える：

$$\delta\psi_m : i(Q_m + R_m)\eta_+ + i(Q_{mn} + R_{mn})\gamma^n \eta_- = 0, \quad (4.4.16a)$$

$$\delta\psi_{\mu} : S\eta_- + (S_m + A_m)\gamma^m \eta_+ = 0, \quad (4.4.16b)$$

$$\delta\lambda : T\eta_- + T_m\gamma^m \eta_+ = 0. \quad (4.4.16c)$$

ここで、 A, Q, T は幾何学と H フラックスのみを含む量、 R と S は RR-flux のみを含む量で、 $p = 0$ 、すなわち X_4 が Minkowski 時空の時、次式で与えられる：

$$S = \frac{i}{4} e^{\phi} (F_{A1} e^{ij})_0 \quad (4.4.17a)$$

$$T = \frac{3}{2} (i\alpha W_1 - \beta H^{(1)}), \quad (4.4.17b)$$

$$A_m = \alpha \partial_m A, \quad (4.4.17c)$$

$$S_m = \frac{1}{4} e^{\phi} \text{Re} [(F_{A1} \bar{\mathcal{Q}})_m], \quad (4.4.17d)$$

$$T_m = \alpha \partial_m (2A - \phi + \log \alpha) + \alpha \left[W_{4,m} + \frac{i}{2} J_m^n (W_5 - W_3)_n \right] + \frac{1}{2} \beta J_m^n H_n^{(3)}, \quad (4.4.17e)$$

$$Q_m = -i \partial_m \alpha + \frac{1}{2} \alpha J_m^n (W_5 - W_4)_n + \frac{1}{2} \beta H_m^{(3)}, \quad (4.4.17f)$$

$$R_m = -\frac{i}{8} e^{\phi} (\bar{\mathcal{Q}} F_{A1})_m, \quad (4.4.17g)$$

$$Q_{mn} = \text{Re} \left[\frac{1}{2} (\alpha W_1 + 3i\beta H^{(1)}) \bar{P}_{mn} - \frac{1}{4} \Omega_{mnp} (\alpha W_4 + i\beta H^{(3)})^p - \frac{i}{8} (\alpha W_3 + i\beta H^{(6)})_{mn} + \frac{i}{2} \bar{P}_m^p \alpha W_{2,pn} \right], \quad (4.4.17h)$$

$$R_{mn} = \frac{1}{4} e^{\phi} \text{Re} \left[- (F_{A1m} e^{ij})_n + (F_{A1} e^{ij})_{mn} + \frac{1}{2} (F_{A1} e^{ij})_0 g_{mn} \right]. \quad (4.4.17i)$$

ただし、

$$P_n{}^m - \frac{1}{2}(\delta_n^m - iJ_n{}^m), \quad (4.4.18a)$$

$$(\mathbb{F}_{A1} e^{ij})_0 = \beta^*(-F_0 + F_4^{(1)}) + i\alpha^*(F_2^{(1)} - F_6^{(1)}), \quad (4.4.18b)$$

$$(\mathbb{F}_{A1} \Omega)_m = 4\bar{P}_m{}^n \left(\alpha^* F_2^{(\bar{3})} + \beta^* F_4^{(\bar{3})} \right)_n, \quad (4.4.18c)$$

$$(\Omega \mathbb{F}_{A1})_m = -4\bar{P}_m{}^n \left(\alpha^* F_2^{(\bar{3})} - \beta^* F_4^{(\bar{3})} \right)_n, \quad (4.4.18d)$$

$$R_{\bar{i}j} = -\frac{1}{8}e^\phi \left(g_{\bar{i}j} \bar{S} - \frac{8}{3}g_{\bar{i}j} \left(\beta F_4^{(1)} - \alpha^* F_6^{(1)} \right) - 2\alpha^* F_{2,\bar{i}j}^{(8)} - 2i\beta F_{\bar{i}j\bar{k}l}^{(8)} J^{\bar{k}l} \right), \quad (4.18e)$$

$$R_{ij} = 0. \quad (4.4.18f)$$

解の分類

A $ab = 0$:

$$\begin{aligned} \mathbf{1} : \quad \mathcal{W}_1 &= H_3^{(1)} = 0, \\ &F_0^{(1)} = \mp F_2^{(1)} = F_4^{(1)} = \mp F_6^{(1)}, \\ \mathbf{8} : \quad \mathcal{W}_2 &= F_2^{(8)} = F_4^{(8)} = 0, \\ \mathbf{6} : \quad \mathcal{W}_3 &= \mp *_Y H_3^{(6)}, \\ \mathbf{3} : \quad \bar{\mathcal{W}}_5 &= 2\mathcal{W}_4^{(\bar{3})} = \mp 2iH_3^{(\bar{3})} = \bar{\partial}\phi, \\ &\bar{\partial}A = \bar{\partial}a = \bar{\partial}b = 0 \end{aligned}$$

B $a = be^{i\theta}$ ($e^{i\theta} \neq 1$)

$$\begin{aligned} \mathbf{1} : \quad \mathcal{W}_1 &= H_3^{(1)} = 0, F_{2n}^{(1)} = 0, \\ \mathbf{8} : \quad \mathcal{W}_2^+ &= e^\phi F_2^{(8)}, \quad \mathcal{W}_2^- = 0, \\ \mathbf{6} : \quad \mathcal{W}_3 &= H_3^{(6)} = 0, \\ \mathbf{3} : \quad \mathcal{W}_4 &= 0, \\ &2i\bar{\mathcal{W}}_5 = F_2^{(\bar{3})} = -2i\bar{\partial}A = \frac{2i}{3}\bar{\partial}\phi. \end{aligned}$$

B₀ $a = b$

$$\begin{aligned} \mathbf{1} : \quad \mathcal{W}_1 &= H_3^{(1)} = 0, F_{2n}^{(1)} = 0, \\ \mathbf{8} : \quad \mathcal{W}_2^+ &= e^\phi (F_2^{(8)} + F_4^{(8)}), \quad \mathcal{W}_2^- = 0, \\ \mathbf{6} : \quad \mathcal{W}_3 &= H_3^{(6)} = 0, \\ \mathbf{3} : \quad \mathcal{W}_4 &= 0, \\ &2i\bar{\mathcal{W}}_5 = F_2^{(\bar{3})} = -2i\bar{\partial}A = \frac{2i}{3}\bar{\partial}\phi. \end{aligned}$$

4.4.2 IIB 型

フラックスの構造

$$H = \hat{H}(y), \quad F_1 = \hat{F}_1(y), \quad F_3 = \hat{F}_3(y), \quad (4.4.19)$$

$$\begin{aligned} F_5 &= -(1 + *) (e^{4A} \mathbf{v}(X_4) \hat{V}(y)) \\ &= -e^{4A} \mathbf{v}(X) \hat{V}(y) + *_Y \hat{V}(y) \\ &= -2e^{4A} \mathbf{v}(X) F_5^{(3)} \cdot J + F_5^{(3)} \wedge J \wedge J. \end{aligned} \quad (4.4.20)$$

$$\hat{F}_5 = F_5^{(3)} \wedge J \wedge J \Leftrightarrow F_{5i}^{(3)} = \frac{1}{16} F_i^{mnpq} J_{mn} J_{pq}. \quad (4.4.21)$$

また、 \hat{F}_3 フラックスは、 H フラックスと同様に、 $SU(3)$ の既約表現に分解される：

$$\hat{F}_3 = -\frac{3}{2} \text{Im}(F_3^{(1)} \bar{\Omega}) + F_3^{(3)} \wedge J + F_3^{(6)}, \quad (4.4.22)$$

$$F_3^{(1)} = -\frac{i}{36} \hat{F}^{ijk} \Omega_{ijk}, \quad F_{3,i}^{(3)} = \frac{1}{4} \hat{F}_{imn} J^{mn}, \quad F_{3,ij}^{(6)} = \hat{F}_3^{kl} ({}_i \Omega_j)_{kl}. \quad (4.4.23)$$

Killing スピノール方程式 ϵ を局所超対称性変換のパラメータ $\epsilon = \mathcal{T}(\epsilon_1, \epsilon_2)$ として、Killing スピノール方程式は

$$\delta\psi_\mu = \left(D_\mu^X + \frac{1}{2} e^A \hat{\partial} A \gamma_\mu \gamma_5 + \frac{1}{8} e^A e^\phi \hat{F}_{\text{IIB}} \gamma_5 \gamma_\mu \right) \epsilon, \quad (4.4.24a)$$

$$\delta\psi_m = \left(\hat{D}_m + \frac{1}{4} \hat{H}_m \sigma^3 + \frac{1}{8} e^\phi \hat{F}_{\text{IIB}} \hat{\gamma}_m \gamma_5 \right) \epsilon, \quad (4.4.24b)$$

$$\Gamma^M \delta\psi_M - \delta\lambda = \left(\mathcal{D} - \hat{\partial}\phi - \frac{1}{4} \hat{H} \sigma_3 \right) \epsilon. \quad (4.4.24c)$$

ここで、 $\hat{\cdot}$ のついた量は Y_6 上の量で、

$$\hat{F}_{\text{IIB}} = \hat{F}_1(i\sigma_2) + \hat{F}_3 + \frac{1}{2} \hat{F}_5(i\sigma_2). \quad (4.4.25)$$

解に対する対称性の要請より、 $\mathcal{N} = 1$ の場合、Killing スピノールは

$$\epsilon = \zeta_+(x) \otimes \eta_+(y) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \zeta_-(x) \otimes \eta_-(y) \begin{pmatrix} \bar{a} \\ \bar{b} \end{pmatrix} \quad (4.4.26)$$

という構造を持つとしてよい。ここで、 a, b は Y 上の複素関数、 $\zeta_-(x) = \zeta_+(x)^c$ 、 $\eta_-(y) = \eta_+(y)^c$ である。この表式を上記の Killing 方程式に代入すると、 ζ_\pm に対して

$$D_\mu^X \zeta_+ = \frac{p}{2} \gamma_\mu \zeta_- \quad (\bar{p} = p) \quad (4.4.27)$$

これより、

$$[D_\mu^X, D_\nu^X] \zeta_+ = \frac{1}{4} R_{\mu\nu ab} \gamma^{ab} \zeta_+ = -\frac{p^2}{2} \gamma_{\mu\nu} \zeta_+ \quad (4.4.28)$$

よって、

$$R_{\mu\nu\lambda\sigma} = -p^2(g_{\mu\lambda}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\lambda}). \quad (4.4.29)$$

また、 η_{\pm} に対して、

$$\left(\alpha\hat{\phi}A + \frac{i}{4}e^{\phi}\hat{F}_{B1}\right)\eta_+ = -pe^{-A}\beta^*\eta_-, \quad (4.4.30a)$$

$$\alpha D_m\eta_- + \left(\partial_m\alpha - \frac{1}{4}\beta\hat{H}_m - \frac{i}{8}e^{\phi}\hat{F}_{B1}\hat{\gamma}_m\right)\eta_+ = 0, \quad (4.4.30b)$$

$$\alpha\hat{\mathcal{D}}\eta_+ + \left\{\alpha\hat{\phi}(2A - \phi + \ln\alpha) - \frac{1}{4}\beta\hat{H}\right\}\eta_+ = -\frac{p}{2}e^{-A}\beta^*\eta_-, \quad (4.4.30c)$$

および、これらの方程式で $\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \alpha, F_{B1} \rightarrow F_{B2}$ と置き換えた3式が得られる。ここで、 α と β は Y_6 上の関数

$$\alpha = a(y) + ib(y), \quad \beta = a(y) - ib(y), \quad (4.4.31)$$

$F_{B1,2}$ は

$$\hat{F}_{B1} = \alpha\hat{F}_1 - \beta\hat{F}_3 + \alpha\hat{F}_5, \quad (4.4.32a)$$

$$-\hat{F}_{B2} = \beta\hat{F}_1 - \alpha\hat{F}_3 + \beta\hat{F}_5. \quad (4.4.32b)$$

以上の式は、 $D_m\eta$ を固有トーシオンにより表し、Weylスピノール基底 $\eta_{\pm}, \gamma^m\eta_{\pm}$ で展開すると、フラックスおよび固有トーシオンに対する次の代数的方程式系を与える：

$$\delta\psi_m : i(Q_m + R_m)\eta_+ + i(Q_{mn} + R_{mn})\gamma^n\eta_- = 0, \quad (4.4.33a)$$

$$\delta\psi_{\mu} : S\eta_- + (S_m + A_m)\gamma^m\eta_+ = 0, \quad (4.4.33b)$$

$$\delta\lambda : T\eta_- + T_m\gamma^m\eta_+ = 0. \quad (4.4.33c)$$

ここで、 A, Q, T は幾何学と H フラックスのみを含む量、 R と S は RR-flux のみを

含む量で、 $p = 0$ 、すなわち X_4 が Minkowski 時空の時、次式で与えられる：

$$S = \frac{1}{4}e^\phi(\mathcal{F}_{B1}\mathcal{Q})_0 \quad (4.4.34a)$$

$$T = \frac{3}{2}(\alpha iW_1 + \beta H^{(1)}), \quad (4.4.34b)$$

$$A_m = \alpha \partial_m A, \quad (4.4.34c)$$

$$S_m = \frac{1}{4}e^\phi \text{Re}[(\mathcal{F}_{B1}e^{-\not{J}})_m], \quad (4.4.34d)$$

$$T_m = \alpha \partial_m (2A - \phi + \log \alpha) + \alpha \left[W_{4,m} + \frac{i}{2} J_m{}^n (W_5 - W_3)_n \right] \\ + \frac{1}{2} \beta J_m{}^n H_n^{(3)}, \quad (4.4.34e)$$

$$Q_m = -i \partial_m \alpha + \frac{1}{2} \alpha J_m{}^n (W_5 - W_4)_n - \frac{1}{2} \beta H_m^{(3)}, \quad (4.4.34f)$$

$$R_m = -\frac{1}{8}e^\phi (e^{-\not{J}} \mathcal{F}_{B1})_m, \quad (4.4.34g)$$

$$Q_{mn} = \text{Re} \left[\frac{1}{2} (\alpha W_1 - 3i\beta H^{(1)}) \bar{P}_{mn} - \frac{1}{4} \Omega_{mnp} (\alpha W_4 - i\beta H^{(3)})^p \right. \\ \left. - \frac{i}{8} (\alpha W_3 - i\beta H^{(6)})_{mn} - \frac{i}{2} \bar{P}_m{}^p \alpha W_{2,pn} \right], \quad (4.4.34h)$$

$$R_{mn} = \frac{1}{4}e^\phi \text{Re} \left[i(\mathcal{F}_{B1m}\mathcal{Q})_n - (\mathcal{F}_{B1}\mathcal{Q})_{mn} - \frac{i}{2} (\mathcal{F}_{B1}\mathcal{Q})_0 g_{mn} \right]. \quad (4.4.34i)$$

ただし、

$$P_n{}^m = \frac{1}{2}(\delta_n^m - iJ_n{}^m), \quad (4.4.35a)$$

$$(\mathcal{F}_{B1}\mathcal{Q})_0 = 6i\beta F_3^{(1)}, \quad (4.4.35b)$$

$$(\mathcal{F}_{B1}e^{-\not{J}})_m = 2\bar{P}_m{}^n \left(\alpha F_1^{(\bar{3})} - 2i\beta F_3^{(\bar{3})} - 2\alpha F_5^{(\bar{3})} \right)_n, \quad (4.4.35c)$$

$$(e^{-\not{J}} \mathcal{F}_{B1})_m = 2iP_m{}^n \left(\alpha F_1^{(3)} - 2i\beta F_3^{(3)} - 2\alpha F_5^{(3)} \right)_n, \quad (4.4.35d)$$

$$R_{ij} = -\frac{i}{16}e^\phi \left(\alpha F_1^{(\bar{3})k} \Omega_{ijk} - \beta F_{3,ij}^{(6)} + 2\alpha F_5^{(\bar{3})k} \Omega_{ijk} \right), \quad (4.4.35e)$$

$$R_{i\bar{j}} = 0. \quad (4.4.35f)$$

解の分類

A $ab = 0$:

$$\mathbf{1} : \mathcal{W}_1 = F_3^{(1)} = H_3^{(1)} = 0,$$

$$\mathbf{8} : \mathcal{W}_2 = 0,$$

$$\mathbf{6} : \mathcal{W}_3 = \pm *_Y H_3^{(6)}, \quad F_3^{(6)} = 0,$$

$$\mathbf{3} : \bar{\mathcal{W}}_5 = 2\bar{\mathcal{W}}_4^{(\bar{3})} = \mp 2iH_3^{(\bar{3})} = 2\bar{\partial}\phi,$$

$$\bar{\partial}A = \bar{\partial}a = \bar{\partial}b = 0$$

B $a = \pm ib$

$$\begin{aligned}
\mathbf{1} & : \mathcal{W}_1 = F_3^{(1)} = H_3^{(1)} = 0, \\
\mathbf{8} & : \mathcal{W}_2 = 0, \\
\mathbf{6} & : \mathcal{W}_3 = 0, \quad e^\phi F_3^{(6)} = \mp *_Y H_3^{(6)}, \\
\mathbf{3} & : e^\phi F_5^{(3)} = \frac{2i}{3} \bar{\mathcal{W}}_5 = i\mathcal{W}_4^{(3)} = -2i\bar{\partial}A = -4i\bar{\partial} \log a, \\
& \quad \bar{\partial}\phi = 0.
\end{aligned}$$

注：この解において、 $G_3 = F_3 - ie^{-\phi}H$ は ISD で primitive (2, 1) 形式となる：

$$*_Y G_3 = iG_3, \quad G_{(0,3)} = 0. \quad (4.4.36)$$

さらに、 Y_6 の共形変換

$$g_{mn}(y) = e^{-2A} \hat{g}_{mn}(y) \quad (4.4.37)$$

に対して、

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{W}}_1 & = e^{-A}\mathcal{W}_1, \quad \hat{\mathcal{W}}_2 = e^A\mathcal{W}_2, \quad \hat{\mathcal{W}}_3 = e^{2A}\mathcal{W}_3, \\
\hat{\mathcal{W}}_4 & = \mathcal{W}_4 + 2dA, \quad \hat{\mathcal{W}}_5 = \mathcal{W}_5 + 3\bar{\partial}A
\end{aligned} \quad (4.4.38)$$

より、 $\hat{\mathcal{W}}_u = 0$ ($u = 1, 2, 3, 4, 5$) となるので、 Y_6 は conformally CY となる。

F $a = \pm ib$

$$\begin{aligned}
\mathbf{1} & : \mathcal{W}_1 = F_3^{(1)} = H_3^{(1)} = 0, \\
\mathbf{8} & : \mathcal{W}_2 = 0, \\
\mathbf{6} & : \mathcal{W}_3 = 0, \quad e^\phi F_3^{(6)} = \mp *_Y H_3^{(6)}, \\
\mathbf{3} & : e^\phi F_1^{(3)} = 2e^\phi F_5^{(3)} = i\bar{\mathcal{W}}_5 = i\mathcal{W}_4^{(3)} = i\bar{\partial}\phi.
\end{aligned}$$

注：この解では、 Y_6 は複素多様体となるが conformally CY ではない。

C $a = \pm b$

$$\begin{aligned}
\mathbf{1} & : \mathcal{W}_1 = F_3^{(1)} = H_3^{(1)} = 0, \\
\mathbf{8} & : \mathcal{W}_2 = 0, \\
\mathbf{6} & : \mathcal{W}_3 = \pm e^\phi *_Y F_3^{(6)}, \quad H_3^{(6)} = 0, \\
\mathbf{3} & : \pm e^\phi F_3^{(3)} = 2i\bar{\mathcal{W}}_5 = -2i\bar{\partial}A = -4i\bar{\partial} \log a = -i\bar{\partial}\phi.
\end{aligned}$$

$$\text{ABC } |a|^2 + |b|^2 = e^A$$

$$\begin{aligned} \mathbf{1} & : \mathcal{W}_1 = F_3^{(1)} = H_3^{(1)} = 0, \\ \mathbf{8} & : \mathcal{W}_2 = 0, \\ \mathbf{6} & : 2ab\mathcal{W}_3 = e^\phi(a^2 + b^2) *_Y F_3^{(6)}, \\ & \quad 2abH_3^{(6)} = -e^\phi(a^2 - b^2)F_3^{(6)}, \\ \mathbf{3} & : e^\phi F_3^{(\bar{3})} = \frac{-4iab(a^2 + b^2)}{a^4 - 2ia^3b + 2iab^3 + b^4} \bar{\partial}a, \\ & \quad e^\phi F_5^{(\bar{3})} = \frac{-4ab(a^2 - b^2)}{a^4 - 2ia^3b + 2iab^3 + b^4} \bar{\partial}a, \\ & \quad H_3^{(\bar{3})} = \frac{-2i(a^2 + b^2)(a^2 - b^2)}{a^4 - 2ia^3b + 2iab^3 + b^4} \bar{\partial}a, \\ & \quad \mathcal{W}_4^{(\bar{3})} = \frac{2(a^2 - b^2)^2}{a^4 - 2ia^3b + 2iab^3 + b^4} \bar{\partial}a, \\ & \quad \bar{\mathcal{W}}_5 = \frac{2(a^4 - 4a^2b^2 + b^4)}{a^4 - 2ia^3b + 2iab^3 + b^4} \bar{\partial}a, \\ & \quad \bar{\partial}A = \frac{-4(ab)^2}{a^4 - 2ia^3b + 2iab^3 + b^4} \bar{\partial}a, \\ & \quad \bar{\partial}\phi = \frac{2(a^2 + b^2)^2}{a^4 - 2ia^3b + 2iab^3 + b^4} \bar{\partial}a. \end{aligned}$$

IIB での例

- Maldacena-Nunez 解 [54] : タイプ A 非コンパクト正則解. $N = 1$ 超対称性をもち, 2 サイクルに巻き付いた NS5 ブレーンに対応. S 双対解はタイプ C の解となる.
- Klebanov-Strassler 解 [51] : タイプ B 非コンパクト正則解. Y_6 は conifold CY に共形. この解は O3 プレーンを加えることによりコンパクト化できる.

§4.5

高次元超重力理論における加速膨張宇宙に対するNO-GO定理

4.5.1 問題点

4次元超重力理論の枠組みでは、dS真空やインフレーションを実現する理論が多数存在する。これに対し、高次元超重力理論（超弦理論）の枠組みでは、dS真空を実現するコンパクト化はほんの僅かしかない。

- なぜ、そんなに難しいのか？
- dS真空を実現するうえで鍵となる要素はなにか？
- dS真空解をもつ4次元超重力理論の高次元へのアップリフトはどのような理論家？
- 超弦理論（高次元超重力理論）へのアップリフトにおいて、ポテンシャルは何に対応するのか？
- 量子効果が困難を解消する唯一の手段か？

4.5.2 強エネルギー条件（時間的収束条件）

一般に、 $(n+1)$ 次元時空における時間的測地線束（単位接ベクトル V ）の体積膨張率 $\theta \equiv \nabla \cdot V$ に対して、Raychaudhuri 方程式

$$\dot{\theta} + \frac{1}{n}\theta^2 = -\text{Ric}(V, V) - 2\sigma^2 + 2\omega^2 \quad (4.5.1)$$

が成り立つ。ここで、

$$2\sigma^2 = \nabla_\mu V_\nu \nabla^{(\mu} V^{\nu)}, \quad 2\omega^2 = \nabla_\mu V_\nu \nabla^{[\mu} V^{\nu]}. \quad (4.5.2)$$

この方程式を一様膨張宇宙に適用する。宇宙時間一定面にたいする単位法ベクトル V は測地的で非回転的 ($\omega^2 = 0$) となるので、スケール因子 a を

$$\theta = n \frac{\dot{a}}{a} = nH \quad (4.5.3)$$

により定義すると、Raychaudhuri 方程式は

$$n \frac{\ddot{a}}{a} = -\text{Ric}(V, V) - 2\sigma^2 \quad (4.5.4)$$

となる。したがって、時間的収束条件（＝時間的強エネルギー条件）

$$\text{Ric}(V, V) \geq 0 \quad \forall V : \text{timelike} \quad (4.5.5)$$

が成り立つと、宇宙膨張は非加速的となる。

4.5.3 Gibbons の NO-GO 定理

【Theorem 4.5.1 (GW Gibbons 1984)】 For a (warped) compactification $M_{n+4} = X_4 \times Y_n$ of a higher dimensional theory by a classical solution satisfying the following conditions, **the strong energy condition is satisfied in the four-dimensional spacetime X_4** :

1. The spacetime metric has the structure

$$ds^2(M_{n+4}) = H(y)^{1/2} ds^2(X_4) + ds^2(Y_n).$$

2. The internal space Y_n is a smooth compact manifold without boundary, and its metric is static.
3. The warp factor $H(y)$ is regular and bounded everywhere.
4. The original higher-dimensional theory satisfies the strong energy condition.

□

- Gibbons GW (1984): Aspects of Supergravity Theories, Three lectures given at GIFT Seminar on Theoretical Physics, San Feliu de Guixols, Spain, Jun 4-11, 1984.

Proof. From the assumptions, we have

$$R_{VV}(X) = R_{VV} - \frac{1}{4H} \Delta_Y H \quad (4.5.6)$$

for any timelike vector V parallel to X . By integrating this equation over Y , we obtain

$$R_{VV}(X) \int_Y d\mathbf{v}(Y) H = \int_Y d\mathbf{v}(Y) \left[H R_{VV} - \frac{1}{4} \Delta_Y H \right] \quad (4.5.7)$$

If $R_{VV} \geq 0$ and H is regular and bounded everywhere, the right-hand side of this equation is non-negative. Hence, we obtain

$$R_{VV}(X) \geq 0. \quad (4.5.8)$$

Q.E.D.

4.5.4 $D = 10/11$ 超重力理論における SECM-theory ($D = 11$)

$$\begin{aligned}
R_{MN} &= \frac{1}{12} F_{M\dots} F_{N\dots} - \frac{1}{6} |F_4|^2 g_{MN} \\
R_{00} &= \frac{1}{18} F_{0ijk} F_0{}^{ijk} + \frac{1}{144} F_{ijkl} F^{ijkl}
\end{aligned} \tag{4.5.9}$$

 $D = 10$ Type IIB Supergravity

$$\begin{aligned}
R_{MN} &= \frac{1}{2\tau_2^2} \nabla_{(M} \tau \nabla_{N)} \bar{\tau} + \frac{1}{4\tau_2} \left(G_{** (M} \bar{G}_{N)}^{**} - \frac{1}{2} |G_3|^2 g_{MN} \right) + \frac{1}{96} \tilde{F}_{M****} \tilde{F}_N{}^{****} \\
R_{00} &= \frac{1}{2\tau_2^2} |\nabla_0 \tau|^2 + \frac{3}{16\tau_2} G_{0ij} \bar{G}_0{}^{ij} + \frac{1}{48\tau_2} G_{ijk} \bar{G}^{ijk} + \frac{1}{96} \tilde{F}_{0ijkl} \tilde{F}_0{}^{ijkl}
\end{aligned} \tag{4.5.10}$$

 $D = 10$ Type IIA Supergravity

$$\begin{aligned}
R_{MN} &= \frac{1}{2} \partial_M \phi \partial_N \phi + e^{-\phi} \left(\frac{1}{4} H_{M**} H_N{}^{**} - \frac{1}{8} |H_3|^2 g_{MN} \right) \\
&\quad + e^{\phi/2} \left(\frac{1}{12} \tilde{F}_{M***} \tilde{F}_N{}^{***} - \frac{3}{16} |\tilde{F}_4|^2 g_{MN} \right) \\
&\quad + e^{3\phi/2} \left(\frac{1}{2} \tilde{F}_M * \tilde{F}_N{}^* - \frac{1}{16} |\tilde{F}_2|^2 g_{MN} \right) + \frac{m_0^2}{16} e^{5\phi/2} g_{MN}, \\
R_{00} &= \frac{1}{2} (\partial_0 \phi)^2 + e^{-\phi} \left(\frac{3}{16} H_{0ij} H_0{}^{ij} + \frac{1}{48} H_{ijk} H^{ijk} \right) \\
&\quad + e^{\phi/2} \left(\frac{5}{96} \tilde{F}_{0ijk} \tilde{F}_0{}^{ijk} + \frac{1}{128} \tilde{F}_{ijkl} \tilde{F}^{ijkl} \right) \\
&\quad + e^{3\phi/2} \left(\frac{7}{16} \tilde{F}_{0i} \tilde{F}_0{}^i + \frac{1}{32} \tilde{F}_{ij} \tilde{F}^{ij} \right) - \frac{m_0^2}{16} e^{5\phi/2}.
\end{aligned} \tag{4.5.11}$$

 $D = 10$ Type I Supergravity

$$\begin{aligned}
R_{MN} &= \frac{1}{2} \partial_M \phi \partial_N \phi + e^{-\phi} \left(\frac{1}{4} \tilde{H}_{M**} \tilde{H}_N{}^{**} - \frac{1}{8} |\tilde{H}_3|^2 g_{MN} \right) \\
&\quad + \frac{\alpha'}{4} e^{-\phi/2} \text{Tr} \left(F_{M*} F_N{}^* - \frac{1}{8} |F_2|^2 g_{MN} \right) \\
R_{00} &= \frac{1}{2} (\partial_0 \phi)^2 + \frac{e^{-\phi}}{48} \left(9 \tilde{H}_{0ij} \tilde{H}_0{}^{ij} + \tilde{H}_{ijk} \tilde{H}^{ijk} \right) + \frac{\alpha'}{64} e^{-\phi/2} \text{Tr} (14 F_{0i} F_0{}^i + F_{ij} F^{ij})
\end{aligned} \tag{4.5.12}$$

加速膨張を実現するための必要条件 以下のいずれかの条件を破る必要がある：

1. 内部空間の古典的記述
2. ワープしたコンパクト化の枠組み： $ds^2(M_D) = W(y)^2 g(X_4) + g(Y_n)$
3. Y_n : 定常、コンパクト、閉多様体。
4. ワープ因子 $W(y)$ が有界で滑らかな非ゼロ関数。
5. 出発点となる高次元理論が強エネルギー条件を満たす。

4.5.5 Maldacena-Nunez の No-Go 定理

【Theorem 4.5.2 (Maldacena-Nunez 2001)] For a compactification $M_D = X_d \times Y_n$ of a higher dimensional theory by a classical solution satisfying the following conditions, X_d cannot be de Sitter spacetime:

1. The spacetime metric has the structure

$$g(M_D) = W(y)^2 [g(X_d) + \hat{g}(Y_n)].$$

2. The Newton constant in X_d is finite:

$$\int_Y d\mu_{\hat{g}} W^{D-2} < \infty.$$

3. Near the boundary of Y_n or singularities of W , W decreases monotonically toward them.
4. In the original higher-dimensional theory, the potential is non-positive and all massless bosonic fields have positive kinetic terms.

□

Reference

- Maldacena JM, Nunez G (2001): IJMPA16, 822

【Note 4.5.3】 A stronger result can be obtained for the massive IIA supergravity. □

Proof. In the Einstein equations

$$\text{Ric}(M) = \mathbb{T}(M) - \frac{1}{D-2} T_s g(M) \quad (4.5.13)$$

$\text{Ric}(M)$ can be written

$$\text{Ric}(M) = \text{Ric}(X) - \left(\hat{\nabla}^2 \ln W + (D-2)(\hat{\nabla} \ln W)^2 \right) g(X) \quad (4.5.14)$$

Hence, the contraction of the Einstein equations with $W^{D-2}g(X)^{-1}$ gives

$$\frac{d}{D-2} \hat{\Delta}(W^{D-2}) = W^{D-2} R_s(X) + W^D \tilde{T}; \quad \tilde{T} = -T_\mu^\mu + \frac{d}{D-2} T_M^M \quad (4.5.15)$$

If X is Mink or dS, massless form field strength F_p should have the form

$$F_p = W_d(X) \wedge \alpha_{p-d}(Y) + \beta_p(Y) \quad (4.5.16)$$

Then, from the condition 4

$$\tilde{T} = -\frac{2d}{D-2} V + \sum_p \frac{d}{D-2} ((D-p-1)\alpha \cdot \alpha + (p-1)\beta \cdot \beta) \geq 0 \quad (4.5.17)$$

Hence,

$$0 \geq \frac{d}{D-2} \int_{\partial Y} d\sigma_{\hat{g}} \nabla_\perp(W^{D-2}) = \int_Y d\mu_{\hat{g}} \left(d(d-1)\Lambda W^{D-2} + W^D \tilde{T} \right) \geq 0 \quad (4.5.18)$$

Q.E.D.

【Note 4.5.4】 $D = 10$ に対して, $p = D$ となるフラックスは, IIA 理論における質量 $F_0 = m_0$ の Hodge 双対. このフレックスが存在すると, \tilde{T} の正值性は保証されない. □

4.5.6 ブレーンを含む IIB 理論における No-Go 定理

【Theorem 4.5.5 (Dasgupta et al 2014; Giddings, Kachru, Polchinski 2002)**】**

For a compactification $M_{10} = X_4 \times Y_6$ of 10D IIB string theory by a classical solution satisfying the following conditions, X_4 cannot be de Sitter spacetime:

1. The spacetime metric has the structure

$$g(M_{10}) = e^{2A(y)} [g(X_4) + e^{-2A(y)} \hat{g}(Y_6)].$$

2. The internal space is a smooth, compact closed manifold, and the warp factor is smooth.
3. All fields are invariant under the maximal symmetry of X_4 .
4. Flux, non-trivial dilaton, smeared D -brane/ \bar{D} -brane are allowed, but O -planes/ \bar{O} -planes or higher-order corrections/quantum corrections are not included.

□

References

- Dasgupta K et al (2014): JHEP 1407, 054
- Giddings SB, Kachru S, Polchinski J (2002): PRD66, 106006

【Note 4.5.6】 The inclusion of curvature corrections, D-instanton corrections, loop-corrections may lead to a de Sitter solution. _____ □

Proof. 1. From the Einstein equations, the scalar curvature of X_4 can be written

$$\hat{\Delta}e^{4A} = R_s(X) - \frac{\kappa_{10}^2}{2}e^{2A} [T_\mu^\mu - T_m^m]. \quad (4.5.19)$$

Integrating this yields

$$R_s(X) \int_Y d\mu(Y) = \frac{\kappa_{10}^2}{2} \int_Y d\mu(Y) e^{2A} [T_\mu^\mu - T_m^m] \quad (4.5.20)$$

2. The D-brane and O-plane actions read

$$S_{D_p} = -T_p \int_{\Sigma_{p+1}} d^{p+1}x e^{\frac{p+1}{4}\phi} \sqrt{-\det(g + F + B)} + \mu_p \int_{\Sigma_{p+1}} C \wedge e^{F+B}, \quad (4.5.21a)$$

$$S_{O_p} = -T_{O_p} \int_{\Sigma_{p+1}} d^{p+1}x e^{\frac{p+1}{4}\phi} \sqrt{-\det(g)} + \mu_{O_p} \int_{\Sigma_{p+1}} C. \quad (4.5.21b)$$

where $T_p > 0$, $T_{O_p} < 0$.

3. Their EM tensors are given by

$$T_\mu^\mu [D_p/\bar{D}_p] = -4T_p e^{\frac{p+1}{4}\phi} d\mu [D_p/\bar{D}_p], \quad (4.5.22a)$$

$$T_m^m [D_p/\bar{D}_p] = -(p-3)T_p e^{\frac{p+1}{4}\phi} d\mu [D_p/\bar{D}_p], \quad (4.5.22b)$$

$$T_\mu^\mu [O_p/\bar{O}_p] = 4|T_{O_p}| e^{\frac{p+1}{4}\phi} d\mu [O_p/\bar{O}_p], \quad (4.5.22c)$$

$$T_m^m [O_p/\bar{O}_p] = (p-3)|T_{O_p}| e^{\frac{p+1}{4}\phi} d\mu [O_p/\bar{O}_p] \quad (4.5.22d)$$

Hence, D-brane does not help to realise dS:

$$T_\mu^\mu [D_p/\bar{D}_p] - T_m^m [D_p/\bar{D}_p] = -(12-p)T_p e^{\frac{p+1}{4}\phi} d\mu [D_p/\bar{D}_p] < 0 \quad (4.5.23)$$

In contrast, O-planes have negative energy and may help to realise dS:

$$T_\mu^\mu [O_p/\bar{O}_p] - T_m^m [O_p/\bar{O}_p] = (12-p)|T_{O_p}| e^{\frac{p+1}{4}\phi} d\mu [O_p/\bar{O}_p] > 0 \quad (4.5.24)$$

However, they cannot be smoothed out, so its back reaction produces singularity.

Q.E.D.

[Note 4.5.7 (Argument based on SEC)] The strong energy condition gives slightly different conditions:

(4.5.25)

- D_p-brane ($\tau > 0$): only 8-brane or 9-brane provides a negative contribution to R_{00}
- O_p-plane ($\tau < 0$): p -brane ($p < 7$) provide a negative contribution to R_{00} .

□

[Note 4.5.8]

- The tadpole condition requires the existence of an O_p-plane if D_p-branes exist, and if the internal space is closed.
- An O_p-plane produces naked singularities classically.

□

[Note 4.5.9 (Tadpole condition)] By integrating the field equation with the brane source

$$dF_n = H_3 \wedge F_{n-2} + (2\pi\sqrt{\alpha'})^{n-1} \rho_{8-n}^{\text{loc}} \quad (4.5.26)$$

for $n = 5$ over the internal space Y , we obtain the constraint

$$N_{\text{D3}} + N_{\text{flux}} = \frac{1}{4} N_{\text{O3}} \quad (4.5.27)$$

where

$$N_{\text{flux}} = \frac{1}{(2\pi)^4 \alpha'^2} \int_{Y_6} H_3 \wedge F_3 = e_K m_{\text{RR}}^K - m^K e_{K\text{RR}}, \quad (4.5.28)$$

$$\frac{1}{(2\pi)^2 \alpha'} \int_{A_K/B_K} H_3 = m^K / e_K, \quad K = 1, \dots, h^3/2, \quad (4.5.29)$$

$$\frac{1}{(2\pi)^2 \alpha'} \int_{A_K/B_K} F_3 = m_{\text{RR}}^K / e_{K\text{RR}}, \quad K = 1, \dots, h^3/2. \quad (4.5.30)$$

Hence, if the flux does not match the number of D3 branes, an appropriate number of O3 planes are required.

For example, for the flux CY compactification of IIB, the 3-form fluxes are imaginary self-dual and satisfies the condition $*_Y F_3 = e^{-\phi} H_3$. Hence,

$$N_{\text{flux}} = \frac{1}{(2\pi)^4 \alpha'^2} \int_Y e^{-\phi} *_Y F_3 \wedge F_3 = \frac{1}{(2\pi)^4 \alpha'^2} \int_Y d\mu(Y) e^{-\phi} |F_3|^2 \geq 0. \quad (4.5.31)$$

□

4.5.7 ブレーンを含む IIA 理論における No-Go 定理

【Theorem 4.5.10 (Hertzberg MP, Kachru S, Taylor W, Tegmark M (2007))】

For a CY compactification of $M_{10} = X_4 \times Y_6$ of 10D IIA string theory by a classical solution satisfying the following conditions, X_4 cannot be de Sitter spacetime:

1. The spacetime metric has the structure

$$g(M_{10}) = g(X_4) + \hat{g}(Y_6). \quad (4.5.32)$$

2. The internal space is a Calabi-Yau manifold.
3. All fields are invariant under the maximal symmetry of X_4 .
4. H_3 -flux, RR-flux, non-trivial dilaton, smeared D6-branes and O6-planes are allowed,

Further, if one of the RR-fluxes does not vanish, X_4 cannot be the Minkowski spacetime. □

References

- Hertzberg MP, Kachru S, Taylor W, Tegmark M: jhep 12, 095 (2007)
”Inflationary constraints on type IIa string theory”

Proof. モジュライ変数 ρ , τ を

$$\rho = (\text{Vol}(Y_6))^{1/3}, \quad \tau = e^{-\phi} (\text{Vol}(Y_6))^{1/2} \quad (4.5.33)$$

おくと, Einstein frame

$$g_{\mu\nu}^E = \frac{\tau^2}{m_{\text{pl}}^2 \kappa_{10}^2} g_{\mu\nu}(X) \quad (4.5.34)$$

において, これらの運動項は

$$\mathcal{L}_K = -\frac{1}{2} \{(\partial\hat{\rho})^2 + (\partial\hat{\tau})^2\}; \quad (4.5.35)$$

$$\hat{\rho} = \sqrt{\frac{3}{2}} m_{\text{pl}} \ln \rho, \quad \hat{\tau} = \sqrt{2} m_{\text{pl}} \ln \tau. \quad (4.5.36)$$

Flux の量子化

$$\int_{\Sigma^p} F_p \propto f_{\Sigma} \in \mathbb{Z} \quad (4.5.37)$$

より, フラックスのポテンシャルへの寄与は

$$H_3 \Rightarrow V_3^{\text{NS}} \propto \rho^{-3} \tau^{-2}, \quad (4.5.38a)$$

$$F_p \Rightarrow V_p \propto \rho^{3-p} \tau^{-4}. \quad (4.5.38b)$$

また, ブレーンの寄与は

$$D6 : V_{D6} \propto \tau^{-3}, \quad (4.5.39a)$$

$$O6 : V_{O6} \propto -\tau^{-3}. \quad (4.5.39b)$$

よって, ψ を ρ, τ 以外のモジュライ変数として,

$$\begin{aligned} V &= V_3^{\text{NS}} + \sum_p V_p + V_{D6} + V_{O6} \\ &= \frac{A_3^{\text{NS}}(\psi)}{\rho^3 \tau^2} + \sum_p \frac{A_p(\psi)}{\rho^{p-3} \tau^4} + \frac{A_{D6}(\psi) - A_{O6}(\psi)}{\tau^3}. \end{aligned} \quad (4.5.40)$$

これより,

$$-\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} - 3\tau \frac{\partial V}{\partial \tau} = 9V + \sum_p p V_p \geq 9V. \quad (4.5.41)$$

Q.E.D.

【Note 4.5.11 (No-Go 定理を克服する可能性)】

- Geometrical/NG flux $T : H_{abc} \rightarrow f^a{}_{bc} \rightarrow Q_c^{ab} \rightarrow R^{abc}$

$$V_f \propto \pm \rho^{-1} \tau^{-2} \Rightarrow -(\rho \partial_\rho + 3\tau \partial_\tau) V_f = 9V_f - 2V_f, \quad (4.5.42a)$$

$$V_Q \propto \pm \rho \tau^{-2} \Rightarrow -(\rho \partial_\rho + 3\tau \partial_\tau) V_Q = 9V_Q - 4V_Q, \quad (4.5.42b)$$

$$V_R \propto \pm \rho^3 \tau^{-2} \Rightarrow -(\rho \partial_\rho + 3\tau \partial_\tau) V_R = 9V_R - 6V_R. \quad (4.5.42c)$$

- NS5 ブレーン

$$V_{NS5} \propto \pm \rho^{-2} \tau^{-2} \Rightarrow -(\rho \partial_\rho + 3\tau \partial_\tau) V_{NS5} = 9V_{NS5} - V_{NS5} \quad (4.5.43)$$

□

4.5.8 α' 補正を含む 10D ヘテロ型超重力理論

Field contents

- Boson: $g_{MN}, \phi, B_{MN}; A_M \in \text{ad}(G)$
ここで、 $G = \text{Spin}(32)/\mathbb{Z}_2$ or $E_8 \times E_8$
- Fermion: Majorana-Weyl spinors $\psi_M, \lambda; \chi \in \text{ad}(G)$

Action with $O(\alpha'^2)$ corrections

$$S = \int_M e^{-2\phi} \left[R_s(\omega_+) + 4|\nabla\phi|^2 - \frac{1}{2}|T|^2 - \frac{\alpha'}{4} (\text{tr}|F|^2 - \text{tr}|\mathcal{R}(\omega_+)|^2 + 2\text{tr}(\bar{\chi}\mathcal{D}\chi)) + \dots \right] \quad (4.5.44)$$

where

$$\omega_{\pm}^{AB} = \omega^{AB} \pm \frac{1}{2} H^{AB}{}_M dx^M + O(\alpha'^2), \quad (4.5.45a)$$

$$T = H_3 + \frac{\alpha'}{8} \text{tr}(\bar{\chi}\Gamma_{[3]}\chi), \quad (4.5.45b)$$

$$H_3 = dB_2 + \frac{\alpha'}{4} [\text{CS}(\omega_+) - \text{CS}(A)], \quad (4.5.45c)$$

$$\text{CS}(A) = \text{tr} \left(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A \right). \quad (4.5.45d)$$

This α' -correction is consistent with the anomaly cancellation condition

$$dH = \frac{\alpha'}{4} [\text{tr}(\mathcal{R}_+ \wedge \mathcal{R}_+) - \text{tr}(F \wedge F)] \quad (4.5.46)$$

4.5.9 α' を考慮した 10D 超重力理論における No-Go 定理

【Theorem 4.5.12 (Gautason, Junghans, Zagermann 2012)] 10D HET supergravity with **the full α corrections** does not allow **a compactification $M = dS^4 \times Y_6$ or $M = adS^4 \times Y_6$** under the following conditions:

1. Metric is regular and takes the warped form

$$g_M = e^{2A(y)} g_X(x) + \hat{g}_Y(y) \quad (4.5.47)$$

2. Fields are regular and invariant under the maximal symmetry of X

$$F_2 = F_Y(y), \quad H_3 = H_Y(y), \quad \phi = \phi(y) \quad (4.5.48)$$

3. No gaugino condensates
4. No stringy loop/non-perturbative correction.
5. **α' -expansion is allowed.**

□

Reference

- Gautason FF, Junghans D, Zagermann M (2012): JHEP 1206, 029 [arXiv:1204.0807]
“ On Cosmological Constants from a α' -Corrections

Proof. 1. Neglecting the terms that vanish when the configuration is invariant under the maximal symmetry group of X, the effective action reads

$$S = \int d\mu_X \tau^2 \left[e^{4a} \hat{V} + e^{2a} C R_s(X) + \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha')^{n+1} e^{-2na} W_n \right] \quad (4.5.49)$$

where

$$e^{-2\phi} = \tau^2 e^{-2\hat{\phi}}, \quad A = a + \hat{A}(y), \quad (4.5.50a)$$

$$C = \int d\mu_Y e^{-2\hat{\phi}+2\hat{A}} \left(1 - \frac{\alpha'}{2} (\hat{D}A)^2 + \dots \right), \quad (4.5.50b)$$

$$W_0 = \frac{1}{4} |\mathcal{R}(X)|^2, \quad (4.5.50c)$$

$$\begin{aligned} \hat{V} = & \int d\mu_Y e^{-2\hat{\phi}+4\hat{A}} \left\{ R_s(Y) - 8\hat{\square}A - 20(\hat{D}A)^2 + 4(\hat{D}\phi)^2 - \frac{1}{2} |\hat{H}|^2 \right. \\ & \left. + \frac{\alpha'}{4} \left(-\text{tr}|\hat{F}|^2 + |\hat{\mathcal{R}}^+|^2 + 8(\hat{D}\hat{D}A)^2 + 8\hat{D}A \cdot \hat{D}((\hat{D}A)^2) + 20((\hat{D}A)^2)^2 + |\hat{D}A \cdot \hat{H}|^2 \right) \right\} \end{aligned} \quad (4.5.50d)$$

2. Variations wrt τ and a give

$$\delta\tau : \hat{V} + C R_s(X) + W = 0, \quad (4.5.51a)$$

$$\delta a : 4\hat{V} + 2C R_s(X) - \sum_{n=1}^{\infty} 2n(\alpha')^{n+1} W_n = 0 \quad (4.5.51b)$$

From these, it follows

$$C R_s(X) + \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1)(\alpha')^{n+1} W_n = 0 \quad (4.5.52)$$

3. When X is a constant curvature space

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\lambda\sigma} &= \frac{\Lambda}{3} (g_{\mu\lambda}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\lambda}) \\ \Rightarrow R_{\mu\nu} &= \Lambda g_{\mu\nu}, \quad R_s = 4\Lambda, \quad |\mathcal{R}|^2 = \frac{4\Lambda^2}{3} \end{aligned} \quad (4.5.53)$$

Hence, the above equation can be written

$$4(C_0 + \alpha' C_1 + \dots)\Lambda + \alpha' \Lambda^2 \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1)w_n(\alpha'\Lambda)^n = 0 \quad (4.5.54)$$

There exists no solution such that

$$\Lambda = \Lambda_0 + \alpha' \Lambda_1 + \dots \neq 0. \quad (4.5.55)$$

Q.E.D.

[Theorem 4.5.13 (Quigly C 2015)] 10D HET supergravity with **the quadratic α corrections and gaugino condensates** does not allow a compactification $M = \text{dS}^4 \times Y_6$ or $M = \text{adS}^4 \times Y_6$ under the following conditions:

1. Metric is regular and takes the warped form

$$g_M = e^{2A(y)} g_X(x) + \hat{g}_Y(y) \quad (4.5.56)$$

2. Fields are regular and invariant under the maximal symmetry of X

$$\begin{aligned} F_2 &= F_Y(y), \quad H_3 = H_Y(y), \quad \phi = \phi(y), \\ \chi &= e^{-3\varphi/4} (\chi_4(x) \otimes \chi_6(y) + \text{c.c.}); \quad \hat{D}\chi_6 = O(\alpha') \end{aligned} \quad (4.5.57)$$

3. **Gaugino condensates**

$$\langle \text{tr}(\bar{\chi}_4 \chi_4) \rangle = M^3 f(\phi_0, \rho_0) \quad (4.5.58)$$

4. No stringy loop/non-perturbative correction.
5. α' -expansion is allowed.

□

Reference

- Quigley C (2015): arXiv: 1504.00652 “Gaugino Condensation and the Cosmological Constant”

Proof. 1. Under the ansatz of the theorem, the 10D action reduces to

$$S = \int_X d^4x \sqrt{-g_4} \int_Y d^6y \sqrt{\hat{g}_6} \left[R_s(X) + \frac{\alpha'}{4} e^{-\varphi} |\mathcal{R}_X|^2 - V(y) + O(\alpha'^3) \right] \quad (4.5.59)$$

where

$$\begin{aligned} V &= e^\varphi \left[e^{-\rho} (-R_s(Y) + |\hat{D}\rho|^2 + \hat{D}\rho \cdot \hat{D}\varphi) + \frac{1}{2} e^{-3\rho} |T_Y|^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha'}{4} e^{-2\rho} (\text{tr}|F_Y|^2 - \text{tr}|R_{+Y}|^2) + \frac{\alpha'}{2} M^3 f e^{-(\varphi+\rho)/2} (\bar{\chi}_6 \gamma^m \hat{D}_m \chi_6 + \text{c.c.}) \right] \end{aligned} \quad (4.5.60)$$

2. Variation wrt φ gives

$$-\hat{\nabla} \cdot (e^{\varphi-\rho} \hat{\nabla} \rho) + \frac{\alpha'}{4} e^{-\varphi} \langle |\mathcal{R}_X|^2 \rangle_X + V(y) \quad (4.5.61)$$

$$= \frac{\alpha'}{2} M^3 e^{\varphi-2\rho} \partial_\varphi (e^{-3(\varphi-\rho)/2} f) [\bar{\chi}_6 (\gamma^m \hat{\nabla}_m + \frac{1}{4} e^{-\rho} \gamma_{[3]} \cdot T) \chi_6 + \text{c.c.}] + O(\alpha'^3) \quad (4.5.62)$$

RHS of this equation can be set to $O(\alpha'^3)$ by requiring

$$\left[\gamma^m \hat{\nabla}_m + \frac{1}{4} \gamma^m \hat{\nabla}_m (-\varphi - \rho + 2 \ln f) + \frac{1}{4} e^{-\rho} \gamma_{[3]} \cdot T \right] \chi_6 = O(\alpha'^3) \quad (4.5.63)$$

Hence, by integrating over Y , we obtain

$$\frac{\alpha'}{4} \langle e^{-\varphi} \rangle_Y \langle |\mathcal{R}_X|^2 \rangle_X + \langle V \rangle_Y = O(\alpha'^3) \quad (4.5.64)$$

3. Variation wrt g gives

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R_s(X) g_{\mu\nu} + \frac{\alpha'}{4} \langle e^{-\varphi} \rangle_Y \left[R_{\mu***} R_{\nu}^{***} + 2 \nabla_\alpha \nabla_\beta R^{\mu\alpha\nu\beta} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} |\mathcal{R}_X|^2 \right] \\ = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \langle V \rangle_Y + O(\alpha'^3) \end{aligned} \quad (4.5.65)$$

4. When X is a constant curvature spacetime

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\lambda\sigma} &= \frac{\Lambda}{3} (g_{\mu\lambda} g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma} g_{\nu\lambda}) \\ \Rightarrow R_{\mu\nu} &= \Lambda g_{\mu\nu}, \quad R_s = 4\Lambda, \quad |\mathcal{R}|^2 = \frac{4\Lambda^2}{3} \end{aligned} \quad (4.5.66)$$

The two field equations reduce to

$$\frac{2\alpha'}{3} \Lambda^2 \langle e^{-\varphi} \rangle_Y + \langle V \rangle_Y = O(\alpha'^3) \quad (4.5.67a)$$

$$\Lambda = \frac{1}{2} \langle V \rangle_Y + O(\alpha'^3) \quad (4.5.67b)$$

Hence, by eliminating V , we obtain

$$\Lambda = -\frac{\alpha'}{3} \Lambda^2 \langle e^{-\varphi} \rangle_Y + O(\alpha'^3) \quad \Rightarrow \quad \Lambda = O(\alpha'^3) \quad (4.5.68)$$

Q.E.D.

【Theorem 4.5.14 (Kutasov D, Maxfield T, Melnikov I, Sethi S 2015)] For heterotic or type IIB with no RR fluxes, compactification to dS^n ($n \geq 4$) is not allowed even when all α' -corrections including perturbative curvature corrections and world sheet non-perturbative effects are allowed, if no stringy loop or non-perturbative correction is included. □

Reference

- Kutasov D, Maxfield T, Melnikov I, Sethi S (2015):arXiv:1504.00056. “Constraining de Sitter Space in String Theory”

4.5.10 如何にして No-Go 定理を回避するか？

残る可能性

- 高次の α' 補正と RR フラックスを含む II 型超重力理論 (D ブレーンと O ブレーンを含む)
 1. KKLT シナリオ
 - i) IIB 理論の warped CY コンパクト化 with ISD flux(+compensating O_3 -planes) \Rightarrow No scale 4D $N = 1$ SUGRA
 - ii) Instanton (Euclidean D-brane)/D7 上での gaugino condensates による NP 効果 \Rightarrow Kähler モジユライの安定化 \Rightarrow adS^4 .
 - iii) \bar{D}_3 ブレーンによる vacuum uplift \Rightarrow dS^4
 2. LVS (Large volume scenario)
 - ii') ii)+Kähler ポテンシャルへの α' 補正 \Rightarrow LV コンパクト化
 - iii') iii) and/or Kähler uplifting \Rightarrow dS^4
 3. Monodromy inflation (低エネルギーでの $N = 1$ sugra の放棄)
- 超重力理論の枠組みの拡大
 - Non-geometric flux を用いたコンパクト化 [Blumenhagen et al 2015-2016]
- 開多様体によるコンパクト化
 - 例: 4D $SO(4, 4)$ -GSUGRA の Dall'Agata-Inverso dS -臨界点の M 理論へのアップリフト [Baron, Dall'Agata 2015]
- ストリングループ効果・非摂動効果

§4.6

KKLT

4.6.1 KKLT モデル

- 基本モデル

- IIB 型理論の no scale ISD CY フラックスコンパクト化 (複素モジュライ固定)[Giddings SB, Kachru S, Polchinski J 2002[35]]

$$\begin{aligned}
 K &= -3 \ln(\rho + \bar{\rho}) + K_0(z, \bar{z}), \quad W = W(z) \\
 \Rightarrow V &= e^K (K^{i\bar{j}} D_i W D_{\bar{j}} \bar{W} - |W|^2) = e^K K^{a\bar{b}} D_a W D_{\bar{b}} \bar{W} \quad (4.6.1)
 \end{aligned}$$

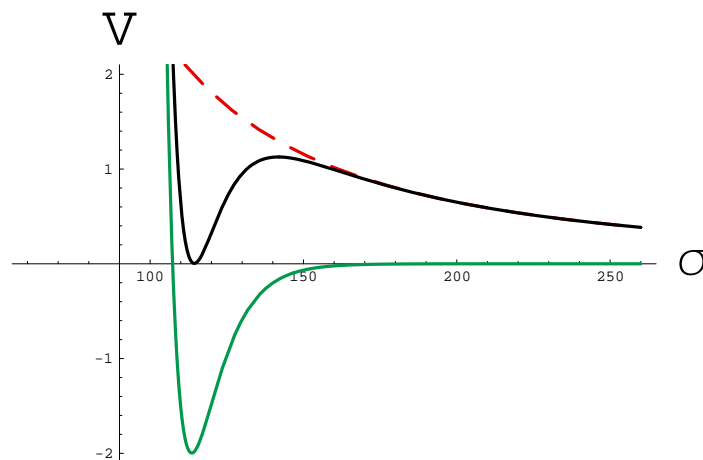
ここで, $i = (\rho, a)$.

- 非摂動論効果 (インスタントン/gaugino 凝縮:Witten E 1996[64];Tripathy PK, Trivedi SP 2003[61];Gorlich L, Kachru S, Tripathy PK, Trivedi SP 2004[36])
 \Rightarrow Kahler モジュライの安定化

$$K = K_0(z, \bar{z}) - 3 \ln(\rho + \bar{\rho}), \quad W = W_0(z) + Ae^{-a\rho} \quad (a = 2\pi/N). \quad (4.6.2)$$

$\Rightarrow N = 1$ 超対称な adS 真空

- 反 D3 ブレインにより超対称性を破り Minkowski 真空 (ないし dS 真空) を実現. または, 磁化 D7 ブレインの誘起する超ポテンシャルの D 項により自発的に SUSY を破る.



4.6.2 Flux コンパクト化により得られる4次元超重力理論

II型超重力理論では、RR フォームフラックスが存在しない直積型コンパクト化はモジュライに対する超ポテンシャルを生み出さない。しかし、フラックス存在すると、有限なポテンシャルが生じる。(Gukov S, Vafa C, Witten E 2000[40]; Giddings SB, Kachru S, Polchinski J 2002[35])

Moduli についての仮定 IIB型理論において、計量が

$$ds^2 = e^{-4u(x)} ds^2(X_4) + e^{4u(x)} ds_2^2(Y_6) \quad (4.6.3)$$

の形をしていて、モジュライ場が次の構成（対応する $N = 1$ 超組）を持つとする：

- 重力場： $g_{\mu\nu}$
- dilaton-axion 場： $\tau = C_0 + ie^{-\Phi}$
- サイズモジュラス： $\rho = b/\sqrt{2} + ie^{4u}$. ここで、

$$C_{[4]} = a_{[2]} \wedge J \Rightarrow da_{[2]} = e^{-8u} *_X db \quad (4.6.4)$$

- 複素モジュライ： $z^a, a = 1, \dots, h^{2,1}$

τ, ρ セクター このとき、10次元作用積分より、 τ, ρ に対する作用積分は

$$S = \frac{1}{2\kappa_4^2} \int_X d\text{vol}(X) \left(R(X) - 2 \frac{\nabla\tau \cdot \nabla\bar{\tau}}{|\tau - \bar{\tau}|^2} - 6 \frac{\nabla\rho \cdot \nabla\bar{\rho}}{|\rho - \bar{\rho}|^2} \right) \quad (4.6.5)$$

ここで、

$$\kappa_4^2 = \frac{\kappa_{10}^2}{\text{vol}(Y)} \quad (4.6.6)$$

これは、次の Kähler ポテンシャルに対応する：

$$\mathcal{K}_1 = -\ln[-i(\tau - \bar{\tau})] - 3\ln[-i(\rho - \bar{\rho})] \quad (4.6.7)$$

超ポテンシャルはゼロである。

複素構造モジュライセクター 一方、複素構造モジュライに対する Kähler ポテンシャルは、一般論より、

$$\mathcal{H}_2 = -\ln \left(-i \int_Y \Omega \wedge \bar{\Omega} \right) \quad (4.6.8)$$

で与えられる。ポテンシャルを求めるため、上記のモジュライ場による表式を 10 次元作用積分に代入すると、 $G_{[3]}$ を含む項

$$S_G = -\frac{1}{4\kappa_{10}^2} \int_X d\text{vol}(X) \int_Y \frac{1}{\text{Im } \tau} *_Y G_{[3]} \wedge \bar{G}_{[3]} \quad (4.6.9)$$

が残る。ここで、 $G_{[3]}$ をカイラル分解する：

$$G_{[3]} = G_{[3]}^+ + G_{[3]}^-; \quad *_Y G_{[3]}^\pm = \mp i G_{[3]}^\pm, \quad (4.6.10)$$

すると、

$$*_\alpha \alpha_3 \wedge *_\beta \beta_3 = \alpha_3 \wedge \beta_3 \Rightarrow \alpha_3^+ \wedge \beta_3^+ = 0, \quad \alpha_3^- \wedge \beta_3^- = 0 \quad (4.6.11)$$

より

$$\begin{aligned} *_Y G \wedge \bar{G} &= i(-G^+ + G^-) \wedge (\bar{G}^+ + \bar{G}^-) = -2iG^+ \wedge \bar{G}^+ + iG \wedge \bar{G} \\ &= -2iG^+ \wedge \bar{G}^+ + 2(\text{Im } \tau)H_{[3]} \wedge F_{[3]} \end{aligned} \quad (4.6.12)$$

よって、 S_G は

$$S_G = \int_X d\text{vol}(X) \left[-V - \int_Y H_{[3]} \wedge F_{[3]} \right] \quad (4.6.13)$$

ここで、第2項は $H_{[3]}$ および $F_{[3]}$ のコホモロジー類のみで決まる位相的項。一方、 V は

$$V = -\frac{i}{2\kappa_{10}^2 \text{Im } \tau} \int_Y G_{[3]}^+ \wedge \bar{G}_{[3]}^+ \quad (4.6.14)$$

($\text{Im } \tau = 1/g_s = \text{const}$ を仮定)。

このポテンシャルは、次の超ポテンシャル

$$W = \int_Y G_{[3]} \wedge \Omega \quad (4.6.15)$$

から導かれることを示す。まず、調和3形式が

$$*_Y \Omega = -i\Omega, \quad *_Y \chi_a = +i\chi_a \quad (4.6.16)$$

となることに注意する。これより、

$$G_{[3]}^+ = w_0 \Omega + \bar{w}^{\bar{a}} \bar{\chi}_{\bar{a}}; \quad w_0 = \frac{\int_Y G_{[3]} \wedge \bar{\Omega}}{\int_Y \Omega \wedge \bar{\Omega}}, \quad \bar{w}^{\bar{a}} = G^{\bar{a}b} \frac{\int_Y G_{[3]} \wedge \chi_b}{\int_Y \Omega \wedge \bar{\Omega}}. \quad (4.6.17)$$

よって,

$$V = \frac{\int_Y G_{[3]} \wedge \bar{\Omega} \int_Y \bar{G}_{[3]} \wedge \Omega + K^{ab} \int_Y G_{[3]} \wedge \chi_a \int_Y \bar{G}_{[3]} \wedge \bar{\chi}_b}{2(\text{Im } \tau) \kappa_{10}^2 (-i) \int_Y \Omega \wedge \bar{\Omega}}. \quad (4.6.18)$$

一方,

$$K = -\ln[-i(\tau - \bar{\tau})] - 3\ln[-i(\rho - \bar{\rho})] - \ln[-i \int \Omega \wedge \bar{\Omega}] \quad (4.6.19)$$

に対して,

$$\partial_\tau K = \frac{1}{\bar{\tau} - \tau}, \quad \partial_\rho K = \frac{3}{\bar{\rho} - \rho}, \quad \partial_a K = -k_a, \quad (4.6.20)$$

$$K_{\tau\bar{\tau}} = \frac{1}{|\bar{\tau} - \tau|^2}, \quad K_{\rho\bar{\rho}} = \frac{3}{|\bar{\rho} - \rho|^2} \quad (4.6.21)$$

より,

$$D_\tau W = \frac{1}{\bar{\tau} - \tau} \int_Y \bar{G} \wedge \Omega, \quad (4.6.22a)$$

$$D_\rho W = \frac{3}{\bar{\rho} - \rho} W, \quad (4.6.22b)$$

$$D_a W = \int_Y G \wedge \chi_a. \quad (4.6.22c)$$

よって, 超ポテンシャルとポテンシャルの関係式は

$$\begin{aligned} V &= \frac{e^K}{\kappa^2} \left[K^{i\bar{j}} D_i W \bar{D}_j \bar{W} - 3|W|^2 \right] \\ &= \frac{e^K}{\kappa^2} \left[|\bar{\tau} - \tau|^2 |D_\tau W|^2 + K^{ab} D_a W \bar{D}_b \bar{W} \right] \\ &= \frac{\int_Y G_{[3]} \wedge \bar{\Omega} \int_Y \bar{G}_{[3]} \wedge \Omega + K^{ab} \int_Y G_{[3]} \wedge \chi_a \int_Y \bar{G}_{[3]} \wedge \bar{\chi}_b}{2(\text{Im } \tau)(2\text{Im } \rho)^3 \kappa^2 (-i) \int_Y \Omega \wedge \bar{\Omega}} \end{aligned} \quad (4.6.23)$$

4.6.3 No-scale structure

CY に対する一般的な Kähler モジュライの定義 $D_j (j = 1, \dots, h^{1,1})$ を $H_4(Y, \mathbb{R})$ の基底となる divisors, D_j^* をその Hodge 双対から得られる $H^2(Y, \mathbb{R})$ の基底とする. このとき, Y の Kähler 形式 ω は $h^{1,1}$ 個の実パラメータ t^j を用いて

$$\omega = \sum_j t^j D_j^* \quad (4.6.24)$$

と表される. このとき, t^j は D_j^* の双対となる $H_2(Y, \mathbb{R})$ の基底 σ_j の体積となり,

$$t^j = \int_{\sigma_j} \omega \quad (4.6.25)$$

Y の体積 \mathcal{V} は

$$\mathcal{V} \equiv \frac{1}{6} \int_Y \omega^3 = \frac{1}{6} \kappa_{jkl} t^j t^k t^l. \quad (4.6.26)$$

また, divisor D_j の体積 τ_j は

$$\tau_j = \partial_{t_j} \mathcal{V} = \frac{1}{2} \kappa_{jkl} t^k t^l \quad (4.6.27)$$

この記法の元, 複素 Kähler 変数 ρ_j を

$$\rho_j = b_j + i\tau_j \quad (4.6.28)$$

により定義する. ここで, アクシオン場 b_j は, RR 場 $C_{[4]}$ により

$$b_j = \int_{D_j} C_{[4]} \quad (4.6.29)$$

で定義される.

フラックスコンパクト化の no-scale 構造 一般に, フラックスコンパクトされた IIB 理論の 4次元有効理論は, 次の $N = 1$ 超重力理論で与えられる:

$$K = -\ln[-i(\tau - \bar{\tau})] - \ln[\mathcal{V}] - \ln[-i \int \Omega \wedge \bar{\Omega}], \quad (4.6.30a)$$

$$W = \int_Y G_{[3]} \wedge \Omega \quad (4.6.30b)$$

W は Kähler モジュライに依存しないので, この系のポテンシャルは no-scale 構造をもつ:

$$V = e^K \sum_{a,b} K^{a\bar{b}} D_a W D_{\bar{b}} \bar{W}. \quad (4.6.31)$$

ここで, a, b は axion-dilaton および複素モジュライを動く.

Proof. まず,

$$\begin{aligned} K_j &= \partial_{\rho_j} K = i\mathcal{V}^{-1} \partial_{\tau_j} \mathcal{V} = i\mathcal{V}^{-1} \frac{\partial t^m}{\partial \tau_j} \tau_m \\ &= 3 i\mathcal{V}^{-1} \partial_{\tau_j} \mathcal{V} - i\mathcal{V}^{-1} t^j \end{aligned} \quad (4.6.32)$$

より,

$$K_j = \frac{i}{2\mathcal{V}} t^j. \quad (4.6.33)$$

また,

$$K_{j\bar{k}} = -\frac{1}{4\mathcal{V}} \frac{\partial t^j}{\partial \tau_k} + \frac{1}{8\mathcal{V}^2} t^j t^k \quad (4.6.34)$$

より,

$$K_{j\bar{k}} \tau^k = \frac{1}{4\mathcal{V}} t^j \Rightarrow K^{j\bar{k}} t^j = 4\mathcal{V} \tau_k. \quad (4.6.35)$$

よって,

$$|W|^{-2} K^{j\bar{k}} D_j W \overline{D_k W} = K^{j\bar{k}} K_j K_{\bar{k}} = \frac{1}{4\mathcal{V}^2} K^{j\bar{k}} t^j t^k = \frac{1}{\mathcal{V}} \tau_k t^k = 3. \quad (4.6.36)$$

Q.E.D.

4.6.4 複素モジュライの固定

基底状態では $V = 0$ より, $G_{[3]}$ は ISD(imaginary self-dual) となる:

$$D_a W = 0 \Rightarrow G_{[3]}^+ = 0 \Rightarrow *_Y G_{[3]} = iG_{[3]} \text{ ISD} \quad (4.6.37)$$

この条件は,

$$G_{[3]} \in \mathcal{H}^{2,1} \oplus \mathcal{H}^{0,3} \quad (4.6.38)$$

と同等で, 複素構造モジュライ (+ dilaton-axion) に対する $h^{2,1} + 1$ 個の拘束条件となるので, 一般にそれらの値を完全に決定する.

ただし, 超対称性はより強い条件 $D_\tau W = K_\tau W = 0$, $D_i W = K_i W = 0$ (任意の i) を要求する. 今回のモデルでは, この条件は, $\mathcal{D}_\rho W = 0 \Rightarrow W = 0$, したがって,

$$G_{[3]} \in \mathcal{H}^{2,1} \quad (4.6.39)$$

を要求する.

また, この基底状態は, フラックス $G_{[3]}$ に依存するが, 超ポテンシャルの形より, 正確には $G_{[3]}$ のコホモロジー類にのみ依存する:

$$\int_{A_j} F_3 = 4\pi^2 \alpha' M_j, \quad \int_{B_j} H_3 = -4\pi^2 \alpha' K_j \quad (4.6.40)$$

さらに, 弦理論においては, これらの (M_j, K_j) は整数に量子化される.

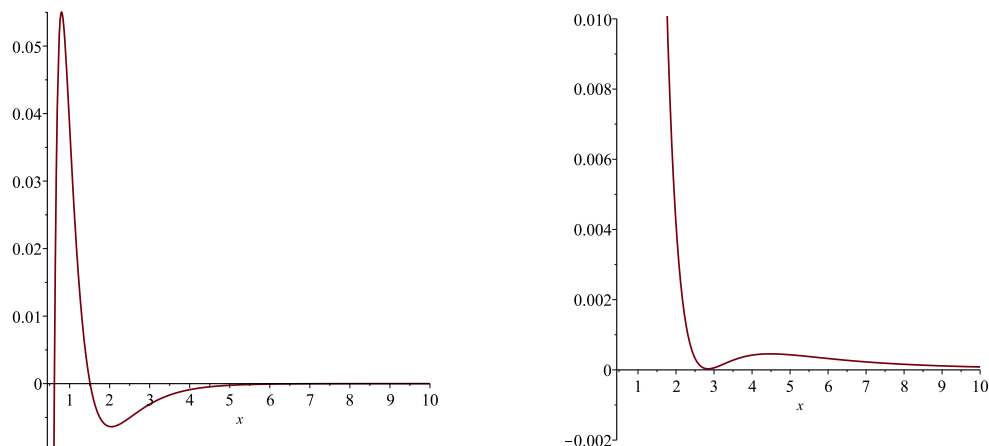


図 4.1: (左) KKLT シナリオにおける非摂動的ポテンシャル V/D . (右) それに反 D3 ブレーンを加えて uplift したポテンシャル $V/D + E/x^3$. $C/D = 3, E = 0.084$ の場合.

4.6.5 非摂動的量子効果

摂動論の範囲では、Kähler モジュライの超ポテンシャルはゼロであるが、非摂動的効果を考慮すると自明でないポテンシャルが生成される可能性がある。例えば、IIB モデルの F 理論的記述において、1 2 次元の時空が 8 次元 CY_8 により 4 次元にコンパクト化される際に、 CY_8 が算術種数 1 の divisor D を含む場合 ($\chi(D, \mathcal{O}_D) = 1$)、超ポテンシャルにサイズモジュラスに依存した項が加わる：(Witten E 1996 [63])

$$W = W_0(z) + A(z)e^{ia\rho}; \quad a = 2\pi/n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.6.41)$$

このとき、対応するポテンシャル $V(\rho)$ は、 $\sigma = e^{4u} = \text{Im } \rho$ に関して最小点 ρ_m を持つようになる。この最小点は、 $V(\rho_m) < 0$ より AdS^4 時空を与える (KKLT[48]。また、この基底状態は $N = 1$ 超対称性を保つ。

ここで、真空はフラックスを特徴づける整数値の組 (M_j, N_j) ごとに決まり、宇宙項の値が準連続となる無限個の超対称な真空の集合を与える (ランドスケープ問題)。

σ に対するポテンシャルは、複素構造モジュライ z が固定されたとすると、 $b = \text{Re } \rho$ について最小化して、

$$V = \frac{C}{x}e^{-2x} - \frac{D}{x^2}e^{-x}; \quad x = a\sigma, \quad C = \frac{a^3|A|^2}{6}, \quad D = \frac{a^3|A||W|}{2}. \quad (4.6.42)$$

このポテンシャルは、

$$\frac{C}{D} = \frac{|A|}{3|W|} > 2.5865 \dots \quad (4.6.43)$$

のとき極大点 $x = x_1$ と極小点 $x = x_2$ をもつ。

4.6.6 Vacuum uplift

References

- Kachru S, Pearson J, Verlinde H: jhep0206, 021 (2002)

”Brane/flux annihilation and the string dual of a non-supersymmetric field theory”

Fractional D3 ブレーン ($H \wedge F$) のみが存在する場合の Warped コンパクト化の突起部分を表す Klebanov-Strassler 解 (deformed conifold) は,

$$\int_{S^3} F_3 = 4\pi^2 M \quad (4.6.44)$$

とすると, 突起の先端近傍で

$$\begin{aligned} ds^2 &= h(r)^{-1/2} g(X_4) + h(r)^{1/2} g(CY_3) \\ &\simeq a_0^2 g(X_4) + g_s M b_0^2 \left(\frac{dr^2}{2} + d\Omega_3^2 + r^2 d\Omega_2^2 \right) \end{aligned} \quad (4.6.45)$$

とあらわされる. ここで,

$$a_0^2 \simeq \frac{\epsilon^{4/3}}{g_s^{1/2} M}, \quad b_0^2 \simeq 0.93266 \quad (4.6.46)$$

である.

いま, この空間に反 D3 ブレーンを入れると, F_5 フラックスによる力+重力

$$F_r(r) = -2\mu_3 \partial_r (h^{-1}) \quad (4.6.47)$$

により突起の先端 $r = 0$ に引かれそこに溜る. 一般に, 反 D3 ブレーンの作用積分は

$$S_{\bar{D}3} = \frac{\mu_3}{g_s} \int \text{Tr} \sqrt{\det(G_{\parallel})} - 2\pi\mu_3 \int C_4. \quad (4.6.48)$$

これに apex 近傍での計量と場の値を代入すると, 次のポテンシャルを得る:

$$\tilde{V}_{\text{eff}} \simeq 2 \frac{\mu_3^p}{g_s} \quad (4.6.49)$$

ここで, p は反 D3 ブレーンの枚数. これにワープ因子を考慮すると,

$$V_{\text{eff}} \simeq \frac{1}{h(0)^{1/2}} \left(\frac{a_0}{h(0)^{1/4}} \right)^4 \tilde{V}_{\text{eff}} = \frac{8D}{\sigma^3}; \quad D \simeq \frac{2pa_0^4 \mu_3}{g_s^4} \quad (\sigma = \text{Im } \rho = g_s^{-1} h^{1/2}). \quad (4.6.50)$$

4.6.7 インフレーションモデル

1. モジュライインフレーション

Racetrack model

- Kähler モジュライが1個 $T = X + iY$ で、超ポテンシャルに非摂動論効果に起因する2種類の項が現れる場合に、axion 方向に沿って saddle point インフレーションが起きる.

- モデル

$$K = -3 \ln(T + \bar{T}); \quad T = X + iY, \quad (4.6.51a)$$

$$W = W_0 + Ae^{-aT} + Be^{-bT} \quad (4.6.51b)$$

- 運動項と Uplifted ポテンシャル

$$\mathcal{L}_k = \frac{3M_P^2}{4X^2} ((\partial X)^2 + (\partial Y)^2), \quad (4.6.52)$$

$$V = V_F + \frac{E}{X^\alpha}; \quad (4.6.53)$$

$$\begin{aligned} V_F = & \frac{e^{-aX}}{6X^2} [aA^2(aX + 3)e^{-aX} + 3W_0aA \cos(aY)] \\ & + \frac{e^{-bX}}{6X^2} [bB^2(bX + 3)e^{-bX} + 3W_0bA \cos(bY)] \\ & + \frac{e^{-(a+b)X}}{6X^2} [AB(2abX + 3a + 3b) \cos((a-b)Y)]. \end{aligned} \quad (4.6.54)$$

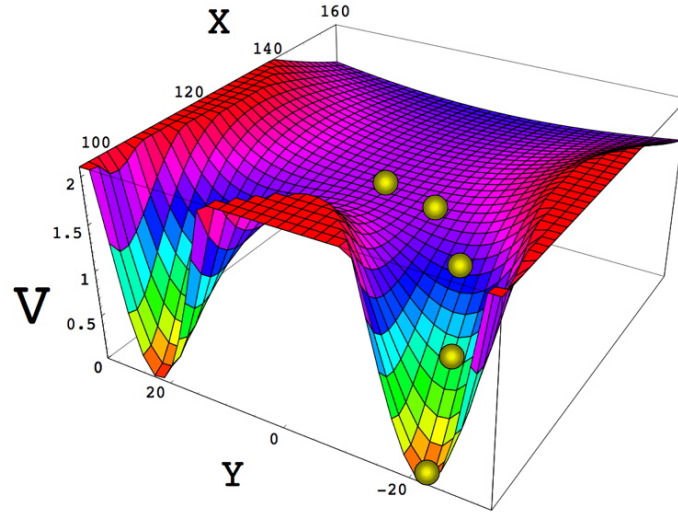
このポテンシャルは、パラメータを適当に調整すると、2つの最小点 (Mink/dS) と1つの鞍点をもつ。

- 例 : $A = \frac{1}{50}, B = -\frac{35}{1000}, a = \frac{2\pi}{100}, b = \frac{2\pi}{90}, W_0 = -\frac{1}{25000}$

$$\text{saddle pt} : (X_s, Y_s) = (123.22, 0), \quad \epsilon_s = 0, \quad \eta_s = -0.006097 \quad (4.6.55a)$$

$$\text{最小点} : (X_m, Y_m) = (96.130, \pm 22.146) \quad (4.6.55b)$$

- このモデルでは、 $|W_0| \ll 1, |a-b| \ll 1$ と取ると、鞍点近傍で $\cos((a-b)Y)$ 項により (Natural inflation タイプの) インフレーションが起きる。ただし、さらに初期値の微調整が必要。



Better racetrack model

Kähler モジュライが2個の場合に、それぞれの非摂動論効果の組み合わせにより、やはり axion 方向に saddle point インフレーションが起きる。

- モデル : $CP^4[1, 1, 1, 6, 9]$ コンパクト化

$$K = -2 \ln \mathcal{V}; \quad \mathcal{V} = \frac{\sqrt{2}}{18} (X_2^{3/2} - X_1^{3/2}), \quad (4.6.56a)$$

$$W = W_0 + Ae^{-aT_1} + Be^{-bT_2}. \quad (4.6.56b)$$

- ポテンシャル

$$V = V_F + \frac{D}{162\mathcal{V}^2}; \quad (4.6.57)$$

$$V_F = \frac{216}{(X_2^{3/2} - X_1^{3/2})^2} \left[P_1 e^{-2aX_1} + P_2 e^{-2bX_2} + P_5 e^{-aX_1 - bX_2} \cos(-aY_1 + bY_2) \right. \\ \left. + W_0 (P_3 e^{-aX_1} \cos(aY_1) + P_4 e^{-bX_2} \cos(bY_2)) \right], \quad (4.6.58)$$

$$P_1 = aA^2(3X_1 + 2aX_2^{3/2}X_1^{1/2} + aX_1^2), \quad P_2 = P_1(a, A, 1 \rightarrow b, B, 2), \quad (4.6.59)$$

$$P_3 = 3aAX_1, \quad P_4 = 3bBX_2, \quad (4.6.60)$$

$$P_5 = 3AB(aX_1 + bX_2 + 2abX_1X_2). \quad (4.6.61)$$

- 例 : $A = 0.56, B = 7.46666 \times 10^{-5}, a = 2\pi/40, b = 2\pi/258, D = 6.26019 \times 10^{-9}, W_0 = 5.22666 \times 10^{-6}$

$$\begin{aligned} \text{minimum} : X_1 = 98.75839, X_2 = 171.06117, Y_1 = 0, Y_2 = 129; \\ \mathcal{V}_s = 99, m^2 = 10^{-6} \sim 10^{-7}, \end{aligned} \quad (4.6.62a)$$

$$\begin{aligned} \text{saddle point} : X_1 = 108.96194, X_2 = 217, 68875, Y_1 = 20, Y_2 = 129; \\ V = 3.35 \times 10^{-16} M_P^4. \end{aligned} \quad (4.6.62b)$$

$$\begin{aligned} \text{unstable direction} : \delta X_1 = \delta X_2 = 0, \delta Y_1 = -0.6546, \delta Y_2 = 0.7560; \\ \eta \simeq -0.01 \end{aligned} \quad (4.6.62c)$$

インフレーションスケールは小さい !!

$$H_{\text{inf}} \approx 10^{-8} M_P \Rightarrow r \approx 10^{-12} \quad (4.6.63)$$

2. ブレーンインフレーション

ブレーンインフレーションの η 問題 D3- $\overline{D3}$ 系のエネルギーは, r をブレーン間の距離として

$$V(r) = 2T_3 \left(1 - \frac{1}{2\pi^3} \frac{T_3}{m_{\text{pl}10}^8 r^4} \right) = 2T_3 \left(1 - \frac{1}{2\pi^3} \frac{T_3^3}{m_{\text{pl}}^2 \phi^4} \right) \quad (4.6.64)$$

ここで, $\phi = T_3^{1/2} r$ は canonically normalized field. m_{pl} と $m_{\text{pl}10}$ の関係は $m_{\text{pl}}^2 = m_{\text{pl}10}^8 L^6$ (L は CY のサイズ) となるので, η パラメータは

$$\eta = -\frac{10}{\pi^3} \left(\frac{L}{r} \right)^6 \sim -0.3 \left(\frac{L}{r} \right)^6 \quad (4.6.65)$$

よって,

$$r < L \Rightarrow |\eta| > 0.3 \quad (4.6.66)$$

KKLMMT

1. ワープを考慮すると, D3- $\overline{D3}$ 間のポテンシャルは平坦になる : まず, 一般にワープした内部空間

$$ds^2 = h^{-1/2} g(X_4) + h^{1/2} g(Y_6); \quad g(Y_6) = dr^2 + \frac{r^2}{R^2} \gamma_{ab} dy^a dy^b \quad (4.6.67)$$

に置かれた D3/ $\overline{D3}$ ブレーンの作用積分は

$$S = -T_3 \int d^4x \sqrt{-g(X)} h^{-1} (1 - h g^{\mu\nu} \partial_\mu r \partial_\nu r)^{1/2} + T_3 \int_{B_4} C_4. \quad (4.6.68)$$

D3が $r = r_1$ に置かれているとすると、 $\overline{D3}$ が居る KS throat の底近傍近辺での h は

$$h \simeq R^4 \left(\frac{1}{r^4} + \frac{1}{N r_1^4} \right). \quad (4.6.69)$$

これより、

$$C_{0123} = h^{-1} \sqrt{-g(X)} \simeq \frac{r^4}{R^4} \left(1 - \frac{1}{N} \frac{r^4}{r_1^4} \right) \sqrt{-g(X)}. \quad (4.6.70)$$

これを $r = r_0 \ll r_1$ に居る $\overline{D3}$ の作用積分に代入して次の相互作用ポテンシャルを得る：

$$V = 2T_3 \frac{r_0^4}{R^4} \left(1 - \frac{1}{N} \frac{r_0^4}{r_1^4} \right) \quad (4.6.71)$$

2. Kähler ポテンシャルは、 ρ をサイズモジュライ、 ϕ を D3-反 D3 の距離パラメーターとして、

$$K = -3 \ln(\rho + \bar{\rho} - k(\phi, \bar{\phi})) \quad (4.6.72)$$

超ポテンシャルが ϕ に依存しないとすると、 ρ の安定点 $\rho = \rho_0$ 近傍で、 $m_\phi^2 \sim H^2$ となりインフレーションは起こらない。

3. 超ポテンシャルに ϕ 依存性を持たせると、微調整により $m_\phi^2 = O(10^{-2}) H^2$ とでき、インフレーションが起きる。

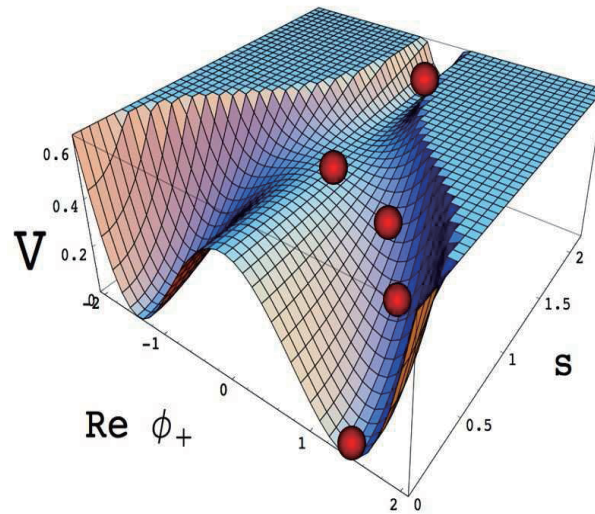
D3/D7 ブレーンインフレーション

1. ポテンシャル

$$K = -3 \ln(\rho + \bar{\rho}) - \frac{1}{2}(\phi - \bar{\phi})^2 \quad (4.6.73)$$

超ポテンシャルは ϕ に依存せず、 $s = \text{Re } \phi$ がインフラトンとなる。 s は D3-D7 の距離を表す。

2. 他の hypermultiplet との相互作用は、量子効果として s に log 型ポテンシャルを生成し、全体としては hybrid 型インフレーションが実現される。



文献ノート

1998 (ブレイン・反ブレインインフレーションモデル) (Dvali GR, Tye SHH [29])

2003 (**KKLT モデル**) すべてのモジュライが安定化され, 準安定 dS 真空をもつ, IIB 理論のワープしたフラックスコンパクト化モデル (Kachru S, Kallosh R, Linde A, Trivedi S[48]).

(**KKLMMT モデル**) KKLT モデルと $D\bar{D}$ 対を用いたブレインインフレーションモデルおよびワープを組み合わせたインフレーションモデル. (Kachru S, Kallosh R, Linde A, Maldacena J, McAllister L, Trivedi S[47])

(*D3/D7* ブレインインフレーションモデル) (Hsu JP, Kallosh R, Prokushkin S[43]; Koyama F, Tachikawa Y, Watari T[53]; Firouzjahi H, Tye SHH[32]; Hsu JP, Kallosh R 2004[42]; Dasgupta K, Hsu JP, Kallosh R, Linde A, Zagermann M 2004[25]; Chen P, Dasgupta K, Narayan K, Shmakova M, Zagermann M 2005[20])

(**DBI インフレーションモデル**) (Silverstein E, Tong D[58]; Alishahiha M, Silverstein E, Tong D 2004[1]; Chen XG 2005[22, 21])

2004 (**Racetrack モデル**) KKLT 型モデルでインスタントン効果に基づくサイズモジュラスポテンシャルとして, 2つの指数関数型ポテンシャルの和を用いると, スローロール条件を満たすモデルができることを指摘 (ただし, fine-tuningが必要). (Blanco-Pillado JJ, Burgess CP, Cline JM, Escoda C, Gomez-Reino M, Kallosh R, Linde A, Quevedo F [13])

2005 (タキオンインフレーションモデル) (Cremades D, Quevedo F, Sinha A[24])

(**N-flation**) (Dimopoulos S, Kachru S, McGreevy J, Wacker J [28])

ヘテロ理論・M理論でのインフレーション [Buchbinder EI 2005[15]; Becker K, Becker M, Krause A 2005[8]]

2006 (改良版 **Racetrack モデル**) CY orientifold $CP^4_{[1,1,1,6,9]}$ を用いた racetrack モデル. WMAP3years と整合的なスペクトル指数 $n_s \approx 0.95$ を与える. (Blanco-Pillado JJ, Burgess CP, Cline JM, Escoda C, Gomez-Reino M, Kallosh R, Linde A, Quevedo F[14])

2007 "A Delicate Universe": D3-D7 モデルでの η 問題 (Baumann D, Dymarsky A, Klebanov IR, McAllister L, Steinhardt PJ 2007[4])

4.6.8 KKLT シナリオの問題点

- Kähler モジュライが1自由度の場合, ポテンシャルの極小値は最小値でなく, $\sigma \rightarrow 0$ で $V \rightarrow -\infty$
- Kähler モジュライが2自由度以上の場合, ポテンシャルが安定な最小点を持つ可能性はあるが, 最小点の存在はフラックスや非摂動論効果のパラメータに敏感に依存し, 最小点の存在はモデルやパラメーターごとに個別に確認が必要.
- ポテンシャルが極小となる内部空間サイズは一般的にストリングスケールとなり, 古典論が適用可能な十分大きいサイズを実現するには, フラックスを微調整して, $|W^0| \lesssim 10^{-4}$ にしないと行けない.

§4.7

LVS

概要 KKLT シナリオに Kähler ポテンシャルに対する α'^3 補正を加えることにより, W_0 のチューニングなしに Kähler モジュライを内部空間体積 \mathcal{V} が大きな値となるよう安定化することが可能となる. また, このシナリオでは, ストリングスケール, KK スケール, モジュライ質量, $m_{3/2}$ が \mathcal{V} のべきにより決まるヒエラルキーが実現される.

References

- Balasubramanian V, Berglund P, Conlon JP, Quevedo F: jhep 03, 007 (2005)
”Systematics of moduli stabilisation in CY flux compactification”
- Joseph P. Conlon, Fernando Quevedo and Kerim Suruliz: jhep 08, 007 (2005)
”Large-volume flux compactifications: moduli spectrum and D3/D7 soft supersymmetry breaking”

4.7.1 Large volume scenario

- 基本モデル
 - IIB 型理論の no scale ISD CY フラックスコンパクト化において, Kähler ポテンシャルに対する α'^3 補正を考慮 \Rightarrow 複素モジュライ固定
- CY の位相についての制限: $h^{2,1} > h^{1,1} > 1$
- α'^3 補正 + 非摂動論効果 (インスタントン/gaugino 凝縮): \Rightarrow Kähler モジュライの安定化

CY の体積 \mathcal{V} が大きい極限で, ポテンシャル V は負からゼロに近づき, Kähler モジュライ $\rho_j = b_j + i\tau_j$ の 1 つ $j = s$ 以外は $\tau_j \sim \mathcal{V}^{2/3}$ に従って増大, $\tau_s \sim \log(\mathcal{V})$ となる方向でポテンシャルが最小点をもつ.

\Rightarrow 超対称性の敗れた adS 真空

- 反 D3 ブレイン/magnetized D7 ブレインにより Minkowski 真空 (ないし dS 真空) を実現.

4.7.2 Kähler ポテンシャルに対する α'^3 補正

II 型超弦理論の低エネルギー極限の α' 展開の最初の補正は α'^3 次で現れる:

$$S_{\text{IIB}} = S_{b,0} + \alpha'^3 S_{b,3} + \alpha'^4 S_{b,4} + \cdots + S_{\text{CS}} + S_{l,0} + \alpha'^2 S_{l,2} + \cdots. \quad (4.7.1)$$

ここで, $S_{b,0}$ と S_{CS} は通常的作用積分, $S_{l,0}$ は最低次のブレーン作用積分:

$$S_{b,0} = \frac{1}{(2\pi)^7 \alpha'^4} \int d^{10}x \sqrt{-g} \left[e^{-2\phi} (R_s + 4(\nabla\phi)^2) - \frac{1}{2} F_1^2 - \frac{1}{2 \cdot 3!} G_3 \cdot \bar{G}_3 - \frac{1}{4 \cdot 5!} \tilde{F}_5^2 \right], \quad (4.7.2a)$$

$$S_{\text{CS}} = \frac{1}{4i(2\pi)^7 \alpha'^4} \int e^\phi C_4 \wedge G_3 \wedge \bar{G}_3, \quad (4.7.2b)$$

$$S_{l,0} = \sum_{\text{sources}} \left(- \int d^{p+1} \xi T_p e^{-\phi} \sqrt{-g} + \mu_p \int C_{p+1} \right). \quad (4.7.2c)$$

リーディングの補正は一般に次の形をもつ (完全には決定されていない):

$$S_{b,3} \sim \frac{\alpha'^3}{\alpha'^4} \int d^{10}x \sqrt{-g} \left[\mathcal{R}^4 + \mathcal{R}^3 (G_3^2 + F_5^2 + (\nabla\tau)^2 + \nabla^2\tau) \right. \\ \left. + \mathcal{R}^2 ((DG_3)^2 + (DG_5)^2 + G_3^4 + \cdots) + \mathcal{R} (G_3^6 + \cdots) + G_3^8 + \cdots \right] \quad (4.7.3)$$

これらのうち, 10次元で \mathcal{R}^4 に比例する項が4次元有効理論において Kähler ポテンシャルに α'^3 の補正を生み出し, その具体的な形は次の式で与えられると予想されている:

$$K = K_{\text{cs}} - 2 \ln \left(\mathcal{V} - \frac{\chi(Y)}{8(2\pi)^3} f_{3/2}^{(0,0)}(\tau, \bar{\tau}) \right). \quad (4.7.4)$$

ここで,

$$f_{3/2}^{(0,0)}(\tau, \bar{\tau}) = \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \frac{e^{-3\phi/2}}{|m + n\tau|^2} \\ = \frac{2\zeta(3)}{e^{3\phi/2}} + \frac{2\pi^2}{3} e^{\phi/2} + \text{instanton terms}. \quad (4.7.5)$$

KKLT との比較

Kähler モジュライが体積モジュライ ρ のみの場合,

$$\mathcal{V} = \frac{5}{6}t^3 = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}\sigma^{3/2} \quad (\sigma = -i(\rho - \bar{\rho})/2) \quad (4.7.6)$$

より, $\mathcal{V} \gg \xi$ で

$$V \approx e^K \left[\frac{4\sigma^2}{3}a^2|A|^2e^{-2a\sigma} - 4a|W A a|e^{-a\sigma} + \frac{3\sqrt{5}\xi|W|^2}{\sqrt{2}g_s^{3/2}\sigma^{3/2}} \right] \quad (4.7.7)$$

となる. ここで,

$$\xi = -\frac{\zeta(3)}{2(8\pi)^3}\chi(Y). \quad (4.7.8)$$

よって, \mathcal{V} が大きい極限および小さい極限の両方で, 最後の補正項が支配的となる. これは, KKLT モデルが妥当でないことを意味する. CY に対し,

$$\chi(Y) = 2(h^{1,1} - h^{2,1}) \quad (4.7.9)$$

なので, $h^{2,1} > h^{1,1}$ なら $\xi > 0$.

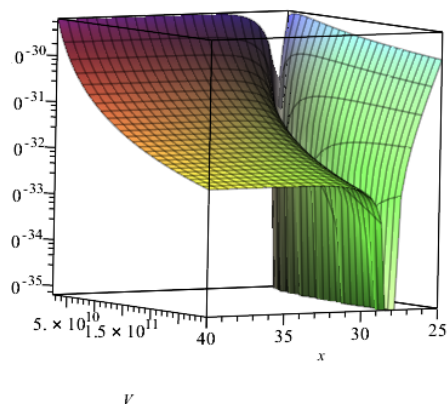


図 4.2: $CP^4[1, 1, 1, 6, 9]$ LVC で得られる 2次元セクターでのポテンシャル. $a_1 = 2\pi, A_1 = 1, W_0 = 10$

例 : $CP^4[1, 1, 1, 6, 9]$ の複素超曲面

例として, 18次の射影代数多様体 $CP^4[1, 1, 1, 6, 9]$ の複素超曲面 Y で表される CY を考えると, モジュライの数は, $h^{1,1} = 2, h^{2,1} = 272$ である ($\chi(Y) = -540$). この CY 族の中で $\Gamma = \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{18}$ 不変性を持つものに限定すると, 複素構造モジュライは ϕ と ψ の 2 個になる :

$$Y : z_1^{18} + z_2^{18} + z_3^{18} + z_4^3 + z_5^2 - 18\psi z_1 z_2 z_3 z_4 z_5 - 3\phi z_1^6 z_2^6 z_3^6 = 0 \quad (4.7.10)$$

を考える. 体積は

$$\mathcal{V} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tau_2^{3/2} - \tau_1^{3/2}). \quad (4.7.11)$$

一方, すべての複素モジュライが固定されているとして, 超ポテンシャルは

$$W = W_0 + A_1 e^{-(a_1/g_s)T_1} + A_2 e^{-(a_2/g_s)T_2}. \quad (4.7.12)$$

よって, ポテンシャルは \mathcal{V} の大きい極限 $\tau_2 \gg \tau_1 \sim 1$ で

$$V = \frac{\lambda}{\mathcal{V}} x^{1/2} e^{-2x} - \frac{\mu}{\mathcal{V}^2} x e^{-x} + \frac{\nu}{\mathcal{V}^3}, \quad (4.7.13)$$

$$x = a_1 t_1 / g_s, \quad (4.7.14)$$

$$\lambda = 24\sqrt{2} a_1^{3/2} |A_1|^2, \quad \mu = 4|A_1 W|, \quad \nu = \frac{3}{4} \xi |W|^2 \quad (4.7.15)$$

このポテンシャルは, 一般に

$$x = x_m \sim \left(\frac{4\nu\lambda}{\mu^2} \right)^{2/3}, \quad \mathcal{V} = \mathcal{V}_m \sim \frac{\mu}{2\lambda} \sqrt{x_m} e^{x_m} \quad (4.7.16)$$

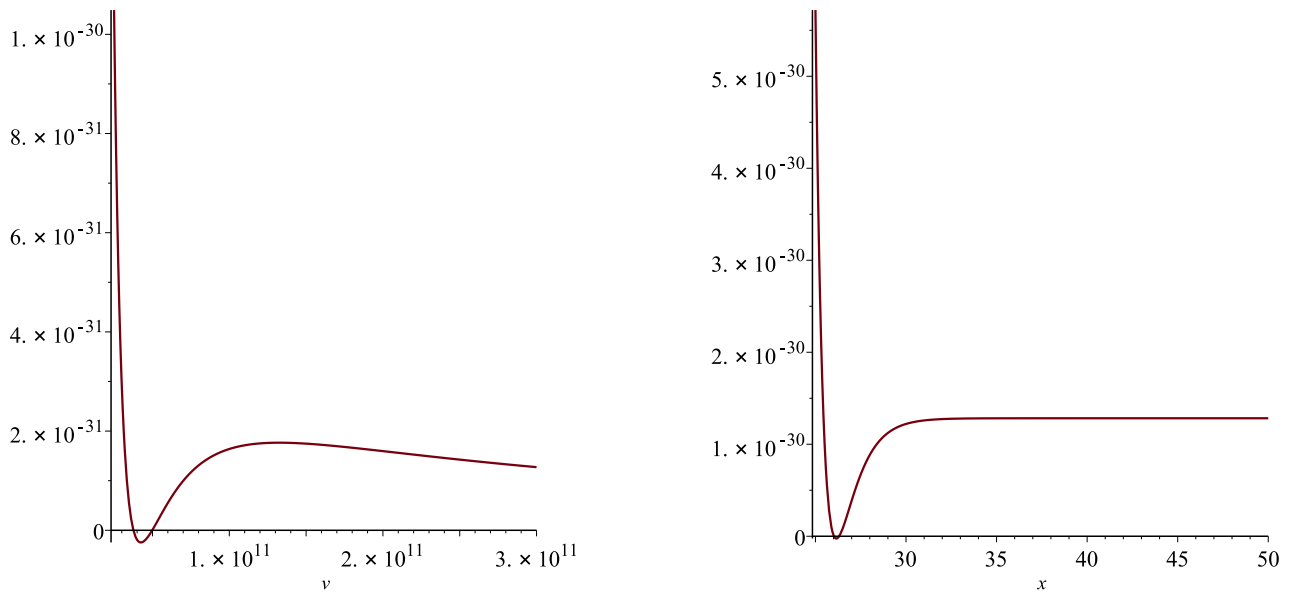


図 4.3: 図 4.2 の極小点を通る直線 $x = x_m$ および $v = v_m$ 上でのポテンシャル

で最小値を取る. 例えば

$$\xi = 1.3084 \dots, \quad a_1 = 2\pi, \quad A_1 = 1, \quad W_0 = 10 \quad (4.7.17)$$

に対して,

$$x_m = 26.15, \quad \mathcal{V}_m = 4.245 \times 10^{10} \Rightarrow V_m = 2.4517 \times 10^{-32}. \quad (4.7.18)$$

Reference

- Denef F, Douglas MR, Florea B: jhep0406, 034 (2004)

“Building a Better Racetrack”

4.7.3 質量スペクトル

KK モードと複素構造モジュライ ストリングスケールを

$$m_s = \frac{1}{\ell_s}; \quad \ell_s = 2\pi\sqrt{\alpha'} \quad (4.7.19)$$

とおくと, $R_s = R/\ell_s$, $\mathcal{V}_s = \mathcal{V}/\ell_s^6$ として,

$$M_P^2 = \frac{4\pi\mathcal{V}_s}{g_s^2\ell_s^2} \Rightarrow m_s = \frac{g_s}{\sqrt{4\pi\mathcal{V}_s}} M_P \quad (4.7.20)$$

より

- stringy excitations:

$$m_S^2 = \frac{n}{\alpha'} \Rightarrow m_S \sim 2\pi m_s \quad (4.7.21)$$

- KK modes:

$$m_{\text{KK}}^2 = \frac{n^2}{R^2} + \frac{w^2 R^2}{\alpha'^2} \Rightarrow m_{\text{KK}} \sim \frac{m_s}{R_s} \approx \frac{2\pi m_s}{\mathcal{V}_s^{1/6}}, \quad m_W \sim (2\pi)^2 R_s m_s \quad (4.7.22)$$

- complex structure moduli:

$$m_{\text{cs}} = \text{O}(1) \frac{g_s N m_s}{\sqrt{\mathcal{V}_s}} \quad (4.7.23)$$

ここで, N はフラックスの大きさ (量子数) である.

Kähler モジュライとフェルミ粒子 ($\mathbb{C}P^4[1, 1, 1, 6, 9]$ モデル)

Kähler モジュライの質量は

$$m_{\tau_2} = \text{O}(1) \frac{g_s^2 W_0}{\sqrt{4\pi\mathcal{V}_s}^{3/2}} M_P, \quad (4.7.24a)$$

$$m_{b_2} \approx e^{-a_2 \tau_2} \sim \exp(-34\mathcal{V}_s^{2/3}), \quad (4.7.24b)$$

$$m_{\tau_1} = \text{O}(1) \frac{a_1 g_s W_0}{\sqrt{4\pi\mathcal{V}_s}} M_P, \quad (4.7.24c)$$

$$m_{b_1} = \text{O}(1) \frac{a_1 g_s W_0}{\sqrt{4\pi\mathcal{V}_s}} M_P. \quad (4.7.24d)$$

4.4にあるように, 一般に体積モジュライに付随するアクシオンは非常に小さな質量をもつ.

フェルミ粒子の質量は

$$m_{3/2} = e^{K/2} |W| = \frac{g_s^2 |W_0|}{\sqrt{4\pi\mathcal{V}_s}} M_P, \quad (4.7.25a)$$

$$m_{\tilde{\tau}_1} \approx \frac{a_1 g_s^2 |W_0|}{\mathcal{V}_s} M_P, \quad (4.7.25b)$$

$$m_{\tilde{\tau}_2} \approx 0: \quad \text{Goldstino}, \quad (4.7.25c)$$

$$m_{\tilde{\phi}} \approx m_{\tilde{\tau}} \frac{g_s^2 |W_0|}{\mathcal{V}_s} M_P. \quad (4.7.25d)$$

Scale	Mass
4-dimensional Planck mass	$\frac{4\pi\mathcal{V}_s^0}{g_s}m_s = M_P$
String scale m_s	$m_s = \frac{g_s}{\sqrt{4\pi\mathcal{V}_s^0}}M_P$
Stringy modes m_S	$2\pi m_s = \frac{g_s\sqrt{\pi}}{\sqrt{\mathcal{V}_s^0}}M_P$
Kaluza-Klein modes m_{KK}	$\frac{2\pi}{\mathcal{V}_s^{\frac{1}{6}}}m_s = \frac{g_s\sqrt{\pi}}{(\mathcal{V}_s^0)^{\frac{2}{3}}}M_P$
Gravitino $m_{3/2}$	$\frac{g_s W_0}{\sqrt{\mathcal{V}_s^0}}m_s = \frac{g_s^2 W_0}{\sqrt{4\pi}\mathcal{V}_s^0}M_P$
Dilaton-axion m_τ	$\frac{g_s N}{\sqrt{\mathcal{V}_s^0}}m_s = \frac{g_s^2 N}{\sqrt{4\pi}\mathcal{V}_s^0}M_P$
Complex structure moduli m_ϕ	$\frac{g_s N}{\sqrt{\mathcal{V}_s^0}}m_s = \frac{g_s^2 N}{\sqrt{4\pi}\mathcal{V}_s^0}M_P$
‘Small’ Kähler modulus $m_{\tau_4}, m_{\tilde{\tau}_4}$	$\frac{W_0}{\sqrt{\mathcal{V}_s^0}}m_s = \frac{g_s W_0}{\sqrt{4\pi}\mathcal{V}_s^0}M_P$
Modulinos $m_{\tilde{\tau}}, m_{\tilde{\phi}}$	$\frac{g_s W_0}{\sqrt{\mathcal{V}_s^0}}m_s = \frac{g_s^2 W_0}{\sqrt{4\pi}\mathcal{V}_s^0}M_P$
‘Large’ volume modulus m_{τ_5}	$\frac{g_s W_0}{\mathcal{V}_s^0}m_s = \frac{g_s^2 W_0}{\sqrt{4\pi}(\mathcal{V}_s^0)^{\frac{3}{2}}}M_P$
Volume axion m_{b_5}	$\exp(-(\mathcal{V}_s^0)^{\frac{2}{3}})M_P \sim 0$

表 4.4: $CP^4[1, 1, 1, 6, 9]$ によるコンパクト化のモジュライ質量スペクトルの \mathcal{V} 依存性

Scale	Mass	GUT	Intermediate	TeV
M_P	M_P	2.4×10^{18} GeV	2.4×10^{18} GeV	2.4×10^{18} GeV
m_s	$\frac{g_s}{\sqrt{4\pi}\mathcal{V}_s^0}M_P$	1.0×10^{15} GeV	1.0×10^{12} GeV	1.0×10^3 GeV
m_S	$2\pi m_s = \frac{g_s\sqrt{\pi}}{\sqrt{\mathcal{V}_s^0}}M_P$	6×10^{15} GeV	6×10^{12} GeV	6×10^3 GeV
m_{KK}	$\frac{2\pi m_s}{(\mathcal{V}_s^0)^{\frac{1}{6}}} = \frac{g_s\sqrt{\pi}}{(\mathcal{V}_s^0)^{\frac{2}{3}}}M_P$	1.5×10^{15} GeV	1.5×10^{11} GeV	0.15 GeV
$m_{3/2}$	$\frac{g_s^2 W_0}{\sqrt{4\pi}\mathcal{V}_s^0}M_P$	1.5×10^{12} GeV	1.5×10^6 GeV	1.5×10^{-12} GeV
m_τ	$\frac{g_s N m_s}{\sqrt{\mathcal{V}_s^0}} = \frac{g_s^2 N}{\sqrt{4\pi}\mathcal{V}_s^0}M_P$	1.5×10^{12} GeV	1.5×10^6 GeV	1.5×10^{-12} GeV
m_{cs}	$\frac{g_s N m_s}{\sqrt{\mathcal{V}_s^0}} = \frac{g_s^2 N}{\sqrt{4\pi}\mathcal{V}_s^0}M_P$	1.5×10^{12} GeV	1.5×10^6 GeV	1.5×10^{-12} GeV
m_{τ_4}, m_{b_4}	$\frac{a_4 g_s W_0}{\sqrt{4\pi}\mathcal{V}_s^0}M_P$	1.5×10^{11} GeV	1.5×10^5 GeV	1.5×10^{-11} GeV
m_{τ_5}	$\frac{g_s^2 W_0}{\sqrt{4\pi}(\mathcal{V}_s^0)^{\frac{3}{2}}}M_P$	2.2×10^{10} GeV	22 GeV	2.2×10^{-26} GeV
m_{b_5}	$\exp(-a_5 \tau_5)M_P \sim 0$	$\sim 10^{-300}$ GeV	$\exp(-10^6)$ GeV	$\exp(-10^{18})$ GeV

表 4.5: LVC でのモジュライ質量スペクトルの例

ここで、最後の2つは、dilatino および複素構造モジュライに付随するフェルミ粒子。また、Goldstino は gravitino に食われて質量を与える。

4.7.4 Kähler モジュライインフレーション

概要 Kähler モジュライが3個以上存在する LVS では、小体積サイクルに対する Kähler モジュライのアクシオンが分数ベキの Starobinsky タイプのポテンシャル $\text{const} - c \exp(-k\phi^{4/3})$ をもつ。分数ベキのため、インフレーションタイプは small field 型となる ($\epsilon \sim 10^{-12}$)。

References

- Conlon, JP, Quevedo F: jhep0601, 146 (2006) [hep-th/0509012]
”Kähler moduli inflation”

仮定

1. IIB 型 SST の Large volume fluxed CY コンパクト化
2. CY は、 $h^{2,1} > h^{1,1} \geq 3$ を満たす。
3. Kähler モジュライの small cycle moduli の一つ T_s が他のモジュライと decouple:

$$\kappa_{sij} = \kappa_{ssi} = 0 \quad (i, j \neq s) \quad (4.7.26)$$

帰結

1. $\tau_s(T = b + i\tau)$ が Starobinski 型ポテンシャルを生み出し、スローロールインフレーションを起こす。
2. 観測的予言は

$$\mathcal{V}_s = 10^5 \sim 10^7, \quad (4.7.27a)$$

$$H_{\text{inf}} \sim 10^{13} \text{GeV}, \quad (4.7.27b)$$

$$n_s \simeq 1 - \frac{2}{N} = 0.960 \sim 0.967, \quad (4.7.27c)$$

$$\frac{dn_s}{d \ln k} \simeq -(6 \sim 8) \times 10^{-4}, \quad (4.7.27d)$$

$$\epsilon < 10^{-12}. \quad (4.7.27e)$$

モデル 複素構造モジュライとディラトンは安定化しているとして, Kähler モジュライ $T_j = \tau_j + ib_j$ のみを考える:

$$\mathcal{V} = \alpha \left(\tau_1^{3/2} - \sum_{i=2}^n \lambda_i \tau_i^{3/2} \right), \quad (4.7.28a)$$

$$K = K_{\text{cs}} - 2 \ln \left(\mathcal{V} + \frac{\xi}{2} \right); \xi = -\frac{\zeta(3)\chi(Y)}{2(2\pi)^3}, \quad (4.7.28b)$$

$$W = W_0 + \sum_{j=1}^n A_j e^{-a_j T_j}. \quad (4.7.28c)$$

ポテンシャルは

$$V = \sum_j 8a_j^2 A_j^2 \sqrt{\tau_j} 3\alpha \lambda_j \mathcal{V} e^{-2a_j \tau_j} - \sum_j \frac{4a_j A_j \tau_j W_0}{\mathcal{V}^2} e^{-a_j \tau_j} + \frac{3\xi W_0^2}{4\mathcal{V}^3} \quad (4.7.29)$$

\mathcal{V} を固定したとき, τ_j について極値を取る条件は

$$\frac{a_j^{3/2} A_j \mathcal{V}}{3\alpha \lambda_j W_0} = \frac{1 - x_j}{1 - 4x_j} \sqrt{x_j} e^{x_j}; \quad x_j = a_j \tau_j. \quad (4.7.30)$$

この条件下で

$$V = V_{\text{np}} \simeq -\frac{3W_0^2}{2\mathcal{V}^3} \left[\sum_{j=2}^n \frac{\lambda_j \alpha}{a_j^{3/2}} (\ln \mathcal{V})^{3/2} - \frac{\xi}{2} \right]. \quad (4.7.31)$$

このポテンシャルに IASD flux によるアップリフトを施して, 極小点で $V = 0$ とする:

$$V = V_{\text{np}} + \frac{\gamma W_0^2}{\mathcal{V}^2}. \quad (4.7.32)$$

インフレーション τ_n のみが安定化していない初期条件を考えると,

$$V \simeq V_0 - \frac{4a_n \tau_n A_n W_0}{\mathcal{V}^2} e^{-a_n \tau_n}. \quad (4.7.33)$$

τ_n の運動項を正規化すると

$$\phi = \sqrt{\frac{4\lambda}{3\mathcal{V}}} \tau_n^{3/4} \quad (4.7.34)$$

より,

$$V \simeq V_0 - \frac{4A_n W_0}{\mathcal{V}} c \phi^{4/3} e^{-c\phi^{4/3}}, \quad (4.7.35)$$

$$c = a_n \left(\frac{3\mathcal{V}}{4\lambda} \right)^{2/3}. \quad (4.7.36)$$

これより, $x \equiv c\phi^{4/3} \gg 1$ のとき,

$$N \approx \frac{B}{\mathcal{V}^3} x^{-3/2} e^x; \quad B \approx \frac{9\mathcal{V}^4}{64c^{3/2}} \frac{V_0}{A_n W_0} = \mathcal{O}(1), \quad (4.7.37a)$$

$$n_s - 1 \simeq 1 - \frac{2}{N}, \quad (4.7.37b)$$

$$\epsilon \simeq \frac{9x}{32c^{3/2}} \frac{1}{N^2}, \quad (4.7.37c)$$

$$\xi \equiv M_P \frac{V'V'''}{V^2} \approx -\frac{2}{N^2}. \quad (4.7.37d)$$

4.7.5 LVSの問題点

1. Gravitino mass problem. KKLT では、一般に $H \lesssim m_{3/2}$ となるため、low scale SUSY breaking $m_{3/2} \sim 1\text{TeV}$ を仮定すると、インフレーションスケールが非常に低くなる。LVS では、この制限はさらに強くなり、 $H \lesssim m_{3/2}^{3/2}$ となる。 $m_{3/2} \sim 1\text{TeV}$ だと、 $H \lesssim 10\text{keV}$ となる。この問題は、KKLT の場合、racetrack 型モデルでの fine tuning により (KL モデル [Kallosh, Linde 2004, 2007]), また LVS の場合は、inflation pt 型 small field インフレーションと run away 型再加熱 (前加熱) を組み合わせた特殊なモデルでは回避できる [Conlon JP et al 2008].
2. Runaway problem: flux CY コンパクト化では、 $\mathcal{V} \rightarrow 0$ でポテンシャルが必ずゼロとなる。

References

- Kallosh R, Linde A: jhep12, 004(2004)[hep-th/041101]
”Landscape, the scale of SUSY breaking, and inflation”
- ibid: jcap04,017 (2007)[0704.0647]
”Testing String Theory with CMB”
- Conlon JP, Kallosh R, Linde A, Quevedo F: jcap 09, 011 (2008)
”Volume Modulus Inflation and the Gravitino Mass Problem”

§4.8

Monodromy Inflation

概要 String 理論において, super-Planck excursion を自然な形で可能にし, large field inflation を実現する強力なアイデア. 周期性をもつモジュライ変数が, ブレーンやフラックスとの相互作用により monodromy 的非周期性を獲得するというフレームワーク.

4.8.1 IIA 理論におけるモジュライ安定化

概要 IIA 理論では, IIB 理論と異なり, 量子効果を用いない純粹の古典的なフラックスコンパクト化ですべてのモジュライが安定化される例が存在する.

References

- Scherk J, Schwarz H: NPB153, 61 (1979)
"How to get masses from extradimensions"
- Grimm TW, Louis J: NPB718, 153 (2005)
"The effective action of type IIA Calabi-Yau orientifolds"
- O DeWolfe, A Giryavets, S Kachru, W Taylor: jhep07, 066 (2005)
"Type IIA moduli stabilization"
- Derendinger JP, Kounas C, Petropoulos PM, Zwirner F: NPB715, 211 (2005)
"Superpotentials in IIA compactifications with general fluxes"
- Villadoro G, Zwirner F: jhep 06, 047 (2005)
" $\mathcal{N} = 1$ effective potential from dual type-IIA D6/O6 orientifolds with general fluxes"

IIA 理論では, フラックスのみですべてのモジュライが安定化される場合がある.

1. DGKT モデル

[O DeWolfe, A Giryavets, S Kachru, W Taylor (2005)]

- 理論 : Massive IIA
- コンパクト化 : $Y = T^2 \times T^2 \times T^2/\mathbb{Z}_3^2$ orientifold

[Dixon IJ, Harvey JA, Vafa C, Witten E: NPB261, 678 (1985)]

- T^6 : $z_i \sim z_i + 1 \sim z_i + \alpha$ ($\alpha = e^{i\pi/3}$).
- $T^6 \rightarrow T^6/\mathbb{Z}_3$: orbifold

$$T : (z_1, z_2, z_3) \rightarrow (\alpha^2 z_1, \alpha^2 z_2, \alpha^2 z_3) \tag{4.8.1}$$

この orbifold は 27 個の不動点を持ち, $CY(\chi = 72)$ の特異極限.

- $T^6/\mathbb{Z}_3 \rightarrow T^6/\mathbb{Z}_3^2$: free action Q による同一視

$$Q : (z_1, z_2, z_3) \rightarrow \left(\alpha^2 z_1 + \frac{1+\alpha}{3}, \alpha^4 z_2 + \frac{1+\alpha}{3}, z_3 + \frac{1+\alpha}{3} \right) \tag{4.8.2}$$

この orbifold は 9 個の \mathbb{Z}_3 特異点を持ち, $CY(\chi = 24)$ の特異極限で, $h^{2,1} = 0, h^{1,1} = 12$. $h^{1,1}$ のうち 9 個は blow up modulus, 残り 3 個は幾何学的な Kähler モジュライ.

- Orientifolding $\mathcal{O} = \Omega_p(-1)^{F_L\sigma}$

$$\sigma : z_i \rightarrow -\bar{z}_i \tag{4.8.3}$$

Orientifold plane $O6$ は T^6 の y^i 方向の T^3 に巻き付く.

- モジュライ : Kähler 3 個 + axio-dilaton

$$\psi_j = b_j + iv_j \quad (j = 1, \cdot, 4), \tag{4.8.4a}$$

$$\mathcal{V} = v_1 v_2 v_3, \tag{4.8.4b}$$

$$v_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\phi} \sqrt{\mathcal{V}}. \tag{4.8.4c}$$

ここで, v_j はトーラス T_j^2 のサイズ, $b_j (j = 1, 2, 3)$ は $B_2 = \sum_{j=1}^3 b_j w_j (w_j \propto idz^j \wedge d\bar{z}^j)$ より, b_4 は $C_{[3]} = b_4 \alpha_0$ より生じる:

$$\Omega = 3^{1/4} idz^1 \wedge dz^2 \wedge dz^3 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha_0 + i\beta_0). \tag{4.8.5}$$

- Kähler ポテンシャル

$$K = -\ln(8\mathcal{V}^3 e^{4\phi}) = -\ln(32v_1 v_2 v_3 v_4^4). \tag{4.8.6}$$

- Flux $H_3, F_2, F_4, F_6 \Rightarrow W$

$$W = \frac{f_6}{\sqrt{2}} + \sum_{i=1}^3 \frac{f_{4,i}}{\sqrt{2}} \psi_i - \frac{f_0}{\sqrt{2}} \psi_1 \psi_2 \psi_3 - 2f_3 \psi_4. \quad (4.8.7)$$

ここで $f_6, f_{4,i}, f_0, f_3$ はフラックスの強度を表す整数で、次の量子化条件を満たす

$$f_0 f_3 = -2. \quad (4.8.8)$$

この超ポテンシャルは、Kähler ポテンシャルを一定に保つ変数の変換

$$\psi_i \rightarrow \frac{C}{|f_{4,i}|} \psi_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad (4.8.9a)$$

$$\psi_4 \rightarrow \frac{C}{|f_3|} \psi_4 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{f_6}{f_3}, \quad (4.8.9b)$$

$$C = \sqrt{|f_0|^{-1} |f_{4,1} f_{4,2} f_{4,3}|} \quad (4.8.9c)$$

により

$$W = C \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\hat{f}_{4,i}}{\sqrt{2}} \psi_i - \frac{\hat{f}_0}{\sqrt{2}} \psi_1 \psi_2 \psi_3 - 2\hat{f}_3 \psi_4 \right) \quad (4.8.10)$$

と全体のスケールを除いて連続パラメータを持たない形に書き換えられる。ここで、 \hat{f}_* は f_* の符号である。したがって、すべてのフラックスがゼロでないときには、ポテンシャルはフラックスに依存しなくなる。

- SUSY vacuum: このポテンシャルは

$$\delta = \text{sign}(f_0 f_{4,1} f_{4,2} f_{4,3}) \quad (4.8.11)$$

として、 $\delta = -1$ の時に超対称な adS 臨界点をもつ：

$$\hat{f}_{4,1} \psi_1 = \hat{f}_{4,2} \psi_2 = \hat{f}_{4,3} \psi_3 = i\sqrt{\frac{5}{3}}, \quad \hat{f}_3 \psi_4 = i\frac{2}{3}\sqrt{\frac{10}{3}}. \quad (4.8.12)$$

2. VZ model

[Villadoro G, Zwirner F (2005); Derendinger JP, Kounas C, Petropoulos PM, Zwirner F (2005)]

- 内部空間 : $Y = T^2 \times T^2 \times T^2 / \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 / \mathcal{O}$

2つの \mathbb{Z}_2 変換は, $z^j = x^{2j+2} + ix^{2j+3} (j = 1, 2, 3)$ とするとき,

$$Z_2 : (z^1, z^2, z^3) \rightarrow (-z^1, -z^2, z^3), \quad (4.8.13a)$$

$$Z'_2 : (z^1, z^2, z^3) \rightarrow (z^1, -z^2, -z^3) \quad (4.8.13b)$$

- Orientifold 変換 $\mathcal{O} = \Omega_p(-1)^{F_L} \mathcal{R}$:

$$\mathcal{R} : (z^1, z^2, z^3) \rightarrow (-\bar{z}^1, -\bar{z}^2, -\bar{z}^3) \quad (4.8.14)$$

	ϕ	B	C_1	C_3
各場のパリティは $(-1)^{F_L}$	+	+	-	-
Ω_p	+	-	+	-

- 変換で不変なバルクスカラ場

- dilaton: ϕ
- Kähler moduli: $t_A (A = 1, 2, 3)$
- CS moduli: $u_A (A = 1, 2, 3)$
- axion fields:

$$B_{45}, B_{67}, B_{89} \Rightarrow \tau_A (A = 1, 2, 3), \quad (4.8.15a)$$

$$C_{579}; C_{568}, C_{478}, C_{469} \Rightarrow \sigma; \nu_A (A = 1, 2, 3) \quad (4.8.15b)$$

ここで,

$$ds^2(M) = \frac{1}{\hat{s}} \tilde{g}_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu + \sum_{A=1}^3 t_A \left(\hat{u}_A (dx^{2j+2})^2 + \frac{1}{\hat{u}_A} (dx^{2j+3})^2 \right) \quad (4.8.16a)$$

$$e^{-2\phi} = \frac{\hat{s}}{t_1 t_2 t_3}, \quad \hat{s} = s^2 \hat{u}_1 \hat{u}_2 \hat{u}_3, \quad (4.8.16b)$$

$$u_i = \frac{\sqrt{\hat{s} \hat{u}_1 \hat{u}_2 \hat{u}_3}}{\hat{u}_i}, \quad (4.8.16c)$$

$$B_{45|67|89} = \tau_{1|2|3}, \quad (4.8.16d)$$

$$C_{579} = \sigma, \quad C_{568|478|469} = -\nu_{1|2|3} \quad (4.8.16e)$$

- Chiral moduli variables

$$S = s + i\sigma, \quad T_A = t_A + i\tau_A, \quad U_A = u_A + i\nu_A. \quad (4.8.17)$$

- Kähler ポテンシャル

$$K = -\ln Y; \quad Y = st_1 t_2 t_3 u_1 u_2 u_3 = e^{-4\phi} \psi^3. \quad (4.8.18)$$

- BG fluxes

- H_3 -flux: $H_{(0)} = H_{468}$, $H_{(1)}^{1|2|3} = H_{578|569|479}$
- geometrical flux f^a_{bc} :

$$\omega_{(1)}^{1|2|3} = f_{597|759|975}, \quad (4.8.19a)$$

$$\omega_{(2)}^{1|2|3} = f_{586|748|964}, \quad (4.8.19b)$$

$$(\omega_{(3)}^{AB}) = \begin{pmatrix} 0 & f^4_{96} & f^4_{87} \\ f^6_{49} & 0 & f f^6_{58} \\ f^8_{74} & f^8_{65} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.8.19c)$$

- RR-flux:

- * F_0 : $F_{(0)}$
- * F_2 : $F_{(2)}^{1|2|3} = F_{45|67|89}$
- * F_4 : $F_{(4)}^{1|2|3} = F_{6789|8945|4567}$
- * F_6 : dual to $F_{\mu\nu\lambda\sigma} = F^{(6)} \epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}(X)$

- Super potetial

$$W = \frac{1}{4} \int_Y \mathbf{F} \wedge e^{iJ^c} - i(H - i f \circ J^c) \wedge \Omega^c. \quad (4.8.20)$$

ここで,

$$\mathbf{F} = d\mathbf{C} + F_0 e^B, \quad (4.8.21a)$$

$$J^c = J + iB; \quad J = \frac{i}{2} \sum_{A=1}^3 dz^A \wedge d\bar{z}^A, \quad (4.8.21b)$$

$$\Omega^c = \text{Re}(ie^\phi \Omega) + iC_{[3]}; \quad \Omega = dz^1 \wedge dz^2 \wedge dz^3, \quad (4.8.21c)$$

$$(f \circ J^c)_{abd} = f^e_{ba} J^c_{ed}. \quad (4.8.21d)$$

具体的には

$$J^c_{45|67|89} = T_{1|2|3}, \quad (4.8.22a)$$

$$\Omega^c_{579} = S, \quad \Omega^c_{568|478|469} = -U_{1|2|3} \quad (4.8.22b)$$

なので,

$$\begin{aligned}
4W &= \sum_{A=1}^3 (\omega_{(1)}^A T_A U_A - \omega_{(2)}^A S T_A) - \sum_{A,B=1}^3 \omega_{(3)}^{AB} T_A U_B \\
&+ \sum_{A=1}^3 (i F_{(4)}^A T_A - F_{(2)}^A T_B T_C) + F_{(6)} - i F_{(0)} T_1 T_2 T_3 \\
&+ i(H_{(0)} S - \sum_{A=1}^3 H_{(1)}^A U_A). \tag{4.8.23}
\end{aligned}$$

- SUSY adS minimum: 理論が3つの T^2 の入れ替えについて対称で, BG flux が条件

$$\frac{1}{9} F_{(6)} = -t_0^2 F_{(2)} = \frac{t_0 u_0}{6} \omega_{(1)} = \frac{s_0 t_0}{2} \omega_{(2)} = \frac{t_0 u_0}{6} \omega_{(3)} = p, \tag{4.8.24a}$$

$$\frac{t_0}{2} F_{(4)} = \frac{t_0^3}{5} F_{(0)} = -\frac{s_0}{2} H_{(0)} = \frac{u_0}{2} H_{(1)} = q \tag{4.8.24b}$$

を満たすとき, K と W は

$$K = -\ln(st^4 u^3), \tag{4.8.25a}$$

$$\begin{aligned}
W &= \frac{p}{4} \left\{ 906(\hat{S} + 3\hat{U})\hat{T} + 3\hat{T}^3 \right\} \\
&+ \frac{iq}{4} \left\{ -2(\hat{S} + 3\hat{U}) + 9\hat{T} - 5\hat{T}^3 \right\} \tag{4.8.25b}
\end{aligned}$$

となり ($\hat{T} = T/t_0, \hat{U} = U/u_0, \hat{S} = S/s_0$), 安定な超対称 adS 最小点をもつ:

$$S = s_0(1 - 3ia), T_A = t_0, U_A = u_0(1 + ia). \tag{4.8.26}$$

ここで, a は任意の実数である. したがって, ポテンシャルは a の変化する方向に flat direction をもつ.

4.8.2 IIA 理論での dS 真空

概要 Massive IIA を $(\text{Nil}/\Gamma)^2$ の orientifold にコンパクト化. モジュライは, $g \sim e^{\phi}\mathcal{V}^{1/4}$, $e^{6\sigma} \sim \mathcal{V}$ および Nil/Γ のねじれたトーラスの2つの周期 L_1, L_2 . ポテンシャルとして, $R(Y) \rightarrow V_R$, $(O6, H_3, F_0) \rightarrow V_{OHm_0}$, $F_6 \rightarrow V_{F_6}$, KK5 brane $\rightarrow V_{\text{KK5}}$ を考慮すると, 安定な dS 真空が存在.

References

- Silverstein E: prd 77, 106006 (2008)
”Simple de Sitter solutionS”

モデル

- 内部空間 : $Y = \text{Nil}^3 \times \tilde{\text{Nil}}^3/\Gamma/\mathcal{O}$

$$\ell_s^{-2} ds^2(M) = g(\text{Nil}) + g(\tilde{\text{Nil}}); \quad (4.8.27a)$$

$$g(\text{Nil}) = L_1^2(\eta^1)^2 + L_2^2(\eta^2)^2 + L_x^2(\eta_3)^2, \quad (4.8.27b)$$

$$\eta^1 = du_1, \quad \eta^2 = du_2, \quad \eta^3 = dx + \frac{M}{2}(u_1 du_2 - u_2 du_1). \quad (4.8.27c)$$

コンパクト化に用いる離散群 Γ は各 Nil について, 次の3つの等長変換により生成される:

$$t_x : (x, u_1, u_2) \rightarrow (x + 1, u_1, u_2), \quad (4.8.28a)$$

$$t_1 : (x, u_1, u_2) \rightarrow (x - \frac{M}{2}u_2, u_1 + 1, u_2), \quad (4.8.28b)$$

$$t_2 : (x, u_1, u_2) \rightarrow (x + \frac{M}{2}u_1, u_1, u_2 + 1). \quad (4.8.28c)$$

これらの変換は次の関係式を満たす:

$$t_1 t_2 t_1^{-1} t_2^{-1} = t_x^M \quad (4.8.29)$$

また, orientifolding は $\mathcal{O} = \Omega_p(-1)^{FL} \mathcal{R}$:

$$\mathcal{R} : \text{Nil} \times \tilde{\text{Nil}} \ni (X, \tilde{X}) \rightarrow (\tilde{X}, X) \quad (4.8.30)$$

これより,

$$\pi_1(Y) = \langle \gamma_1 = t_1 \tilde{t}_1, \gamma_2 = t_2 \tilde{t}_2, \gamma_x = t_x \tilde{t}_x; \gamma_1 \gamma_2 \gamma_1^{-1} \gamma_2^{-1} = \gamma_x^M \rangle \quad (4.8.31a)$$

$$H_1(Y, \mathbb{Z}) = \langle \gamma_1, \gamma_2, \gamma_x; M\gamma_x = 0 \rangle \cong \mathbb{Z} + \mathbb{Z} + \mathbb{Z}_M, \quad (4.8.31b)$$

$$H^1(Y, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^2. \quad (4.8.31c)$$

- モジュライ: g, L, L_1, L_2, σ

$$ds^2(M) = g(X_4) + g(Y_6), \quad (4.8.32a)$$

$$e^\phi = g_s e^{\tilde{\phi}}, \quad (4.8.32b)$$

$$\mathcal{V} = L^6/2 = L_1^2 L_2^2 L_x^2/2 = (L_0^6/2)e^{6\sigma}, \quad (4.8.32c)$$

$$g = \frac{e^\phi}{L^{3/2}} = \frac{g_s}{L_0^{3/2}} e^{\tilde{\phi}-3\sigma}, \quad (4.8.32d)$$

$$g^E(X_4) = e^{6\sigma-4\tilde{\phi}} g^s(X_4). \quad (4.8.32e)$$

- string フレームのポテンシャル V_s と Einstein フレームでのポテンシャル V の関係:

$$V_s = -\frac{1}{2\ell_s^4} \int_Y e^{-2\phi} R_s(Y) + \dots \quad (4.8.33)$$

に対して,

$$V = m_{\text{pl}}^4 \frac{e^{4\phi}}{(L^6/2)^2} V_s. \quad (4.8.34)$$

- 曲率

$$R_s(Y) = -\frac{L_x^2 M^2}{\ell_s^2 L_u^4}; \quad L_u^2 = L_1 L_2 \Rightarrow V_R = m_{\text{pl}}^4 \frac{g^2 L_x^2 M^2}{2L^6}. \quad (4.8.35)$$

- Orientifold plane O6 と H_3 フラックス

- O6 plane tension

$$V_{O6} = -2^3 \pi g^3. \quad (4.8.36)$$

- Tadpole cancelation for H_3 :

$$m_0 \int_{\Sigma_3} H = -2\sqrt{2} \mu_6 \kappa^2 n_{O6}. \quad (4.8.37)$$

ここで, orientifold projection で残る H_3 は

$$\begin{aligned} H_3 = & p_1(\eta_1 \wedge \eta^2 \wedge \eta^3 - \tilde{\eta}_1 \wedge \tilde{\eta}_2 \wedge \tilde{\eta}_3) \\ & + p_2(\tilde{\eta}_1 \wedge \eta^2 \wedge \tilde{\eta}^3 - \eta_1 \wedge \tilde{\eta}_2 \wedge \eta_3) \\ & + p_3(\eta_1 \wedge \tilde{\eta}^2 \wedge \tilde{\eta}^3 - \tilde{\eta}_1 \wedge \eta_2 \wedge \eta_3) \end{aligned} \quad (4.8.38)$$

量子化条件

$$m_0 = \frac{f_0}{2\sqrt{2}\pi\ell_s}; \quad f_0 \in \mathbb{Z}, \quad (4.8.39a)$$

$$p_i = -h_{3i}(2\pi)^2 \ell_s^2; \quad h_{3i} \in \mathbb{Z} \quad (4.8.39b)$$

を考慮すると, tadpole 相殺条件は

$$f_0 h_{3i} = 2 \Rightarrow f_0 = 1, \quad h_{3,i} = h_3 = 2. \quad (4.8.40)$$

よって, $O6, H_3$ および F_0 のポテンシャルへの寄与は

$$m_{\text{pl}}^{-4} V_{OHm0} = \frac{3p^2 g^2}{2\ell_s^4 L^6} - \frac{2\sqrt{2}}{\ell_s} |m_0 p| g^3 + \frac{\ell_s^2 m_0^2 g^4 L^6}{4}. \quad (4.8.41)$$

- F_6 フラックス

$$F_6 = \ell_s^5 K \eta^1 \wedge \eta^2 \wedge \eta^3 \wedge \tilde{\eta}^1 \wedge \tilde{\eta}^2 \wedge \tilde{\eta}^3, \quad (4.8.42)$$

$$K = f_6 (2\pi)^5 / \sqrt{2}; \quad f_6 \in \mathbb{Z}, \quad (4.8.43)$$

$$V_{F_6} = m_{\text{pl}}^4 g^4 \frac{K^2}{4L^6}. \quad (4.8.44)$$

- Discrete Wilson line: $q, r \in \mathbb{Z}$ を任意定数として,

$$\tilde{F}_2 = dC_1 + m_0 B, \quad (4.8.45a)$$

$$B = \frac{q}{M} (2\pi)^2 \ell_s^2 dx \wedge d\tilde{x} + \frac{r}{M} (2\pi)^2 \ell_s^2 (dx \wedge \tilde{\eta}^1 - d\tilde{x} \wedge \eta^1) + \dots \quad (4.8.45b)$$

$$V_{BWL} = 4\pi^4 m_{\text{pl}}^4 m_0^2 \ell_s^2 \left(\frac{q}{M} \right)^2 g^4 + \dots \quad (4.8.45c)$$

- KK 5-branes : 4次元時空 X および $\partial_x - \partial_{\tilde{x}}, \partial_{u_1} + \partial_{u_2} + \partial_{\tilde{u}_1} + \partial_{\tilde{u}_2}$ に巻きつく D5 ブレーンで, $\partial_x + \partial_{\tilde{x}}$ 方向の U(1) に関して KK 磁荷をもつ.

$$V_{KK5} = 4m_{\text{pl}}^2 g^2 n_K \frac{L_x^{5/2}}{L^{9/2}}. \quad (4.8.46)$$

- 全ポテンシャル

$$V = m_{\text{pl}}^4 (ag^2 - bg^3 + cg^4); \quad (4.8.47)$$

$$a = M^2 \frac{L_x^4}{2L^6} + 4n_K \frac{L_x^{5/2}}{L^{9/2}} + \frac{3p^2}{2\ell_s^4 L^6}, \quad (4.8.48)$$

$$b = \frac{2\sqrt{2}}{\ell_s} |pm_0|, \quad (4.8.49)$$

$$c = \ell_s^2 \left[\frac{m_0^2}{4} L^6 + 4\pi^4 m_0^2 \left(\frac{q}{M} \right)^2 \frac{L^6}{L_x^4} + \left(\frac{r}{M} \right)^2 \frac{16\pi^4 m_0^2 L^3}{L_x} + \left(\frac{r}{M} \right)^4 \frac{(2\pi)^8 m_0^2}{L_x^2} + \frac{K^2}{4\ell_s^{12} L^6} \right]. \quad (4.8.50)$$

このポテンシャルは,

$$\delta = \frac{4ac}{b^2} - 1 \quad (4.8.51)$$

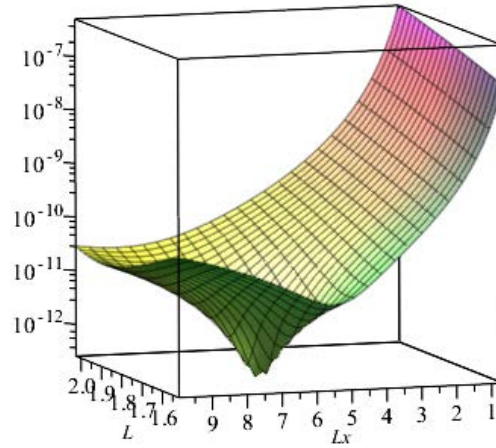


図 4.4: IIA 理論の Nil コンパクト化により得られた dS 真空の例

で定義される δ の最小値が

$$0 < \delta < 1/8 \tag{4.8.52}$$

を満たしているので、適当な a, b, c の値で、 g に関して $V > 0$ となる極小点をもつ。

- Example: $n_K = M = 10, f_6 = 80, q = r = 1$ [Silverstein E (2008)]

– Critical point

$$g \simeq 0.00015 \Rightarrow \delta = 0.005359, \tag{4.8.53a}$$

$$(L, L_x) = (15.45, 2.099) \Rightarrow V \simeq 2.4 \times 10^{-13}. \tag{4.8.53b}$$

Scaling モジュライ変数を

$$L = K^{1/6}\hat{L}, \quad L_x = M^{-1/2}\hat{L}_x, \quad g = K^{-1}\hat{g} \quad (4.8.54)$$

とスケールすると、ポテンシャルは次の形に書ける：

$$V = \frac{m_{\text{pl}}^4}{K^3}\hat{g}^2(\hat{a} - \hat{b}\hat{g} + \hat{c}\hat{g}^2); \quad (4.8.55a)$$

$$\hat{a} = \frac{\hat{L}_x^4}{2\hat{L}^6} + 4n_K \frac{K^{1/4}}{M^{5/4}} \frac{\hat{L}_x^{5/2}}{\hat{L}^{9/2}} + \frac{6(2\pi)^4}{\hat{L}^6}, \quad (4.8.55b)$$

$$\hat{b} = 8\pi, \quad (4.8.55c)$$

$$\begin{aligned} \hat{c} = & \frac{\hat{L}^6}{32\pi^2} + \frac{\pi^2 q^2}{2} \frac{\hat{L}^6}{\hat{L}_x^4} + 2\pi^2 \left(\frac{r}{M}\right)^2 \left(\frac{M}{K}\right)^{1/2} \frac{\hat{L}^3}{\hat{L}_x} \\ & + 32\pi^6 \left(\frac{r}{M}\right)^4 \frac{M}{K} \frac{1}{\hat{L}_x^2} + \frac{1}{4\hat{L}^6}. \end{aligned} \quad (4.8.55d)$$

4.8.3 Monodromy inflation in IIA

概要 Massive IIA 理論の Nil コンパクト化において, 適当な Nil の S^1 に巻きつく D4 ブレーンを考えると, その別の S^1 方向の運動に対してモノドロミーが生じ, D4 ブレーンの位置がインフラトンとなる large field インフレーションモデルが構成できる.

References

- Silverstein E, Westphal A: prd78, 106003 (2008)

“Monodromy in the CMB: Gravity waves and string inflation”

1. D4 ブレーンの作用積分

10次元 IIA 理論の $Y_6 = \text{Nil}/\Gamma \times \widetilde{\text{Nil}}/\tilde{\Gamma}$ へのコンパクト化において,

$$x' = x - \frac{M}{2}u_1u_2 \quad (4.8.56)$$

とおくと, Γ を生成する変換 t_x, t_1, t_2 は

$$t_x : (x', u_1, u_2) \rightarrow (x' + 1, u_1, u_2), \quad (4.8.57a)$$

$$t_1 : (x', u_1, u_2) \rightarrow (x' - Mu_2, u_1 + 1, u_2), \quad (4.8.57b)$$

$$t_2 : (x', u_1, u_2) \rightarrow (x', u_1, u_2 + 1) \quad (4.8.57c)$$

となるので, Nil/Γ は $\text{Nil}/\langle t_x, t_2 \rangle \cong T^2 \times \mathbb{R}$ を t_1 で割ったものとなる. Nil の計量は

$$ds^2 = L_1^2 du_1^2 + L_2^2 du_2^2 + L_x^2 (dx' + Mu_1 du_2)^2 \quad (4.8.58)$$

いま, 4次元時空 X_4 に広がり, Nil/Γ の $x' = \text{const}, u_1 = \text{const}$ で決まる u_2 方向の S^1 に巻き付く D4 ブレーンを考える. この S^1 の長さ ℓ は, u_1 の関数

$$\ell = (L_2^2 + L_x^2 M^2 u_1^2)^{1/2} \quad (4.8.59)$$

となり, $|u_1|$ の増大とともに限りなく増大する. D4 ブレーンのエネルギーはこの S^1 の長さに比例するので, large field inflaton の候補となる.

D4 ブレーンが u_1 方向のみに運動するとすると, D4 ブレーンの作用積分

$$S_{D4} = - \int_{\Sigma_5} \frac{d^5 \xi}{(2\pi)^4 \ell_s^5} e^{-\phi} \sqrt{\det(G+B)} + \frac{1}{(2\pi)^4 \ell_s^5} \int_{\Sigma_5} C e^{-B+2\pi \ell_s^2 F} \quad (4.8.60)$$

は,

$$S_{D4} = \frac{1}{(2\pi)^4 g_s \ell_s^4} \int d^4 x \sqrt{-g_4} \sqrt{(L_2^2 + L_x^2 M^2 u_1^2) (1 - \ell_s^2 L_1^2 \dot{u}_1^2)} \quad (4.8.61)$$

となる．これを u_1 について展開し2次まで取り，運動項の正規化のために，変換

$$\frac{d\phi}{du_1} = \frac{L_u^{3/2} \beta^{-1/4}}{(2\pi)^2 \sqrt{g_s} \ell_s} \left(1 + \frac{M^2 L_x^2}{\beta L_u^2} u_1^2 \right)^{1/4} \quad (4.8.62)$$

を行うと，

$$S_{D4} = \int d^4x \sqrt{-g_4} \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V_{D4}(\phi) \right); \quad (4.8.63)$$

$$V_{D4} = \frac{\beta^{1/2} L_u}{(2\pi)^4 g_s \ell_s^4} \left(1 + \frac{M^2 L_x^2}{\beta L_u^2} u_1(\phi)^2 \right)^{1/2} \quad (4.8.64)$$

を得る．ここで，

$$\beta \equiv L_2/L_1, \quad L_u^2 = L_1 L_2 \quad (4.8.65)$$

2. ポテンシャルの振る舞い

ϕ_{cr} を

$$\frac{\phi_{\text{cr}}}{m_{\text{pl}}} \approx (2\pi)^{3/2} \beta^{1/4} \frac{g_s^{1/2} L^{3/4}}{\sqrt{2ML_x^{9/4}}} \quad (4.8.66)$$

とすると，

- $\phi \ll \phi_{\text{cr}}$ のとき：

$$V_{D4} \simeq \frac{1}{2} m^2 \phi^2; \quad m^2 = \frac{M^2 L_x^4}{\ell_s^2 L^6}. \quad (4.8.67)$$

Nil コンパクト化におけるモジュライポテンシャルのうち，曲率項の寄与を

$$V_{\text{mod},R} \simeq m_{\text{pl}}^4 \frac{(2\pi)^7}{4} g^2 \frac{M^2 L_x^2}{L^6} \quad (4.8.68)$$

とすると，

$$V_{D4} \sim \left(\frac{\phi}{m_{\text{pl}}} \right)^2 V_{\text{mod},R} \quad (4.8.69)$$

より， $\phi \gtrsim m_{\text{pl}}$ の領域でこの近似が成り立つとすると，D4 ブレーンのエネルギーがモジュライ安定化に大きく影響することになる．したがって，次の $\phi \gg \phi_{\text{cr}}$ の領域までブレーンのモジュライ安定化への影響が無視して上記のポテンシャルが使用できるためには，

$$\phi_{\text{cr}} < m_{\text{pl}} \quad (4.8.70)$$

が要求される．

- $\phi \gg \phi_{\text{cr}}$ のとき :

$$\phi \approx \frac{M^{1/2} L_u L_x^{1/2}}{6\pi^2 g_s^{1/2} \ell_s \beta^{1/2}} u_1^{3/2} \quad (4.8.71)$$

より,

$$V_{D4} \simeq \mu^{10/3} \phi^{2/3}; \quad (4.8.72)$$

$$\mu^{10/3} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} (2\pi)^{-8/3} \frac{M^{2/3} \beta^{1/3} L_x}{\ell_s^{10/3} g_s^{2/3} L}. \quad (4.8.73)$$

3. 整合性

D4の影響でモジュライ安定化が壊されないための条件 $V_{\text{mod},R}$ をモジュライポテンシャルのうち曲率の寄与として, 安定化が壊されないための必要条件は

$$V_{D4} < V_{\text{mod},R} \Rightarrow \phi < \phi_{\text{max}} \sim m_{\text{pl}} \times (2\pi)^{21/2} \left(\frac{m_{\text{pl}}}{\mu}\right)^5 \frac{M^3 g^3 L_x^6}{8L^9}. \quad (4.8.74)$$

Rescale したモジュライ変数で表すと

$$\frac{\phi_{\text{cr}}}{m_{\text{pl}}} \sim (2\pi)^{3/2} \beta^{1/4} \hat{g}^{1/2} \left(\frac{M}{K}\right)^{1/8} \left(\frac{\hat{L}}{\hat{L}_x}\right)^{9/4}, \quad (4.8.75a)$$

$$\frac{\phi_{\text{max}}}{m_{\text{pl}}} \sim \frac{\beta^{-1/2}}{3(2\pi)^3 \hat{g}} \left(\frac{K}{M}\right)^{1/4} \frac{\hat{L}^{-9/2}}{\hat{L}_x} \quad (4.8.75b)$$

これより, F_6 フラックスの大きさ K を大きく, または β を小さくなるパラメータ tuning をすれば, $\phi_{\text{cr}}/m_{\text{pl}} \ll 1$ かつ $\phi_{\text{max}}/m_{\text{pl}} \gtrsim 10$ という要請が満たされる.

【Note 4.8.1】

- KK5 ブレーンの生み出すポテンシャルは

$$\begin{aligned} V_{KK5} &\sim \frac{1}{\sqrt{\beta}} m_{\text{pl}}^4 g^2 \frac{M L_x^{5/2}}{L^9/2} \\ &\sim \frac{m_{\text{pl}}^4}{K^3} \frac{1}{\sqrt{\beta}} \left(\frac{K}{M}\right)^{1/4} \frac{\hat{L}_x^2}{\hat{L}^{9/2}} \hat{g}^2 \sim V_{\text{mod},R} \times \frac{1}{\sqrt{\beta}} \left(\frac{K}{M}\right)^{1/4} \frac{\hat{L}^{3/2}}{\hat{L}_x^2} \end{aligned} \quad (4.8.76)$$

となるので, K^2/β を増大させると, KK5 ブレーンのエネルギーが支配的となり危険.

- Kallosh-Linde 問題

$$m_{\text{pl}}^2 H_{\text{inf}}^2 \sim V_{D4} < V_{\text{mod},R} \sim m_{\text{pl}}^2 R_s(Y) \lesssim m_{\text{pl}}^2 m_{3/2}^2 \quad (4.8.77)$$

より

$$H_{\text{inf}} \lesssim m_{3/2}. \quad (4.8.78)$$

□

D4 ブレーンの反作用によるモジュライ極点のずれとインフレーション軌道のずれ全ポテンシャルは, D4 ブレーンがない場合のモジュライ平衡点近傍で展開すると

$$\begin{aligned} V_{\text{tot}} &= V_{\text{mod}}(Le^\sigma) + V_{D4}(\phi, Le^\sigma) \\ &\simeq V_{\text{mod}}(L) + \frac{1}{2}\partial_\sigma^2 V_{\text{mod}}\sigma^2 + V_{D4}(\phi, L) \\ &\quad + \partial_\sigma V_{D4}\sigma + \frac{1}{2}\partial_\sigma^2 V_{D4}\sigma^2 \end{aligned} \quad (4.8.79)$$

ここで,

$$V_{D4} \ll V_{\text{mod}} \ll \partial_\sigma^2 V_{\text{mod}} \quad (4.8.80)$$

より,

$$\sigma \approx \frac{\partial_\sigma V_{D4}}{\partial_\sigma^2 V_{\text{mod}} + \partial_\sigma^2 V_{D4}} \sim \frac{V_{D4}}{V_{\text{mod},R}}. \quad (4.8.81)$$

これを考慮して $\partial_\phi^2 V$ を計算すると,

$$\Delta\eta \sim \eta \frac{V_{D4}}{V_{\text{mod},R}}. \quad (4.8.82)$$

したがって, $V_{D4}/V_{\text{mod},R} \ll 1$ なら, η への backreaction は無視できる.

D4 の 6 次元内部空間への影響 D4 ブレーンが u_1 の位置にあるとき, D4 ブレーンは u_2 方向に一定の間隔でずれながら, x' 方向に $N_w = Mu_1$ 回巻き付いた状態にある:

$$N_w = Mu_1 \sim \frac{V_{D4}}{V_{\text{mod},R}} \frac{2L_x^3 M^2}{(2\pi)^3 g_s}. \quad (4.8.83)$$

そこで, Y_6 において u_2, x, \tilde{x} 方向を KK reduction し, $\tilde{u}_2 u_1, \tilde{u}_1$ 上の理論に落とすと, D4 ブレーンの重力ポテンシャルは

$$\Phi_{D4} \sim \frac{G_7 V_{D4}}{r}; \quad G_7 \sim (2\pi)^4 \frac{g_s^2 \ell_s^5}{L_x^2 L_2}. \quad (4.8.84)$$

これより, D4 ブレーンの曲率の影響領域の半径 r_c は $r_c \sim G_7 V_{D4}$. これを Y の半径と比較すると

$$\frac{r_c}{L_2 \ell_s} \sim \frac{V_{D4}}{V_{\text{mod},R}} \frac{L_x^3 M^2}{\beta L^3 (2\pi)^2} \sim \frac{V_{D4}}{V_{\text{mod},R}} \frac{1}{\beta (2\pi)^2} \sqrt{\frac{M}{K}}, \quad (4.8.85a)$$

$$\frac{r_c}{L_2 \ell_s} \sim \frac{V_{D4}}{V_{\text{mod},R}} \frac{1}{(2\pi)^2} \sqrt{\frac{M}{K}}. \quad (4.8.85b)$$

ここで,

$$\frac{V_{D4}}{V_{\text{mod},R}} \propto \beta^{1/3} \quad (4.8.86)$$

より, $K/M \gg 1$ としても β が小さすぎると, 内部空間が古典的に扱える条件

$$\frac{r_c}{L_2 \ell_s} \ll 1, \quad \frac{r_c}{L_1 \ell_s} \ll 1 \quad (4.8.87)$$

が満たされなくなる.

4. 観測情報からの制限

一般に, $V \propto \phi^p$ のとき,

$$N \simeq \frac{1}{2p} \left\{ \left(\frac{\phi_N}{m_{\text{pl}}} \right)^2 - 1 \right\} \quad (4.8.88)$$

より, スカラ曲率ゆらぎの振幅は

$$\Delta_R \simeq \left(\frac{V^3}{12\pi^2 m_{\text{pl}}^6 V'^2} \right)^{1/2} \simeq \frac{(4/3)^{1/6}}{2\pi} N^{2/3} \left(\frac{\mu}{m_{\text{pl}}} \right)^{5/3}. \quad (4.8.89)$$

COBE 規格化では

$$\mu_{\text{obs}} \simeq 1.6 \times 10^{-3} \quad (N = 60). \quad (4.8.90)$$

整合性条件を rescale されたモジュライパラメータで表すと

$$\frac{\phi_{\text{cr}}}{m_{\text{pl}}} \sim (2\pi)^{3/2} \gamma^{-1/2} \frac{\hat{g}^{1/2}}{\sqrt{2}} \left(\frac{\hat{L}}{\hat{L}_x} \right)^{9/4} \ll 1, \quad (4.8.91a)$$

$$\frac{\phi_{\text{max}}}{m_{\text{pl}}} \sim \frac{\gamma}{3(2\pi)^3 \hat{g}} \left(\frac{\hat{L}}{\hat{L}_x} \right)^{-9/2} > \frac{\phi_N}{m_{\text{pl}}}, \quad (4.8.91b)$$

$$\frac{\phi_*}{m_{\text{pl}}} \sim K^{9/8} \gamma^{1/4}, \quad (4.8.91c)$$

$$\Delta_R \sim 60^{2/3} \frac{(2\pi)^{7/2}}{2^{5/6}} K^{-3/2} \gamma^{-1/3} \hat{g}^{4/3} \frac{\hat{L}_x^{1/2}}{\hat{L}^{3/2}}. \quad (4.8.91d)$$

ここで,

$$\gamma \equiv \beta^{-1/2} \left(\frac{K}{M} \right)^{1/4}. \quad (4.8.92)$$

まず

$$\phi_{\text{max}} > 9m_{\text{pl}} \Rightarrow \gamma > 190 \quad (N_{\text{total}} > 60) \quad (4.8.93)$$

また,

$$\Delta_R \sim 5.4 \times 10^{-5} \Rightarrow \gamma^{1/3} K^{3/2} \sim 1.9 \times 10^{10}. \quad (4.8.94)$$

両者より,

$$K \leq 2.3 \times 10^6 \Rightarrow f_6 \lesssim 310. \quad (4.8.95)$$

および

$$\beta M^2 \lesssim 0.04 \quad (4.8.96)$$

これは $M = 1$ でも $\beta \sim 0.04$ 程度の fine tuning が必要であることを意味する.

(注) Silverstein が dS 真空を求めたモデルでは, KK5 ブレーンは $\beta = 1$ に安定化させる効果をもつ.

【Exercise 4.8.2】 IIA 理論の Nil コンパクト化において, D4 を $u_2 - \tilde{u}_2$ 方向に巻き付け, $u_2 + \tilde{u}_2, u_1, \tilde{u}_1$ の線形結合の方向に動くとする:

$$u_2 = \sigma + cu_B(t), \quad \tilde{u}_2 = -\sigma + cu_B(t), \quad u_1 = au_B(t), \quad \tilde{u}_1 = bu_B(t). \quad (4.8.97)$$

このとき, $u_B \gg 1$ で, $V_{D4} \propto \phi^{2/5}$ となることを示せ. _____ □

4.8.4 Axion monodromy inflation in IIB model

概要 IIB理論におけるDBI作用積分が生み出すD5-B場アクシオン結合, NS5-Cがアクシオン結合を用いると, 大振幅で $V\propto\phi$ となる大振幅アクシオンインフレーションモデルが構成できる. このモデルは, IIA理論のNilコンパクト化に基づくmonodromy influmのT双対と見なすことができる (D4 \leftrightarrow D5/NS5, geometrical flux \leftrightarrow B/C場).

References

- McAllister L, Silverstein E, Westphal A: prd82, 046003 (2010)
Gravity waves and linear inflation from axion monodromy”

axions IIB理論では, 2種類のモデル依存 axions が生じる :

- $B_2 = \sum_I b_I \omega^I \Rightarrow b_I (I = 1, \dots, h^{1,1})$
- $C_p = \sum c_\alpha^{(p)} \omega_{[p]}^\alpha \Rightarrow c_\alpha^{(p)} (\alpha = 1, \dots, b_p)$

ブレーンが存在しないとき, これらの場はシフト対称性をもつ :

$$\phi_a \rightarrow \phi_a + (2\pi)^2 f_a \quad (4.8.98)$$

運動項は一般に,

$$S_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g_4} \gamma^{IJ} \partial a_I \cdot \partial a_J \quad (4.8.99)$$

の構造をもつ。ここで,

$$\gamma^{IJ} = \begin{cases} \frac{1}{6(2\pi)^7 g_s^2 \ell_s^8} \int_Y * \omega_I \wedge \omega_J & ; b_I \\ \frac{1}{6(2\pi)^7 \ell_s^8} \int_Y * \omega_I \wedge \omega_J & ; c_J \end{cases} \quad (4.8.100)$$

これより,

$$m_{\text{pl}}^2 = \frac{2}{(2\pi)^7} \frac{\mathcal{V}}{g_s^2 \ell_s^2}, \quad \mathcal{V} = \text{Vol}(Y)/\ell_s^6 = L^6 \quad (4.8.101)$$

を考慮すると

$$\phi_b^2 \sim \frac{L^2 b^2}{3g_s^2 (2\pi)^7 \ell_s^2} = \frac{1}{6} L^2 m_{\text{pl}}^2 b^2 \Rightarrow f_a \sim \frac{L}{\sqrt{6}} m_{\text{pl}}, \quad (4.8.102a)$$

$$\phi_c^2 \sim \frac{L^2 c^2}{3(2\pi)^7 \ell_s^2} = \frac{1}{6} g_s^2 L^2 m_{\text{pl}}^2 c^2 \Rightarrow f_a \sim \frac{g_s L}{\sqrt{6}} m_{\text{pl}}. \quad (4.8.102b)$$

Brane-axion 相互作用 DBI 作用積分より

$$D5 : V(b) = \frac{\epsilon}{g_s(2\pi)^5 \ell_s^4} \sqrt{\ell^4 + b^2}, \quad (4.8.103a)$$

$$NS5 : V(b) = \frac{\epsilon}{g_s^2(2\pi)^5 \ell_s^4} \sqrt{\ell^4 + g_s^2 c^2} \quad (4.8.103b)$$

両者はS双対変換により互いに移り変わる．いずれのモデルでも、 $\phi_a \gg m_{\text{pl}}$ のとき

$$V(\phi_a) \approx \mu_a^3 \phi_a \quad (4.8.104)$$

B-axion IIB理論のCYコンパクト化により、 $N = 2$ の4D sugra が得られる。この際のもジュライは、orientifold 射影のあと、

- Kähler: $T^A = \tau^A + i\theta^A$; $\theta^A = \int_{\Sigma^A} C_4$

$$\Rightarrow T_+^\alpha: \mathcal{O}\text{-even}$$

- Axionic: $G^I = g_s^{-1} b^I + i(c^I - C_0 b^I)$: $\mathcal{O}\text{-odd}$

このとき、

$$T_\alpha = \frac{3}{2}(\partial_{v_\alpha} \mathcal{V} + i\theta_\alpha) - \frac{3}{8} e^\phi c^{\alpha IJ} G_I (G + \bar{G})_J \quad (4.8.105)$$

[Grimm TW, Louis J: npb699, 387 (2004)] より、 $h_+^{1,1} = 1$ のとき（すなわち \mathcal{O} 射影で残るケーラーモジュライが1個の場合）、Kählerポテンシャルは

$$K = -2 \ln(e^{-3\phi/2} \mathcal{V}) = -3 \ln \left(T_L + \bar{T}_L + \frac{3}{2} e^{-\phi} c^{LIJ} b_I b_J \right) \quad (4.8.106)$$

となる ($\kappa_{IJK} \rightarrow (2\pi)^6 c^{IJK}$)。この K の b 依存性のため、B-axion には η 問題が起こりインフラトンとなれない。

C-axion C-axion と NS5 ブレーンの結合の場合、 η 問題は起こらず、インフラトンとなることが可能。ただし、Euclidian D1 ブレーンとの相互作用は危険で、抑制が必要。

例えば、 $h_+^{1,1} = 2$, $h_-^{1,1} = 1$ となるコンパクト化では、

$$K = -2 \ln \mathcal{V}_E; \quad \mathcal{V}_E = \frac{L^6}{g_s^{3/2} (2\pi)^6} = (T_L + \tilde{T}_L)^{3/2} - [T_+ + \bar{T}_+ + \frac{3}{8} g_s c_{+--} (G_- + \bar{G}_-)^2]^{3/2}, \quad (4.8.107a)$$

$$W = W_0 + A_1 e^{-a_+ T_+} + A_L e^{-a_L T_L} \quad (4.8.107b)$$

に対し、モデルパラメータを

$$A_L = -1, \quad A_+ = 1, \quad a_L = \frac{2\pi}{25}, \quad a_+ = \frac{2\pi}{3}, \quad W_0 = 3 \times 10^{-2} \times W_0(\text{KKLT}) \quad (4.8.108)$$

ととると、モジュライは安定化される：

$$T_L \sim 20, \quad T_+ \sim 4, \quad b \sim 0. \quad (4.8.109)$$

さらに、NS5 ブレーンとの相互作用

$$V_{\text{NS5}} = m_{\text{pl}}^4 \frac{e^{4A_{\text{bottom}}}}{(2\pi)^3 g_s \mathcal{V}_E^2} \sqrt{v_+^2 + g_s^2 c^2}, \quad (4.8.110)$$

$$v_+^2 = \frac{g_s}{2} \left\{ T_+ + \bar{T}_+ + \frac{3}{8} g_s c_{+--} (G_- + \bar{G}_-)^2 \right\}, \quad (4.8.111)$$

$$\phi_c \sim m_{\text{pl}} e^{A_{\text{top}}} \frac{c g_s}{L^2} \quad (4.8.112)$$

を考慮すると、 c はインフラトンとなる。モデルパラメータとして

$$e^{A_{\text{bottom}}} \sim 0.04, \quad e^{A_{\text{top}}} \sim 1 \quad (4.8.113)$$

と取ると、巻きつき数は $N_w \sim 70$ となり、axion のモジュライへの反作用は無視できる。

4.8.5 様々な axion monodromy influms

- Stringy realisation
 - Baumann D, McAllister L: Inflation and String Theory (CUP, 2015) review
 - Westphal A: IJMPA30, 1530024 (2015) [1409.5350]
- D7-deformation moduli \Rightarrow axion
 - Arends M, Hebecker A et al: FortPhys. 62, 647 (2014) [1405.0283]
- B-axion
 - McAllister L, Silverstein E, Westphal A, Wrase : jhpe09, 123 (2014) [1405.3652]
 - Franco S, Galloni D, Retolaza A, Uranga A: jhep02, 086 (2015) [1405.7044]
- NG flux + Kähler moduli \Rightarrow axion
 - Hassler F, Lust D, Massai S: [1405.2325]
- Wilson line axion, MSSM D-brane position modulus
 - Ibanez LE, Valenzuela I: plb736, 226 (2014) [1404.5235]
- F-theory
 - Grimm TW: plb739, 201 (2014) [1404.4268]
- CS moduli
 - Garcia-Etxebarria I, Grimm TW, Valenzuela I: npb 899, 414 (2015) [1412.5537]

§4.9

Non-geometrical flux

4.9.1 T 双対変換

References

- Buscher TH: PLB194(1987)59.
“A Symmetry of the String Background Field Equations’ ‘
- Buscher TH: PLB201(1988)466.
“Path-integral derivation of quantum duality sigma-models’ ‘
- Bergshoeff E, Hull CM, Ortin T: NPB451(1995) 547.
”Duality in the Type-II Superstring Effective Action “
- Hassan SF: NPB568 (2000) 145.
”T-Duality, Space-time Spinors and R-R Fields in Curved Backgrounds”

1. NS sector

Nonlinear σ モデルアプローチ [Buscher TH (1987, 1988)]

ストリング作用積分

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\Sigma_2} d^2\sigma \sqrt{h} \left[h^{ab} g(X) (\partial_a X, \partial_b X) + \epsilon^{ab} B(X) (\partial_a X, \partial_b X) + \alpha'^{(2)} R\phi(X) \right] \quad (4.9.1)$$

において、背景場が $k = \partial_x$ 方向に不変であるとする：

$$\partial_x g_{MN} = \partial_x B_{MN} = \partial_x \phi = 0 \quad (4.9.2)$$

このとき、この作用積分は次のものと同等である：

$$S_1 = S_0(\partial_a X^x \rightarrow V_a) + \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\Sigma_2} X^x dV \quad (4.9.3)$$

この新たな作用積分で, V_a を消去すると (Legendre 変換),

$$\hat{S} = S_0(g \rightarrow \hat{g}, B \rightarrow \hat{B}); \quad (4.9.4)$$

$$\hat{g} = g_{xx}^{-1}(dX^x + B_{(x)})^2 - g_{xx}g_{(x)}^2 + g' \quad (4.9.5)$$

$$\hat{B} = g_{(x)} \wedge (-dX^x + B_{(x)}) + B' \quad (4.9.6)$$

$$\hat{\phi} = \phi - \frac{1}{2} \log g_{xx} \quad (4.9.7)$$

を得る. ここで,

$$g_{(x)} = \frac{1}{g_{xx}} g_{xI} dX^I \quad (4.9.8a)$$

$$B_{(x)} = I_{\partial_x} B = B_{xI} dX^I \quad (4.9.8b)$$

この変換則は **Bucher** ルールと呼ばれる.

2. RR セクター

RR セクターのフォーム場

- IIA

$$\tilde{F}_2 = F_2 = dC_1, \quad (4.9.9a)$$

$$\tilde{F}_4 = dC_3 + C_1 \wedge H_3 \quad (4.9.9b)$$

- IIB

$$\tilde{F}_1 = F_1 = dC_0, \quad (4.9.10a)$$

$$\tilde{F}_3 = dC_2 - C_0 H_3, \quad (4.9.10b)$$

$$\tilde{F}_5 = * \tilde{F}_5 : \quad d\tilde{F}_5 = H_3 \wedge \tilde{F}_3 \quad (4.9.10c)$$

の T 双対変換は,

$$F_{n(x)} = I_{\partial_x} F_n = \frac{1}{(n-1)!} F_{xI_1 \dots I_{n-1}} dX^{I_1} \wedge \dots \wedge dX^{I_{n-1}} \quad (4.9.11)$$

とおくとき,

$$\tilde{F}'_{[n](x)} = \tilde{F}'_{[n-1]} - g_{(x)} \wedge \tilde{F}_{[n-1](x)}, \quad (4.9.12a)$$

$$\tilde{F}'_{[n]} = \tilde{F}'_{[n+1](x)} + B_{(x)} \wedge \tilde{F}_{[n](x)} \quad (4.9.12b)$$

で与えられる [Bergshoeff E, Hull CM, Ortin T (1995); Hassan SF (2000)].

4.9.2 Geometrical flux

概要 Nil多様体など、ツイストしたトーラスによるコンパクト化は、ツイストを一種のフラックスと見なすことにより、広い意味でフラックストーラスコンパクト化と見なすことができ、通常のフラックスコンパクト化とT双対変換により結びつく。

Reference

- Kachru S, Shulz MB, Tripathy PK, Trivedi SP: JHEP0303(2003)061
“ New supersymmetric string compactifications ”

1. 簡単な例

H_3 フラックスをもつ直交トーラス

$$T^3 = \mathbb{R}^3 / \mathbb{Z}^3 : (x, y, z) \sim (x+1, y, z) \sim (x, y+1, z) \sim (x, y, z+1) \quad (4.9.13)$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (4.9.14)$$

$$B = Nzdx \wedge dy, \quad (4.9.15)$$

$$H_3 = dB = Ndx \wedge dy \wedge dz; \quad N = \int_{T^3} H_3 \quad ((2\pi)^2 \alpha' = 1) \quad (4.9.16)$$

に対して、 x 方向に T 双対変換を施すと、

$$g_{(x)} = 0, \quad B_{(x)} = Nzdy; \quad B' = 0 \quad (4.9.17)$$

より、トーラスは Nil 多様体に変化し、 B 場は消える：

$$ds^2 = (dx + Nzdy)^2 + dy^2 + dz^2 \quad (4.9.18a)$$

$$B = 0 \Rightarrow H_3 = 0. \quad (4.9.18b)$$

この Nil 多様体の自明でない接続係数をもち、それから作られる 3 形式

$$\omega_3 = \omega_{ab} \wedge \theta^a \wedge \theta^b = N\theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \theta^3 \quad (4.9.19)$$

の成分は定数となる。この 3 形式は **geometric flux** と呼ばれる。

2. $T^2 \times T^2 \times T^2/\mathbb{Z}_2$ orientifold

IIB-1 + O3

• Geometry

$$T^6 = T^2 \times T^2 \times T^2 \ni ((x^1, y^1), (x^2, y^2), (x^3, y^3)); \quad (4.9.20)$$

$$ds^2 = \sum_{i=1}^3 [R_{xi}^2(dx^i)^2 + R_{yi}^2(dy^i)^2] \quad (4.9.21)$$

• Flux

$$H_3 = -N_1(dx^{12} + dy^{12}) \wedge dx^3 \quad (4.9.22a)$$

$$F_3 = N_2(dx^{12} + dy^{12}) \wedge dy^3, \quad F_1 = F_5 = 0 \quad (4.9.22b)$$

ここで, $N_1, N_2 \in \mathbb{Z}$.

• Moduli

– Complex structure : $h^{1,2} = 9$ for full.

$$\tau_j = iR_{yj}/R_{xj} \quad (j = 1, \dots, 3), \quad S = C_0 + ie^{-\Phi} \quad (4.9.23)$$

– Kähler: $h^{1,1} = 9$ for full

$$\rho_j = iR_{xj}R_{yj} \quad (j = 1, 2, 3) \quad (4.9.24)$$

• 10D IIB field equations (warping is neglected)

$$G_3 = F_3 - SH_3 = (dx^{12} + dy^{12}) \wedge (N_2dy^3 + N_1Sdx^3) \quad (4.9.25)$$

– Axio-dilaton = const $\Rightarrow G_3 \cdot G_3 = 0 \Rightarrow S\tau_3 = N_2/N_1$

– Imaginary self-duality: $*G_3 = iG_3 \Rightarrow \tau_1\tau_2 = -1$

– \mathbb{Z}_2 orientifolding: $(x^i, y^i) \Rightarrow (-x^i, -y^i) \Rightarrow N = 4$ Susy, $2^6 = 64$ O3 + flux $\Rightarrow N = 2$ Susy

– RR-tadpole cancelation

$$N_{D3} + N_{\text{flux}} = \frac{1}{4}N_{O3} = 16;$$

$$N_{\text{flux}} = \frac{1}{(2\pi)^4(\alpha')^2} \int_{Y_6} H_3 \wedge F_3 = 2N_1N_2/2 = N_1N_2 \quad (4.9.26)$$

• Superpotential

$$\begin{aligned} \Omega &= (dx^1 + \tau_1dy^1) \wedge (dx^2 + \tau_2dy^2) \wedge (dx^3 + \tau_3dy^3) \\ \Rightarrow W_{IIB} &= \int G_3 \wedge \Omega = -(1 + \tau_1\tau_2)(N_2 - N_1S\tau_3) \end{aligned} \quad (4.9.27)$$

IIB-1+O3 \Rightarrow **IIA-2 + O4** x^1 方向の T 変換を施すと

$$g_{x^1x^1} = R_{x^1}^2, \quad g_{(x^1)} = 0, \quad B_{(x^1)} = N_1x^2dx^3; \quad B' = N_1y^2dy^1 \wedge dx^3 \quad (4.9.28)$$

より、次の IIA 理論の orientifold コンパクト化を得る：

- Geometry: $\text{Nil}^3 \times T^3$

$$ds^2 = \tilde{R}_{x^1}^2 (dx^1 + N_1x^2dx^3)^2 + R_{x^2}^2(dx^2)^2 + R_{x^3}^2(dx^3)^2 + \sum_{j=1}^3 R_{y^j}^2(dy^j)^2 \quad (4.9.29)$$

$$\tilde{R}_{x^1} = 1/R_{x^1} \quad (4.9.30)$$

- Topology: Nil は $T^2 \times \mathbb{R}$ を次の変換で同一視したものである：

$$x^2 \rightarrow x^2 + 1, \quad \begin{pmatrix} x^1 \\ x^3 \end{pmatrix} \rightarrow S \begin{pmatrix} x^1 \\ x^3 \end{pmatrix}; \quad (4.9.31)$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ N_1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \gamma_1 & \rightarrow & \gamma_1 + N_1\gamma_3 \\ \gamma_3 & \rightarrow & \gamma_3 \end{pmatrix} \quad (4.9.32)$$

これより、

$$N_1\gamma_3 \sim 0 \Rightarrow H_1(Y_6) \cong \mathbb{Z}^5 \oplus \mathbb{Z}_{N_1} \Rightarrow b_1 = 5 \quad (4.9.33)$$

Kähler 多様体に対しては、 $h^{0,1} = h^{1,0}$ より b_1 は偶数となるので、これは Y_6 が Kähler 多様体でないことを意味する。

- Form fluxes

$$H_3 = -N_1dy^1 \wedge dy^2 \wedge dx^3 \quad (4.9.34a)$$

$$F_2 = N_2dx^2 \wedge dy^3 \quad (4.9.34b)$$

$$F_4 = N_2(dx^1 + N_1x^2dx^3) \wedge dy^{123} \quad (4.9.34c)$$

- Geometrical flux: 基底

$$\theta^1 = \tilde{R}_{x^1}(dx^1 + N_1x^2dx^3), \quad \theta^2 = R_{x^2}dx^2, \quad \theta^3 = R_{x^3}dx^3, \quad \dots \quad (4.9.35)$$

に対して、接続係数は

$$\omega_{32}^1 = -f\theta^1, \quad \omega_{13}^2 = f\theta^2, \quad \omega_{21}^3 = f\theta^3; \quad f = N_1 \frac{\tilde{R}_{x^1}}{R_{x^2}R_{x^3}} \quad (4.9.36)$$

となるので、geometrical flux は

$$\omega_{[3]} := \frac{1}{2}\omega_{ab}\theta^a \wedge \theta^b = f\theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \theta^3 = N_1R_{x^1}^{-2}dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \quad (4.9.37)$$

- 曲率

$$\mathcal{R}^2_3 = -3f^2\theta^2 \wedge \theta^3, \quad \mathcal{R}^3_1 = f^2\theta^3 \wedge \theta^1, \quad \mathcal{R}^1_2 = f^2\theta^1 \wedge \theta^2 \quad (4.9.38a)$$

$$R^1_1 = 2f^2, \quad R^2_2 = R^3_3 = -2f^2, \quad (4.9.38b)$$

$$R_s = -2f^2. \quad (4.9.38c)$$

- Moduli

- Axio-dilaton: $\tilde{S} = R_{x^1}S$.

- Complex structure: $\tilde{\tau}_1 = i\tilde{R}_{x^1}/R_{y^1} = -1/\rho_1, \quad \tilde{\tau}_2 = \tau_2, \quad \tilde{\tau}_3 = \tau_3$

- Size: $\tilde{\rho}_1 = i\tilde{R}_{x^1}R_{y^1} = \tau_1, \quad \tilde{\rho}_2 = \rho_2, \quad \tilde{\rho}_3 = \rho_3$

- Constraint

$$\tilde{\rho}_1\tilde{\tau}_2 = -1, \quad \tilde{R}_{x^1}\tilde{S}\tilde{\tau}_3 = N_2/N_1 \quad (4.9.39)$$

- Superpotential

$$\Omega_{\text{IIA}} = \eta^1 \wedge \eta^2 \wedge \eta^3; \quad \eta^j = \theta^j + \tilde{\tau}^j\theta^{j+3} \quad (j = 1, 2, 3), \quad (4.9.40a)$$

$$G_{\text{IIA}} = \tilde{F}_{4(x)} + k \wedge F_2 - \frac{i\tilde{R}_{x^1}}{g_{\text{IIA}}} \left(H_3 + \tilde{R}_{x^1}^{-2}k \wedge dk \right); \quad k = g_{x^1\mu}dx^\mu \quad (4.9.40b)$$

より、

$$W_{\text{IIA}} = \int G_{\text{IIA}} \wedge \Omega_{\text{IIA}} = -N_2(1 + \tilde{\rho}_1\tilde{\tau}_2) + N_1N_2\tilde{R}_{x^1}\tilde{S}(\tilde{\tau}_3 + \tilde{\rho}_1\tilde{\tau}_2\tilde{\tau}_3) (= W_{\text{IIB}}). \quad (4.9.41)$$

IIA-2 + O4 \Rightarrow IIB-3 + O5 IIA-2+O4において、 y^1 方向に T 変換を施すと、

$$g_{(y^1)} = 0, \quad B_{(y^1)} = N_1 y^2 dx^3; \quad B' = 0 \quad (4.9.42)$$

より、つぎのような IIB 理論のコンパクト化を得る：

- Geometry

$$ds^2 = \tilde{R}_{x1}^2 (dx^1 + N_1 x^2 dx^3)^2 + R_{x2}^2 (dx^2)^2 + R_{x3}^2 (dx^3)^2 \quad (4.9.43)$$

$$+ \tilde{R}_{y1}^2 (dy^1 + N_2 y^2 dx^3)^2 + R_{y2}^2 (dy^2)^2 + R_{y3}^2 (dy^3)^2 \quad (4.9.44)$$

- Form flux

$$H_3 = 0 \quad (4.9.45a)$$

$$F_3 = -N_2 (dx^1 + N_1 x^2 dx^3) \wedge dy^{23} + N_2 (dy^1 + N_1 y^2 dx^3) \wedge dx^2 \wedge dy^3 \quad (4.9.45b)$$

- Geometrical flux

$$\omega^2_3 = -f\theta^1, \quad \omega^3_1 = f\theta^2, \quad \omega^1_2 = f\theta^3; \quad f = N_1 \tilde{R}_{x1} / (R_{x2} R_{x3}) \quad (4.9.46a)$$

$$\omega^5_3 = -g\theta^4, \quad \omega^3_4 = g\theta^5, \quad \omega^4_5 = g\theta^3; \quad g = N_1 \tilde{R}_{y1} / (R_{y2} R_{x3}) \quad (4.9.46b)$$

- Superpotential

$$\hat{J} = i \hat{j}_{i\bar{j}} \eta^i \wedge \eta^{\bar{j}} \Rightarrow \hat{\Omega} = \eta^1 \wedge \eta^2 \wedge \eta^3, \quad (4.9.47a)$$

$$\hat{G}_3 = \hat{F}_{5(yx)} + \hat{k}_{(x)} \wedge \hat{F}_{3(y)} - \hat{k}_{(y)} \wedge \hat{F}_{3(x)} + \hat{k}_{(x)} \wedge \hat{k}_{(y)} \wedge \hat{F}_1 \quad (4.9.47b)$$

$$-ie^{-\hat{\Phi}} \sqrt{\det \hat{j}_{xy}} \left(\hat{\mathcal{H}}_3 + \hat{j}_{xx}^{-1} \hat{k}_{(x)} \wedge d\hat{k}_{(x)} + \hat{j}_{yy}^{-1} \hat{k}_{(y)} \wedge d\hat{k}_{(y)} \right) \quad (4.9.47c)$$

より、

$$\hat{W}_{\text{IIB}} = \int \hat{G}_3 \wedge \hat{\Omega} \quad (4.9.48)$$

4.9.3 Non-geometric flux

概要 H フラックス, 幾何学的フラックス \mathcal{F} , 非幾何学的フラックス \mathcal{R}, \mathcal{Q} のすべてを考慮すると, IIA 理論のトーラスコンパクト化で得られる4次元有効理論と IIB 理論から得られる4次元有効理論は完全に T 双対性で対応するようになる.

Reference

- Wecht B: CQG 24 (2007) S773.
“Lectures on non-geometrical flux compactifications”
- Shelton J, Taylor W, Wecht B: JHEP0510(2005)085.
“Nongeometric flux compactifications”
- Shelton J, Taylor W, Wecht B: JHEP0702(2007)095.
“Generalized flux vacua”

1. Simple example

3次元 Nil 多様体 (=twisted torus)

$$ds^2 = (dx + Nzdy)^2 + dy^2 + dz^2, \quad B = 0 \tag{4.9.49}$$

に y 方向の T 双対変換を施すと

$$g_{yy} = 1 + N^2z^2, \quad g_{(y)} = \frac{Nz}{1 + N^2z^2}, \quad B_{(x)} = 0; \quad B' = 0 \tag{4.9.50}$$

より,

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{1 + N^2z^2} + dz^2, \quad B = \frac{Nz}{1 + N^2z^2} dx \wedge dy \tag{4.9.51}$$

を得る。この空間構造は局所的には確定するが、大域的には $z \rightarrow z + 1$ での同一視の際に計量と B 場が混合するので、確定しない:

$$\rho = \int B + iV : \quad \rho^{-1} = Nz - i \rightarrow \rho^{-1} + N, \tag{4.9.52a}$$

$$(g + B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -Nz & 0 \\ Nz & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow (g + B)^{-1} + N \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.9.52b}$$

そこで、この配位は、非幾何学的 Q -フラックスをもつという:

$$Q^{xy}_z = N \tag{4.9.53}$$

2. $T^2 \times T^2 \times T^2/\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ モデル

IIB モデル

- Coordinates: $z^1 = x^\alpha + \tau x^i, z^2 = x^\beta + \tau x^j, z^3 = x^\gamma + \tau x^k$
- metric : $ds^2 = \sum_j dz^j d\bar{z}^j$
- Moduli
 - axio-dilaton: $S = C_0 + ie^{-\phi}$
 - Kähler: $U = C_{\alpha i \beta j} + iV$
 - Complex structure: τ

- Kahler potential

$$K = -3 \ln(-i(\tau - \bar{\tau})) - 3 \ln(-i(U - \bar{U})) - \ln(-i(S - \bar{S})) \quad (4.9.54)$$

- Superpotential

$$W = P_1(\tau) + SP_2(\tau); \quad (4.9.55)$$

$$P_1(\tau) = a_0 - 3a_1\tau + 3a_2\tau^2 - a_3\tau^3, \quad (4.9.56)$$

$$P_2(\tau) = -b_0 + 3b_1\tau - 3b_2\tau^2 + b_3\tau^3 \quad (4.9.57)$$

これより得られるポテンシャルは no-scale 構造をもつ :

$$V = e^K \sum_{i,j=\tau,S} K^{i\bar{j}} D_i W (D_{\bar{j}} W)^* \geq 0 \quad (4.9.58)$$

- Tadpole condition

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^4(\alpha')^2} \int H_3 \wedge F_3 = 16 \\ \Rightarrow & a_0 b_3 - 3a_1 b_2 + 3a_2 b_1 - a_3 b_0 = 16 \end{aligned} \quad (4.9.59)$$

Term	IIB flux	Integer flux	Term	IIA flux	Integer flux
1	\bar{F}_{ijk}	a_0	1	$\bar{F}_{\alpha i \beta j \gamma k}$	a_0
τ	$\bar{F}_{ij\gamma}$	a_1	τ	$\bar{F}_{\alpha i \beta j}$	a_1
τ^2	$\bar{F}_{i\beta\gamma}$	a_2	τ^2	$\bar{F}_{\alpha i}$	a_2
τ^3	$\bar{F}_{\alpha\beta\gamma}$	a_3	τ^3	$F^{(0)}$	a_3
S	\bar{H}_{ijk}	b_0	S	\bar{H}_{ijk}	b_0
$S\tau$	$\bar{H}_{\alpha jk}$	b_1	$S\tau$	f_{jk}^α	b_1
$S\tau^2$	$\bar{H}_{i\beta\gamma}$	b_2	U	$\bar{H}_{\alpha\beta k}$	c_0
$S\tau^3$	$\bar{H}_{\alpha\beta\gamma}$	b_3	$U\tau$	$f_{k\alpha}^j, f_{\beta k}^i, f_{\beta\gamma}^\alpha$	$\check{c}_1, \hat{c}_1, \tilde{c}_1$

表 4.6: IIB モデル (左) と IIA モデル (右) でのフラックスと超ポテンシャルの対応

IIA モデル

- Geometric flux

$$ds^2 = \eta_{ab}\theta^a\theta^b; \quad d\theta^a = -f^a_{bc}\theta^b \wedge \theta^c, \quad (4.9.60a)$$

$$f_{jk}^\alpha = f_{ki}^\beta = f_{ij}^\gamma, \quad f_{j\gamma}^i = f_{k\alpha}^j = f_{i\beta}^k, \quad f_{i\gamma}^j = f_{j\alpha}^k = f_{k\beta}^i, \quad f_{\beta\gamma}^\alpha = f_{\gamma\alpha}^\beta = f_{\alpha\beta}^\gamma \quad (4.9.60b)$$

- Moduli

- axio-dilaton: $S = C_{\alpha\beta\gamma} + ie^{-\phi}$
- complex structure: $U = C_{ij\gamma} + i\tau_2$
- Kähler: $\tau = B_{\alpha i} + iV$

- Superpotential

$$W = P_1(\tau) + S\tilde{P}_2(\tau) + U\tilde{P}_3(\tau); \quad (4.9.61)$$

$$\tilde{P}_2(\tau) = -b_0 + 3b_1\tau \quad (4.9.62)$$

$$\tilde{P}_3(\tau) = 3\{c_0 + (\hat{c}_1 + \check{c}_1 - \tilde{c}_1)\tau\} \quad (4.9.63)$$

この超ポテンシャルにより、すべてのモジュライが安定化される！

Term	IIA flux	IIB flux	integer flux
1	$\bar{F}_{\alpha i \beta j \gamma k}$	\bar{F}_{ijk}	a_0
τ	$\bar{F}_{\alpha i \beta j}$	$\bar{F}_{ij\gamma}$	a_1
τ^2	$\bar{F}_{\alpha i}$	$\bar{F}_{i\beta\gamma}$	a_2
τ^3	$F^{(0)}$	$\bar{F}_{\alpha\beta\gamma}$	a_3
S	\bar{H}_{ijk}	\bar{H}_{ijk}	b_0
U	$\bar{H}_{\alpha\beta k}$	$Q_k^{\alpha\beta}$	c_0
$S\tau$	f_{jk}^α	$\bar{H}_{\alpha jk}$	b_1
$U\tau$	$f_{k\alpha}^j, f_{\beta k}^i, f_{\beta\gamma}^\alpha$	$Q_k^{\alpha j}, Q_k^{i\beta}, Q_\alpha^{\beta\gamma}$	$\check{c}_1, \hat{c}_1, \tilde{c}_1$
$S\tau^2$	$Q_k^{\alpha\beta}$	$\bar{H}_{i\beta\gamma}$	b_2
$U\tau^2$	$Q_\beta^{\gamma i}, Q_\gamma^{i\beta}, Q_k^{ij}$	$Q_\gamma^{i\beta}, Q_\beta^{\gamma i}, Q_k^{ij}$	$\check{c}_2, \hat{c}_2, \tilde{c}_2$
$S\tau^3$	$R^{\alpha\beta\gamma}$	$\bar{H}_{\alpha\beta\gamma}$	b_3
$U\tau^3$	$R^{ij\gamma}$	Q_γ^{ij}	c_3

表 4.7: IIB モデルと IIA モデルでのすべてのフラックスと超ポテンシャルの対応

完全な T 双対性 H_{abc} フラックス、幾何学的フラックス $f^a{}_{bc}$ 、Q フラックス $Q^{ab}{}_c$ にさらに次のような T 双対変換

$$H_{abc} \xleftrightarrow{x^a} f^a{}_{bc} \xleftrightarrow{x^b} Q^{ab}{}_c \xleftrightarrow{x^c} R^{abc} \quad (4.9.64)$$

で結ばれる R-フラックスを付け加えると、表 4.7 に示した対応により、IIA および IIB 理論における超ポテンシャルは T 双対で 1 対 1 に対応することになる：

$$W = P_1(\tau) + SP_2(\tau) + UP_3(\tau) : \quad (4.9.65)$$

$$P_1 = a_0 - 3a_1\tau + 3a_2\tau^2 - a_3\tau^3, \quad (4.9.66)$$

$$P_2 = -b_0 + 3b_1\tau - 3b_2\tau^2 + b_3\tau^3, \quad (4.9.67)$$

$$P_3 = 3\{c_0 + (\hat{c}_1 + \check{c}_1 - \tilde{c}_1)\tau - (\hat{c}_2 + \check{c}_2 + \tilde{c}_2)\tau^3 - c_3\tau^3\} \quad (4.9.68)$$

[Note 4.9.1] この一般化されたフラックスを用いることにより、dS 真空やインフレーションを実現する $T^6/\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ および T^6/\mathbb{Z}_2 オービフォールドコンパクト化が構成されている：

References

- B. de Carlos, A. Guarino and J. M. Moreno: JHEP 02 (2010) 076, [arXiv:0911.2876].
“Complete classification of Minkowski vacua in generalised flux models”
- U. Danielsson and G. Dibitetto: JHEP 03(2013) 018, [arXiv:1212.4984].
“On the distribution of stable de Sitter vacua”
- J. Blaback, U. Danielsson and G. Dibitetto: JHEP 08 (2013) 054, [arXiv:1301.7073].
“Fully stable dS vacua from generalised fluxes”
- C. Damian, O. Loaiza-Brito, L. Rey and M. Sabid: JHEP 06 (2013) 109, [arXiv:1302.0529].
“Slow-Roll Inflation in Non-geometric Flux Compactification”
- F. Catino, C. A. Scrucca and P. Smyth: JHEP 04 (2013) 056, [arXiv:1302.1754]
“Simple metastable de Sitter vacua in N=2 gauged supergravity”
- C. Damian and O. Loaiza-Brito: Phys. Rev. D 88 (2013) 046008, [arXiv:1304.0792].
“More stable dS vacua from S-dual non-geometric fluxes”

□

3. 一般的な定義

References

- Andriot D, Betz A: jhep 1312, 083 (2013) [arXiv:1306.4381].
“b-supergravity: a ten-dimensional theory with non-geometric fluxes, and its geometric framework”
- Kaloper N, Myers RC: JHEP9905(1999)010.
“ The O(dd) story of massive supergravity ”

Toroidal reduction 10次元超重力理論のNSセクターの d 次元トーラスへのコンパクト化

$$g(M) = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} & \theta_\mu^m \\ \theta_\nu^n & \gamma_{mn} \end{pmatrix} \quad (4.9.69)$$

により、 $O(d, d)$ 不変な非線形シグマ型の D 次元理論が得られる。

- KK reduction: $M_{10} = X_D \times T^d$
 - Gauge fields ($2d$)

$$A^a : (A_\mu^a) = \begin{pmatrix} V_\mu^m = \theta_\mu^m \\ B_{\mu m} \end{pmatrix} \Rightarrow F^a = dA^a \quad (4.9.70)$$

- Moduli

$$M = \begin{pmatrix} \gamma^{-1} & -\gamma^{-1}B \\ B\gamma^{-1} & \gamma - B\gamma^{-1}B \end{pmatrix} \in O(d, d)/(O(d) \times O(d)) \quad (4.9.71)$$

ここで、

$$M\Omega^T M = \Omega; \quad \Omega := \begin{pmatrix} 0_d & 1_d \\ 1_d & 0_d \end{pmatrix} \quad (4.9.72)$$

- Action

$$S_0 = \int d^D x \sqrt{-g} e^{-\phi} \left[R + (\nabla\phi)^2 - \frac{1}{2} h \cdot h + \frac{1}{8} \text{Tr}(\Omega \nabla_\mu M \Omega \nabla^\mu M) - \frac{1}{4} {}^T F_{\mu\nu} \Omega M \Omega F^{\mu\nu} \right] \quad (4.9.73)$$

ここで、

$$h = db - \frac{1}{2} \Omega_{ab} A^a \wedge F^b, \quad b = \frac{1}{2} B_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \quad (4.9.74)$$

- Duality group $O(d, d)$

$$A \rightarrow TA, \quad M \rightarrow TM {}^T T; \quad T\Omega {}^T T = \Omega \Leftrightarrow T \in O(d, d) \quad (4.9.75)$$

NG flux in terms of the moduli Toroidal reduction で得られる d 次のモジュライ行列のパラメータを次のように変更する：

$$M = \begin{pmatrix} g - bg^{-1}b & -bg^{-1} \\ g^{-1}b & g^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{g} & \tilde{g}\beta \\ -\beta\tilde{g} & \tilde{g}^{-1} - \beta\tilde{g}\beta \end{pmatrix} \in O(d, d)/(O(d) \times O(d)) \quad (4.9.76)$$

この変換は、

$$(g + b)^{-1} = \tilde{g}^{-1} + \beta \quad (4.9.77)$$

と同等。

この β を用いて、 Q -flux および R -flux を次のように定義することができる：

$$Q_c{}^{ab} = \partial_c \beta^{ab} - 2\beta^{d[a} f^b]{}_{cd}, \quad (4.9.78a)$$

$$\mathcal{R}^{abc} = 3\beta^{d[a} \nabla_e \beta^{bc]} \quad (4.9.78b)$$

4.9.4 Flux-scaling scenario

概要 IIB 理論の CY orientifold コンパクト化において, H -flux, geometrical flux \mathcal{F} , non-geometrical flux \mathcal{Q} , \mathcal{R} のすべてを考慮した場合の 4次元有効理論を $N = 1$ 超重力理論の形式で具体的に書き下すことができる. この定式化を用いて, 安定な SUSY adS 真空をもつ例, その $\bar{D}3$ uplift により non-susy Minkowski 真空を持つ例, D 項 uplift により axionic flat direction をもつ安定な Minkowski 真空の例を, ブレーンを導入せずに, 作ることができる. これらの例では, 真空でのモジュライの値はポテンシャルの値は, フラックスのべきの分数式となっており, その値の制御は容易である. しかし, インフレーションモデルを作るのは難しい. 一つの可能性は, 理論の S 双対性を NG フラックスに拡張することにより示唆される”P-flux” を導入することである.

References

- Blumenhagen R, Font A, Fuchs M, Herschmann D, Plauschinn E, Sekiguchi Y, Wolf F: npb 897, 500 (2015)
“A flux-scaling scenario for high-scale moduli stabilization in string theory”
- Blumenhagen R, Domian C, Font A, Herschmann D, Sun R: Fortsch.Phys. 64 (2016) no.6-7, 536-550
“The Flux-Scaling Scenario: De Sitter Uplift and Axion Inflation”

1. Model

以下、IIB理論において、CY orientifold コンパクト化を考え、フラックスはそれに対する摂動とみなし、内部空間の構造への反作用は考えない。ただし、RR-tadpole 条件は考慮する。

このモデルでは、調和形式は、orientifold 作用 $\mathcal{O} = \Omega_p(-1)^{F_L} \mathcal{R}$ における内部空間での \mathbb{Z}_2 作用 \mathcal{R} に関するパリティにより次のように分類される：

$$H^{1,1} : \omega_A \Rightarrow \omega_\alpha \ (\alpha = 1, \dots, h_+^{1,1}), \quad \omega_a \ (a = 1, \dots, h_-^{1,1}), \quad (4.9.79)$$

$$H^{2,2} : \tilde{\omega}^A \Rightarrow \tilde{\omega}^\alpha \ (\alpha = 1, \dots, h_+^{1,1}), \quad \tilde{\omega}^a \ (a = 1, \dots, h_-^{1,1}), \quad (4.9.80)$$

$$H^{2,1} : \alpha_\Lambda \Rightarrow \alpha_{\hat{\lambda}} \ (\hat{\lambda} = 1, \dots, h_+^{2,1}), \quad \alpha_\lambda \ (\lambda = 1, \dots, h_-^{2,1}), \quad (4.9.81)$$

$$H^{1,2} : \beta^\Lambda \Rightarrow \beta^{\hat{\lambda}} \ (\hat{\lambda} = 1, \dots, h_+^{2,1}), \quad \beta^\lambda \ (\lambda = 1, \dots, h_-^{2,1}) \quad (4.9.82)$$

ここで、

$$\int_Y \omega_A \wedge \tilde{\omega}^B = \delta_B^A, \quad \int_Y \alpha_\Lambda \wedge \beta^\Sigma = \delta_\Lambda^\Sigma. \quad (4.9.83)$$

また、

$$\tilde{\omega}^0 = 1, \quad \omega_0 = \mathbf{v}(Y)/\mathcal{V}(Y) \quad (4.9.84)$$

と約束する。

モジュライは

- Complexified Kähler: $T_\alpha = \tau_\alpha + i\rho_\alpha, \ \alpha = 1, \dots, h_+^{1,1}$
- Purely axionic moduli: $G^a = S b^a + i c^a, \ a = 1, \dots, h_-^{1,1}$
- CS moduli: $U^\lambda = u^\lambda + i v^\lambda, \ \lambda = 1, \dots, h_-^{2,1}$
- axio-dilaton: $S = e^{-\phi} - i C_0$

これらの chiral superfield に加えて、可換ゲージ場が生じる：

$$A_{\hat{\lambda}} : \hat{\lambda} = 1, \dots, h_+^{2,1} \quad \Leftarrow C_{[4]} \quad (4.9.85)$$

2. Non-geometrical flux

H -flux, geometrical flux F , non-geometrical flux Q, R を記述するパラメータを、作用素

$$\mathcal{D} \equiv d - H \wedge - F \circ - Q \circ - R \circ; \quad (4.9.86)$$

$$F \circ \omega_p = (F_{[j_1 j_2}^i \omega_{|i|j_3 \dots j_{p+1}]}) \in \mathcal{A}^{p+1}, \quad (4.9.87)$$

$$Q \circ \omega_p = (Q_{[j_1}^{i_1 i_2} \omega_{|i_1 i_2|j_2 \dots j_{p-1}]}) \in \mathcal{A}^{p-1}, \quad (4.9.88)$$

$$R \circ \omega_p = (R^{i_1 i_2 i_3} \omega_{|i_1 i_2 i_3|j_1 \dots j_{p-3}}) \in \mathcal{A}^{p-3} \quad (4.9.89)$$

の微分形式の基底への作用により次のように定義する：

$$\mathcal{D}\alpha_\Lambda = q_\Lambda^A \omega_A + f_{\Lambda A} \tilde{\omega}^A, \quad (4.9.90a)$$

$$\mathcal{D}\beta^\Lambda = \tilde{q}^{\Lambda A} \omega_A + \tilde{f}^\Lambda_A \tilde{\omega}^A, \quad (4.9.90b)$$

$$\mathcal{D}\omega_A = -\tilde{f}^\Lambda_A \alpha_\Lambda + f_{\Lambda A} \beta^\Lambda, \quad (4.9.90c)$$

$$\mathcal{D}\tilde{\omega}^A = \tilde{q}^{\Lambda A} \alpha_\Lambda - q_\Lambda^A \beta^\Lambda. \quad (4.9.90d)$$

ただし、 $A = 0$ に対応する係数は、 H フラックスと R フラックスを表す：

$$f_{\Lambda 0} = r_A, \quad \tilde{f}^\Lambda_0 = \tilde{r}^A, \quad q_A^0 = h_\Lambda, \quad \tilde{q}^{\Lambda 0} = \tilde{h}^\Lambda. \quad (4.9.91)$$

これに orientifold 射影を施すと次の成分が残る：

$$\mathcal{F}(-) : f_\lambda, \quad \tilde{f}^\lambda \quad (2h_-^{2,1}), \quad (4.9.92a)$$

$$H(-) : h_\lambda, \quad \tilde{h}^\lambda \quad (2h_-^{2,1}), \quad (4.9.92b)$$

$$F(+) : f_{\hat{\lambda}\alpha}, \quad \tilde{f}^{\hat{\lambda}}_\alpha, \quad f_{\lambda a}, \quad \tilde{f}^\lambda_a \quad (2h_+^{1,1}h_+^{2,1} + 2h_-^{1,1}h_-^{2,1}), \quad (4.9.92c)$$

$$Q(-) : q_{\hat{\lambda}}^a, \quad \tilde{q}^{\hat{\lambda}a}, \quad q_\lambda^\alpha, \quad \tilde{q}^{\lambda\alpha} \quad (2h_+^{1,1}h_-^{2,1} + 2h_-^{1,1}h_+^{2,1}), \quad (4.9.92d)$$

$$R(+): r_{\hat{\lambda}}, \quad \tilde{r}^{\hat{\lambda}} \quad (2h_+^{2,1}) \quad (4.9.92e)$$

これらのフラックスは Bianchi 恒等式、tadpole 条件より導かれる次の条件を満たすことが要求される：

$$\mathcal{D}^2 = 0. \quad (4.9.93)$$

3. 4D sugra

Superpotential 一般公式

$$W = \int_Y (\mathcal{F} + \mathcal{D}\Phi_c^{\text{ev}})_3 \wedge \Omega \quad (4.9.94)$$

$$\Phi_c^{\text{ev}} \equiv iS0iG^a\omega_a - iT_\alpha\tilde{\omega}\alpha \quad (4.9.95)$$

もフラックスの表式を代入すると

$$\begin{aligned} W = & -(f_\lambda X^\lambda - \tilde{f}^\lambda F_\lambda) + iS(h_\lambda X^\lambda - \tilde{h}^\lambda F_\lambda) \\ & + iG^a(f_{\lambda a} X^\lambda - \tilde{f}^\lambda{}_a F_\lambda) - iT_\alpha(q_\lambda{}^\alpha X^\lambda - \tilde{q}^{\lambda\alpha} F_\lambda). \end{aligned} \quad (4.9.96)$$

ここで、 X^λ と F_λ は

$$\Omega = X^\lambda \alpha_\lambda - F_\lambda \beta^\lambda \quad (4.9.97)$$

により定義される CS モジュライの関数。

つぎに Kähler ポテンシャルは

$$K = -\ln\left(-i \int_Y \Omega \wedge \bar{\Omega}\right) - \ln(S + \bar{S}) - 2 \ln \mathcal{V}; \quad (4.9.98)$$

$$\mathcal{V} = \frac{1}{6} \kappa_{\alpha\beta\gamma} t^\alpha t^\beta t^\gamma, \quad (4.9.99)$$

$$J = e^{\phi/2} t^\alpha \omega_\alpha, \quad B_2 = b^a \omega_a. \quad (4.9.100)$$

以上より、スカラポテンシャルは

$$V = V_F + V_D + V_{\text{tad}}^{\text{NS}}; \quad (4.9.101)$$

$$V_D = -\frac{m_{\text{pl}}^4}{2} [(\text{Im } \mathcal{N})^{-1}]^{\hat{\lambda}\hat{\sigma}} D_{\hat{\lambda}} D_{\hat{\sigma}}, \quad (4.9.102)$$

$$D_{\hat{\lambda}} = \frac{1}{\mathcal{V}} \left[-r_{\hat{\lambda}} \left(e^{\phi} \mathcal{V} - \frac{1}{2} \kappa_{\alpha\beta\gamma} t^\alpha t^\beta t^\gamma \right) - q_{\hat{\lambda}}{}^a \kappa_{a\alpha b} t^\alpha t^b + f_{\hat{\lambda}\alpha} t^\alpha \right]. \quad (4.9.103)$$

ただし、 $\tilde{r}^{\hat{\lambda}} = \tilde{q}^{\hat{\lambda}\alpha} = \tilde{f}^{\hat{\lambda}}{}_\alpha = 0$ とした。

4. $\overline{D3}$ uplifting

Toy model 簡単な例として、

$$h_+^{1,1} = 1, \quad h_-^{1,1} = 0, \quad h_-^{2,1} = 1, \quad h_+^{2,1} = 0 \quad (4.9.104)$$

となるモデルを考えると、複素モジュライ変数は T, U, S のみで、ゲージ場は現れない。ポテンシャルは

$$K = -\ln(S + \bar{S}) - 3\ln(T + \bar{T}) - 3\ln(U + \bar{U}), \quad (4.9.105a)$$

$$W = i(-fU + h_0S - 3hSU^2 - qT) \quad (4.9.105b)$$

これより、直ちに、つぎの SUSY adS 極小点が存在することが分かる：

$$U = \frac{\sqrt{5}}{3} \sqrt{\frac{h_0}{h}}, \quad S = -\frac{\sqrt{5}}{4} \frac{f}{\sqrt{h_0 h}}, \quad T = -\frac{\sqrt{5}f}{2q} \sqrt{\frac{h_0}{h}}, \quad (4.9.106a)$$

$$V = -\frac{9}{4 \cdot 5^{5/2}} \frac{q^3 h^{5/2} m_{\text{pl}}^4}{f^2 h_0^{3/2} 4\pi} \quad (4.9.106b)$$

この極点でのモジュライの質量は

$$m_{\text{mod}}^2 = \mu_i \frac{q^3 h^{5/2} m_{\text{pl}}^2}{f^2 h_0^{3/2} 4\pi}, \quad (4.9.107)$$

$$(\mu_i) \simeq [0.43, 0.24, 0.12; 0.56, 0.13, 0.04] \quad (4.9.108)$$

となるので、この極点は安定である。また、 $s > 0$ より、フラックスの符号に対し

$$f < 0, \quad h_0, h, q > 0 \quad (4.9.109)$$

が要求される。

Uplifting 反D3ブレーンによりポテンシャルを uplift するとすると、

$$V_{\text{up}} = \frac{A}{\mathcal{V}^{4/3}} \frac{m_{\text{pl}}^4}{4\pi} \quad (4.9.110)$$

がポテンシャルに付け加わる。この新たなポテンシャルは次の Minkowski 極点をもつ：

$$S = \frac{1}{3^{3/4}} \frac{f}{\sqrt{h}h_0}, \quad U = \frac{1}{3^{1/4}} \left(\frac{h_0}{h} \right)^{1/2}, \quad T = \frac{f}{3^{1/4}q} \left(\frac{h_0}{h} \right)^{1/2}, \quad (4.9.111)$$

$$A = \frac{3^{1/4}}{2} \frac{qh^{3/2}}{h_0^{1/2}}. \quad (4.9.112)$$

ただし、この極点が存在する条件は

$$f, h_0, h, q > 0 \quad (4.9.113)$$

となるので、この極点は uplift する前の adS 極点と全く関係ないことが分かる。特に、この極点では SUSY は破れており、

$$\mu_{3/2} = 0.3135. \quad (4.9.114)$$

この曲点でのモジュライ質量は

$$(\mu_i) \simeq [0.80, 0.45, 0.03; 1.55, 0.21, 0.08] \quad (4.9.115)$$

また、

$$M_s^2 = \frac{3^{3/4}\pi}{2^{3/2}} \frac{q^{3/2}h}{f^2h_0^{1/2}} m_{\text{pl}}^2, \quad M_{\text{KK}}^2 = \frac{3^{1/2}}{16\pi} \frac{q^2h}{f^2h_0} m_{\text{pl}}^2 \quad (4.9.116)$$

より

$$\frac{M_{\text{KK}}^2}{M_s^2} = \frac{(q/h_0)^{1/2}}{2^{5/2}3^{1/4}\pi^2}, \quad \frac{M_{\text{mod}}^2}{M_{\text{KK}}^2} = \mu_i \frac{4q}{3^{1/2}} \frac{h^{3/2}}{h_0^{1/2}} \quad (4.9.117)$$

となるので、 $h, q = \mathcal{O}(1), h_0 \sim f \gg 1$ と取れば、望ましい質量ヒエラルキー $M_s^2 > M_{\text{KK}}^2 > M_{\text{mod}}^2$ が得られる。ただし、インフラトンに対応する場は含まれない。

5. *D-term uplifting*

D-term による uplifting の可能性を見るため,

$$h_+^{2,1} = 1, \quad h_-^{2,1} = 1, \quad h_+^{1,1} = 1, \quad h_-^{1,1} = 0 \quad (4.9.118)$$

となる場合を考える. この場合, スカラ場 S, T, U に加えて可換ゲージ場が 1 個現れ, つぎの *D-term* ポテンシャルを生み出す:

$$V_D = \frac{\delta g^2}{u\tau^2} \left(1 + \frac{q}{3h} \frac{\tau}{s}\right)^2. \quad (4.9.119)$$

超ポテンシャルは

$$W = i(fU + \tilde{f}U^3 - hS + qT). \quad (4.9.120)$$

全ポテンシャルは次の安定な Minkowski 真空をもつ.

$$S = \gamma_1 \frac{f^{3/2}}{h\tilde{f}^{1/2}}, \quad T = \gamma_2 \frac{f^{3/2}}{q^t f^{1/2}}, \quad U = \gamma_3 \left(\frac{f}{\tilde{f}}\right)^{1/2}, \quad (4.9.121a)$$

$$\delta g^2 = \gamma_4 \frac{hg\tilde{f}}{f}, \quad (4.9.121b)$$

$$(\gamma_i) = [0.1545, 1.5701, 1.0718, 0.0044]. \quad (4.9.121c)$$

モジュライ質量は

$$M_{\text{mod}}^2 = \mu_i \frac{hq^3 \tilde{f}^{5/2}}{f^{9/2}} \frac{m_{\text{pl}}^2}{4\pi}, \quad (4.9.122a)$$

$$(\mu_i) \simeq [0.69, 0.01, 0.17; 0.75, 0.05, 0] \quad (4.9.122b)$$

また,

$$\frac{M_s^2}{M_{\text{KK}}^2} = 178 \frac{h^{1/2}}{h_0^{1/2}}, \quad \frac{M_{\text{KK}}^2}{M_{\text{mod}}^2} = \frac{0.1}{\mu_i} \frac{1}{hq} \left(\frac{f}{\tilde{f}}\right)^{3/2}. \quad (4.9.123)$$

より, mass hierarchy も実現できる.

6. P -flux

Q -flux が存在するときに IIB 理論が S 双対性を持つためには、 S 双対変換に対して

$$S : \begin{pmatrix} P & Q \end{pmatrix} \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) \begin{pmatrix} P & Q \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathcal{F} & H \end{pmatrix} \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) \begin{pmatrix} \mathcal{F} & H \end{pmatrix} \quad (4.9.124)$$

と変換する新たなフラックス P を導入する必要がある。 P の作用は、 p -形式 $\rightarrow (p-1)$ -形式で、基底に対する作用は

$$-P \circ \alpha_\Lambda = p_\Lambda{}^A \omega_A, \quad -P \circ \beta^\Lambda = \tilde{p}^{\Lambda A} \omega_A, \quad (4.9.125a)$$

$$-P \circ \omega_A = 0, \quad -P \circ \tilde{\omega}^A = -p^{\Lambda A} \alpha_\Lambda + p_\Lambda{}^A \beta^\Lambda \quad (4.9.125b)$$

と表される。

この P -フラックスが存在すると超ポテンシャルは次のように修正される：

$$W = W_0 + (ST_\alpha + \frac{1}{2} \kappa_{abc} G^b G^c) (p_\lambda^\alpha X^\lambda - \tilde{p}^{\lambda\alpha} F_\lambda). \quad (4.9.126)$$

7. Axion monodromy inflation

D-term uplifting model に P -flux を加えると、

$$W = \lambda W_0 - ipSTU. \quad (4.9.127)$$

このとき、Minkowski 真空でゼロ質量であったアクシオン場 $\theta_{\alpha c}$ に対して、有効ポテンシャル

$$V_{\mathrm{eff}} = B_1 \theta^2 + B_2 \theta^4; \quad (4.9.128a)$$

$$B_1 \sim \frac{\lambda p h^2 q^2 \tilde{f}^{5/2}}{f^{19/2}}, \quad B_2 \sim \frac{p^2 h^3 q \tilde{f}^{5/2}}{f^{13/2}} \quad (4.9.128b)$$

が生じ、インフラトンとなることができる。ただし、

$$\frac{M_{\mathrm{KK}}^2}{M_\theta^2} \sim \frac{1}{\lambda p f^{1/2} \tilde{f}^{1/2}} \quad (4.9.129)$$

となるので、インフレーション時に 4 次元有効理論が適用できるためには、フラックス係数が非整数となる必要がある。

§4.10

*ヘテロ型理論のフラックスコンパクト化

4.10.1 ヘテロ型理論

基本場

- 重力セクター
 - ボーズ場
 - * 計量/フレーム場: $g_{MN} (e_M^A)$
 - * 2形式場: $B = \frac{1}{2}B_{MN}dx^M \wedge dx^N \Rightarrow \tilde{H}$
 - * デイラトン: ϕ
 - フェルミ場
 - * スピン 3/2 場: ψ_M
 - * デイラティーノ: λ
- ゲージセクター
 - ゲージ場: $A = (A^a_{bM}dx^M) \in \text{Ad}(G)$
 - ゲージノ: $\chi \in \text{Ad}(G)$

作用積分 スtringフレームでの Bosonic part の作用積分は

$$S_{\text{Het},B} = \frac{1}{2\kappa_{10}^2} \int d^{10}x (-g)^{1/2} e^{-2\phi} \left[R + 4(\partial\phi)^2 - \frac{1}{2}|\tilde{H}|^2 + \frac{\alpha'}{4} \text{tr} (|F|^2 - |\mathcal{R}^{(-)}|^2) \right]. \quad (4.10.1)$$

ここで,

$$\tilde{H} = dB + \frac{\alpha'}{4}\Omega_G - \frac{\alpha'}{4}\Omega_L, \quad (4.10.2)$$

$$F = dA + A \wedge A, \quad (4.10.3)$$

$$\Omega_G = \text{tr} \left(A \wedge dA + \frac{2}{3}A \wedge A \wedge A \right), \quad (4.10.4)$$

$$\Omega_L = \text{tr} \left(\omega^{(-)} \wedge d\omega^{(-)} + \frac{2}{3}\omega^{(-)} \wedge \omega^{(-)} \wedge \omega^{(-)} \right), \quad (4.10.5)$$

$$\mathcal{R}^{(-)} = \mathcal{R}(\omega^{(-)}), \quad (4.10.6)$$

$$\omega^{(\pm)A}{}_{BM} = \omega(e)^A{}_{BM} \pm \frac{1}{2}\tilde{H}^A{}_{MB}. \quad (4.10.7)$$

文献

- $O(\alpha')$ までの高次補正 :
Bergshoeff EA, de Roo M 1989[11].
- Anomaly 相殺条件での接続の任意性 :
Sen A 1986[57]

超対称変換 String frame で

$$\delta\psi_M = \mathcal{D}_M\epsilon; \quad \mathcal{D}_M = \nabla_M^{(+)} \equiv \nabla_M(e) - \frac{1}{4}\hat{H}_M, \quad (4.10.8a)$$

$$\delta\lambda = \mathcal{O}\epsilon; \quad \mathcal{O}_\lambda \equiv \Gamma^M\partial_M\phi - \frac{1}{2}\hat{H}, \quad (4.10.8b)$$

$$\delta\chi = \hat{F}\epsilon. \quad (4.10.8c)$$

ここで

$$\hat{H}_M := \frac{1}{2}H_{MPQ}\Gamma^{PQ}, \quad (4.10.9a)$$

$$\hat{H} := \frac{1}{6}H_{MNP}\Gamma^{MNP}, \quad (4.10.9b)$$

$$\hat{F} := \frac{1}{2}F_{MN}\Gamma^{MN}. \quad (4.10.9c)$$

場の方程式 ストリングフレームで

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{MN} &:= R_{MN} + 2\nabla_M\nabla_N\phi - \frac{1}{4}\tilde{H}_{MPQ}\tilde{H}_N{}^{PQ} \\ &\quad + \frac{\alpha'}{4} \left[\text{tr}(F_{MP}F_N{}^P) - \text{tr}(\mathcal{R}_{MP}^{(-)}\mathcal{R}_N{}^{(-)P}) \right] = 0, \end{aligned} \quad (4.10.10a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\phi &:= R - 4(\nabla\phi)^2 + 4\Box\phi - \frac{1}{2}|\tilde{H}|^2 \\ &\quad + \frac{\alpha'}{4} \left[\text{tr}(|F|^2) - \text{tr}(|\mathcal{R}^{(-)}|^2) \right] = 0, \end{aligned} \quad (4.10.10b)$$

$$\mathcal{I}_{MN} := e^{2\phi}\nabla_P(e^{-2\phi}\tilde{H}^P{}_{MN}) = 0, \quad (4.10.10c)$$

$$\mathcal{I}_M := e^{2\phi}D_N(e^{-2\phi}F^N{}_M) + \frac{1}{2}\tilde{H}_{MNP}F^{NP} = 0. \quad (4.10.10d)$$

最後の2つの式は

$$d(e^{-2\phi}*\tilde{H}) = 0, \quad (4.10.11a)$$

$$D(e^{-2\phi}*F) + \frac{1}{2}e^{-2\phi}*\tilde{H} \wedge F = 0 \quad (4.10.11b)$$

と同等.

ここで, \tilde{H} の定義より,

$$\mathcal{A} := d\tilde{H} - \frac{\alpha'}{4} [\text{tr}(F \wedge F) - \text{tr}(\mathcal{R}^{(-)} \wedge \mathcal{R}^{(-)})] = 0. \quad (4.10.12)$$

また, 縮約 Bianchi 恒等式

$$\nabla^N R_{MN} = \frac{1}{2} \nabla_M R \quad (4.10.13)$$

より

$$\begin{aligned} \nabla^N \mathcal{E}_{MN} &= \frac{1}{2} \nabla_M \mathcal{E}_\phi + 2\mathcal{E}_{MN} \nabla^N \phi - \frac{1}{4} \mathcal{J}^{PQ} H_{MPQ} + \frac{\alpha'}{4} \text{tr}(\mathcal{J}^P F_{MP}) \\ &+ \frac{1}{12} H^{NPQ} \mathcal{A}_{MNPQ} - \frac{\alpha'}{8} \text{tr}(F^{PQ} (DF)_{MPQ}) \\ &+ \frac{\alpha'}{8} \text{tr}[(\mathcal{D}^{(-)} \mathcal{R}^{(-)})_{MNP} \mathcal{R}^{(-)NP}] \\ &- \frac{\alpha'}{4} \text{tr}[\mathcal{R}_{MP}^{(-)} e^{2\phi} \nabla^{(-)N} (e^{-2\phi} \mathcal{R}^{(-)N^P})]. \end{aligned} \quad (4.10.14)$$

\mathcal{E}_M^M と \mathcal{E}_ϕ より, 曲率を含まない次の式を得る:

$$\mathcal{E}'_\phi := e^{2\phi} \square e^{-2\phi} - |H|^2 + \frac{\alpha'}{4} [\text{tr}(|F|^2) - \text{tr}(|\mathcal{R}^{(-)}|^2)] = 0. \quad (4.10.15)$$

4.10.2 整合性条件

関係式

$$[\nabla_M, \nabla_N] = \frac{1}{4} R_{MNPQ} \Gamma^{PQ} \equiv \frac{1}{2} \hat{R}_{MN} \quad (4.10.16)$$

および

$$[\Gamma^{PQ}, \Gamma^R] = 2\eta^{QR} \Gamma^P - 2\eta^{PR} \Gamma^Q \quad (4.10.17)$$

より,

$$\begin{aligned} [\mathcal{D}_M, \mathcal{D}_N] &= \frac{1}{4} R_{ABMN}^{(+)} \Gamma^{AB} \\ &= \frac{1}{2} \hat{R}_{MN} - \frac{1}{2} \nabla_{[M} \hat{H}_{N]} - \frac{1}{8} H_{MPS} H_{NQ}{}^S \Gamma^{PQ}. \end{aligned} \quad (4.10.18)$$

ここで,

$$4\nabla_{[M} H_{NAB]} = 2\nabla_{[M} H_{N]AB} + 2\nabla_{[A} H_{B]MN} \quad (4.10.19)$$

より,

$$R_{MNAB}^{(+)} = R_{ABMN}^{(-)} - \frac{1}{2} (dH)_{MNAB}. \quad (4.10.20)$$

よって,

$$[\mathcal{D}_M, \mathcal{D}_N] = \frac{1}{2} (\hat{\mathcal{R}}^{(-)})_{MN} - \frac{1}{8} (dH)_{MNAB} \Gamma^{AB}. \quad (4.10.21)$$

さらに,

$$R_{MNPQ}\Gamma^N\Gamma^{PQ} = R_{MNPQ}(2\eta^{NP}\Gamma^Q + \Gamma^{NPQ}) = -2R_{MP}\Gamma^P \quad (4.10.22)$$

および

$$\begin{aligned} (dH)_{MNPQ}\Gamma^{NPQ} &= (\nabla_M H_{NPQ} - 3\nabla_N H_{MPQ})\Gamma^{NPQ} \\ &= -12\nabla_M \hat{H} + 6\nabla_{[M} H_{N]PQ}\Gamma^{NPQ} \end{aligned} \quad (4.10.23)$$

を用いると,

$$\begin{aligned} \Gamma^N[\mathcal{D}_M, \mathcal{D}_N] &= [\mathcal{D}_M, \mathcal{O}] - \frac{1}{2}\mathcal{E}_{MP}\Gamma^P - \frac{1}{4}\mathcal{J}_{MP}\Gamma^P - \frac{1}{24}\mathcal{A}_{MNPQ}\Gamma^{NPQ} \\ &\quad - \frac{\alpha'}{8}\text{tr}(F_{MN}\Gamma^N \hat{F} - \mathcal{R}_{MN}^{(-)}\Gamma^N \hat{\mathcal{R}}^{(-)}), \end{aligned} \quad (4.10.24)$$

$$\begin{aligned} [\mathcal{D}_M, \mathcal{O}] &= \Gamma^N \nabla_N \nabla_M \phi - \frac{1}{2}\nabla_M \hat{H} - \frac{1}{2}H_{MPN}\Gamma^P \nabla^N \phi \\ &\quad + \frac{1}{8}H_{SMP}H^S_{QR}\Gamma^{PQR}. \end{aligned} \quad (4.10.25)$$

を得る.

ここで,

$$\text{tr}(\hat{F}^2) = -\text{tr}(|F|^2) + \frac{1}{4}\text{tr}(F_{PQ}F_{RS})\Gamma^{PQRS} \quad (4.10.26)$$

および

$$\hat{H}^2 = -|H|^2 + \frac{1}{4}H_{PQ}H_{RS}\Gamma^{PQRS} \quad (4.10.27)$$

を用いると,

$$\begin{aligned} \Gamma^M[\mathcal{D}_M, \mathcal{O}] &= -\frac{1}{2}\mathcal{E}'_\phi - \frac{1}{2}\hat{\mathcal{A}} + 2\mathcal{O}^2 - \frac{1}{4}\mathcal{J}_{PQ}\Gamma^{PQ} \\ &\quad - \frac{\alpha'}{8}\text{tr}(\hat{F}^2 - (\hat{\mathcal{R}}^{(-)})^2) \end{aligned} \quad (4.10.28)$$

を得る.

また

$$[\mathcal{D}_M, \hat{F}] = \frac{1}{2}(D_M F_{PQ} + H_{MPS}F_Q^S)\Gamma^{PQ} \quad (4.10.29)$$

より,

$$\Gamma^M[\mathcal{D}_M, \hat{F}] = [\mathcal{O}, \hat{F}] + \frac{1}{2}D_M F_{PQ}\Gamma^{MPQ} + \mathcal{J}_Q\Gamma^Q. \quad (4.10.30)$$

以上より, Killing スピノール ϵ が存在し, H_3 に対する Bianchi 恒等式 $\mathcal{A} = 0$ が満たされれば,

$$(2\mathcal{E}_{MN} + \mathcal{J}_{MN})\Gamma^N\epsilon = 0, \quad (4.10.31a)$$

$$\left(\mathcal{E}'_\phi - \frac{1}{4}\mathcal{J}_{PQ}\Gamma^{PQ}\right)\epsilon = 0, \quad (4.10.31b)$$

$$\mathcal{J}_M\Gamma^M\epsilon = 0. \quad (4.10.31c)$$

が α' について1次までの精度で成り立つ。これより

$$K^M = \bar{\epsilon} \Gamma^M \epsilon \quad (4.10.32)$$

とおくと

$$(2\mathcal{E}_{MN} + \mathcal{J}_{MN})(2\mathcal{E}^{MN} + \mathcal{J}^{MN}) = 0, \quad (4.10.33a)$$

$$(2\mathcal{E}_{MN} + \mathcal{J}_{MN})K^N = 0, \quad (4.10.33b)$$

$$\mathcal{J}_M \mathcal{J}^M = 0, \quad (4.10.33c)$$

$$\mathcal{J}_M K^M = 0 \quad (4.10.33d)$$

が成り立つ。 K^M は常に時間的ないし光的ベクトル Killing であるが、時間的ならこれらより

$$\mathcal{E}_{MN} = \mathcal{J}_{MN} = \mathcal{J}_M = 0 \quad (4.10.34)$$

が導かれる。一方、 K^M が光的な場合には、 $L_M K^M \neq 0$ となる適当なベクトルに対して、さらに

$$(2\mathcal{E}_{MN} + \mathcal{J}_{MN})L^M L^N = 0, \quad \mathcal{J}_M L^M = 0 \quad (4.10.35)$$

が成り立てば同じ結論が得られる。このとき、整合性条件より

$$\mathcal{E}'_\phi = 0 \quad (4.10.36)$$

が導かれる。したがって、すべての場の方程式は満たされる。

4.10.3 BBFTY 解 (スムーズモデル)

References

- Becker K, Becker M, Fu JX, Tseng LS, Yau ST 2006[7]

基礎方程式

Killing スピノール方程式

$$\delta\psi_M = \left(\nabla_M(e) - \frac{1}{8} \hat{H}_M \right) \epsilon = 0, \quad (4.10.37a)$$

$$\delta\lambda = \left(\Gamma^M \partial_M \phi - \frac{1}{12} \hat{H} \right) \epsilon = 0, \quad (4.10.37b)$$

$$\delta\chi = \not{F} \epsilon = 0. \quad (4.10.37c)$$

Anomaly 相殺条件

$$dH = \frac{\alpha'}{4} \left[\text{tr}(\hat{\mathcal{R}} \wedge \hat{\mathcal{R}}) - \text{tr}(F \wedge F) \right]. \quad (4.10.38)$$

時空計量

$$ds_{\text{string}}^2 = ds^2(E^{3,1}) + ds^2(Y_6). \quad (4.10.39)$$

超対称性の帰結

- Y_6 は複素エルミート多様体. ($J_{a\bar{b}} = ig_{a\bar{b}}$)
- $\hat{\nabla}$ で平行な $(3,0)$ 形式 Ω の存在.

$$\|\Omega\| = e^{-2\phi}. \quad (4.10.40)$$

- トーション H_3 の表式 :

$$H = d^c J = i(\bar{\partial} - \partial)J. \quad (4.10.41)$$

- Conformally balanced 条件

$$d(e^{-2\phi} J \wedge J) = 0. \quad (4.10.42)$$

- ゲージバンドル E はエルミート YM:

$$F^{(2,0)} = F^{(0,2)} = F_{mn} J^{mn} = 0. \quad (4.10.43)$$

幾何学的仮定

- Y_6 は4次元底空間 S^4 上の T^2 バンドルで, 計量

$$ds^2 = e^{2\phi} ds^2(S) + |\theta|^2 |dz + \alpha|^2. \quad (4.10.44)$$

ここで, θ は S 上の複素1形式 α と T^2 の複素座標 z を用いて

$$\theta = dz + \alpha. \quad (4.10.45)$$

- $\omega = d\alpha$ は primitive:

$$\omega \wedge J_S = 0. \quad (4.10.46)$$

また, $\omega = \omega_1 + i\omega_2$ として,

$$\tilde{\omega}_i = \frac{\omega_i}{2\pi\sqrt{\alpha'}} \in H^2(S, \mathbb{Z}). \quad (4.10.47)$$

このとき, J は

$$J = e^{2\phi} J_S + \frac{i}{2} \theta \wedge \bar{\theta}. \quad (4.10.48)$$

となり, conformally balanced 条件が満たされることが示される. また, Ω は

$$\Omega = \Omega_S \wedge \theta. \quad (4.10.49)$$

ゲージバンドル 条件より, S 上の安定バンドル \mathcal{F}^S と Y_6 上の正則線バンドル \mathcal{F}^L を用いて,

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}^S \otimes 1 + 1 \otimes \mathcal{F}^L. \quad (4.10.50)$$

Anomaly 相殺条件 Anomaly 相殺条件は, dilaton ϕ に対する次の方程式に帰着される:

$$\begin{aligned} & \frac{2i}{\alpha'} \partial \bar{\partial} e^{2\phi} \wedge J_S - \frac{1}{2} \partial \bar{\partial} [e^{-2\phi} \text{tr}(\bar{\partial} \mathcal{B} \wedge \partial \mathcal{B}^\dagger g_S^{-1})] \\ & - 4\partial \bar{\partial} \phi \wedge \partial \bar{\partial} \phi + \psi J_S^2 / 2 = 0. \end{aligned} \quad (4.10.51)$$

ここで,

$$\psi J_S^2 = \frac{1}{\alpha'} \|\omega\| J_S^2 - \frac{1}{2} (\text{tr} \mathcal{R}_S \wedge \mathcal{R}_S - \text{tr} \mathcal{F} \wedge \mathcal{F}), \quad (4.10.52a)$$

$$\bar{\partial}(\mathcal{B}_1 dz^1 + \mathcal{B}_2 dz^2) = \omega_A = \frac{1}{2} (\omega - *_S \omega). \quad (4.10.52b)$$

この方程式は, 位相的整合条件

$$-p_1(E) + \int_S \|\tilde{\omega}\|^2 J_S \wedge J_S = 48 \quad (4.10.53)$$

および仮定

$$\frac{4}{\alpha'} e^{2\phi} J_S - ie^{-2\phi} \text{tr}(\bar{\partial} \mathcal{B} \wedge \partial \mathcal{B}^\dagger g_S^{-1}) + 8i\partial \bar{\partial} \phi > 0 \quad (4.10.54)$$

の元で, 解を持つことが示される.

以上より, (4.10.53) を満たす $K3$ 上の T^2 バンドルが存在すれば解となる.

4.10.4 文献ノート

References

- Torsional compactification
 - 1986 初期の解析 [Strominger A 1986[59]; Hull CM 1986[44]; Bars I 1986[2]; Bars I, Nemeschansky D, Yankielowicz S 1986[3]; de Wit B, Smit DJ, Hari Dass ND 1987[27]]
 - 1996 M理論のフラックスコンパクト化 [Becker K, Becker M 1996[5]]
 - 1999 M理論のフラックスコンパクト化に基づく考察 [Dasgupta K, Rajesh G, Sethi S 1999[26]]
 - 2002 M理論のフラックスコンパクト化に基づく8次元 non-Kähler モデルの構成 (オービフォールドタイプ) [Becker K, Dasgupta K 2002[9]]
 - 2003 $SO(32)$ ヘテロ型理論の non-Kähler 複素多様体へのコンパクト化に基づく現象論 [Becker K, Becker M, Dasgupta K, Green PS 2003[6]]
- Compact smooth models
 - 2006 $K3$ 上の T^2 バンドルによるコンパクトスムーズモデルの構成 [Becker K, Becker M, Fu JX, Tseng LS, Yau ST 2006[7]; Fu JX, Yau ST 2006[34]]
 - 2007 ヘテロ型理論の超対称な non-Kähler フラックスコンパクト化の条件を求め, モジュライ自由度を線形解析 [Becker M, Tseng LS, Tau ST 2007[10]]
 - 2008 コンパクト nil 多様体によるスムーズモデルの具体的構成 [Fernandez M, Ivanov S, Ugarte L, Villacampa R 2008[30]]

5

*様々な厳密解

§5.1

 $\mathcal{N} = 2$ 超重力理論5.1.1 大域的 $\mathcal{N} = 2$ 超対称理論におけるゲージ超組

6次元時空 6次元のゲージ場 A_μ と Symplectic Majorana スピノール場 $\psi^i (i = 1, 2)$ の物理自由度はいずれも 4 なので, 6次元の on-shell でのゲージ超組は $(A_\mu^I, \psi^{iI} (i = 1, 2)) (I$ はゲージ群の随伴表現のラベル) で与えられる. Off-shell でのゲージ超組は, これに 3 個のスカラ場 $Y^{ijI} = Y^{jiI} (i, j = 1, 2)$ を加えた組 $(A_\mu^I, \lambda^{iI}, Y^{ijI})$ で与えられる. この超組の超対称変換は

$$\delta A_\mu^I = \frac{1}{2} \bar{\epsilon}^i \gamma_\mu \lambda_i^I, \quad (5.1.1a)$$

$$\delta \lambda^{iI} = -\frac{1}{4} \gamma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^I \epsilon^i - Y^{ijI} \epsilon_j, \quad (5.1.1b)$$

$$\delta Y^{ijI} = -\frac{1}{2} \bar{\epsilon}^{(i} \not{D} \lambda^{j)I}. \quad (5.1.1c)$$

ここで, symplectic Majorana スピノールに対して, 一般に, 次の添え字上げ下げルールを用いる:

$$\lambda_i = \lambda^j \epsilon_{ji}, \quad \lambda^i = \epsilon^{ij} \lambda_j. \quad (5.1.2)$$

この変換に対して, 次の交換関係が成り立つ:

$$[\delta(\epsilon_1), \delta(\epsilon_2)] = \delta_{\text{cgct}}(\xi^\mu), \quad \xi^\mu = \frac{1}{2} \bar{\epsilon}_2^i \gamma^\mu \epsilon_{1i}. \quad (5.1.3)$$

超対称変換に対して不変な作用積分は,

$$S = \int d^6 x h_{IJ} \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^I F^{\mu\nu I} - \frac{1}{2} \bar{\lambda}^{iI} \not{D} \lambda_i^J + 2 \mathbf{Y}^I \cdot \mathbf{Y}^J \right]. \quad (5.1.4)$$

ここで,

$$\mathbf{Y}^I = \frac{1}{2}i\text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}\epsilon\mathbf{Y}^I). \quad (5.1.5)$$

また, h_{IJ} は Lie 代数の不変内積である.

5次元時空 5次元のゲージ超組は, 6次元からの次元低下により得られ, 6次元の超組にベクトルから得られるスカラ σ^I を加えた $(A_\mu^I, \sigma^I, \lambda^{iI}, \mathbf{Y}^I)$ で与えられる. 超対称変換は,

$$\delta A_\mu^I = \frac{1}{2}\bar{\epsilon}^i\gamma_\mu\lambda_i^I, \quad (5.1.6a)$$

$$\delta\sigma^I = \frac{1}{2}i\bar{\epsilon}^i\lambda_i^I, \quad (5.1.6b)$$

$$\delta\lambda^{iI} = -\frac{1}{4}\gamma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}^I\epsilon^i - \frac{1}{2}i\mathcal{D}\sigma^I\epsilon^i - Y^{ijI}\epsilon_j, \quad (5.1.6c)$$

$$\delta\mathbf{Y}^I = \frac{1}{4}(\epsilon\boldsymbol{\sigma})_{ij}\bar{\epsilon}^i[\mathcal{D}\lambda^{jI} + if^I{}_{JK}\sigma^J\lambda^{jK}]. \quad (5.1.6d)$$

超対称変換の交換関係は

$$[\delta(\epsilon_1), \delta(\epsilon_2)] = \delta_{\text{cgct}}(\xi^\mu) + \delta_G(\theta^I), \quad \theta^I = -\frac{1}{2}i\sigma^I\bar{\epsilon}_2^i\epsilon_1^j\epsilon_{ji}. \quad (5.1.7)$$

右辺の第2項は, 中心電荷と似た役割を果たす.

この超対称変換で不変な作用積分は一意的でなく, 6次元から次元低下で得られるものと以外に次のようなものがある:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{5v} = & C_{IJK} \left[\left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^I F^{\mu\nu J} - \frac{1}{2}\bar{\lambda}^{iI}\mathcal{D}\lambda_i^J - \frac{1}{2}D_\mu\sigma^I D^\mu\sigma^J + 2\mathbf{Y}^I \cdot \mathbf{Y}^J \right) \sigma^K \right. \\ & \left. - \frac{1}{24}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma\tau} A_\mu^I \left\{ F_{\nu\rho}^J F_{\sigma\tau}^K + f^J{}_{LM} A_\nu^L A_\rho^M \left(-\frac{1}{2}F_{\sigma\tau}^K + \frac{1}{10}f^K{}_{NP} A_\sigma^N A_\tau^P \right) \right\} \right. \\ & \left. - \frac{1}{8}i\bar{\lambda}^{iI}\gamma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^J \lambda_i^K - \frac{1}{2}i\bar{\lambda}^{iI}\lambda^{jJ} Y_{ij}^K + \frac{1}{4}\sigma^I\sigma^J\bar{\lambda}^{iL}\lambda_i^M f^K{}_{LM} \right]. \quad (5.1.8) \end{aligned}$$

ここで, C_{IJK} は, 次のゲージ不変性条件を満たす定数完全対称テンソルである:

$$f_{I(J}^M C_{KL)M} = 0. \quad (5.1.9)$$

このラグランジュ密度から得られる作用積分は, 共形不変にもなっている.

4次元時空 4次元時空における $\mathcal{N} = 2$ ゲージ超組は、5次元時空における $\mathcal{N} = 2$ 超組にゲージ場起源のスカラー場を加え、2つのスカラー場を1個の複素スカラー場に X に組んだ場の組 $(X, \Omega_i, A_\mu, \mathbf{Y})^I$ で与えられる。ただし、スピノール場としては、Majorana2個 $\Omega_i (i = 1, 2)$ を用いる。また、 A_μ^I, \mathbf{Y}^I は実数場である。超対称変換は

$$\delta X^I = \frac{1}{2} \bar{\epsilon}^i P_L \Omega_i^I, \quad (5.1.10a)$$

$$P_L \delta \Omega_i^I = P_L \left[\not{D} X^I \epsilon^i + Y_{ij}^I \epsilon^j + \frac{1}{4} \gamma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^I \epsilon_{ij} \epsilon^j + X^I \bar{X}^K f^I{}_{JK} \epsilon_{ij} \epsilon^j \right] \quad (5.1.10b)$$

$$P_R \delta \Omega_i^I = P_R \left[\not{D} \bar{X}^I \epsilon^i + \bar{Y}_{ij}^I \epsilon^j + \frac{1}{4} \gamma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^I \epsilon_{ij} \epsilon^j - X^I \bar{X}^K f^I{}_{JK} \epsilon_{ij} \epsilon^j \right] \quad (5.1.10c)$$

$$\delta \mathbf{Y}^I = -\frac{1}{4} (\sigma_2 \boldsymbol{\sigma})^{ij} \bar{\epsilon}^i P_R \not{D} \Omega_j - \frac{i}{2} f^U{}_{JK} (\boldsymbol{\sigma})_{ij} \bar{\epsilon}^j X^J P_R \Omega_i^I + \text{h.c.}, \quad (5.1.10d)$$

$$\delta A^I = \frac{1}{2} \epsilon^{ij} \bar{\epsilon}^i P_R \gamma_\mu \Omega_j^I + \text{h.c.} \quad (5.1.10e)$$

ここで、 Y_{ij} は

$$Y_{ij}^I = -(\mathbf{Y}^I \cdot \boldsymbol{\sigma} \sigma_2)_{ij} \quad (5.1.11)$$

で、トレースが実数、trace-free 部分が純虚数となるので、

$$\bar{Y}_{ij}^I = \epsilon^{ik} \epsilon^{jl} Y_{kl}^I. \quad (5.1.12)$$

超対称変換の交換関係は

$$[\delta(\epsilon_1), \delta(\epsilon_2)] = \delta_{\text{cgct}}(\xi) + \delta_G(\theta); \quad (5.1.13a)$$

$$\xi^\mu = \frac{1}{2} \bar{\epsilon}_2^i \gamma^\mu P_R \epsilon_1^i + \text{h.c.}, \quad (5.1.13b)$$

$$\theta^I = X^I \epsilon_{ij} \bar{\epsilon}^i P_R \epsilon^j + \text{h.c.} \quad (5.1.13c)$$

【Exercise 5.1.1 (未確認)】 (5.1.10) がこの交換関係を満たすことを確かめよ。

□

一般的な超対称作用積分を構成するには、 $\mathcal{N} = 2$ の超場を用いるのが便利である。まず、 $D = 4, \mathcal{N} = 2$ の超空間の座標を (x^μ, θ_α^i) として、超空間における超対称変換を

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \frac{1}{4} \bar{\epsilon}_i \gamma^\mu \theta^i, \quad \theta^i \rightarrow \theta'^i = \theta^i - \epsilon^i \quad (5.1.14)$$

により定義する。ここで、 ϵ^i ($i = 1, 2$) は独立な Majorana スピノールである。対応する、超空間におけるベクトル場は

$$\mathbb{Q}_{\alpha i} = \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \theta_\alpha^i} - \frac{1}{4} (\gamma^\mu \theta^i)_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (5.1.15)$$

となる。交換関係は、

$$\{\mathbb{Q}_{\alpha i}, \mathbb{Q}_{\beta j}\} = \frac{1}{2} \delta_{ij} (\gamma^\mu C^{-1})_{\alpha\beta} \partial_\mu. \quad (5.1.16)$$

カイラルな超場を定義するため、 $\mathbb{Q}_{\alpha i}$ と可換なベクトル場 $\mathbb{D}_{\alpha i}$ を

$$\mathbb{D}_{\alpha i} = \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \theta_\alpha^i} + \frac{1}{4} (\gamma^\mu \theta^i)_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (5.1.17)$$

により導入し、カイラル超場 V を

$$P_R \mathbb{D}_i V = 0 \Leftrightarrow P_R \left. \frac{\overrightarrow{\partial} V}{\partial \theta^i} \right|_{x_+ = \text{const}} = 0 \quad (5.1.18)$$

により定義する。ここで、

$$x_+^\mu = x^\mu + \frac{1}{8} \bar{\theta}^i \gamma_* \gamma^\mu \theta^i. \quad (5.1.19)$$

これより、カイラル超場は一般に、

$$\begin{aligned} V = & C(x_+) + \frac{1}{2} \bar{\theta}^i P_L \chi_j(x_+) + \frac{1}{4} (\bar{\theta}^j P_L \theta^k) Z_{jk}(x_+) \\ & + \frac{1}{16} \bar{\theta}^j P_L \gamma^{\mu\nu} \theta^k \epsilon_{jk} V_{\mu\nu}(x_+) + \frac{1}{16} \bar{\Xi}^j \not{D} P_R \tilde{\chi}_j(x_+) + \frac{1}{16} \Theta \square \tilde{C}(x_+) \end{aligned} \quad (5.1.20)$$

と展開される。ここで、

$$\Theta = (\bar{\theta}^1 P_L \theta^1) (\bar{\theta}^2 P_L \theta^2), \quad (5.1.21a)$$

$$\bar{\Xi}^i = -4 \bar{\theta}^j P_L (\bar{\theta}^i P_L \theta^j) \quad (5.1.21b)$$

である。上でのベタゲージ超組は、このカイラル超場に

$$C = X, \quad \chi^i = \Omega_i, \quad Z_{ij} = Y_{ij}, \quad V_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}, \quad \tilde{\chi}_j = \Omega_j, \quad \tilde{C} = \bar{X} \quad (5.1.22)$$

により埋め込むことができる。

カイラル超場の関数は再びカイラル超場となり、その最高次の成分 (F 項) の 4 次元積分は、 $\mathcal{N} = 1$ のカイラル超場と同様に、超対称変換で不変となる。これより、 V^I をゲージ超組 $(X^I, \Omega_i^I, A_\mu^I, \mathbf{Y}^I)$ に対応するカイラル超場とすると、 X の正則関数 $F(X)$ に対して、

$$\mathcal{L}_{4v} = i[F(V)]_F + \text{h.c.} \quad (5.1.23)$$

の 4 次元積分は、 $\mathcal{N} = 2$ 超対称性をもつ作用積分を与える。具体的な表式は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{4v} = & iF_{IJ}D_\mu X^I D^\mu \bar{X}^J + \frac{1}{2}iF_{IJ}F_{\mu\nu}^{-I}F^{-\mu\nu J} + \frac{1}{2}iF_{IJ}\bar{\Omega}_i^I \not{D}P_R\Omega_i^J - iF_{IJ}\mathbf{Y}^I \cdot \mathbf{Y}^J \\ & + \frac{1}{4}iF_{IJK}\mathbf{Y}^I \cdot (-\sigma_2\boldsymbol{\sigma})^{ij}\bar{\Omega}_i^J P_L\Omega_j^K - \frac{1}{16}iF_{IJK}\epsilon^{ij}\bar{\Omega}_i^J \gamma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}^{-J} P_L\Omega_j^K \\ & + \frac{1}{48}iF_{IJKL}\bar{\Omega}_i^I P_L\Omega_i^J \bar{\Omega}_j^K \Omega_k^L \epsilon^{ij}\epsilon^{kl} \\ & + \frac{1}{2}iF_I f^I_{JK}\bar{\Omega}_i^J P_R\Omega_j^K \epsilon^{ij} - \frac{1}{2}iF_{IJ}f^I_{KL}\bar{X}^K \bar{\Omega}_i^J P_L\Omega_j^L \epsilon^{ij} \\ & - iF_i f^I_{JK} f^J_{LM} \bar{X}^K \bar{X}^L X^M + \text{h.c.} \end{aligned} \quad (5.1.24)$$

このラグランジュ密度の運動項は Kähler で、次の Kähler ポテンシャルにより与えられる：

$$K = iX^I \bar{F}_I(\bar{X}) - i\bar{X}^I F_I(X). \quad (5.1.25)$$

これより、スカラ多様体 \mathcal{M}_v は **rigid special Kähler** 多様体となる。

5.1.2 大域的 $\mathcal{N} = 2$ 超対称理論におけるハイパー超組

ハイパー超組の基本単位は、4個の実スカラー場 q^X と2個の (symplectic) Majorana スピノール ζ^A からなる。一般に、 n_H 個のハイパー超組の系は、 (q^X, ζ^A) ($X = 1, \dots, 4n_H, A = 1, \dots, 2n_H$) により記述される。スカラー場が値を取る $4n_H$ 次元の多様体を \mathcal{M}_H と表記するとき、 ζ^A は、 \mathcal{M}_H 上の複素 $2n_H$ 次元ベクトルバンドル $Z(\mathcal{M}_H)$ の q におけるファイバーとスピノールとのテンソル積 $Z_q(\mathcal{M}_H) \otimes \mathcal{S}$ に値を取る。

6次元時空におけるハイパー超組 まず、 ζ^A が symplectic Majorana であることを表すために、 $Z_q^*(\mathcal{M}_H) \otimes \bar{Z}_q^*(\mathcal{M}_H)$ に値を取り、次の「実数性条件」を満たすテンソル $\rho_{A\bar{B}}$ を与える：

$$\rho_{A\bar{B}}\rho^{\bar{B}C} = -\delta_A^C, \quad \rho^{\bar{A}B} \equiv (\rho_{A\bar{B}})^*. \quad (5.1.26)$$

ϵ^i, ζ^A に対する symplectic Majorana 条件は ϵ_{ij} ($i, j = 1, 2$) と $\rho_{A\bar{B}}$ を用いて、

$$(\epsilon^i)^C \equiv B^{-1}(\epsilon^i)^* = \epsilon_i \equiv \epsilon^j \epsilon_{ji}, \quad (5.1.27a)$$

$$(\zeta^A)^C \equiv B^{-1}(\zeta^A)^* = \zeta^B \rho_{B\bar{A}}, \quad \zeta^A = P_R \zeta^A \quad (5.1.27b)$$

と表される。

ハイパー超組の最も一般的な超対称変換は、

$$\delta q^X = \bar{\epsilon}^i \zeta^A f^X_{iA}, \quad (5.1.28a)$$

$$\delta \zeta^A = \frac{1}{2} f^{iA} X \not{D} q^X \epsilon_i - \zeta^B \omega_{XB}{}^A \delta q^X \quad (5.1.28b)$$

で与えられる。ここで、 $\omega_{XB}{}^A$ は、ベクトルバンドル $Z(\mathcal{M}_H)$ の線形接続、 f^X_{iA}, f^{iA}_X は、各 i に対して、バンドル $T(\mathcal{M}_H) \otimes Z^*(\mathcal{M}_H)$ および $T^*(\mathcal{M}_H) \otimes Z(\mathcal{M}_H)$ の局所断面で、

$$f^{iA}_X f^X_{jB} = \delta_j^i \delta_B^A \quad (5.1.29)$$

の関係を満たす。さらに、 δq^X が実数、 $\delta \zeta^A$ が symplectic Majorana であることより、 f^X_{iA} は次の関係式を満たすことが要求される：

$$(f^{iA}_X)^* = f^{jB}_X \epsilon_{ji} \rho_{B\bar{A}}, \quad (f^X_{iA})^* = \epsilon^{ij} \rho^{\bar{A}B} f^X_{jB}. \quad (5.1.30)$$

この条件は、

$$2f^{iA}_X f^Y_{jA} = \delta_X^Y \delta_i^j + \tau_j^i \cdot \mathbf{J}_X^Y; \quad (5.1.31a)$$

$$\mathbf{J}_X^Y = (\mathbf{J}_X^Y)^* = -f^{iA}_X f^Y_{jA} \tau_i^j, \quad (5.1.31b)$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{J}_X^Z)(\mathbf{B} \cdot \mathbf{J}_Z^Y) = -\delta_X^Y (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) + (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{J}_X^Y \quad (5.1.31c)$$

と同等である。ここで、 $\tau_i^j = i\sigma_i^j$. 特に、 \mathcal{J} は \mathcal{M}_H に 4 元数構造 (quaternionic structure) を与える。さらに、超対称変換が q^X に関して交換関係 (3.1.13)

$$[\delta_1, \delta_2]q^X = \frac{1}{2}(\bar{\epsilon}_{(1)i}\Gamma^\mu\epsilon_{(2)}^i)D_\mu q^X \quad (5.1.32)$$

を満たすことより、

$$f^Y{}_{jB}D_Y f^X{}_{iA} - f^Y{}_{iA}D_Y f^X{}_{jB} = 0 \quad (5.1.33)$$

が要求される。

最後に、超対称な Lagrange 密度は、

$$\mathcal{L}_6 = -\frac{1}{2}g_{XY}(q)\partial_\mu q^X\partial^\mu q^Y + C_{AB}\bar{\zeta}^A\nabla\zeta^B + \dots \quad (5.1.34)$$

となる。ここで、 $g_{XY}(q)$ は \mathcal{M}_H の Riemann 計量、 C_{AB} は $Z_q(\mathcal{M}_H)$ に関する 2 階反対称テンソル、すなわち $\wedge^2 Z(\mathcal{M}_H)$ の局所断面で、 \mathcal{L}_6 のエルミート条件より、

$$(C_{AB})^* = \rho^{\bar{A}C}\rho^{\bar{B}D}C_{CD} \quad (5.1.35)$$

を満たす。

Lagrange 密度のこの ζ^A について 2 次以下の部分が、そのオーダーで超対称変換に対して不変となることより、次の条件が得られる：

$$f_{XiA} \equiv g_{XY}f^Y{}_{iA} = f^{jB}{}_{X}\epsilon_{ji}C_{BA}, \quad (5.1.36)$$

$$\nabla_X f^Y{}_{iA} \equiv \partial_X f^Y{}_{iA} + \Gamma_{XZ}^Y f^Z{}_{iA} - \omega_{XA}{}^B(q)f^Y{}_{iB} = 0, \quad (5.1.37)$$

$$\nabla_X C_{AB} \equiv \partial_X C_{AB} + 2\omega_{X[A}{}^C C_{B]C} = 0. \quad (5.1.38)$$

この第 1 式は、次式と同等：

$$g_{XY} = f^{iA}{}_{X}\epsilon_{ij}C_{AB}f^{jB}{}_{Y} = (f^{iA})^*d^{\bar{A}}{}_B f^{iB}{}_Y, \quad (5.1.39)$$

$$d^{\bar{A}}{}_B \equiv -\rho^{\bar{A}C}C_{CB} = (d^{\bar{B}}{}_A)^*. \quad (5.1.40)$$

また、第 2 式より、 $\omega_{XA}{}^B$ が $f^X{}_{iA}$ と g_{XY} により一意的に定まる：

$$\omega_{XA}{}^B = \frac{1}{2}f^{iB}{}_Y(\partial_X f^Y{}_{iA} + \Gamma_{XZ}^Y f^Z{}_{iA}). \quad (5.1.41)$$

この接続係数より決まる $Z(\mathcal{M}_H)$ の曲率テンソル $\mathcal{R}_{XYB}{}^A$ と (\mathcal{M}_H, g_{XY}) に対する曲率テンソル $R_{XY}{}^W{}_Z$ の関係は次式で与えられる：

$$R_{XY}{}^W{}_Z = f^W{}_{iA}f^{iB}{}_Z\mathcal{R}_{XYB}{}^A = \frac{1}{2}f^{iA}{}_X f^{iB}{}_Y f^{kC}{}_Z f^W{}_{kD}W_{ABC}{}^D, \quad (5.1.42)$$

$$W_{ABCD} \equiv f^{Xi}{}_A f^Y{}_{iB}\mathcal{R}_{XYCD} = \frac{1}{2}f^{Xi}{}_A f^Y{}_{iB}f^{Zk}{}_C f^W{}_{kD}R_{XYZW}. \quad (5.1.43)$$

W_{ABCD} は対称テンソルで、 \mathcal{M}_H は Ricci 平坦となる：

$$R_{XY}[g] = 0. \quad (5.1.44)$$

以上より、理論の自由データは

i) $Z(\mathcal{M}_H)$ の symplectic 構造と $T(\mathcal{M}_H)$ との対応 $(\rho_{A\bar{B}}, f^X_{iA})$:

$$\rho_{A\bar{B}}\rho^{\bar{B}C} = -\delta^C_A, \quad \rho^{\bar{A}B} \equiv (\rho_{A\bar{B}})^*, \quad (5.1.45a)$$

$$(f^X_{iA})^* = \epsilon^{ij}\rho^{\bar{A}B}f^X_{jB}. \quad (5.1.45b)$$

ii) \mathcal{M}_H の計量と $Z(\mathcal{M}_H)$ の線形接続 $(g_{XY}(q), \omega_{XA}{}^B)$:

$$\nabla_X \rho_{A\bar{B}} \equiv \partial_X \rho_{A\bar{B}} - \omega_{XA}{}^C \rho_{CB} - \bar{\omega}_{X\bar{B}}{}^{\bar{C}} \rho_{A\bar{C}} = 0, \quad (5.1.46a)$$

$$\nabla_X f^Y_{iA} \equiv \partial_X f^Y_{iA} + \Gamma_{XZ}^Y [g] f^Z_{iA} - \omega_{XA}{}^B f^Y_{iB} = 0. \quad (5.1.46b)$$

これらが与えられると、

$$\mathbf{J}_X{}^Y = -f^{iA}{}_X f^Y_{jA} \boldsymbol{\tau}_i{}^j \Rightarrow \nabla_Z \mathbf{J}_X{}^Y = 0. \quad (5.1.47)$$

により、 \mathcal{M}_H の4元数構造が定まり、 g_{XY} は小畑計量接続を与える。さらに、(5.1.31b) と(5.1.39)より、この計量が $\mathbf{J}_X{}^Y$ のどの成分についてもエルミートとなることが示される。したがって、 $(\mathcal{M}_H, \mathbf{J}, g)$ はハイパーケーラー多様体 (hyperkähler manifold) となる。さらに、

$$C_{AB} = g_{XY} \epsilon^{ij} f^X_{iA} f^Y_{jB} \quad (5.1.48)$$

により、上記の実数条件を満たす $Z_q(\mathcal{M}_H)$ の反対称テンソル C_{AB} が定まる。

これらのデータを用いて、6次元時空での $\mathcal{N} = 2$ 超対称性をもつハイパー超組に対する作用積分は次式で与えられる：

$$\mathcal{L}_6 = -\frac{1}{2} g_{XY}(q) \partial_\mu q^X \partial^\mu q^Y + C_{AB} \bar{\zeta}^A \nabla \zeta^B - \frac{1}{4} W_{ABCD} \bar{\zeta}^A \zeta^B \bar{\zeta}^C \zeta^D. \quad (5.1.49)$$

5次元時空におけるハイパー超組 5次元時空におけるハイパー超組の理論は、カイラリティの指定がないことを除いて、本質的に6次元時空と同じである。まず、超対称変換は、ゲージ化された場合を含めて

$$\delta q^X = -i \bar{\epsilon}^i \zeta^A f^X_{iA}, \quad (5.1.50a)$$

$$\delta \zeta^A = \frac{1}{2} i f^{iA}{}_X \mathcal{D} q^X \epsilon_i - \zeta^B \omega_{XB}{}^A \delta q^X + \frac{1}{2} \sigma^I k_I^X f^{iA}{}_X \epsilon_i. \quad (5.1.50b)$$

ここで、 σ^I はゲージ超組のスカラ、 k_I^X は \mathcal{M}_H の Killing ベクトルである。ゲージ場と結合しない場合の超対称 Lagrangian 密度 \mathcal{L}_5 は6次元の表式(5.1.49)と同じ。

4次元時空におけるハイパー超組 $\epsilon'^j, \epsilon'_j = \epsilon'^k \epsilon_{kj} = (\epsilon'^j)^C (i, j, k = 1, 2)$ を5次元における Symplectic Majorana スピノールを4次元スピノールと見なしたものと
して、対応する4次元の左巻きおよび右巻き Weyl スピノールの組 $\epsilon^i = P_L \epsilon^i, \epsilon_i = (\epsilon^i)^C = B^{-1}(\epsilon^i)^*(i, j = 1, 2)$ を

$$\epsilon'^i = \epsilon^i + \epsilon^{ij} \epsilon_j, \quad \bar{\epsilon}_i = \bar{\epsilon}^i - \epsilon^{ij} \bar{\epsilon}_j, \quad (5.1.51a)$$

$$\epsilon'_i = \epsilon^j \epsilon_{ji} + \epsilon_i, \quad \bar{\epsilon}'_i = \bar{\epsilon}^j \epsilon_{ji} - \bar{\epsilon}_i \quad (5.1.51b)$$

により定義する。この対応において、5次元における荷電共役変換は

$$(\epsilon'^i)^C = -B^{-1} \gamma_* (\epsilon'^i)^* \quad (5.1.52)$$

と表される。また、5次元スピノール場 $\zeta'^A, \zeta'_A = \zeta'^B C_{BA}$ と、4次元左巻き Weyl スピノール ζ^A および右巻き Weyl スピノール $\zeta_{\bar{A}} = (\zeta^A)^C$ の対応は、

$$\zeta'^A = \zeta^A - \zeta_{\bar{B}} \rho^{\bar{B}A}, \quad \bar{\zeta}'^A = \bar{\zeta}^A + \bar{\zeta}_{\bar{B}} \rho^{\bar{B}A}, \quad (5.1.53a)$$

$$\zeta'_A = \zeta^B C_{BA} + \zeta_{\bar{B}} d^{\bar{B}}_{\ A}, \quad \bar{\zeta}'_A = \bar{\zeta}^B C_{BA} - \bar{\zeta}_{\bar{B}} d^{\bar{B}}_{\ A} \quad (5.1.53b)$$

で与えられる。

このとき、超対称変換は、5Dからの次元低下より、

$$\delta q^X = -i \bar{\epsilon}^i \zeta^A f^X_{iA} + i \epsilon^{ij} \rho^{\bar{A}B} \bar{\epsilon}_i \zeta_{\bar{A}} f^X_{jB}, \quad (5.1.54a)$$

$$\delta \zeta^A = \frac{1}{2} i f^{iA}_{\ X} \mathcal{D} q^X \epsilon_i - \zeta^B \omega_{XB}{}^A \delta q^X + i \bar{X}^I k_I^X f^{iA}_{\ X} \epsilon_{ij} \epsilon^j. \quad (5.1.54b)$$

ここで、 $\delta \zeta^A$ の右辺第3項は、ゲージ化した場合のゲージ超組からの寄与である。超対称な Lagrange 密度は

$$\mathcal{L}_4 = -\frac{1}{2} g_{XY} \partial_\mu q^X \partial^\mu q^Y - d^{\bar{A}}_{\ B} (\bar{\zeta}_{\bar{A}} \nabla \zeta^B + \bar{\zeta}^B \nabla \zeta_{\bar{A}}) + \frac{1}{2} W_{AB}{}^{\mathcal{EF}} d^{\bar{C}}_{\ \mathcal{E}} d^{\bar{D}}_{\ \mathcal{F}} \bar{\zeta}_{\bar{C}} \zeta_{\bar{D}} \bar{\zeta}^A \zeta^B \quad (5.1.55)$$

ここで、

$$\nabla_\mu \zeta^A = \partial_\mu \zeta^A + \partial_\mu q^X \omega_{XB}{}^A \zeta^B. \quad (5.1.56)$$

ゲージ化 ゲージ化は、 $N = 1, D = 4$ の場合と同様、ゲージ群 G をハイパー超組のスカラ多様体 \mathcal{M}_H とその上のバンドル $(Z(\mathcal{M}_H), \rho_{AB})$ および対応テンソル f^X_{iA} の同型変換群への埋め込み、および、スピノール場 (ζ^A) への線形表現により与えられる。

対応する \mathcal{M}_H 上の Killing ベクトルを k_I^X と記すと、まず、4元数構造 \mathbf{J}_X^J の不変性より、

$$(\nabla_X k_I^Y) \mathbf{J}_Y^Z = \mathbf{J}_X^Y (\nabla_Y k_I^Z) \quad (5.1.57)$$

が成り立つ。これより、次の関係を満たすモーメント写像 \mathbf{P}_I が定まる：

$$\partial_X \mathbf{P}_I = \mathbf{J}_X^Y k_{IY}, \quad (5.1.58a)$$

$$k_I^X \mathbf{J}_{XY} k_J^Y = f^K_{IJ} \mathbf{P}_K. \quad (5.1.58b)$$

次に、スピノール場への表現は、

$$t_{IA}{}^B = \frac{1}{2} f^Y_{iA} \nabla_Y k_I^X f^{iB}{}_X \quad (5.1.59)$$

により与えられる。交換関係は

$$[t_I, t_J]_B{}^A = f^K_{IJ} t_{KB}{}^A - k_I^X k_J^Y \mathcal{R}_{XYB}{}^A \quad (5.1.60)$$

また、次の関係式を満たす：

$$t_I^{AB} \equiv C^{AC} t_{IC}{}^A = t_I^{BA}. \quad (5.1.61a)$$

$$\bar{t}_I{}^{\bar{A}}{}_{\bar{B}} \equiv (t_{IA}{}^B)^* = -\rho^{A\bar{D}} t_{I\bar{D}}{}^C \rho_{C\bar{B}}. \quad (5.1.61b)$$

以上の記号を用いると、ゲージ化されたハイパー超組の $\mathcal{N} = 2$ 超対称性を持つ Lagrange 密度は次式で与えられる：

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_6 = & -\frac{1}{2} g_{XY}(q) D_\mu q^X D^\mu q^Y + C_{AB} \bar{\zeta}^A \hat{\mathcal{D}} \zeta^B - \frac{1}{4} W_{ABCD} \bar{\zeta}^A \zeta^B \bar{\zeta}^C \zeta^D \\ & - 2k_I^X f^{iA}{}_X \bar{\zeta}_A \lambda_i^I + 2\mathbf{P}_I \cdot \mathbf{Y}^I, \end{aligned} \quad (5.1.62a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_5 = & -\frac{1}{2} g_{XY}(q) D_\mu q^X D^\mu q^Y + C_{AB} \bar{\zeta}^A \hat{\mathcal{D}} \zeta^B - \frac{1}{4} W_{ABCD} \bar{\zeta}^A \zeta^B \bar{\zeta}^C \zeta^D \\ & - 2ik_I^X f^{iA}{}_X \bar{\zeta}_A \lambda_i^I + i\sigma^I t_{IB}{}^A \bar{\zeta}_A \zeta^B + 2\mathbf{P}_I \cdot \mathbf{Y}^I - \frac{1}{2} \sigma^I \sigma^J k_I^X k_{JX}, \end{aligned} \quad (5.1.62b)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4 = & -\frac{1}{2} g_{XY} D_\mu q^X D^\mu q^Y - d^{\bar{A}}{}_{\bar{B}} \left(\bar{\zeta}_A \hat{\mathcal{D}} \zeta^B + \bar{\zeta}^B \nabla \zeta_{\bar{A}} \right) + \frac{1}{2} W_{AB}{}^{\mathcal{E}\mathcal{F}} d^{\bar{C}}{}_{\bar{E}} d^{\bar{D}}{}_{\bar{F}} \bar{\zeta}_{\bar{C}} \zeta_{\bar{D}} \bar{\zeta}^{\mathcal{A}} \zeta^{\mathcal{B}} \\ & + \left(2X^I t_{IAB} \bar{\zeta}^A \zeta^B + 2if^{iA}{}_X k_I^X \bar{\zeta}_{\bar{B}} \Omega^{jI} \varepsilon_{ij} d^{\bar{B}}{}_{\bar{A}} + \text{h.c.} \right) \\ & + 2\mathbf{P}_I \cdot \mathbf{Y}^I - 2\bar{X}^I X^J k_{JX}^X k_{IX}. \end{aligned} \quad (5.1.62c)$$

ここで、

$$D_\mu q^X = \partial_\mu q^X - A_\mu^I k_I^X, \quad (5.1.63a)$$

$$\hat{D}_\mu \zeta^A = \partial_\mu \zeta^A + \partial_\mu q^X \omega_{XB}{}^A \zeta^B - A_\mu^I t_{IB}{}^A \zeta^B. \quad (5.1.63b)$$

5.1.3 $\mathcal{N} = 2$ 4次元超重力理論

最終的な基本場

- Poincaré 超組: $\theta_\mu^\alpha, \psi_\mu^i, A_\mu^0$.

$$\psi_\mu^i = P_L \psi^i. \quad (5.1.64)$$

- ゲージ超組: $A_\mu^\alpha, z^\alpha, \chi^{i\alpha}$ ($\alpha = 1, \dots, n_V$).

$$\chi_i^\alpha = P_L \chi_i^\alpha, \quad \chi^{i\bar{\alpha}} = P_R \chi^{i\bar{\alpha}}. \quad (5.1.65)$$

- ハイパー超組: q^u, ζ^A ($u = 1, \dots, 4n_H; A = 1, \dots, 2n_H$).

$$\zeta^A = P_L \zeta^A, \quad \zeta_A = P_R \zeta_A. \quad (5.1.66)$$

スカラー多様体の構造

スカラー多様体 \mathcal{M}_S は、 $4n_H$ 次元の4元数型ケーラー多様体 \mathcal{M}_H と $2n_V$ 次元の射影特殊 Kähler 多様体 \mathcal{M}_V の積となる :

$$\mathcal{M}_S = \mathcal{M}_H \times \mathcal{M}_V \ni (q^u, z^\alpha). \quad (5.1.67)$$

(1) 射影特殊ケーラー多様体 \mathcal{M}_V $2n_V$ 次元の射影特殊ケーラー多様体は、閉相似キリングベクトルをもつ $2(n_V + 1)$ 次元のアフィン特殊ケーラー多様体の商多様体として得られる.

まず、 $2(n_V + 1)$ 次元のアフィン特殊ケーラー多様体 M が、 w^I ($I = 0, \dots, n_V$) を複素座標系として、シンプレクティックベクトル

$$V = \mathcal{T}(X^I(w), F_I(w)); \quad \langle \partial_I V, \partial_J V \rangle = 0 \quad (5.1.68)$$

により定義される. ここで、シンプレクティック内積 $\langle *, * \rangle$ は

$$\langle V, V' \rangle = X^I F'_I - F_I X'^I. \quad (5.1.69)$$

ケーラーポテンシャル $\tilde{\mathcal{K}}$ は

$$\tilde{\mathcal{K}} = i \langle V, \bar{V} \rangle = i(X^I \bar{F}_I - F_I \bar{X}^I) \quad (5.1.70)$$

により与えられる. $\partial_J X^I$ が正則行列となる場合には、前ポテンシャルと呼ばれる正則関数 $F(X)$ が存在して、 $F_I = \partial F / \partial X^I$ と表される.

このアフィン特殊ケーラー多様体が閉相似キリングベクトル k_D をもつとすると、

$$k_D^I \partial_I V(w) = V(w). \quad (5.1.71)$$

前ポテンシャルが存在するとき, $k_D = X^I \partial / \partial X^I$ となるので, この条件は

$$X^I \partial_{X^I} F(X) = 2F(X) \quad (5.1.72)$$

と表される.

いま, 新たな正則座標系 $(y, z^\alpha) (\alpha = 1, \dots, n_V)$ を

$$k_D^I \partial_I z^\alpha = 0, \quad k_D^I \partial_I y = y \quad (5.1.73)$$

により導入すると, $k_D = y \partial_y$ で,

$$V = yv(z); \quad v(z) = \mathcal{V}(Z^I(z), \hat{F}_I(z)) \quad (5.1.74)$$

M の正則閉相似ベクトル k_D およびそれに随伴するキリングベクトルの軌道 \mathcal{O} による $2n_V$ 次元の商多様体を \mathcal{M}_V とすると, z^α はその複素座標系となる. M の超曲面

$$\langle V, \bar{V} \rangle = \frac{i}{\kappa^2} \Leftrightarrow y\bar{y} = \frac{i}{\kappa^2 \langle v(z), \bar{v}(z) \rangle} \equiv e^{\kappa^2 \mathcal{K}(z, \bar{z})} \quad (5.1.75)$$

を Σ , $\pi: M \rightarrow \mathcal{M}_V$ として, $p \in \Sigma$ に対して, $\pi(p) \in \mathcal{M}_V$ におけるベクトル a, b の内積を, $\tilde{a}, \tilde{b} \in T_p(\Sigma)$, $\pi(\tilde{a}) = a, \pi(\tilde{b}) = b, \tilde{a}, \tilde{b} \perp \mathcal{O}$ となるベクトルを用いて, $g(a, b) = \tilde{g}(\tilde{a}, \tilde{b})$ により定義する. このとき,

$$g_{\alpha\bar{\beta}} = \tilde{g}_{\alpha\bar{\beta}} - \frac{\tilde{g}_{\tilde{y}\alpha} \tilde{g}_{\tilde{y}\bar{\beta}}}{\tilde{g}_{\tilde{y}\tilde{y}}} = iy\bar{y} \langle \nabla_\alpha v, \bar{\nabla}_{\bar{\beta}} \bar{v} \rangle = \partial_\alpha \partial_{\bar{\beta}} \mathcal{K} \quad (5.1.76)$$

が成り立つ. すなわち, \mathcal{M}_V は, \mathcal{K} をケーラーポテンシャルとするケーラー多様体となる. ここで,

$$\nabla_\alpha v = (\partial_\alpha + \kappa^2 \partial_\alpha \mathcal{K})v, \quad \bar{\nabla}_{\bar{\alpha}} v = 0, \quad \nabla_\alpha y = \bar{\nabla}_{\bar{\alpha}} y = 0. \quad (5.1.77)$$

また, $v(z)$ は次の条件を満たす \mathcal{M}_V 上の正則シンプレクティックベクトル場となり, $v(z)$ を与えると \mathcal{M}_V の射影特殊ケーラー構造が定まる:

$$\langle v, \nabla_\alpha v \rangle = \langle \nabla_\alpha v, \nabla_\beta v \rangle = 0 \quad (5.1.78)$$

曲率テンソルは,

$$R_{\alpha\bar{\alpha}\beta\bar{\beta}} = \frac{2}{a} g_{\bar{\alpha}(\alpha} g_{\beta)\bar{\beta}} - C_{\alpha\beta\gamma} g^{\gamma\bar{\gamma}} \bar{C}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}}, \quad (5.1.79a)$$

$$C_{\alpha\beta\gamma} = i \langle \nabla_\alpha \nabla_\beta V, \nabla_\gamma V \rangle \quad (5.1.79b)$$

$g_{\alpha\bar{\beta}} = \partial_\alpha \partial_{\bar{\beta}} \mathcal{K}$ がスカラー場 z^α およびスピノール場 $\chi^{i\alpha}$ の運動項を決定する. また, $g_{\alpha\bar{\beta}}$ が正則なとき, 行列 $(\bar{Z}^J(\bar{z}) \nabla_\alpha Z^J(z))$ は正則で, ゲージ場の結合関数 \mathcal{N}_{IJ} は,

$$\bar{\mathcal{N}}_{IJ} = \left(\bar{\hat{F}}_I(\bar{z}) \nabla_\alpha \hat{F}_I(z) \right) \left(\bar{Z}^J(\bar{z}) \nabla_\alpha Z^J(z) \right)^{-1} \quad (5.1.80)$$

で与えられる. とくに, 前ポテンシャルが存在するときには,

$$\mathcal{N}_{IJ} = \bar{F}_{IJ} + i \frac{N_{IK} X^K N_{IL} X^L}{N_{MN} X^M X^N}, \quad N_{IJ} = 2\text{Im} F_{IJ}. \quad (5.1.81)$$

(2) 4元数型ケーラー多様体 \mathcal{M}_H $4n_H$ 次元の4元数型ケーラー多様体は, 閉相似キリングベクトルをもつ $4(n_H+1)$ 次元のハイパーケーラー多様体の商多様体として得られる. $\rho_{A\bar{B}}(A, B = 1 \cdots, 2n_H)$ を \mathcal{M}_H の $2n_H$ 次元ベクトルバンドル $Z(\mathcal{M}_H)$ のテンソルで

$$\rho_{A\bar{B}}\rho^{\bar{B}C} = -\delta_A^C, \quad \rho^{\bar{A}B} = (\rho_{A\bar{B}})^* \quad (5.1.82)$$

を満たすものとする. また, $f^{iA}_u, f^u_{iA} (i = 1, 2, A = 1, \cdots, 2n_H, u = 1, \cdots, 4n_H)$ を次の性質を持つテンソル ($T^*(\mathcal{M}_H) \otimes (Z(\mathcal{M}_H) \oplus Z(\text{cal}\mathcal{M}_H))$ の断面) とする:

$$f^{iA}_v f^u_{iA} = \delta_v^u, \quad f^{iA}_u f^u_{jB} = \delta_j^i \delta_B^A, \quad (5.1.83a)$$

$$(f^{iA}_u)^* = f^{jB}_u \epsilon_{ji} \rho_{B\bar{A}}, \quad (f^u_{iA})^* = \epsilon^{ij} \rho^{\bar{A}B} f^u_{jB}. \quad (5.1.83b)$$

さらに, h_{uv} を計量として, 反対称形式 C_{AB} を

$$h_{uv} = f^{iA}_u \epsilon_{ij} C_{AB} f^{jB}_v \Leftrightarrow h_{uv} f^u_{iA} f^v_{jB} = \epsilon_{ij} C_{AB} \quad (5.1.84)$$

により定義する. このとき, h_{uv} がスカラー場 q^u の運動項を, C_{AB} がスピノール場 ζ^A の運動項を決定する.

f^u_{iA} の実数性条件より,

$$2f^{iA}_u f^v_{jA} = \delta_u^v \delta_j^i + \tau_j^i \cdot \mathbf{J}_u^v \Leftrightarrow \mathbf{J}_u^v = (\mathbf{J}_u^v)^* = -f^{iA}_u f^v_{jA} \tau_i^j \quad (5.1.85)$$

により, $\mathbf{J} = (J_1, J_2, J_3)$ を定義すると, (\mathbf{J}, h) は \mathcal{M}_H の4元数型ケーラー構造となり,

$$\tilde{\nabla}_u \mathbf{J} \equiv \nabla_u \mathbf{J} + 2\omega_u \times \mathbf{J} = 0 \quad (5.1.86)$$

が成り立つ. ここで, 接続係数 $\omega_u = (-1/2)\omega_{uj}^i \tau_i^j (\tau_i^j = i\sigma_{ij})$ とバンドル $Z(\mathcal{M}_H)$ の接続係数 ω_{uB}^A は, 条件

$$\tilde{\nabla}_v f^{iA}_u \equiv \partial_v f^{iA}_u + f^{iB}_u \omega_{vB}^A + f^{jA}_u \omega_{vj}^i - \Gamma_{vu}^w [h] f^{iA}_w = 0 \quad (5.1.87)$$

より

$$\omega_{uj}^i \delta_B^A + \omega_{uB}^A \delta_j^i = -f^v_{jB} (\partial_v f^{iA}_u - \Gamma^w_{vu} f^{iA}_w) \quad (5.1.88)$$

と定まる. ω_{uj}^i は

$$\nabla_u \epsilon^{ij} \equiv \partial_u \epsilon^{ij} + 2\epsilon^{k[j} \omega_{uk}^{i]} = 2\omega_u^{[ij]} = 0 \quad (5.1.89)$$

より, $\omega_u = (-1/2)\omega_{uj}^i \tau_i^j$ は $SU(2)$ 接続となる. また,

$$\nabla_u \rho_{A\bar{B}} \equiv \partial_u \rho_{A\bar{B}} - \omega_{uA}^C \rho_{C\bar{B}} - \omega_{u\bar{B}}^{\bar{C}} \rho_{A\bar{C}} = 0 \quad (5.1.90)$$

より, ω_{uB}^A は $USp(2n_H)$ 接続となる.

これらの接続の曲率テンソルをそれぞれ, $\mathcal{R}_{uv}, \mathcal{R}_{uvB}^A$ とおくと, 計量 h のリーマン曲率テンソルは

$$R_{uv}{}^w{}_x = f^w_{iA} f_x^{iB} \mathcal{R}_{uvB}^A - \mathbf{J}_x{}^w \cdot \mathcal{R}_{uv} \quad (5.1.91)$$

と表される．さらに，4元数型ケーラー多様体はアインシュタイン空間となる：

$$R_{uv} = \frac{1}{4n_H} h_{uv} R. \quad (5.1.92)$$

また，SU(2) 接続に対する曲率形式は4元数型構造に比例する：

$$\mathcal{R}_{uv} = \frac{1}{2} \nu \mathbf{J}_{uv}; \quad \nu \equiv \frac{R}{4n_H(n_H + 2)} = -\kappa^2. \quad (5.1.93)$$

(3) ゲージ化 ゲージ変換に対応する4元数型ケーラー多様体 \mathcal{M}_H のキリングベクトルを k_I^u と表記すると，もとのハイパーケーラー多様体の対応するキリングベクトルの対するモーメント写像 \mathbf{P}_I との間に

$$(\nabla_u k_I^v) \mathbf{J}_v{}^w - \mathbf{J}_u{}^v (\nabla_v k_I^w) = \nu \mathbf{J}_u{}^w \times \mathbf{P}_I \quad (5.1.94)$$

の関係が成り立つ．これより

$$\tilde{\nabla}_u \mathbf{P}_I \equiv \partial_u \mathbf{P}_I + 2\omega_u \times \mathbf{P}_I = \mathbf{J}_{uv} k_I^v, \quad (5.1.95a)$$

$$\nabla_u k_I^v = -\mathbf{R}_u{}^v \cdot \mathbf{P}_I + f^{iB}{}_u f^v{}_{iA} t_{IB}{}^A; \quad t_{IA}{}^B \equiv \frac{1}{2} f^v{}_{iA} \nabla_v k_I^u f^{iB}{}_u \quad (5.1.95b)$$

$$2n_H \nu \mathbf{P}_I = \mathbf{J}_u{}^v \nabla_v k_I^u. \quad (5.1.95c)$$

なお，キリングベクトルは次の整合性条件を満たす必要がある：

$$k_I^u \mathbf{J}_{uv} k_J^v = f^K{}_{IJ} \mathbf{P}_K + \nu \mathbf{P}_I \times \mathbf{P}_J. \quad (5.1.96)$$

ゲージ変換のアフィン特殊ケーラー多様体に対する作用は線形で随伴表現に従う．対応する前ポテンシャルの変換は

$$\delta_G F \equiv F_I \theta^K X^J f_{JK}^I = -\theta^K C_{K,IJ} X^I X^J \quad (5.1.97)$$

と変換する．ここで， $C_{K,IJ}$ は実定数である．これより，射影特殊ケーラー多様体における対応するキリングベクトル k_I^α は

$$\delta z^\alpha = \theta^J k_j^\alpha; \quad k_j^\alpha \nabla_\alpha Z^I = Z^K f_{KJ}^I - i\kappa^2 Z^I P_J. \quad (5.1.98)$$

ここで，

$$P_I^0 = -i N_{IJ} f_{KL}^J X^K \bar{X}^L = i N_{JL} f_{KI}^J X^K \bar{X}^L = -i N_{JK} f_{LI}^J X^K \bar{X}^L. \quad (5.1.99)$$

超重力理論の最も一般的な作用積分

$$\begin{aligned}
 |\theta|^{-1} \mathcal{L} = & \frac{1}{\kappa^2} \left(\frac{1}{2} R - \bar{\psi}_{i\mu} \gamma^{\mu\nu\rho} D_\nu \psi_\rho^i \right) - g_{\alpha\bar{\beta}} \hat{\partial}_\mu z^\alpha \hat{\partial}^\mu \bar{z}^{\bar{\beta}} - \frac{1}{2} h_{uv} \hat{\partial}_\mu q^u \hat{\partial}^\mu q^v - V \\
 & + \frac{2}{3} C_{I,JK} |\theta|^{-1} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} A_\mu^I A_\nu^J \left(\partial_\rho A_\sigma^K + \frac{3}{8} f^K{}_{LM} A_\rho^L A_\sigma^M \right) \\
 & + \left\{ -\frac{1}{4} i \mathcal{N}_{IJ} F_{\mu\nu}^{+I} F^{+\mu\nu J} + F_{\mu\nu}^{+I} \text{Im} \mathcal{N}_{IJ} Q^{\mu\nu+J} \right. \\
 & \quad - \frac{1}{4} g_{\alpha\bar{\beta}} \bar{\chi}_i^\alpha \not{D} \chi^{i\bar{\beta}} - \bar{\zeta}_A \hat{D} \zeta^A \\
 & \quad \left. + \frac{1}{2} g_{\alpha\bar{\beta}} \bar{\psi}_{ia} \hat{\partial} z^\alpha \gamma^a \chi^{i\bar{\beta}} - i \bar{\psi}_a^i \hat{\partial} q^u \gamma^a \zeta^A f_{uiA} + \text{h.c.} \right\} \\
 & + \mathcal{L}_m - \bar{\psi}_i \cdot \gamma v^i + \text{four-fermion terms.} \tag{5.1.100}
 \end{aligned}$$

ここで、共変微分は

$$\hat{\partial}_\mu z^\alpha = \partial_\mu z^\alpha - A_\mu^I k_I^\alpha, \quad \hat{\partial}_\mu q^u = \partial_\mu q^u - A_\mu^I k_I^u, \tag{5.1.101a}$$

$$D_\mu \psi_{\nu i} = \left(\partial_\mu + \frac{1}{4} \omega_\mu{}^{ab}(\theta) \gamma_{ab} + \frac{i}{2} \mathcal{B}_\mu \right) \psi_{\nu i} + \mathcal{V}_{\mu i}{}^j \psi_{\nu j}, \tag{5.1.101b}$$

$$D_\mu \chi_i^\alpha = \left(\partial_\mu + \frac{1}{4} \omega_\mu{}^{ab}(\theta) \gamma_{ab} + \frac{i}{2} \mathcal{B}_\mu \right) \chi_i^\alpha + \mathcal{V}_{\mu i}{}^j \chi_j^\alpha - A_\mu^I \chi_i^\beta \partial_\beta k_I^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \chi_i^\gamma \partial_\mu z^\beta, \tag{5.1.101c}$$

$$D_\mu \zeta^A = \left(\partial_\mu + \frac{1}{4} \omega_\mu{}^{ab}(\theta) \gamma_{ab} + \frac{i}{2} \mathcal{B}_\mu \right) \zeta^A - A_\mu^I t_{IB}{}^A \zeta^B + \partial_\mu q^u \omega_{uB}{}^A \zeta^B. \tag{5.1.101d}$$

これらの式に現れる複合ゲージ場 $\mathcal{B}_\mu, \mathcal{V}_{\mu i}{}^j = \tau_i{}^j \cdot \mathbf{V}_\mu$ の表式は、

$$\begin{aligned}
 \mathcal{B}_\mu &= -\kappa^2 \omega_\alpha \partial_\mu z^\alpha - \kappa^2 \omega_{\bar{\alpha}} \partial_\mu \bar{z}^{\bar{\alpha}} - \kappa^2 A_\mu^I P_I^0 \\
 &= -\kappa^2 \hat{\partial}_\mu z^\alpha + \frac{i}{2} A_\mu^I r_I + \text{h.c.}, \tag{5.1.102a}
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{V}_\mu = -\omega_u \partial_\mu q^u - \frac{1}{2} \kappa^2 A_\mu^I \mathbf{P}_I = -\omega_u \hat{\partial}_\mu q^u + \frac{1}{2} A_\mu^I \mathbf{r}_I. \tag{5.1.102b}$$

ただし、 $\omega_\alpha = (-i/2) \partial_\alpha \mathcal{K}$, $\mathbf{r}_I = -2\omega_u k_I^u - \kappa^2 \mathbf{P}_I$. また、 ζ^A に対するゲージ変換の表現行列 $t_{IA}{}^B$ は

$$t_{IA}{}^B = \frac{1}{2} f^v{}_{iA} \nabla_v k_I^u f^{iB}{}_u. \tag{5.1.103}$$

また、CS項の係数 $C_{K,IJ}$ は

$$C_{K,IJ} = \bar{C}_{K,IJ} = -f_{K(I}^L (F_{J)L} \tag{5.1.104}$$

Pauli項の Q は

$$\begin{aligned}
 Q^{ab-J} \equiv & \bar{\nabla}_{\bar{\alpha}} \bar{X}^J \left(\frac{1}{8} g^{\beta\bar{\alpha}} C_{\beta\gamma\delta} \bar{\chi}_i^\gamma \gamma_{ab} \chi_j^\delta \epsilon^{ij} + \bar{\chi}^{\bar{\alpha}i} \gamma^a \psi^{bj} \epsilon_{ij} \right) \\
 & + X^J \left(\bar{\psi}_i^a \psi_j^b \epsilon^{ij} + \frac{1}{2} \kappa^2 \bar{\zeta}^A \gamma^{ab} \zeta^B C_{AB} \right). \tag{5.1.105}
 \end{aligned}$$

スカラーポテンシャル V はゲージ化により生じ,

$$V = \left[-\frac{1}{2}((\text{Im}\mathcal{N})^{-1})^{IJ} - 4\kappa^2 X^I \bar{X}^J \right] \mathbf{P}_I \cdot \mathbf{P}_J + 2\bar{X}^I X^J k_I^u k_J^v h_{uv} + (N^{-1})^{IJ} P_I^0 P_J^0 \quad (5.1.106)$$

スピノール場の質量項 \mathcal{L}_m は,

$$\mathcal{L}_m = \frac{1}{2} S_{ij} \bar{\psi}_\mu^i \gamma^{\mu\nu} \psi_\nu^j - \frac{1}{2} m^{ij}{}_{\alpha\beta} \bar{\chi}_i^\alpha \chi_j^\beta - m_{i\bar{\alpha}}{}^A \bar{\chi}^{i\bar{\alpha}} \zeta_A - \frac{1}{2} m_{AB} \bar{\zeta}^A \zeta^B + \text{h.c.} \quad (5.1.107)$$

ここで,

$$S_{ij} = P_{Iij} \bar{X}^J, \quad (5.1.108a)$$

$$m^{ij}{}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} P_I^{ij} C_{\alpha\beta\gamma} g^{\gamma\bar{\delta}} \bar{\nabla}_{\bar{\delta}} \bar{X}^I + \epsilon^{ij} \nabla_\alpha X^I k_i^{\bar{\gamma}} g_{\beta\bar{\gamma}}, \quad (5.1.108b)$$

$$m_{i\bar{\alpha}}{}^A = 2i k_I^u \epsilon_{ij} f_u^{jA} \bar{\nabla}_{\bar{\alpha}} \bar{X}^I, \quad (5.1.108c)$$

$$m_{AB} = -4X^I t_{IAB}. \quad (5.1.108d)$$

最後に、 v^i は

$$v^i = \frac{1}{2} W_\alpha^{ij} \chi_j^\alpha + 2N^i{}_A \zeta^A; \quad (5.1.109)$$

$$W_\alpha^{ij} \equiv (i\epsilon^{ij} P_I^0 - P_I^{ij}) \nabla_\alpha X^I = \epsilon^{ij} g_{\alpha\bar{\beta}} k_I^{\bar{\beta}} X^I + P_I^{ij} \nabla_\alpha X^I, \quad (5.1.110)$$

$$N^i{}_A \equiv i f^{iB}{}_u k_I^u X^I C_{BA}. \quad (5.1.111)$$

超対称変換

ボゾン場の超対称変換は

$$\delta\theta_\mu^a = \frac{1}{2}\bar{\epsilon}^i\gamma^a\psi_{\mu i} + \text{h.c.}, \quad (5.1.112a)$$

$$\delta z^\alpha = \frac{1}{2}\bar{\epsilon}^i\chi_i^\alpha, \quad (5.1.112b)$$

$$\delta q^u = -i\epsilon^i\zeta^A f^u{}_{iA} + \text{h.c.}, \quad (5.1.112c)$$

$$\delta A_\mu^I = \frac{1}{2}\epsilon^{ij}\bar{\epsilon}_j\gamma_\mu\gamma_\mu\chi_j^\alpha\nabla_\alpha X^I + \epsilon^{ij}\bar{\epsilon}_i\psi_{\mu j}X^I + \text{h.c.} \quad (5.1.112d)$$

フェルミ場の超対称変換のボゾン部分は

$$\delta\psi_\mu^i = \left(\partial_\mu + \frac{1}{4}\omega_\mu{}^{ab}\gamma_{ab} - \frac{1}{2}i\mathcal{B}_\mu\right)\epsilon^i + \mathcal{V}_\mu{}^i{}_j\epsilon^j - \frac{1}{16}\gamma^{ab}T_{ab}^-\epsilon^{ij}\gamma_\mu\epsilon_j + \frac{1}{2}\kappa^2\gamma_\mu S^{ij}\epsilon_j, \quad (5.1.113a)$$

$$\delta\chi_i^\alpha = \hat{\rho}z^\alpha\epsilon_i - \frac{1}{2}G_{ab}^{-\alpha}\gamma^{ab}\epsilon_{ij}\epsilon^j + g^{\alpha\bar{\beta}}\bar{W}_{\bar{\beta}ji}\epsilon^j, \quad (5.1.113b)$$

$$\delta\zeta^A = \frac{1}{2}if^i{}_u{}^A\hat{\rho}q^u\epsilon_i - \zeta^B\omega_{uB}{}^A\delta q^u + \bar{N}_i^A\epsilon^i. \quad (5.1.113c)$$

ここで,

$$\bar{W}_{\bar{\alpha}ij} = (-i\epsilon_{ij}P_I^0 - P_{Iij})\bar{\nabla}_{\bar{\alpha}}\bar{X}^I = \epsilon_{ij}g_{\beta\bar{\alpha}}k_I^\beta\bar{X}^I + P_{Iij}\bar{\nabla}_{\bar{\alpha}}\bar{X}^i, \quad (5.1.114a)$$

$$\bar{N}_i^A \equiv -i\epsilon_{ij}f^{jA}{}_uk_I^u\bar{X}^I, \quad (5.1.114b)$$

$$T_{ab}^+|_{\text{bos}} = -4\kappa^2\bar{X}^I\text{Im}\mathcal{N}_{IJ}F_{ab}^{+J} = 2i\kappa^2(\bar{X}^IG_{Iab}^+ - \bar{F}_IF_{ab}^+), \quad (5.1.114c)$$

$$G_{ab}^{-\alpha} = g^{\alpha\bar{\beta}}\bar{\nabla}_{\bar{\beta}}\bar{X}^I\text{Im}\mathcal{N}_{IJ}F_{ab}^{-J}. \quad (5.1.114d)$$

なお、フェルミ場の超対称変換に対するゲージ化による付加項 (femion shift) とスカラーポテンシャルの間には次の関係がある：

$$-3\kappa^2S^{ik}S_{jk} + W_\alpha^{ik}g^{\alpha\bar{\beta}}\bar{W}_{\bar{\beta}jk} + 4N_A^i\bar{N}_i^A = \delta_j^iV. \quad (5.1.115)$$

次元 D	超共形代数	R 対称性
6	$\text{OSp}(8^* 2)$	$\text{USp}(2) \cong \text{SU}(2)$
5	$F^2(4)$	$\text{USp}(2) \cong \text{SU}(2)$
4	$\text{SU}(2, 2 2)$	$\text{SU}(2) \times \text{U}(1)$

表 5.1: $D = 4, 5, 6$ における極小超共形代数と R 対称性

5.1.4 $\mathcal{N} = 2$ 4次元超重力理論の超共形アプローチによる導出

$\mathcal{N} = 2$ 超共形代数 生成元と対応するゲージパラメータおよびゲージ場は

P_A	M_{ab}	D	K_a	U_i^j	T	Q^i	S^i
ξ^a	λ^{ab}	λ_D	λ_K^a	λ_j^i	λ_T	ϵ_i	η_i
θ_μ^a	ω_μ^{ab}	b_μ	f_μ^a	$V_{\mu j}^i$	B_μ	$\psi_{i\mu}$	$\phi_{i\mu}$

標準 Weyl 超組と拘束条件 上記の超共形ゲージ場に、 $\mathcal{N} = 1$ の場合と同様の拘束条件とゲージ固定条件を課して、物理的なゲージ場 θ^a, ψ_i のみを残すと、off-shell ではボゾン場とフェルミオン場の数がバランスしないため、超対称変換が閉じない。この問題を解決するため、超共形ゲージ場超組に $(T_{ab}, D; \chi^i)$ を加えて、超組を拡大し、変換則を修正する。

拘束条件としては、次のものを選ぶ：

$$R_{\mu\nu}(P^a) = 0 \Rightarrow \omega^{ab}, \quad (5.1.116a)$$

$$\hat{R}_{ac}(M^{bc}) + i\hat{R}_a{}^b(T) + \frac{1}{4}T_{ca}^-T^{+bc} + \frac{3}{2}\delta_a^b D = 0 \Rightarrow f^a, \quad (5.1.116b)$$

$$\gamma^b \hat{R}_{ba}(Q^i) + \frac{3}{2}\gamma_a \chi^i = 0 \Rightarrow \phi_i. \quad (5.1.116c)$$

物質超組との結合 ゲージ超組 $(X^I, \Omega_i^I, A_\mu^I, \mathbf{Y}^I)$ とハイパー超組 (q^X, λ^A) の共形ウエイト w とカイラルウエイト c は、超共形代数の構造と超対称変換に対する変換則より、次のようになる。

成分場	ゲージ超組 (off-shell)				ハイパー超組 (on-shell)	
	X^I	A_μ^I	\mathbf{Y}^I	Ω_i^I	q^X	ζ^A
自由度	2	3	3	8	4	4
w	1	0	2	3/2	1	3/2
c	1	0	0	1/2	0	-1/2
L/R				L		L

これより、ゲージ超組 $(X^I, \Omega_i^I, A_\mu^I, \mathbf{Y}^I)$ の超共形変換に対する変換則は

$$\delta X^I = \frac{1}{2} \bar{\epsilon} \Omega_i^I, \quad (5.1.117a)$$

$$\delta \Omega_i^I = \mathcal{D} X^I \epsilon_i + \frac{1}{4} \gamma^{ab} \mathcal{F}_{ab}^I \epsilon_{ij} \epsilon^j + Y_{ij}^I \epsilon^j + X^J \bar{X}^K f^I{}_{JK} \epsilon_{ij} \epsilon^j + 2X^I \bar{\eta}_i, \quad (5.1.117b)$$

$$\delta A^\mu = \frac{1}{2} \epsilon^{ij} \bar{\epsilon}_i \gamma_\mu \Omega_j^I + \epsilon^{ij} \bar{\epsilon}_i \psi_{\mu j} X^I + \text{h.c.}, \quad (5.1.117c)$$

$$\delta \mathbf{Y}^I = \frac{1}{4} \boldsymbol{\tau}^{ij} \bar{\epsilon}_i \mathcal{D} \Omega_j^I - \frac{1}{2} f^I{}_{JK} \boldsymbol{\tau}_i{}^j \bar{\epsilon}_j X^J \Omega^{iK} + \text{h.c.} \quad (5.1.117d)$$

ここで、

$$\mathcal{F}_{ab}^{I-} \equiv \hat{F}_{ab}^{I-} - \frac{1}{2} \bar{X}^I T^-{}_{ab}, \quad (5.1.118a)$$

$$\hat{F}_{\mu\nu}^I = F_{\mu\nu}^I + (-\epsilon_{ij} \bar{\psi}_{[\mu}^i \gamma_{\nu]} \Omega^{Ij} - \epsilon_{ij} \bar{\psi}_\mu^i \psi_\nu^j \bar{X}^I + \text{h.c.}). \quad (5.1.118b)$$

$D\Phi = d\Phi - \delta(A^I T_I)\Phi$ より、共変微分は次のようになる：

$$\mathcal{D} X^I = D X^I - \frac{1}{2} \bar{\psi}^i \Omega_i^I; \quad (5.1.119a)$$

$$D X^I = (d - b - i\mathcal{B}) X^I + A^J X^K f^I{}_{JK}, \quad (5.1.119b)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D} \Omega_i^I &= D \Omega_i^I - \mathcal{D} X^I \psi_i - \frac{1}{4} \gamma^{ab} \mathcal{F}_{ab}^{I-} \epsilon_{ij} \psi^j \\ &\quad - Y_{ij}^I \psi^j - X^J \bar{X}^K f^I{}_{JK} \epsilon_{ij} \psi^j - 2X^I \phi_i, \end{aligned} \quad (5.1.119c)$$

$$D \Omega_i^I = \left(d + \frac{1}{4} \omega^{ab} \gamma_{ab} - \frac{3}{2} b - \frac{1}{2} i\mathcal{B} \right) \Omega_i + V_i{}^j \Omega_j^I + A_\mu^J \Omega_i^K f^I{}_{JK} \quad (5.1.119d)$$

次に、ハイパー超組 (q^X, λ^A) に対しては、 \mathcal{M}_H の相似 Killing ベクトル k_D^X を通して、dilation 変換が作用するとする。また、 k_D^X より

$$\mathbf{k}^X = \frac{1}{2} k_D^Y \mathbf{J}_Y{}^X \quad (5.1.120)$$

により $SU(2)$ Killing ベクトル \mathbf{k}^X が定義される。 $U_i{}^J$ 変換は、この Killing ベクトルを通してハイパー超組に作用するとする。したがって、 $(D, T, U_i{}^J)$ のハイパー超組への作用は

$$\delta q^X = \lambda_D k_D^X - 2\boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{k}^X, \quad (5.1.121a)$$

$$\delta \zeta^A = \left(\frac{3}{2} \lambda_D - \frac{3}{2} i \lambda_T \right) \zeta^A - \zeta^B \omega_{XB}{}^A \delta q^X \quad (5.1.121b)$$

となる。超共形ゲージ場に対する共変微分は

$$\mathcal{D} q^X = D q^X + i \bar{\psi}^i \zeta^A f^X{}_{iA} - i \epsilon^{ij} \rho^{\bar{A}B} \bar{\psi}_i \zeta_{\bar{A}} f^X{}_{jB}, \quad (5.1.122a)$$

$$D q^X = d q^X - b k_D^X + 2\mathbf{V} \cdot \mathbf{k}^X - A^I k_I^X, \quad (5.1.122b)$$

$$\hat{D} \zeta^A = \hat{D} \zeta^A - \frac{i}{2} f^{iA}{}_{X} \mathcal{D} q^X \psi_i - i \bar{X}^I k_I^X f^{iA}{}_{X} \epsilon_{ij} \psi^j - i f^{iA}{}_{X} k_D^X \phi_i, \quad (5.1.122c)$$

$$\hat{D} \zeta^A = \left(d + \frac{1}{4} \omega^{ab} \gamma_{ab} - \frac{3}{2} b + \frac{1}{2} i\mathcal{B} \right) \zeta^A - A^I t_{IB}{}^A \zeta^B + d q^X \omega_{XB}{}^A \zeta^B \quad (5.1.122d)$$

各成分場の超共形変換に対する変換則は、一般公式 $D\Phi = d\Phi - \delta(\mathcal{A}^I T_I)\Phi$ より読み取ることができる。

超共形不変作用積分 大域的 $\mathcal{N} = 2$ 超対称理論を超共形ゲージ変換に対して共変化し、相似 Killing ベクトルの作用で不変という要請を課すと、超共形不変な作用積分が得られる。まず、ゲージ超組の部分の共形不変性より、前ポテンシャル $F(X)$ が共形ウエイト 2 を持つことが要求される：

$$X^I \partial_I F = 2F \quad (5.1.123)$$

このとき、

$$N \equiv N_{IJ} X^I \bar{X}^J; \quad N_{IJ} \equiv 2\text{Im} F_{IJ} = -i(F_{IJ} - \overline{F_{IJ}}) \quad (5.1.124)$$

とおくと、 $N = N(X, \bar{X})$ がゲージ超組のスカラー多様体 \mathcal{M}_v に対する共形ウエイト 2 の Kähler ポテンシャルを与える。

つぎに、ハイパー超組のセクターが共形不変であるためには、スカラー多様体 \mathcal{M}_H の相似 Killing ベクトル k_D とゲージ対称性に対応する Killing ベクトル k_I が可換となることが要求される：

$$[k_D, k_I] = 0 \quad (5.1.125)$$

これより、3つ組モーメント写像 \mathbf{P}_I が次のように定まる：

$$\mathbf{P}_I = \mathbf{k}_X k_I^X. \quad (5.1.126)$$

以上の情報により、ゲージ超組とハイパー超組からなる系の超共形不変な作用積分 $\mathcal{L} = \mathcal{L}_g + \mathcal{L}_h$ が定まる（具体的表式は省略）。

部分ゲージ固定 次の条件により、 (K_a, D, S_i) に対応するゲージ自由度を固定する：

$$\text{K-gauge} : b_\mu = 0, \quad (5.1.127a)$$

$$\text{D-gauge} : -\frac{1}{6}N - \frac{1}{12}k_D^2 = \frac{1}{2}\kappa^{-2}, \quad (5.1.127b)$$

$$\text{S-gauge} : N_{IJ} X^J \Omega^{iI} + id^{\bar{A}}_{\ B} A^{iB} \zeta_{\bar{A}} = 0. \quad (5.1.127c)$$

ここで、

$$A^{iA} \equiv f^{iA}_X k_D^X. \quad (5.1.128)$$

D-gauge 条件と

$$|\theta|^{-1} \mathcal{L} = \left(-\frac{1}{6}N - \frac{1}{12}k_D^2 \right) R + \left(-N + \frac{1}{4}k_D^2 \right) D + \dots \quad (5.1.129)$$

より得られる、補助場 D に関する場の方程式より

$$N = -\kappa^{-2}, \quad k_D^2 = -4\kappa^{-2}. \quad (5.1.130)$$

また、S-gauge 条件と場の方程式

$$N_{IJ}X^I\Omega^{iJ} - 2i = 0 \quad (5.1.131)$$

より、

$$N_{IJ}X^I\Omega^{iJ} = 0, \quad d^{\bar{A}}{}_B A^{iB} \zeta_{\bar{A}} = 0. \quad (5.1.132)$$

§5.2

*超対称ブラックホール解

5.2.1 4次元 $\mathcal{N} = 2$ 純超重力理論

基本場と作用積分

4次元 $\mathcal{N} = 2$ 純超重力理論に含まれる基本は、時空計量（フレーム場） $g_{\mu\nu}(\theta_\mu^a)$ 、2個の左巻きス Rarita-Schwinger 場 $\psi_\mu^A (A = 1, 2)$ 、重力光子場と呼ばれる可換ゲージ場 A_μ からなる。

ゲージ場 $A_\mu = A_\mu^0$ の結合係数は、前ポテンシャル

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2}\alpha(X^0)^2 \Rightarrow \mathcal{F}_0 = \alpha X^0, \mathcal{F}_{00} = \alpha \Rightarrow N_{00} = 2\text{Im}(\mathcal{F}_{00}) = 2\alpha_2 \quad (5.2.1)$$

ここで、 α は定数で、 $\alpha = -i$ と選ぶと、ゲージ場に対する標準的な運動項が得られる。実際、ゲージ結合関数は

$$\mathcal{N}_{00} = \bar{\mathcal{F}}_{00} + iN_{00} = \alpha \quad (5.2.2)$$

より、運動項は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_A &= -\frac{i}{4}\mathcal{N}_{00}F_{\mu\nu}^{+0}F^{+0\mu\nu} + \text{h.c.} = -\frac{i\alpha}{8}\left((F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - iF_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu})\right) + \text{h.c.} \\ &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

以上より、系のラグランジュ密度は

$$|\theta|^{-1}\mathcal{L} = \frac{1}{\kappa^2}\left(\frac{1}{2}R_s - \bar{\psi}_{A\mu}\gamma^{\mu\nu\rho}D_\nu\psi_\rho^A\right) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (5.2.4)$$

超対称変換

ゲージ固定条件

$$V = \begin{pmatrix} X^0 \\ F_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^0 \\ \alpha X^0 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{i}{\kappa^2} = \langle V, \bar{V} \rangle = (\bar{\alpha} - \alpha)|X^0|^2 = 2i|X^0|^2 \quad (5.2.5)$$

より、 ψ_μ^A の位相を適当に再定義することにより、

$$X^0 = |X^0| = \frac{1}{\sqrt{2}\kappa} \quad (5.2.6)$$

これより,

$$T_{ab}^+ = -4\kappa^2 \bar{X}^0 \text{Im}(\mathcal{N}_{00}) F_{ab}^+ = 2\sqrt{2}\kappa F_{ab}^+ \quad (5.2.7)$$

となるので, 基本場の超対称変換は, $\epsilon^A (A=1, 2)$ を左巻きカイラルスピノールで表された超対称変換のグラスマンパラメータ, $\epsilon_A = (\epsilon^A)^C$ として,

$$\delta\theta_\mu^a = \frac{1}{2}\bar{\epsilon}^A \gamma^a \psi_{\mu A} + \text{h.c.}, \quad (5.2.8a)$$

$$\delta A_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}\kappa} \varepsilon^{AB} \bar{\epsilon}_A \psi_{\mu B}, \quad (5.2.8b)$$

$$\delta\psi_\mu^A = \left(\partial_\mu + \frac{1}{4}\omega_\mu^{ab} \gamma_{ab}\right) \epsilon^A - \frac{\sqrt{2}}{8} \kappa \gamma^{ab} F_{ab} \varepsilon^{AB} \gamma_\mu \epsilon_B. \quad (5.2.8c)$$

キリングスピノールとキリングベクトルの対応

この項では, ϵ^A を可換な量として扱う. このとき, Killing スピノール方程式より

$$D_\mu \epsilon^A = \frac{\sqrt{2}}{8} \kappa F_{ab} \gamma^{ab} \varepsilon^{AB} \gamma_\mu \epsilon_B, \quad (5.2.9a)$$

$$\overline{D_\mu \epsilon_A} = \frac{\sqrt{2}}{8} \kappa \bar{\epsilon}^B \varepsilon_{AB} \gamma_\mu \gamma^{ab} F_{ab} \quad (5.2.9b)$$

が成り立つので,

$$\nabla_\mu (\bar{\epsilon}_A \gamma_\nu \epsilon^B) = \frac{\sqrt{2}}{8} \kappa F_{ab} (\bar{\epsilon}_A \gamma_\nu \gamma^{ab} \gamma_\mu \epsilon^C \varepsilon^{BC} + \varepsilon_{AC} \bar{\epsilon}^C \gamma_\mu \gamma^{ab} \gamma_\nu \epsilon^B) \quad (5.2.10)$$

ここで,

$$\gamma^{(\mu} \gamma^{ab} \gamma^{\nu)} = g_{\mu\nu} \gamma^{ab}, \quad (5.2.11)$$

$$\bar{\epsilon}_A \gamma^{ab} \epsilon_B = \bar{\epsilon}_B \gamma^{ab} \epsilon_A. \quad (5.2.12)$$

また,

$$(\bar{\epsilon}_A \gamma_\mu \epsilon^B)^\dagger = -\bar{\epsilon}_B \gamma_\mu \epsilon^A. \quad (5.2.13)$$

よって,

$$k_\mu \equiv i\bar{\epsilon}_A \gamma_\mu \epsilon^A \quad (5.2.14)$$

は実ベクトルで,

$$\nabla_\mu k_\nu + \nabla_\nu k_\mu = 0. \quad (5.2.15)$$

すなわち, k_μ は Killing ベクトルとなる.

ここで, 任意の未来向きの時間的ベクトル場 V に対して,

$$k \cdot V = V_0 (\epsilon^A)^\dagger (1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{V}/V_0) \epsilon^A < 0 \quad (5.2.16)$$

が常に成り立つので, k^μ は未来向きの時間的ないし光的ベクトル場となる.

静的解

未来向きの時間的ないし光的ベクトル場が大域的に存在するので、ブラックホール解があるとするとき非回転的。そこで、時空およびベクトル場が静的だとすると、

$$ds^2 = -e^{2U(\mathbf{x})} dt^2 + e^{-2U(\mathbf{x})} d\mathbf{x}^2, \quad (5.2.17a)$$

$$A = A_t(\mathbf{x}) dt \Rightarrow F = -\partial_i A_t dt \wedge dx^i. \quad (5.2.17b)$$

ゼロでない Christoffel 接続係数は

$$\{^t_{tt}\} = \partial_i U, \quad \{^i_{tt}\} = \partial_i U e^{4U}, \quad \{^i_{jk}\} = \partial_i \delta_{jk} - 2\delta^i_{(j} \partial_{k)} U. \quad (5.2.18)$$

スピン接続係数は、フレーム基底を

$$\theta^0 = e^U dt, \quad \theta^i = e^{-U} dx^i \quad (5.2.19)$$

と取るとき、

$$\omega^0_o = e^{2U} \partial_i U dt, \quad \omega_{ij} = -2\delta_{k[i} \partial_{j]} U dx^k. \quad (5.2.20)$$

Ricci 曲率テンソルは

$$R_{00} = e^{2U} \hat{\Delta} U, \quad R_{0i} = 0, \quad R_{ij} = e^{2U} \left(-2\partial_i U \partial_j U + \hat{\Delta} U \delta_{ij} \right), \quad (5.2.21)$$

キリングスピノール方程式は

$$\delta\psi_t^A = \frac{1}{2} e^U \left(\hat{X} \gamma^0 \epsilon^A - \hat{Y} \epsilon^{AB} \epsilon_B \right) = 0, \quad (5.2.22a)$$

$$\delta\psi_i^A = \left(\partial_i + \frac{1}{2} \partial_i U \right) \epsilon^A + \frac{\sqrt{2}}{2} \kappa e^{-U} \partial_i A_t \gamma^0 \epsilon^{AB} \epsilon_B = 0. \quad (5.2.22b)$$

ここで、

$$\hat{X} = e^U \partial_j U \gamma^j, \quad \hat{Y} = \frac{\sqrt{2}}{2} \kappa \partial_j A_t \gamma^j. \quad (5.2.23)$$

第1式より、およびその荷電共役より

$$\hat{X} \gamma^0 \epsilon^A = \hat{Y} \epsilon^{AB} \epsilon_B, \quad (5.2.24a)$$

$$\hat{Y} \gamma^{\hat{k}} \epsilon^A = \hat{X} \epsilon^{AB} \epsilon_B. \quad (5.2.24b)$$

これらより、

$$2X \cdot Y \gamma^0 \epsilon^A = (X^2 + Y^2) \epsilon^{AB} \epsilon_B \quad (5.2.25)$$

よって、

$$\epsilon^{AB} \epsilon_B = c \gamma^0 \epsilon^A \Rightarrow X = cY. \quad (5.2.26)$$

すなわち、

$$\frac{\kappa}{\sqrt{2}} c A_t = e^U. \quad (5.2.27)$$

これを $\delta\psi_i^A = 0$ に代入すると,

$$\delta\psi_i^A = (\partial_i - \frac{1}{2}\partial_i U) \epsilon^A = 0 \Rightarrow \epsilon^A = e^{U/2} \epsilon_{(0)}^A. \quad (5.2.28)$$

ここで, $\epsilon_{(0)}^A$ は次の条件を満たす定数:

$$\epsilon_{(0)}^2 = \frac{1}{c} \gamma^0 (\epsilon_{(0)}^1)^C. \quad (5.2.29)$$

Maxwell 方程式は

$$*F = \frac{1}{2} e^{=2U} \hat{\epsilon}_{ijk} \partial_i A_t dx^j \wedge dx^k \quad (5.2.30)$$

より

$$d *F = \hat{\nabla} \cdot (e^{-2U} \hat{\nabla} A_t) d^3x = 0 \quad (5.2.31)$$

上記の A_t の表式を代入すると,

$$\hat{\Delta}(e^{-U}) = 0. \quad (5.2.32)$$

最後に, 非自明なアインシュタイン方程式は,

$$G_0^0 = e^{2U} \left[(\hat{\nabla} U)^2 - 2\hat{\Delta} U \right] = -e^{2U} (\hat{\nabla} U)^2, \quad (5.2.33a)$$

$$G_j^i = e^{2U} \left[(\hat{\nabla} U)^2 \delta_{ij} - 2\partial_i U \partial_j U \right], \quad (5.2.33b)$$

$$R_s = 2e^{3U} \hat{\Delta} e^{-U} \quad (5.2.33c)$$

および

$$T_{\mu\nu} = F_{\mu\alpha} F_\nu^\alpha - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} F \cdot F; \quad (5.2.34)$$

$$T_0^0 = -\frac{1}{2} (\hat{\nabla} A_t)^2, \quad T_j^i = -\partial_i A_t \partial_j A_t + \frac{1}{2} \delta_{ij} (\hat{\nabla} A_t)^2 \quad (5.2.35)$$

より,

$$G_j^i = \kappa^2 T_j^i = \frac{1}{c^2} e^{2U} \left[(\hat{\nabla} U)^2 \delta_{ij} - 2\partial_i U \partial_j U \right] \quad (5.2.36)$$

よって, $c = \pm 1$ となる. 以上より, この理論の静的で超対称な一般解は, **Papapetrou-Majumdar** 解となり, 1/2BPS 解となる:

$$A_t = \pm \frac{\sqrt{2}}{\kappa} e^U, \quad \hat{\Delta} e^{-U} = 0. \quad (5.2.37)$$

5.2.2 4次元 $\mathcal{N} = 2$ $n_V = 1$ 超重力理論

基本場

$$\begin{aligned} \text{重力超組} &: \theta_\mu^a, \psi_\mu^A (A = 1, 2), A_\mu^0, \\ \text{ベクトル超組} &: A_\mu^1, \lambda^A (A = 1, 2), z \end{aligned}$$

ここで, $\lambda^A = P_L \lambda^A$, $\lambda_A = (\lambda^A)^C$.

前ポテンシャル

$$\mathcal{F}(X) = -\frac{i}{\kappa^2} X^0 X^1. \quad (5.2.38)$$

これより,

$$V = \mathcal{T}(X^I, \mathcal{F}_I); \quad \mathcal{F}_0 = -\frac{i}{\kappa^2} X^1, \quad \mathcal{F}_1 = -\frac{i}{\kappa^2} X^0. \quad (5.2.39)$$

共形対称性に対するゲージ固定条件は

$$\begin{aligned} \langle V, \bar{V} \rangle &= \frac{2i}{\kappa^2} (X^0 \bar{X}^1 + \bar{X}^0 X^1) = \frac{i}{\kappa^2} \\ \Leftrightarrow X^0 \bar{X}^1 + \bar{X}^0 X^1 &= \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (5.2.40)$$

ケーラーポテンシャル

$$v = \mathcal{T}(Z^0, Z^1, \tilde{\mathcal{F}}_0, \tilde{\mathcal{F}}_1) = \mathcal{T}(1, -iz, -z/\kappa^2, -i/\kappa^2) \quad (5.2.41)$$

より

$$e^{-\kappa^2 \mathcal{K}} \equiv -i\kappa^2 \langle v, \bar{v} \rangle = 4\text{Im}(z) \quad (5.2.42)$$

これより, スカラー場 z に対する計量は

$$g_{z\bar{z}} = \frac{1}{4\kappa^2 (\text{Im}(z))^2}. \quad (5.2.43)$$

ゲージ結合関数

$$(\mathcal{F}_{IJ}) = -\frac{i}{\kappa^2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (N_{IJ}) = -\frac{2}{\kappa^2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.2.44)$$

より

$$N_{IJ}X^J = -\frac{2}{\kappa^2} \eta(X^1, X^0), \quad N_{IJ}X^I X^J = -\frac{4}{\kappa^2} X^0 X^1. \quad (5.2.45)$$

よって, 一般公式より

$$\mathcal{N}_{00} = \frac{i}{\kappa^2} \frac{X^1}{X^0}, \quad \mathcal{N}_{01} = 0, \quad \mathcal{N}_{11} = \frac{i}{\kappa^2} \frac{X^0}{X^1}. \quad (5.2.46)$$

すなわち,

$$(\mathcal{N}_{IJ}) = \frac{1}{\kappa^2} \begin{pmatrix} -z & 0 \\ 0 & 1/z \end{pmatrix}. \quad (5.2.47)$$

以上より, ラグランジュ密度関数は

$$\begin{aligned} |\theta|^{-1} \kappa^2 \mathcal{L} &= \frac{1}{2} R_s - \bar{\psi}_{A\mu} \gamma^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu D_\lambda \psi^A \\ &\quad - \frac{1}{4} \frac{\nabla z \cdot \nabla \bar{z}}{(\text{Im}(z))^2} - \frac{1}{16(\text{Im}(z))^2} (\bar{\chi}_A \not{D} \chi^A + \text{h.c.}) \\ &\quad + \frac{1}{8(\text{Im}(z))^2} (\bar{\psi}_{A\mu} \not{\partial} z \gamma^\mu \chi^A + \text{h.c.}) \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(-iz F^+ \cdot F^+ + \frac{i}{z} F'^+ \cdot F'^+ + \text{h.c.} \right) \end{aligned} \quad (5.2.48)$$

ここで,

$$-if(z) F^+ \cdot F^+ = \text{Im}(f) F \cdot F - \text{Re}(f) F \cdot \tilde{F}. \quad (5.2.49)$$

特に, $z = ie^{-2\phi}$ のセクターでは,

$$2\kappa^2 |\theta|^{-1} \mathcal{L} = R_s - 2(\nabla\phi)^2 - e^{-2\phi} (F \cdot F + F' \cdot F'). \quad (5.2.50)$$

5.2.3 BH アトラクター解

$\mathcal{N} = 2, n_v = 1$ の4次元超重力理論は、次の解をもつ：

$$ds^2 = -e^{2U(r)} dt^2 + e^{-2U(r)} (dr^2 + r^2 d\Omega^2), \quad (5.2.51a)$$

$$F = \pm d(H_1^{-1}) \wedge dt, \quad (5.2.51b)$$

$$G' = -e^{-2\phi} *F' = \mp d(H_2^{-1}) \wedge dt, \quad (5.2.51c)$$

$$H_1 = e^{-\phi_0} + \frac{|q|}{4\pi r}, \quad H_2 = e^{\phi_0} + \frac{|p'|}{4\pi r}, \quad (5.2.51d)$$

$$e^{-2U} = H_1 H_2, \quad e^{-3\phi} = H_1 / H_2. \quad (5.2.51e)$$

この解は、(1/2)BPS 解で、 $\phi_0 = \phi(r = \infty)$ とおくとき、

$$8\pi GM = e^{-\phi_0} |p'| + e^{\phi_0} |q| \quad (5.2.52)$$

が成り立つ。また、ホライズンの特性は、電荷 p, q' のみで決まり、 ϕ_0 に依らないという性質（アトラクター性）をもつ：

$$(e^{-2\phi})_{\text{hor}} = \lim_{r \rightarrow 0} e^{-2\phi} = \frac{|q|}{|p'|}, \quad (5.2.53a)$$

$$A_{\text{hor}} = 4\pi \lim_{r \rightarrow 0} r^2 e^{-2U} = \frac{|qp'|}{4\pi}. \quad (5.2.53b)$$

【Exercise 5.2.1】 静的で球対称な配位に対して、場の方程式を解いて、以上のことを証明せよ。 □

Answer. 静的で球対称で, F が電荷のみ, F' が磁化のみを持つとすると,

$$F = \pm d(H_1(r)^{-1}) \wedge dt, \quad G' = -e^{-2\phi} *F' = \pm d(H_2(r)^{-1}) \wedge dt \quad (5.2.54)$$

と表される. これらは, $dF = dG' = 0$ を満たすので, 残りのゲージ場の方程式は

$$G = -e^{-2\phi} *F = \pm e^{-2\phi} \frac{H_1'}{H_1^2} e^{-2U} r^2 d\theta \sin\theta \wedge d\phi, \quad (5.2.55a)$$

$$F' = e^{2\phi} *G' = \mp e^{2\phi} \frac{H_2'}{H_2^2} e^{-2U} r^2 d\theta \sin\theta \wedge d\phi \quad (5.2.55b)$$

より,

$$dG = 0 \Leftrightarrow e^{-2\phi-2U} \frac{r^2 H_1'}{H_1^2} = \pm \frac{q}{4\pi}, \quad (5.2.56a)$$

$$dF' = 0 \Leftrightarrow e^{2\phi-2U} \frac{r^2 H_2'}{H_2^2} = \pm \frac{p'}{4\pi}. \quad (5.2.56b)$$

ここで,

$$q = \int_{S^2} G, \quad p' = \int_{S^2} F'. \quad (5.2.57)$$

次に, スカラー場の方程式

$$2\Box\phi + e^{-2\phi}(F \cdot F + F' \cdot F') = 0 \quad (5.2.58)$$

は,

$$r^2(r^2\phi')' + \frac{1}{2(4\pi)^2} e^{2U} ((p')^2 e^{-2\phi} - q^2 e^{2\phi}) = 0. \quad (5.2.59)$$

Einstein テンソルは

$$G_0^0 = -e^{2U} \left(-(U')^2 + 2U'' + \frac{4}{r}U' \right), \quad (5.2.60a)$$

$$-G_r^r = G_\theta^\theta = G_\phi^\phi = (U')^2 e^{2U}, \quad (5.2.60b)$$

$$R_s = 2e^{2U} \left(-(U')^2 + U'' + \frac{2}{r}U' \right). \quad (5.2.60c)$$

エネルギー運動量テンソル

$$\begin{aligned} \kappa^2 T_{\mu\nu} &= 2\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - g_{\mu\nu}(\nabla\phi)^2 \\ &+ e^{-2\phi} \left(F_{\mu\alpha}F_\nu^\alpha - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}F \cdot F + F'_{\mu\alpha}F'^\alpha_\nu - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}F' \cdot F' \right) \end{aligned} \quad (5.2.61)$$

の成分は

$$\kappa^2 T_0^0 = -e^{2U}(\phi')^2 - \frac{1}{2}e^{-2\phi} \left[\left(\frac{H_1'}{H_1^2} \right)^2 + e^{4\phi} \left(\frac{H_2'}{H_2^2} \right)^2 \right], \quad (5.2.62a)$$

$$\begin{aligned} -\kappa^2 T_r^r &= \kappa^2 T_\theta^\theta = \kappa^2 T_\phi^\phi \\ &= -e^{2U}(\phi')^2 + \frac{1}{2}e^{-2\phi} \left[\left(\frac{H_1'}{H_1^2} \right)^2 + e^{4\phi} \left(\frac{H_2'}{H_2^2} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (5.2.62b)$$

$$\kappa^2 T_\mu^\mu = -2e^{2U}(\phi')^2 - 2 \quad (5.2.62c)$$

よって、スカラー場に対する方程式および Einstein 方程式のなかで、独立な方程式は、 $u = 1/r$ として

$$\partial_u^2 U - (\partial_u U)^2 = (\partial_u \phi)^2, \quad (5.2.63a)$$

$$\partial_u^2 U = \frac{1}{2(4\pi)^2} e^{2U} (q^2 e^{2\phi} + p'^2 e^{-2\phi}), \quad (5.2.63b)$$

$$\partial_u^2 \phi = \frac{1}{2(4\pi)^2} e^{2U} (q^2 e^{2\phi} - p'^2 e^{-2\phi}). \quad (5.2.63c)$$

これらの第2式および第3式より

$$\partial_u^2 (U + \phi) = \left(\frac{q}{4\pi} \right)^2 e^{2(U+\phi)}, \quad \partial_u^2 (U - \phi) = \left(\frac{p'}{4\pi} \right)^2 e^{2(U-\phi)} \quad (5.2.64)$$

これらの方程式の $0 < u < \infty$ で正則な解は

$$e^{U+\phi} = \left(e^{-\phi_0} + \frac{|q|}{4\pi r} \right)^{-1}, \quad e^{U-\phi} = \left(e^{\phi_0} + \frac{|p'|}{4\pi r} \right)^{-1}. \quad (5.2.65)$$

これをゲージ場の方程式に代入すると

$$H_1 = e^{\phi_0} + \frac{|q|}{4\pi r}, \quad H_2 = e^{-\phi_0} + \frac{|p'|}{4\pi r} \quad (5.2.66)$$

を得る.

Q.E.D.

A

超代数と超群

Basic References

- Cornwell JF: “Group Theory in Physics” (Elsevier, 1989)
vol. III “Supersymmetries and Infinite-Dimensional Algebra”
- Kac V: Adv. Math. 26, 8-96 (1977)
“Lie superalgebras”

§A.1

超代数

【Definition A.1.1 (超環)】 環 $(R, +, \cdot)$ は, その \mathbb{Z}_2 次数付け, すなわち加法群としての直和分解 $R = R_0 \oplus R_1$ が与えられ, $R_\alpha \cdot R_\beta \subset R_{\alpha+\beta}$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_2$) が成り立つとき, 超環 (super-ring) という.

超環 R において, $a \in R_0$ ないし $a \in R_1$ となる元を斉次元 (homogeneous element) といい, その全体を $h(R)$ で表す. また, $a \in h(R)$ の次数 $|a|$ を,

$$| \cdot | : h(R) \rightarrow \mathbb{Z}_2; \quad a \mapsto \alpha \Leftrightarrow a \in R_\alpha$$

により定義する.

さらに, 超環 R において, 常に

$$ab = (-1)^{|a||b|}ba$$

が成り立つとき, R は可換 (commutative) であるという. □

【Definition A.1.2 (結合的超代数)】 \mathbb{Z}_2 次数付き代数 $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1$ は、その積演算が結合的であるとき結合的超代数という。 \square

【Definition A.1.3 (可換超代数)】 結合的超代数 $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1$ において、

$$ab = (-1)^{\deg a \deg b} ba$$

が成り立つとき、 \mathcal{A} を可換超代数という。 \square

【Example A.1.4 (外積代数)】 \mathbb{F} 係数 L 次元線形空間 $V(\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C})$ から作られる外積代数 $\wedge V$ を $\mathbb{F}B_L$ と表し、その偶元の次数を 0、奇元の次数を 1 とおくと、可換超代数が得られる。これは、Grassmann 代数に単位元を付加したものと一致する。 \square

【Example A.1.5 (行列超代数)】

1. \mathbb{F} を係数とする $p + q$ 次の正方行列の全体 $M(p + q, \mathbb{F})$ の作る代数に、

$$\text{次数 } 0: \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \quad A \in M(p, \mathbb{F}), D \in M(q, \mathbb{F})$$

$$\text{次数 } 1: \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \quad B \in M(p, q, \mathbb{F}), C \in M(q, p, \mathbb{F})$$

により \mathbb{Z}_2 次数を定義すると、結合的超代数が得られる。この超代数を $M(p|q, \mathbb{F})$ と表す。

2. (超転置) 行列超代数における M の転置を

$$\text{st}M := \begin{pmatrix} {}^T A & {}^T C \\ -{}^T B & {}^T D \end{pmatrix}$$

により定義する。このとき、次の性質がなりたつ：

$$\text{st}(MN) = \text{st}N \text{st}M,$$

3. (超トレース) 超代数としての行列のトレースを

$$\text{str}M := \text{Tr}A - \text{Tr}D$$

で定義する。このとき、次の性質が成り立つ。

$$\text{str}(MN) = \text{str}(NM),$$

$$\text{str}(\text{st}M) = \text{str}M,$$

$$\text{str}(SMS^{-1}) = \text{str}M.$$

\square

§A.2

Lie 超代数

【Definition A.2.1 (Lie 超代数)】 \mathbb{Z}_2 次数付き線形空間 $\mathcal{L}_s = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1$ に次の性質をもつ積 $[a, b]$ が定義されているとき, \mathcal{L}_s を Lie 超代数という:

i) a, b がそれぞれ同次元のとき,

$$\deg([a, b]) = \deg a + \deg b.$$

ii) $a, b, c \in \mathcal{L}_s$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$ のとき,

$$[\alpha a + \beta b, c] = \alpha[a, c] + \beta[b, c].$$

iii) a, b が同次元のとき,

$$[b, a] = -(-1)^{\deg a \deg b} [a, b].$$

iv) a, b, c が同次元のとき

$$[a, [b, c]](-1)^{\deg a \deg c} + [b, [c, a]](-1)^{\deg b \deg a} + [c, [a, b]](-1)^{\deg c \deg b} = 0.$$

□

【Example A.2.2 (行列の Lie 超代数)】 行列の超代数 $M(p|q, \mathbb{F})$ ($\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$) において

$$[M, N] := MN - (-1)^{\deg M \deg N} NM$$

とおくと, この超交換子に対して $M(p|q, \mathbb{F})$ は Lie 超代数となる.

さらに,

$$\mathfrak{sl}(p|q; \mathbb{F}) := \{M \in M(p|q, \mathbb{F}) \mid \text{str} M = 0\}$$

は, $M(p|q; \mathbb{F})$ の部分 Lie 超代数となる. また,

$$K := \begin{pmatrix} 1_p & 0 \\ 0 & J_q \end{pmatrix}; \quad J_q := \begin{pmatrix} 0 & 1_{q/2} \\ -1_{q/2} & 0 \end{pmatrix}$$

で定義される $K \in M(p|q; \mathbb{F})$ を用いて,

$$\mathfrak{osp}(p|q; \mathbb{F}) := \{M \in M(p|q, \mathbb{F}) \mid {}^{\text{st}}M K + (-1)^{\deg M} K M = 0\}$$

とおくと, 次数ゼロの部分が

$$\mathcal{L}_0 = \mathfrak{so}(p) \oplus \mathfrak{sp}(q/2, \mathbb{F})$$

となる直交シンプレクティック Lie 超代数が得られる. □

A.2.1 分類

【Definition A.2.3 (可解および半単純 Lie 超代数)】 Lie 超代数 \mathcal{L} に対して,

1. Lie 代数と同様に, $\mathcal{L}^{(0)} = \mathcal{L}$, $\mathcal{L}^{(k)} = [\mathcal{L}^{(k-1)}, \mathcal{L}^{(k-1)}]$ ($k = 1, 2, \dots$) と置くととき, $\mathcal{L}^{(k)} = 0$ となる k が存在するとき, \mathcal{L} は可解 (solvable) であるという.
2. \mathcal{L} の極大可解イデアルがゼロイデアルとなるとき, \mathcal{L} は半単純 (semi-simple) であるという.

□

【Theorem A.2.4 (基本構造定理)】 \mathcal{L} を有限次元 Lie 超代数, \mathcal{R} を \mathcal{L} の極大可解イデアルとするととき, \mathcal{L}/\mathcal{R} は半単純となる. □

A.2.2 表現

【Definition A.2.5 (Lie 超代数の次数付き表現)】

1. Lie 超代数 \mathcal{L}_s から, 行列の作る Lie 超代数 $M(p|q, \mathbb{F})$ への Lie 超代数としての準同型 Γ を, \mathcal{L}_s の次数付き表現という.
2. $V = V_0 \oplus V_1$ を次数付きベクトル空間とするととき, $\text{End}(V)$ に行列 Lie 超代数 $M(p|q)$ ($p = \dim(V_0), q = \dim(V_1)$) と同型な Lie 超代数の構造が入る. この Lie 超代数を $\mathfrak{gl}(V)$ と記すとき, \mathcal{L} の次数付き表現は, Lie 超代数としての準同型 $\rho: \mathcal{L} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ と同一視できる. また, このとき, V は次数付き \mathcal{L} -加群となる.

□

【Theorem A.2.6 (Lie 超代数における Ado の定理)】 すべての有限次元 Lie 超代数は, 忠実な (次数付き) 表現をもつ. [Kac VG 1977[46]] □

【Definition A.2.7 (誘導表現)】 \mathcal{L} を Lie 超代数, \mathcal{H} をその部分超代数, V を \mathcal{H} -加群とする. このとき,

$$\text{Ind}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{L}}(V) = U(\mathcal{L}) \otimes_{U(\mathcal{H})} V \quad (\text{A.2.1})$$

により定義される \mathcal{L} -加群を, \mathcal{H} -加群から誘導された \mathcal{L} -加群と呼ぶ. ここで, $U(\mathcal{L})$ は \mathcal{L} の普遍包絡環である.

□

【Proposition A.2.8 (誘導表現の性質)】

- a) \mathcal{L} を Lie 超代数, \mathcal{H} をその部分超代数, V を単純 \mathcal{L} -加群, W をその \mathcal{H} -部分加群とする. このとき, V は誘導 \mathcal{L} -加群の因子加群である. すなわち, \mathcal{L} の任意の既約表現は, その部分超代数の表現から誘導される表現の既約分解により得られる.
- b) $\mathcal{H}_2 \subset \mathcal{H}_1$ を \mathcal{L} の部分超代数, W を \mathcal{H}_2 -加群とすると,

$$\mathrm{Ind}_{\mathcal{H}_1}^{\mathcal{L}}(\mathrm{Ind}_{\mathcal{H}_2}^{\mathcal{H}_1} W) \cong \mathrm{Ind}_{\mathcal{H}_2}^{\mathcal{L}}(W). \quad (\text{A.2.2})$$

- c) \mathcal{H} を $\mathcal{H}_0 \supset \mathcal{L}_0$ となる Lie 超代数 $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 \oplus \mathcal{L}_1$ の部分超代数, $g_1, \dots, g_t \in \mathcal{L}_1$ を \mathcal{L}/\mathcal{H} の基底 $[g_1], \dots, [g_t]$ の代表元とする. このとき, \mathcal{H} -部分加群 W に対して,

$$\mathrm{Ind}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{L}}(W) = \bigoplus_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_t} g_{i_1} \cdots g_{i_t} W \quad (\text{A.2.3})$$

が成り立つ. 特に, $\dim \mathrm{Ind}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{L}}(W) = 2^t \dim W$.

[Kac VG 1977[46]]

□

§A.3

可解 Lie 超代数

【Definition A.3.1】

1) Lie 超代数 $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 \oplus \mathcal{L}_1$ に対し、その上の線形汎関数 $l \in \mathcal{L}^*$ が $l([\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_0]) = l(\mathcal{L}_1) = 0$ を満たすとき、卓越している (distinguished) という。卓越した線形汎関数の全体を $L(\mathcal{L})$ 、あるいは単に L と表記する。さらに、 $L_0 = \{l \in L \mid l([\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_1]) = 0\}$ 、 \mathcal{L} の随伴表現の 1 次元因子から定義される L_0 の元で生成される L_0 の部分空間を L_1 と表す。

2) $l \in L$ に対して、 \mathcal{L} の部分空間 \mathcal{L}_l を

$$\mathcal{L}_l = \{g \in \mathcal{L} \mid l([g, g']) = 0 \forall g' \in \mathcal{L}\} \quad (\text{A.3.1})$$

により定義する。このとき、 $\mathcal{L}_l \subset \mathcal{P}$ および $l([\mathcal{P}, \mathcal{P}]) = 0$ を満たす \mathcal{L} の部分超代数 \mathcal{P} を l に随伴する (subordinate) 部分超代数と呼ぶ。

□

【Theorem A.3.2 (可解 Lie 超代数の規約表現と卓越した線形汎関数の対応)】

$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 \oplus \mathcal{L}_1$ を可解 Lie 超代数とする。

- a) ($V \Rightarrow l_V \in L/L_0$) 有限次元既約 \mathcal{L} -加群 V に対して、 \mathcal{L}_0 -加群としての V の各既約成分 V_i は常に 1 次元である。それらを $V_i = l_i(X)v_i (X \in \mathcal{L}_0)$ と表し、 $l_i(\mathcal{L}_1) = 0$ により l_i を $L(\mathcal{L})$ の元と見なすと、 l_i は L/L_0 において同一の類 \hat{l}_V に属する。
- b) ($l \Rightarrow V$) $l \in L(\mathcal{L})$ に対して、 \mathcal{P} を l に付随する \mathcal{L} の極大部分超代数とする。この時、 $l(X)v (X \in \mathcal{P})$ により定義される 1 次元 \mathcal{P} -加群を $\{\mathcal{P}, l\}$ と表記すると、 \mathcal{L} -加群 $V = \text{Ind}_{\mathcal{P}}^{\mathcal{L}}\{\mathcal{P}, l\}$ は有限次元単純加群で、 $l \in \hat{l}_V$ が成り立つ。また、 $l_1, l_2 \in L(\mathcal{L})$ に対応する \mathcal{L} -加群を V_1, V_2 、対応する \mathcal{L} の線形表現を ρ_1, ρ_2 とするとき、適当な $\lambda \in L_0$ に対して $\rho_1 \cong \rho_2 + \lambda$ となるための必要十分条件は $l_1 - l_2 \in L_0$ となることである。
- c) b) における対応 $l \Rightarrow V$ は、 $L(\mathcal{L})$ から有限次元既約 \mathcal{L} -加群の全体への全射を与える。
- d) \mathcal{L} を完全可解、すなわち随伴表現のすべての既約因子が 1 次元となる Lie 超代数とする。このとき、a)~c) は、 L_0 を L_1 で置き換えても成り立つ。特に、 \mathcal{L} がベキ零のとき、 $L_1 = 0$ となるので、 \mathcal{L} の有限次元既約表現と $L(\mathcal{L})$ の元が 1 対 1 に対応する。

[Kac VG 1977[46]] _____ □

【Proposition A.3.3】 $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 \oplus \mathcal{L}_1$ を可解 Lie 超代数とする.

1. $V = V_0 \oplus V_1$ を有限次元既約 \mathcal{L} -加群とすると, $\dim V_0 = \dim V_1 = 2^{s-1}$
($s \leq \dim \mathcal{L}_1$) または $\dim V = 1$.
2. \mathcal{L} のすべての有限次元既約表現が 1 次元となるための必要十分条件は, $[\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_1] \subset [\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_0]$ である.

[Kac VG 1977[46]] _____ □

§A.4

単純複素 Lie 超代数

【Definition A.4.1 (古典 Lie 超代数と Cartan 型 Lie 超代数)】 単純 Lie 超代数 $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1$ において, 代数演算により誘導される表現 $\mathcal{L}_0 \triangleright \mathcal{L}_1$ が完全可約のとき, \mathcal{L} は古典 Lie 超代数 (classical Lie superalgebra), 完全可約でないとき Cartan 型 Lie 超代数 (Cartan type Lie superalgebra) という. □

【Definition A.4.2 (簡約可能な Lie 代数)】 Lie 代数 \mathfrak{g} は, 半単純 Lie 代数と中心の直和となるとき簡約可能という. □

【Proposition A.4.3】 単純 Lie 超代数が古典的であることと, Lie 代数 \mathcal{L}_0 が簡約可能であることは同等である. □

【Theorem A.4.4 (古典複素 Lie 超代数の分類定理)】 古典単純複素 Lie 超代数は次のように分類される :

(1) 基本 (basic) 古典単純複素 Lie 超代数

(a) Killing 形式が非退化となるもの.

(i) 単純複素 Lie 代数

(ii) 次の 6 つの系列 :

$$A(m|n) = \mathfrak{sl}(m+1|n+1; \mathbb{C}), \quad m > n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$B(m|n) = \mathfrak{osp}(2m+1|2n; \mathbb{C}), \quad m = 0, 1, \dots, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$C(n) = \mathfrak{osp}(2|2n-2; \mathbb{C}), \quad n = 2, 3, \dots,$$

$$D(m|n) = \mathfrak{osp}(2m|2n; \mathbb{C}), \quad m = 2, 3, \dots, \quad n = 1, 2, \dots, \quad m \neq n+1,$$

$$F(4),$$

$$G(3).$$

(b) Killing 形式が恒等的にゼロとなるもの.

$$A(n|n) = \mathfrak{sl}(n+1|n+1; \mathbb{C}), \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$D(n+1|n) = \mathfrak{osp}(2n+2|2n; \mathbb{C}), \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$D(2|1; \alpha), \quad \alpha \in \mathbb{C} - \{0, -1, \infty\}.$$

(2) 特異 (strange) 古典単純複素 Lie 超代数

$$P(n), \quad n = 2, 3, \dots,$$

$$Q(n), \quad n = 2, 3, \dots$$

[Cornwell JF 1989[23]; Kac VG 1977[46]] _____ □

【Theorem A.4.5 (Cartan 型 Lie 超代数の分類定理)】 Cartan 型 Lie 超代数
は次の 4 つの離散系列で尽くされる :

- 1) $W(n)$ ($n = 3, 4, \dots$)
- 2) $S(n)$ ($n = 3, 4, \dots$)
- 3) $\tilde{S}(n)$ ($n = 4, 5, \dots$,)
- 4) $H(n)$ ($n = 4, 5, \dots$,)

[Cornwell JF 1989[23]; Kac VG 1977[46]] _____ □

A.4.1 古典 Lie 超代数

$\mathfrak{gl}(m|N)$: $Q \in M(m+N)$ を $A \in M(m), B \in M(m, N), C \in M(N, m), D \in M(N)$
を用いて

$$Q = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad (\text{A.4.1})$$

と表し,

$$\mathcal{L} = M(m+N), \quad (\text{A.4.2a})$$

$$\mathcal{L}_0 = \{Q \in \mathcal{L} \mid B = C = 0\}, \quad (\text{A.4.2b})$$

$$\mathcal{L}_1 = \{Q \in \mathcal{L} \mid A = D = 0\} \quad (\text{A.4.2c})$$

とおく. このとき, $[\ast, \ast]_{\pm}$ を

$$[Q_1, Q_2]_{\pm} = [Q_1, Q_2] \quad \text{for } Q_1, Q_2 \in \mathcal{L}_0, \quad (\text{A.4.3a})$$

$$[Q_1, Q_2]_{\pm} = [Q_1, Q_2] \quad \text{for } Q_1 \in \mathcal{L}_0, Q_2 \in \mathcal{L}_1, \quad (\text{A.4.3b})$$

$$[Q_1, Q_2]_{\pm} = \{Q_1, Q_2\} \quad \text{for } Q_1, Q_2 \in \mathcal{L}_1 \quad (\text{A.4.3c})$$

と定義すると, $\{\mathcal{L}, [\ast, \ast]_{\pm}\}$ は超代数 $\mathfrak{gl}(m|N)$ となる. 以下, $Q \in \mathcal{L}$ を $Q[A, D; B, C]$
と表記する.

$\mathfrak{osp}(N|2p)$: $\Omega_{(2p)}$ を条件

$$\Omega_{(2p)}^2 = -1, \quad \mathcal{T}\Omega_{(2p)} = -\Omega_{(2p)} \quad (\text{A.4.4})$$

を満たす $2p$ 次の正方行列, $G_{(N)}$ を N 次の対称正則行列とする.

$\text{osp}(N|2p)$ を次の条件を満たす $\mathfrak{gl}(N|2p)$ の部分代数として定義する：

$${}^T A G_{(N)} + G_{(N)} A = 0, \quad (\text{A.4.5a})$$

$${}^T D \Omega_{(2p)} + \Omega_{(2p)} D = 0, \quad (\text{A.4.5b})$$

$$C = \Omega_{(2p)} {}^T B G_{(N)} \quad (\text{A.4.5c})$$

このとき, $[\text{osp}(N|2p)]_0$ の生成する群 G は

$$G = O(N) \otimes \text{Sp}(p) \quad (\text{A.4.6})$$

が成り立つ.

特に,

$$\text{Sp}(2, \mathbb{C}) \cong \text{SO}(5, \mathbb{C}) \quad (\text{A.4.7})$$

より, $\text{osp}(N|4)$ の適当な実型は $\text{SO}(2, 3) \times \text{SO}(N)$ に対応する実超代数, すなわち AdS^4 上の N -拡張超代数となる. また, "宇宙項" ゼロの極限をとると, Minkowski 時空 $E^{3,1}$ 上の N -拡張超代数が得られる.

$\mathfrak{sl}(m|N)$: $\mathfrak{sl}(m|N)$ を次の条件を満たす $\mathfrak{gl}(m|N)$ の部分代数として定義する：

$$\text{Tr} A = \text{Tr} D. \quad (\text{A.4.8})$$

このとき,

$$G = \text{SL}(m, \mathbb{C}) \otimes \text{SL}(N, \mathbb{C}) \otimes \text{GL}(1, \mathbb{C}) \quad (\text{A.4.9})$$

が成り立つ.

さらに, $H_{(m)}$ を符号 (p, q) ($p + q = m$) の m 次エルミート行列, $H_{(N)}$ を正の N 次エルミート行列として, 条件

$$H_{(m)} A H_{(m)}^{-1} = -A^\dagger, \quad (\text{A.4.10a})$$

$$H_{(N)} D H_{(N)}^{-1} = -D^\dagger, \quad (\text{A.4.10b})$$

$$H_{(m)} B H_{(N)}^{-1} = -C^\dagger \quad (\text{A.4.10c})$$

を満たす $\mathfrak{sl}(m|N)$ の実部分代数を $\mathfrak{su}(p, q|N)$ とおくと,

$$G = \text{SU}(p, q) \otimes \text{SU}(N) \otimes \text{U}(1) \quad (\text{A.4.11})$$

が成り立つ.

特に,

$$\text{SU}(2, 2) \cong \text{SO}(2, 4) \quad (\text{A.4.12})$$

より, $\mathfrak{su}(2, 2|N)$ は AdS^5 上の拡張超対称代数を与える.

$P(n)$ と $Q(n)$: $P(n)$ は次の条件を満たす $\mathfrak{gl}(n|n)$ の部分代数として定義される:

$${}^T A + D = 0, \quad \text{Tr} A = 0, \quad (\text{A.4.13a})$$

$${}^T B = B, \quad {}^T C = -C. \quad (\text{A.4.13b})$$

すなわち,

$$G = \text{SL}(n, \mathbb{C}), \quad (\text{A.4.14a})$$

$$G \triangleright \mathcal{L}_1 : (2)_n + [2]_n. \quad (\text{A.4.14b})$$

また, $Q'(n)$ を次の条件を満たす $\mathfrak{sl}(n|n)$ の部分代数として定義する:

$$A = D, \quad B = C, \quad \text{Tr} B = 0. \quad (\text{A.4.15})$$

ただし, $Q'(n)$ は中心 $\{aI_{2n} \mid a \in \mathbb{C}\} \cong \mathbb{C}$ をもつので,

$$Q(n) = Q'(n)/\mathbb{C} \quad (\text{A.4.16})$$

により単純な超代数 $Q(n)$ を定義する. このとき,

$$G = \text{SL}(n, \mathbb{C}), \quad (\text{A.4.17a})$$

$$G \triangleright \mathcal{L}_1 : \text{Adjoint 表現} \quad (\text{A.4.17b})$$

となる.

$D(2, 1, \alpha), G(3), F(4)$:

1. $D(2, 1, \alpha)$

$$G = \text{SL}(2, \mathbb{C}) \otimes \text{SL}(2, \mathbb{C}) \otimes \text{SL}(2, \mathbb{C}), \quad (\text{A.4.18a})$$

$$G \triangleright \mathcal{L}_1 : (2, 2, 2). \quad (\text{A.4.18b})$$

2. $G(3)$

$$G = \text{SL}(2, \mathbb{C}) \otimes G_2, \quad (\text{A.4.19a})$$

$$G \triangleright \mathcal{L}_1 : (2, 7) \quad (\text{A.4.19b})$$

3. $F(4)$

$$G = \text{SL}(2, \mathbb{C}) \otimes \text{SO}(7, \mathbb{C}), \quad (\text{A.4.20a})$$

$$G \triangleright \mathcal{L}_1 : (2, 8) \quad (\text{A.4.20b})$$

A.4.2 Cartan 型超代数

$a_i, a_i^\dagger (i = 1, \dots, n)$ をフェルミ型生成消滅演算子とする :

$$\{a_i, a_j^\dagger\} = \delta_{ij}, \quad \{a_i, a_j\} = \{a_i^\dagger, a_j^\dagger\} = 0.$$

$W(n) (n \geq 3)$:

$$W(n) = G_{-1} \oplus G_0 \oplus G_1 \oplus \dots \oplus G_{n-1}, \quad (\text{A.4.21a})$$

$$[G_i, G_j] \subset G_{i+j}, \quad (\text{A.4.21b})$$

$$\mathcal{L}_0 = G_0 \oplus G_2 \oplus \dots, \quad \mathcal{L}_1 = G_{-1} \oplus G_1 \oplus \dots. \quad (\text{A.4.21c})$$

ここで,

$$G_{-1} = \langle a_i (i = 1, \dots, n) \rangle, \quad (\text{A.4.22a})$$

$$G_0 = \langle a_i^\dagger a_j (i, j = 1, \dots, n) \rangle, \quad (\text{A.4.22b})$$

$$G_1 = \langle a_i^\dagger a_j^\dagger a_k (i \neq j, k = 1, \dots, n) \rangle, \quad (\text{A.4.22c})$$

...

$$G_{n-1} = \langle a_1^\dagger \dots a_n^\dagger a_i (i = 1, \dots, n) \rangle. \quad (\text{A.4.22d})$$

$G_0 \cong \mathfrak{gl}(n)$ で $W(n)$ の次元は $n \cdot 2^n$. また, $W(2) = \mathfrak{sl}(2|1)$.

$S(n) (n \geq 3)$:

$$S(n) = G_{-1} \oplus G_0 \oplus G_1 \oplus \dots \oplus G_{n-2}, \quad (\text{A.4.23a})$$

$$[G_i, G_j] \subset G_{i+j}, \quad (\text{A.4.23b})$$

$$\mathcal{L}_0 = G_0 \oplus G_2 \oplus \dots, \quad \mathcal{L}_1 = G_{-1} \oplus G_1 \oplus \dots. \quad (\text{A.4.23c})$$

ここで,

$$G_{-1} = \langle a_i (i = 1, \dots, n) \rangle, \quad (\text{A.4.24a})$$

$$G_0 = \langle a_1^\dagger a_1 - a_j^\dagger a_j (j = 2, \dots, n), \\ a_i^\dagger a_j (i \neq j = 1, \dots, n) \rangle, \quad (\text{A.4.24b})$$

$$G_1 = \langle a_i^\dagger (a_1^\dagger a_1 - a_j^\dagger a_j) (i \neq j = 1, \dots, n), \\ a_1^\dagger (a_2^\dagger a_2 - a_j^\dagger a_j) (j = 3, \dots, n), \\ a_i^\dagger a_j^\dagger a_k (i \neq j \neq k = 1, \dots, n) \rangle, \quad (\text{A.4.24c})$$

$$G_2 = \langle a_i^\dagger a_j^\dagger (a_1^\dagger a_1 - a_k^\dagger a_k) (i \neq j \neq k = 1, \dots, n), \\ a_k^\dagger a_1^\dagger (a_2^\dagger a_2 - a_j^\dagger a_j) (k \neq j = 3, \dots, n), \\ a_1^\dagger a_2^\dagger (a_3^\dagger a_3 - a_j^\dagger a_j) (j = 4, \dots, n), \\ a_i^\dagger a_j^\dagger a_k^\dagger a_l (i \neq j \neq k \neq l = 1, \dots, n) \rangle, \quad (\text{A.4.24d})$$

...

$G_0 \cong \mathfrak{sl}(n)$ で $\dim(S(n)) = (n-1)2^n + 1$.

$\tilde{S}(n)$ ($n \geq 4$): $S(n)$ において, G_{-1} を次の集合で置き換えたのも :

$$G_{-1} = \langle (1 + a_1^\dagger a_2^\dagger \cdots a_n^\dagger) a_i \ (i = 1, \dots, n) \rangle. \quad (\text{A.4.25})$$

$H(n)$ ($n \geq 4$):

$$H(n) = G_{-1} \oplus G_0 \oplus G_1 \oplus \cdots \oplus G_{n-3}, \quad (\text{A.4.26a})$$

$$[G_i, G_j] \subset G_{i+j}, \quad (\text{A.4.26b})$$

$$\mathcal{L}_0 = G_0 \oplus G_2 \oplus \cdots, \quad \mathcal{L}_1 = G_{-1} \oplus G_1 \oplus \cdots. \quad (\text{A.4.26c})$$

ここで,

$$G_{-1} = \langle a_i \ (i = 1, \dots, n) \rangle, \quad (\text{A.4.27a})$$

$$G_0 = \langle a_i^\dagger a_j - a_j^\dagger a_i \ (i, j = 1, \dots, n) \rangle, \quad (\text{A.4.27b})$$

$$G_1 = \langle a_{[i}^\dagger a_j^\dagger a_k] \ (i, j, k = 1, \dots, n) \rangle, \quad (\text{A.4.27c})$$

...

$G_0 \cong \mathfrak{so}(n)$ で $\dim(H(n)) = 2^n - 2$.

§A.5

単純実 Lie 超代数

A.5.1 分類

Ref: Parker M: JMP21, 689(1980)

【Theorem A.5.1 (実古典単純 Lie 超代数と複素古典単純 Lie 超代数の関係)】

実古典単純 Lie 超代数 \mathcal{L} の複素化 $\mathcal{L} \otimes \mathbb{C}$ は、複素古典単純 Lie 超代数 \mathcal{L}' と同型であるか、またはその 2 個の直和である。後者の場合、対応する複素古典単純 Lie 超代数は実 Lie 超代数として単純である。また、この対応において、 \mathcal{L} を複素 Lie 超代数 \mathcal{L}' の実型という。 [Parker M 1980[55]] _____□

【Theorem A.5.2 (実古典単純 Lie 超代数の分類)】 古典複素単純 Lie 超代数

\mathcal{L} の実型は、複素 Lie 代数 \mathcal{L}_0 の実型により同型を除いて一意に定まり、次のいずれかで与えられる：

1. $A(m|n)$ ($m > n \geq 0$) の実型

$$\mathfrak{sl}(m+1|n+1; \mathbb{R}) : \mathcal{L}_0 = \mathfrak{sl}(m+1, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{R}) \oplus \mathbb{R},$$

$$\mathfrak{sl}\left(\frac{m+1}{2} \middle| \frac{n+1}{2}; \mathbb{H}\right) : \mathcal{L}_0 = \mathfrak{su}^*(m+1) \oplus \mathfrak{su}^*(n+1) \oplus \mathbb{R}, \quad m, n : \text{奇数},$$

$$\mathfrak{su}(m+1-p, p|n+1-q, q) : \mathcal{L}_0 = \mathfrak{su}(m+1-p, p) \oplus \mathfrak{su}(n+1-q, q) \oplus i\mathbb{R}$$

2. $A(n|n)$ ($n \geq 1$) の実型

$$\mathfrak{sl}(n+1|n+1; \mathbb{R}) : \mathcal{L}_0 = \mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{R}),$$

$$\mathfrak{sl}\left(\frac{n+1}{2} \middle| \frac{n+1}{2}; \mathbb{H}\right) : \mathcal{L}_0 = \mathfrak{su}^*(n+1) \oplus \mathfrak{su}^*(n+1), \quad n : \text{奇数},$$

$$\mathfrak{su}(n+1-p, p|n+1-p, p) : \mathcal{L}_0 = \mathfrak{su}(n+1-p, p) \oplus \mathfrak{su}(n+1-p, p),$$

$$H(4; n; \mathbb{R}) : \mathcal{L}_0 = \mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C}).$$

3. $B(m|n)$ ($m \geq 0, n \geq 1$) の実型

$$\mathfrak{osp}(2m+1-p, p|2n; \mathbb{R}) : \mathcal{L}_0 = \mathfrak{so}(2m+1-p, p) \oplus \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R}).$$

4. $C(n)$ ($n \geq 2$) の実型

$$\mathfrak{osp}(2|2n-2; \mathbb{R}) : \mathcal{L}_0 = \mathfrak{so}(2) \oplus \mathfrak{sp}(n-1, \mathbb{R}),$$

$$\mathfrak{osp}(1|n-1-p, p; \mathbb{H}) : \mathcal{L}_0 = \mathfrak{so}^*(2) \oplus \mathfrak{sp}(n-1-p, p).$$

5. $D(m|n)$ ($m \geq 2, n \geq 1$) の実型

$$\begin{aligned} \text{osp}(2m-p, p|2n; \mathbb{R}) &: \mathcal{L}_0 = \mathfrak{so}(2m-p, p) \oplus \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R}), \\ \text{osp}(m|n-p, p; \mathbb{H}) &: \mathcal{L}_0 = \mathfrak{so}^*(2m) \oplus \mathfrak{sp}(n-p, p). \end{aligned}$$

6. $P(n)$ ($n \geq 2$) の実型

$$\begin{aligned} P_I(n) &: \mathcal{L}_0 = \mathfrak{su}(n+1), \quad n : \text{odd}, \\ P_{II}(n) &: \mathcal{L}_0 = \mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{R}). \end{aligned}$$

7. $Q(n)$ ($n \geq 2$) の実型

$$\begin{aligned} Q_I(n) &: \mathcal{L}_0 = \mathfrak{su}(p, n+1-p), \\ Q_{II}(n) &: \mathcal{L}_0 = \mathfrak{su}^*(n+1), \quad n : \text{odd}, \\ Q_{III}(n) &: \mathcal{L}_0 = \mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{R}). \end{aligned}$$

8. $D(2|1; \alpha)$ の実型

$$\begin{aligned} D_I(2|1; \alpha) &: \mathcal{L}_0 = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}); \quad \alpha : \text{real}, \\ D_{II}(2|1; \alpha) &: \mathcal{L}_0 = \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}); \quad \alpha : \text{real}, \\ D_{III}(2|1; \alpha) &: \mathcal{L}_0 = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}); \quad \alpha + \bar{\alpha} = -1. \end{aligned}$$

9. $G(3)$ の実型

$$\begin{aligned} G_I(3) &: \mathcal{L}_0 = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{g}_{2,0}, \\ G_{II}(3) &: \mathcal{L}_0 = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{g}_{2,2}. \end{aligned}$$

ここで, $\mathfrak{g}_{2,0}$ は G_2 の Lie 代数のコンパクト実型 (= $\text{Aut} \mathbb{C}$), $\mathfrak{g}_{2,2}$ は非コンパクト実型.

10. $F(4)$ の実型

$$\begin{aligned} F_I(4) &: \mathcal{L}_0 = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{so}(7), \\ F_{II}(4) &: \mathcal{L}_0 = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{so}(3, 4), \\ F_{III}(4) &: \mathcal{L}_0 = \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{so}(2, 5), \\ F_{IV}(4) &: \mathcal{L}_0 = \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{so}(1, 6). \end{aligned}$$

[Parker M 1980[55]]

□

A.5.2 単純超対称代数

【Theorem A.5.3 (単純超対称代数の分類)】 古典単純実 Lie 超代数 $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1$ で、 \mathcal{L}_0 が時空対称性を表す Lie 代数 $\mathfrak{so}(D, 1), \mathfrak{so}(D - 1, 2), \mathfrak{so}(D, 2)$ を直和因子として含むものは次のものに限られる：

D	\mathcal{L}	\mathcal{L}_0	\mathcal{L}_1	複素型
2	$\mathfrak{su}(1, 1 p, N - p)$	$\mathfrak{so}(2, 1) \oplus \mathfrak{u}(p, N - p); N \neq 2$	$(2, N) + (2, \bar{N})$	$A(1 N - 1)$
	$\mathfrak{sl}(2 N; \mathbb{R})$	$\mathfrak{so}(2, 1) \oplus \mathfrak{sl}(N, \mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}; N \neq 2$	$(2, N) + (2, N)$	
	$\mathfrak{su}(1, 1 2)$	$\mathfrak{so}(2, 1) \oplus \mathfrak{su}(2)$	$(2, 2) + (2, 2)$	$A(1 1)$
	$\mathfrak{su}(1, 1 1, 1)$	$\mathfrak{so}(2, 1) \oplus \mathfrak{su}(1, 1)$	$(2, 2) + (2, 2)$	
	$\mathfrak{sl}(2 2; \mathbb{R})$	$\mathfrak{so}(2, 1) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$	$(2, 2) + (2, 2)$	
	$\mathfrak{osp}(p, N - p 2; \mathbb{R})$	$\mathfrak{so}(2, 1) \oplus \mathfrak{so}(p, N - p)$	$(2, N)$	$B/D([N/2] 1)$
	$\mathfrak{osp}(2, 1 2N; \mathbb{R})$	$\mathfrak{so}(2, 1) \oplus \mathfrak{sp}(N; \mathbb{R})$	$(3, 2N)$	$B(1 N)$
	$\mathfrak{osp}(2 p, N - p; \mathbb{H})$	$\mathfrak{so}(2, 1) \oplus \mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{sp}(p, N - p)$	$(2, 2, 2N)$	$D(2 N)$
	$D_I(2 1; \alpha)$	$\mathfrak{so}(2, 1) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$		$D(2 1; \alpha)$
	$D_{II}(2 1; \alpha)$	$\mathfrak{so}(2, 1) \oplus \mathfrak{so}(4)$	$(2, 4)$	
	$D_{III}(2 1; \alpha)$	$\mathfrak{so}(2, 1) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$		
	$G_I(3)$	$\mathfrak{so}(2, 1) \oplus \mathfrak{g}_{2,0}$	$(2, 7)$	$G(3)$
	$G_{II}(3)$	$\mathfrak{so}(2, 1) \oplus \mathfrak{g}_{2,2}$		
	$F_I(4)$	$\mathfrak{so}(2, 1) \oplus \mathfrak{so}(7)$	$(2, 8)$	$F(4)$
$F_{II}(4)$	$\mathfrak{so}(2, 1) \oplus \mathfrak{so}(3, 4)$			
3	$H(4; 1; \mathbb{R})$	$\mathfrak{so}(3, 1)$	$(2, 1) + (1, 2)$	$A(1 1)$
	$\mathfrak{osp}(3, 1 2N; \mathbb{R})$	$\mathfrak{so}(3, 1) \oplus \mathfrak{sp}(N, \mathbb{R})$		$D(2 N)$
	$\mathfrak{osp}(3 p, N - p; \mathbb{H})$	$\mathfrak{so}(3, 1) \oplus \mathfrak{sp}(p, N - p)$		$D(3 N)$
	$D_{III}(2 1; \alpha)$	$\mathfrak{so}(3, 1) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$	$\alpha + \bar{\alpha} = -1$	$D(2 1; \alpha)$
	$\mathfrak{osp}(2, 2 2N; \mathbb{R})$	$\mathfrak{so}(2, 2) \oplus \mathfrak{sp}(2, \mathbb{R})$		$D(2 N)$
4	$\mathfrak{osp}(4, 1 2N; \mathbb{R})$	$\mathfrak{so}(4, 1) \oplus \mathfrak{sp}(N, \mathbb{R})$		$B(2 N)$
	$\mathfrak{osp}(1 1, 1; \mathbb{H})$	$\mathfrak{so}(4, 1) \oplus \mathfrak{so}(1, 1)$	$4 + \bar{4}$	$C(3)$
	$\mathfrak{osp}(N 1, 1; \mathbb{H})$	$\mathfrak{so}(4, 1) \oplus \mathfrak{so}^*(2N); N \geq 2$		$D(N 2)$
	$\mathfrak{osp}(p, N - p 4; \mathbb{R})$	$\mathfrak{so}(3, 2) \oplus \mathfrak{so}(p, N - p); N \geq 1$	$(4, N)$	$B/D([N/2] 2)$
	$\mathfrak{osp}(3, 2 2N; \mathbb{R})$	$\mathfrak{so}(3, 2) \oplus \mathfrak{sp}(N, \mathbb{R})$		$B(2 N)$
	$\mathfrak{osp}(2 4; \mathbb{R})$	$\mathfrak{so}(3, 2) \oplus \mathfrak{so}(2)$		$C(5)$

D	\mathcal{L}	\mathcal{L}_0	\mathcal{L}_1	複素型
5	$\mathfrak{sl}(2 N; \mathbb{H})$ $\mathfrak{sl}(2 2; \mathbb{H})$ $\mathfrak{osp}(5, 1 2N; \mathbb{R})$ $Q_{II}(3)$ $\mathfrak{su}(2, 2 p, N-p)$ $\mathfrak{su}(2, 2 p, 4-p)$ $\mathfrak{sp}(4, 2 2N; \mathbb{R})$ $Q_I(3)$	$\mathfrak{so}(5, 1) \oplus \mathfrak{su}^*(2N) \oplus \mathfrak{u}(1)$ $\mathfrak{so}(5, 1) \oplus \mathfrak{so}(5, 1)$ $\mathfrak{so}(5, 1) \oplus \mathfrak{sp}(N, \mathbb{R})$ $\mathfrak{so}(5, 1)$ $\mathfrak{so}(4, 2) \oplus \mathfrak{u}(p, N-p); N \neq 4$ $\mathfrak{so}(4, 2) \oplus \mathfrak{su}(p, 4-p)$ $\mathfrak{so}(4, 2) \oplus \mathfrak{sp}(N, \mathbb{R})$ $\mathfrak{so}(4, 2)$	$N \neq 2$ 15_{adj} $(4, N) + (\bar{4}, \bar{N})$ $(4, 4) + (\bar{4}, \bar{4})$ 15_{ad}	$A(3 2N-1)$ $A(3 3)$ $D(3 N)$ $Q(3)$ $A(3 N-1)$ $A(3 3)$ $D(3, N)$ $Q(3)$
6	$\mathfrak{osp}(6, 1 2N; \mathbb{R})$ $F_{IV}(4)$ $\mathfrak{osp}(5, 2 2N; \mathbb{R})$ $F_{III}(4)$	$\mathfrak{so}(6, 1) \oplus \mathfrak{sp}(N, \mathbb{R})$ $\mathfrak{so}(6, 1) \oplus \mathfrak{su}(2)$ $\mathfrak{so}(5, 2) \oplus \mathfrak{sp}(N, \mathbb{R})$ $\mathfrak{so}(5, 2) \oplus \mathfrak{su}(2)$	 $(8, 2)$ $(8, 2)$	$B(3 N)$ $F(4)$ $B(3 N)$ $F(4)$
7	$\mathfrak{osp}(7, 1 2N; \mathbb{R})$ $\mathfrak{osp}(4 p, N-p; \mathbb{H})$ $\mathfrak{osp}(6, 2 2N; \mathbb{R})$	$\mathfrak{so}(7, 1) \oplus \mathfrak{sp}(N, \mathbb{R})$ $\mathfrak{so}(6, 2) \oplus \mathfrak{sp}(p, N-p)$ $\mathfrak{so}(6, 2) \oplus \mathfrak{sp}(N, \mathbb{R})$	 $(8, 2N)$	$D(4 N)$ $D(4 N)$
$2m$	$\mathfrak{osp}(2m, 1 2n; \mathbb{R})$ $\mathfrak{osp}(2m-1, 2 2n; \mathbb{R})$	$\mathfrak{so}(2m, 1) \oplus \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$ $\mathfrak{so}(2m-1, 2) \oplus \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$		$B(m n)$ $B(m n)$
$2m-1$	$\mathfrak{osp}(2m-1, 1 2n; \mathbb{R})$ $\mathfrak{osp}(2m-2, 2 2n; \mathbb{R})$	$\mathfrak{so}(2m-1, 1) \oplus \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$ $\mathfrak{so}(2m-2, 2) \oplus \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$		$D(m n)$ $D(m n)$

□

§A.6

Lie 超群

A.6.1 超行列

【Definition A.6.1 (超行列)】 可換超代数 \mathcal{A} を係数とする行列を超行列と呼ぶ。超行列 M を

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad A \in M(p, r, \mathcal{A}), B \in M(p, s, \mathcal{A}), C \in M(q, r, \mathcal{A}), D \in M(q, s, \mathcal{A})$$

と表すとき,

$$\begin{aligned} A, D \in \mathcal{A}_0, B, C \in \mathcal{A}_1 &\Rightarrow (p|q) \times (r|s) \text{ 偶超行列} \\ A, D \in \mathcal{A}_1, B, C \in \mathcal{A}_0 &\Rightarrow (p|q) \times (r|s) \text{ 奇超行列} \end{aligned}$$

と定義する。このタイプの超行列の全体を $M(p|q, r|s; \mathcal{A})$ と表す。

特に, $(p|q) \times (p|q)$ 型の超行列の集合を $M(p|q; \mathcal{A})$ と表す。これは, 結合的超代数をなす。行列超代数 $M(p|q; \mathbb{F})$ は, 自然な埋め込みにより, $M(p|q; \mathbb{F}B_L)$ の部分超代数となる。さらに, $(1|0) \times (r|s)$ 偶超行列を $(r|s)$ 超行ベクトル, $(p|q) \times (1|0)$ 偶超行列を $(p|q)$ 超列ベクトルという。 □

【Definition A.6.2 (超行列の基本演算)】

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

を超行列 $M \in M(p|q, r|s, \mathcal{A})$ とする。

i) (**Grassmann 数との積**) Grassmann 数 $E \in \mathcal{A}$ と M の積を,

$$\begin{aligned} EM &:= \begin{pmatrix} EI_p & 0 \\ 0 & (-1)^{\deg E} EI_q \end{pmatrix} M, \\ ME &:= M \begin{pmatrix} EI_r & 0 \\ 0 & (-1)^{\deg E} EI_s \end{pmatrix} \end{aligned}$$

により定義する。

ii) (超転置) M の超行列としての転置を

$$\text{st}M := \begin{pmatrix} {}^T A & (-1)^{\deg M} {}^T C \\ -(-1)^{\deg M} {}^T B & {}^T D \end{pmatrix}$$

により定義する。このとき、次の性質がなりたつ：

$$\begin{aligned} \text{st}(MN) &= (-1)^{\deg M \deg N} \text{st}N \text{st}M, \\ \text{st}(EM) &= E \text{st}(M), \quad \text{st}(ME) = \text{st}(M)E, \quad E \in \mathbb{F}B_L \end{aligned}$$

iii) (超トレース) 超行列としてのトレースを

$$\text{str}M := \text{Tr}A - (-1)^{\deg M} \text{Tr}D$$

で定義する。このとき、次の性質が成り立つ。

$$\begin{aligned} \text{str}(MN) &= (-1)^{\deg M \deg N} \text{str}(NM), \\ \text{str}(EM) &= E(\text{str}M), \quad \text{srt}(ME) = (\text{str}M)E, \\ \text{str}(\text{st}M) &= \text{str}M, \\ \text{str}(SMS^{-1}) &= \text{str}M. \end{aligned}$$

ここで、 S は可逆な $(p|q)$ 正方偶超行列である。

iv) (超行列式) M が $(p|q)$ 正方偶超行列であるとき、超行列としての行列式を

$$\text{sdet}M := \frac{\det(A - BD^{-1}C)}{\det D}$$

により定義する。このとき次の性質が成り立つ：

$$\begin{aligned} \text{sdet}(MN) &= (\text{sdet}M)(\text{sdet}N), \\ \text{sdet}(\text{st}M) &= \text{sdet}M, \\ \text{sdet}(\exp M) &= \exp(\text{str}M). \end{aligned}$$

v) (共役) $E \in \mathbb{C}B_L$ に対してその共役 E^\sharp を

$$E^\sharp := \begin{cases} E^* & E \in \mathbb{C}B_{L0} \\ -iE^* & E \in \mathbb{C}B_{L1} \end{cases}$$

により定義する。ここで、 E^* は通常の複素共役である。これを用いて、 M の共役を

$$M^\sharp := \begin{pmatrix} {}^T A^\sharp & {}^T C^\sharp \\ {}^T B^\sharp & {}^T D^\sharp \end{pmatrix}$$

と定義する。このとき、次の性質が成り立つ。

$$\begin{aligned}(MN)^\ddagger &= N^\ddagger M^\ddagger, \\ (M^\ddagger)^\ddagger &= M, \\ \text{sdet}(M^\ddagger) &= (\text{sdet}M)^\# = (\text{sdet}M)^*.\end{aligned}$$

□

A.6.2 超空間

【Definition A.6.3 (超空間)】 外積代数 $\mathbb{R}B_L = \mathbb{R}B_{L_0} + \mathbb{R}B_{L_1}$ より作られる実線形空間

$$\mathbb{R}B_L^{m,n} = \overbrace{\mathbb{R}B_{L_0} \times \cdots \times \mathbb{R}B_{L_0}}^m \times \overbrace{\mathbb{R}B_{L_1} \times \cdots \times \mathbb{R}B_{L_1}}^n$$

を超空間といい、その点を一般に

$$(\mathbf{X}; \Theta) = (X^1, \dots, X^m, \Theta^1, \dots, \Theta^n)$$

で表す。

$\mathbb{R}B_L$ の元 Z を基底 \mathcal{E}_M (M は $\{1, \dots, L\}$ の部分集合) を用いて $Z = \sum_M Z^M \mathcal{E}_M$ と表すとき、 Z のノルムを

$$\|Z\| = \sum_M |Z^M|$$

により定義する。このとき、 $\mathbb{R}B_L$ は Banach 代数となる。このノルムを用いて、超空間のノルムを

$$\|(\mathbf{X}; \Theta)\| := \sum_j \|X^j\| + \sum_k \|\Theta^k\|$$

により定義する。

□

【Definition A.6.4 (超微分)】 Banach 代数 $\mathbb{C}B_L$ に値を取る超空間 $\mathbb{R}B_L^{m,n}$ の開集合 U 上の関数 $F(\mathbf{X}, \Theta)$ に対して、

$$F(\mathbf{X} + \mathbf{Y}; \Theta + \Psi) = F(\mathbf{X}; \Theta) + \sum_j Y^j \frac{\partial F(\mathbf{X}; \Theta)}{\partial X^j} + \sum_k \Psi^k \frac{\partial F(\mathbf{X}; \Theta)}{\partial \Theta^k} + \|(\mathbf{Y}; \Psi)\eta(\mathbf{Y}; \Psi)$$

となる U 上の $\mathbb{C}B_L$ 値関数 $\partial F(\mathbf{X}; \Theta)/\partial X^j$, $\partial F(\mathbf{X}; \Theta)/\partial \Theta^k$ および $(\mathbf{Y}; \Psi) = (0; 0)$ の近傍で定義された関数 $\eta(\mathbf{Y}; \Psi)$ が存在して、

$$\|(\mathbf{Y}; \Psi)\| \rightarrow 0 \Rightarrow \|\eta(\mathbf{Y}; \Psi)\| \rightarrow 0$$

が成り立つとき、 $\partial F(\mathbf{X}; \Theta)/\partial X^j$, $\partial F(\mathbf{X}; \Theta)/\partial \Theta^k$ を $F(\mathbf{X}; \Theta)$ の超偏微係数という。ただし、 $\partial F(\mathbf{X}; \Theta)/\partial \Theta^k$ はこの定義では一意的に定まらず、 $\mathcal{E}_{1, \dots, L}$ に比例する項を加える自由度の除いて決まる。

□

【Theorem A.6.5 (C^∞ 関数)】 超空間 $\mathbb{C}B_L^{m,n}$ の開集合 U 上の $\mathbb{C}B_L$ 値関数 $F(\mathbf{X}; \Theta)$ が, 超微分の意味で C^∞ とする.

i) Θ^k の積を一般に Θ^Λ と表すと,

$$F(\mathbf{X}; \Theta) = \sum_{\Lambda} F^\Lambda(\mathbf{X}) \Theta^\Lambda$$

となる. すなわち, F は Θ^k の多項式となる. さらに, \mathbf{X} の c 数成分 ($\mathcal{E}_\emptyset = 1$ の係数) を \mathbf{X}_0 として

$$\mathcal{F}(\mathbf{X}_0) = F(\mathbf{X}_0 \mathcal{E}_\emptyset)$$

とおくと,

$$F(\mathbf{X}) = \mathcal{F}(\mathbf{X}) \equiv \sum_j (j^{-1}) D^j \mathcal{F}(\mathbf{X}_0) (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0 \mathcal{E}_\emptyset)^j.$$

□

【Definition A.6.6 (超微分可能関数)】 $U \subset \mathbb{R}B_L^{m,n}$ 上の $C^\infty \mathbb{C}B_L$ 値関数を $F(\mathbf{X}; \Theta)$ とする. $L \geq 2n$ として, $L' = [(L+1)/2]$ とおく. このとき,

$$F(\mathbf{X}; \Theta) = \sum_{\Lambda} \mathcal{F}^\Lambda(\mathbf{X}) \Theta^\Lambda$$

において, $\mathcal{F}^\Lambda(\mathbf{X}_\emptyset)$ の値が常に $\mathbb{C}B_{L'} \subset \mathbb{C}B_L$ に含まれるとき, F を U 上の超微分可能関数という. □

【Theorem A.6.7】 $F(\mathbf{X}; \Theta)$ を $U \subset \mathbb{C}B_L^{m,n}$ 上の超微分可能関数とする. このとき, その奇変数 Θ^k に関する偏微分を

$$\frac{\partial F(\mathbf{X}; \Theta)}{\partial \Theta^k} = \sum_{\Lambda} (-1)^{\deg \mathcal{F}^\Lambda} \mathcal{F}^\Lambda(\mathbf{X}) \Theta^{\Lambda/k}$$

と定義し, 上記の一般的定義における $\mathcal{E}_{1, \dots, L}$ に比例する不定性を取り除く. ただし, k が Λ に含まれる場合は, その位置を $p(k)$ として

$$\Theta^{\Lambda/k} := \begin{cases} (-1)^{p(k)-1} \Theta^{\Lambda - \{k\}} & k \in \Lambda, \\ 0 & k \notin \Lambda. \end{cases}$$

このとき, 次が成り立つ.

- i) 超偏微分は線形作用素である.
- ii) 超偏微分について一般化された Leibnitz の公式が成り立つ. ただし, $F(\mathbf{X}; \Theta)$ が同次元のとき,

$$\frac{\partial FG}{\partial \Theta^k} = \frac{\partial F}{\partial \Theta^k} G + (-1)^{\deg F} F \frac{\partial G}{\partial \Theta^k}.$$

iii) $\partial/\partial X^j$ と $\partial/\partial X^{j'}$ および $\partial/\partial \Theta^k$ は可換, $\partial/\partial \Theta^k$ と $\partial/\partial \Theta^{k'}$ は反可換.

□

【Definition A.6.8 (超解析関数)】 $\mathbb{R}B_L^{m,n}$ の開集合 U 上の $\mathbb{C}B_L$ に値を取る超微分可能関数 $F(\mathbf{X}; \Theta)$ は, その $\mathbb{C}B_L$ の基底 \mathcal{E}_M に関する成分 $F^M(\mathbf{X}; \Theta)$ がすべて X_μ^j の解析関数のとき, 超解析的という. □

A.6.3 線形超群

【Definition A.6.9 (線形超群)】 $(p|q) \times (p|q)$ 型偶超行列の集合 \mathcal{G}_s が次の条件を満たすとき, 次元 (m, n) の線形超群という:

- i) \mathcal{G}_s は Lie 群である.
- ii) \mathcal{G}_s の単位元の近傍の局所座標系 (V, ϕ) として

$$\phi: V \rightarrow U \subset \mathbb{R}B_L^{m,n}$$

がとれ, ϕ^{-1} の各成分は U 上の超解析関数である.

□

【Example A.6.10 ($U(p|q), SU(p|q)$)】

$$\begin{aligned} U(p|q) &:= \{G \in M_0(p|q; \mathbb{C}B_L) \mid G^\dagger G = 1\}, \\ SU(p|q) &:= \{G \in U(p|q) \mid \text{sdet}G = 1\}. \end{aligned}$$

□

【Theorem A.6.11 (Lie 代数と超生成元)】 \mathcal{G}_s を次元 (m, n) の超群とし, その単位元の近傍での超空間座標表示を $G(\mathbf{X}; \Theta)$ とする.

- i) \mathcal{G}_s は $(m+n)2^{L-1}$ 次元の Lie 群であり, その線形 Lie 代数 $\mathcal{L}(\mathcal{G}_s)$ の基底は

$$M_j^I = \frac{\partial G(\mathbf{X}; \Theta)}{\partial X_I^j} \Big|_{(\mathbf{X}, \Theta)=0}, \quad N_k^J = \frac{\partial G(\mathbf{X}; \Theta)}{\partial \Theta_J^k} \Big|_{(\mathbf{X}, \Theta)=0}$$

で与えられる. ここで, I, J はそれぞれ $\{1, \dots, L\}$ の偶数個, 奇数個の部分集合である.

ii) $G(\mathbf{X}; \Theta)$ の超偏微係数を

$$M_j = \frac{\partial G(\mathbf{X}; \Theta)}{\partial X^j} \Big|_{(\mathbf{X}, \Theta)=\mathbf{0}}, \quad N_k = \frac{\partial G(\mathbf{X}; \Theta)}{\partial \Theta^k} \Big|_{(\mathbf{X}, \Theta)=\mathbf{0}}$$

とおくと,

$$M_j^I = \mathcal{E}_I M_j, \quad N_k^J = \mathcal{E}_J N_k$$

が成り立ち, $\mathcal{L}(\mathcal{G}_s)$ の元は一般に $(\mathbf{X}; \Theta) \in \mathbb{R}B_L^{m,n}$ をパラメーターとして

$$M = \sum_j X^j M_j + \sum_k \Theta^k N_k$$

と表される. $M_j, N_k \in M(p|q; \mathbb{C}B_L)$ は $\mathcal{L}(\mathcal{G}_s)$ の超生成元と呼ばれる.

iii) 単位元の近傍では

$$G(\mathbf{X}; \Theta) = \exp M$$

が成り立つ.

[Cornwell JF (1989)[23]] _____ □

【Theorem A.6.12 (Lie 超代数との関係)】 $\mathcal{L}_s = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1$ を $\dim \mathcal{L}_0 = m, \dim \mathcal{L}_1 = n$ となる実 Lie 超代数, $\Gamma: \mathcal{L}_s \rightarrow M(p|q; \mathbb{C})$ をその忠実な次数付き表現とする. このとき, 次が成り立つ.

i) a_1, \dots, a_m を \mathcal{L}_0 の基底, b_1, \dots, b_n を \mathcal{L}_1 の基底として,

$$M_j^I = \mathcal{E}_I \Gamma(a_j), \quad N_k^J = \mathcal{E}_J \Gamma(b_k)$$

により $M(p|q; \mathbb{C}B_L)$ の元を定義すると, これらの線形包は $(m+n)2^{L-1}$ 次元実 Lie 代数 $\mathcal{L}_s(\mathbb{C}B_L)$ をなす.

ii) Lie 代数 $\mathcal{L}_s(\mathbb{C}B_L)$ に対応する線形 Lie 群は次元 (m, n) の線形 Lie 超群となる.

iii) $0 \leq N \leq L$ となる任意の整数 N に対して, M_j^I, N_k^J のうち $|I|, |J| \geq N$ となるもので張られる $\mathcal{L}_s(\mathbb{C}B_L)$ の部分空間はそのイデアルとなる. $N \geq 1$ ならこれは固有イデアルとなり, さらに, $N > L/2$ ならば可換イデアルとなる. 特に, $\mathcal{L}_s(\mathbb{C}B_L)$ は半単純 Lie 代数とならない.

iv) i), ii) で定義される Lie 超代数の集合から線形 Lie 超群の集合への写像は全射でない.

[Cornwell JF (1989)[23]] _____ □

B

高次元スピノール

§B.1

 γ 行列

【Definition B.1.1 (γ 行列)】 定数計量 η_{AB} をもつ D 次元 (擬) Euclidean 空間における Γ 行列を

$$\Gamma^A \Gamma^B + \Gamma^B \Gamma^A = 2\eta^{AB} \quad (\text{B.1.1})$$

により定義する。また、一般に

$$\Gamma^{M_1 \dots M_p} := \Gamma^{[M_1} \dots \Gamma^{M_p]} \quad (\text{B.1.2})$$

とおく。 □

【Definition B.1.2 (中心)】 Γ を

$$\Gamma := (-i)^k \Gamma^0 \dots \Gamma^{D-1} = (-i)^k (*\Gamma_{[D]}) \quad (\text{B.1.3})$$

により定義する。ここで、

$$D = 2k + 1 - |\eta|, \quad 2k + 2 - |\eta|. \quad (\text{B.1.4})$$

このとき、

$$\Gamma^2 = 1, \quad (\text{B.1.5a})$$

$$\Gamma \Gamma^a = (-1)^{D-1} \Gamma^a \Gamma. \quad (\text{B.1.5b})$$

□

【Formula B.1.3 (展開公式)】

$$\Gamma^a \Gamma^{b_1 \cdots b_k} = \Gamma^{ab_1 \cdots b_k} + \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} \eta^{ab_j} \Gamma^{b_1 \cdots b_{j-1} b_{j+1} \cdots b_k}, \quad (\text{B.1.6})$$

$$\Gamma^{b_1 \cdots b_k} \Gamma^a = \Gamma^{b_1 \cdots b_k a} + \sum_{j=1}^k (-1)^{j-k} \eta^{ab_j} \Gamma^{b_1 \cdots b_{j-1} b_{j+1} \cdots b_k}, \quad (\text{B.1.7})$$

$$\Gamma^{ab} \Gamma^{cd} = \Gamma^{abcd} + 2\eta^{a[d} \eta^{c]b} + 2\eta^{a[c} \Gamma^{d]b} - 2\eta^{b[c} \Gamma^{d]a} \quad (\text{B.1.8})$$

□

【Formula B.1.4 (双対公式)】 $\Gamma_{a_1 \cdots a_k}$ を k 階のテンソルと見なして、次の記法を用いる：

$$\Gamma_{[k]} := (\Gamma_{a_1 \cdots a_k}), \quad (\text{B.1.9a})$$

$$*\Gamma_{[k]} = \left(\frac{1}{k!} \epsilon_{a_1 \cdots a_{n-k} b_1 \cdots b_k} \Gamma^{b_1 \cdots b_k} \right). \quad (\text{B.1.9b})$$

このとき、次の式が成り立つ：

$$**\Gamma_{[k]} = |\eta| (-1)^{k(n+1)} \Gamma_{[k]}, \quad (\text{B.1.10})$$

$$*\Gamma_{[n-k]} = (-1)^{kn+k(k+1)/2} (*\Gamma_{[n]}) \Gamma_{[k]}. \quad (\text{B.1.11})$$

すなわち、

$$\frac{1}{(n-k)!} \Gamma^{b_1 \cdots b_{n-k}} \epsilon_{b_1 \cdots b_{n-k} a_k \cdots a_1} = (*\Gamma_{[n]}) \Gamma_{a_1 \cdots a_k}. \quad (\text{B.1.12})$$

□

§B.2

スピノール表現

B.2.1 Clifford 代数

【Definition B.2.1 ($\mathcal{C}_{p,q}, \mathcal{C}_n$)】 計量 η_{AB} (符号 (p, q) をもつ D 次元空間における Γ 行列から生成される実代数

$$\mathcal{C}_{q,p} := \left\{ \sum_I c_I \Gamma^I \mid c_I \in \mathbb{R}, I = \emptyset, [A], [AB], \dots \right\} \quad (\text{B.2.1})$$

を (\mathbb{R}^D, η) に付随する実 Clifford 代数という。また、その複素化

$$\mathcal{C}_D = \mathcal{C}_{q,p} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \quad (\text{B.2.2})$$

を D 次元複素 Clifford 代数という。 □

【Theorem B.2.2 (分類定理)] \mathcal{C}_D は D が偶数の時、 \mathcal{C}_D は既約でただ一つの既約線形表現をもち、

$$\mathcal{C}_{2n} \cong \mathbb{C}(2^n). \quad (\text{B.2.3})$$

また、 D が奇数の時、 \mathcal{C}_D は可約で2つの同型な代数の直和となり、それぞれはやはりただ一つの既約線形表現をもつ。

$$\mathcal{C}_{2n+1} \cong \mathbb{C}(2^n) \oplus \mathbb{C}(2^n) \quad (\text{B.2.4})$$

【Proposition B.2.3】 $\mathcal{C}_{q,p}$ の中で Γ 行列の偶数個の積で生成される部分集合 $\mathcal{C}_{q,p}^0$ は部分代数となり、次の関係が成り立つ：

$$\mathcal{C}_{q,p}^0 \cong \mathcal{C}_{q-1,p} \quad (\text{B.2.5})$$

特に、Minkowski 時空に対して

$$\mathcal{C}_{1,D-1}^0 \cong \mathcal{C}_{0,D-1} \equiv \mathcal{C}_{D-1}^*. \quad (\text{B.2.6})$$

この Clifford 代数は次の周期性をもつ：

$$\mathcal{C}_{n+8}^* \cong \mathcal{C}_n^* \otimes \mathcal{C}_8^* \cong \mathcal{C}_n^* \otimes \mathbb{R}(16). \quad (\text{B.2.7})$$

□

	1	2	3	4	5	6	7	8
$\mathcal{C}\ell_n$	\mathbb{C}	\mathbb{H}	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	$\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{C}(4)$	$\mathbb{R}(8)$	$\mathbb{R}(8) \oplus \mathbb{R}(8)$	$\mathbb{R}(16)$
$\mathcal{C}\ell_n^*$	$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$	$\mathbb{R}(2)$	$\mathbb{C}(2)$	$\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{H}(2) \oplus \mathbb{H}(2)$	$\mathbb{H}(4)$	$\mathbb{C}(8)$	$\mathbb{R}(16)$
$\mathcal{C}\ell_n$	$\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$	$\mathbb{C}(2)$	$\mathbb{C}(2) \oplus \mathbb{C}(2)$	$\mathbb{C}(4)$	$\mathbb{C}(4) \oplus \mathbb{C}(4)$	$\mathbb{C}(8)$	$\mathbb{C}(8) \oplus \mathbb{C}(8)$	$\mathbb{C}(16)$

表 B.1: $n = 1, \dots, 8$ に対する Clifford 代数の分類

B.2.2 スピノール

[Definition B.2.4 (スピノール群)] 一般に, $\mathcal{C}\ell_{q,p}$ の単位可逆偶元の全体

$$\text{Spin}(p, q) = \{v_1 \cdots v_{2r} \mid r = 0, 1, 2, \dots, v_i \cdot v_i = \pm 1\} \subset \mathcal{C}\ell_{q,p}^0 \quad (\text{B.2.8})$$

は乗法群を作る. この群をスピノール群とよぶ. □

[Definition B.2.5 (スピノール表現)] スピノール群 $\text{Spin}(n-1, 1)$ の Clifford 代数 $\mathcal{C}\ell_D$ への埋め込み、および $\mathcal{C}\ell_D$ の既約表現 $\mathbb{C}(2^{[D/2]})$ により定義される、次の表現をスピノール群のスピノール表現と呼ぶ:

$$\text{Spin}(n-1, 1) \subset \mathcal{C}\ell_{1,n-1}^0 \subset \mathcal{C}\ell_n \rightarrow \mathbb{C}(2^{[n/2]}). \quad (\text{B.2.9})$$

さらに, Lorentz 群のスピノール表現

$$\text{SO}_0(n-1, 1) \ni \Lambda \mapsto S(\Lambda) \in \text{Spin}(n-1, 1) \quad (\text{B.2.10})$$

は

$$S(v^a \Gamma_a) S^{-1} = (\Lambda v)^a \Gamma_a \Leftrightarrow S \Gamma^a S^{-1} = (\Lambda^{-1})^a_b \Gamma^b \quad (\text{B.2.11})$$

により定義される. 対応して, スピノール $\psi \in \mathbb{C}(2^{[n/2]})$ は, 擬直交基底の変換に対して

$$\theta'^a = \Lambda^a_b \theta^b \rightarrow \psi' = S(\Lambda) \psi \quad (\text{B.2.12})$$

と変換する量の組として定義される. □

[Proposition B.2.6] 無限小 Lorentz 変換 $\delta \Lambda$ に対して

$$\delta \Lambda_{ab} = \omega_{ab} \Rightarrow \delta S(\Lambda) = \frac{1}{4} \omega_{ab} \Gamma^{ab}. \quad (\text{B.2.13})$$

特に, 次の交換関係が成り立つ:

$$[\Gamma^{ab}, \Gamma^c] = 4\delta_d^{[a} \eta^{b]c} \Gamma^d = 2(\Gamma^a \eta^{bc} - \Gamma^b \eta^{ac}), \quad (\text{B.2.14a})$$

$$[\Gamma^{ab}, \Gamma^{cd}] = 2(\eta^{ad} \Gamma^{bc} + \eta^{bc} \Gamma^{ad} - \eta^{ac} \Gamma^{bd} - \eta^{bd} \Gamma^{ac}). \quad (\text{B.2.14b})$$

□

D	\mathbb{C} -spinor rep.	real	Weyl	real-Weyl	by \mathbb{R} -rep.
2	$1 + \bar{1}$	○	complex	—	$(2_{\mathbb{R}} = 1_{\mathbb{C}}) \otimes \mathbb{C}$
3	2	pseudo	—	—	$4_{\mathbb{R}}$
4	$2 + 2'$	pseudo	self	—	$4_{\mathbb{R}} + 4'_{\mathbb{R}}$
5	4	pseudo	—	—	$8_{\mathbb{R}}$
6	$4 + \bar{4}$	○	complex	—	$(8_{\mathbb{R}} = 4_{\mathbb{C}}) \otimes \mathbb{C}$
7	8	○	—	—	$8_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$
8	$8 + 8'$	○	self	○	$(8_{\mathbb{R}} + 8'_{\mathbb{R}}) \otimes \mathbb{C}$
9	16	○	—	—	$16_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$

表 B.2: Spinor representation of $SO(D)$

D	\mathbb{C} -spinor rep.	Majorana	Weyl	Majorana-Weyl	by \mathbb{R} -rep.
2	$1 + 1'$	○	self	○	$(1_{\mathbb{R}} + 1'_{\mathbb{R}}) \otimes \mathbb{C}$
3	2	○	—	—	$(2_{\mathbb{R}}) \otimes \mathbb{C}$
4	$2 + \bar{2}$	○	complex	—	$(4_{\mathbb{R}} = 2_{\mathbb{C}}) \otimes \mathbb{C}$
5	4	—	—	—	$8_{\mathbb{R}} = 4_{\mathbb{C}}$
6	$4 + 4'$	—	self	—	$8_{\mathbb{R}} + 8'_{\mathbb{R}}$
7	8	—	—	—	$16_{\mathbb{R}} = 8_{\mathbb{C}}$
8	$8 + \bar{8}$	○	complex	—	$(16_{\mathbb{R}} = 8_{\mathbb{C}}) \otimes \mathbb{C}$
9	16	○	—	—	$16_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$
10	$16 + 16'$	○	self	○	$(16_{\mathbb{R}} + 16'_{\mathbb{R}}) \otimes \mathbb{C}$
11	32	○	—	—	$32_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$
12	$32 + \bar{32}$	○	complex	—	$64_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$

表 B.3: Spinor representation of $SO(D - 1, 1)$

B.2.3 Fierz 恒等式

【Formula B.2.7 (Fierz 恒等式 [2005.2.6])】 次元 D 上の Clifford 代数の既約表現を考え、その次元を N とする：

$$N = 2^{\lfloor D/2 \rfloor}. \quad (\text{B.2.15})$$

1. n が偶数ないし n が奇数で $n < D$ のとき、

$$\text{Tr} \Gamma^{a_1 \cdots a_n} = 0. \quad (\text{B.2.16})$$

また、 D が偶数ないし、 D が奇数で $n + m < D$ のとき、

$$\text{Tr} \Gamma^{a_1 \cdots a_n} \Gamma_{b_1 \cdots b_m} = \begin{cases} (-1)^{n(n-1)/2} N \delta_{b_1 \cdots b_m}^{a_1 \cdots a_n} & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}. \quad (\text{B.2.17})$$

よって、 Tr により $\mathbb{C}(N)$ に内積を定義すると、 D が偶数のとき $n = D$ 、 D が奇数のとき $n = (D - 1)/2$ として、

$$1, \Gamma^a, \dots, \Gamma^{[a_1 \cdots a_n]} \quad (\text{B.2.18})$$

が直交基底となる。

2. 任意の $a, b, c, d \in \mathbb{C}^N$ および $M_1, M_2 \in \mathbb{C}(N)$ に対して、次の恒等式が成り立つ：

$$(c^* M_1 a)(b^* M_2 d) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^n (-1)^{j(j-1)/2} \frac{1}{j!} (c^* \Gamma^{a_1 \cdots a_j} d) (b^* M_2 \Gamma_{a_1 \cdots a_j} M_1 a). \quad (\text{B.2.19})$$

□

§B.3

荷電共役と Majorana スピノール

$$B_1 = \Gamma^3 \Gamma^5 \cdots \Gamma^{D-1}, \quad B_2 = \Gamma B_1 \quad (\text{B.3.1})$$

とおくと,

$$B_1 \Gamma^M B_1^{-1} = (-1)^k \Gamma^{M*}, \quad B_2 \Gamma^M B_2^{-1} = (-1)^{k+1} \Gamma^{M*}, \quad (\text{B.3.2a})$$

$$B_1 \Gamma_{(2k+2)} B_1^{-1} = B_2 \Gamma_{(2k+2)} B_2^{-1} = (-1)^k \Gamma_{(2k+2)}^*, \quad (\text{B.3.2b})$$

$$B \Sigma^{MN} B^{-1} = -\Sigma^{MN*}, \quad (\text{B.3.2c})$$

$$B_1^* B_1 = (-1)^{k(k+1)/2}, \quad B_2^* B_2 = (-1)^{k(k-1)/2}. \quad (\text{B.3.2d})$$

【Definition B.3.1 (荷電共役変換)】 Γ 行列の既約表現 (複素次元 $2^{[n/2]}$) において, B 行列を次の性質を満たす $2^{[n/2]}$ 次の複素正則行列として定義する:

$$B \Gamma^{ab} B^{-1} = \Gamma^{ab*}. \quad (\text{B.3.3})$$

このとき, スピノール ψ と $B^{-1}\psi^*$ の Lorentz 変換 (直交変換) は一致する:

$$\psi' = S\psi \Rightarrow B^{-1}\psi'^* = S(B^{-1}\psi^*).$$

また, 荷電共役行列 C を

$$C \Gamma^{ab} C^{-1} = -(\Gamma^{ab})^T \quad (\text{B.3.4})$$

により定義する. このとき, $\mathcal{T}\psi$ は

$$\psi' = S\psi \Rightarrow \mathcal{T}\psi' C = \mathcal{T}\psi C S^{-1} \quad (\text{B.3.5})$$

と変換する. また, $\Gamma^{a\dagger} = \Gamma_a$ が成り立つ表示では, ψ は $(\bar{\psi}C)^T$ と, また $\bar{\psi}$ は $\psi^T C$ は同じ変換性を示す:

$$\psi' = S\psi \Rightarrow (\bar{\psi}' C^{-1})^T = S(\bar{\psi} C^{-1})^T, \quad \bar{\psi}' = \bar{\psi} S^{-1}. \quad (\text{B.3.6})$$

□

【Definition B.3.2 (Majorana スピノール)】 B 行列に対して

$$\zeta^* = B\zeta \quad (\text{B.3.7})$$

を満たすスピノール ζ を Majorana スピノールという. この条件より, $B^* B = 1$ が要求されるので, Majorana スピノールは次元が条件

$$D \neq 5, 6, 7 \pmod{8} \quad (\text{B.3.8})$$

を満たす時空でのみ存在.

□

【Note B.3.3 ($\bar{\psi}$ の定義) 一般に,

$$\psi \rightarrow S\psi \Rightarrow \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}S^{-1} \quad (\text{B.3.9})$$

を要請すると,

$$\bar{\psi} \propto \psi^\dagger {}^T B^{-1} C. \quad (\text{B.3.10})$$

したがって, $\Gamma^{a\dagger} = \Gamma_a$ が成り立つ表示では, ${}^T B = c^{-1}B$ より,

$$|\eta| = -1 : \bar{\psi} = \psi^\dagger \Gamma^0; \quad C = B\Gamma^0, \quad (\text{B.3.11a})$$

$$|\eta| = 1 : \bar{\psi} = \psi^\dagger; \quad C = B. \quad (\text{B.3.11b})$$

また, Majorana スピノールに対しては, $B\psi = \psi^* \Rightarrow \psi^\dagger = {}^T \psi {}^T B$ より

$$\bar{\psi} = {}^T \psi C. \quad (\text{B.3.12})$$

□

【Proposition B.3.4 (B 行列の性質) B 行列は次の性質をもつ.

1. (任意性) Γ 行列の固定された表示のもとで, B 行列の自由度は

$$B \rightarrow B(\lambda + \mu\Gamma). \quad (\text{B.3.13})$$

ただし, $\mu^2 \neq \lambda^2$. 特に, 奇数次元では B は定数倍を除いて一意的である.

2. (表示の変更) 1 の自由度を適当に調整すると, スピノール表現の一次変換

$$\Gamma^a = T\Gamma^a T^{-1} \quad (\text{B.3.14})$$

に対して,

$$B' = T^* B T^{-1}. \quad (\text{B.3.15})$$

3. (標準テンソル積表示) 偶数次元 $n = 2k + 1 - |\eta|$ のとき, 標準テンソル積表示の元で,

$$B_\pm \Gamma^a B_\pm^{-1} = \pm \Gamma^{a*} \quad (\text{B.3.16})$$

となる B_\pm が定数倍を除いて一意的に存在する. 特に, $|\eta| = -1$ のとき,

$$B_1 = \Gamma^3 \Gamma^5 \cdots \Gamma^{n-1} = B_{(-1)^k}, \quad B_2 = \Gamma B_1 = B_{(-1)^{k+1}}. \quad (\text{B.3.17})$$

さらに, $\Gamma = \Gamma_{(n)}$ に対して, 常に

$$B\Gamma B^{-1} = (-1)^k \Gamma^* \quad (\text{B.3.18})$$

4. $(B\Gamma^a B^{-1})$ ある表示で $B\Gamma^a B^{-1} = \pm\Gamma^{a*}$ なら, 2の変換に対しても $B'\Gamma'^a B'^{-1} = \pm\Gamma'^{a*}$. よって, 奇数次元では常に,

$$B\Gamma^a B^{-1} = (-1)^k \Gamma^{a*}; \quad n = 2k + 2 - |\eta|. \quad (\text{B.3.19})$$

偶数次元では,

$$B_{\pm}\Gamma^a B_{\pm}^{-1} = \pm\Gamma^{a*}; \quad n = 2k + 1 - |\eta| \quad (\text{B.3.20})$$

を満たす B 行列が任意の表示で常に (定数倍の自由度を除いて) 一意的に存在. これより, 一般に, 偶数次元での任意の B 行列に対して

$$B\Gamma^a B^{-1} = \Gamma^{a*}(\alpha + \beta\Gamma^*); \quad \alpha^2 - \beta^2 = 1 \quad (\text{B.3.21})$$

が成立. さらに, $\alpha^2 - \beta^2 = 1$ を満たす任意の α, β に対して, この式を満たす B が定数倍の自由度を除いて一意的に存在.

5. (B^*B) B^*B は Γ^a と可換なので, 一般に

$$B^*B = p + q\Gamma. \quad (\text{B.3.22})$$

また, ある表示で $B^*B = p$ (対角型) なら 2の変換に対して $B'^*B' = T^{*-1}B^*BT^* = p$. 特に, 偶数次元 $n = 2k + 1 - |\eta|$ では, p の符号は次のいずれかと一致する:

$$B_+^*B_+ = (-1)^{k(k-1)/2}, \quad B_-^*B_- = (-1)^{k(k+1)/2}. \quad (\text{B.3.23})$$

よって, 偶数次元では, $B^*B = 1$ となる B が存在する条件は,

$$n \neq 5 - |\eta| \pmod{8}. \quad (\text{B.3.24})$$

また, 奇数次元 $n = 2k + 2 - |\eta|$ のとき, 常に

$$B = B_{(-1)^k} \Rightarrow B^*B = (-1)^{k(k+1)/2} \quad (\text{B.3.25})$$

で, $B^*B = 1$ となるのは

$$n \neq 4 - |\eta|, 6 - |\eta| \pmod{8}. \quad (\text{B.3.26})$$

の時のみ.

6. (Majorana 条件) スピノール ζ と $B^{-1}\zeta^*$ は Lorentz 変換に対して同じ変換性を示す. ただし, Majorana 条件

$$\zeta^* = B\zeta \quad (\text{B.3.27})$$

を満たすスピノールは, $B^*B = 1$ とならないといけないので,

$$n \neq 4 - |\eta|, 5 - |\eta|, 6 - |\eta| \pmod{8} \quad (\text{B.3.28})$$

の時のみ存在.

$D(\text{mod}8)$	2	3	4	5	6	7	8	9
$ \eta = 1$	B_+	X	X	X	B_-	B_-	B_\pm	B_+
$ \eta = -1$	B_\pm	$B_+ = B_1$	$B_+ = B_2$	X	X	X	$B_- = B_1$	$B_- = B_1$

表 B.4: 各次元において, $B^*B = 1$ となる B 行列

7. $(B^T) \Gamma^{a\dagger} = \Gamma_a$ が成り立つ表示に限ると, Γ^a の変換行列 T は $T^\dagger T \in \mathbb{R}$ となるものに限られるので, ある表示で $B^T = cB$ (c は定数) となるなら他の表示でも同じ関係が成り立つ. 特に, $n = 2k + 1 - |\eta|$ のとき, B_1, B_2, B_\pm に相似な行列に対して,

$${}^T B_1 = (-1)^{k(k+1)/2} B_1, \quad {}^T B_2 = (-1)^{k(k-1)/2} B_2, \quad (\text{B.3.29a})$$

$${}^T B_+ = (-1)^{k(k-1)/2} B_+, \quad {}^T B_- = (-1)^{k(k+1)/2} B_-. \quad (\text{B.3.29b})$$

$n = 2k + 2 - |\eta|$ のとき,

$${}^T B = (-1)^{k(k+1)/2} B. \quad (\text{B.3.30})$$

□

【Proposition B.3.5 ($B = 1$ となる表示)】 計量の符号によらず, Majorana スピノールが存在する (すなわち, $B^*B = 1$ となる B 行列が存在する) 場合には, $B = 1$ となる表示が常に存在する.

この表示では,

- $D = 1 - |\eta|, 2 - |\eta|, 3 - |\eta|$ のとき, Γ^a は実行列.
- $D = 7 - |\eta|, 8 - |\eta|$ のとき, Γ^a は純虚行列.

□

Proof. B 行列が $B^*B = 1$ を満たすとき, 常に ${}^T B = B$ となっている. これより, $B = B_1 + iB_2$ ($B_1, B_2 \in M(N, \mathbb{R})$) から $2N$ 次の正方行列

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} B_1 & -B_2 \\ -B_2 & -B_1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.3.31})$$

を定義すると, \tilde{B} は $\tilde{B}^2 = 1$ を満たす実対称行列となる. よって,

$$\tilde{B} = O(I_p \oplus (-I_q)) {}^T O, \quad p + q = 2N, \quad O \in \text{SO}(2N) \quad (\text{B.3.32})$$

と表される. ところが,

$$\tilde{B} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{B} \begin{pmatrix} v_2 \\ -v_1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} v_2 \\ -v_1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.3.33})$$

なので, $p = q$ となり,

$$\tilde{B} \begin{pmatrix} v_1^{(j)} \\ v_2^{(j)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1^{(j)} \\ v_2^{(j)} \end{pmatrix}, \quad j = 1, \dots, N \quad (\text{B.3.34})$$

を満たす N 個の 1 次独立な $2N$ 次元ベクトルが存在. これより,

$$T = (v^{(1)} \dots v^{(N)}); \quad v^{(j)} = v_1^{(j)} + iv_2^{(j)} \quad (\text{B.3.35})$$

とおくと,

$$BT = T^* \Leftrightarrow (T^*)^{-1}BT = 1 \quad (\text{B.3.36})$$

となる. これは, 変換 T^{-1} により $B \rightarrow 1$ と変換できることを意味している. Q.E.D.

【Proposition B.3.6 (C 行列)】 C 行列は次の性質をもつ.

1. Γ 行列の固定された表示のもとで, C 行列の自由度は

$$C \rightarrow C(\lambda + \mu\Gamma). \quad (\text{B.3.37})$$

ただし, $\mu^2 \neq \lambda^2$. 特に, 奇数次元では C は定数倍の自由度を除いて一意的.

2. 1 の自由度を適当に調整すると, スピノール表現の一次変換

$$\Gamma'^a = T\Gamma^a T^{-1} \quad (\text{B.3.38})$$

に対して,

$$C' = T^{-1}CT^{-1}. \quad (\text{B.3.39})$$

3. $\Gamma = \Gamma_{(2\ell)}$ に対して,

$$CTC^{-1} = (-1)^\ell \mathbb{T} \quad (\text{B.3.40})$$

4. n が偶数のとき, 一般に

$$C\Gamma^a C^{-1} = -\mathbb{T}^a(\alpha + \beta \mathbb{T}) = -e^{-\phi \mathbb{T}} \mathbb{T}^a e^{\phi \mathbb{T}}; \quad \alpha^2 - \beta^2 = 1. \quad (\text{B.3.41})$$

任意の複素数 ϕ に対して, この条件を満たす C 行列が定数倍の自由度を除いて一意的に存在する. 特に, $\beta = 0$, すなわち

$$C\Gamma^a C^{-1} = \pm \mathbb{T}^a \quad (\text{B.3.42})$$

となる $C = C_\pm$ がそれぞれの符号に対して, 定数倍の自由度を除いて一意的に存在する.

5. $n = 2\ell + 1$ のとき, 一般に

$$C\Gamma^a C^{-1} = (-1)^\ell \mathbb{T}^a \quad (\text{B.3.43})$$

で, $n = 2\ell$ での C_\pm を用いて, $C = C_{(-1)^\ell}$.

6. 条件

$$\Gamma^{a\dagger} = \Gamma_a \tag{B.3.44}$$

を満たす表示では、 $|\eta| = 1$ のとき、

$$C_{\pm} = cB_{\pm}, \tag{B.3.45}$$

$|\eta| = -1$ のとき、

$$C_{\pm} = cB_{\mp}\Gamma^0 \tag{B.3.46}$$

が成り立つ (c はゼロでない任意定数)。

7. ある表示で $C^T = pC$ となると、任意の表示で $C^T = pC$ が成り立つ。

□

【Note B.3.7 (様々な次元の時空 ($|\eta| = -1$) における, $B^*B, {}^TB, {}^TC$ の符号)】

D	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$B_1^*B_1 = B_2^2$	+	+	-	-	-	-	+	+	+	+
$B_2^*B_2 = B_1^2$	+	(+)	+	(-)	-	(-)	-	(+)	+	(+)
${}^TB_1 = B_1 \times$	+	+	-	-	-	-	+	+	+	+
${}^TB_2 = B_2 \times$	+	(+)	+	(-)	-	(-)	-	(+)	+	(+)
B	B_1	B_1	B_2	B_1	B_1	B_1	B_1	B_1	B_1	B_1
$B\Gamma^a B^{-1} = \Gamma^{a*} \times$	+	+	+	-	+	+	-	-	+	+
$B\Gamma B^{-1} = \Gamma^* \times$	+		-		+		-		+	
${}^TB = B \times$	+	+	+	-	-	-	+	+	+	+
B^*B	+	+	+	-	-	-	+	+	+	+
$B^\dagger B$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$C = * \times \Gamma^0$	B_1	B_1	B_2	B_1	B_1	B_1	B_1	B_1	B_1	B_1
$C\Gamma^a C^{-1} = {}^T\Gamma^a$	-	-	-	+	-	-	+	+	-	-
$C\Gamma C^{-1} = \Gamma^T \times$	-		+		-		+		-	
${}^TC = C \times$	-	-	-	-	+	+	+	+	-	-
C^*C	-	-	-	-	+	+	+	+	-	-
$C^\dagger C$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

□

【Note B.3.8 (様々な次元の空間 ($|\eta| = 1$) における B^*B, B^* の符号)】

D	2	3	4	5	6	7	8	9
$B\Gamma B^{-1}$	-		+		-		+	
$B_+^* = B_+ \times$	+1	\times	-1	-1	-1	\times	+1	+1
$B_-^* = B_- \times$	-1	-1	-1	\times	+1	+1	+1	\times
$B_+^* B_+$	+1	\times	-1	-1	-1	\times	+1	+1
$B_-^* B_-$	-1	-1	-1	\times	+1	+1	+1	\times

(注) $C_{\pm} = B_{\pm}$ なので, C_{\pm} の振る舞いは同じ, また, B_{\pm} は常に, $B_{\pm}^2 = 1$, $B_{\pm}^{\dagger} = B_{\pm}$, ${}^t B_{\pm} = B_{\pm}^*$ の関係を満たす.

□

§B.4

スピノール双一次形式

【Proposition B.4.1 (時空における Majorana スピノールの双一次形式のパリティ)】 スピノールが Grassmann odd な量として, D 次元時空 ($|\eta| = -1$) において, Majorana スピノールの双一次形式

$$\Omega_n(\alpha, \beta) = \bar{\alpha} \Gamma_{[n]} \beta \tag{B.4.1}$$

を考える. ここで, $\bar{\alpha} = {}^T \alpha C$. このとき, α と β の交換に対する $\Omega_n(\alpha, \beta)$ パリティは

時空の次元 D	$n \equiv 0$	$n \equiv 1$	$n \equiv 2$	$n \equiv 3$
$D \equiv 2, 3, 4 \pmod{8}$	+	-	-	+
$D \equiv 8, 9 \pmod{8}$	-	-	+	+

□

【Proposition B.4.2 (Euclidean 空間におけるスピノールの双一次形式のパリティ)】 D 次元 Riemann 空間 ($|\eta| = 1$) において, Majorana スピノールの双一次形式

$$\Omega_n(\alpha, \beta) = \bar{\alpha} \Gamma_{[n]} \beta \tag{B.4.2}$$

を考える. ここで, $\bar{\alpha} = {}^T \alpha C$. このとき, スピノールが可換数とすると, α と β の交換に対する $\Omega_n(\alpha, \beta)$ のパリティは

	$n \pmod{4}$			
空間次元 D	0	1	2	3
$D \equiv 2, 8, 9 \pmod{8}$	+	+	-	-
$D \equiv 6, 7 \pmod{8}$	+	-	-	+

スピノールが反可換量の場合は, すべてのパリティが反転する. _____ □

§B.5

スピノールの接続

一般に、 G を構造群として持つ主ファイバー束 P の \mathfrak{g} に値を取る接続形式が局所座標系で ω_α 、対応する曲率形式が \mathcal{R}_α と表されとすると、線形表現 $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ により定まる P の随伴ベクトル束 $E = P \times_\rho V$ における接続形式および曲率形式は

$$\rho_*(\omega_\alpha), \quad \rho_*(\mathcal{R}_\alpha)$$

と表される。

特に、Lorentz 群（ないし回転群）のベクトル表現 ρ^v とスピノール表現 ρ^s に対して、

$$\delta\Lambda = (\delta\Lambda_{ab}) \mapsto \rho^v(\delta\Lambda) = (\delta\Lambda^a_b), \quad \rho^s(\delta\Lambda) = \frac{1}{4}\delta\Lambda_{ab}\Gamma^{ab}$$

となるので、Riemann 接続に対して、

$$\begin{aligned} \rho^v(\omega) &= \omega^a_b, & \rho^v(\mathcal{R}) &= \mathcal{R}^a_b \\ \Rightarrow \rho^s(\omega) &= \frac{1}{4}\omega_{ab}\Gamma^{ab}, & \rho^s(\mathcal{R}) &= \frac{1}{4}\mathcal{R}_{ab}\Gamma^{ab} \end{aligned}$$

が成り立つ。すなわち、スピノール ψ に対して、

$$[\nabla_M, \nabla_N]\psi = \frac{1}{4}\mathcal{R}_{MNAB}\Gamma^{AB}\psi \tag{B.5.1}$$

また、 $\Gamma_M = \Gamma_A\theta_M^A$ に対して、

$$\nabla_M\Gamma_N = \Gamma_A\nabla_M\theta_N^A + \frac{1}{4}\omega_{BCM}[\Gamma^{BC}, \Gamma_A]\theta_N^A = 0, \tag{B.5.2a}$$

$$\nabla_M\Gamma_{[D]} = 0. \tag{B.5.2b}$$

§B.6

SO(6) スピノール

References

- Grana M, Minasianb R, Petrini M, Tomasiello A: jhep0408, 046 (2004)
“Supersymmetric backgrounds from generalized Calabi-Yau manifolds”

B.6.1 諸定義

カイラル分解 $\mathbf{8} = \mathbf{4} + \mathbf{4}^* = \eta_+ + \chi_-$ に対し、次の条件を満たす表示を取る：

$$(\gamma^a)^\dagger = \gamma^a, \quad (\text{B.6.1})$$

$$\eta_+ \in \mathbf{4} \Rightarrow \eta_+^* \in \mathbf{4}^*. \quad (\text{B.6.2})$$

また,

$$\gamma_7 = i\gamma^{123456}. \quad (\text{B.6.3})$$

より,

$$\gamma_{a_1 \dots a_k} = \frac{1}{(6-k)!} i\gamma_7 \gamma^{b_1 \dots b_{6-k}} \epsilon_{b_1 \dots b_{6-k} a_k \dots a_1}. \quad (\text{B.6.4})$$

すなわち,

$$\gamma_{[k]} = (-1)^{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor} i\gamma_7 * (\gamma_{[6-k]}). \quad (\text{B.6.5})$$

例えば,

$$\begin{aligned} \Gamma^1 &= \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3, & \Gamma^2 &= \sigma_1 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3, \\ \Gamma^3 &= -1 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_3, & \Gamma^4 &= -1 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_3, \\ \Gamma^5 &= 1 \otimes 1 \otimes \sigma_1, & \Gamma^6 &= 1 \otimes 1 \otimes \sigma_2, \\ \Gamma_7 &= -\sigma_2 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3, \\ C &= \sigma_2 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_2. \end{aligned} \quad (\text{B.6.6})$$

C は次の性質をもつ：

$$C^\dagger = \mathcal{T}C = C^{-1} = C, \quad (\text{B.6.7a})$$

$$C\gamma^a C = -\mathcal{T}(\gamma^a) \quad (\text{B.6.7b})$$

したがって,

$$\begin{aligned}
\eta_+^* = C\eta_- \quad \Rightarrow \quad & \eta_+^\dagger \eta_+ = \eta_-^\dagger \eta_-, \quad \eta_+^\dagger \gamma^{ab} \eta_+ = -\eta_-^\dagger \gamma^{ab} \eta_-, \\
& \left(\eta_+^\dagger \gamma^{ab} \eta_+ \right)^* = -\eta_+^\dagger \gamma^{ab} \eta_+, \\
& \eta_\pm^\dagger \gamma^a \eta_\pm = \eta_\pm^\dagger \gamma^{abc} \eta_\pm = 0, \\
& \left(\eta_+^\dagger \gamma^{abc} \eta_- \right)^* = -\eta_-^\dagger \gamma^{abc} \eta_+, \\
& \eta_\pm^\dagger \eta_\mp = \eta_\pm^\dagger \gamma^a \eta_\mp = \eta_\pm^\dagger \gamma^{ab} \eta_\mp = 0.
\end{aligned} \tag{B.6.8}$$

B.6.2 Fierz 恒等式

任意のスピノール a, b, c, d と Clifford 代数の元 M_1, M_2 に対し

$$\begin{aligned}
(c^\dagger M_1 a)(b^\dagger M_2 d) &= \frac{1}{8} \{ (c^\dagger d)(b^\dagger M_2 M_1 a) + (c^\dagger \gamma_7 d)(b^\dagger M_2 \gamma_7 M_1 a) \} \\
&+ \frac{1}{8} \{ (c^\dagger \gamma^p d)(b^\dagger M_2 \gamma_p M_1 a) - (c^\dagger \gamma_7 \gamma^p d)(b^\dagger M_2 \gamma_7 \gamma_p M_1 a) \} \\
&- \frac{1}{16} \{ (c^\dagger \gamma^{pq} d)(b^\dagger M_2 \gamma_{pq} M_1 a) + (c^\dagger \gamma_7 \gamma^{pq} d)(b^\dagger M_2 \gamma_7 \gamma_{pq} M_1 a) \} \\
&- \frac{1}{48} (c^\dagger \gamma^{pqr} d)(b^\dagger M_2 \gamma_{pqr} M_1 a).
\end{aligned} \tag{B.6.9}$$

ただし,

$$(c^\dagger A \gamma^{pqr} B d)(b^\dagger C \gamma_{pqr} D d) = -(c^\dagger A \gamma_7 \gamma^{pqr} B d)(b^\dagger C \gamma_7 \gamma_{pqr} D d). \tag{B.6.10}$$

B.6.3 形式系

$$\gamma_7 \eta_\pm = \pm \eta_\pm, \quad \eta_+^* = C\eta_-, \quad \eta_\pm^\dagger \eta_\pm = 1/2 \tag{B.6.11}$$

となるスピノールに対し,

$$J^{pq} = -i\eta^\dagger \gamma^{pq} \gamma_* \eta = \mp 2i\eta_\pm^\dagger \gamma^{pq} \eta_\pm, \tag{B.6.12a}$$

$$\Omega^{pqr} = -i\eta^\dagger \gamma^{pqr} (1 + \gamma_*) \eta = -2i\eta_-^\dagger \gamma^{pqr} \eta_+. \tag{B.6.12b}$$

とおく. このとき,

$$J_{pq} = -J_{qp}, \quad J_m^n J_n^p = -\delta_m^p, \quad J \wedge \Omega = 0, \quad J \wedge J \wedge J \wedge = \frac{3}{4} i\Omega \wedge \bar{\Omega} = 6\mathbf{v} \tag{B.6.13}$$

これにより定義される SU(3) 構造に対応する複素エルミート正規直交基底を $\{\phi^i, \bar{\phi}^{\bar{i}}\}$ とするとき,

$$\hat{\gamma}^j \equiv \phi_m^j \gamma^m = \frac{1}{\sqrt{2}} (\gamma^{2j-1} + i\gamma^{2j}), \quad \hat{\gamma}^{\bar{j}} \equiv \bar{\phi}_m^{\bar{j}} \gamma^m = \frac{1}{\sqrt{2}} (\gamma^{2j-1} - i\gamma^{2j}) \tag{B.6.14}$$

と置くと、

$$\hat{\gamma}^i \hat{\gamma}^j + \hat{\gamma}^j \hat{\gamma}^i = 0, \quad \hat{\gamma}^i \hat{\gamma}^{\bar{j}} + \hat{\gamma}^{\bar{j}} \hat{\gamma}^i = 2\delta^{ij}. \quad (\text{B.6.15})$$

また、 η_- は、ガンマ行列の Clifford 基底となる：

$$\hat{\gamma}^i u_+ = 0 \Leftrightarrow \hat{\gamma}^{\bar{i}} u_- = 0 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (\text{B.6.16})$$

また、Fierz 恒等式より、次の関係が成り立つ：

$$\eta_{\pm} \otimes \eta_{\pm}^{\dagger} = \frac{1}{8} e^{\mp ij}, \quad \eta_+ \otimes \eta_-^{\dagger} = -\frac{i}{8} \Omega, \quad \eta_- \otimes \eta_+^{\dagger} = -\frac{i}{8} \bar{\Omega}. \quad (\text{B.6.17})$$

これより、

$$\mathbb{F}_A = F_0 + \mathbb{F}_2 + \mathbb{F}_4 + \mathbb{F}_6 \quad (\text{B.6.18})$$

に対して、

$$\begin{aligned} \eta_-^{\dagger} \mathbb{F}_A \eta_+ &= \frac{1}{2} (\mathbb{F}_A e^{ij})_0 \\ &= \frac{1}{2} F_0 - \frac{i}{4} F^{ab} J_{ab} - \frac{1}{16} F^{abcd} J_{ab} J_{cd} + \frac{i}{96} F^{abcdef} J_{ab} J_{cd} J_{ef} \\ &= \frac{1}{2} \left(F_0 - iF_2^{(1)} - F_4^{(1)} + iF_6^{(1)} \right), \end{aligned} \quad (\text{B.6.19a})$$

$$\begin{aligned} \eta_+^{\dagger} \gamma_m \mathbb{F}_A \eta_- &= -\frac{i}{2} (\mathbb{F}_A \bar{\Omega})_m \\ &= \frac{i}{4} F^{ab} \bar{\Omega}_{abm} - \frac{i}{12} F^{abc} {}_m \bar{\Omega}_{abc} \\ &= 2i \left(F_{2,n}^{(3)} + F_{4,n}^{(3)} \right) \bar{P}_m{}^n, \end{aligned} \quad (\text{B.6.19b})$$

$$\begin{aligned} \eta_+^{\dagger} \mathbb{F}_A \gamma_m \eta_- &= -\frac{i}{2} (\bar{\Omega} \mathbb{F}_A)_m \\ &= \frac{i}{4} F^{ab} \bar{\Omega}_{abm} + \frac{i}{12} F^{abc} {}_m \bar{\Omega}_{abc} \\ &= 2i \left(F_{2,n}^{(3)} - F_{4,n}^{(3)} \right) \bar{P}_m{}^n, \end{aligned} \quad (\text{B.6.19c})$$

$$\eta_-^{\dagger} \gamma_n \mathbb{F}_A \gamma_m \eta_- = -(\mathbb{F}_{Am} e^{ij})_n + \frac{1}{2} (\mathbb{F}_A e^{ij})_0 g_{mn} + (\mathbb{F}_A e^{ij})_{mn}. \quad (\text{B.6.19d})$$

また、

$$\mathbb{F}_B = \mathbb{F}_1 + \mathbb{F}_3 + \mathbb{F}_5 \quad (\text{B.6.20})$$

に対して、

$$\begin{aligned}\eta_-^\dagger \not{F}_B \eta_+ &= -\frac{i}{2} (\not{F}_B \not{\Omega})_0 \\ &= \frac{i}{12} F^{abc} \Omega_{abc} = -3 \left(F_3^{(1)} - \bar{F}_3^{(1)} \right),\end{aligned}\tag{B.6.21a}$$

$$\begin{aligned}\eta_+^\dagger \gamma_m \not{F}_B \eta_+ &= \frac{1}{2} (\not{F}_B e^{-\not{J}})_m \\ &= \left(F_n + \frac{i}{2} J_{ab} F^{ab}{}_n - \frac{1}{4} J_{ab} J_{cd} F^{abcd}{}_n \right) \bar{P}_m{}^n \\ &= \left(F_n + 2i F_{3,n}^{(3)} - 4F_{5,n}^{(3)} \right) \bar{P}_m{}^n,\end{aligned}\tag{B.6.21b}$$

$$\begin{aligned}\eta_+^\dagger \not{F}_B \gamma_m \eta_+ &= \frac{1}{2} (e^{-\not{J}} \not{F}_B)_m \\ &= \left(F_n + \frac{i}{2} J_{ab} F^{ab}{}_n - \frac{1}{4} J_{ab} J_{cd} F^{abcd}{}_n \right) P_m{}^n \\ &= \left(F_n + 2i F_{3,n}^{(3)} - 4F_{5,n}^{(3)} \right) P_m{}^n,\end{aligned}\tag{B.6.21c}$$

$$\begin{aligned}\eta_-^\dagger \gamma_n \not{F}_B \gamma_m \eta_+ &= -i (\not{F}_B \not{\Omega})_n + \frac{i}{2} (\not{F}_B \not{\Omega})_0 g_{mn} + i (\not{F}_B \not{\Omega})_{mn} \\ &= \frac{i}{2} F^{ab}{}_{(m} \Omega_{n)ab} - \frac{i}{12} F^{abc} \Omega_{abc} g_{mn} + \frac{i}{2} F^a \Omega_{amn} + \frac{i}{12} F^{abc}{}_{mn} \Omega_{abc} \\ &= \frac{i}{2} F_{3,mn}^{(6)} + 2 \left(F_3^{(1)} - \bar{F}_3^{(1)} \right) g_{mn} + \frac{1}{2} (iF_1^p + F_5^p) \Omega_{mnp}.\end{aligned}\tag{B.6.21d}$$

C

微分幾何学からの準備

§C.1

Complex Structure

C.1.1 複素多様体

【Definition C.1.1 (複素構造)】

1. 連結 Hausdorff 空間 \mathcal{M} に対して, その開被覆 $\{\mathcal{U}_j\}$ と各 \mathcal{U}_j から \mathbb{C}^n の中への同相写像 ϕ_j が与えられ,

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \rightarrow \phi_j(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \quad (\text{C.1.1})$$

が正則写像であるとき, $\{\mathcal{U}_j, \phi_j\}$ は \mathcal{M} 上の局所複素座標系という.

2. \mathcal{M} 上の 2 つの局所複素座標系 $\{\mathcal{U}_j, \phi_j\}$, $\{\mathcal{V}_k, \psi_k\}$ は, $\mathcal{U}_j \cap \mathcal{V}_k \neq \emptyset$ となる任意の j, k に対して $\psi_k \circ \phi_j^{-1}$ が双正則写像となるとき, 正則同値であるという.
3. 連結 Hausdorff 空間上の局所複素座標系の正則同値類を複素構造, 複素構造 X が定義されている連結 Hausdorff 空間を複素多様体といい, 同じ記号 X で表す.

□

【Definition C.1.2 (正則写像)】

1. 2 つの複素多様体 X, Y の間の写像 $f : X \rightarrow Y$ は, それぞれの局所複素座標系 $\{U_j, \phi_j\}$, $\{\mathcal{V}_k, \psi_k\}$ に対して, $\psi_k \circ f \circ \phi_j^{-1}$ が正則写像となるとき正則であるという.

2. 正則写像 f が逆写像をもちそれも正則となるとき双正則であるという。特に、2つの複素多様体の間に双正則な同相写像が存在するとき、それらは双正則同値であるという。

□

【Definition C.1.3 (解析的集合と部分多様体)】

1. S を複素多様体 X^n の閉部分集合とする。 S の各点 p に対して、 p の開近傍 $\mathcal{U}(p)$ とその上で定義された正則関数の組 f_p^1, \dots, f_p^ν が存在して

$$S \cap \mathcal{U}(p) = \{q \in U(p) \mid f_p^1(q) = \dots = f_p^\nu(q) = 0\} \quad (\text{C.1.2})$$

が成り立つとき、 S を X^n の解析的部分集合、 f_p^1, \dots, f_p^ν をその p における局所方程式という。

2. 解析的部分集合 S の点 p に対して、 p における局所複素座標系を (z^1, \dots, z^n) とするとき、 p の近傍で

$$\text{rank} \frac{\partial(f^1, \dots, f^\nu)}{\partial(z^1, \dots, z^n)} = \nu \quad (\text{C.1.3})$$

となる局所方程式 f^1, \dots, f^ν が存在するとき、 S は p でなめらかであるといひ、 $n - \nu$ を S の p における次元という。

3. 解析的部分集合 S が点 p においてなめらかでないとき、 p を S の特異点という。
4. 複素多様体の特異点を持たない解析的部分集合を部分多様体という。

□

C.1.2 概複素多様体

【Definition C.1.4 (概複素構造)】

1. $2n$ 次元多様体 \mathcal{M} の接バンドル $T(\mathcal{M})$ から自分自身への (ベクトルバンドルとしての) バンドル写像 J 、すなわち可逆な $(1, 1)$ 型テンソル場 J が $J^2 = -1$ を満たすとき、 J を \mathcal{M} の概複素構造という。また、組 (\mathcal{M}, J) を概複素多様体という。
2. $\mathbb{C}^n \ni (z^1, \dots, z^n)$ に対して、 $z^j = x^j + iy^j$ とおくと、写像

$$J: \partial/\partial x^j \rightarrow \partial/\partial y^j, \quad \partial/\partial y^j \rightarrow -\partial/\partial x^j \quad (\text{C.1.4})$$

を \mathbb{C}^n の標準複素構造という。

3. 概複素多様体 (\mathcal{M}, J) の自然な向きを $(X_1, \dots, X_m, JX_1, \dots, JX_m)$ により定義する。 \mathbb{C}^m の場合, この向きは $(x^1, \dots, x^m, y^1, \dots, y^m)$ に対応する。
3. 複素多様体 X の局所複素座標系を $\{(\psi, \mathcal{U})\}$ とするとき, $\psi: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}^n$ による \mathbb{C}^n の標準複素構造の引き戻しは X 上に概複素構造 J を定義する。これを, X の複素構造に付随する概複素構造という。

□

【Theorem C.1.5 (概複素構造の 積分可能性)】 概複素多様体 (M, J) の概複素構造が複素構造に付随するための必要十分条件は, 次式により定義される (1,2) 型テンソル場 N がゼロとなることである:

$$\frac{1}{2}N(X, Y) = [JX, JY] - [X, Y] - J[X, JY] - J[JX, Y] \quad (\text{C.1.5})$$

N は Nijenhuis テンソルまたは複素捻れテンソルと呼ばれる。 □

C.1.3 複素多様体上のテンソル

【Definition C.1.6 (複素接バンドル)】

1. 概複素多様体 (\mathcal{M}, J) に対して, \mathcal{M} の複素接バンドル $T^c(\mathcal{M}) = T(\mathcal{M}) \otimes \mathbb{C}$ の部分複素ベクトルバンドルを

$$T'(\mathcal{M}) = T^{1,0}(\mathcal{M}) = \{V \in T^c(\mathcal{M}) \mid JV = iV\}, \quad (\text{C.1.6a})$$

$$T''(\mathcal{M}) = T^{0,1}(\mathcal{M}) = \{V \in T^c(\mathcal{M}) \mid JV = -iV\}, \quad (\text{C.1.6b})$$

により定義すると,

$$T^c(\mathcal{M}) = T'(\mathcal{M}) \oplus T''(\mathcal{M}). \quad (\text{C.1.7})$$

2. 余接バンドル $T^*(\mathcal{M})$ に対して, 線形作用素 J を

$$(J\omega)(X) = \omega(JX), \quad \forall X \in T_p(\mathcal{M}), \omega \in T^*_p(\mathcal{M}) \quad (\text{C.1.8})$$

により定義する。このとき, 複素余接バンドル $T^{*c}(\mathcal{M})$ に対して,

$$A^{1,0}(\mathcal{M}) = \{\omega \in T^{*c}(\mathcal{M}) \mid J\omega = i\omega\}, \quad (\text{C.1.9a})$$

$$A^{0,1}(\mathcal{M}) = \{\omega \in T^{*c}(\mathcal{M}) \mid J\omega = -i\omega\}, \quad (\text{C.1.9b})$$

と定義すると,

$$A^1(\mathcal{M}) = T^{*c}(\mathcal{M}) = A^{1,0}(\mathcal{M}) \oplus A^{0,1}(\mathcal{M}). \quad (\text{C.1.10})$$

$\wedge T^{c*}(\mathcal{M})$ の部分ベクトルバンドルを

$$A^{p,q}(\mathcal{M}) = \left(\bigwedge^p A^{1,0}(\mathcal{M}) \right) \wedge \left(\bigwedge^q A^{0,1}(\mathcal{M}) \right) \quad (\text{C.1.11})$$

により定義すると,

$$A^n(\mathcal{M}) = \bigwedge^n T^{c*}(\mathcal{M}) = \sum_{p+q=n} A^{p,q}(\mathcal{M}). \quad (\text{C.1.12})$$

このとき, $A^{p,q}(\mathcal{M})$ の (局所) 断面を (p, q) 次の複素微分形式といい, その全体を $\mathcal{A}^{p,q}(\mathcal{M})$ と表す.

□

【Proposition C.1.7】 複素多様体 X^n の局所複素座標系を (z^1, \dots, z^n) とする.

1. $T^{1,0}(X)$ の局所断面, すなわち $(1, 0)$ 型複素ベクトル場の基底は

$$\partial/\partial z^j = \frac{1}{2} (\partial/\partial x^j - i\partial/\partial y^j), \quad (\text{C.1.13})$$

で, $T^{0,1}(X)$ の局所断面, すなわち $(0, 1)$ 型複素ベクトル場の基底は

$$\partial/\partial \bar{z}^j = \frac{1}{2} (\partial/\partial x^j + i\partial/\partial y^j), \quad (\text{C.1.14})$$

で与えられる.

2. $\mathcal{A}^{p,q}$ の基底は

$$dz^I \wedge d\bar{z}^J; \quad I = (i_1, \dots, i_p), \quad J = (j_1, \dots, j_q) \quad (\text{C.1.15})$$

で与えられる.

□

【Proposition C.1.8 (積分可能性条件)】 概複素構造 J は次の 3 つの互いに同値である..

- i) 概複素構造 J が捩れを持たない, すなわち Nijenhuis テンソルがゼロ.
- ii) 任意の $(1, 0)$ 型 1 形式 θ に対して, $d\theta$ が $(0, 2)$ 型成分を持たない.
- iii) $(1, 0)$ 型ベクトル場の交換子が常に $(1, 0)$ 型ベクトル場となる.

□

【Definition C.1.9 (正則ベクトル場と正則微分形式)】

1. 複素多様体 X 上の $(1, 0)$ 型複素ベクトル場 V を局所複素座標系 (z^1, \dots, z^n) を用いて局所的に

$$V = \sum_j V^j \partial / \partial z^j \quad (\text{C.1.16})$$

と表すとき, V^1, \dots, V^n が常に正則関数となるならば V を正則ベクトル場という.

2. 複素多様体 X 上の $(p, 0)$ 次微分形式 ω を局所複素座標系 (z^1, \dots, z^n) を用いて局所的に

$$\omega = \sum_{I=(i_1, \dots, i_p)} \omega_I dz^I \quad (\text{C.1.17})$$

と表すとき, ω_I が常に正則関数となるならば ω を p 次正則微分形式という.

□

【Proposition C.1.10 (Dolbeault 微分)】

1. 複素多様体 X 上の (p, q) 次複素微分形式 ω に対して, 直和分解

$$d\omega = \partial\omega + \bar{\partial}\omega \in \mathcal{A}^{p+1, q}(X) + \mathcal{A}^{p, q+1}(X) \quad (\text{C.1.18})$$

により写像

$$\partial : \mathcal{A}^{p, q}(X) \rightarrow \mathcal{A}^{p+1, q}(X), \quad (\text{C.1.19a})$$

$$\bar{\partial} : \mathcal{A}^{p, q}(X) \rightarrow \mathcal{A}^{p, q+1}(X), \quad (\text{C.1.19b})$$

を定義すると,

$$\partial^2 = 0, \quad \bar{\partial}^2 = 0, \quad \partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial = 0. \quad (\text{C.1.20})$$

2. $\omega \in \mathcal{A}^{p, 0}(X)$ が正則であるための必要十分条件は, $\bar{\partial}\omega = 0$.

□

§C.2

複素構造の変形

【Proposition C.2.1】 複素構造 J の無限小変形を \dot{J} と表すと

$$\dot{J}J + J\dot{J} = 0$$

が成り立つ。この条件は、

$$\begin{aligned} \dot{J} &= I + \bar{I}; \\ I &= I^a_{\bar{b}} \partial_a \otimes d\bar{z}^b \in \mathcal{T}^{1,0} \otimes \mathcal{A}^{0,1}(M). \end{aligned}$$

このとき、

$$\begin{aligned} \dot{N} &= -2(i + J)\bar{\partial}I + 2(i - J)\partial\bar{I}, \\ \mathcal{L}_X J &= 2i(\bar{\partial}X' - \partial X''). \end{aligned}$$

ここで、 N は Nijenhuis テンソル。また、 $X = X' + X'' \in \mathcal{T}^{1,0} \oplus \mathcal{T}^{0,1}(M)$ 。 \square

【Definition C.2.2 (可微分族)】 \mathbb{R}^m 内の領域 B の各点 t に対しコンパクト複素多様体 $M_t = M_t^n$ が与えられているとする。このとき、次の条件を満たす可微分多様体 \mathcal{M} と \mathcal{M} を B の上に写す \mathcal{C}^∞ 写像 ϖ が存在するならば、集合 $\{M_t \mid t \in B\}$ をコンパクト多様体の可微分族 (differentiable family) とよぶ：

- (i) \mathcal{M} の各点において \mathcal{C}^∞ 写像 ϖ の Jacobi 行列の階数は m に等しい。
- (ii) 各点 $t \in B$ に対して、 $\varpi^{-1}(t)$ は \mathcal{M} のコンパクトな連結部分集合である。
- (iii) $\varpi^{-1}(t) = M_t$
- (iv) \mathcal{M} の局所開被覆 $\{\mathcal{U}_j \mid j = 1, 2, 3, \dots\}$ と \mathcal{U}_j 上の複素数値 \mathcal{C}^∞ 関数 $z_j^a(p)$ ($a = 1, \dots, n, j = 1, 2, 3, \dots$) が存在して、各 t に対して複素多様体 M_t の局所複素座標系をなす。

[小平邦彦著「複素多様体論」(岩波書店, 1992)] \square

【Definition C.2.3 (可微分族の同値性)】 領域 $B \subset \mathbb{R}^m$ を底空間とする2つの可微分族 (\mathcal{M}, B, ϖ) と (\mathcal{N}, B, π) が与えられたとき、 \mathcal{M} を \mathcal{N} の上に写す可微分同相写像 Φ が存在して、各 $t \in B$ に対して Φ が $M_t = \varpi^{-1}(t)$ を $N_t = \pi^{-1}(t)$ の上に双正則に写すならば、可微分族 \mathcal{M} と \mathcal{N} は同値であるという。 \square

【Definition C.2.4 (自明な可微分族)】 可微分族 (\mathcal{M}, B, ϖ) が $(M \times B, B, \pi)$ ($M = \varpi^{-1}(t_0), t_0 \in B$) と同値であるとき, (\mathcal{M}, B, ϖ) は自明であるという. \square

【Theorem C.2.5 (Frölicher-Nijenhuis の定理 (1957))】 コンパクト複素多様体の可微分族 (\mathcal{M}, B, ϖ) (B は \mathbb{R}^m 内の領域で $0 \in B$) において, $H^1(M_0, \Theta^0) = 0$, $M_0 = \varpi^{-1}(0)$ ならば, 十分小さい開多重区間 I ($0 \in I \subset B$) に対して $(\mathcal{M}_I, I, \varpi)$ は自明である.

[Frölicher A, Nijenhuis A: *A theorem on stability of complex structures*, Proc. Nat. Acad. Sci. (USA) 43: 239-41 (1957)] \square

【Theorem C.2.6】 複素構造の無限小変形の自由度は $H^1(M, \Theta)$ と 1 対 1 に対応する. ここで, Θ は正則ベクトル場の層. \square

【Note C.2.7 (説明)】 複素構造の無限小変形と $H^1(M, \Theta)$ との対応は次のようにして得られる.

1. 可微分族 (\mathcal{M}, B, ϖ) において, $t \in B$ 近傍での複素局所座標系 $(\mathcal{U}_j, z_j^a (a = 1, \dots, n))$ に対し, 各 t での座標変換を $z_j = f_{ji}(z_i, t)$ とおく. このとき, $\mathcal{U}_j \cap \mathcal{U}_i$ での正則ベクトル場 $\theta_{ji}(t)$ を

$$\theta_{ji}(t) = \frac{f_{ji}^a(z_i, t)}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z_i^a} \quad (\text{C.2.1})$$

により定義すると, 座標変換の結合則

$$f_{ki}(z_i, t) = f_{kj}(f_{ji}(z_i, t), t) \quad (\text{C.2.2})$$

より

$$\theta_{ki}(t) = \theta_{kj}(t) + \theta_{ji}(t), \quad \theta_{ij}(t) = -\theta_{ji}(t) \quad (\text{C.2.3})$$

が成り立つ. したがって, 対応 $\mathcal{U}_j \cap \mathcal{U}_i \mapsto \theta_{ji}(t)$ は M_t 上の正則ベクトル場の層 Θ_t に係数をもつ Čech コホモロジーにおける 1 コサイクルを定義する.

2. このコサイクルがコバウンダリーとなるとき, すなわち各 \mathcal{U}_i 上の正則ベクトル場 $\theta_i(t)$ が存在して

$$\theta_{ji} = \theta_j - \theta_i \quad (\text{C.2.4})$$

となる条件は, 新たな座標系 $Z_j = g(z_j, t)$ を

$$\frac{\partial g(z_j, t)}{\partial t} = \theta_j(z_j, t) \quad (\text{C.2.5})$$

により定めるとき, Z_j の変換が t に依存しない ($Z_j = F_{ji}(Z_i)$) ことと同等である.

3. 以上より、複素構造の変形の自由度は $H^1(M_t, \Theta_t)$ と対応する。

□

【Definition C.2.8 (複素解析族)】 \mathbb{C}^m 内の領域 B の各点 t に対しコンパクト複素多様体 $M_t = M_t^n$ が与えられているとする。このとき、次の条件を満たす複素多様体 \mathcal{M} と \mathcal{M} を B の上に写す正則写像 ϖ が存在するならば、 M_t は t に正則に依存するといひ、集合 $\{M_t \mid t \in B\}$ をコンパクト多様体の複素解析族 (complex analytic family) とよぶ：

- (i) \mathcal{M} の各点において正則写像 ϖ の Jacobi 行列の階数は m に等しい。
- (ii) 各点 $t \in B$ に対して、 $\varpi^{-1}(t)$ は \mathcal{M} のコンパクトな部分多様体である。
- (iii) $\varpi^{-1}(t) = M_t$

[小平邦彦著「複素多様体論」(岩波書店, 1992)]

□

【Theorem C.2.9 (微分同相性)】 コンパクト多様体の複素解析族 (\mathcal{M}, B, ϖ) において、任意の $t, s \in B$ に対して M_t と M_s は微分同相である。[小平邦彦著「複素多様体論」(岩波書店, 1992)]

□

【Definition C.2.10 (完備性)】 複素解析族 (\mathcal{M}, B, ϖ) が $p \in B$ で完備であるとは、点 $q \in C$ と双正則同型 $\phi : N_q \rightarrow M_p$ が存在するような任意の族 (\mathcal{N}, C, π) に対して、 q の近傍 \mathcal{U} と正則写像 $f : T' \rightarrow B, h : \pi^{-1}(\mathcal{U}) \rightarrow \mathcal{M}$ が存在して、次の3条件を満たすことである。

- i) $f \circ \pi = \varpi \circ h$
- ii) $f(q) = p$
- iii) N_q 上で $h = \phi$.

このとき、 \mathcal{U} を十分小さく取ると、 h は各ファイバー N_t から $M_{f(t)}$ 上への双正則同型を与えている。したがって、 p で完備な族は、 M_p のすべての微小変形を含んでいるといえる。

□

【Definition C.2.11 (効果的パラメーター)】 複素解析族 (\mathcal{M}, B, ϖ) の点 $p \in B$ において、小平-Spencer 写像

$$\rho_p : T_p B \rightarrow H^1(M_p, \Theta) \quad (\text{C.2.6})$$

が単射となるとき、 (\mathcal{M}, B, ϖ) は p で効果的にパラメータ付けされているという。

□

【Theorem C.2.12 (倉西の基本定理(1964))】 任意のコンパクト複素多様体 M に対し, 次の条件を満たす複素解析族 (\mathcal{M}, B, ϖ) と $p \in B$ が存在する:

- i) B の各点で完備.
- ii) p で効果的にパラメーター付けされている.
- iii) $M_p = M$.

このとき, B を倉西空間 (Kuranishi space) または M の局所モジュライ空間 (local moduli space) と呼ぶ. _____□

§C.3

エルミート多様体

C.3.1 エルミート計量

【Definition C.3.1】

1. 概複素多様体 (\mathcal{M}, J) の Riemann 計量 g が任意のベクトル場 X, Y に対して

$$g(JX, JY) = g(X, Y) \quad (\text{C.3.1})$$

を満たすとき、エルミート計量という。

2. エルミート計量を与えられた概複素多様体を概エルミート多様体、エルミート計量を与えられた複素多様体をエルミート多様体という。

□

【Definition C.3.2 (Kähler 形式)】 概エルミート多様体 (\mathcal{M}, J, g) に対して、

$$\omega(X, Y) = g(JX, Y) \quad (\text{C.3.2})$$

により定義される 2 次微分形式 Φ を基本 2 形式ないし **Kähler** 形式という。成分表示では、 $J\partial_j = J_j^k \partial_k$ と定義すると、 $\omega_{jk} = g_{kl} J_j^l = J_{jk}$ である。(注: Kobayashi-Nomizu の定義 Φ との対応は、 $\Phi = -\omega$.) □

【Proposition C.3.3】

1. エルミート計量 g を複素接バンドルに拡張すると次の性質を持つ:
- i) 任意の複素ベクトル場 Z, W に対して、 $g(\bar{Z}, \bar{W}) = \overline{g(Z, W)}$.
 - ii) 任意のゼロでない複素ベクトル場 Z に対して、 $g(Z, \bar{Z}) > 0$.
 - iii) $(1, 0)$ 型ベクトル場 Z と $(0, 1)$ 型ベクトル場 W に対して、 $g(Z, \bar{W}) = 0$.

特に、 $h(Z, W) = 2g(Z, \bar{W})$ は $T'(\mathcal{M})$ 上の正値エルミート計量を与える。

2. 逆に、 $T'(\mathcal{M})$ の正値エルミート計量 $h(*, *)$ が与えられると、 $2g(Z, \bar{W}) = h(Z, W)$ ($Z, W \in T'_p(\mathcal{M})$) と 1.i)-iii) を満たす複素接バンドルの対称双線形形式 g が一意的に存在し、その実接バンドル $T(\mathcal{M})$ への制限は \mathcal{M} のエルミート計量を与える。

3. $T'(\mathcal{M})$ の断面, すなわち $(1,0)$ 型複素ベクトル場の基底を f_1, \dots, f_n , $\mathcal{A}^{1,0}(\mathcal{M})$ の双対基底を ϕ^1, \dots, ϕ^n とおく. すなわち, $\phi^j(f_k) = \delta_k^j$. このとき, $T'(\mathcal{M})$ のエルミート計量 h を

$$h = h_{ij}\phi^i\bar{\phi}^j; \quad h_{ij} = h(f_i, f_j) = 2g(f_i, \bar{f}_j) \quad (\text{C.3.3})$$

とおくと, h_{ij} はエルミート行列で, 基本2形式 ω は

$$\omega = \frac{i}{2}h_{ij}\phi^i \wedge \bar{\phi}^j \quad (\text{C.3.4})$$

と表される.

□

[Note C.3.4] Riemann 計量 g を $T^*(\mathcal{M})$ に拡張したものは, 形式的に

$$ds^2 = g_{jk}dz^j \otimes dz^k + g_{j\bar{k}}dz^j \otimes d\bar{z}^k + g_{\bar{j}k}d\bar{z}^j \otimes dz^k + g_{\bar{j}\bar{k}}d\bar{z}^j \otimes d\bar{z}^k \quad (\text{C.3.5})$$

と表される. ここで, 計量が対称形式である条件は $g_{jk} = g_{kj}, g_{j\bar{k}} = g_{\bar{k}j}, g_{\bar{j}k} = g_{k\bar{j}}$, 計量が実接空間 $T^*(\mathcal{M})$ 上で実である条件は $g_{j\bar{k}} = \bar{g}_{j\bar{k}}, g_{\bar{j}k} = \bar{g}_{\bar{j}k}$ と表されるので,

$$ds^2 = g_{jk}dz^j \otimes dz^k + \bar{g}_{j\bar{k}}d\bar{z}^j \otimes d\bar{z}^k + g_{\bar{j}k}(dz^j \otimes dz^k + d\bar{z}^k \otimes dz^j). \quad (\text{C.3.6})$$

このとき, Hermite 計量である条件は, $g_{jk} = 0$. よって, Hermite 計量は,

$$ds^2 = g_{j\bar{k}}(dz^j \otimes d\bar{z}^k + d\bar{z}^k \otimes dz^j). \quad (\text{C.3.7})$$

ただし, $\bar{g}_{j\bar{k}} = g_{k\bar{j}}$. したがって, $h_{jk} = 2g_{j\bar{k}}$ を用いると,

$$ds^2 = \frac{1}{2}h_{jk}(dz^j \otimes d\bar{z}^k + d\bar{z}^k \otimes dz^j) \quad (\text{C.3.8})$$

この式はしばしば,

$$ds^2 = h_{jk}dz^j d\bar{z}^k \quad (\text{C.3.9})$$

と表される. たとえば,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \Rightarrow ds^2 = dzd\bar{z}. \quad (\text{C.3.10})$$

また,

$$ds^2 = \text{Re}(h_{jk}dz^j \otimes d\bar{z}^k), \quad \omega = -\text{Im}(h_{jk}dz^j \otimes d\bar{z}^k). \quad (\text{C.3.11})$$

特に,

$$\omega = \frac{i}{2}h_{jk}dz^j \wedge d\bar{z}^k. \quad (\text{C.3.12})$$

□

§C.4

Kähler 多様体

【Definition C.4.1】

1. 概エルミート多様体 (\mathcal{M}, J, g) は、基本 2 形式 Φ が閉形式となるとき、概 Kähler 多様体という。
2. 概 Kähler 多様体は、その概複素構造が積分可能であるとき、すなわち、複素多様体で J がその複素構造から決まる概複素構造となるとき、Kähler 多様体という。

□

【Note C.4.2】 様々な定義の関係

$\Phi \setminus J$	N/A	\exists (almost complex)	$N = 0$ (complex)
\exists		almost Hermitian	Hermitian
$d\Phi = 0$	almost symplectic	almost Kähler	Kähler

□

【Theorem C.4.3】 概エルミート多様体 (\mathcal{M}, J, g) が Kähler 多様体となるための必要十分条件は、 g が概複素的すなわち、 $\nabla J = 0$ となることである。 □

【Theorem C.4.4】 エルミート多様体が Kähler 多様体となるための必要十分条件は、各点 p の近傍で

$$ds_p^2 = dz^i d\bar{z}^i, \quad D(\partial_{z_i})|_p = 0$$

となる複素座標が存在することである。 □

C.4.1 基本的性質

【Theorem C.4.5】 Kähler 多様体の複素部分多様体は、誘導計量により再び Kähler 多様体となる。 □

【Theorem C.4.6 (Kähler ポテンシャル)】 Hermite 計量が Kähler 計量となるための必要十分条件は、Kähler 形式 ω が、局所的に滑らかな実関数 K (Kähler ポテンシャル) を用いて次のように表されることである：

$$\omega = \frac{1}{2} dd^c K = i\partial\bar{\partial}K.$$

ここで、 $d^c = i(\bar{\partial} - \partial)$. □

【Note C.4.7 (座標表示)】 計量成分 $ds^2 = 2g_{j\bar{k}} dz^j d\bar{z}^k$ と K の関係は、

$$g_{j\bar{k}} = \partial_j \bar{\partial}_{\bar{k}} K. \quad (\text{C.4.1})$$

□

C.4.2 曲率テンソル

【Proposition C.4.8】 Kähler 多様体の曲率テンソル R と Ricci テンソル Ric は次の性質をもつ：

$$1. R(X, Y) \circ J = J \circ R(X, Y), \quad R(JX, JY) = R(X, Y).$$

$$R^a e c d J_e^b = J_e^a R^e b c d, \quad R^a_{b e f} J_c^e J_d^f = R^a_{b c d}$$

$$2. \text{Ric}(JX, JY) = \text{Ric}(X, Y).$$

$$J_a^e J_b^f R_{ef} = R_{ab}$$

$$3. \text{Ric}(X, Y) = \frac{1}{2} \text{Tr}(J \circ R(X, JY)).$$

$$R_{ab} = \frac{1}{2} J^{ef} R_{efac} J_b^c$$

□

【Definition C.4.9 (Ricci 形式)】 Kähler 多様体の Ricci 曲率から定義される

$$\rho(X, Y) = \text{Ric}(JX, Y)$$

は 2 形式となり、Ricci 形式と呼ばれる。成分表示では、

$$\rho_{ab} = J_a^c R_{cb} = J^{cd} R_{cadb} = -\frac{1}{2} R_{abcd} J^{cd} \quad (\text{C.4.2})$$

□

[Proposition C.4.10 (成分表示)] $e_1, \dots, e_n, e_{\bar{1}}, \dots, e_{\bar{n}} (e_{\bar{k}} = J e_k)$ を $T_x(M)$ の基底, $\theta^1, \dots, \theta^n, \theta^{\bar{1}}, \dots, \theta^{\bar{n}} (\theta^{\bar{k}} = -J\theta^k)$ をその双対基底として,

$$\begin{aligned}\phi^j &= (1 - iJ)\theta^j, & f_j &= \frac{1}{2}(1 - iJ)e_j, \\ \Psi_{\bar{k}}^j &= \phi^j(\mathcal{R}f_j) = \mathcal{R}_{\bar{k}}^j - i\mathcal{R}_{\bar{k}}^{\bar{j}}\end{aligned}$$

とおくと,

$$\mathcal{R}_{\bar{k}}^{\bar{j}} = \mathcal{R}_{\bar{k}}^j, \quad \mathcal{R}_{\bar{k}}^j = -\mathcal{R}_{\bar{k}}^{\bar{j}}$$

より,

$$\rho = i\Psi_{\bar{j}}^j$$

が成り立つ. □

C.4.3 座標成分表示

[Proposition C.4.11] 複素座標系 z^j に関する成分表示のもとで次の諸式が成り立つ:

1. 計量

$$ds^2 = 2g_{i\bar{j}}dz^i d\bar{z}^j$$

ただし, $\bar{g}_{i\bar{j}} = g_{j\bar{i}}$.

2. Kähler 形式

$$\omega = ig_{i\bar{j}}dz^i \wedge d\bar{z}^j$$

3. 接続係数

$$\begin{aligned}\Gamma_{jk}^i &= \Gamma_{kj}^i = g^{i\bar{l}} \frac{\partial g_{l\bar{j}}}{\partial z^k}, \\ \Gamma_{\bar{j}\bar{k}}^{\bar{i}} &= \Gamma_{\bar{k}\bar{j}}^{\bar{i}} = g^{\bar{i}l} \frac{\partial g_{l\bar{j}}}{\partial \bar{z}^k}\end{aligned}$$

他の成分はゼロ.

4. 曲率テンソル

$$R_{i\bar{j}k\bar{l}} = g_{m\bar{j}} \frac{\partial \Gamma_{ik}^m}{\partial \bar{z}^l} = \frac{\partial^2 g_{i\bar{j}}}{\partial z^k \partial \bar{z}^l} - g^{m\bar{n}} \frac{\partial g_{i\bar{n}}}{\partial z^k} \frac{\partial g_{\bar{j}m}}{\partial \bar{z}^l}$$

およびこれと Riemann 曲率テンソルの代数的対称性から決まるもの以外はゼロ.

5. Ricci 曲率と Ricci 形式

$$\begin{aligned} R_{i\bar{j}} &= -\frac{\partial^2 \ln G}{\partial z^i \partial \bar{z}^j}, \\ \rho &= -i\partial\bar{\partial} \ln G, \\ G &= \det(g_{i\bar{j}}). \end{aligned}$$

特に, Ricci 形式は複素構造と体積要素のみで決まる.

□

C.4.4 正則キリングベクトル場とモーメント写像

$k = k^j(z)\partial_j + k^{\bar{j}}(\bar{z})\partial_{\bar{j}}$ を正則 Killing ベクトルとすると, Kähler 形式 ω に対して,

$$\mathcal{L}_k \omega = (d \circ I_k + I_k \circ d)\omega = d \circ I_k \omega = 0 \Leftrightarrow I_k \omega = d\mathcal{P}(z, \bar{z}) \quad (\text{C.4.3})$$

が成り立つ. $\mathcal{P}(z, \bar{z})$ はモーメント写像 (Moment map) と呼ばれる. この関係式を具体的に成分で表すと,

$$k^j = -ig^{j\bar{k}}\partial_{\bar{k}}\mathcal{P} \Leftrightarrow k_{\bar{j}} = -i\partial_{\bar{j}}\mathcal{P}, \quad (\text{C.4.4a})$$

$$k^{\bar{j}} = ig^{k\bar{j}}\partial_k\mathcal{P} \Leftrightarrow k_j = i\partial_j\mathcal{P} \quad (\text{C.4.4b})$$

これより

$$\nabla_j \partial_k \mathcal{P} = 0 \quad (\text{C.4.5})$$

が成り立つが, 逆に, この条件を満たす \mathcal{P} を用いて (C.4.4) により定義される正則ベクトル場 k は Killing ベクトルとなる.

(C.4.4) の反転公式が次のようにして得られる. まず, k に対する無限小変換による Kähler ポテンシャルの変化は, 正則関数 $r(z)$ を用いて

$$\delta K = \theta(k^j \partial_j + k^{\bar{j}} \partial_{\bar{j}})K(z, \bar{z}) = \theta(r(z) + \bar{r}(\bar{z})) \quad (\text{C.4.6})$$

と表される. これより,

$$\mathcal{P} = i(k^j \partial_j K - r(z)) = -(k^{\bar{j}} \partial_{\bar{j}} K - \bar{r}(\bar{z})) \quad (\text{C.4.7})$$

とおくと, (C.4.4) が成り立つことが確かめられる.

つぎに, 正則キリングベクトルの系 k_A が閉じた交換関係

$$[k_A, k_B] = f^C_{AB} k_C \quad (\text{C.4.8})$$

を満たすとすると, $I_{k_A} \omega = d\mathcal{P}_A$ および $I_{[X, Y]} = [\mathcal{L}_X, I_Y]$ より,

$$\mathcal{L}_{k_A} \mathcal{P}_B = f^C_{AB} \mathcal{P}_C \quad (\text{C.4.9})$$

を得る. この整合性条件は, 成分で表すと,

$$k_A^j k_{Bj} - k_{Aj} k_B^j = -f^C_{AB} \mathcal{P}_C \quad (\text{C.4.10})$$

となる.

C.4.5 Kähler-Hodge 多様体

【Definition C.4.12 (Kähler-Hodge 多様体)】 Kähler 多様体 M は, $c_1(L) = [\mathcal{K}] (= \text{Kähler 類})$ となる線バンドル $L \rightarrow M$ が存在するとき, Kähler-Hodge 多様体であるという. □

C.4.6 射影 Kähler 多様体

複素次元 $(n+1)$ の Kähler 多様体 (M, g, J) が重み 1 の閉相似 Killing ベクトル k をもつとする:

$$ds^2 = 2g_{I\bar{J}}dX^I d\bar{X}^{\bar{J}}; \quad g_{I\bar{J}} = \partial_I \partial_{\bar{J}} N(X, \bar{X}), I, J = 0, \dots, n+1 \quad (\text{C.4.11a})$$

$$\nabla_i k_j = g_{ij}(i, j = 0, \dots, 2(n+1)) \quad (\text{C.4.11b})$$

このとき, k は正則ベクトル場となり, Kähler ポテンシャルに対して適当な Kähler 変換を施すと,

$$k_I = \partial_I N, \quad k_{\bar{I}} = \partial_{\bar{I}} N, \quad (\text{C.4.12a})$$

$$k^I \partial_I N = N, \quad k^{\bar{I}} \partial_{\bar{I}} N = N \quad (\text{C.4.12b})$$

が成り立つ. さらに,

$$k' : k'_I = ik_I, \quad k'_{\bar{I}} = -ik_{\bar{I}} \quad (\text{C.4.13})$$

とおくと, k' は正則 Killing ベクトル場となり,

$$[k, k'] = 0 \quad (\text{C.4.14})$$

以上より, M の複素座標系 $(y, z^\alpha)(\alpha = 1, \dots, n)$ で

$$k = y\partial_y + \bar{y}\partial_{\bar{y}}, \quad k' = i(y\partial_y - \bar{y}\partial_{\bar{y}}) \quad (\text{C.4.15})$$

となるものが存在する. この座標系では, Kähler ポテンシャル N は

$$N = -ay\bar{y}e^{-K(z, \bar{z})/a} \quad (\text{C.4.16})$$

と表される. また,

$$e_\alpha \equiv \partial_\alpha + \frac{1}{a} \partial_\alpha K y \partial_y \quad (\alpha = 1, \dots, n) \quad (\text{C.4.17})$$

とおくと,

$$e_\alpha N = 0, \quad k' N = 0 \quad (\text{C.4.18})$$

で、ベクトル場の基底を (k, k', e_α) の内積は

$$g(k, k) = g(k', k') = 2N, \quad g(k, k') = 0, \quad (\text{C.4.19a})$$

$$g(k, e_\alpha) = g(k', e_\alpha) = 0, \quad (\text{C.4.19b})$$

$$g(e_\alpha, e_{\bar{\beta}}) = -\frac{N}{a} \partial_\alpha \partial_{\bar{\beta}} K, \quad g(e_\alpha, e_\beta) = 0. \quad (\text{C.4.19c})$$

よって、元の計量は

$$ds^2 = 2N \left| \frac{dy}{y} - \frac{1}{a} \partial_\alpha K dz^\alpha \right|^2 + \left(\frac{-2N}{a} \right) \partial_\alpha \partial_{\bar{\beta}} K dz^\alpha d\bar{z}^{\bar{\beta}} \quad (\text{C.4.20})$$

と表される。これより、 k, k' の軌道による M の商空間 \hat{M} に Kähler 計量

$$\hat{g}_{\alpha\bar{\beta}} = \partial_\alpha \partial_{\bar{\beta}} K \quad (\text{C.4.21})$$

が誘導される。

C.4.7 Special Kähler 多様体

Rigid/affine special Kähler 多様体

【Definition C.4.13 (Rigid/affine special Kähler 多様体)】 Kähler 多様体 (M, g, J) は、次の性質をもつ実接続 $\nabla_s = (A_{ij}{}^k)$ をもつとき、rigid (affine) special Kähler 多様体という：

i) torsion free: $A_{ij}{}^k = A_{ji}{}^k$

ii) 平坦: $\partial_{[i} A_{j]k}{}^l + A_{m[i}{}^l A_{j]m}{}^k = 0$

iii) Symplectic: $\partial_k J_{jk} + 2A_{i[j}{}^l J_{k]l} = 0$

iv) d_{∇_s} を ∇_s に関する共変外微分とすると、

$$d_{\nabla_s} [(d\phi^i) J_i{}^j] \equiv d\phi^k \wedge [\partial_k \delta_l^j + A_{kl}{}^j] [(d\phi^i) J_i{}^l] = 0. \quad (\text{C.4.22})$$

[< Freedman DZ, Van Proeyen A 2012B] _____ □

【Proposition C.4.14】 次の3つの条件は、いずれも、Kähler 多様体 (M, g, J) が rigid special Kähler であるための必要十分条件を与える：

1) 複素座標系 (z^α) において正則な3階完全対称テンソル $C_{\alpha\beta\gamma} = C_{(\alpha\beta\gamma)}(z)$ が存在し、次の条件を満たす：

$$\nabla_{[\delta} C_{\alpha]\beta\gamma} = 0, \quad (\text{C.4.23a})$$

$$R_{\alpha\bar{\gamma}\beta\bar{\delta}}(g) = -C_{\alpha\beta\epsilon} \bar{C}_{\bar{\gamma}\bar{\delta}\bar{\epsilon}} g^{\epsilon\bar{\epsilon}}. \quad (\text{C.4.23b})$$

このとき、平坦接続 $A_{ij}{}^k$ は、Kähler 計量に関する接続 $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ をもちいて

$$A_{\alpha\beta}{}^\gamma = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma, \quad A_{\alpha\beta}{}^{\bar{\gamma}} = g^{\bar{\gamma}\gamma} C_{\alpha\beta\gamma}. \quad (\text{C.4.24})$$

2) 次の2条件を満たす:

i) 実チャート $(\phi^i) = (x^I, f_I) (I = 1, \dots, n, i = 1, \dots, 2n)$ が存在して、Kähler 形式が次のように表される:

$$2\omega = -J_{ij} d\phi^i \wedge d\phi^j = -2dx^I \wedge df_I. \quad (\text{C.4.25})$$

ii) $T'(M)$ の1形式 $\pi^i (i = 1, \dots, 2n)$ を

$$\pi^i = \frac{1}{2} d\phi^j (\delta_i^j - iJ_j^i) \quad (\text{C.4.26})$$

により定義するとき、 $2n$ 個の正則関数の組 $(X^I(z), F_I(z))$ が存在して、i) の座標系のもとで、

$$\pi^I = dX^I(z), \quad \pi_I = dF_I(z) \quad (\text{C.4.27})$$

このとき、

$$dx^I = 2\text{Re}(dX^I(z)), \quad df_I = 2\text{Re}(dF_I(z)) \quad (\text{C.4.28})$$

が成り立つ。

3) 次の2式を満たす $2n$ 個の正則関数系 $(X^I(z), F_I(z))$ が存在する:

$$dX^I \wedge dF_I = 0, \quad (\text{C.4.29a})$$

$$-\omega = -ig_{\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha \wedge d\bar{z}^{\bar{\beta}} = dX^I \wedge d\bar{F}_I + d\bar{X}^I \wedge dF_I. \quad (\text{C.4.29b})$$

これらの条件は、 $V = (X^I(z), F_I(z))$ とおくと、シンプレクティック内積

$$\langle V_1, V_2 \rangle \equiv X_1^I F_{2I} - F_{1I} X_2^I \quad (\text{C.4.30})$$

を用いて、

$$\langle \partial_\alpha V, \partial_\beta V \rangle = 0, \quad (\text{C.4.31a})$$

$$-\omega_{\alpha\bar{\beta}} = \langle \partial_\alpha, \partial_{\bar{\beta}} \bar{V} \rangle \quad (\text{C.4.31b})$$

と表される。

□

[Proposition C.4.15 (Prepotential)] Rigid special Kähler 多様体の symplectic section を $(X^I(z), F_I(z)) (I = 1, \dots, n)$ とする。

1. $\partial_\alpha Z^I$ が行列として正則なら、 F_I は適当な正則関数 $F(X)$ を用いて $F_I(z) = \partial F(X(z))/\partial X^I$ と表される。このとき、 $F(X)$ は前ポテンシャル (prepotential) と呼ばれる。
2. Kähler 計量が正定値なら、前ポテンシャルが存在する。

[Craps B, Roose F, Troost W, Van Proeyen A: NPB503, 565-613 (1997), arXiv:hep-th/9703082] _____ □

Projective special Kähler 多様体

(M, J, V) ($V = \mathbb{T}(X^I(z), F_I(z)), I = 0, \dots, n$) を affine special Kähler 多様体、 k をそのウエイト 1 の閉相似 Killing ベクトル場、 k' をそれに随伴する Killing ベクトル場とする。 M に対する Kähler ポテンシャル N は

$$N = i\langle V, V \rangle = i(X_I \bar{F}^I - F_I \bar{X}^I) \quad (\text{C.4.32})$$

ので、複素チャート (y, z^α) を

$$k = y\partial_y + \bar{y}\partial_{\bar{y}}, \quad k' = i(y\partial_y - \bar{y}\partial_{\bar{y}}) \quad (\text{C.4.33})$$

と取ると、

$$V = yv(z); \quad v(z) = \mathbb{T}(Z^I(z), F_I(z)) \quad (\text{C.4.34})$$

となる。いま、

$$i\langle v, \bar{v} \rangle = -ae^{-K(z, \bar{z})/a} \quad (\text{C.4.35})$$

により、 $K(z, \bar{z})$ を定義すると、

$$N = -ay\bar{y}e^{-K(z, \bar{z})/a} \quad (\text{C.4.36})$$

(k, k') の軌道に関する M の商空間 \hat{M} は、 K を Kähler ポテンシャルとする Kähler 多様体 $(\hat{M}, \hat{J}, \hat{g})$ となり、

$$ds^2 = 2N \left| \frac{dy}{y} + \frac{1}{a} \partial_\alpha K dz^\alpha \right|^2 + \frac{-2N}{a} \hat{g}_{\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha d\bar{z}^{\bar{\beta}}. \quad (\text{C.4.37})$$

曲率テンソルは、

$$R_{\alpha\bar{\alpha}\beta\bar{\beta}} = \frac{2}{a} g_{\bar{\alpha}(\alpha} g_{\beta)\bar{\beta}} - C_{\alpha\beta\gamma} g^{\gamma\bar{\gamma}} \bar{C}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}}, \quad (\text{C.4.38a})$$

$$C_{\alpha\beta\gamma} = i\langle \nabla_\alpha \nabla_\beta V, \nabla_\gamma V \rangle \quad (\text{C.4.38b})$$

ここで,

$$\nabla_\alpha v \equiv \partial_\alpha v + \frac{1}{a}(\partial_\alpha K)v, \quad \bar{\nabla}_{\bar{\alpha}} v \equiv 0, \quad (\text{C.4.39a})$$

$$\bar{\nabla}_{\bar{\alpha}} \bar{v} \equiv \partial_{\bar{\alpha}} \bar{v} + \frac{1}{a}(\partial_{\bar{\alpha}} K)\bar{v}, \quad \nabla_\alpha \bar{v} \equiv 0, \quad (\text{C.4.39b})$$

$$\nabla_\alpha y = \nabla_\alpha \bar{y} = 0. \quad (\text{C.4.39c})$$

また, 前ポテンシャルが存在するときには,

$$C_{\alpha\beta\gamma} = iF_{IJK}\nabla_\alpha X^I\nabla_\beta X^J\nabla_\gamma X^K. \quad (\text{C.4.40})$$

$\nabla_\alpha V = y\nabla_\alpha \text{lphav}$ なので,

$$\hat{g}_{\alpha\bar{\beta}} = i\langle \nabla_\alpha V, \bar{\nabla}_{\bar{\beta}} \bar{V} \rangle = iy\bar{y}\langle \nabla_\alpha v, \bar{\nabla}_{\bar{\beta}} \bar{v} \rangle \quad (\text{C.4.41})$$

C.4.8 Hyperkähler 多様体

【Definition C.4.16 (Hyperkähler 多様体)】 M を $4m$ 次元の多様体とする.

1. $\mathbf{J} = (J_1, J_2, J_3)$ を, $J_1 J_2 = J_3$ を満たす概複素構造, g を J_1, J_2, J_3 のいずれに関してもエルミートな計量とすると, (\mathbf{J}, g) を概 hyperkähler 構造, (M, \mathbf{J}, g) を概ハイパー Kähler 多様体という.
2. さらに, g の Levi-Civita 接続 ∇ に対して, $\nabla \mathbf{J} = 0$ がなりたつとき, (\mathbf{J}, g) を hyperkähler 構造, (M, \mathbf{J}, g) をハイパー Kähler 多様体という.

□

【Proposition C.4.17 (Sp(m) 構造)】 概ハイパーケーラー構造は, Sp(m) 構造と同等である. また, ハイパーケーラー構造は, 捩れない Sp(m) 構造と同等である. □

【Proposition C.4.18】 M を $4m$ 次元の多様体, (\mathbf{J}, g) をその概ハイパーケーラー構造を (\mathbf{J}, g) , $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ を \mathbf{J} に対応するエルミート形式とする. このとき, 次の条件は互いに同値である.

- (i) (\mathbf{J}, g) はハイパーケーラー構造である.
- (ii) $d\omega = 0$.
- (iii) $\nabla\omega = 0$.
- (iv) $\text{Hol}(g) \subseteq \text{Sp}(m)$ で, \mathbf{J} は Sp(m) 構造から誘導された複素構造である.

[< Joyce DD 2000B] □

【Theorem C.4.19】 ハイパーケーラー多様体は Ricci 平坦である. □

C.4.9 4元数ケーラー多様体

【Definition C.4.20 (ハイパー複素多様体)】 M を $4m$ 次元の多様体, $\mathbf{J} = (J_1, J_2, J_3)$ を $J_1 J_2 = J_3$ を満たす積分可能な複素構造の組とすると, (\mathbf{J}) をハイパー複素構造 (hypercomplex structure), (M, \mathbf{J}) をハイパー複素多様体 (hypercomplex manifold) と呼ぶ. □

【Proposition C.4.21】

1. ハイパー複素多様体 (M, \mathbf{J}) は, $\nabla \mathbf{J} = 0$ となる捩れのない一意な接続をもつ. この接続は小畑接続と呼ばれ, そのホロノミー群は $GL(m, \mathbb{H})$ の部分群となる.
2. ハイパー複素構造は, 捩れのない $GL(m, \mathbb{H})$ 構造と同等である.

【Definition C.4.22 (4元数ケーラー多様体)】 $\text{Hol}(g) \subseteq \text{Sp}(m)\text{Sp}(1)$ となる $4m$ 次元多様体は, 4元数ケーラー多様体 (quaternionic Kähler manifold) という. ただし, 4次元 ($m = 1$) については, 自己共役な Weyl 曲率をもつ向きづけられた Einstein 多様体と定義する. □

【Proposition C.4.23】 4元数ケーラー多様体は概ハイパーケーラー構造 (\mathbf{J}, g) をもち, Einstein 空間となる. □

C.4.10 標準直線バンドル

【Definition C.4.24 (標準直線バンドル)】 n 次元複素多様体 M に対して, $\wedge^n(T'M)^*$ を標準直線バンドルといい K で表す. また, $\wedge^n T'M$ を反標準直線バンドルといい, K^* で表す. □

【Theorem C.4.25】 Kähler 多様体の Ricci 形式 ρ は, 標準直線バンドル (反標準直線バンドル) に誘導される接続の曲率テンソルの i 倍 ($-i$ 倍) となる. 特に, $\rho = 0$ となる条件は, 標準直線バンドルが平行な局所断面を持つことと同等である. このとき, 対応する断面は正則である. □

C.4.11 ホロノミー

【Theorem C.4.26 (Iwamoto)】 複素次元 n の Kähler 多様体に対して, 制限線形ホロノミー群が $SU(n)$ に含まれるための必要十分条件は, Ricci テンソルが恒等的にゼロとなることである. □

C.4.12 Chern 類

【Theorem C.4.27 (曲率形式による表現)】 Kähler 多様体 M の Kähler 形式を ω , 曲率形式を \mathcal{R} とすると, その p 次 Chern 類 $c_p(M)$ は,

$$c_p(M) = \left[\frac{1}{(p!)^2} I_\omega^p(\mathcal{R} \wedge \cdots \mathcal{R}) \right]$$

と表される. 特に, ρ を Ricci 形式として

$$c_1(M) = \left[\frac{1}{2\pi} \rho \right]$$

□

§C.5

Kähler-Einstein 多様体

C.5.1 一般的性質

【Definition C.5.1 (2次コホモロジー類の符号)】 $H^2(M, \mathbb{R})$ のコホモロジー類は, 正 (負) の $(1, 1)$ 型部分形式を代表元としてもつとき, 正 (負) であるという. この符号は代表元に依存せず, コホモロジー類のみで決まる. ここで $\alpha \in \mathcal{A}_{1,1}(M)$ が正 (負) であるとは, $a(X, Y) = \alpha(X, JY)$ により定義される J 不変実対称双線形形式 a が正 (負) であることを意味する. □

【Proposition C.5.2 (Kähler-Einstein 多様体のスカラ曲率の符号)】 Kähler-Einstein 多様体 M のスカラ曲率 s の符号は複素構造のみにより定まる. さらに, s の値は, M の複素次元を n , V を体積として

$$Vs^n = \frac{4\pi n^n}{n!} c_1^n \quad (\text{C.5.1})$$

により定まる. ここで, c_1^n は複素構造のみで決まる Chern 特性数である. □

【Note C.5.3 (第1 Chern 類の符号)】

1. $\mathbb{C}P^N$ ないの $d_j (j = 1, \dots, p)$ 次同次多項式により定義される超曲面の交わりにより定義される代数多様体 M の第1 Chern 類は, 超曲面が一般の位置にあるとき, $d = d_1 + \dots + d_p$ として

$$c_1(M) = (N + 1 - d)h$$

で与えられる. ここで, h は $H^2(\mathbb{C}P^N, \mathbb{Z})$ の正の生成元の M への制限である.

2. 小平の定理より, 第1 Chern 類が正ないし負のコンパクト複素多様体は複素射影空間への正則埋め込みをもつ.
3. 複素曲面に対しては, $c_1(M)$ が定符号となるのは $c_1^2(M)$ が非負の場合に限る. 一方, 複素曲面を1点でブローアップすると, $c_1^2(M)$ は1だけ減少する. したがって, 十分多くの点でブローアップして得られる曲面の第1 Chern 類は定符号でなくなる. 例えば, $\mathbb{C}P^2$ を r 回ブローアップした曲面 Σ_r に対して, $c_1^2(\Sigma_r) = 9 - r$. また, $0 \leq r \leq 8$ のとき, Σ_r は正の第1 Chern 類をもち, 正の第1 Chern 類をもつ複素曲面はそれらと $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$ に限られる. これらのうち, $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ には Kähler-Einstein 計量が入らないことが示される. $\Sigma_r (4 \leq r \leq 8)$ については, Kähler-Einstein 計量が入るかどうかは不明. [Besse AL 1987]

C.5.2 Calabi-Yau 予想

【Theorem C.5.4 (Calabi-Yau の定理)】 M をコンパクト Kähler 多様体, ω をその Kähler 形式, $c_1(M)$ を第 1 Chern 類とする. このとき, コホモロジー類 $2\pi c_1(M)$ に属する任意の $(1, 1)$ 型実閉形式は, Kähler 形式が ω と同じコホモロジー類に属する Kähler 計量の Ricci 形式となり, そのような Kähler 計量は一意的である. □

【Theorem C.5.5 (Aubin-Calabi-Yau の定理)】 第 1 Chern 類が負となる任意のコンパクト複素多様体は, (スカラ曲率が負の) Kähler-Einstein 計量をもつ. そのような計量は, 定数倍の除いて一意的である. □

C.5.3 例

【Note C.5.6】

1. 任意のコンパクト単連結一様 Kähler 多様体は正スカラ曲率の Kähler-Einstein 計量をもつ. これは, 1987 年時点で, 唯一の正スカラ曲率 Kähler-Einstein 多様体の例である [Besse AL 1987]

C.5.4 Ricci 平坦多様体

【Theorem C.5.7 (Calabi-Yau 多様体)】 コンパクト複素多様体 M に対して, 次の 3 つの条件は同等である.

- i) 第 1 Chern 類がゼロで Kähler 計量をもつ.
- ii) Ricci 平坦な Kähler 計量をもつ.
- iii) 標準直線バンドルに誘導される接続が局所平坦となる Kähler 計量をもつ.

【Theorem C.5.8 (モジュライ自由度)】 (M, J) を Kähler 計量をもち $c_1(M) = 0$ となるコンパクト複素多様体とする. このとき, M の各 Kähler 類ごとに Ricci 平坦な Kähler 計量が一意的に存在する. (M, J) 上の Ricci 平坦な Kähler 計量の全体は, M の Kähler 錐と同型な次元 $h^{1,1}(M)$ の多様体となる. □

C.5.5 Calabi-Yau 多様体

定義と基本性質

【Definition C.5.9 (Calabi-Yau 多様体)】 複素 m 次元コンパクト Kähler 多様体 (M, J, g) のホロノミー群が $SU(m)$ となるとき, M を (非特異) Calabi-Yau 多様体という. □

【Proposition C.5.10 (ホロノミーによる特徴付け)】 (M, J, g) を単連結, 既約, コンパクト, Ricci 平坦な (複素) m 次元 Kähler 多様体とする. このとき, $m \geq 2$ かつ $\text{Hol}(g) = SU(m)$, または m は 4 以上の偶数かつ $\text{Hol}(g) = \text{Sp}(m/2)$ となる. 逆に, (M, J, g) が複素 m 次元コンパクト Kähler 多様体で $\text{Hol}(g)$ が $SU(m)$ か $\text{Sp}(m/2)$ と一致すれば, g は Ricci 平坦, 既約でその基本群は有限群となる. (Joyce DD 2000[45]) □

【Proposition C.5.11 (平行微分形式)】 (M, J, g) をコンパクト, Ricci 平坦な Kähler 多様体, ξ を滑らかな $(p, 0)$ 形式とする. このとき, $d\xi = 0$ と $\nabla\xi = 0$ は同等となる. したがって, $H^{p,0}(M)$ は平行 $(p, 0)$ 形式の空間と同型となる. (Joyce DD 2000[45]) □

【Theorem C.5.12 (Ricci 平坦 Kähler 多様体)】 コンパクトで Ricci 平坦な Kähler 多様体の有限非分岐被覆は, Kähler 多様体の直積 $T \times X_1 \times \cdots \times X_k$ と同型である. ここで, T は平坦な Kähler トーラス, 各 X_k は単連結既約な Riemann 多様体で, Calabi-Yau 多様体か超 Kähler 多様体のいずれか. [[< 岩波数学事典 v4]] □

【Proposition C.5.13 (標準線バンドル)】 (M, J, g) をコンパクト, Ricci 平坦な複素 m 次元 Kähler 多様体とする. このとき, $\text{Hol}(g) \subset SU(m)$ となるための必要十分条件は, M の標準線バンドル K_M が自明となることである. (Joyce DD 2000[45]) □

【Proposition C.5.14 (コホモロジー)】 n 次元 Calabi-Yau 多様体 M に対して, $h^{p,q} = \dim H^{p,q}(M)$ とおくと,

$$h^{0,p} = h^{p,0} = h^{n,p} = h^{p,n} = 0 \quad (0 < p < n), \quad (\text{C.5.2a})$$

$$h^{0,0} = h^{0,n} = h^{n,0} = h^{n,n} = 1. \quad (\text{C.5.2b})$$

(i Joyce DD 2000[45]) □

【Theorem C.5.15 (代数性定理)】 複素次元が 3 以上の Calabi-Yau 多様体は射影的である. (Joyce DD 2000[45]) □

オービフォールドの crepant な特異点解消による構成

【Definition C.5.16 (複素オービフォールド)】 特異な m 次元複素多様体は、各特異点 x の近傍が、適当な有限群 $G_x \subset \mathrm{GL}(m, \mathbb{C})$ に対して \mathbb{C}^m/G_x と同型となるとき、複素オービフォールドと呼ぶ。 x はオービフォールド点、 G_x はオービフォールド群という。 □

【Definition C.5.17 (Kähler オービフォールドと Calabi-Yau オービフォールド)】 複素オービフォールド X に対して、 X の非特異部分における Kähler 計量 g が定義され、 X のオービフォールド点 x の近傍が、適当な G_x 不変な Kähler 計量を持つ \mathbb{C}^m に対し、 \mathbb{C}^m/G_x と等長となるとき、 g をオービフォールド X 上の Kähler 計量とよぶ。 また、 Kähler 計量を与えられた複素オービフォールドを **Kähler オービフォールド** と呼ぶ。 さらに、 m 次元 Kähler オービフォールド (X, J, g) は、 $\mathrm{Hol}(g) = \mathrm{SU}(m)$ となるとき、 **Calabi-Yau オービフォールド** と呼ぶ。 □

【Theorem C.5.18 (Yau の定理のオービフォールド版)】 X を Kähler 計量をもつコンパクト複素オービフォールドとする。 $c_1(X) = 0$ なら、 X 上の各 Kähler 類に対し、 Kähler 計量が一意的に存在する。 (<Joyce2000B) □

【Proposition C.5.19 (Calabi-Yau オービフォールドの特異点)】 Calabi-Yau オービフォールドの特異点集合の複素余次元は 2 以上である。 (<Joyce2000B) □

【Theorem C.5.20 (3次元複素オービフォールドの特異点解消)】 3次元複素オービフォールドは、オービフォールド群が $\mathrm{SL}(3, \mathbb{C})$ に含まれるなら、クレパントな特異点解消をもつ。 (<Joyce2000B) □

【Note C.5.21】 一般に、Kähler オービフォールド X が孤立していない特異点をもつ場合、そのクレパントな特異点解消が Kähler になるとは限らない。しかし、その中の少なくとも一つは Kähler となることが示される。 (<Joyce2000B) □

【Theorem C.5.22 (Calabi-Yau from a toroidal Kähler orbifold)】 (T^6, J, g) を平坦な Kähler トーラス、 Ω をその正則 3 形式、 G を (J, g, Ω) を不変にする T^6 の自己同形からなる有限群とする。このとき、コンパクトな複素オービフォールド $X = T^6/G$ は少なくとも一つのクレパントな Kähler 特異点解消 (\tilde{X}, π) をもつ。さらに、 \tilde{X} には Ricci 平坦な Kähler 計量で、 $\mathrm{Hol}(\tilde{g}) \subseteq \mathrm{SU}(3)$ となるものが存在する。 $\mathrm{Hol}(\tilde{g}) = \mathrm{SU}(3)$ となるための必要十分条件は、 $\pi_1(T^6/G)$ が有限群となることである。 (<Joyce2000B) □

【Example C.5.23 (T^6/\mathbb{Z}_3 のブローアップ)】

1. T^6/\mathbb{Z}_3 : $\zeta = e^{2i\pi/3}$ として、 \mathbb{C}^3 の格子 Λ を

$$\Lambda = \{(a_1 + b_1\zeta, a_2 + b_2\zeta, a_3 + b_3\zeta) \mid a_i, b_j \in \mathbb{Z}\} \quad (\text{C.5.3})$$

とすると, Λ は変換

$$\alpha : (z_1, z_2, z_3) \mapsto (\zeta z_1, \zeta z_2, \zeta z_3) \quad (\text{C.5.4})$$

で不変となる. これより, $G = \{1, \zeta, \zeta^2\}$ として, $X = \mathbb{C}^3/\Lambda/G$ により複素オービフォールドを定義する.

2. オービフォールド点:

$$(\zeta z_1, \zeta z_2, \zeta z_3) = (z_1, z_2, z_3) + (a_1 + b_1\zeta, a_2 + b_2\zeta, a_3 + b_3\zeta) \quad (\text{C.5.5})$$

の解は,

$$z_i = \frac{-2a_i + b_i}{3} - \frac{a_i + b_i}{3}\zeta. \quad (\text{C.5.6})$$

基本領域内のもの限定すると, 各 z_i について

$$z_i = 0, \quad \frac{2 + \zeta}{3}, \quad \frac{1 + 2\zeta}{3} \quad (\text{C.5.7})$$

の3個なので, 特異点は $3^3 = 27$ 個.

3. トポロジー: X のクレパントな特異点解消 $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ はブローアップのみで, $\pi_1(X) = \{1\}$ が言えるので (RM20180104 参照), 上記の一般定理より, \tilde{X} は Calabi-Yau. ブローアップにより各特異点ごとに $\mathbb{C}P^2$ の $(1, 1)$ コサイクルが1個生成されるので, Hodge 数 $h^{1,1}$ は

$$h^{1,1}(\tilde{X}) = 3^2 + 27 = 36. \quad (\text{C.5.8})$$

また, T^6 の $(2, 1)$ コサイクル $dz^i \wedge dz^j \wedge d\bar{z}^k$ で α で不変なものはないので, $h^{2,1}(\tilde{X}) = h^{2,1}(T^6/\mathbb{Z}^3) = 0$.

□

$\mathbb{C}P^m$ の部分多様体による構成

【Theorem C.5.24 ($\mathbb{C}P^m$ の超曲面)】 $f(Z_0, \dots, Z_m)$ を \mathbb{C}^{m+1} の次数 d の同次多項式とする. このとき, $\mathbb{C}P^m$ の超曲面 $X: f = 0$ に対し, $c_1(X) = 0$ となる必要十分条件は $d = m + 1$. □

3次元 Calabi-Yau 多様体の Hodge ダイヤモンド

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & 1 \\
 & & & & & & 0 & 0 \\
 & & & & & & 0 & h^{1,1} & 0 \\
 & & & & & & 1 & h^{2,1} & h^{2,1} & 1 \\
 & & & & & & 0 & h^{1,1} & 0 \\
 & & & & & & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & 1
 \end{array}$$

§C.6

Hodge理論

C.6.1 de Rham コホモロジー

【Definition C.6.1 (de Rham コホモロジー)】 d 次元多様体 M の k 次微分形式の全体 $A^k(M)$ から作られるコチェイン複体を

$$0 \longrightarrow A^0 \xrightarrow{d} A^1 \xrightarrow{d} \cdots A^{k-1} \xrightarrow{d} A^k \xrightarrow{d} A^{k+1} \cdots \quad (\text{C.6.1})$$

のコホモロジー

$$H_{\text{DR}}^k(M) = \text{Ker } d_k / \text{Im } d_{k-1} \quad (\text{C.6.2})$$

を M の de Rham コホモロジーという。 □

【Theorem C.6.2 (de Rham の定理)】 M を (パラコンパクトで) なめらかな多様体とする。

1. M の単体分割を K とすると,

$$\check{H}^*(M, \mathbb{Z}) \cong H^*(K, \mathbb{Z}) \cong H_{\text{sing}}^*(M, \mathbb{Z}).$$

2. $\check{H}^*(M, *)$ は完全なコホモロジー関手で,

$$\check{H}^*(M, *) = H^*(M, *).$$

3. (Poincaré の補題) 定数層 \mathbb{R} の次の層分解は完全である :

$$0 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{A}^0 \xrightarrow{d} \mathcal{A}^1 \xrightarrow{d} \mathcal{A}^2 \rightarrow \cdots .$$

4. \mathcal{A}^p は散布層である。したがって,

$$H^k(M, \mathcal{A}^p) = 0, \quad k \geq 1.$$

5. M 上のコホモロジー環に対して,

$$H_{\text{DR}}^*(M, \mathbb{R}) \cong \check{H}^*(M, \mathbb{R}) \cong H_{\text{sing}}^*(M, \mathbb{R}).$$

□

【Definition C.6.3 (調和形式)】 Riemann 多様体上の微分形式 ω に対して、 $\Delta\omega = 0$ が成り立つとき、 ω を調和形式という。ここで、

$$\Delta = d\delta + \delta d, \quad \delta\omega_p = \pm(-1)^{pd} *d*\omega_p. \quad (\text{C.6.3})$$

である。条件は

$$d\omega = 0, \quad \delta\omega = 0 \quad (\text{C.6.4})$$

と同等である。 p 次調和形式の全体を $\mathcal{H}^p(M)$ で表す。 _____□

【Theorem C.6.4】 H を $A^p(M)$ の L^2 完備化 $\hat{A}^p(M)$ (における調和形式の作る部分空間への射影作用素, G を $HG = GH = 0, H + \Delta G = 1$ を満たす Green 作用素とすると、任意の $\phi \in A^p$ に対して、

$$\phi = H\phi + G\delta d\phi + d\delta G\phi \quad (\text{C.6.5})$$

が成り立つ。特に、

$$H_{\text{DR}}^p(M) \cong \mathcal{H}^p(M) \quad (\text{C.6.6})$$

が成り立つ。 _____□

C.6.2 Dolbeault コホモロジー

【Definition C.6.5 (Dolbeault コホモロジー)】 複素多様体 M 上で大域的に定義された微分形式の線形空間 $A^{p,q} = \Gamma(M, \mathcal{A}^{p,q})$ から定義される双対複体

$$0 \xrightarrow{\bar{\partial}} A^{p,0} \xrightarrow{\bar{\partial}} A^{p,1} \xrightarrow{\bar{\partial}} \dots$$

のコホモロジーを Dolbeault コホモロジーといい、 $H_{\bar{\partial}}^{p,q}(M)$ と表す。 _____□

【Theorem C.6.6 ($\bar{\partial}$ -Poincaré 補題)】 Δ^n を原点を中心とする \mathbb{C}^n の多重円盤とすると、

$$H_{\bar{\partial}}^{p,q}(\Delta^n) = 0, \quad q \geq 1. \quad (\text{C.6.7})$$

_____□

【Theorem C.6.7 (Dolbeault の定理)】 M を複素多様体とする。

1. $\check{H}^*(M, *)$ は完全なコホモロジー関手で、

$$\check{H}^*(M, *) = H^*(M, *).$$

2. ($\bar{\partial}$ -Poincaré 補題) 層 Ω^p の次の層分解は完全である：

$$0 \rightarrow \Omega^p \rightarrow \mathcal{A}^{p,0} \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{A}^{p,1} \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{A}^{p,2} \rightarrow \dots$$

3. $\mathcal{A}^{p,q}$ は散布層である。したがって、

$$H^k(M, \mathcal{A}^{p,q}) = 0, \quad k \geq 1.$$

4. M 上のコホモロジー環に対して、

$$H^q(M, \Omega^p) \cong H_{\bar{\partial}}^{p,q}(M). \quad (\text{C.6.8})$$

□

【Definition C.6.8 ($\bar{\partial}$ -調和形式)】 $A^{p,q}$ の L^2 完備化 $\hat{A}^{p,q}$ として、 $\bar{\partial} : A^{p,q} \rightarrow A^{p,q+1}$ の共役作用素を $\bar{\partial}^* : A^{p,q+1} \rightarrow A^{p,q}$ とおく。このとき、

$$\Delta_{\bar{\partial}} = \bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial} \quad (\text{C.6.9})$$

に対して、 $\Delta_{\bar{\partial}}\phi = 0$ となる微分形式を $\bar{\partial}$ -調和形式という。この条件は、

$$\bar{\partial}\phi = 0, \quad \bar{\partial}^*\phi = 0 \quad (\text{C.6.10})$$

と同等である。 $\bar{\partial}$ -調和 (p, q) 形式の全体を $\mathcal{H}^{p,q}(M)$ と書く。 □

【Theorem C.6.9 (Hodge の定理)】 M をコンパクト複素多様体とする。

1. $\dim \mathcal{H}^{p,q}(M) < \infty$.
2. $\mathcal{H} : A^{p,q}(M) \rightarrow \mathcal{H}^{p,q}(M)$ を関数空間としての垂直射影とすると、次の性質をもつ Green 作用素

$$G : A^{p,q}(M) \rightarrow A^{p,q}(M)$$

が一意的に存在する：

$$G(\mathcal{H}^{p,q}(M)) = 0, \quad (\text{C.6.11})$$

$$\bar{\partial}G = G\bar{\partial}, \quad \bar{\partial}^*G = G\bar{\partial}^*, \quad (\text{C.6.12})$$

$$I = \mathcal{H} + \Delta_{\bar{\partial}}G. \quad (\text{C.6.13})$$

3. 自然な写像 $\mathcal{H}^{p,q}(M) \rightarrow H_{\bar{\partial}}^{p,q}(M)$ は同型である。

□

【Theorem C.6.10 (Kodaira-Serre 双対定理)】 M を n 次元コンパクト複素多様体とする。

1. $H^n(M, \Omega^n) \cong \mathbb{C}$.

2. 双線形写像

$$H^p(M; \Omega^q) \otimes H^{n-p}(M; \Omega^{n-p}) \rightarrow H^n(M; \Omega^n)$$

は非退化である.

□

【Theorem C.6.11 (Hodge 分解)】 コンパクト Kähler 多様体 M の複素係数コホモロジーは次の関係式を満たす :

$$H^r(M, \mathbb{C}) \cong \bigoplus_{p+q=r} H^{p,q}(M), \quad (\text{C.6.14a})$$

$$H^{p,q}(M) \cong \overline{H^{q,p}(M)}. \quad (\text{C.6.14b})$$

□

【Corollary C.6.12】 複素次元 n のコンパクト Kähler 多様体 M に対して,

$$b_r = \dim_{\mathbb{C}} H^r(M, \mathbb{C}), \quad h^{p,q} = \dim_{\mathbb{C}} H^{p,q}(M)$$

とおくとき, 次の関係式が成り立つ :

$$b_r = \sum_{p+q=r} h^{p,q}, \quad (\text{C.6.15})$$

$$h^{p,q} = h^{q,p}, \quad h^{p,q} = h^{n-p, n-q}. \quad (\text{C.6.16})$$

□

§C.7

Einstein 空間

1. コンパクト多様体上では, Einstein 計量のモジュライ空間 $\mathcal{E}(M)$ の次元は局所有限である [Besse A (1987)].
2. $\mathcal{E}(M)$ は計量構造空間 \mathcal{M}/\mathcal{D} 内のなめらかな多様体の解析的 Hausdorff 部分集合である. [Koiso N]

C.7.1 一般論

Banach 多様体 X から Banach 空間 B へのなめらかな写像を F とする :

$$F : X \rightarrow B$$

このとき, $T_x X$ は Banach 空間となり, $dF_x : T_x X \rightarrow B$ は有界写像となる.

【Definition C.7.1 (形式的積分可能性)】 X はその接空間の開集合と同一視できるとする. この仮定のもとで, $x \in X$ の近傍での形式的ベキ級数

$$x(t) = x + tv_1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{t^k}{k!} v_k$$

に対して,

$$F(x(t)) = F(x) + tF_x^1(v_1) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{t^k}{k!} F_x^k(v_1, \dots, v_k)$$

により, $F_x^k(v_1, \dots, v_k)$ ($k = 0, 1, \dots$) を定義する. このとき, $v_1 \in \text{Ker } F_x^1$ に対して, 適当な形式的ベキ級数 $x(t)$ が存在して, $F(x(t)) = 0$ となると, v_1 は形式的に積分可能であるという. □

【Proposition C.7.2】

1. $F_x^k(v_1, \dots, v_k)$ は次の構造をもつ.

$$F_x^k(v_1, \dots, v_k) = F_x^1(v_k) + P_x^k(v_1, \dots, v_{k-1}).$$

ここで, P_x^k は多項式である.

2. $x \in X$ の近傍 U で, $\text{Im } F_y^1 \subset \text{Ker } C_y$ ($y \in U$) となる $T_y X$ から B への線形作用素 C_y が存在し, C_y は y になめらかに依存するとする. このとき,

$$F_x^j(v_1, \dots, v_j) = 0 \quad (0 \leq j \leq k)$$

を満たす v_1, \dots, v_k に対して,

$$C_x(P^{k+1}(v_1, \dots, v_k)) = 0$$

が成り立つ. したがって, $\text{Im } F_x^1 = \text{Ker } C_x$ が成り立てば,

$$F^{k+1}(v_1, \dots, v_{k+1}) = 0$$

を満たす v_{k+1} が存在する.

□

[Definition C.7.3 (障害空間)] 前命題において, $\text{Ker } F_x^1 / \text{Im } C_x$ を, 積分可能条件 C に従う方程式 $F(x) = 0$ の障害空間という. □

C.7.2 Einstein 構造の変形

[Definition C.7.4] コンパクト Riemann 多様体 M に対して,

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &:= \{M \text{ 上のなめらかな Riemann 計量の全体}\}, \\ \mathcal{M}_1 &:= \{g \in \mathcal{M} \mid \int_M \mu_g = 1\}, \\ S^2 M &:= \{M \text{ 上の 2 階対称共変テンソルのバンドル}\} \end{aligned}$$

とおく. このとき, \mathcal{M} の接空間 $T_g \mathcal{M}$ は Hilbert 空間 $L^2(S^2 M, g)$, \mathcal{M}_1 の接空間 $T_g \mathcal{M}_1$ は $\int_M \mu_g \text{Tr}_g h = 1$ となる $h \in T_g \mathcal{M}$ の全体と一致する. □

[Definition C.7.5] 作用素 $\delta_g : S^2 M \rightarrow A^1 M$ およびその共役作用素 $\delta_g^* : A^1 M \rightarrow S^2 M$ を

$$\begin{aligned} (\delta h)_\mu &= \nabla^\nu h_{\nu\mu}, \\ (\delta^* v)_{\mu\nu} &= -\frac{1}{2}(\nabla_\mu v_\nu + \nabla_\nu v_\mu) \end{aligned}$$

により定義する.. □

[Proposition C.7.6]

1. $\text{Im } \delta_g^*$ は $T_g(\mathcal{M}_1)$ の閉部分空間となり, 次の直和分解が成り立つ [Besse AL 1987]:

$$T_g \mathcal{M}_1 = \text{Im } (\delta_g^*) \oplus [T_g \mathcal{M}_1 \cap \text{Ker } \delta_g].$$

(注: $\text{Im } \delta_g^*$ は, g における $\text{Diff}(M)$ 軌道の接空間である.)

2. $T_g\mathcal{M}_1 \cap \text{Ker } \delta_g$ は、つぎの性質をもつ \mathcal{M}_1 の実解析的部分多様体 \mathfrak{S}_g (スライス) の g における接空間となる (Slice Theorem [Ebin DG 1968]):

- \mathfrak{S}_g は $\text{Isom}(M, g)$ の作用に対して不変で, $\phi \in \text{Diff}(M)$ に対して $\phi^*\mathfrak{S}_g \cap \mathfrak{S}_g \neq \emptyset$ なら, $\phi \in \text{Isom}(M, g)$.
- 局所断面 $\chi: \text{Diff}(M)/\text{Isom}(M, g) \rightarrow \text{Diff}(M)$ が剰余類 I_g の近傍で存在し, それから誘導される局所写像 $\text{Diff}(M)/\text{Isom}(M, g) \times \mathfrak{S}_g \rightarrow \mathcal{M}_1$ が g の近傍で局所微分同相となる. 特に, 写像 $\text{Isom}(M, g) \backslash \mathfrak{S}_g \rightarrow \text{Diff}(M) \backslash \mathcal{M}_1$ は g の近傍の Riemann 構造への同相写像を与える.

□

【Definition C.7.7 (Einstein 構造の前モジュライ空間)】 g を M 上の Einstein 計量とする. \mathcal{M}_1 の g におけるスライス \mathfrak{S}_g に含まれる Einstein 計量の全体を, g の近傍における Einstein 構造の前モジュライ空間という. □

【Note C.7.8】 スカラ曲率 $S(g)$ がゼロないし負なら, $\text{Isom}_0(M, g)$ の前モジュライ空間への作用は自明である [Besse AL 1987]. したがって, モジュライ空間は g の近傍で orbifold となる. □

【Definition C.7.9 (Einstein 作用素)】 Einstein 作用素 $E: \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{S}^2M$ を

$$E(g) = \text{Ric}_g - \frac{1}{n}g \int_M \mu_g S_g$$

により定義する. ここで, n は多様体の次元, S_g はスカラ曲率である. このとき, E の線形化 $E'_g = E'_g: T_g\mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{S}^2M$ は次のように表される:

$$2E'_g(h) = D_g^*D_g h - 2\delta_g^*\delta_g h - D_g d(\text{Tr}h) - 2\mathring{R}_g h.$$

ここで, D_g は g に関する共変微分作用素, D_g^* はその形式的共役作用素, \mathring{R} は代数的線形作用素

$$(\mathring{R}h)_{\mu\nu} = -R_{\mu\alpha\nu\beta}h^{\alpha\beta}$$

である. □

【Definition C.7.10 (無限小 Einstein 変形)】 Einstein 計量 g に対して, 次の条件を満たす $h \in T_g\mathcal{M}_1$ を無限小 Einstein 変形といい, その全体を $\epsilon(g)$ で表す:

$$E'_g(h) = 0, \quad \delta_g h = 0, \quad \int_M \mu_g \text{Tr}_g h = 0.$$

□

【Theorem C.7.11】 $h \in \mathcal{S}^2 M$ が無限小 Einstein 変形であるための必要十分条件は,

$$(D_g^* D_g - 2\overset{\circ}{R}_g)h = 0, \quad \delta_g h = 0, \quad \text{Tr}_g h = 0$$

で与えられる. 特に, $\epsilon(g)$ は有限次元である. □

【Theorem C.7.12 (Koiso N 1980)】 g を M 上の Einstein 計量とする. このとき, スライス \mathfrak{S}_g は g を含み次の性質をもつ有限次元実解析的部分多様体 Z を含む:

- i) Z の g における接空間は $\epsilon(g)$ と一致する.
- ii) Z は g の近傍での前モジュライ空間を実解析的部分集合として含む.

さらに, $h \in \epsilon(g)$ を接ベクトルとする前モジュライ空間内のなめらかな曲線が存在するための必要十分条件は, h が形式的積分可能であることである. □

【Note C.7.13】 Einstein 作用素は縮約 Bianchi 恒等式 β_g を積分可能条件としてもつ. この条件に関する障害空間は,

$$\text{Ker } \beta_g = \text{Im } E'_g \oplus \epsilon(g).$$

より, $\epsilon(g)$ と同型となる. したがって, 決してゼロとならない. このため, 前モジュライ空間は Z の真部分集合となることがある. 例えば, 対称空間 $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^{2k}$ の対称計量 g_0 に対して, $\dim \epsilon(g_0) = 4(4k^2 - 1)$ となるが, $[g_0]$ は前モジュライ空間の孤立点となる. □

C.7.3 Einstein 空間の体積

【Theorem C.7.14 (体積値分布の離散性)】 与えられた多様体 M 上の Einstein 構造のモジュライ空間は, 局所弧状連結で, 各連結成分の上で (体積=1 と規格化した) スカラ曲率は一定である. また, 可能なスカラ曲率の値は高々可算個である. □

【Note C.7.15 (モジュライ空間の連結性)】

1. $S^{4n+3} (n \geq 2)$ 上の Einstein 構造のモジュライ空間は, 少なくとも 2 つの連結成分をもつ. また, S^{15} に対しては, 連結成分の数は 3 以上である.
2. 曲率がゼロでない 3 次元定曲率空間の Einstein 構造は一意的である. 3 次元および 4 次元局所平坦コンパクト空間のモジュライ空間は連結である. K3 面と微分同相な 4 次元コンパクト多様体の Einstein 構造のモジュライ空間は連結である.

3. $2m$ -次元 Kähler-Einstein 多様体 (M, J, g) の体積は、規格化条件 $\text{Ric} = \pm(2m-1)g$ のもとで、

$$\text{Vol}(g) = \left(\frac{2\pi}{2m-1} c_1(J) \right)^m$$

で与えられる。特に、 M が $\mathbb{C}P^{m+1}$ ないの次数 $d > m+1$ の超曲面と双正則であるとき、体積は

$$\text{Vol}(g) = d \left(2 \frac{d-m-2}{2m-1} \right)^m \text{Vol}(\mathbb{C}P^m).$$

4. 偶数次元定曲率空間の体積は Euler 特性数に比例し、(曲率で規格化された) その値の全体は離散的な閉集合となる。
5. 奇数次元定曲率空間の (曲率で規格化された) 体積は、正曲率なら、任意の小さい値を取りうる。一方、負曲率の場合は、4次元以上では体積値の全体は離散的な閉集合となる。ただし、3次元の場合は、有限な下限 (≈ 0.98) に収束する集合となる。
6. 正曲率 Einstein 空間の体積は、Bishop の不等式より標準球面の体積以下となる。

□

C.7.4 Einstein 構造の剛性

【Definition C.7.16 (剛性)】 モジュライ空間の孤立点に対応する Einstein 構造は剛性をもつという。 □

【Theorem C.7.17 (Koiso N 1979)】 M 上の Einstein 計量 g に対して、

$$a_0 := \sup \left\{ \langle \mathring{R}h, h \rangle / \|h\|_2^2, h \in C^\infty(S_0^2 M) \right\}$$

とおくとき、条件

$$a_0 < \max \left\{ -\frac{S(g)}{n}, \frac{S(g)}{2n} \right\}$$

が満たされるなら、計量 g は無限小 Einstein 変形を持たない。 □

【Theorem C.7.18 (Bourguignon JP)】 n 次元 Einstein 計量 g の断面曲率の最大値を K_{\max} 、最小値を K_{\min} とするとき、条件

$$K_{\min} > \frac{n-2}{3n} K_{\max}$$

が満たされれば、 g に対応する Einstein 構造は剛性をもつ。 □

【Theorem C.7.19】 負の断面曲率をもつ Einstein 構造は 3 次元以上では剛性をもつ。 □

【Theorem C.7.20】 正曲率の定曲率空間に対応する Einstein 構造は剛性をもつ。 □

【Theorem C.7.21 (Koiso N 1979)】

1. 非コンパクトな局所対称 Einstein 空間は、局所的に 2 次元因子を持たないなら、剛性をもつ。

2. コンパクト既約対称 Einstein 空間は、次のものを除いて剛性をもつ：

- $SU(p+q)/S(U(p) \times U(q))$ ($p \geq q \geq 2$)
- $SU(m)/SO(m)$
- $SU(2m)/Sp(m)$
- $SU(m)$ ($m \geq 3$)
- E_6/F_4 .

□

C.7.5 モジュライ空間の次元

【Theorem C.7.22 (Gallot S 1983)】 直径 d の n 次元 Einstein 多様体 (M, g) が条件 $d^2 K_{\min} \geq k$ を満たせば、その無限小 Einstein 変形の次元 $\dim(\epsilon(g))$ は $\eta(n, k)$ 以下となる。ここで、

$$\eta(n, k) = Nf \left(\frac{2(n-1)\pi^2 - 2nk}{\Gamma(k)^2} \right); \quad N = \frac{n(n+1)}{2} - 1,$$

$$f(x) = \prod_{j=0}^{\infty} \left[1 + \frac{\alpha(n)\beta^j x^{1/2}}{(2\beta^j - 1)^{1/2}} \right]^{2/\beta^j},$$

$$\alpha(n) = \frac{2n^{(n-2)/2n}}{(n-2)^{1/2}} \left(\frac{\text{Vol}(S^{n-1})}{\text{Vol}(S^n)} \right)^{1/n} + 2^{1-1/n}.$$

ただし、 $n \geq 3$ に対して $\beta = n/(n-2)$, $n = 2$ に対して $\beta = 100$. また、

$$\Gamma(\alpha) = \begin{cases} 2^{-1/n} H(\alpha) & \alpha \geq 0, \\ |\alpha|^{1/2n} \left[\int_0^{|\alpha|^{1/2}} \left(\frac{\cosh(t)}{H(\alpha)} + \frac{\sinh(t)}{n|\alpha|^{1/2}} \right)^{n-1} dt \right]^{-1/n} & \alpha < 0, \end{cases}$$

$$H(\alpha) = \begin{cases} \alpha^{1/2} \left(\int_0^{\alpha^{1/2/2}} \cos(t^{n-1}) dt \right)^{-1} & \alpha > 0, \\ 2 & \alpha = 0, \\ |\alpha|^{1/2} \left(\int_0^{|\alpha|^{1/2/2}} \cosh(t^{n-1}) dt \right)^{-1} & \alpha < 0 \end{cases}.$$

□

【Theorem C.7.23 (Gallot S 1981, 1983)】 各次元 n に対して正の数 $\tilde{\alpha}(n)$ が存在して、条件

$$(n-1)S(g) - n^2 K_{\min} \leq \tilde{\alpha}(n)d^2$$

(d は直径) を満たす Einstein 多様体 (M, g) の無限小 Einstein 変形の全体 $\epsilon(g)$ の次元は平坦なトーラスに対する値 $N = n(n+1)/2 - 1$ を超えない。 □

§C.8

G 構造

C.8.1 一般論

【Definition C.8.1 (G 構造)】 M を n 次元多様体, F をそのフレームバンドルとすると, F は M 上の $GL(n, \mathbb{R})$ 主バンドルとなる. このとき, $GL(n, \mathbb{R})$ の Lie 部分群 G に対して, G を構造群とする F の部分主バンドル P を G 構造 (G structure) という. □

【Example C.8.2 (G 構造)】

1. Riemann 多様体 $M^n : G = O(n) \subset GL(n, \mathbb{R})$
2. 概複素多様体 $M^{2m} : G = GL(m, \mathbb{C}) \subset GL(n = 2m, \mathbb{R})$

□

【Definition C.8.3 (固有トーション)】 G を $GL(n, \mathbb{R})$ の Lie 部分群, $V = \mathbb{R}^n$ とする. G の Lie 代数 $\mathfrak{g} \subset V \otimes V^*$ と見なして, 写像 $\sigma : \mathfrak{g} \otimes V^* \rightarrow V \otimes \bigwedge^2 V^*$ を $\sigma(t_{bc}^a) = t_{bc}^a - t_{cb}^a$ により定義する. さらに, これを用いて線形空間 L_1, \dots, L_4 を

$$L_1 = V \otimes \bigwedge^2 V^*, \quad L_2 = \text{Im } \sigma, \quad L_3 = L_1/L_2, \quad L_4 = \text{Ker } \sigma$$

により定義し, 対応する G の L_1, \dots, L_4 への表現を $\rho_j : G \rightarrow GL(L_j)$ とおく.

P を M 上の G 構造とすると, ρ_j は M 上のベクトルバンドル $\rho_j(P)$ を与える. P の接続 ∇ に対してトーション $T(\nabla)$ は $C^\infty(\rho_1(P))$ に, また 2 つの接続 ∇, ∇' に対し, $T(\nabla) - T(\nabla')$ は $C^\infty(\rho_2(P))$ に属する. したがって, $T(\nabla)$ の $C^\infty(\rho_3)$ への像 $T^i(P)$ は P のみに依存し, ∇ の取り方に依存しない. そこで, $T^i(P)$ を G 構造 P の固有トーション (intrinsic torsion) という. また, $T^i(P) = 0$ となるとき, P をトーションのない (torsion free) G 構造という. □

【Definition C.8.4 (トーシヨンのない G 構造)】

1. Riemann 多様体 : $O(n)$ 構造は常に torsion free.
2. 複素構造 : トーシヨンのない $GL(m, \mathbb{C})$ 構造
3. シンプレクティック構造 : トーシヨンのない $Sp(m, \mathbb{R})$ 構造.
4. Kahler 構造 : トーシヨンのない $U(m)$ 構造

□

参考文献

Books and Reviews

- インフレーション

Linde AD: *Particle Physics and Inflationary Cosmology* (Harwood, Chur, Switzerland, 1990) [arXiv:hep-th/0503203].

Liddle AR, Lyth DH: *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure* (Cambridge University Press, Cambridge 2000).

Proceedings of the 22nd IAP Colloquium, "Inflation+25", Paris, June 2006 (Lecture Note in Physics).

Lyth DH: *Particle physics models of inflation* [arXiv:hep-th/0702128]

Kalosh R: *On inflation in string theory* [arXiv:hep-th/0702059]

- 群論と大統一理論

Slansky R: *Group Theory for Unified Model Building*, Phys. Reports **79**, 1-128 (1981).

- 微分幾何学

Kobayashi S, Nomizu K: *Foundations of Differential Geometry*, I & II (Interscience Pub, 1963 & 1969).

Eguchi T, Gilkey PB, Hanson AJ: *Gravitation, Gauge Theories and Differential Geometry*, Phys. Report **66**, No. 6, 213-393 (1980).

Besse AL: *Einstein Manifolds* (Springer, 1987).

Lawson HB Jr., Michelsohn M.-L.: *Spin Geometry* (Princeton Univ. Press, 1989).

Greene BR: *String Theory on Calabi-Yau Manifolds*, TASI-96 summer school on Strings, Fields and Duality [hep-th/9702155].

Joyce DD: *Compact Manifolds with Special Holonomy* (Oxford Univ. Press, 2000).

- 超対称性, 超重力理論

Wess J, Bagger J: *Supersymmetry and Supergravity*, 2nd ed. (Princeton Univ. Press, 1992).

Townsend PK: *Four Lectures on M-theory* [hep-th/9612121]

- Kaluza-Klein コンパクト化

Duff MJ, Nilsson BEW, Pope CN: *Kaluza-Klein Supergravity*, Phys. Reports **130**, 1-142 (1986).

- 超弦理論

Green MB, Schwarz JH, Witten E: *Superstring theory*, 2 vols (CUP, 1987).

Polchinski J: *String Theory*, 2 vols (CUP, 1998).

- フラックスコンパクト化

Gurrieri S, Louis J, Micu A, Waldram D: *Mirror symmetry in generalized Calabi-Yau compactifications*, Nucl. Phys. B654: 61-113 (2003).

Fidanza S, Mianasian R, Tomasiello A: *Mirror Symmetric SU(3)-Structure Manifolds with NS Fluxes*, Comm. Math. Phys. 254: 401-423 (2005).

Grana M, Mianasian R, Petrini M, Tomasiello A: *Supersymmetric backgrounds from generalized Calabi-Yau manifolds*, JHEP 08:046 (2004).

Grana M: *Flux compactifications in string theory: A comprehensive review*, Phys. Reports 423: 91-158 (2006).

Grana M: *Flux compactifications and generalized geometries*, Class. Quantum Grav. 23: S883-926 (2006).

Douglas MR, Kachru S: *Flux Compactification*, Rev. Mod. Phys. 79: 733-96 (2007)

- 4次元有効理論

Grimm TW, Louis J: *The effective action of $N = 1$ Calabi-Yau orientifolds*, Nucl. Phys. B **699**, 387-426 (2004).

- 超弦理論に基づく現象論

Quevedo F: *Lectures on Superstring Phenomenology* [hep-th/9603074]

Nilles HP: *Five Golden Rules for Superstring Phenomenology* [hep-th/0410160]

関連図書

- [1] Alishahiha, M., Silverstein, E. and Tong, D.: DBI in the Sky, *Phys. Rev. D* **70**, 123505 (2004).
- [2] Bars, I.: Compactification of superstrings and torsion, *Phys. Rev. D* **33**, 383–8 (1986).
- [3] Bars, I., Nemeschansky, D. and Yankielowicz, S.: Compactified Superstrings And Torsion, *Nucl. Phys. B* **278**, 632 (1986).
- [4] Baumann, D., Dymarsky, A., Klebanov, I., McAllister, L. and Steinhardt, P.: A Delicate Universe, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 141601 (2007).
- [5] Becker, K. and Becker, M.: M-Theory on Eight-Manifolds, *Nucl. Phys. B* **477**, 155–167 (1996).
- [6] Becker, K., Becker, M., Dasgupta, K. and Green, P.: Compactifications of Heterotic Theory on Non-Kahler Complex Manifolds: I, *JHEP* **0304**, 007 (2003).
- [7] Becker, K., Becker, M., Fu, J.-X., Tseng, L.-S. and Yau, S.-T.: Anomaly Cancellation and Smooth Non-Kahler Solutions in Heterotic String Theory, *Nucl. Phys. B* **751**, 108 (2006).
- [8] Becker, K., Becker, M. and Krause, A.: M-Theory Inflation from Multi M5-Brane Dynamics, *Nucl. Phys. B* **715**, 349–371 (2005).
- [9] Becker, K. and Dasgupta, K.: Heterotic Strings with Torsion, *JHEP* **0211**, 006 (2002).
- [10] Becker, M., Tseng, L.-S. and Yau, S.-T.: Moduli Space of Torsional Manifolds, *Nucl. Phys. B* **736**, 119–34 (2007).

- [11] Bergshoeff, E. and de Roo, M.: The Quartic Effective Action of the Heterotic String and Supersymmetry, *Nucl. Phys. B* **328**, 439–68 (1989).
- [12] Bergshoeff, E., Kallosh, R., Ortín, T., Roest, D. and Van Proeyen, A.: New Formulations of $D = 10$ Supersymmetry and D8-O8 Domain Walls, *Class. Quantum Grav.* **17**, 3359–82 (2001).
- [13] Blanco-Pillado, J., Burgess, C., Cline, J., Escoda, C., Gomez-Reino, M., Kallosh, R. and Li, : Racetrack Inflation, *JHEP* **0411**, 063 (2004).
- [14] Blanco-Pillado, J., et al.: Inflating in a Better Racetrack, *JHEP* **0609**, 002 (2006).
- [15] Buchbinder, E.: Five-Brane Dynamics and Inflation in Heterotic M-Theory, *Nucl. Phys. B* **711**, 314–344 (2005).
- [16] Buchmuller, W., Di Bari, P. and Plumacher, M.: Leptogenesis for pedestrians, *Ann. Phys.* **315**, 305 (2005).
- [17] Candelas, P. and Ossa, de la X.: Moduli Space of Calabi-Yau Manifolds, *Nucl. Phys. B* **355**, 455–81 (1991).
- [18] Candelas, P. and de la Ossa, X. C.: Comments on Conifolds, *Nucl. Phys. B* **342**, 246–268 (1990).
- [19] Candelas, P., Horowitz, G., Strominger, A. and Witten, E.: Vacuum configurations for superstrings, *Nucl. Phys. B* **258**, 46–74 (1985).
- [20] Chen, P., Dasgupta, K., Narayan, K., Shmakova, M. and Zagermann, M.: Brane Inflation, Solitons and Cosmological Solutions: I, *JHEP* **0509**, 009 (2005).
- [21] Chen, X.: Inflation from warped space, *JHEP* **0508**, 045 (2005).
- [22] Chen, X.: Running non-Gaussianities in DBI inflation, *Phys. Rev. D* **72**, 123518 (2005).
- [23] Cornwell, J.: *Supersymmetries and Infinite-Dimensional Algebras, Group Theory in Physics, vol. 3*, Elsevier (1989).
- [24] Cremades, D., Quevedo, F. and Sinha, A.: Warped Tachyonic Inflation in Type IIB Flux Compactifications and the Open-String Completeness Conjecture, *JHEP* **0510**, 106 (2005).

- [25] Dasgupta, K., Hsu, J., Kallosh, R., Linde, A. and Zagermann, M.: D3/D7 brane inflation and semilocal strings, *JHEP* **0408**, 030 (2004).
- [26] Dasgupta, K., Rajesh, G. and Sethi, S.: M Theory, Orientifolds and G-Flux, *JHEP* **9908**, 023 (1999).
- [27] de Wit, B., Smit, D. and Hari Dass, N.: Residual Supersymmetry of Compactified $D = 10$ Supergravity, *Nucl. Phys. B* **283**, 165–91 (1987).
- [28] Dimopoulos, S., Kachru, S., McGreevy, J. and Wacker, J.: N-flation, *hep-th/0507205* (2005).
- [29] Dvali, G. and Tye, S.: Brane Inflation, *Phys. Lett. B* **450**, 72–82 (1999).
- [30] Fernandez, M., Ivanov, S., Ugarte, L. and Villacampa, R.: Non-Kaehler Heterotic String Compactifications with non-zero fluxes and constant dilaton, *arXiv:0804.1648* (2008).
- [31] Fidanza, S., Minasian, and Tomasiello, : Mirror symmetric SU(3) structure manifolds with NS fluxes, *Comm. Math. Phys.* **254**, 401–23 (2005).
- [32] Firouzjahi, H. and Tye, S.-H. H.: Closer towards inflation in string theory, *Phys. Lett. B* **584**, 147–54 (2004).
- [33] Fradkin, E. and Tseytlin, A.: Nonlinear Electrodynamics from Quantized Strings., *Phys. Lett. B* **163**, 123 (1985).
- [34] Fu, J. and Yau, S.: The theory of superstring with flux on non-Kahler manifolds and the complex Monge-Ampere equation, *hep-th/0604063* (2006).
- [35] Giddings, S. B., Kachru, S. and Polchinski, J.: Hierarchies from Fluxes in String Compactifications, *Phys. Rev. D* **66**, 106006 (2002).
- [36] Görlich, L., Kachru, S., Tripathy, P. and Trivedi, S.: Gaugino condensation and nonperturbative superpotentials in flux compactifications, *JHEP* **0412**, 074 (2004).
- [37] Grana, M.: Flux compactifications and generalized geometries (RTN Winter School on Strings, Supergravity and Gauge Theories, Geneva, Switzerland, 16-20 Jan 2006)., *Class. Quantum Grav.* **23**, S883–926 (2006).
- [38] Grana, M.: Flux compactifications in string theory: A Comprehensive review, *Phys. Rep. C* **423**, 91–158 (2006).

- [39] Grana, M., Minasian, R., Petrini, M. and Tomasiello, A.: Supersymmetric backgrounds from generalized Calabi-Yau manifolds, *JHEP* **0408**, 046 (2004).
- [40] Gukov, S., Vafa, C. and Witten, E.: CFT's From Calabi-Yau Four-folds (Erratum: *ibid* B608:477-478 (2001)), *Nucl. Phys. B* **584**, 69–108 (2000).
- [41] Gurrieri, S., Louis, J., Micu, A. and Waldram, D.: Mirror symmetry in generalized Calabi-Yau compactifications, *Nucl. Phys. B* **654**, 61–113 (2003).
- [42] Hsu, J. and Kallosh, R.: Volume Stabilization and the Origin of the Inflaton Shift Symmetry in String Theory, *JHEP* **0404**, 042 (2004).
- [43] Hsu, J., Kallosh, R. and Prokushkin, S.: On Brane Inflation With Volume Stabilization, *JCAP* **0312**, 009 (2003).
- [44] Hull, C.: Anomalies, Ambiguities And Superstrings, *Phys. Lett. B* **167**, 51–5 (1986).
- [45] Joyce, D.: *Compact Manifolds with Special Holonomy*, Oxford Univ. Press (2000).
- [46] Kac, V.: Lie superalgebras, *Adv. Math.* **26**, 8–96 (1977).
- [47] Kachru, S., Kallosh, R., Linde, A., Maldacena, J., McAllister, L. and Trivedi, S. P.: Towards Inflation in String Theory, *JCAP* **0310**, 013 (2003).
- [48] Kachru, S., Kallosh, R., Linde, A. and Trivedi, S.: de Sitter Vacua in String Theory, *Phys. Rev. D* **68**, 046005 (2003).
- [49] Kawasaki, M. and Moroi, T.: Gravitino Production in the Inflationary Universe and the Effects on Big-Bang Nucleosynthesis, *Prog. Theor. Phys.* **93**, 879–900 (1995).
- [50] Kawasaki, M., Takahashi, F. and Yanagida, T.: The Gravitino-overproduction problem in inflationary universe, *Phys. Rev. D* **74**, 043519 (2006).
- [51] Klebanov, I. R. and Strassler, M. J.: Supergravity and a Confining Gauge Theory: Duality Cascades and χ SB-Resolution of Naked Singularities, *JHEP* **0008**, 052 (2000).
- [52] Kodama, H. and Uzawa, K.: Comments on the four-dimensional effective theory for warped compactification, *JHEP* **0603**, 053 (2006).
- [53] Koyama, F., Tachikawa, Y. and Watari, T.: Supergravity Analysis of Hybrid Inflation Model from D3–D7 System, *Phys. Rev. D* **69**, 106001 (2004).

- [54] Maldacena, J. and Nunez, C.: Supergravity description of field theories on curved manifolds and a no go theorem, *Int. J. Mod. Phys. A* **16**, 822–855 (2001).
- [55] Parker, M.: Classification of real simple Lie superalgebra of classical type, *J. Math. Phys.* **21**, 689–97 (1980).
- [56] Salamon, S.: Almost parallel structures, *math.DG0107146* (2000).
- [57] Sen, A.: (2, 0) supersymmetry and space-time supersymmetry in the heterotic string theory, *Nucl. Phys. B* **278**, 289308 (1986).
- [58] Silverstein, E. and Tong, D.: Scalar Speed Limits and Cosmology: Acceleration from D-acceleration, *Phys. Rev. D* **70**, 103505 (2004).
- [59] Strominger, A.: Superstring with torsion, *Nucl. Phys. B* **274**, 253–284 (1986).
- [60] Strominger, A. and Witten, E.: New Manifolds for Superstring Compactification, *Comm. Math. Phys.* **101**, 341–61 (1985).
- [61] Tripathy, P. and Trivedi, S.: Compactification with flux on K3 and tori, *JHEP* **0303**, 028 (2003).
- [62] Witten, E.: New issues in manifolds of $su(3)$ holonomy, *Nucl. Phys. B* **268**, 79 (1986).
- [63] Witten, E.: Nonperturbative Superpotentials in String Theory, *Nucl. Phys. B* **474**, 343–360 (1996).
- [64] Witten, E.: Strong coupling expansion of Calabi-Yau compactification, *Nucl. Phys. B* **471**, 135 (1996).